

УДК 539.3

DOI 10.17223/19988621/75/13

А. Юлдашев, Ш.Т. Пирматов

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ГИБКИХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ СДВИГА И ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ

Рассматривается построение единой вычислительной схемы решения краевых задач динамического расчета гибких прямоугольных пластин с учетом сдвига и инерции вращения с использованием нелинейной теории Лява, разработка автоматизированной системы динамического расчета гибких пластин, апробация построенной автоматизированной системы и исследование напряженно-деформированного состояния гибких пластин.

Ключевые слова: алгоритм, пластина, сдвиг, инерция вращения, теория упругости, разностные схемы.

Известно, что большинство задач о гибких пластинах решены в постановке Феипля – Кармана являются частным случаем задач теории Лява. Поэтому построение автоматизированной системы полного расчета гибких пластин с заданной степенью точности является актуальной задачей.

Разрабатываемые алгоритмы должны удовлетворять ряду требований, ориентированных на расчет достаточно широкого класса конструкций в различных условиях. Это возможно лишь в том случае, если в основу алгоритмов закладываются достаточно общие механические модели и достаточно разносторонние математические методы, такие, как, например, метод конечных разностей, метод конечных элементов и т.д.

Среди многочисленных теорий оболочек, отличающихся по сложности, обладающих различными границами применимости, выделяется нелинейная динамическая теория типа Тимошенко, учитывающая эффекты деформации поперечного сдвига и инерции вращения. В связи с этим, методы динамического расчета пластин как в классической линейной, так и в геометрической нелинейной постановке задачи постоянно совершенствуются.

Проблемы создания автоматизированной системы вывода и решения уравнений теории упругости и пластичности впервые сформулированы в монографии В.К. Кабулова [2]. В этой работе рассмотрены основные задачи алгоритмизации и указаны пути их смешанного решения. Задачи алгоритмизации решаются в четыре этапа. На первом этапе, в зависимости от геометрических характеристик объекта и физических свойств материала, выбирается расчетная схема данной модели. Второй этап связан с выводом исходных дифференциальных уравнений и соответствующих им граничных и начальных условий. Выбор вычислительного алгоритма и численное решение полученных уравнений составляют третий этап исследований. Четвертый этап завершается анализом полученных численных результатов, описывающих напряженно-деформированное состояние рассматриваемой конструкции [11].

Выбор вычислительного алгоритма и численное решение сформулированных краевых задач составляют основной этап алгоритмизации.

Таким образом в настоящей работе рассматриваются следующие вопросы:

1. Построение единой вычислительной схемы решения краевых задач динамического расчета гибких прямоугольных пластин с учетом сдвига и инерции вращения с использованием нелинейной теории Лява.

2. Разработка автоматизированной системы динамического расчета гибких пластин.

3. Апробация построенной автоматизированной системы.

4. Использование напряженно-деформированного состояния гибких пластин.

1. Уравнения движения прямоугольных пластин с учетом сдвига и инерции вращения

Для вывода уравнений движения пластинки с учетом сдвига и инерции вращения при наличии соответствующих граничных условий используем наиболее удобный вариационный подход [1].

Рассмотрим движение материальной системы на произвольном отрезке от t_0 до t_1 . Известно, что для различных траекторий движения точек системы между начальными и конечными положениями истинные траектории отличаются от других возможных траектории тем, что для истинных должно выполняться условие

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta k - \delta \pi + \delta w) dt = 0, \quad (1)$$

где k – кинетическая энергия системы; π – потенциальная энергия и δw – сумма элементарных работ внешних сил.

Подставим выражения $\delta k, \delta \pi, \delta w$ из [1] в уравнение (1) (соответствующее принципу Гамильтона – Остроградского). Так как вариации $\delta u, \delta v$ и т.д., рассматриваемые на функции z , произвольны, то мы придем к следующему уравнению.

Уравнения движения с учетом сдвига и инерции вращения [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + P_x - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + P_y - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - Q_x - \rho \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y - \rho \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} = 0,$$

где

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \mu \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}, \\ N_y &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$T = \frac{Eh}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right),$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= D \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right), \\ M_y &= D \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right), \\ H &= D \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= k^2 \frac{Eh}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right), \\ Q_y &= k^2 \frac{Eh}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Подставляя (2), (3), (4) и (5) в (1) и вводя безразмерную величину [2], получим систему квазилинейных дифференциальных уравнений движения в перемещениях

$$\begin{aligned} a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + a_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_5 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + a_6 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + P_1 &= \ddot{u}, \\ b_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b_3 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b_4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + b_5 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + b_6 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P_2 &= \ddot{v}, \\ c_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + c_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + c_4 \frac{\partial w}{\partial x} + c_5 \frac{\partial w}{\partial y} + c_6 \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + c_7 \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + q &= \ddot{w}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} d_1 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + d_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + d_3 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + d_4 \frac{\partial w}{\partial x} + d_5 \psi_x &= \ddot{\psi}_x, \\ e_1 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + e_2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + e_3 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + e_4 \frac{\partial w}{\partial y} + e_5 \psi_y &= \ddot{\psi}_y. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_1 &= \eta^2, \quad a_2 = \frac{1+\mu}{2} \eta, \quad a_3 = \frac{1-\mu}{2}, \quad a_4 = \eta^2 \gamma \frac{\partial w}{\partial x}, \\ a_5 &= \frac{1+\mu}{2} \gamma \eta, \quad a_6 = \frac{1-\mu}{2} \gamma \eta \frac{\partial w}{\partial x}, \quad P_1 = \frac{1-\mu^2}{E\gamma^2} P_x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{1-\mu}{2} \eta^2, \quad b_2 = \frac{1+\mu}{2} \eta, \quad b_3 = 1, \quad b_4 = \mu \frac{\partial w}{\partial y}, \\
 b_5 &= \frac{1+\mu}{2} \gamma \eta^2 \frac{\partial w}{\partial x}, \quad b_6 = \frac{1-\mu}{2} \gamma \eta^2 \frac{\partial w}{\partial y}, \quad P_2 = \frac{1-\mu^2}{E\gamma^2} P_y, \\
 c_1 &= \eta^2 \left(k^2 \frac{1-\mu}{2} + \eta \gamma \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \gamma \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad c_2 = (1-\mu) \eta \left(\gamma \frac{\partial u}{\partial y} + \eta \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\
 c_3 &= k^2 \frac{1-\mu}{2} + \mu \eta \gamma \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma \frac{\partial v}{\partial y}, \\
 c_4 &= \eta^2 \left[\gamma \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \left(\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right], \\
 c_5 &= \eta \left[\mu \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1-\mu}{2} \left(\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right], \\
 c_6 &= \frac{\eta k^2}{2\gamma} (1-\mu), \quad c_7 = \frac{k^2(1-\mu)}{2\gamma}, \quad q' = \frac{1-\mu^2}{\gamma^2 E} q, \quad d_1 = \eta^2, \quad d_2 = \frac{1+\mu}{2}, \\
 d_3 &= \frac{1-\mu}{2}, \quad d_4 = -6k^2 \frac{1-\mu}{\gamma} \eta, \quad d_5 = -6k^2 \frac{1-\mu}{\gamma^2}, \quad e_1 = \frac{1-\mu}{2} \eta^2, \\
 e_2 &= \frac{1+\mu}{2} \eta, \quad e_3 = 1, \quad e_4 = -6k^2 \frac{1-\mu}{\gamma}, \quad e_5 = -6k^2 \frac{1-\mu}{\gamma^2}
 \end{aligned}$$

Система уравнений (6) решается в области

$$G = \Omega \times T = \left\{ \begin{aligned} \Omega &= (0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1) \\ T &= (0 \leq t \leq t_1) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

со следующими начальными и граничными условиями:

$$Z|_{t=0} = Z^0, \quad \dot{Z}|_{t=0} = \dot{Z}^0, \quad Z = \{u, v, w, \psi_x, \psi_y\}. \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} N_v \delta u_v|_{\Gamma} &= 0, \quad T_v \delta u_v|_{\Gamma} = 0, \quad M_v \delta \frac{\partial w}{\partial v} \Big|_{\Gamma} = 0, \\ R_v \delta w|_{\Gamma} &= 0, \quad M_v \delta \psi_x|_{\Gamma} = 0, \quad H_v \delta \psi_y|_{\Gamma} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Условия (8) для случая произвольной вариации δu_v , δw на той части Γ_N контура Γ , где заданы внешние нагрузки, приводят к равенствам

$$N_v = T_v = M_v = R_v = 0,$$

что соответствует свободному от внешних нагрузок краю. В общем же случае, когда на части Γ_N контура заданы внешние условия N_v^0, T_v^0, R_v^0 и моменты M_v^0 , то могут быть получены условия, аналогичные (8), которые приводят к равенствам

$$H_v|_{\Gamma} = N_v^0, \quad T_v|_{\Gamma} = T_v^0, \quad R_v|_{\Gamma} = R_v^0, \quad M_v|_{\Gamma} = M_v^0.$$

2. Интегрирования уравнений движения гибких прямоугольных пластин с учетом сдвига и инерций вращения

Система уравнений (6) с начальными и граничными условиями (7) и (8) решается методом сеток в области (7').

$$G = \Omega \times T = \left(\begin{array}{l} \Omega_{h_1, h_2} = \{0 \leq x_i \leq 1, 0 \leq y_i \leq 1\}, \\ T = \{0 \leq t \leq t_0\}. \end{array} \right)$$

$$x_i = ih_1, \quad y_i = jh_2, \quad h_1 = \frac{1}{N_1}, \quad h_2 = \frac{1}{N_2}, \quad i = \overline{0, N_1}, \quad j = \overline{0, N_2}.$$

Пользуясь центральными разностными формулами, аппроксимирующими частные производные по x и y с точностью до второго порядка [3, 5], вместо уравнений (6) получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений [4]:

$$\begin{aligned} & a_{ij}^{(1)} v_{i-1, j-1} + a_{ij}^{(2)} w_{i-1, j-1} + a_{ij}^{(3)} u_{i-1, j} + a_{ij}^{(4)} w_{i-1, j} + a_{ij}^{(5)} v_{i-1, j+1} + a_{ij}^{(6)} w_{i-1, j+1} + a_{ij}^{(7)} u_{i, j-1} + \\ & + a_{ij}^{(8)} w_{i, j-1} + a_{ij}^{(9)} u_{i, j} + a_{ij}^{(10)} w_{i, j} + a_{ij}^{(11)} u_{i, j+1} + a_{ij}^{(12)} w_{i, j+1} + a_{ij}^{(13)} v_{i+1, j-1} + a_{ij}^{(14)} w_{i+1, j-1} + \\ & + a_{ij}^{(15)} u_{i+1, j} + a_{ij}^{(16)} w_{i+1, j} + a_{ij}^{(17)} v_{i+1, j+1} + a_{ij}^{(18)} w_{i+1, j+1} + p_1 = \ddot{u}_{i, j}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & b_{ij}^{(1)} u_{i-1, j-1} + b_{ij}^{(2)} w_{i-1, j-1} + b_{ij}^{(3)} v_{i-1, j} + b_{ij}^{(4)} w_{i-1, j} + b_{ij}^{(5)} u_{i-1, j+1} + b_{ij}^{(6)} w_{i-1, j+1} + b_{ij}^{(7)} v_{i, j-1} + \\ & + b_{ij}^{(8)} w_{i, j-1} + b_{ij}^{(9)} v_{i, j} + b_{ij}^{(10)} w_{i, j} + b_{ij}^{(11)} v_{i, j+1} + b_{ij}^{(12)} w_{i, j+1} + b_{ij}^{(13)} u_{i+1, j} + b_{ij}^{(14)} w_{i+1, j-1} + \\ & + b_{ij}^{(15)} v_{i+1, j} + b_{ij}^{(16)} w_{i+1, j} + b_{ij}^{(17)} u_{i+1, j} + b_{ij}^{(18)} w_{i+1, j+1} + p_2 = \ddot{v}_{i, j}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c_{ij}^{(1)} w_{i-1, j-1} + c_{ij}^{(2)} u_{i-1, j} + c_{ij}^{(3)} w_{i-1, j} + c_{ij}^{(4)} x_{i-1, j} + c_{ij}^{(5)} w_{i-1, j+1} + c_{ij}^{(6)} v_{i, j+1} + c_{ij}^{(7)} w_{i, j-1} + \\ & + c_{ij}^{(8)} y_{i, j+1} + c_{ij}^{(9)} w_{i, j} + c_{ij}^{(10)} v_{i, j+1} + c_{ij}^{(11)} w_{i, j+1} + c_{ij}^{(12)} y_{i, j+1} + c_{ij}^{(13)} w_{i+1, j-1} + c_{ij}^{(14)} u_{i+1, j} + \\ & + c_{ij}^{(15)} w_{i+1, j} + c_{ij}^{(16)} x_{i+1, j} + c_{ij}^{(17)} w_{i+1, j+1} + q = \ddot{w}_{i, j}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & d_{ij}^{(1)} y_{i-1, j-1} + d_{ij}^{(2)} w_{i-1, j} + d_{ij}^{(3)} x_{i-1, j} + d_{ij}^{(4)} y_{i-1, j+1} + d_{ij}^{(5)} x_{i, j+1} + d_{ij}^{(6)} x_{i, j} + d_{ij}^{(7)} x_{i, j+1} + \\ & + d_{ij}^{(8)} y_{i+1, j} + d_{ij}^{(9)} w_{i+1, j} + d_{ij}^{(10)} x_{i-1, j} + d_{ij}^{(11)} y_{i+1, j+1} = \ddot{x}_{ij}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & e_{ij}^{(1)} x_{i-1, j-1} + e_{ij}^{(2)} y_{i-1, j} + e_{ij}^{(3)} x_{i-1, j+1} + e_{ij}^{(4)} w_{i, j-1} + e_{ij}^{(5)} y_{i, j-1} + e_{ij}^{(6)} y_{i, j} + e_{ij}^{(7)} w_{i, j+1} + \\ & + e_{ij}^{(8)} y_{i, j+1} + e_{ij}^{(9)} x_{i+1, j-1} + e_{ij}^{(10)} y_{i+1, j+1} + e_{ij}^{(11)} x_{i+1, j+1} = \ddot{y}_{ij}. \end{aligned}$$

Здесь

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(17)} = -a_{ij}^{(5)} = -a_{ij}^{(13)} = a_2 \frac{N_1 N_2}{4}; \quad a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(18)} = -a_{ij}^{(6)} = -a_{ij}^{(14)} = a_5 \frac{N_1 N_2}{4};$$

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(15)} = a_1 N_1^2; \quad a_{ij}^{(4)} = a_4 N_1^2; \quad a_{ij}^{(16)} = a_4 N_1^2; \quad a_{ij}^{(7)} = a_{ij}^{(11)} = a_3 N_2^2;$$

$$a_{ij}^{(8)} = a_{ij}^{(12)} = a_6 N_2^2; \quad a_{ij}^{(9)} = -2(a_1 N_1^2 + 2a_3 N_2^2); \quad a_{ij}^{(10)} = -2(a_4 N_1^2 + a_6 N_2^2);$$

$$\begin{aligned}
 b_{ij}^{(1)} &= b_{ij}^{(17)} = -b_{ij}^{(5)} = -b_{ij}^{(13)} = b_2 \frac{N_1 N_2}{4}; & b_{ij}^{(2)} &= b_{ij}^{(18)} = -b_{ij}^{(6)} = -b_{ij}^{(14)} = b_5 \frac{N_1 N_2}{4}; \\
 b_{ij}^{(3)} &= b_{ij}^{(13)} = b_1 N_1^2; & b_{ij}^{(4)} &= b_{ij}^{(15)} = b_6 N_1^2; & b_{ij}^{(7)} &= b_{ij}^{(11)} = b_3 N_2^2; & b_{ij}^{(8)} &= b_4 N_2^2; \\
 b_{ij}^{(9)} &= -2(b_1 N_1^2 + 2b_3 N_2^2); & b_{ij}^{(10)} &= -2(b_4 N_1^2 + b_6 N_2^2); & b_{ij}^{(12)} &= b_4 N_2^2; \\
 c_{ij}^{(1)} &= -c_{ij}^{(4)} = 2 \frac{N_1 N_2}{4}; & c_{ij}^{(3)} &= -c_{ij}^{(12)} = c_6 \frac{N_1}{2}; & c_{ij}^{(2)} &= c_1 N_1^2 + c_4 \frac{N_1}{4}; \\
 c_{ij}^{(5)} &= c_3 N_2^2 + c_5 \frac{N_2}{2}; & c_{ij}^{(6)} &= c_7 \frac{N_2}{2}; & c_{ij}^{(7)} &= -2c_1 N_1^2 - 2c_3 N_2^2; \\
 c_{ij}^{(8)} &= c_3 N_2^2 - c_5 \frac{N_2}{2}; & c_{ij}^{(9)} &= -c_7 \frac{N_2}{2}; & c_{ij}^{(11)} &= c_1 N_1^2 - c_4 \frac{N_1}{2}; \\
 c_{ij}^{(13)} &= -c_{ij}^{(10)} = c_2 \frac{N_1 N_2}{4}; & c_{ij}^{(1)} &= -c_{ij}^{(4)}; & d_{ij}^{(1)} &= d_{ij}^{(11)} = -d_{ij}^{(4)} = -d_{ij}^{(8)} = d_2 \frac{N_1 N_2}{4}; \\
 -d_{ij}^{(2)} &= d_{ij}^{(9)} = d_4 \frac{N_1}{2}; & -d_{ij}^{(3)} &= d_{ij}^{(10)} = d_1 N_1^2; & d_{ij}^{(5)} &= d_{ij}^{(7)} = d_3 N_1^2; \\
 d_{ij}^{(6)} &= -2(d_1 N_1^2 + d_3 N_2^2) + d_5; & e_{ij}^{(1)} &= e_{ij}^{(11)} = -e_{ij}^{(3)} = -e_{ij}^{(9)} = e_2 \frac{N_1 N_2}{4}; \\
 e_{ij}^{(2)} &= b_{ij}^{(10)} = e_1 N_1^2; & -e_{ij}^{(4)} &= b_{ij}^{(7)} = e_4 \frac{N_2}{2}; & e_{ij}^{(5)} &= e_{ij}^{(8)} = e_3 N_2^2; \\
 e_{ij}^{(6)} &= -2e_1 N_1^2 - 2e_3 N_2^2 + e_5; & a_5 &= \frac{\eta^2 \gamma N_1}{2} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j}), \\
 a_6 &= \frac{1+\mu}{2} \gamma \eta^2 \frac{N_2}{2} (w_{i,j+1} - w_{i,j-1}), & a_7 &= \frac{1-\mu}{4} N_1 \gamma \eta (w_{i+1,j} - w_{i-1,j}), \\
 b_5 &= \mu \frac{N_2}{2} (w_{i,j+1} - w_{i,j-1}), & b_6 &= \frac{1+\mu}{2} \gamma \eta^2 \frac{N_1}{2} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j}), \\
 b_7 &= \frac{1-\mu}{2} \gamma \eta^2 \frac{N_2}{2} (w_{i,j+1} - w_{i,j-1}), \\
 c_1 &= \eta^2 \left[k^2 \frac{1-\mu}{2} + \eta \gamma \frac{N_1}{2} (u_{i+1,j} - u_{i,j-1}) + \mu \gamma \frac{N_2}{2} (v_{i,j+1} - v_{i,j-1}) \right], \\
 c_2 &= (1-\mu) \eta \gamma \left[\frac{N_2}{2} (u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + \eta \frac{N_1}{2} (v_{i+1,j} - v_{i-1,j}) \right], \\
 c_3 &= \frac{k^2 (1-\mu)}{2} + \mu \eta \gamma \frac{N_1}{2} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + \gamma \frac{N_2}{2} (v_{i,j+1} - v_{i,j-1}), \\
 c_4 &= \eta^2 \left[\gamma \eta N_1^2 (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + \mu \frac{N_1 N_2}{4} (v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j-1} - v_{i-1,j+1} + v_{i-1,j-1}) + \right. \\
 & \left. + \frac{1-\mu}{2} \gamma \left(\frac{N_2^2}{4} (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} - u_{i,j-1}) + \frac{N_1 N_2}{4} (v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j-1} - v_{i-1,j+1} + v_{i-1,j-1}) \right) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{j,j} &= \begin{pmatrix} a_{ij}^{(9)} & 0 & a_{ij}^{(10)} & 0 & 0 \\ 0 & b_{ij}^{(9)} & b_{ij}^{(10)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(7)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{ij}^{(6)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{ij}^{(6)} \end{pmatrix}, \quad b_{j,j+1} = \begin{pmatrix} a_{ij}^{(11)} & 0 & a_{ij}^{(12)} & 0 & 0 \\ 0 & b_{ij}^{(11)} & b_{ij}^{(12)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(8)} & 0 & c_{ij}^{(9)} \\ 0 & 0 & 0 & d_{ij}^{(7)} & 0 \\ 0 & 0 & e_{ij}^{(7)} & 0 & e_{ij}^{(8)} \end{pmatrix}, \\
 c_{j,j-1} &= \begin{pmatrix} 0 & a_{ij}^{(13)} & a_{ij}^{(14)} & 0 & 0 \\ b_{ij}^{(13)} & 0 & b_{ij}^{(14)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(10)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{ij}^{(5)} & 0 \end{pmatrix}, \quad c_{j,j} = \begin{pmatrix} a_{ij}^{(15)} & 0 & a_{ij}^{(16)} & 0 & 0 \\ 0 & b_{ij}^{(13)} & b_{ij}^{(15)} & 0 & 0 \\ c_{ij}^{(13)} & 0 & c_{ij}^{(11)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{ij}^{(9)} & d_{ij}^{(10)} & d_{ij}^{(8)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{ij}^{(10)} \end{pmatrix}, \\
 b_{j,j+1} &= \begin{pmatrix} 0 & a_{ij}^{(17)} & a_{ij}^{(18)} & 0 & 0 \\ b_{ij}^{(17)} & 0 & b_{ij}^{(18)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{ij}^{(13)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{ij}^{(11)} \\ 0 & 0 & 0 & e_{ij}^{(11)} & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$z_{1,i} = \{z_{1,1}, z_{1,2}, \dots, z_{1,N_1-2}, z_{1,N_1-1}\}, \quad z_{1,j} = \{z_{1,1}, z_{1,2}, \dots, z_{1,N_2-2}, z_{1,N_2-1}\}.$$

Для заземленных контуров

- при $i = 1, j = \overline{1, N_2 - 1}$; $A_i = 0$; при $i = N_1 - 1, j = \overline{1, N_2 - 1}$; $C_{N_1-1} = 0$;
- при $i = \overline{1, N_1 - 1}, j = 1$; $a_{j,j-1} = b_{j,j-1} = c_{j,j-1} = 0$;
- при $i = \overline{1, N_1 - 1}, j = N_2 - 1$; $a_{j,j+1} = b_{j,j+1} = c_{j,j+1} = 0$.

Расчетные величины (3) – (5) в сеточной форме имеют вид

$$\begin{aligned}
 N_x &= \gamma \left\{ \eta \frac{N_1}{2} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + \gamma \eta \frac{N_1^2}{4} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j})^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \mu \left[\frac{N_2}{2} (v_{i,j+1} - v_{i,j-1}) + \frac{1}{2} \gamma \frac{N_2^2}{4} (w_{i,j+1} - w_{i,j-1})^2 \right] \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_y &= \gamma \left\{ \frac{N_2}{2} (v_{i,j+1} - v_{i,j-1}) + \frac{1}{2} \gamma \frac{N_2^2}{4} (w_{i,j+1} - w_{i,j-1})^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \mu \left[\eta \frac{N_1}{2} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + \gamma \eta^2 \frac{N_1^2}{4} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j})^2 \right] \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T &= \gamma \left[\frac{N_2}{2} (u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + \frac{\eta N_1}{2} (v_{i+1,j} - v_{i-1,j}) + \right. \\
 &\quad \left. + \gamma \eta \frac{N_1 N_2}{4} (w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j-1} + w_{i-4,j-1}) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_x &= \eta \frac{N_1}{2}(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) + \mu \frac{N_2}{2}(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}), \\
 M_y &= \frac{N_2}{2}(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) + \mu \eta \frac{N_1}{2}(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}), \\
 H &= \frac{N_2}{2}(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) + \eta \frac{N_1}{2}(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}), \\
 Q_x &= \gamma \eta \frac{N_1}{2}(w_{i+1,j} - w_{i-1,j}) + x_{i,j}, \\
 Q_y &= \gamma \frac{N_2}{2}(w_{i,j+1} - w_{i,j-1}) + y_{i,j}.
 \end{aligned}$$

Для решения системы (13) с начальными условиями (7) можно применить симметричную формулу Рунге – Кутты четвертого порядка точности как в (13):

$$\dot{Z} = \Upsilon Z + \tilde{b}, \tag{14}$$

где $Z = \begin{Bmatrix} Z_I \\ Z_{II} \end{Bmatrix}$, $\Upsilon = \begin{pmatrix} 0 & E \\ M & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{b} = \begin{Bmatrix} 0 \\ g \end{Bmatrix}$.

Начальные условия примут вид

$$\left. \begin{aligned}
 Z_I|_{t=0} &= Z_I^0, \quad Z_{II}|_{t=0} = Z_{II}^0, \\
 \dot{Z}_I|_{t=0} &= \dot{Z}_I^0, \quad \dot{Z}_{II}|_{t=0} = \dot{Z}_{II}^0.
 \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

С учетом (15) уравнение (14) решается по известной схеме:

$$\begin{aligned}
 \bar{Z}_I &= Z_I^0 + \tau \bar{\alpha} \bar{Z}_{II}, \quad \bar{Z}_{II} = Z_{II}^0 + \tau \bar{\alpha} \dot{Z}_{II}, \\
 Z_I' &= \dot{Z}_I^0 + \tau \bar{\beta} \bar{Z}_{II}, \quad Z_{II}' = \dot{Z}_{II}^0 + \tau \bar{\beta} \dot{Z}_{II}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь $\bar{Z}_I, \bar{Z}_{II}, Z_I', Z_{II}'$ – соответственно текущие и начальные значения, Z_I', Z_{II}' – искомые функции, τ – шаг по времени, а $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ – векторы константы, фигурирующие в схеме Рунге – Кутты [4–6].

После определения искомых функции методом Рунге – Кутты по формуле (16) вычисляются расчетные величины по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{\gamma N_1}{2\delta} \left[u_{i,j+1} - u_{i-1,j} + \frac{\gamma N_1}{4\delta} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j})^2 \right], \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2\delta} \left[N_2 (u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + \gamma N_1 (v_{i+1,j} - v_{i-1,j}) \right] + \frac{\gamma N_1 N_2}{2\delta} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j})(w_{i,j+1} - w_{i,j-1}), \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{N_2}{2\delta} \left[v_{i,j+1} - v_{i,j-1} + \frac{N_2}{4\delta} (w_{i,j+1} - w_{i,j-1})^2 \right], \\
 \gamma_{11} &= \left(\frac{\gamma N_1}{\delta} \right)^2 (w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}), \\
 \gamma_{12} &= \frac{\gamma N_1 N_2}{4\delta^2} (w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j-1} - w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}), \\
 \gamma_{22} &= \frac{N_2^2}{\delta^2} \left(w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1} \sqrt{b^2 - 4ac} \right),
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$T_1 = \varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22}, T_2 = \varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11},$$

$$M_{11} = -(\gamma_{11} + \mu\gamma_{22}), M_{22} = -(\gamma_{22} + \mu\gamma_{11}), M_{12} = -\gamma_{12}.$$

3. Динамический расчет гибких прямоугольных пластин, защемленных по контуру

Займемся исследованием динамического напряженно-деформированного состояния защемленных по контуру гибких прямоугольных пластин с учетом сдвига и инерции вращения, подвергающихся действию мгновенно приложенной равномерно распределенной нагрузки постоянной интенсивности. Поставленные задачи решаются при нулевых начальных условиях и следующих значениях параметров счёта: шаг сетки по пространственным координатам $N_1 = N_2 = 10$; отношение ширины пластин к длине $a/b = 1$; отношение ширины пластин к толщине $b/h = 50$; шаг по времени $\tau_\lambda = 0.00125$ при решении задачи в линейной, а $\tau_{нл} = 0.00025$ при нелинейной постановке, интенсивность нагрузки $\beta = 400$. Результаты расчета представлены в виде графиков (рис. 1 и 2).

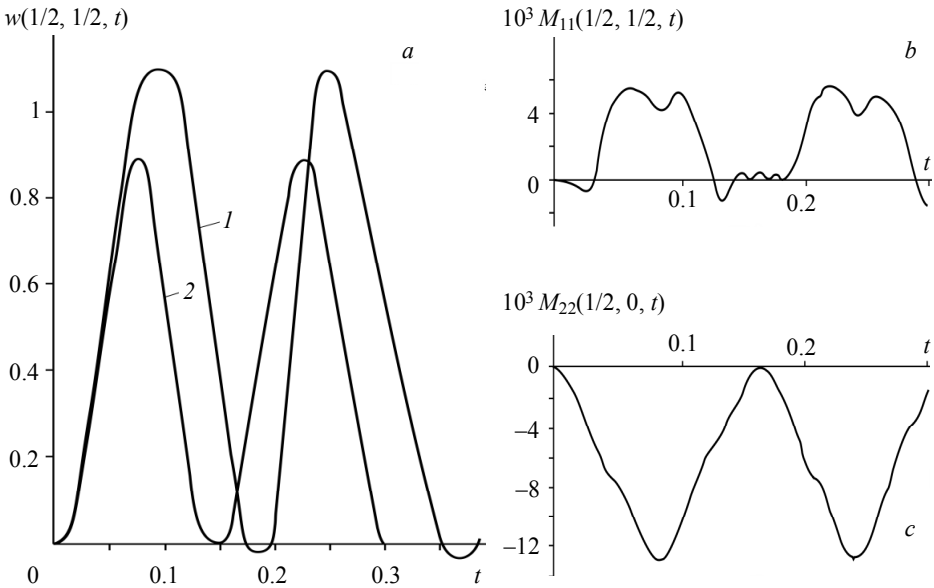


Рис. 1. Прогиб (а), моменты (b, c)
Fig. 1. (a) Deflection; (b, c) moments

Из рис. 1, а видно, что безразмерный прогиб в центре пластины по линейной теории (кривая 1) достигает первого максимума $w_\lambda = 1.12$ при $t = 0.10$ и второго $w_d = 1.15$ при $t = 0.27$, а по нелинейной теории (кривая 2) первый минимум $w_{нл} = 0.87$ наблюдается при $t = 0.07$; а второй $w_{нл} = 0.88$ при $t = 0.22$.

Пренебрежение нелинейными эффектами приводит к завышению оценок максимальных прогибов приблизительно на 30% (29% для первого максимума и 31% для второго).

Картина изменения во времени изгибающих моментов по нелинейной теории показана на рис. 1, *b* и *c*. На рис. 1, *b* представлена кривая изменения M_{22} в середине боковой стороны пластины ($x = 1/2, y = 0$), а на рис. 1, *c* кривая изменения M_{11} в центре пластины ($x = 1/2, y = 1/2$). Отметим, что максимальные значения изгибающего момента на контуре защемленной пластины приблизительно в 2.2 раза превосходят значения изгибающего момента в её центре.

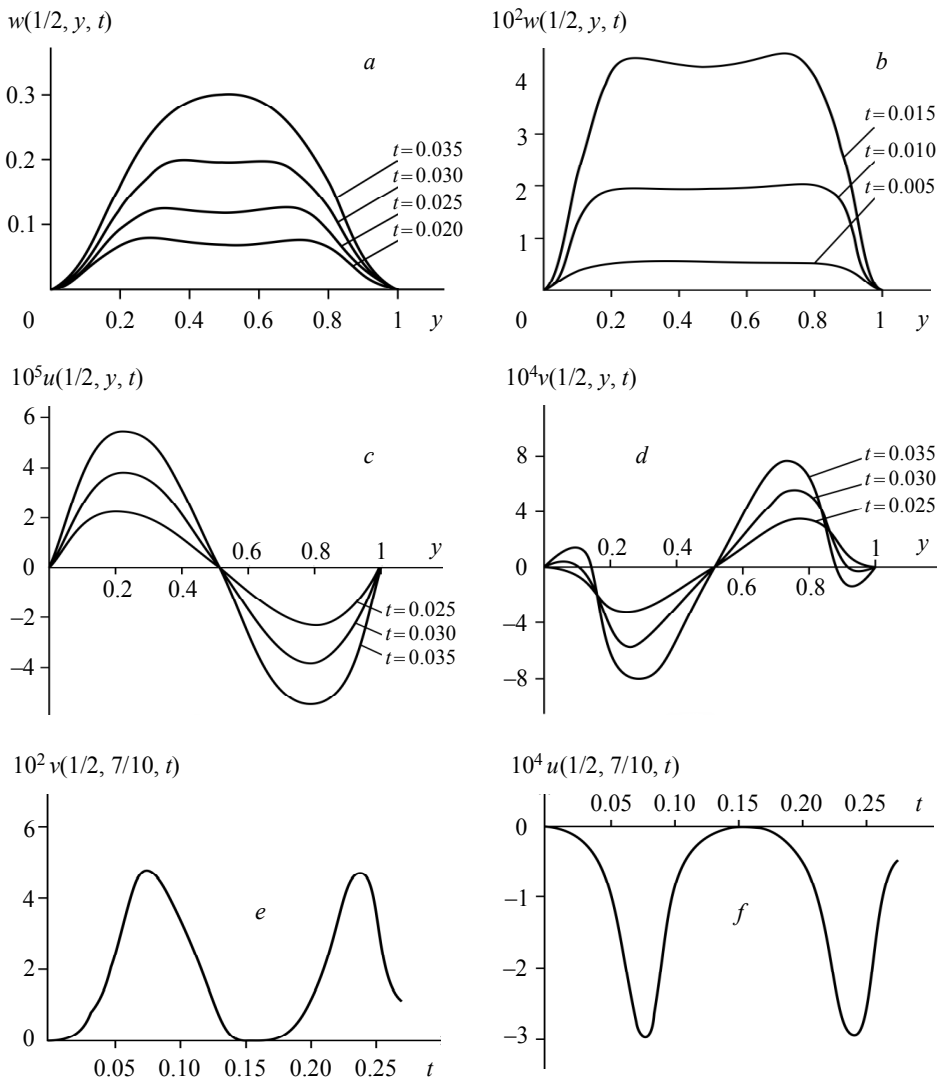


Рис. 2. Прогиб (*a, b*), перемещение по оси Ox (*c, f*), перемещение по оси (*d, e*)
Fig. 2. (*a, b*) Deflection, (*c, f*) movement along the Ox axis, and (*d, e*) movement along the Oy axis

Серии графиков, приведенных на рис. 2, *a-d*, изображают распределения прогиба w (рис. 2, *a* и *b*) а также смещений u (рис. 2, *c*) и v (рис. 2, *d*) вдоль средней линии пластины $x = 1/2$ в разные моменты времени непосредственно вслед за мгновенным приложением к пластине равномерного нормального давления. Наблюдаемая картина соответствует распространению волн от заземленного края к центру. Следует отметить, что графики прогибов w , построенные на рис. 2, *a* для безразмерных времени $t \leq 0,015$ носят, по-видимому, довольно условный характер, поскольку сопоставление решений, полученных по теориям и по трехмерной теории упругости, показывает, что теории оболочек не дают достаточно правильной картины до того момента, когда возбуждение еще не распространилось по толщине пластины (в нашем примере этот период времени приблизительно $t < 0,02$). Графики на рис. 2, *e* и *f* отражают изменение во времени смещений в плоскости пластины, в точке $x = 1/2$, $y = 7/10$ несколько смещенной от центра к боковой стороне пластины. Отметим, что эти смещения имеют почти такой же период колебаний, что и прогиб w середины пластин (рис. 2, *a*).

Данная задача решена и для $N_1 = N_2 = 20$ при одинаковых параметрах $N_1 = N_2 = 10$. Полученный результат показывает, что при одинаковых амплитудах колебаний совпадают два десятичных знака, т.е. метод конечных разностей при вычислении почти сходится.

Заключение

Таким образом, основные результаты работы следующие:

1. Создание пакетов прикладных программ нормативных расчетов является временным компромиссным решением проблемы автоматизированного расчета и проектирования конструкции. Основой систем автоматизированного расчета и проектирования должны стать высокоэффективные специализированные машинные программы, построенные с использованием современных достижений механики и вычислительной математики, утвержденных в качестве нормативов.
2. Построена единая вычислительная схема решения краевых задач динамического расчета гибких прямоугольных пластин с учетом сдвига и инерции вращения методом конечных разностей. При постановке краевых задач в перемещениях использована нелинейная теория Вольмира, причем в динамических задачах учтены как нормальное, так и тангенциальные инерционные слагаемые уравнения движения.
3. Построена единая автоматизированная система полного динамического расчета гибких прямоугольных пластин с учетом сдвига и инерции вращения с произвольными начальными и граничными условиями. В основу системы положены стандартные программы образования и решения больших систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.
4. Разработанная программа апробирована в ходе решения ряда динамических задач о внезапном нагружении нормальным давлением плоских прямоугольных пластин, различным образом закрепленных по внешнему контуру.
5. Учет сил инерции вращения и сдвига, введенных Вольмиром, что приводит к уменьшению изгибных и к увеличению мембранных расчетных величин.
6. Установлено, что с увеличением степени нелинейности задачи уменьшается амплитуда изгибных расчетных величин и период колебаний пластин.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
2. *Кабулов В.К.* Алгоритмизация в теории упругости и деформационной теории пластичности. Ташкент: Фан, 1966. 394 с.
3. *Демидович Б.П., Марон И.А.* (1962) Численные методы анализа / под ред. Б.П. Демидовича. М.: Физматгиз.
4. Ляв А. Математическая теория упругости. М.-Л.: ОНТИ-НКТЛ ССР, 1935. 674 с.
5. *Юлдашев А., Алибоев А.* (1978) Интегрирование уравнения движения гибких оболочек с учетом сдвига и инерций вращения. В.сб.науч.тр. ТашПИ «Численные методы», Ташкент, С. 50–60.
6. *Березин И.С., Жидков Н.П.* (1959) Методы вычислений, Т. I-II, Физматгиз.
7. *Алибоев А., Юлдашев А.* (1978) Интегрирование уравнения движения прямоугольных пластин методом сеток. В.сб. науч.тр. ТашПИ «Автоматизация проектирования», Ташкент, Выпуск 237. С. 89–93.
8. *Бате К.Ю.* (2010) Методы конечных элементов. М: Физматлит, 1024 с.
9. *Корнишин М.С.* (1963) Некоторые вопросы применения метода конечных разностей для решения краевых задач теории пластин // Прикладная механика. Т. 9. № 3.
10. *Юлдашев А., Пирматов Ш.Т., Минарова Н.* (2015) Уравнение равновесия гибких круглых пластин // Austrian J. Technical and Natural Sciences. No. 3–4. P. 32–35.
11. *Yuldashev A., Pirmatov Sh.T.* (2020) Algorithmization of solving dynamic edge problems of the theory of flexible rectangular plates. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* №-66, pp. 143–157.
12. *Коробейников С.Н.* (2000) Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 262 с.
13. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
14. *Берикханова Г.Е., Жумагулов Б.Т., Кангужин Б.Е.* (2010) Математическая модель колебаний пакета прямоугольных пластин с учетом точечных связей // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. № 1(9). С. 72–86.
15. *Базаров М.Б., Сафаров И.И., Шокин Ю.И.* (1996) Численное моделирование колебаний диссипативно однородных и неоднородных механических систем. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 189 с.
16. *Вячкин Е.С., Каледин В.О., Решетникова Е.В., Вячкина Е.А., Гилева А.Е.* (2018) Разработка математической модели статического деформирования слоистых конструкций с несжимаемыми слоями // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. № 55. С. 72–83. DOI: 10.17223/19988621/55/7.

Статья поступила 03.10.2020

Yuldashev A., Pirmatov Sh.T. (2022) ALGORITHMIZATION OF THE SOLUTION OF DYNAMIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF THE THEORY OF FLEXIBLE PLATES TAKING INTO ACCOUNT SHIFT AND ROTATION INERTIA. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 75. pp. 150–165

DOI 10.17223/19988621/75/13

Keywords: algorithm, plates, shear, inertia of rotation, theory of elasticity, difference schemes.

Most of the problems on flexible plates are solved in the Föppl–von Karman formulation, which is Love's special case. The constructed algorithms are not economical in terms of implementation on a computer. Therefore, construction of algorithms for the complete calculation of flexible plates with a given degree of accuracy with allowance for the shear and inertia of rotation is becoming a topical issue.

The problem of creating an automated inference system and solving the equations of the theory of elasticity and plasticity were first posed in the monograph by V.K. Kabulov. In this

work, for the first time, the main problems of algorithmization are formulated and ways of their machine solution are outlined. The problem of algorithmization is solved as follows: depending on geometric characteristics of the object and physical properties of the material, a design scheme of this model is selected; derivation of the initial differential equations and the corresponding boundary and initial conditions; selection of a computational algorithm and numerical solution of the obtained equations; analysis of the obtained numerical results describing the stress-strain state of the structure under consideration.

This work consists of an introduction, three sections and a conclusion. In the first paragraph, the equations of motion of rectangular plates are given. Substituting the expression for the force of moments and shearing forces and introducing a dimensionless value, a system of equations in displacements is obtained. In the second section, using the central difference formulas, a system of quasilinear ordinary differential equations is obtained. Taking into account the boundary and initial conditions, the system of equations is reduced to matrix form, which can be solved by the Runge–Kutta method. In the third paragraph, an analysis of the results obtained is presented.

Adash YULDAESHEV (Candidate of Physics and Mathematics, Tashkent State Technical University, Tashkent, Uzbekistan)

Shamshod T. PIRMATOV (Candidate of Physics and Mathematics, Tashkent State Technical University, Tashkent, Uzbekistan) E-mail: shamshod@rambler.ru

REFERENCES

1. Vol'mir A.S. (1972) *Nelineynaya dinamika plastin i obolochek* [Nonlinear dynamics of plates and shells]. Moscow: Nauka.
2. Kabulov V.K. (1966) *Algoritmizatsiya v teorii uprugosti i deformatsionnoy teorii plastichnosti* [Algorithmization in the theory of elasticity and deformation theory of plasticity]. Tashkent: Fan.
3. Demidovich B.P., Maron I.A. (1962) *Chislennyye metody analiza* [Numerical methods of analysis]. Moscow: Fizmatgiz.
4. Love A. (1927) *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge: Cambridge University Press.
5. Yuldashev A., Aliboyev A. (1978) Integrirovaniye uravneniya dvizheniya gibkikh obolochek s uchetom sdviga i inertsii vrashcheniya [Integration of the equation of motion of flexible shells with allowance for shear and rotational inertia]. *Sbornik nauchnykh trudov TashPI "Chislennyye metody," Tashkent*. pp. 50–60.
6. Berezin I.S., Zhidkov N.P. (1959) *Metody vychisleniy* [Computational methods]. Moscow: Fizmatgiz.
7. Aliboyev A. Yuldashev A. (1978) Integrirovaniye uravneniya dvizheniya pryamougol'nykh plastin metodom setok [Integration of the equation of motion of rectangular plates by the grid method]. *Sbornik nauchnykh trudov TashPI "Design automation," Tashkent*, vyp. 237. pp. 89–93.
8. Bathe K.-J. (1996) *Finite Element Procedures*. Prentice Hall.
9. Kornishin M.S. (1963) Nekotorye voprosy primeneniya metoda konechnykh raznostey dlya resheniya kraevykh zadach teorii plastin [Some problems of the application of the finite difference method for solving boundary problems of the theory of plates]. *Prikladnaya mekhanika – Applied mechanics*. 9(3).
10. Yuldashev A., Pyrmatov S.T., Minarova N. (2015) Uravneniye ravnovesiya gibkikh kruglykh plastin [The equation of balance of flexible round plates]. *Austrian Journal of Technical and Natural Sciences*. 3–4. pp. 32–35.
11. Yuldashev A., Pirmatov Sh.T. (2020) Algorithmization of solving dynamic edge problems of the theory of flexible rectangular plates. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 66. pp. 143–157.

12. Korobeynikov S.N. (2000) *Nelineynoye deformirovaniye tverdykh tel* [Nonlinear deformation of solid bodies]. Novosibirsk: Siberian Branch, Russian Academy of Sciences.
13. Rabotnov Yu.N. (1988) *Mekhanika deformiruyemogo tverdogo tela* [Mechanics of deformable solid bodies]. Moscow: Nauka.
14. Berikkhanova G.E., Zhumagulov B.T., Kanguzhin B.E. (2010) Matematicheskaya model' kolebaniy paketa pryamougol'nykh plastin s uchetom tochechnykh svyazey [Mathematical model of rectangular plate stack oscillations with account for point-like coupling]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(9). pp. 72–86.
15. Bazarov M.B., Safarov I.I., Shokin Yu.I. (1996) *Chislennoye modelirovaniye kolebaniy dissipativno odnorodnykh i neodnorodnykh mekhanicheskikh sistem* [Numerical simulation of oscillations of dissipative homogeneous and heterogeneous mechanical systems]. Novosibirsk: Siberian Branch, Russian Academy of Sciences.
16. Vyachkin E.S., Kaledin V.O., Reshetnikov E.V., Vyachkin E.A., Gileva A.E. (2018) Razrabotka matematicheskoy modeli staticheskogo deformirovaniya sloistykh konstruktsey s neszhimayemyimi sloyami [Mathematical modeling of static deformation of layered constructions with incompressible layers]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 55. pp. 72–83. DOI: 10.17223/19988621/55/7.

Received: October 3, 2020