УДК 534.222 MSC 35M10, 35M12
DOI 10.17223/19988621/75/8

Х.Х. Имомназаров, А.Э. Холмуродов, А.Т. Омонов

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ПОРОУПРУГОСТИ[1]

Получено фундаментальное решение системы уравнений теории пороупругости для бездиссипативного случая. Показано, что при исчезновении пористости полученное фундаментальное решение переходит к фундаментальному решению системы уравнений теории упругости. Также рассмотрена обратная задача об определении распределенного источника из системы уравнений теории пороупругости по режиму колебаний свободной поверхности. Используя метод сферических средних, получена формула решений рассматриваемой обратной динамической задачи теории пороупругости.

Ключевые слова: *нелинейная математическая модель*, *прямая задача*, *пороупругость*, *линеаризованная модель*, *обратная задача*, *распределенный источник*, *динамическая задача*, *фундаментальное решение.*

В прикладных задачах распространения упругих волн часто возникает потребность учесть пористость, флюидонасыщенность среды и гидродинамический фон. В частности, эти вопросы возникают в разведочной геофизике при поиске нефтяных слоев и при выборе параметров волнового воздействия на месторождения нефти и газа с целью интенсификации добычи. Аналогичные вопросы имеются и в сейсмологии при геофизическом мониторинге свойств очаговой зоны с целью прогноза землетрясений.

В геофизике динамические и кинематические характеристики упругих волн, распространяющихся в фрагментированных флюидонасыщенных горных породах, несут в себе информацию о строении, составе и условиях залегания пород, они также содержат сведения о литологии пород и характере их границ, трещиноватости, пористости, наличии различного рода нарушений и локальных включений, а также о составе и фазовом состоянии флюидов-заполнителей порового пространства коллекторов. Математические модели в теории волн дают инструмент для определения численных значений скоростей распространения и коэффициентов поглощения упругих сейсмических волн в зависимости от вещественного состава флюидозаполненного коллектора, его строения и влияния окружающей среды. Определяемые значения скорости распространения и коэффициента поглощения упругих сейсмических волн тем точнее, чем реалистичнее и адекватнее математическая модель.

Выявленные в настоящее время особенности поглощения сейсмических волн в трещиновато-пористых средах с одновременным проявлением множественных электросейсмических эффектов не удается согласовать с простейшими моделями идеально упругой гуковской среды и среды Био. Реальные геологические среды

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (18-51-41002). Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства инновационного развития Республики Узбекистан (OT-Atex-2018-340).

являются многофазными, электропроводящими, трещиноватыми, пористыми и т.д. При распространении сейсмических волн происходит их диссипация, связанная с поглощением энергии.

Квазилинейная система уравнений теории пороупругости

В работе [1] построена нелинейная математическая модель насыщенной жидкостью пористой упругодеформируемой среды. Модель основана на трех основных принципах: выполнение законов сохранения, принцип относительности Галилея, согласованность уравнений движения насыщающей жидкости с условиями термодинамического равновесия.

Обозначим через u – скорость движения упругой пористой среды; g_{ik} – метрический тензор упругой деформации; v – скорость движения жидкости, заполняющей пористую среду; ρ, ρ_s, ρ_l – плотность континуума, парциальная плотность пористого тела, парциальная плотность жидкости соответственно; e, S – энергия и энтропия единицы объема; μ – химический потенциал; T – температура; p – давление.

Пусть плотность равна сумме парциальных плотностей

$$\rho = \rho_s + \rho_l ,$$

для которой выполняется закон сохранения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\, j = 0, \quad j = \rho_s u + \rho_l v . \tag{1}$$

Должна сохранятся энтропия всей системы. Имея в виду, что поток энтропии равен $\frac{S}{\rho} j$, запишем уравнение сохранения энтропии в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathrm{d}iv\left(\frac{S}{\rho} j \right) = 0 . \tag{2}$$

Деформацию пористого пространства опишем уравнением для метрического тензора деформации g_{ik}

$$\begin{gathered} \frac{\partial g_{ik}}{\partial t} + g_{kj}\partial_i u_j + g_{ij}\partial_k u_j + u_j \partial_j g_{ik} = 0, \\ \rho_s = \mathrm{const}\sqrt{\det(g_{ik})}. \end{gathered} \tag{3}$$

В (3) второе соотношение означает, что парциальную плотность ρ_s упругодеформируемого континуума следует связать с определителем метрического тензора деформации g_{ik} .

Закон сохранения импульса имеет вид

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \partial_k \Pi_{ik} = 0 ; \tag{4}$$

поток импульса Π_{ik} определяется по формуле

$$\Pi_{ik} = \rho_s u_i u_k + \rho_l v_i v_k + p\delta_{ik} + h_{ij} g_{jk} ,$$

где h_{ik} – тензор напряжений.

Одновременно в уравнение движения насыщающей жидкости следует включить силу, обусловленную термодинамическими условиями равновесия,

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(v,\nabla)v=-\nabla\mu-\frac{S}{\rho}\nabla T\ . \tag{5}$$

Законы сохранения (1), (2) и уравнения (3) – (5) в качестве следствия допускают тождественное выполнение закона сохранения энергии, выраженного уравнением вида

$$\frac{\partial e}{\partial t}+\operatorname{div}Q=0, \tag{6}$$

где поток энергии Q определяется формулой

$$Q_k=\left(\mu+\frac{v^2}{2}+\frac{TS}{\rho}\right)j_k+\rho_s(u,u-v)u_k+u_i h_{km}g_{mi}.$$

При этом выполняется первое начало термодинамики для рассматриваемой системы

$$de_0=TdS+\mu d\rho+(u-v,\ dj_0)+\frac{1}{2}\ h_{ik}\ dg_{ik}. \tag{7}$$

Здесь «0» помечены величины, относящиеся к системе отсчета, в которой насыщающая жидкость покоится.

Давление для системы определяется стандартным способом

$$p=-e_0+TS+\mu\rho+(u-v,\ j_0).$$

Уравнение движения жидкости принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(v,\nabla)v=-\frac{\nabla p}{\rho}+\frac{\rho_s}{2\rho}\nabla(u-v)^2-\frac{h_{ik}}{2\rho}\nabla g_{ik}.$$

Распространение нелинейных акустических волн в насыщенной жидкостью пористых средах можно записать как

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}j=0,\quad j=\rho_s u+\rho_l v,\\
&\frac{\partial S}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\frac{S}{\rho}j\right)=0,\\
&\frac{\partial g_{ik}}{\partial t}+g_{kj}\partial_i u_j+g_{ij}\partial_k u_j+u_j\partial_j g_{ik}=0,\\
&\rho_s=\mathrm{const}\sqrt{\det(g_{ik})},\qquad \rho_l=\rho-\rho_s,\\
&\frac{\partial e}{\partial t}+\operatorname{div}Q=0,\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+(v,\nabla)v=-\frac{\nabla p}{\rho}+\frac{\rho_s}{2\rho}\nabla(u-v)^2-\frac{h_{ik}}{2\rho}\nabla g_{ik}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Система уравнений (8) замыкается уравнением состояния

$$e_0=e_0(\rho,S,j_0,g_{ik}).$$

Линейная система уравнений теории пороупругости

Показана гиперболичность линеаризованной относительно произвольного гидродинамического фона системы уравнений в обратимом гидродинамическом приближении (в отсутствие диссипации энергии). Эта линеаризованная система уравнений для произвольного гидродинамического фона в случае однородной среды имеет вид [3–5]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta u - \left(a_1 - c_t^2\right)\nabla \operatorname{div} u + a_2 \nabla \operatorname{div} v = f, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a_4 \nabla \operatorname{div} v + a_3 \nabla \operatorname{div} u = f, \tag{10}$$

где f – массовая сила.

Основным отличием линеаризованной модели Доровского от хорошо известных моделей Френкеля – Био [6–9] является то, что модель Доровского описывается тремя упругими постоянными [1–3]. Как показано в [10, 11], коэффициенты $a_k, k = \overline{1,4}$, выражаются через скорости поперечной c_s, продольных c_{p_m} $(m = 1,2)$ волн, а также отношения парциальной плотности жидкости ρ_l к парциальной плотности упругого пористого тела ρ_s с помощью формул

$$a_1 = \frac{\rho_l}{\rho}\left(c_{p_1}^2 + c_{p_2}^2\right) + \frac{4}{3}\frac{\rho_s^2}{\rho^2}c_s^2 + \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho}\tilde{z},$$

$$a_2 = \frac{\rho_l}{\rho}\left(c_{p_1}^2 + c_{p_2}^2 - 2\tilde{z} - \frac{4}{3}c_s^2\right),$$

$$a_3 = \frac{\rho_s}{\rho}\left(c_{p_1}^2 + c_{p_2}^2 - 2\tilde{z} - \frac{4}{3}c_s^2\right),$$

$$a_4 = \frac{\rho_s}{\rho}\left(c_{p_1}^2 + c_{p_2}^2 - \frac{4}{3}c_s^2\right) - \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho}\tilde{z},$$

$$\tilde{z} = \frac{1}{2}\left(c_{p_1}^2 + c_{p_2}^2 - \frac{8}{3}\frac{\rho_s}{\rho}c_s^2\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(c_{p_1}^2 - c_{p_2}^2\right)^2 - \frac{16}{9}\frac{\rho_l\rho_s}{\rho^2}c_s^4}, \quad \rho = \rho_s + \rho_l.$$

Следует отметить, что, в принципе, нельзя использовать теорию Френкеля – Био для постановки обратных задач и замкнутого численного моделирования различных процессов в пористой среде, зная распределения скоростей распространения сейсмических волн c_s, c_{p_1}, c_{p_2} и плотностей ρ_l, ρ_s [12].

Фундаментальное решение системы уравнений пороупругости

При изучении свойств решений уравнений в частных производных большое значение имеет фундаментальное решение. Анализ свойств этих волн представляет интерес для изучения сложных геофизических процессов, протекающих в геологических средах с присутствием пористости и флюидонасыщенности. Для проведения таких исследований может оказаться полезным использование явных формул для изучаемых волновых полей. Эти формулы могут быть получены из фундаментального решения системы уравнений теории пороупругости.

В данном разделе построено фундаментальное решение системы уравнений теории пороупругости для однородной среды с использованием подхода, предложенного в работе В.Г. Романова [13].

Для удобства напишем систему уравнений теории пороупругости (9), (10) в матричном виде

$$L\ w(t,x)=0,$$

где

$$L\ w(t,x)=\begin{cases}\partial_t^2 u-c_t^2\ \Delta u+a_1\ \nabla\ \mathrm{div}\, u+a_2\ \nabla\ \mathrm{div}\, v\\ \partial_t^2 v+a_3\ \nabla\ \mathrm{div}\, u-a_4\ \nabla\ \mathrm{div}\, v\end{cases}$$

Здесь $w(t,x)=(u(t,x),v(t,x))^T$, а знак T означает транспонирование.

Пусть $t\in R^1$, $x\in R^3$; матрица $G(t,x)=\left(G_{ij}(t,x)\right)_{6\text{x}3}$ – фундаментальное решение задачи Коши для системы уравнений теории пороупругости, т.е. вектор $G_j(t,x)=\left(G_{1j}(t,x),\ G_{2j}(t,x),\ldots,\ G_{6j}(t,x)\right)$ есть решение системы уравнений теории пороупругости

$$\left(G_{1j}(t,x),\ G_{2j}(t,x),\ G_{3j}(t,x)\right)=u_j(t,x),$$

$$\left(G_{4j}(t,x),\ G_{5j}(t,x),\ G_{6j}(t,x)\right)=v_j(t,x),\tag{11}$$

$$L\ G_j(t,x)=e_j\ \delta(t)\ \delta(x_1)\ \delta(x_2)\ \delta(x_3),$$

удовлетворяющее условию

$$G_j(t,x)|_{t<0}=0.\tag{12}$$

В системе (11) e_j – базисный вектор в R^3; $\delta(\cdot)$ – функция Дирака. Далее через $\theta(\cdot)$ обозначим функцию Хевисайда.

Теорема. Фундаментальное решение системы уравнений теории пороупругости имеет вид

$$\left(G_{1j}(t,x),\ G_{2j}(t,x),\ G_{3j}(t,x)\right)=u_j(t,x),$$

$$\left(G_{4j}(t,x),\ G_{5j}(t,x),\ G_{6j}(t,x)\right)=v_j(t,x),$$

$$u(t,x)=\frac{1}{4\ \pi\left(c_{l_1}^2-c_{l_2}^2\right)}\left[\frac{\left(c_{l_1}^2-c_{l_2}^2\right)\ e}{c_t^2\ |x|}\ \delta(t-|x|/c_t)+\frac{a_4-c_{l_2}^2}{a_3}\left(c_{l_1}^2-a_4+a_3\right)\right.$$
$$\nabla\mathrm{div}\left(\frac{e}{|x|}\ \theta\left(t-|x|/c_{l_2}\right)\right)-\frac{a_4-c_{l_1}^2}{a_3}\left(c_{l_2}^2-a_4+a_3\right)\ \nabla\mathrm{div}\left(\frac{e}{|x|}\ \theta\left(t-|x|/c_{l_1}\right)\right)-$$
$$\left.-\left(c_{l_1}^2-c_{l_2}^2\right)\ \nabla\mathrm{div}\left(\frac{e}{|x|}\ \theta\left(t-\frac{|x|}{c_t}\right)\right)\right];\tag{13}$$

$$v(t,x)=\frac{1}{4\ \pi\left(c_{l_1}^2-c_{l_2}^2\right)}\left[\left(c_{l_1}^2-a_4+a_3\right)\ \nabla\mathrm{div}\left(\frac{e}{|x|}\ \theta\left(t-|x|/c_{l_2}\right)\right)-\right.$$
$$\left.-\left(c_{l_2}^2-a_4+a_3\right)\ \nabla\mathrm{div}\left(\frac{e}{|x|}\ \theta\left(t-|x|/c_{l_1}\right)\right)\right],\quad e=(e_1,\ e_2,\ e_3).\tag{14}$$

Доказательство. Следуя [13], введем скалярные u_l, v_l и векторные u_t, v_t потенциалы

$$u_l = \operatorname{div} u\ ; \tag{15}$$

$$u_t = \operatorname{rot} u\ ; \tag{16}$$

$$v_l = \operatorname{div} v\ ; \tag{17}$$

$$v_t = \operatorname{rot} v\ . \tag{18}$$

Функции u, v связаны с u_l, v_l, u_t, v_t равенствами

$$\Delta u = \nabla u_l - \operatorname{rot}\operatorname{rot} u_t\ ; \tag{19}$$

$$\Delta v = \nabla v_l - \operatorname{rot}\operatorname{rot} v_t\ . \tag{20}$$

Используя перестановочность волновых операторов с операторами $\operatorname{rot}, \nabla$, получим относительно u_t, v_t, u_l, v_l задачу Коши с нулевыми данными. Решая полученную задачу Коши, находим

$$v_t = 0\,,\ \ u_t = \frac{1}{4\pi c_t^2}\operatorname{rot}\left(\frac{e}{|x|}\delta(t-|x|/c_t)\right); \tag{21}$$

$$v_l = \frac{c_{l_1}^2 - a_4 + a_3}{4\pi\left(c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2\right)c_{l_2}^2}\operatorname{div}\left(\frac{e}{|x|}\delta\left(t-|x|/c_{l_2}\right)\right) -$$

$$-\frac{c_{l_2}^2 - a_4 + a_3}{4\pi\left(c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2\right)c_{l_1}^2}\operatorname{div}\left(\frac{e}{|x|}\delta\left(t-|x|/c_{l_1}\right)\right); \tag{22}$$

$$u_l = \frac{a_4 - c_{l_2}^2}{4\pi a_3 c_{l_2}^2}\frac{c_{l_1}^2 - a_4 + a_3}{c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2}\operatorname{div}\left(\frac{e}{|x|}\delta\left(t-|x|/c_{l_2}\right)\right) -$$

$$-\frac{a_4 - c_{l_1}^2}{4\pi a_3 c_{l_1}^2}\frac{c_{l_2}^2 - a_4 + a_3}{c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2}\operatorname{div}\left(\frac{e}{|x|}\delta\left(t-|x|/c_{l_1}\right)\right). \tag{23}$$

Используя формулы (15) – (18), запишем системы (19), (20) для u, v в виде

$$\Delta\left(u - \frac{e}{4\pi c_t^2|x|}\delta(t-|x|/c_t)\right) = \frac{1}{4\pi\left(c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2\right)}\left[\frac{a_4 - c_{l_2}^2}{a_3 c_{l_2}^2}\left(c_{l_1}^2 - a_4 + a_3\right)\right.$$

$$\nabla\operatorname{div}\left(\frac{e}{|x|}\delta\left(t-|x|/c_{l_2}\right)\right) - \frac{a_4 - c_{l_1}^2}{a_3 c_{l_1}^2}\left(c_{l_2}^2 - a_4 + a_3\right)\nabla\operatorname{div}\left(\frac{e}{|x|}\delta\left(t-|x|/c_{l_1}\right)\right) -$$

$$\left.-\frac{c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2}{c_t^2}\nabla\operatorname{div}\left(\frac{e}{|x|}\delta(t-|x|/c_t)\right)\right]; \tag{24}$$

$$\Delta v = \frac{1}{4\pi\left(c_{l_1}^2 - c_{l_2}^2\right)}\left[\frac{c_{l_1}^2 - a_4 + a_3}{c_{l_2}^2}\nabla\operatorname{div}\left(\frac{e}{|x|}\delta\left(t-|x|/c_{l_2}\right)\right)\right) -$$

$$\left.-\frac{c_{l_2}^2 - a_4 + a_3}{c_{l_1}^2}\nabla\operatorname{div}\left(\frac{e}{|x|}\delta\left(t-|x|/c_{l_1}\right)\right)\right]. \tag{25}$$

Решением уравнений (24), (25) являются функции [13]

$$u=\frac{1}{4\pi\left(c_{l_1}^2-c_{l_2}^2\right)}\left[\frac{\left(c_{l_1}^2-c_{l_2}^2\right)e}{c_t^2\,|x|}\delta\left(t-|x|/c_t\right)+\frac{a_4-c_{l_2}^2}{a_3}\left(c_{l_1}^2-a_4+a_3\right)\right.$$

$$\nabla\operatorname{div}\left(\frac{e}{|x|}\theta\left(t-|x|/c_{l_2}\right)\right)-\frac{a_4-c_{l_1}^2}{a_3}\left(c_{l_2}^2-a_4+a_3\right)\nabla\operatorname{div}\left(\frac{e}{|x|}\theta\left(t-|x|/c_{l_1}\right)\right)-$$

$$\left.-\left(c_{l_1}^2-c_{l_2}^2\right)\nabla\operatorname{div}\left(\frac{e}{|x|}\theta\left(t-|x|/c_t\right)\right)\right];\qquad(26)$$

$$v=\frac{1}{4\pi\left(c_{l_1}^2-c_{l_2}^2\right)}\left[\left(c_{l_1}^2-a_4+a_3\right)\nabla\operatorname{div}\left(\frac{e}{|x|}\theta\left(t-|x|/c_{l_2}\right)\right)-\right.$$

$$\left.-\left(c_{l_2}^2-a_4+a_3\right)\nabla\operatorname{div}\left(\frac{e}{|x|}\theta\left(t-|x|/c_{l_1}\right)\right)\right].$$

Теорема доказана.

Отметим, что при исчезновении пористости формула (26) переходит к фундаментальному решению системы уравнений теории упругости [13, 14].

Обратная динамическая задача для системы уравнений пороупругости

Пусть полупространство $R_+^3=\{x:(x_1,\,x_2)\in R^2,\,x_3>0\}$ заполнено изотропной пористой средой.

Задача А. Требуется по режиму колебаний свободной поверхности

$$u\,|_{x_3=0}=u^0\left(t,x'\right),\quad t>0,\quad x'=\left(x_1,\,x_2\right)\in R^2\qquad(27)$$

определить вектор-функцию $f(x)$ в системе уравнений теории пороупругости

$$\begin{gathered}L_1(u,v)\equiv\partial_t^2u-c_t^2\ \Delta u+\left(c_t^2-a_1\right)\ \nabla\ \nabla\cdot u+a_2\ \nabla\ \nabla\cdot v=g(t)\cdot f(x),\\ L_2(u,v)\equiv\partial_t^2v+a_3\ \nabla\ \nabla\cdot u-a_4\ \nabla\ \nabla\cdot v=g(t)\cdot f(x)\end{gathered}\qquad(28)$$

с начальными и граничными условиями

$$u\,|_{t<0}=v\,|_{t<0}\equiv 0\ ;\qquad(29)$$

$$\overline{h}_{13}=\overline{h}_{23}=0,\quad \overline{h}_{33}+\overline{P}=0,\quad \frac{\rho_{0,l}}{\rho_0}\ \overline{P}=0,\quad x_3=0\ ;\qquad(30)$$

$$\overline{P}=\left(K-\rho\rho_s\ \alpha\right)\ \nabla\cdot u-\rho\rho_l\ \alpha\ \nabla\cdot v,\quad \overline{h}_{k3}=-\mu\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_k}\right),\ k=1,2;$$

$$\overline{h}_{33}=-2\mu\frac{\partial u_3}{\partial x_3}-\left(\lambda-\frac{\rho_s}{\rho}\ K\right)\ \nabla\cdot u+\frac{\rho_l}{\rho}\ K\ \nabla\cdot v,\quad K=\lambda+\frac{2}{3}\ \mu.$$

Здесь функция $g(t)$ известна; $g(t)$ – параметры Ламе; $\rho^3\cdot\alpha_3$ – второй модуль всестороннего сжатия; $\Delta,\nabla,\nabla\cdot$ и ∇_x – операторы Лапласа, градиента, дивергенции и ротора по $x=\left(x_1,x_2,x_3\right)$ соответственно; $\alpha=\rho\alpha_3+K/\rho^2$.

Удобно представить систему дифференциальных уравнений (28) в виде

$$L_1(u,v) \equiv \partial_t^2 u + c_t^2\ \nabla_x \nabla_x u - a_1\ \nabla\ \nabla \cdot u + a_2\ \nabla\ \nabla \cdot v = g(t) \cdot f(x),$$
$$L_2(u,v) \equiv \partial_t^2 v + a_3\ \nabla\ \nabla \cdot u - a_4\ \nabla\ \nabla \cdot v = g(t) \cdot f(x). \qquad (28`)$$

Здесь мы воспользовались хорошо известной формулой векторного анализа

$$\Delta u = \nabla\ \nabla \cdot u - \nabla_x \nabla_x u.$$

Пусть $w = (u,v)^T$, $u,\ v \in C^3(t \geq 0, x_3 \geq 0)$ есть решение задачи А. Из условий (27), (30) находятся функции

$$u_{(x_3)}\,|_{(x_3=0)} = u^1(t,x'),\ v_{3x_3}\,|_{x_3=0} = v_3{}^1(t,x').$$

Положим $u = u - x_3\ u^1$, $v = v - x_3 v^1$, где $v_k^1 = (v_k)_{(x_3)}\,|_{(x_3=0)}$, $k = 1,2$. Тогда $w \in C^2(t \geq 0, x_3 \geq 0)$ и $L\,w = g \cdot f - G$, где $f = (f,f)^T$, $G = L\left[x_3 \cdot w^1\right] = (L_1\left(x_3\ u^1, x_3\ v^1\right), L_1\left(x_3\ u^1, x_3\ v^1\right))^T$, причем $w_{x_3}\,|_{x_3=0} \equiv 0$. Обозначим через w четное продолжение w в полупространстве $x_3 < 0$. Положим $\omega = w + q$, где $L\ q = G$, $q\,|_{t<0} \equiv 0$. Тогда приходим к следующей задаче (задача В):

$$L[\omega] = g(t) \cdot f(x), \quad x \in R^3$$

$$\omega\,|_{t<0} \equiv 0.$$

Требуется по известной функции $u\,|_{x_3=0} = u^0(t,x')$ восстановить $f(x)$ ($g(t)$ – заданная функция).

Прежде чем сформулировать результаты, введем ряд понятий и обозначений: $P_u -$ ортогональный проектор $P_u w = u, P_v = I - P_u, \tilde{T} = \left(\tilde{t}_{ij}\right), \tilde{T}^{-1} = \left(\tilde{t}_{ij}^{-1}\right), i,j = 1,2$ такие, что

$$\tilde{T}\begin{bmatrix} a_1 & -a_2 \\ -a_3 & a_4 \end{bmatrix}\tilde{T}^{-1} = \mathrm{diag}\left(c_{l_1}^2, c_{l_2}^2\right).$$

Далее, следуя [15], определим $C^{\infty,0}$ – класс вектор-функций со следующими условиями:

$$f(x) \in C^\infty\left(R^3\right), \quad \lim_{|x|\to\infty} |x| \cdot |f(x)| < \infty; \qquad (31)$$

$$\nabla \cdot f, \quad \nabla_x f \in C_0^\infty\left(R^3\right); \qquad (32)$$

$$\left(\mathrm{supp}\nabla \cdot f \cup \mathrm{supp}\nabla_x f\right) \cap \{x \mid x_3 = 0\} = \varnothing\,. \qquad (33)$$

Класс функций, удовлетворяющих первым двум условиям, обозначим через $C_1^{\infty,0}$.

Пусть F_0 – множество матриц $F(x) = \left(F_{ij}(x)\right)$, ($i,j = 1,2$, F_{1j} – вещественные функции, $F_{2j} = \left(F_{2j}^1, F_{2j}^2, F_{2j}^3\right)$ – вектор-функции, такие, что

$$F_{ij}(x', x_3) = F_{ij}(x', -x_3), \quad F_{ij} \in C_0^\infty, \quad x' = (x_1, x_2)\,, \qquad (34)$$

$$J\ F = 0\,, \qquad (35)$$

$$J\ F=\left(\int_0^\infty F_{12}dx_3,\ \int_0^\infty F_{22}dx_3,\ \nabla\cdot F_2\right),$$

$$F_k(x)=F_{k1}(x)+\int_0^\infty F_{k2}dx_3,\quad k=1,2\ ,$$

$$\operatorname{supp}F\cap\{x\mid\ x_3=0\}=\varnothing.$$

Класс матриц, удовлетворяющих условиям (34), (35), обозначим $F_{0,1}$.

Для произвольной вектор-функции $f\in C^1(R^3)$ положим

$$f_+(x)=(f(x',x_3)+f(x',-x_3))/2. \tag{36}$$

Тогда функция f восстанавливается по функциям $f_+,(f_{x_3})_+$ по формуле

$$f(x)=f_+(x)+\int_0^{x_3}(f_{x_3})_+dx_3. \tag{37}$$

$L_{2,\rho}\left(R_+^3,\ \rho(x)\right)-$ пространство функций, суммируемых с квадратом на R_+^3 с весом $\rho(x)=x_3^{-1}$.

Обозначим через F замыкание $F_0\subseteq L_{2,\rho}$ по норме $\left(F\in F_0\right)$

$$\|F\|=\sum_{i,j=1}^{2}\left\|F_{ij}\right\|_{L_{2,\rho}}^2.$$

Введем также операторы $H_c,S_c,\hat{H},\hat{S},A$:

$$(H_c\ u)(x)=i2\sqrt{\pi}\ c\ x_3\int\delta'(|x'-y'|^2-c^2\ t^2-x_3^2)\ u(t,y')dy'dt\ ; \tag{38}$$

$$(S_c\ f)(t,x')=-2\ \pi\ c\ t\int\delta'(|x'-y'|^2-c^2\ t^2+y_3^2)f(y)dy\ ; \tag{39}$$

$$\hat{H}=t_{11}\ H_{c_{l_1}}\oplus t_{12}\ H_{c_{l_2}}\oplus H_{c_t},\quad \hat{S}=t_{11}\ S_{c_{l_1}}\oplus t_{12}\ S_{c_{l_2}}\oplus S_{c_t}\ ;$$

$$Af=F,\quad F(x)=\begin{bmatrix}(\nabla\cdot f)_+ & (\nabla\cdot f_{x_3})_+\\ (\nabla\mathrm{x}f)_+ & (\nabla\mathrm{x}f_{x_3})_+\end{bmatrix},\quad f\in C^\infty. \tag{40}$$

Лемма 1. Имеет место тождество $A\ L_j=\hat{L}_j\ A,\ \ j=1,2$, где

$$\hat{L}_1=t_{11}H_{c_{l_1}}\oplus t_{12}H_{c_{l_2}}\oplus H_{c_t},\quad \hat{L}_2=t_{21}\ H_{c_{l_1}}\oplus t_{22}\ H_{c_{l_2}}\oplus\partial_t^2.$$

Доказательство леммы следует, из коммутируемости операторов $\nabla\cdot,\nabla\mathrm{x},\ H_c,\partial_t^2$ и "+".

Рассмотрим задачу Коши:

$$L[w]=0,\quad x\in R^3,\quad t>0\ ; \tag{41}$$

$$w|_{t=0}=f(x),\quad \partial_t w|_{t=0}=0\ . \tag{42}$$

Лемма 2. Для любой $f \in C^{\infty,0}$ существует единственное решение задачи Коши (41), (42) $w(t,x)$ из класса $C_1^{\infty,0}$ для любого $t > 0$.

Доказательство леммы 2 следует из леммы 1 [15], следствий 3 [15] и решения волнового уравнения при фиксированном t с начальными данными из C_0^{∞}.

Введем оператор S с областью определения F_0 переводящий матрицу $F \in F_0$ в матрицу

$$U(t,x') = \begin{bmatrix} (\nabla \cdot u)_+ & (\nabla \cdot u_{x_3})_+ \\ (\nabla \mathrm{x} u)_+ & (\nabla \mathrm{x} u_{x_3})_+ \end{bmatrix}|_{x_3=0,\, t>0} \tag{43}$$

где $u = P_u\ w,\ w(t,x)$ – решение задачи Коши (41), (42) и $f = A^{-1}\ F$.

Таким образом задача В свелась к следующей задачи C: по заданной матрице $U(t,x')$ найти F из уравнения $A\,F = U$. Для этой задачи справедлива.

Теорема [15]. Имеют место утверждения:

1. Оператор S продолжается по непрерывности до изометрического оператора $S:\ F \to L_{2,\rho}$, т.е.

$$\|SF\| = \|F\| \quad \forall F \in F.$$

2. Матрица $U(t',x)$ из $L_{2,\rho}$ принадлежит области значения оператора $S \Leftrightarrow \hat{H}U = 0$ и $J\hat{S}^*U = 0$.

3. Если $SF = U$, то $F = \hat{S}^*U$ (формула обращения).

Пусть

$$(Wu) = \partial_t u^g(t,x),$$

где $u^g = P_{u^g} w^g$, $w^g(t,x)$ – решение задачи $L\ w^g = g \cdot f$, $w^g|_{t<0} \equiv 0$.

По вектору $\left(\partial_t u^g,\ \partial_t u_{x_3}^g\right)|_{x_3=0}$ можно найти

$$\left(u,\ u_{x_3}\right)|_{x_3=0} = W^{-1}\left(\partial_t u^g,\ \partial_t u_{x_3}^g\right)|_{x_3=0}\,. \tag{44}$$

Следовательно из $L\ w = 0$, с учетом (44), найдем $u_{x_3x_3}|_{x_3=0}$. Для этого достаточно вектор **w** представить в виде суммы потенциальной и соленоидальной части. Тем самым $Au|_{x_3=0}$. Из теоремы вытекает

Следствие [16]. Если $g \in C(0,\infty)$, $g \neq 0$, $f \in C^{\infty,0}$, то решение задачи В единственно, причем вектор-функция f определяется следующей цепочкой отображений:

$$\left(u^g,\ u_{x_3}^g\right)|_{x_3=0} \xrightarrow{\partial_t} \left(\partial_t u^g,\ \partial_t u_{x_3}^g\right)|_{x_3=0} \xrightarrow{W^{-1}} \left(u,\ u_{x_3}\right)|_{x_3=0} \to$$

$$\to A\ u|_{x_3=0} \xrightarrow{S^{-1}} A\ u|_{t=0} \xrightarrow{A^{-1}} f(x).$$

Замечание. Задача А возникает при рассмотрении коэффициентных обратных задач для системы уравнений теории пороупругости с помощью метода линеаризации.

Заключение

В данной работе моделирование ведется в терминах c_s, c_{p_1}, c_{p_2} и парциальных плотностях ρ_l, ρ_s с использованием факта установленного существования взаимно-однозначного соответствия между упругими параметрами λ, μ, α теории В.Н. Доровского [1–3] и скоростями распространения сейсмических волн c_s, c_{p_1}, c_{p_2} в упруго-пористых средах. В первом разделе для полноты изложения приведена полученная в [1–3] квазилинейная система уравнений теории пороупругости.

Во втором – получена линейная система уравнений теории пороупругости для однородной среды.

В третьем разделе построено фундаментальное решение для системы уравнений теории пороупругости в случае однородной среды.

В четвертом – рассмотрена обратная задача об определении источника в полупространстве из системы уравнений теории пороупругости по дополнительной информации о режиме свободной поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Доровский В.Н.* Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика. 1989. Т. 30. № 7. С. 39–45.
2. *Доровский В.Н.*, *Перепечко Ю.В.*, *Роменский Е.И.* Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформируемых средах // Физика горения и взрыва. 1993. Т. 29. № 1. С. 93–103.
3. *Блохин А.М., Доровский В.Н.* Проблемы математического моделирования в теории многоскорстного континуума. Новосибирск, 1994. 183 с.
4. *Imomnazarov Kh.Kh.* Uniqueness of determination of a sourse in the Cauchy problem for the system of equations of continual filtration theory // Appl. Math. Lett. 1998. V. 11(2). P. 75–79.
5. *Алексеев А.С.*, *Имомназаров Х.Х.*, *Грачев Е.В.*, *Рахмонов Т.Т.*, *Имомназаров Б.Х.* Прямые и обратные динамические задачи для системы уравнений континуальной теории фильтрации // Сибирский журн. индустр. матем. 2004. Т. 7. № 1. С. 3–8.
6. *Imomnazarov SH.*, *Imomnazarov Kh*, *Kholmurodov A.*, *Dilmuradov N.* On a problem arising in a two-fluid medium // International Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2018. V. 11(3). P. 49–57.
7. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range // J. Acoust. Soc. Am. 1956. V. 28 (2). P.168–178. DOI: 10.1121/1.1908239.
8. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range // J. Acoust. Soc. Am. 1956. V. 28(2). P.179–191. DOI: 10.1121/1.1908241.
9. *Pride S.R.* Governing equations for the coupled electromagnetics and acoustics of porous media // Phys. Rev. B. 1994. V. 50(21). P. 15678–15696. DOI: 10.1103/PhysRevB.50.15678.
10. *Имомназаров Х.Х.* Несколько замечаний для системы уравнений Био, описывающей пористую среду // Материалы международной конференции «Выпускник НГУ и научно-технический прогресс». Часть 1. Новосибирск, 1999. С. 46–47.
11. *Imomnazarov Kh.Kh.* Some remarks on the Biot system of equations describing wave propagation in a porous medium // Appl. Math. Lett. 2000. V. 13(3). P. 33–35.
12. *Imomnazarov K.K.*, *Imomnazarov S.K.*, *Korobov P.V.*, *Kholmurodov A.E.* Direct and inverse problems for nonlinear one-dimensional poroelasticity equations // Doklady RAS. 2014. V. 89(2). P. 250–252
13. *Романов В.Г.* Структура решения задачи Коши для системы уравнений электродинамики и упругости в случае точечных источников // Сибирский матем. журнал. 1995. Т. 36. № 3. С. 628–649.
14. *Аки К.*, *Ричардс П.* Количественная сейсмология. М.: Мир, 1983. 830 с.

15. *Холмуродов А.Э.*, *Дилмуродов Н.* Математическое моделирование одной нелинейной динамической системы, возникающей в насыщенной жидкостью пористой среде // Проблемы вычислительной и прикладной математики. ТУИТ. 2017. № 2(8). С. 56–61.
16. *Холмуродов А.Э.*, *Дильмурадов Н.* Математическое моделирование одномерного нелинейного движения в насыщенной жидкостью пористой среде // Математическое моделирование и численные методы. МГТУ. 2018. № 1. С. 21–34. DOI: 10.18698/2309-3684-2018-1-315.
17. *Имомназаров Х.Х.*, *Туйчиева С.Т.* Обратная задача для системы уравнений пороупругости // Доклады АН Республики Узбекистан. 2015. № 2. С. 33–36.

Статья поступила 11.08.2020

Imomnazarov Kh.Kh., Kholmurodov A.E., Omonov A.T. (2022) DIRECT AND INVERSE DYNAMIC PROBLEMS OF POROELASTICITY. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 75. pp. 87–99

DOI 10.17223/19988621/75/8

Keywords: direct problem, poroelasticity, distributed source, inverse problem, fundamental solution.

In applied problems related to propagation of elastic waves, it is often necessary to take into account porosity, fluid saturation of the media, and the hydrodynamic background. Real geological media are multiphase, electrically conductive, fractured, porous, etc. When propagating, seismic waves dissipate due to the absorption of energy. In this paper, the wave propagation process occurs in terms of partial densities of phases, stress tensor, pore pressure, and velocities of the corresponding phases. In the first section, for completeness, the presentation presents a quasilinear system of equations of the poroelasticity theory [1–3]. In the second section, the corresponding linear system of equations of the poroelasticity theory for a homogeneous medium is obtained. In the third section, we construct a fundamental solution for the system of equations of the poroelasticity theory obtained in the second section. In the final section, the inverse poroelasticity problem of determining the distributed source in a half-space using additional information about the free surface mode is considered.

Financial support. This work was carried out with partial financial support from the Russian Foundation for Basic Research (18-51-41002) and the Ministry of Innovative Development of the Republic of Uzbekistan (OT-Atex-2018-340).

Kholmatjon Kh. IMOMNAZAROV (Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Laboratory of Computational Problems of Geophysics of the Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: imom@omzg.sscc.ru

Abdulhamid E. KHOLMURODOV (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Dean of the Physics and Mathematics Faculty of Karshi State University, Karshi, Uzbekistan). E-mail: abishx@mail.ru

Alisher T. OMONOV (Senior Lecturer of the Department of Applied Mathematics, Tashkent State Economic University, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: alisher.omonov1992@mail.ru

REFERENCES

1. Dorovsky V.N. (1989) Kontinual'naya teoriya fil'tratsii [Continuous theory of filtration]. *Geologiya i Geofizika – Soviet Geology and Geophysics*. 30(7). pp. 39–45.
2. Dorovsky V.N., Perepechko Yu.V., Romensky E.I. (1993) Volnovyye protsessy v nasyshchennykh poristykh uprugodeformiruyemykh sredakh [Wave processes in saturated porous elastically deformed media]. *Combustion*, *Explosion*, *and Shock Waves*. 29 (1). pp. 93–103.

3. Blokhin A.M., Dorovskiy V.N. (1994) *Problemy matematicheskogo modelirovaniya v teorii mnogoskorstnogo kontinuuma* [Problems of mathematical modeling in the theory of multispeed continuum]. Novosibirsk: Siberian Branch of the Russian Academy of Science.
4. Imomnazarov Kh.Kh. (1998) Uniqueness of determination of a source in the Cauchy problem for the system of equations of continual filtration theory. *Applied Mathematics Letters*. 11(2). pp. 75–79.
5. Alekseyev A.S., Imomnazarov Kh.Kh., Grachev E.V., Rakhmonov T.T., Imomnazarov B.Kh. (2004) Pryamyye i obratnyye dinamicheskiye zadachi dlya sistemy uravneniy kontinual'noy teorii fil'tratsii [Direct and inverse dynamical problems for the system of equations of the continuous filtration theory]. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki*. 7(1). pp. 3–8.
6. Imomnazarov Sh., Imomnazarov Kh., Kholmurodov A., Dilmuradov N. (2018) On a Problem Arising in a Two-Fluid Medium. *International Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 11(3). pp. 49–57.
7. Biot M.A. (1956) Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America*. 28(2). pp. 168–178. DOI: 10.1121/1.1908239.
8. Biot M.A. (1956) Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America*. 28(2). pp. 179–191. DOI: 10.1121/1.1908241.
9. Pride S.R. (1994) Governing equations for the coupled electromagnetics and acoustics of porous media. *Physical Review B*, *Condensed Matter*. 50(21). pp. 15678–15696. DOI: 10.1103/PhysRevB.50.15678.
10. Imomnazarov Kh. (1999) Neskol'ko zamechaniy dlya sistemy uravneniy Bio, opisyvayushchey poristuyu sredu [Some remarks on the Biot system of equations describing wave propagation in a porous medium]. *Materialy mezhdunarodnoy konferentsii "Vypusknik NGU i nauchno-tekhnicheckiy progress". Part 1. Novosibirsk*, *1999*. pp. 46–47.
11. Imomnazarov Kh. (2000) Some remarks on the Biot system of equations describing wave propagation in a porous medium. *Applied Mathematics Letters*. 13(3). pp. 33–35.
12. Imomnazarov K.K., Imomnazarov S.K., Korobov P.V., Kholmurodov A.E. (2014) Direct and inverse problems for nonlinear one-dimensional poroelasticity equations. *Doklady RAS*. 89(2). pp. 250–252
13. Romanov V.G. (1995) Structure of a solution to the Cauchy problem for the system of the equations of electrodynamics and elasticity in the case of point sources. *Siberian Mathematical Journal*. 36(3). pp. 541–561.
14. Aki K., Richards P. (1983) *Quantitative Seismology*. San Francisco: Freeman.
15. Kholmurodov A.E., Dilmurodov N. (2017) Matematicheskoe modelirovanie odnoy nelineynoy dinamicheskoy sistemy, voznikayushchey v nasyshchennoy zhidkost'yu poristoy srede [Mathematical modeling of a nonlinear dynamical system arising in a fluid-saturated porous medium]. *Problemy vychislitel'noy i prikladnoy matematiki – Problems of Computational and Applied Mathematics*. 2(8). pp. 56–61.
16. Kholmurodov A.E., Dilmuradov N. (2018) Matematicheskoe modelirovanie odnomernogo nelineynogo dvizheniya v nasyshchennoy zhidkost'yu poristoy srede [Mathematical modeling of one-dimensional non-linear motion in a fluid-saturated porous medium]. *Matematicheskoye modelirovaniye i chislennyye metody – Mathematical modeling and numerical methods*. 1(1). pp. 21–34. DOI: 10.18698/2309-3684-2018-1-315.
17. Imomnazarov Kh., Tuychiyeva S. (2015) Obratnaya zadacha dlya sistemy uravneniy porouprugosti [An inverse problem for a system of equations of poroelasticity]. *Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan*. 2(2). pp. 33–36.

Received: August 11, 2020