ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2022 Математика и механика № 75

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54 MSC 35C15
DOI 10.17223/19988621/75/1

О.В. Задорожная, В.К. Кочетков

РЕАЛИЗАЦИЯ ТЕОРИИ ЛЕВНЕРА – КУФАРЕВА В ВОПРОСЕ ПОСТРОЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО МНОЖЕСТВА ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРОГО ВИДА

Данная работа относится к теории дифференциальных уравнений Левнера – Куфарева, являющихся частью геометрической теории функций комплексного переменного. Рассматривается вопрос о реализации известного второго дифференциального уравнения Левнера – Куфарева в вопросе построения параметрического семейства однолистных в единичном круге функций $g(z,t)$ при каждом фиксированном неотрицательном значении параметра t, $t \ge 0$, обобщающих известные параметрические семейства. В статье также используются различные альтернативные подходы, дается их сравнительный анализ. Результаты исследования считаются как одна из форм достаточных условий однолистности регулярных в единичном круге функций.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения*, *уравнение Левнера – Куфарева*, *однолистные функции*, *формула Базилевича.*

Дифференциальные уравнения Левнера – Куфарева имеют большой класс применимости [1–9], а именно, с их помощью решены многие проблемные задачи, ранее считавшиеся не поддающимися исследованию. Интегралы дифференциальных уравнений Левнера – Куфарева рассматриваются как достаточные условия однолистности функций. Уравнения Левнера – Куфарева считаются формой вариационных формул как эффективный метод исследований.

Большой вклад в развитие геометрической теории функций комплексного переменного, создание вариационно-параметрического метода исследования функционалов, рассмотрение случаев интегрируемости дифференциального уравнения Левнера – Куфарева внесли ученые ведущих научных центров Томска, Казани, Краснодара, Санкт-Петербурга, Саратова и др.

Дифференциальное уравнение Левнера – Куфарева. Формула Базилеваича

Введем обозначения:

- C – множество регулярных в $E = \{z : |z| < 1\}$ функций $p(z)$, удовлетворяющих условию $\mathrm{Re}\left[p(z)\right] > 0$ в E;
- P – множество функций $p(z)$ класса C, удовлетворяющих условию $p(0) = 1$;
- $C(T)$ – множество функций $p(z,t)$, принадлежащих классу C при каждом фиксированном $t \in T = \{t : t \ge 0\}$ и непрерывных по $t \in T$;

• $\overline{S}$ – класс выпуклых в E функций $\varphi(z), \varphi(0)=0, \varphi'(0)=1$, отображающих E на выпуклую область D_w;

• S – класс регулярных и однолистных в E функций $f(z)$, удовлетворяющих условию $f(0)=0, f'(0)=1$.

Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -f\,p(f,t), \quad |f|<1, \quad t \in T$$

называется первым дифференциальным уравнением Левнера – Куфарева, а дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{zg_z'}{g_t'} = p(z,t), \;\; p(z,t) \in C(T)$$

– вторым дифференциальным уравнением Левнера – Куфарева.

Рассматривая первое дифференциальное уравнение Левнера – Куфарева И.Е. Базилевич доказал, что функция

$$f(z) = \left(\frac{p_1(0)}{p_0(0)} \int_0^z p_0(z) \cdot z^{p_1(0)-1} e^{\int_0^z \frac{p_1(z)-p_1(0)}{z}dz} dz \right)^{\frac{1}{p_1(0)}} = z + a_1 z^2 + \ldots$$

принадлежит классу S, где $f(z)$ – однозначная ветвь данного разложения, $p_0(z), p_1(z) \in C$.

Функции вида

$$\int \frac{p_0(z)}{z} v(z)dz, v(z) = e^{\int \frac{p_1(z)}{z}dz}$$

назовем составляющими функциями формулы Базилевича, а функцию $p(z,t) \in C(T)$ – ядром уравнения Левнера – Куфарева.

Построение однопараметрического множества однолистных функций вида

$$g(z,t) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k(z) t^k \right)^{\alpha}, \quad t > 0, \qquad (*)$$

сводится к построению ядра $p(z,t)$ класса $C(T)$ с учетом исходной позиции

$$\frac{zg_z'}{g_t'} = \frac{z \sum\limits_{k=0}^{n} a_k'(z) t^k}{\sum\limits_{k=1}^{n} k a_k(z) t^{k-1}} \equiv p(z,t).$$

Работа состоит из трех параграфов. Первый метод изложен в первом параграфе при рассмотрении $g(z,t)$ в (*) последовательно при $m = 1, 2, 3, n$. Кроме того, получено, что

• показатель α зависит от n;

• функции $a_k(z), k = \overline{0,n}$ выражаются в терминах составляющих функций Базилевича.

Во втором параграфе вводится специальное множество функций вида

$$g(z)=\int_0^z h(z)e^{\int_0^z \frac{p(z)-1}{z}dz}dz\,,$$

где $h(z)\in C, p(z)\in P$, и исследуются некоторые свойства:

- однолистность;
- линейность.

Третий параграф посвящен изложению в обзорной форме некоторых альтернативных методов построения ядра в случае функций вида (*) при $n = 3$.

§ 1. Первый способ построения однопараметрического множества однолистных функций вида $w=g(z,t)=\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right\}^{\alpha}$

1.1. Случай множества функций вида $w=g(z,t)=\left(a_0(z)+a_1(z)t\right)^{\alpha}$

Относительно функции вида

$$w=g(z,t)=\left(a_0(z)+a_1(z)t\right)^{\alpha} \qquad (1.1.1)$$

составим отношение

$$\frac{zg'_z}{g'_t}=\frac{za'_0}{a_1}+\frac{za'_1}{a_1}t\equiv p(z,t)\,. \qquad (1.1.2)$$

Проблема сводится к построению функции $p(z,t)$ класса $C(T)$.

Полагая

$$\frac{za'_1}{a_1}=p_1(z)\in C\,, \qquad (1.1.3)$$

$$\frac{za'_0}{a_1}=p_0(z)\in C\,, \qquad (1.1.4)$$

выражение в (1.1.2) перепишем в виде

$$\frac{zg'_z}{g'_t}=p_0(z)+p_1(z)t\equiv p(z,t)\in C(T)\,,$$

являющемся вторым дифференциальным уравнением Левнера – Куфарева.

Проинтегрируем (1.1.3):

$$a_1(z)=e^{\int \frac{p_1(z)}{z}dz}$$

или

$$a_1(z)=z^{p_1(0)}e^{\int_0^z \frac{p_1(z)-p_1(0)}{z}dz}\,. \qquad (1.1.5)$$

Из (1.1.4), с учетом (1.1.5), имеем

$$a_0(z)=\int_0^z \frac{p_0(z)}{z}a_1(z)dz$$

или $$a_0(z)=\int\limits_0^z p_0(z)\cdot z^{p_1(0)-1}\cdot e^{\int\limits_0^z \frac{p_1(z)-p_1(0)}{z}dz}dz\,. \qquad (1.1.6)$$

Объединяя вышеизложенное, сформулируем утверждение.

Утверждение 1. Пусть

1) функции $p_0(z), p_1(z)\in C$;

2) функции $a_1(z), a_0(z)$ вычисляются по формулам (1.1.5), (1.1.6) соответственно.

Тогда однозначная ветвь функции $g(z,t)$

$$w=g(z,t)=\left(a_0(z)+a_1(z)t\right)^{\frac{1}{p_1(0)}}=b_1(t)z+... \qquad (1.1.7)$$

с фиксированным коэффициентом при z в первой степени в разложении $g(z,t)$ по степеням z регулярна и однолистна в E при каждом фиксированном $t\in T$.

Заметим, что функция

$$\Phi(z,t)=\frac{g(z,t)}{g'_z(0,t)}\in S, z\in E\ ,$$

при каждом фиксированном $t\in T$, где $\Phi(z,0)=f(z)$, является функцией И.Е. Базилевича, которая хорошо изучена в геометрической теории функций комплексного переменного и для которой указаны функциональные и геометрические свойства. Поэтому в данной статье ограничимся лишь указанием факта, что И.Е. Базилевич получил свой результат рассмотрением первого дифференциального уравнения Левнера – Куфарева. Фундаментальной же основой данной статьи является второе дифференциальное уравнение Левнера – Куфарева.

Укажем, с учетом (1.1.5), (1.1.6), развернутую запись выражения в (1.1.7)

$$w=g(z,t)=\left(\int\limits_0^z p_0(z)\cdot z^{p_1(0)-1}\cdot e^{\int\limits_0^z \frac{p_1(z)-p_1(0)}{z}dz}dz+tz^{p_1(0)}\cdot e^{\int\limits_0^z \frac{p_1(z)-p_1(0)}{z}dz}\right)^{\frac{1}{p_1(0)}}.$$

При $t=0$ это выражение перепишется в виде

$$g(z,0)=\left(\int\limits_0^z p_0(z)\cdot z^{p_1(0)-1}\cdot e^{\int\limits_0^z \frac{p_1(z)-p_1(0)}{z}dz}dz\right)^{\frac{1}{p_1(0)}},$$

которое при $p_1(0)=1$ примет вид

$$g(z,0)=\int\limits_0^z p_0(z)\cdot e^{\int\limits_0^z \frac{p_1(z)-1}{z}dz}dz$$

или $$g(z)=\int\limits_0^z h(z)\cdot e^{\int\limits_0^z \frac{p(z)-1}{z}dz}dz$$

при $p_0(z)=h(z), p_1(z)=p(z)$.

Замечание. При $t=0$ выражение в (1.1.7) совпадает с ненормированной формулой Базилевича, являющейся функцией в то время, как в (1.1.7) имеем семейство функций, что является некоторым обобщением.

1.2. Случай множества функций вида $w=g(z,t)=\left(a_0(z)+a_1(z)t+a_2t^2\right)^\alpha$

Относительно функции вида

$$w=g(z,t)=\left(a_0(z)+a_1(z)t+a_2t^2\right)^\alpha,\quad \alpha=\frac{1}{2p_2(0)}, \tag{1.2.1}$$

составим отношение

$$\frac{zg'_z}{g'_t}=\frac{za'_0+za'_1t+za'_2t^2}{a_1+2a_2t}\equiv p(z,t). \tag{1.2.2}$$

Проблема состоит в построении функции $p(z,t)$ класса $C(T)$.

Полагая

$$\frac{za'_2}{2a_2}=p_2(z)\in C \tag{1.2.3}$$

или

$$za'_2=2p_2(z)a_2, \tag{1.2.4}$$

интегрированием (1.2.3), (1.2.4) получим

$$a_2(z)=z^{2p_2(0)}\cdot e^{2\int\limits_0^z\frac{p_2(z)-p_2(0)}{z}dz}. \tag{1.2.5}$$

Пусть

$$a_k(z)=\int\limits_0^z\frac{p_k(z)}{z}a_2(z)dz,\ k=0,1,\ p_k(z)\in C, \tag{1.2.6}$$

откуда имеем

$$za'_k=p_ka_2. \tag{1.2.7}$$

Используя (1.2.4), (1.2.7), преобразуем правую часть (1.2.2) к виду

$$p(z,t)=\frac{p_0\cdot a_2+p_1\cdot a_2t+2p_2\cdot a_2t^2}{a_1+2a_2t}. \tag{1.2.8}$$

Разделим на a_2 числитель и знаменатель в (1.2.8)

$$p(z,t)=\frac{p_0+p_1t+2p_2t^2}{\dfrac{a_1}{a_2}+2t}.$$

Разделим теперь числитель на знаменатель последнего выражения

$$p(z,t)=p_2t+\frac{\left(p_1-\dfrac{a_1}{a_2}p_2\right)t+p_0}{2t+\dfrac{a_1}{a_2}}. \tag{1.2.9}$$

Приравнивая к нулю выражение в скобках в правой части данного выражения

$$p_1 - \frac{a_1}{a_2} p_2 = 0,$$

получим соотношение

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{p_1}{p_2},$$

подставив которое в (1.2.9), получим

$$p(z,t) = p_2 t + \frac{p_0}{2t + \frac{p_1}{p_2}} = p_2 t + \frac{1}{2\frac{t}{p_0} + \frac{p_1}{p_0 p_2}}.$$

Это выражение при $p_0 = \frac{1}{p_2}$ примет вид

$$p(z,t) = p_2 t + \frac{1}{2p_2 t + p_1}.$$

Построенная функция $p(z,t)$ принадлежит классу $C(T)$ и, следовательно, уравнение (1.2.2) является вторым дифференциальным уравнением Левнера – Куфарева.

Объединяя вышеизложенное, сформулируем утверждение.

Утверждение 2. Пусть

1) функции $p_1(z), p_2(z) \in C, p_0 = \frac{1}{p_2}$;

2) функция a_2 определяется по формуле (1.2.5);

3) функции $a_1(z), a_0(z)$ вычисляются по формуле (1.2.6) с учетом того, что $p_0 = \frac{1}{p_2}$.

Тогда однозначная ветвь функции $g(z,t)$ в (1.2.1) при $\alpha = \frac{1}{2p_2(0)}$ с фиксированным коэффициентом при z в первой степени в разложении $g(z,t)$ по степеням z регулярна и однолистна в E при каждом фиксированном $t \in T$.

З а м е ч а н и е. При $\frac{p_1}{p_0 p_2} = h_0 \in C$ имеем также $p(z,t) \in C(T)$.

1.3. Случай множества функций вида $w = g(z,t) = \left(a_0(z) + a_1(z)t + a_2 t^2 + a_3 t^3\right)^\alpha$

Построим биективные интегралы вида

$$w = g(z,t) = \left(\sum_{k=0}^{2} a_k(z) t^k + a_3(z) t^3\right)^\alpha, \quad \alpha = \frac{1}{3p_3(0)}, \tag{1.3.1}$$

дифференциального уравнения

$$\frac{zg'_z}{g'_t} = \frac{z\sum_{k=0}^{2} a'_k(z)t^k + za'_3(z)t^3}{\sum_{k=1}^{2} ka_k(z)t^{k-1} + 3a_3(z)t^2} \equiv p(z,t)\ . \tag{1.3.2}$$

Проблема сводится к построению функции $p(z,t)$ класса $C(T)$.

При

$$\frac{za'_3}{3a_3} = p_3(z) \in C \tag{1.3.3}$$

или при

$$za'_3 = 3p_3(z)a_3\,, \tag{1.3.4}$$

в результате интегрирования (1.3.4), имеем

$$a_3(z) = z^{3p_3(0)}\, e^{3\int_0^z \frac{p_3(z)-p_3(0)}{z}dz}\ . \tag{1.3.5}$$

Пусть

$$a_k(z) = \int_0^z \frac{p_k(z)}{z} a_3(z)dz,\ \ p_k \in C,\ \ k = \overline{0,2}\,. \tag{1.3.6}$$

Откуда имеем

$$za'_k = p_k a_3\,. \tag{1.3.7}$$

Подставляя (1.3.4) и (1.3.7) в (1.3.2), с последующим делением на a_3, выражение в правой части (1.3.2) приведем к виду

$$p(z,t) = \frac{\sum_{k=0}^{2} p_k t^k + 3p_3 t^3}{\sum_{k=1}^{2} k\frac{a_k}{a_3}t^{k-1} + 3t^2}\ . \tag{1.3.8}$$

Разделим числитель на знаменатель в (1.3.8)

$$p(z,t) = p_3 t + \frac{p_0 + \sum_{k=1}^{2}\left(p_k - kp_3\frac{a_k}{a_3}\right)t^k}{3t^2 + \sum_{k=1}^{2} k\frac{a_k}{a_3}t^{k-1}}\ . \tag{1.3.9}$$

Приравнивая к нулю выражение в скобках, получим соотношения

$$k\frac{a_k}{a_3} = \frac{p_k}{p_3},\ k = 1,2\ . \tag{1.3.10}$$

При условии (1.3.10), выражение в (1.3.9) примет вид

$$p(z,t) = p_3 t + \frac{p_0}{3t^2 + \frac{p_2}{p_3}t + \frac{p_1}{p_3}}$$

или вид

$$p(z,t) = p_3 t + \frac{p_0 \cdot p_3}{3p_3 t^2 + p_2 t + p_1},$$

а также вид

$$p(z,t) = p_3 t + \frac{1}{3p_3 t^2 + p_2 t + p_1}, \qquad (1.3.11)$$

при $p_0 = \dfrac{1}{p_3}$.

Построенная функция $p(z,t)$ в (1.3.11) принадлежит классу $C(T)$.

Объединяя вышеизложенное, сформулируем утверждение.

Утверждение 3. Пусть

1) функции $p_1(z), p_2(z), p_3(z) \in C, p_0 = \dfrac{1}{p_3}$;

2) функция a_3 определяется по формуле (1.3.5);

3) функции a_0, a_1, a_2 определяются по формулам (1.3.6), с учетом того, что $p_0 = \dfrac{1}{p_3}$.

Тогда однозначная ветвь функции $g(z,t)$ в (1.3.1) при $\alpha = \dfrac{1}{3p_3(0)}$ с фиксированным коэффициентом при z в первой степени в разложении $g(z,t)$ по степеням z, регулярна и однолистна в E при каждом фиксированном $t \in T$.

1.4. Случай множества функций вида $w = g(z,t) = \left(\sum\limits_{k=0}^{3} a_k(z)t^k + a_4(z)t^4\right)^{\alpha}$

Построим биективные интегралы вида

$$w = g(z,t) = \left(\sum_{k=0}^{3} a_k(z)t^k + a_4(z)t^4\right)^{\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{4p_4(0)}, \quad z \in E, \qquad (1.4.1)$$

дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{zg'_z}{g'_t} = \frac{z\sum\limits_{k=0}^{3} a'_k(z)t^k + za'_4(z)t^4}{\sum\limits_{k=1}^{3} ka_k(z)t^{k-1} + 4a_4(z)t^3} \equiv p(z,t). \qquad (1.4.2)$$

Проблема сводится к построению функции $p(z,t)$ класса $C(T)$.

При

$$\frac{za'_4}{4a_4} = p_4(z) \in C \qquad (1.4.3)$$

или при

$$za_4' = 4p_4(z)a_4 \tag{1.4.4}$$

в результате интегрирования (1.4.4) имеем

$$a_4(z) = z^{4p_4(0)}\, e^{4\int_0^z \frac{p_4(z)-p_4(0)}{z}dz}. \tag{1.4.5}$$

Пусть

$$a_k(z) = \int_0^z \frac{p_k(z)}{z} a_4(z)dz, \ p_k \in C, \ k = \overline{0,3}. \tag{1.4.6}$$

Откуда

$$za_k' = p_k a_4, \ k = \overline{0,3}. \tag{1.4.7}$$

Подстановкой (1.4.4), (1.4.7) в (1.4.2), с последующим делением на a_4, выражение в правой части (1.4.2) приведем к виду

$$p(z,t) = \frac{\sum_{k=0}^{3} p_k t^k + 4p_4 t^4}{\sum_{k=1}^{3} k\frac{a_k}{a_4} t^{k-1} + 4t^3}. \tag{1.4.8}$$

Делением числителя на знаменатель в (1.4.8) получим

$$p(z,t) = p_4 t + \frac{p_0 + \sum_{k=1}^{3}\left(p_k - kp_4\frac{a_k}{a_4}\right)t^k}{4t^3 + \sum_{k=1}^{3} k\frac{a_k}{a_4} t^{k-1}}. \tag{1.4.9}$$

Полагая равными нулю выражения в скобках в числителе (1.4.9), последующими арифметическими операциями находим соотношения

$$k\frac{a_k}{a_4} = \frac{p_k}{p_4}, \ k = \overline{1,3}. \tag{1.4.10}$$

При условии (1.4.10), выражение в (1.4.9) преобразуем к виду

$$p(z,t) = p_4 t + \frac{p_0}{4t^3 + \frac{p_3}{p_4}t^2 + \frac{p_2}{p_4}t + \frac{p_1}{p_4}}$$

или к виду

$$p(z,t) = p_4 t + \frac{p_0 \cdot p_4}{4p_4 t^3 + p_3 t^2 + p_2 t + p_1}, \tag{1.4.11}$$

при $p_0 = \dfrac{1}{p_4}$.

Функция $p(z,t)$ в (1.4.11) принадлежит классу $C(T)$.

Объединяя вышеизложенное, сформулируем утверждение.

Утверждение 4. Пусть

1) функции $p_1(z), p_2(z), p_3(z), p_4(z) \in C, p_0 = \dfrac{1}{p_4}$;

2) функция a_4 определяется по формуле (1.4.5);

3) функции a_0, a_1, a_2, a_3 определяются по формулам (1.4.6) с учетом того, что $p_0 = \dfrac{1}{p_4}$.

Тогда однозначная ветвь функции $g(z,t)$ в (1.4.1) при $\alpha = \dfrac{1}{4p_4(0)}$ с фиксированным коэффициентом при z в первой степени в разложении $g(z,t)$ по степеням z регулярна и однолистна в E при каждом фиксированном $t \in T$.

1.5. Случай множества функций вида

$$w = g(z,t) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k(z)t^k + a_n(z)t^n \right)^{\frac{1}{np_n(0)}}$$

Построим биективные интегралы вида

$$w = g(z,t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z)t^k + a_n(z)t^n, \ z \in E, \ t \in T \tag{1.5.1}$$

дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{zg'_z}{g'_t} = \frac{z\sum\limits_{k=0}^{n-1} a'_k(z)t^k + za'_n(z)t^n}{\sum\limits_{k=1}^{n-1} ka_k(z)t^{k-1} + na_n(z)t^{n-1}} \equiv p(z,t). \tag{1.5.2}$$

Проблема сводится к построению функции $p(z,t)$ класса $C(T)$.

При

$$\frac{za'_n}{na_n} = p_n(z) \in C \tag{1.5.3}$$

или при

$$za'_n = np_n(z)a_n \tag{1.5.4}$$

в результате интегрирования (1.5.4) получаем

$$a_n(z) = z^{np_n(0)} \cdot e^{n\int\limits_0^z \frac{p_n(z)-p_n(0)}{z}dz}. \tag{1.5.5}$$

Пусть

$$a_k(z) = \int\limits_0^z \frac{p_k(z)}{z} a_n(z)dz, \ p_k \in C, k = \overline{0, n-1}. \tag{1.5.6}$$

Откуда имеем

$$za'_k = p_k a_4, k = \overline{0, n-1}. \tag{1.5.7}$$

Подстановкой (1.5.4), (1.5.7) в (1.5.2) с последующим делением на a_n выражение в правой части (1.5.2) приведем к виду

$$p(z,t)=\frac{np_n t^n+\sum_{k=0}^{n-1}p_k t^k+p_0}{nt^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}k\frac{a_k}{a_4}t^{k-1}}. \tag{1.5.8}$$

Делением числителя на знаменатель в (1.5.8) получим

$$p(z,t)=p_n t+\frac{\sum_{k=1}^{n-1}\left(p_k-kp_4\frac{a_k}{a_n}\right)t^k+p_0}{nt^n+\sum_{k=1}^{n-1}k\frac{a_k}{a_n}t^{k-1}}. \tag{1.5.9}$$

Приравнивая к нулю выражения в скобках в числителе (1.5.9), с последующими арифметическими операциями, находим соотношения

$$k\frac{a_k}{a_n}=\frac{p_k}{p_n},\ k=\overline{1,n-1}. \tag{1.5.10}$$

При условии (1.5.10), выражение в (1.5.9) преобразуем к виду

$$p(z,t)=p_n t+\frac{p_0}{nt^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{p_k}{p_n}t^{k-1}}.$$

Откуда умножением на p_n числителя и знаменателя последнего выражения, полагая $p_0=\frac{1}{p_n}$, будем иметь

$$p(z,t)=p_n t+\frac{1}{np_n t^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}p_k t^{k-1}}. \tag{1.5.11}$$

Функция $p(z,t)$ в (1.5.11) принадлежит классу $C(T)$.

Объединяя вышеизложенное, сформулируем общее утверждение.

Утверждение (общее). Пусть

1) функции $p_k(z)\in C, k=\overline{1,n}\in C, p_0=\frac{1}{p_n}$;

2) функция a_n определяется по формуле (1.5.5);

3) функции $a_k, k=\overline{0,n-1}$ определяются по формулам (1.5.6) с учетом того, что $p_0=\frac{1}{p_n}$.

Тогда однозначная ветвь функции $g(z,t)$ в (1.5.1) при $\alpha=\frac{1}{np_n(0)}$ с фиксированным коэффициентом при z в первой степени в разложении $g(z,t)$ по степеням z, регулярна и однолистна в E при каждом фиксированном $t\in T$.

§ 2. Подмножество функций типа Базилевича с фиксированной выпуклой функцией и некоторые его свойства

Обозначим через:

B – ненормированное в E множество функций вида

$$g(z)=\int_0^z h(z)e^{\int_0^z \frac{p(z)-1}{z}dz}dz\,, \tag{2.2.1}$$

где $h(z)\in C, p(z)\in P$;

B_φ – множество функций $g(z)\in B$ с фиксированной производной

$$\varphi'(z)=e^{\int_0^z \frac{p(z)-1}{z}dz} \tag{2.2.2}$$

выпуклой функции

$$\varphi(z)=\int_0^z e^{\int_0^z \frac{p(z)-1}{z}dz}dz\,. \tag{2.2.3}$$

Заметим, что записанная как определенный интеграл функция $g(z)$ в (2.2.1) может быть представлена как неопределенный интеграл в виде

$$g(z)=\int \frac{h(z)}{z}e^{\int\frac{p(z)}{z}dz}dz\,. \tag{2.2.4}$$

Аналогично, в случае (2.2.2) имеем

$$\varphi'(z)=\frac{e^{\int\frac{p(z)}{z}dz}}{z}\,. \tag{2.2.5}$$

Запись в виде (2.2.4), (2.2.5) удобна при выкладках.

Приведем доказательство однолистности функции $g(z)$ в (2.2.1), отличное от ранее известных вариантов.

Теорема 2.1. Пусть $h(z)\in C, p(z)\in P$. Тогда функция $g(z)$ вида (2.2.1) регулярна и однолистна в E.

Доказательство. Пусть $w=\varphi(z):E\to D_w$ есть выпуклая функция вида (2.2.3), отображающая единичный круг $E=\{z:|z|<1\}$ на выпуклую область D_w. Так как функция $w=\varphi(z)$ однолистна в E, то существует обратная функция $z=\varphi^{-1}(w):D_w\to E$, которая определена и однолистна в выпуклой области D_w.

Пусть точкам $z_1,z_2\in E, z_1\neq z_2$ соответствуют точки $w_1=\varphi(z_1)\in D_w$, $w_2=\varphi(z_2)\in D_w$, $w_1\neq w_2$.

Обратно, точкам $w_1,w_2\in D_w, w_1\neq w_2$ соответствуют точки $z_1=\varphi^{-1}(w_1)$, $z_2=\varphi^{-1}(w_2)$, $z_1\neq z_2$ (в силу однолистности).

С учетом (2.2.1), (2.2.2) рассмотрим разность при $z_1\neq z_2$, $z_1,z_2\in E$,

$$g(z_2)-g(z_1)=\int_{w_1}^{w_2} h(\varphi^{-1}(\varphi))d\varphi\,. \tag{2.2.6}$$

В силу регулярности подынтегральных функций, интеграл в правой части (2.2.6) не зависит от пути интегрирования в D_w, а зависит только от концевых точек w_1, w_2, соответствующих z_1, z_2. В качестве пути интегрирования в D_w возьмем отрезок с концевыми точками w_1, w_2:

$$w(t) = (1-t)w_1 + tw_2,\ 0 \le t \le 1. \tag{2.2.7}$$

Заметим, что $w(0) = w_1, w(1) = w_2$ и

$$d\varphi = dw(t) = (w_2 - w_1)dt. \tag{2.2.8}$$

С учетом (2.2.7), (2.2.8) выражение в (2.2.6) перепишется в виде

$$g(z_2) - g(z_1) = (w_2 - w_1)\int_0^1 \tilde{h}(t)dt. \tag{2.2.9}$$

Так как по условию $h(z) \in C$, то $\operatorname{Re}[h(z)] > 0$ в E (по определению). В этом случае $\operatorname{Re}[\tilde{h}(z)] > 0$ и, следовательно, правая часть в (2.2.9) отлична от нуля. В силу этого, с учетом (2.2.9), имеем

$$g(z_2) - g(z_1) \ne 0, g(z_2) \ne g(z_1),$$

при любых $z_1, z_2 \in E, z_1 \ne z_2$, а это означает, что функция $g(z)$ вида (2.2.2) однолистна в E. Теорема 2.1. доказана.

Линейность класса B_φ

Известно, что в общем случае класс однолистных функций не является линейным множеством, что является препятствием при решении некоторых экстремальных задач геометрической теории функций комплексного переменного, теории однолистных функций и конформных отображений. Поэтому указание и исследование линейных подклассов класса однолистных функций представляет научный интерес.

Теорема 2.2. Класс B_φ является линейным подмножеством.

Доказательство. Пусть $g_1(z), g_2(z) \in B_\varphi$, c_1, c_2 – произвольные неотрицательные числа.

Рассмотрим

$$c_1 g_1(z) + c_2 g_2(z) = c_1\int_0^z p_1(z)d\varphi + c_2\int_0^z p_2(z)d\varphi = \int_0^z (c_1 p_1(z) + c_2 p_2(z))d\varphi. \tag{2.2.10}$$

Полагая

$$c_1 p_1(z) + c_2 p_2(z) = p(z), \tag{2.2.11}$$

имеем $p(z) \in C$. В этом случае, с учетом (2.2.11), правая часть в (2.2.10) принадлежит классу B_φ. Следовательно, левая часть тоже принадлежит классу B_φ, что означает линейность множества B_φ. Теорема 2.2 доказана.

Следствие 1. Сумма

$$g(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k g_k(z), c_k \ge 0, z \in E,$$

функций $g_k(z) \in B_\varphi, k = \overline{0,n}$, является функцией класса B_φ.

Следствие 2. Сумма сходящегося в E ряда

$$g(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k g_k(z), c_k \ge 0, k=\overline{0,\infty},$$

функций $g_k(z)\in B_\varphi, k=\overline{0,\infty}$, является функцией класса B_φ.

Следствие 3. Сумма

$$g(z,t)=\sum_{k=0}^{n} c_k g_k(z)t^k, 0\le t\le t_0<\infty, c_k>0,$$

функций $g_k(z)\in B_\varphi, k=\overline{0,n}$, является функцией класса B_φ при каждом t, $0\le t\le t_0<\infty$.

§ 3. Альтернативные методы построения однопараметрического множества однолистных функций вида $w=g(z,t)=\left(\sum_{k=0}^{3} a_k t^k\right)^{\alpha}$

Для функции вида

$$w=g(z,t)=\left(\sum_{k=0}^{3} a_k t^k\right)^{\alpha} \tag{3.3.1}$$

составим соотношение

$$\frac{zg'_z}{g'_t}=\frac{\sum_{k=0}^{3} za'_k t^k}{s}=p(z,t), \tag{3.3.2}$$

где

$$s=\sum_{k=1}^{3} k a_k t^{k-1}. \tag{3.3.3}$$

Проблема состоит в построении функции $p(z,t)$ класса $C(T)$.

Полагая

$$\frac{za'_3}{3a_3}=p_3\in C, \tag{3.3.4}$$

$$\frac{za'_2-2a_2p_3}{3a_3}=p_2\in C, \tag{3.3.5}$$

$$za'_1-a_1p_3-2a_2p_2=a, \tag{3.3.6}$$

$$za'_0-a_1p_2=b, \tag{3.3.7}$$

делением числителя на знаменатель в (3.3.2) получим, с учетом (3.3.3), (3.3.6), (3.3.7),

$$p(z,t)=p_3t+p_2+\frac{at+b}{s}. \tag{3.3.8}$$

Очередная проблема состоит в построении функции

$$p_1(z,t) = \frac{at+b}{s} \tag{3.3.9}$$

класса $C(T)$ при $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Рассмотрим сначала выражение в (3.3.8) при $a = 0$, $b = 0$.

При

$$a = za_1' - a_1 p_3 - 2a_2 p_2 = 0\,; \tag{3.3.10}$$

$$b = za_0' - a_1 p_2 = 0 \tag{3.3.11}$$

выражение в (3.3.8) перепишется в виде

$$\frac{zg_z'}{g_t'} = p_3 t + p_2 \in C(T)\,. \tag{3.3.12}$$

В данном случае уравнение (3.3.2) в виде (3.3.12) является уравнением Левнера – Куфарева. Функции $a_3(z), a_2(z), a_1(z), a_0(z)$ в (3.3.1) определяются простейшим интегрированием выражений в (3.3.4), (3.3.5), (3.3.10), (3.3.11).

Пусть теперь выражения a и b отличны от нуля $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Проблема построения функции класса $C(T)$ в случае функции $p_1(z,t) = \dfrac{at+b}{s}$ решаема и имеет несколько вариантов. В обзорной форме укажем один из них.

Преобразуем

$$p_1(z,t) = \frac{1}{\dfrac{s}{at+b}}\,. \tag{3.3.13}$$

Делением s на $at+b$ и введением новой функции $h_1 \in p$ построим выражение вида

$$\frac{s}{at+b} = h_1 t + \frac{\alpha t + \beta}{at+b}\,. \tag{3.3.14}$$

Делением $\alpha t + \beta$ на $at + b$, преобразованием и введением новых функций $h_2, h_3, h_4 \in p$ строим с учетом (3.3.14) выражение вида

$$\frac{s}{at+b} = h_1 t + h_2 + \frac{1}{h_3 t + h_4}\,. \tag{3.3.15}$$

Подставляя (3.3.15) в (3.3.13), получим

$$p_1(z,t) = \frac{1}{h_1 t + h_2 + \dfrac{1}{h_3 t + h_4}}\,. \tag{3.3.16}$$

Таким образом, выражение (3.3.8), с учетом (3.3.16), запишется как

$$p(z,t) = p_3 t + p_2 + \frac{1}{h_1 t + h_2 + \dfrac{1}{h_3 t + h_4}}\,.$$

З а м е ч а н и е . В дополнение к сказанному, заметим, что конструирование $p_1(z,t)$ в (3.3.9) можно рассмотреть в случае, когда $a = 0$, $b \neq 0$, получим

$$p_1(z,t) = \frac{b}{s},$$

а также в случае, когда $a \neq 0$, $b = 0$,

и также в виде $$p_1(z,t) = \frac{at+b}{s} = \frac{k}{h_1 t + h_2}, \quad k > 0,$$

где $h_1, h_2 \in P$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров И.А.* Методы геометрической теории аналитических функций. Томск.: Томский государственный университет, 2001. 220 с.
2. *Александров И.А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. – М.: Наука, 1976. – 344 с.
3. *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. М,: МЦНМО, 2009. 672 с.
4. *Базилевич И.Е.* Об одном случае интегрируемости в квадратурах уравнения Левнера – Куфарева // Матем. сб. – 1995. – Т. 37. – № 3. – С. 471–476.
5. *Горяйнов В.В.* Эволюционные семейства конформных отображений с неподвижными точками и уравнение Лёвнера – Куфарева // Матем. сб. 2015. Т. 206. № 1. С. 39–68.
6. *Десятский С.П.* О достаточных признаках интегрируемости в квадратурах дифференциального уравнения Лёвнера – Куфарева // Тезисы докладов VIII региональной научно-технической конференции, посвящ. 10-летию независимости Украины / ПГТУ. Мариуполь, 2001. Т. 2. С. 105. – URL: http://eir.pstu/handle/123456789/32751.
7. *Задорожная О.В., Кочетков В.К.* Структура интегралов второго дифференциального уравнения Левнера – Куфарева в частном случае // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 55. С. 12–21. DOI: 10.17223/ 19988621/55/2.
8. *Задорожная О.В., Кочетков В.К.* Некоторые методы исследования интегрируемости обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка специального вида // Математика и математическое моделирование. 2019 – № 2. – С. 48–62. DOI: 10.24108/mathm.0219.0000177.
9. *Задорожная О.В., Кочетков В.К.* Альтернативные методы интегрируемости обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения первого порядка с полиномиальной частью // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2019. Т. 16. № 2. С. 6–14. DOI: 10.31429/vestnik-16-2-6-14.
10. *Задорожная О.В., Кочетков В.К.* Интегральное представление решений одного обыкновенного дифференциального уравнения и уравнения Левнера – Куфарева // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 67. С. 28–39. DOI 10.17223/19988621/67/3.
11. *Сорокин А.С.* Распространение обобщённого уравнения Лёвнера на отображения, однолистные в конечносвязных областях // Вестник КузГТУ. 2014. № 1. С. 104–105.
12. *Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.* On recent advances in boundary value problems in the plane // Укр. мат. вiсник. 2016. Т. 13. № 2. С. 167–212.

Статья поступила 06.10.2021

Zadorozhnaya O.V., Kochetkov V.K. (2022) APPLICATION OF THE LOEWNER–KUFAREV THEORY TO THE CONSTRUCTION OF A PARAMETRIC SET OF UNIVALENT FUNCTIONS OF A CERTAIN FORM *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 75. pp. 5–22

DOI 10.17223/19988621/75/1

Keywords: differential equations, integral representations of solutions, one-leaf functions, conformal mappings.

This work relates to the theory of Loewner–Kufarev differential equations, which are a part of the geometric function theory. We apply the well-known second Loewner–Kufarev differential equation to construct a parametric family of univalent functions in the unit disk $g(z, t)$ for each fixed non-negative value of the parameter t generalizing the known parametric families. The article also uses various alternative approaches and provides their comparative analysis. The results of the study can be considered as one sufficient condition for the uniqueness of regular functions in a unit disk. Leading Russian scientists made a great contribution to the development of the geometric function theory based the variational-parametric method for studying functionals and found some Loewner–Kufarev differential equations.

There are three sections in the work. The first one applies the Loewner–Kufarev equation to construct a parametric set of univalent functions of a certain type. In the second section, we introduce a special class of regular functions in the unit disk with a fixed convex function, and prove the univalence property for functions of this class. Here we also show one more method for constructing a parametric family of univalent functions different from the methods described in the first paragraph. The third section is devoted to alternative methods for constructing one-parameter sets of univalent functions.

AMS Mathematical Subject Classification: 35C15

Olga V. ZADOROZHNAYA (Institute for the Development of Education of the Krasnodar Territory, Krasnodar, Russia). E-mail: ovz_70@mail.ru

Vladimir K. KOCHETKOV (Doctor of Physics and Mathematics, Kalmyk State University, Elista, Russia). E-mail: kvk1106@mail.ru

REFERENCES

1. Aleksandrov I.A. (2001) *Metody geometricheskoy teorii analiticheskikh funktsiy* [Methods of the geometric function theory]. Tomsk: Tomsk State University.
2. Aleksandrov I.A. (1976) *Parametricheskiye prodolzheniya v teorii odnolistnykh funktsiy* [Parametric continuations in the theory of univalent functions]. Moscow: Nauka.
3. Arnold V.I., Gusein-Zade S.M., Varchenko A.N. (1985) *Singularities of Differentiable Maps*. Springer.
4. Bazilevich I.E. (1955) Ob odnom sluchaye integriruyemosti v kvadraturakh uravneniya Lëv-nera – Kufareva [On a case of integrability in quadratures of the Loewner–Kufarev equation] *Matematicheskii Sbornik*. 37(3). pp. 471–476.
5. Goryaynov V.V. (2015) Evolyutsionnyye semeystva konformnykh otobrazheniy s nepod-vizhnymi tochkami i uravneniye Levnera–Kufareva [Evolutionary families of conformal maps with fixed points and the Loewner–Kufarev equation]. *Matematicheskii Sbornik*. 206(1). 39–68.
6. Desyatsky S.P. (2001) On sufficient criteria of integrability in quadratures of the Loewner–Kufarev differential equation. *Abstracts of the 8th Regional Scientific and Technical Conference Dedicated to the 10th Anniversary of Independence of Ukraine*, *vol. 2. Mariupol*, *2001. Mariupol: Pryazovskyi State Technical University*, p. 105. Access mode: http://eir.pstu/ handle/123456789/32751.

7. Zadorozhnaya O.V., Kochetkov V.K. (2018) Struktura integralov vtorogo differentsial'nogo uravneniya Lëvnera – Kufareva v chastnom sluchaye [The structure of integrals of the second Loewner–Kufarev differential equation in a particular case]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 55. pp. 12–21. DOI: 10.17223/19988621/55/2.
8. Zadorozhnaya O.V., Kochetkov V.K. (2019) Nekotoryye metody issledovaniya integriruyemosti obyknovennogo nelineynogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka spetsial'nogo vida [Some methods of studying integrability of an ordinary nonlinear second order differential equation of a special kind]. *Matematika i matematicheskoye modelirovaniye*. 2. pp. 48–62. DOI: 10.24108/mathm.0219.0000177.
9. Zadorozhnaya O.V., Kochetkov V.K. (2019) Al'ternativnyye metody integriruyemosti obyknovennogo nelineynogo differentsial'nogo uravneniya pervogo poryadka s polinomial'noy chast'yu [Alternative methods of integrability of an ordinary nonlinear differential equation of the first order with a polynomial part]. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*. 16(2). pp. 6–14. DOI: 10.31429/vestnik-16-2-6-14.
10. Zadorozhnaya O.V., Kochetkov V.K. (2020) Integral'noye predstavleniye resheniy odnogo obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya i uravneniya Levnera – Kufareva [Integral representation of solutions of an ordinary differential equation and the Loewner–Kufarev equation] *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 67. pp. 28–39. DOI: 10.17223/19988621/67/3.
11. Sorokin A.S. (2014) Rasprostraneniye obobshchënnogo uravneniya Lëvnera na otobrazheniya, odnolistnyye v konechnosvyaznykh oblastyakh [Extension of the generalized Loewner equation to univalent maps in finitely connected domains]. *Vestnik Kuzbasskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. 1. pp. 104–105.
12. Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V. (2017) On recent advances in boundary-value problems in the plane. *Journal of Mathematical Sciences*. 221(5). pp. 638–670.

Received: October 6, 2021