

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/75/7

Д.А. Иваницhev

**МЕТОД ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ КРУЧЕНИЯ  
ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ<sup>1</sup>**

Представлена методика определения напряженно-деформированного состояния анизотропных тел вращения, возникающего от действия скручивающих поверхностных сил. Теория представляет собой развитие метода граничных состояний. Решены задачи кручения для тел вращения разнообразной формы, когда на поверхности заданы усилия, перемещения или совокупность того и другого. Полученные характеристики упругого поля зависят от двух координат и имеют аналитический вид.

**Ключевые слова:** *метод граничных состояний, трансверсально-изотропные материалы, задача кручения, пространство состояний, краевые задачи.*

Большинство задач кручения для анизотропных тел решаются с использованием принципа Сен-Венана, т.е. характеристики напряженно-деформированного состояния вблизи мест приложения нагрузок в рассмотрение не берутся. Однако для расчета напряжений для проверки прочности материала на различные виды поверхностного разрушения необходимо иметь точную картину распределения напряжений вблизи поверхности тела.

Задачи кручения в механике твердого тела изучены в полной мере. В области решения задач для усложненных сред, можно выделить следующие работы. Так, авторами [1] исследовалась задача кручения радиально-неоднородной транслопной оболочки. Асимптотические решения получены с помощью метода однородных решений. В работе [2] представлены соотношения теории трансляционной анизотропии при кручении. Исследовались деформации тела.

Задачам кручения для неоднородных, нелинейных и слоистых тел посвящен ряд работ. Так, в [3] получено аналитическое решение задачи о действии крутящего момента и осевой силы на цилиндрически ортотропный цилиндр. Авторами [4] проведено исследование распределения напряжений в задаче кручения для сплошного нелинейного цилиндрически ортотропного цилиндра с зажатыми торцами. В работе [5] рассмотрена осесимметричная контактная задача о кручении штампа о транслопное полупространство с неоднородным покрытием. С помощью интегральных преобразований задача сводится к решению интегрального уравнения. В [6] приведены основные соотношения теории идеальной пластичности при кручении анизотропных призматических и цилиндрических стержней.

Конечно-элементное представление решения просматривалось в следующих работах. Авторы [7] численно исследовали кручение сплошных круговых анизотропных цилиндров, вырезанных из сплавов с пониженной сопротивляемостью деформациям ползучести. Моделирование показало, что возникает депланация

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Липецкой области в рамках научного проекта № 19-41-480003 "p\_a".

поперечных сечений. Также рассмотрено кручение пластин. В работе [8] с помощью МКЭ разработан алгоритм, позволяющий определять НДС многослойных стержней произвольного сечения при кручении. Рассмотрены задачи деформирования стержней ромбовидной формы и формы компрессорной лопатки.

Для трансверсально-изотропных тел вращения методом граничных состояний решены осесимметричные краевые задачи с участием массовых сил [9–11]. Решения строятся на основе вариационного принципа Лагранжа. Полученные упругие поля одновременно удовлетворяют условиям на поверхности тела и массовым силам.

Целью данной работы является развитие метода граничных состояний на класс задач кручения ограниченных трансверсально-изотропных тел вращения. В качестве скручивающих условий на границе тела задаются усилия (первая основная задача), перемещения (вторая основная задача) и усилия или перемещения на разных частях границы (основная смешанная задача).

### 1. Постановка задачи

Рассматривается упругое равновесие трансверсально-изотропного тела, ограниченного одной или несколькими коаксиальными поверхностями вращения под действием скручивающих условий: поверхностных усилий  $p_{vi} = \{0, p_\theta, 0\}$  (рис. 1),

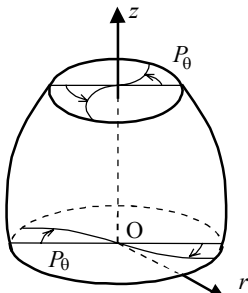


Рис. 1. Трансверсально-изотропное тело вращения  
Fig. 1. Transversely isotropic body of revolution

перемещений точек границы  $v_{vi} = \{0, v, 0\}$  или когда на одной части поверхности  $S_p$  заданы усилия, а на части поверхности  $S_u$  – перемещения. Заданные условия не зависят от угла  $\theta$  в цилиндрической системе координат  $r, \theta, z$ . Ось анизотропии совпадает с геометрической осью вращения  $z$ .

В первой основной задаче усилия на поверхности тела могут быть распределены по различным законам, но должны быть уравновешены в интегральном смысле.

Необходимо восстановить напряженно-деформированное состояние, возникающее в теле под действием внешних факторов.

### 2. Определяющие соотношения

В случае кручения трансверсально-изотропного тела вращения происходит только деформация меридиональных сечений, перемещения точек тела вдоль осей  $r$  и  $z$  не происходит:  $\mathbf{u} = \{0, v, 0\}$ , поэтому компоненты тензора напряжения  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{zr}$  и компоненты тензора деформации  $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{zr}$  равны нулю. В связи с этим определяющие соотношения [12] для трансотропной среды упрощаются. Компоненты упругого поля (не зависят от угла  $\theta$ ) при отсутствии объемных сил должны удовлетворять следующим соотношениям.

Уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r} = 0. \quad (1)$$

Соотношения Коши:

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (2)$$

Уравнения совместности деформаций:

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r \varepsilon_{z\theta})}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial z} \right) = 0; \quad (3)$$

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{z\theta}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial z^2} = 0.$$

Обобщенный закон Гука:

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_r} \tau_{r\theta}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{1}{G_z} \tau_{z\theta}. \quad (4)$$

Здесь  $v$  – компонента вектора перемещения  $\mathbf{u}$  вдоль оси  $\theta$ ;  $\gamma_{r\theta}$ ,  $\gamma_{z\theta}$  – компоненты тензора деформаций;  $\tau_{r\theta}$ ,  $\tau_{z\theta}$  – компоненты тензора напряжений;  $G_r$  и  $G_z$  – модули сдвига в плоскости изотропии и перпендикулярной к ней.

### 3. Метод решения

Для решения задачи кручения используется метод граничных состояний (МГС) [13]. Основу метода составляют пространства внутренних  $\Xi$  и граничных  $\Gamma$  состояний

$$\Xi = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots \}; \quad \Gamma = \{ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_k, \dots \}.$$

Внутреннее состояние определяется наборами компонент вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений (индекс  $k$  в правой части перенесен вверх)

$$\xi_k = \{ u_i^k, \varepsilon_{ij}^k, \sigma_{ij}^k \}. \quad (5)$$

Скалярное произведение в пространстве  $\Xi$  внутренних состояний выражается через внутреннюю энергию упругого деформирования. Например, для 1-го и 2-го внутреннего состояния тела, занимающего область  $V$

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_V \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 dV; \quad (\xi_2, \xi_1) = (\xi_2, \xi_1) = \int_V \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 dV = \int_V \varepsilon_{ij}^2 \sigma_{ij}^1 dV. \quad (6)$$

Граничное состояние  $\gamma_k$  определяется наборами компонент вектора перемещения точек границы  $u_i$  и поверхностными усилиями  $p_i$ :

$$\gamma_k = \{ u_i^k, p_i^k \}; \quad p_i^k = \sigma_{ij}^k n_j, \quad (7)$$

где  $n_j$  – компонента нормали к границе.

В пространстве граничных состояний  $\Gamma$  скалярное произведение выражает работу внешних сил по поверхности тела  $S$ , например для 1-го и 2-го состояний:

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \int_S p_i^1 u_i^2 dS; \quad (\gamma_1, \gamma_2) = (\gamma_2, \gamma_1) = \int_S p_i^1 u_i^2 dS = \int_S p_i^2 u_i^1 dS.$$

Пространства внутренних и граничных состояний являются гильбертовыми и сопряжены изоморфизмом. Каждому элементу  $\xi_k \in \Xi$  взаимно однозначно соответствует единственный элемент  $\gamma_k \in \Gamma$ . Это позволяет поиск внутреннего состояния свести к построению изоморфного ему граничного состояния.

Основную сложность формирования решения в МГС составляет конструирование базиса внутренних состояний, который опирается на общее или фундаментальное решение для среды, также возможно использование каких-либо частных или специальных решений.

После построения базиса внутренних состояний, методика которого описана ниже, проводится его ортонормирование, используя рекурсивно-матричный алгоритм ортогонализации [14]. Алгоритм реализует процесс ортогонализации Грама – Шмидта, в котором перекрестные скалярные произведения вычисляются по формуле (6). Алгоритм автоматически удаляет нулевые и линейно-зависимые элементы исходного базиса и формирует ортонормированный базис внутренних состояний, для которого  $(\xi_i, \xi_j) = \delta_{ij}$  ( $\delta_{ij}$  – дельта Кронекера).

Ортонормированный базис  $\Gamma$  редуцируется из ортонормированного базиса внутренних состояний, используя предельный переход к границе тела для перемещений и выражения (7) для усилий на границе.

Окончательно, проблема сводится к разрешающей системе уравнений относительно коэффициентов Фурье, разложения искомых внутреннего  $\xi$  и граничного  $\gamma$  состояний в ряд по элементам ортонормированного базиса:

$$p_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k p_i^k; u_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^k; \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^k; \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^k. \quad (8)$$

Если на поверхности тела заданы скручивающие усилия (первая основная задача), то коэффициенты Фурье  $c_k$  определяются из выражения

$$c_k = \int_S p_{vi} u_i^k dS; k = 1, 2, 3 \dots N, \quad (9)$$

где  $p_{vi}$  – компоненты заданного вектора усилия на границе и  $u_i^k$  – вектор перемещения в  $k$ -м базисном элементе пространства граничных (7) состояний.

Кручение тела вращения можно обеспечить и заданием перемещения точек границы тела (вторая основная задача). В этом случае коэффициенты Фурье рассчитываются так:

$$c_k = \int_S u_{vi} p_i^k dS, \quad (10)$$

где  $u_{vi}$  – компоненты заданного вектора перемещения на границе тела;  $p_i^k$  – компоненты вектора усилия в  $k$ -м базисном элементе пространства граничных (7) состояний.

Если на части поверхности  $S_p$  тела заданы усилия  $p_{vi}$ , а на другой части  $S_u$  перемещения  $u_{vi}$  (основная смешанная задача), то возникает необходимость в решении системы алгебраических уравнений [15]:

$$\beta_{lm} = \int_{S_p} p_i^l u_i^m dS_p + \int_{S_u} p_i^m u_i^l dS_u; \mathbf{B} = [\beta_{lm}]_{N \times N}; \quad (11)$$

$$\alpha_m = 2 \int_{Sp} p_{vi} u_i^m dS_p + 2 \int_{Su} p_i^m u_{vi} dS_u ; A = [\alpha_m]_N ,$$

где В – матрица коэффициентов  $\beta_{lm}$  ; А – матрица-столбец коэффициентов  $\alpha_m$  .

Матрица-столбец коэффициентов Фурье  $C = \{c_k\}_N$  рассчитывается так:

$$C = B^{-1}A .$$

Во всех задачах тестирование коэффициентов Фурье осуществляется подстановкой одного из базисных элементов с соответствующими ГУ в качестве заданного, при этом должны выполняться условия  $c_n = 1$  ,  $n$  – номер тестируемого элемента, остальные коэффициенты Фурье должны равняться нулю.

#### 4. Формирование базиса внутренних состояний

В работе [12] методом интегральных наложений установлена зависимость между пространственным напряженно-деформированным состоянием упругого трансверсально-изотропного тела вращения и некоторыми вспомогательными двумерными состояниями, компоненты которого зависят от двух координат  $z$  и  $y$  (переменных). Ось  $\eta$  перпендикулярна плоскости  $zy$ .

В задаче кручения, где происходит только депланация меридиональных сечений тела вращения, в качестве вспомогательных двумерных состояний используется депланация плоских сечений трансверсально-изотропного тела [12]:

$$u_{\eta}^{pl} = -\text{Re}[i q_3 \Phi_3(\zeta_3)] ; \tau_{z\eta}^{pl} = \text{Re}[i \gamma_3 \Phi_3(\zeta_3)] ; \tau_{y\eta}^{pl} = -\text{Re}[\Phi_3(\zeta_3)] , \quad (12)$$

где  $u_{\eta}^{pl}$  – компонента вектора перемещения плоского вспомогательного состояния вдоль оси  $\eta$  ;  $q_3$  ,  $\gamma_3$  – комплексные константы:  $\gamma_3 = \sqrt{G_z / G_r}$  ,  $q_3 = -1 / G_r$  ;  $\zeta_3 = z / \gamma_3 + iy$  ; функции  $\Phi_j(\zeta_j)$  – аналитические по своим переменным.

Базисный набор плоских вспомогательных состояний (12) можно сконструировать, последовательно придавая аналитической функции  $\Phi_3(\zeta_3)$  следующие значения:

$$\Phi_3(\zeta_3) \in \{c_3^n, i c_3^n, \dots\} , n = 1, 2, 3, \dots N .$$

Переход к трехмерному состоянию осуществляется по формулам

$$v = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u_{\eta}^{pl} \cos \beta d\beta ; \tau_{r0} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \tau_{y\eta}^{pl} \cos 2\beta d\beta ; \tau_{z0} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \tau_{z\eta}^{pl} \cos \beta d\beta ; y = r \cos \beta .$$

Совокупность всех пространственных состояний образует конечномерный базис внутренних состояний (5).

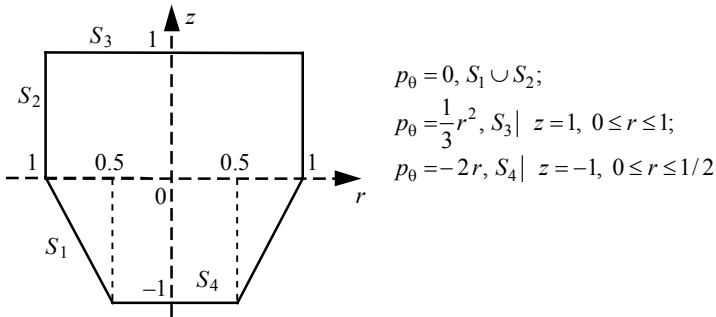
#### 5. Решение задач

##### Первая основная задача

Исследуем упругое равновесие трансверсально-изотропного тела в форме усеченного конуса (рис. 2) из горной породы алевролита крупного темно-серого [16]. После процедуры обезразмеривания параметров задачи (с масштабным коэффициентом  $\eta^* = 10^5$  кгс/см<sup>2</sup>), аналогия которой представлена в работе [17], упругие

характеристики материала составили:  $E_z = 6.21$ ;  $E_r = 5.68$ ;  $G_r = 2.29$   $G_z = 2.55$ ;  $\nu_z = 0.22$ ;  $\nu_r = 0.24$ .

На поверхностях  $S_3$  и  $S_4$  зададим распределенные усилия, различающиеся по форме (рис. 2).



**Рис. 2.** Меридиональное сечение тела в форме усеченного конуса и граничные условия  
**Fig. 2.** Meridional cross section of a truncated cone-shaped body and boundary conditions

После построения базиса внутренних состояний (5), процедуры его ортонормирования и исключения линейно зависимых элементов базисный набор для компоненты  $\nu$  вектора перемещения представлен в табл. 1 (показано 3 элемента).

Таблица 1

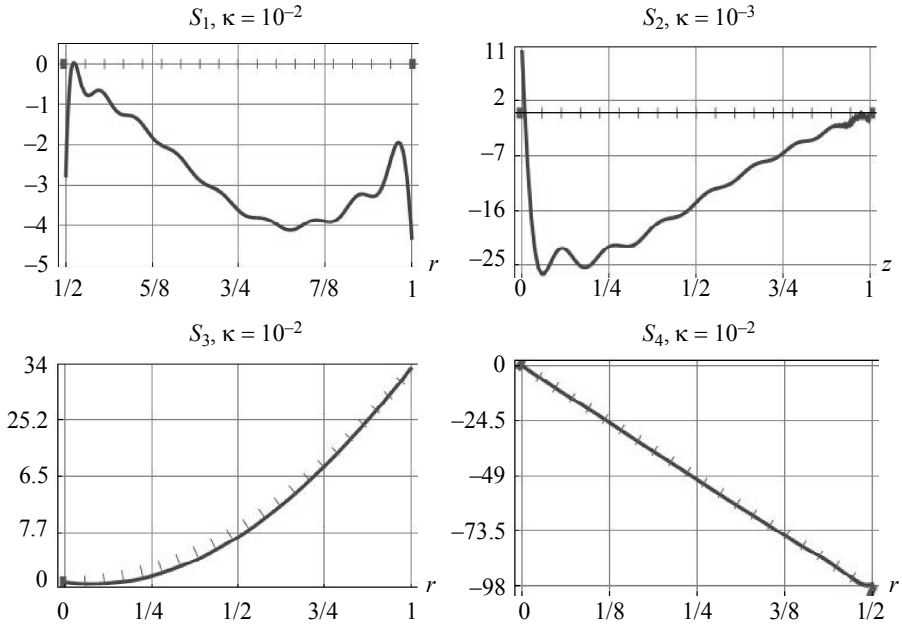
Ортонормированный базисный набор для перемещения  $\nu$ 

	$\nu$
$\xi_1$	$-0.42418rz$
$\xi_2$	$0.11804r^3 + 0.23305rz - 0.42408rz^2$
$\xi_3$	$-0.0706r^3 + 0.0095rz + 0.37338r^3z + 0.2537rz^2 - 0.4471rz^3$

При решении задачи использовался базис из 58 элементов с соответствующими коэффициентами Фурье (9). Приведем значения первых трех:  $c_1 = -0.26097$ ,  $c_2 = 0.08046$ ,  $c_3 = -0.10764$ .

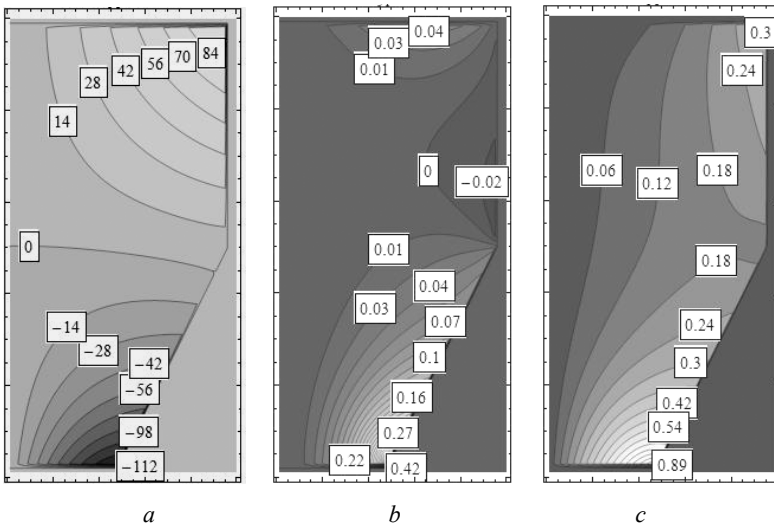
Искомые характеристики НДС рассчитываются по зависимостям (8). Оценка точности решения осуществляется сопоставлением заданных граничных условий (ГУ) с восстановленными граничными условиями в результате решения (рис. 4). Здесь и далее, заданные (| | | |) и восстановленные (—) ГУ изображены на графиках в масштабе; истинное значение на графиках рисунка 4 равно значению на графике, умноженному на коэффициент  $k$ . Восстановленные компоненты поверхностных сил  $p_r = p_z = 0$ , так как  $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = 0$ .

Как видно из первого графика для участка границы  $S_1$ , восстановленная компонента  $p_\theta$  имеет максимальное отклонение от заданной 0.042, т.е. максимальная погрешность составила 4.2%.



**Рис. 4.** Верификация усилия  $p_0$  на участках границы в задаче для тела вращения  
**Fig. 4.** Verification of force  $p_0$  on boundary sections in the problem for a body of revolution

Компоненты напряженно-деформированного состояния, имеющие полиномиальный вид, представлены в виде изолиний (в явном виде необозримы) (рис. 5). В силу осевой симметрии показана область  $0 \leq r \leq 1, -1 \leq z \leq 1$ .



**Рис. 5.** Изолинии: *a* – перемещение  $v, \kappa = 10^{-3}$ ,  
*b* – напряжение  $\tau_{r0}, \kappa = 1$ , *c* – напряжение  $\tau_{z0}, \kappa = 1$   
**Fig. 5.** Isolines: (*a*) displacement  $v, \kappa = 10^{-3}$ ,  
(*b*) stresses  $\tau_{r0}, \kappa = 1$ , and (*c*) stresses  $\tau_{z0}, \kappa = 1$

Следует отметить, что сходимость решения сильно зависит от геометрии тела, поэтому для решения данной задачи требуется довольно большой базис.

### Вторая основная задача

Рассмотрим теперь краевую задачу для кругового цилиндра из того же материала, что и предыдущей задаче. В качестве ГУ зададим следующие перемещения точек границы:

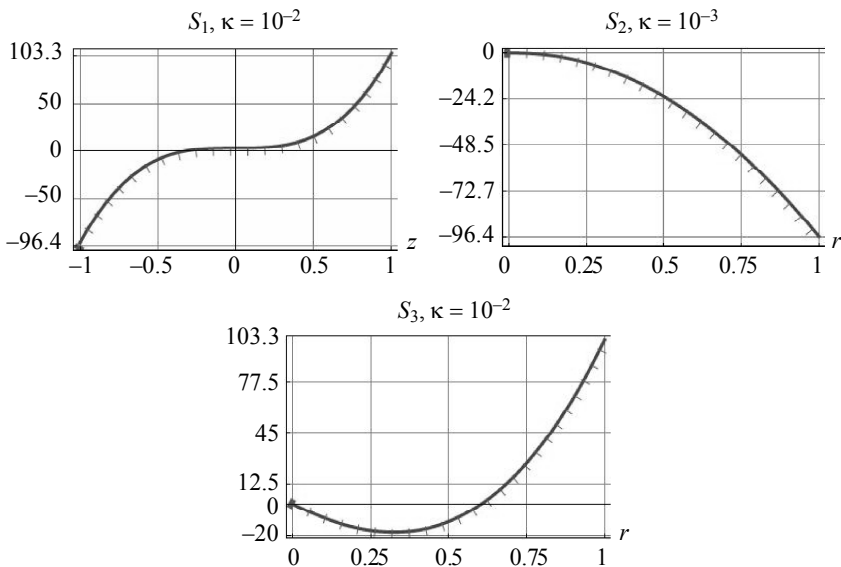
$$\begin{aligned} v &= z^3, S_1 | r=1, -1 \leq z \leq 1; \\ v &= -r^2, S_2 | z=-1, 0 \leq r \leq 1; \\ v &= r^3 + r^2 - r, S_3 | z=1, 0 \leq r \leq 1. \end{aligned}$$

Цилиндр занимает область

$$V = \{(z, r) | 0 \leq r \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}.$$

Изменение геометрии тела вынуждает проводить ортогонализацию заново, однако исходный базис внутренних состояний зависит только от физических свойств материала и остается тем же, что и в задаче для тела в форме усеченного конуса.

Для решения данной задачи потребовалось 30 элементов ряда Фурье с соответствующими коэффициентами (10). Сопоставление заданных ГУ на участках поверхности тела с полученными ГУ в результате решения приведено на рис. 6.



**Рис. 6.** Верификация перемещения  $v$  на участках границы в задаче для цилиндра  
**Fig. 6.** Verification of displacement  $v$  on sections of the boundary in the problem for a cylinder

Максимальная погрешность вычислений составила 3.6% и определяется на ребре цилиндра  $r=1, z=-1$ .

Полученные компоненты упругого поля представлены в виде изолиний на рис. 7 (показана область  $0 \leq r \leq 1, -1 \leq z \leq 1$ ; для всех изолиний  $\kappa=1$ ).



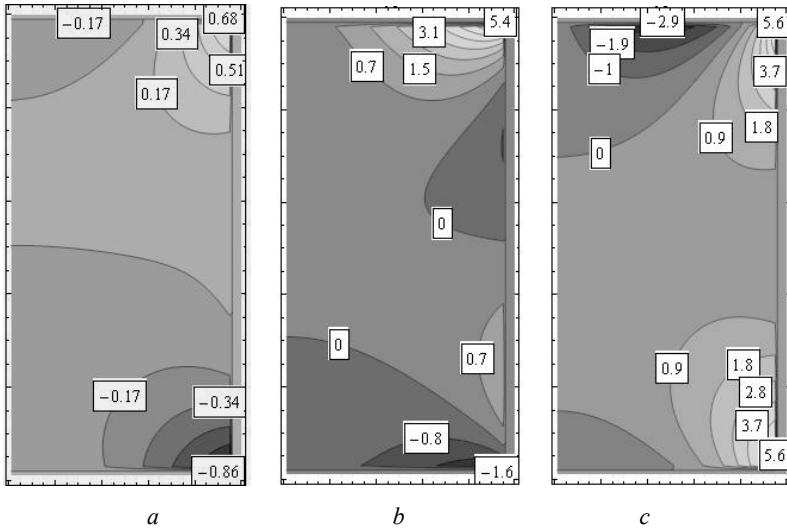
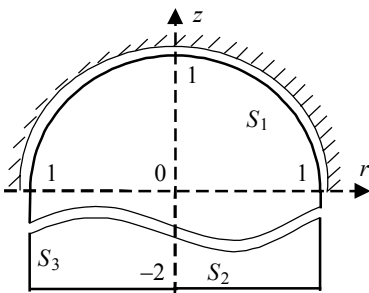


Рис. 7. Изолинии: *a* – перемещение  $v$ , *b* – напряжение  $\tau_{r0}$ , *c* – напряжение  $\tau_{z0}$   
 Fig. 7. Isolines, (*a*) displacement  $v$ , (*b*) stresses  $\tau_{r0}$ , and (*c*) stresses  $\tau_{z0}$

Упругое поле во второй основной задаче восстанавливается гораздо быстрее, чем в первой основной задаче, здесь требуется удерживать более короткий ортонормированный базис.

Основная смешанная задача

При постановке ГУ в смешанной задаче кручения на одной части границы задаются перемещения, а на другой усилия. Рассмотрим тело вращения неканонической формы (рис. 8). Материал тот же.



$$v=0, S_1 | z = \sqrt{1-r^2}, 0 \leq r \leq 1;$$

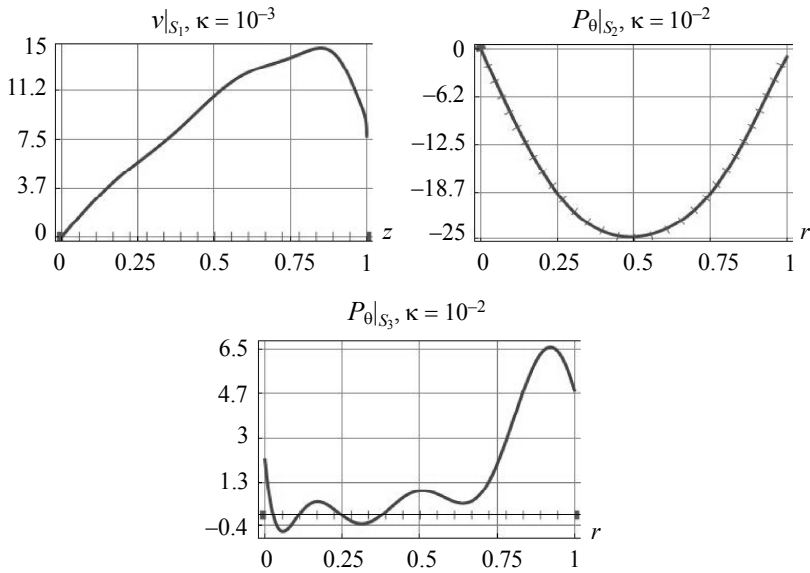
$$p_0 = r^2 - r, S_2 | z = -2, 0 \leq r \leq 1;$$

$$p_0 = 0, S_3 | r = 1, -2 \leq z \leq 0.$$

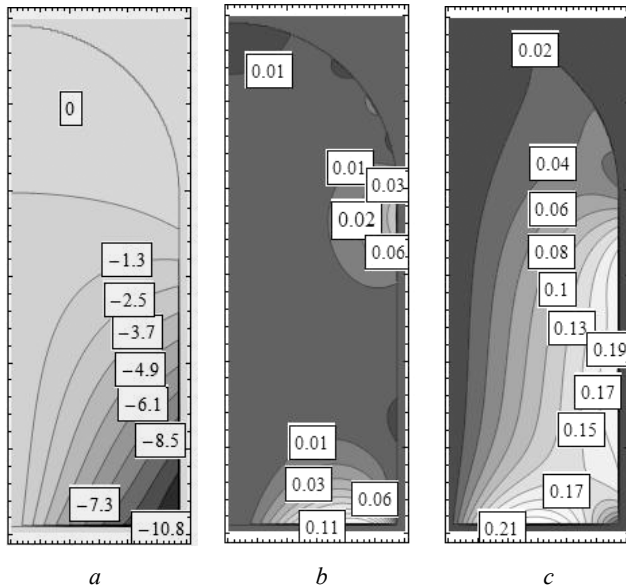
Рис. 8. Меридиональное сечение тела неканонической формы и граничные условия  
 Fig. 8. Meridional cross section of a non-canonical body and boundary conditions

Если в первой и второй основных задачах наиболее трудоемким является только процесс ортогонализации, то в смешанной задаче возникает необходимость еще и в вычислении матрицы коэффициентов В (11). Данный процесс наиболее энергозатратен в силу того, что вычисляются квадратуры от скалярного произведения довольно громоздких элементов ортогонализированного базиса пространства граничных состояний.

Для решения данной задачи использовался базис из 16 элементов. Верификация граничных условий представлена на рис. 9.



**Рис. 9.** Верификация граничных условий в смешанной задаче  
**Fig. 9.** Verification of boundary conditions in the mixed problem



**Рис. 10.** Изолинии:  $a$  – перемещение  $v$ ,  $\kappa = 10^{-2}$ ,  
 $b$  – напряжение  $\tau_{r\theta}$ ,  $\kappa = 1$ ,  $c$  – напряжение  $\tau_{z\theta}$ ,  $\kappa = 1$

**Fig. 10.** Isolines: (a) displacement  $v$ ,  $\kappa = 10^{-2}$ ,  
 (b) stresses  $\tau_{r\theta}$ ,  $\kappa = 1$ , and (c) stresses  $\tau_{z\theta}$ ,  $\kappa = 1$

В смешанной задаче погрешность составила 6.5%. в точках, близких к месту смены типа граничных условий (рис. 6). Для снижения погрешности следует увеличить число используемых элементов базиса.

На рисунке 10 показаны изолинии компонент упругого поля для области  $0 \leq r \leq 1$ ,  $-2 \leq z \leq 1$ .

Как видно из графиков, восстановленные усилия на границе совпадают с заданными в диапазоне определенной точности ( $\pm 5\%$  от значения заданной величины в любой точке на границе тела).

Полученные упругие поля во всех задачах строго удовлетворяют уравнениям (1) – (4).

### Заключение

Методом граничных состояний решены задачи кручения и для анизотропных цилиндрических тел произвольного поперечного сечения [18]. Причем материал обладал полной анизотропией упругих свойств (21 независимая константа). Однако использовалось общее решение задачи Сен-Венана, полученное С.Г. Лехницким. В связи с этим восстановленные усилия удовлетворяли заданным лишь в интегральном смысле. В качестве достоверных, можно было принять напряжения на участках, достаточно удаленных от мест приложения нагрузки.

В данной работе полученные напряжения достоверны во всей области тела, естественно, с определенной точностью. Количество базисных элементов, которое необходимо использовать при решении задач сильно зависит от геометрии тела, например от расстояния между торцами на которых заданы усилия и, естественно, от сложности ГУ.

Таким образом, метод граничных состояний показал свою эффективность в решении задач кручения трансверсально-изотропного тела вращения, в котором след полученного упругого поля на границе полностью удовлетворяет заданным ГУ, а не удовлетворяет только в интегральном смысле. Это позволяет получить более точное НДС, возникающее в теле.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахметов Н.К., Мамедова Т.Б.* Асимптотическое поведение решения задачи кручения радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферической оболочки // Вестник ДГТУ. 2011. Т. 11. № 4(55). С. 455–461.
2. *Миронов Б.Г., Митрофанова Т.В.* Деформированное состояние трансляционно-анизотропных тел при кручении // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. 2011. № 4(72). Ч. 1. С. 57–60.
3. *Соколова М.Ю., Рудаков В.В.* Конечные деформации сплошного цилиндра из несжимаемого упругого анизотропного материала // Известия ТулГУ. Технические науки. 2016. Вып. 11. Ч. 1. С. 253–266.
4. *Соколова М.Ю., Христич Д.В., Чиков В.С.* Кручение сплошного цилиндра из нелинейного цилиндрически ортотропного материала // Известия ТулГУ. Технические науки. 2017. Вып. 10. С. 156–164.
5. *Васильев А.С., Садырин Е.В., Федотов И.А.* Контактная задача о кручении круглым штампом трансверсально-изотропного упругого полупространства с неоднородным трансверсально-изотропным покрытием // Вестник ДГТУ. 2013. № 1-2(70-71). С. 25–34.
6. *Миронов Б.Г., Деревянных Е.А.* Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. 2012. № 4 (76). С. 108–112.

7. Банщикова И.А., Цвелодуб И.Ю., Петров Д.М. Деформирование элементов конструкций из сплавов с пониженной сопротивляемостью деформациям ползучести в сдвиговом направлении // Ученые записки казанского университета. Физико-математические науки. 2015. Т. 157. Кн. 3. С. 34–41.
8. Нуримбетов А.У. Напряженно-деформированное состояние слоистых композиционных стержней и лопаток при кручении // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 1. С. 59–66.
9. Иванов Д.А. Метод граничных состояний в решении первой основной задачи теории анизотропной упругости с массовыми силами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 66. С. 96–111. DOI: 10.17223/19988621/66/8.
10. Иванов Д.А. Метод граничных состояний в решении второй основной задачи теории анизотропной упругости с массовыми силами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 61. С. 45–60. DOI: 10.17223/19988621/61/5.
11. Иванов Д.А. Решение контактной задачи теории упругости для анизотропных тел вращения с массовыми силами // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 2. С. 49–62. DOI: 10.15593/pern.mech/2019.2.05.
12. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного). – М.: Наука, 1978, 464 с.
13. Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. 2001. Т. 2. № 2. С. 115–137.
14. Саталкина Л.В. Нарращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоемкости вычислений // Сборник тезисов докладов научной конференции студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета. 2007. С. 130–131.
15. Ivanychev D.A. Solving the mixed problem of elasticity theory with mass forces for transversal-isotropic body // Proceedings – 2020 1st International Conference on Control Systems, Mathematical Modelling, Automation and Energy Efficiency, SUMMA 2020. P. 56–61.
16. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. 2-е изд. М.: Наука, 1977. 416 с.
17. Левина Л.В., Новикова О.С., Пеньков В.Б. Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела // Вестник ЛГТУ. 2016. № 2 (28). С. 16–24.
18. Ivanychev D.A., Levina E.Yu., Abdullakh L.S., Glazkova Yu.A. The method of boundary states in problems of torsion of anisotropic cylinders of finite length // International Transaction Journal of Engineering, Management, & Applied Sciences & Technologies. 2019. V. 10. No. 2. P. 183–191. DOI: 10.14456/ITJEMAST.2019.18.

Статья поступила: 15.02.2021

Ivanychev D.A. (2022) BOUNDARY STATE METHOD IN SOLVING TORSION PROBLEMS FOR TRANSVERSELY ISOTROPIC BODIES OF REVOLUTION *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 75. pp. 73–86

DOI 10.17223/19988621/75/7

Keywords: boundary state method, transversely isotropic materials, torsion problem, state space, boundary value problems.

The aim of this work is to develop the method of boundary states for the class of torsion problems as applied to transversely isotropic elastic bodies of revolution. Efforts, displacements, or a combination of both are used as twisting conditions at the border. Proceeding from the general solution to the problem of cross section warping, the basis of the space of internal states is

formed. The search for an internal state is reduced to the study of the boundary state isomorphic to it. The solution is a Fourier series.

The proposed technique is implemented in solving the first main problem for a body in the form of a truncated cone; the second main problem for a circular cylinder; and the main mixed problem for a non-canonical body of revolution. The solution was verified and the calculation accuracy was assessed. The obtained characteristics of the elastic field have a polynomial form. The elastic field in each problem satisfies the specified boundary conditions in the form of their distribution over the surface and does not satisfy them only in the integral sense.

**Financial support.** The study was carried out with the financial support of RFBR and the Lipetsk Region as part of the research project No. 19-41-480003.

*Dmitriy A. IVANYCHEV* (Candidate of Physics and Mathematics, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation). E-mail: lsivdml@mail.ru

#### REFERENCES

1. Akhmetov N.K., Mamedova T.B. (2011) Asimptoticheskoye povedeniye resheniya zadachi krucheniya radial'no-neodnorodnoy transversal'no-izotropnoy sfericheskoy obolochki [Asymptotic behavior of the solution of the torsion problem for a radially inhomogeneous transversely isotropic spherical shell]. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskkiye nauki.* 11(4). pp. 455–461.
2. Mironov B.G., Mitrofanova T.V. (2011) Deformirovannoye sostoyaniye translyatsionno-anizotropnykh tel pri kruchenii [The deformed state of translational anisotropic bodies under torsion]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva.* 4(72). Part 1. pp. 57–60.
3. Sokolova M.Yu., Rudakov V.V. (2016) Konechnyye deformatsii sploshnogo tsilindra iz neszhimayemogo uprugogo anizotropnogo materiala [Finite deformations of a solid cylinder made of an incompressible elastic anisotropic material]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskkiye nauki.* 11. pp. 253–266.
4. Sokolova M.Yu., Khristich D.V., Chikov V.S. (2017) Krucheniye sploshnogo tsilindra iz nelineynogo tsilindricheskogo ortotropnogo materiala [Torsion of a solid cylinder from a nonlinear cylindrically orthotropic material]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskkiye nauki.* 11. pp. 156–164.
5. Vasiliev A.S., Sadyrin E.V., Fedotov I.A. (2013) Kontaknaya zadacha o kruchenii kruglym shtampom transversal'no-izotropnogo uprugogo poluprostranstva s neodnorodnym transversal'no-izotropnym pokrytiyem [The contact problem on the torsion of a transversely isotropic elastic half-space with a non-uniform transversely isotropic coating by a round stamp]. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskkiye nauki.* 1–2(70–71). pp. 25–34.
6. Mironov B.G., Derevyannykh E.A. (2012) Ob obshchikh sootnosheniyakh teorii krucheniya anizotropnykh stержней [On general relations of the theory of torsion of anisotropic rods]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva.* 4(76). pp. 108–112.
7. Banshchikova I.A., Tselodub I.Yu., Petrov D.M. (2015) Deformirovaniye elementov konstruksiy iz splavov s ponizhennoy soprotivlyayemost'yu deformatsiyam polzuchesti v sdvigovom napravlenii [Deformation of structural elements made of alloys with reduced resistance to creep deformations in the shear direction]. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki – Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series.* 157(3). pp. 34–41.
8. Nurimbetov A.U. (2015) Napryazhenno-deformirovannoye sostoyaniye sloistykh kompozitsionnykh stержней i lopatok pri kruchenii [Stress-strain state of laminated composite rods and blades during torsion]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy.* 1. pp. 59–66.

9. Ivanychev D.A. (2020) Metod granichnykh sostoyaniy v reshenii pervoy osnovnoy zadachi teorii anizotropnoy uprugosti s massovymi silami [The method of boundary states in solving the first main problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 66. pp. 96–111. DOI: 10.17223 / 19988621/66/8.
10. Ivanychev D.A. (2019) Metod granichnykh sostoyaniy v reshenii vtoroy osnovnoy zadachi teorii anizotropnoy uprugosti s massovymi silami [The method of boundary states in the solution to the second fundamental problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 61. pp. 45–60. DOI: 10.17223/19988621/61/5.
11. Ivanychev D.A. (2019) Resheniye kontaktnoy zadachi teorii uprugosti dlya anizotropnykh tel vrashcheniya s massovymi silami [Solution of the contact problem of the elasticity theory for anisotropic rotation bodies with mass forces]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 2. pp. 49–62. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.05.
12. Aleksandrov A.Ya., Solov'ev Yu.I. (1978) *Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti (primeneniye metodov teorii funktsii kompleksnogo peremennogo)* [Spatial problems of the elasticity theory (application of methods of the theory of functions of a complex variable)]. Moscow: Nauka.
13. Pen'kov V.B., Pen'kov V.V. (2001) Metod granichnykh sostoyaniy dlya resheniya zadach lineynoy mekhaniki [The method of boundary states for solving problems of linear mechanics]. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal*. 2(2). pp. 115–137.
14. Satalkina L.V. (2007) Narashchivaniye bazisa prostranstva sostoyaniy pri zhestkikh ogranicheniyakh k energoyemkosti vychisleniy [Expansion of the basis of the state space under severe limitations on the energy consumption of computations]. *Sbornik tezisov dokladov nauchnoi konferentsii studentov i aspirantov Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. pp. 130–131.
15. Ivanychev D.A. (2020) Solving the mixed problem of elasticity theory with mass forces for transversal-isotropic body. *2020 2nd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA)*. pp. 56–60.
16. Lekhnitskiy S.G. (1977) *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [The theory of elasticity of an anisotropic body]. Moscow: Nauka.
17. Levina L.V., Novikova O.S., Pen'kov V.B. (2016) Polnoparametricheskoye resheniye zadachi teorii uprugosti odnosvyaznogo ogranichennogo tela [Full-parameter solution of the elasticity theory problem for a simply connected bounded body]. *Vestnik Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. 2(28). pp. 16–24.
18. Ivanychev D.A., Levina E.Yu., Abdullakh L.S., Glazkova Yu.A. (2019) The method of boundary states in problems of torsion of anisotropic cylinders of finite length. *International Transaction Journal of Engineering, Management, & Applied Sciences & Technologies*. 10(2). pp. 183–191. DOI: 10.14456/ITJEMAST.2019.18.

Received: February 15, 2021