

**В Е С Т Н И К  
ТОМСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА  
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

TOMSK STATE UNIVERSITY  
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

---

***Научный журнал***

---

**2022**

**№ 77**

Свидетельство о регистрации  
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.  
выдано Федеральной службой по надзору  
в сфере массовых коммуникаций, связи  
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

### **Учредитель:**

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Национальный исследовательский  
Томский государственный университет»

## **РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

### **РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА**

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.С. Рогаев (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, Е.Л. Лобода, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, М.А. Шеремет, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

### **EDITORIAL COUNCIL**

#### **Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics**

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

### **EDITORIAL BOARD**

#### **Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics**

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Konstantin S. Rogaev (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenchikov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Egor L. Loboda, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Mikhail A. Sheremet, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесён в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

**Адрес редакции:** 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

**Электронный адрес:** <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

**Контактный тел./факс:** (3822) 529-740

**E-mail:** [vestnik\\_tgu\\_mm@math.tsu.ru](mailto:vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru)

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

|                                                                                                        |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Колесников И.А.</b> Конформное отображение полуплоскости на счетноугольник типа полуплоскости ..... | 5  |
| <b>Норбосамбуев Ц.Д., Тимошенко Е.А.</b> О $k$ -ниль-хороших кольцах формальных матриц .....           | 17 |

### МЕХАНИКА

|                                                                                                                                                                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Ахметшин Л.Р., Смолин И.Ю.</b> Анализ некоторых методов соединения ячеек в механическом тетрахиальном метаматериале .....                                                                                               | 27  |
| <b>Бакушев С.В.</b> Расчет ступенчатого стержня при продольно-поперечном изгибе с дискретной осевой нагрузкой .....                                                                                                        | 38  |
| <b>Бубенчиков М.А., Мамонтов Д.В., Челнокова А.С.</b> Относительная динамика оболочек бифуллеренового комплекса .....                                                                                                      | 54  |
| <b>Бурмашева Н.В., Дьячкова А.В., Просвириков Е.Ю.</b> Неоднородное течение Пуазейля .....                                                                                                                                 | 68  |
| <b>Иванычев Д.А.</b> Определение упругих полей в трансверсально-изотропных телах вращения, вызванных действием объемных сил .....                                                                                          | 86  |
| <b>Орлов А.А., Русских А.С.</b> Аналитическая модель притока жидкости для многоствольной скважины в анизотропном пласте .....                                                                                              | 101 |
| <b>Попандопуло Н.А., Александрова А.Г., Бордовицына Т.В.</b> Анализ динамической структуры вековых резонансов в окологлунном орбитальном пространстве .....                                                                | 110 |
| <b>Прوماхов В.В., Матвеев А.Е., Шульц Н.А., Бахмат В.Р., Дронов Ф.Ю., Туранов Т.Э.</b> Исследование структуры и свойств металломатричных композиционных материалов, полученных методом прямого лазерного выращивания ..... | 125 |
| <b>Рахимов А.А., Валиев А.А.</b> Особенности экспериментального изучения устойчивого и неустойчивого вытеснения в ячейке Хеле-Шоу, заполненной стеклянными шариками .....                                                  | 140 |
| <b>Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А.</b> Моделирование нестационарной фильтрации в системе пласт – трещина гидроразрыва .....                                                                                                  | 158 |

## CONTENTS

### MATHEMATICS

|                                                                                                              |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Kolesnikov I.A.</b> Conformal mapping of a half-plane onto<br>a periodic polygon of half-plane type ..... | 5  |
| <b>Norbosambuev T.D., Timoshenko E.A.</b> About $k$ -nil-good formal matrix rings .....                      | 17 |

### MECHANICS

|                                                                                                                                                                                                                                      |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Akhmetshin L.R., Smolin I.Yu.</b> Analysis of some methods of integration of cells<br>in a mechanical metamaterial .....                                                                                                          | 27  |
| <b>Bakushev S.V.</b> Calculation of a stepped rod under longitudinal-transverse bending<br>with discrete axis loading .....                                                                                                          | 38  |
| <b>Bubenchikov M.A., Mamontov D.V., Chelnokova A.S.</b> Relative dynamics<br>of shells of a bifullerene complex .....                                                                                                                | 54  |
| <b>Burmasheva N.V., Dyachkova A.V., Prosviryakov E.Yu.</b> Inhomogeneous<br>Poiseuille flow .....                                                                                                                                    | 68  |
| <b>Ivanychev D.A.</b> Determination of the elastic fields induced by body forces<br>in transtropic bodies of revolution .....                                                                                                        | 86  |
| <b>Orlov A.A., Russkikh A.S.</b> An analytical model of the fluid influx for a multilateral<br>well in an anisotropic formation .....                                                                                                | 101 |
| <b>Popandopulo N.A., Aleksandrova A.G., Bordovitsyna T.V.</b> Analysis<br>of a dynamic structure of secular resonances in circumlunar orbital space .....                                                                            | 110 |
| <b>Promakhov V.V., Matveev A.E., Schulz N.A., Bakhmat V.R., Dronov F.Yu.,<br/>Turanov T.E.</b> A study of the structure and properties of the metal matrix<br>composite materials obtained by a method of direct laser growing ..... | 125 |
| <b>Rakhimov A.A., Valiev A.A.</b> Features of an experimental study of the stable<br>and unstable displacement in the Hele-Shaw cell filled with glass balls .....                                                                   | 140 |
| <b>Khabibullin I.L., Khisamov A.A.</b> Modeling of unsteady filtration<br>in a formation – hydraulic fracture system .....                                                                                                           | 158 |

## МАТЕМАТИКА

## MATHEMATICS

Научная статья

УДК 517.54

doi: 10.17223/19988621/77/1

MSC: 30C20, 30C30

**Конформное отображение полуплоскости  
на счетноугольник типа полуплоскости****Иван Александрович Колесников***Томский государственный университет, Томск, Россия, ia.kolesnikov@mail.ru*

**Аннотация.** Рассматриваются счетноугольники – односвязные области типа полуплоскости, обладающие симметрией переноса вдоль вещественной оси и границей, состоящей из отрезков прямых. Метод определения параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца распространяется на случай конформного отображения полуплоскости на счетноугольник.

**Ключевые слова:** конформное отображение, счетноугольник, периодический многоугольник, симметрия переноса, интеграл Кристоффеля–Шварца

**Благодарности:** Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2022-884).

**Для цитирования:** Колесников И.А. Конформное отображение полуплоскости на счетноугольник типа полуплоскости // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 77. С. 5–16. doi: 10.17223/19988621/77/1

Original article

**Conformal mapping of a half-plane onto a periodic polygon  
of half-plane type****Ivan A. Kolesnikov***Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, ia.kolesnikov@mail.ru*

**Abstract.** The paper solves the problem of constructing conformal mapping from the half-plane onto a periodic polygon. A periodic polygon  $\Delta$  is a simply connected domain with symmetry of transfer, i.e., it has the property  $L(\Delta) = \Delta$ , where  $L(w) = w + 2\pi$ .

We consider a polygon with boundary consisting of a countable number of straight lines.

Moreover, it contains a half plane,  $\{z : \operatorname{Im} z > M\} \subset \Delta$ , for some  $M$ . We use a Schwarz–Christoffel integral for representation of the mapping. There is a classical problem of determining parameters for equations of this type. They are the preimages of polygon’s vertices under the mapping. The required mapping is embedded in a one-parametric family of conformal mappings of the upper half-plane onto a family of periodic polygons obtained by shifting some vertices of initial periodic polygon with preserved angles. We consider the case when the family of periodic polygons and the initial polygon have the same number of vertices. The problem of determining the parameters of a family of mappings is reduced to the problem of integrating a system of ordinary differential equations.

**Keywords:** conformal mapping, periodic polygon, transfer symmetry, Schwarz–Christoffel integral

**Acknowledgments:** This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (agreement No. 075-02-2022-884).

**For citation:** Kolesnikov, I.A. (2022) Conformal mapping of a half-plane onto a periodic polygon of half-plane type. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 5–16. doi: 10.17223/19988621/77/1

Пусть односвязная область  $\Delta$  обладает следующими свойствами:

- при линейном преобразовании  $L(w) = w + 2\pi$  область  $\Delta$  остается неизменной  $L(\Delta) = \Delta$ ;
- существует  $M$  такое, что  $\{w : \operatorname{Im} w > M\} \subset \Delta$ ;
- часть границы области от точки  $w_0$  до точки  $w_0 + 2\pi$  состоит из конечного числа отрезков прямых.

Такую область называют счетноугольником типа полуплоскости с симметрией переноса вдоль вещественной оси на  $2\pi$ .

Такую область называют также периодическим многоугольником [1], будем использовать термин «счетноугольник», следуя работе [2].

Пусть отображение  $f$  (существование такого отображения следует из теоремы Римана) переводит верхнюю полуплоскость  $\Pi^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$  на счетноугольник  $\Delta$  и  $f(\infty) = \infty$ . Для каждого отображения  $f$  существует вещественное число  $h$ ,  $h > 0$ , такое, что  $f(z + kh) = f(z) + 2k\pi$  [2].

Пусть  $F$  – некоторое отображение, переводящее верхнюю полуплоскость  $\Pi^+$  на заданный счетноугольник  $\Delta$  и удовлетворяющее условию  $F(\infty) = \infty$  (переводящее простой конец на бесконечности в простой конец счетноугольника  $\Delta$  на бесконечности, остающийся неподвижным при преобразовании  $L(w) = w + 2\pi$ ). Множество всех отображений  $f : \Pi^+ \rightarrow \Delta$ , таких что  $f(\infty) = \infty$ , можно записать в виде  $f(z) = F(az + b)$ ,  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Можно выбрать  $a$  и  $b$  так, чтобы  $f(0) = w_0$  и  $f(z + 2k\pi) = f(z) + 2k\pi$ . Таким образом, отображение  $f : \Pi^+ \rightarrow \Delta$ , нормированное условиями  $f(\infty) = \infty$ ,  $f(z + 2k\pi) = f(z) + 2k\pi$ ,  $f(0) = w_0$  – единственное.

**Лемма 1.** *Отображение  $f: \Pi^+ \rightarrow \Delta$ , переводящее простой конец на бесконечности в простой конец счетного угольника  $\Delta$  на бесконечности, остающийся неподвижным при преобразовании  $L(w) = w + 2\pi$ , и удовлетворяющее условию  $f(z + 2k\pi) = f(z) + 2k\pi$ , обладает свойством*

$$\lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty} (f(z) - z) = \gamma, \quad (1)$$

где  $\gamma$  – константа,  $\gamma \in \mathbb{C}$ , предел здесь равномерный относительно  $\operatorname{Re} z$ .

*Доказательство.* Рассмотрим сужение отображения  $f$  на область  $Z = \{z: \operatorname{Im} z > 0, 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi\}$ . Граница области  $f(Z)$  состоит из кривых:  $l_1$  (образ луча  $\{z: \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ ),  $l_2 = l_1 + 2\pi$  (образ луча  $\{z: \operatorname{Re} z = 2\pi, \operatorname{Im} z > 0\}$ ) и части границы счетного угольника  $\Delta$  от точки  $w_0$  до точки  $w_0 + 2\pi$  (образ отрезка  $\{z: \operatorname{Im} z = 0, 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi\}$ ). Отображение  $\xi(w) = e^{iw}$  однолистно переводит область  $f(Z)$  на область  $V$ , граница области  $V$  содержит разрез  $L$ , выходящий из точки  $\xi = 0$ , причем кривые  $l_1$  и  $l_2$  соответствуют различным берегам этого разреза. Отображение  $\zeta(z) = e^{iz}$  переводит область  $Z$  на единичный круг с разрезом по отрезку  $[0, 1]$ . Рассмотрим композицию  $\chi(\zeta) = \xi(f(z(\zeta)))$ , переводящую единичный круг с разрезом на область  $V$ . Так как

$$\lim_{\substack{\zeta \rightarrow \zeta_0 \\ \operatorname{Im} \zeta < 0}} \chi(\zeta) = \lim_{\substack{\zeta \rightarrow \zeta_0 \\ \operatorname{Im} \zeta > 0}} \chi(\zeta),$$

где  $\zeta_0 \in (0, 1)$ , то (по принципу единственности) аналитические продолжения  $\chi(\zeta)$  через верхний и нижний берега разреза  $(0, 1)$  совпадают, и отображение  $\chi(\zeta)$  голоморфно в  $\{\zeta: |\zeta| < 1\} \setminus \{0\}$ , причем ноль – устранимая особенность. Таким образом, композиция  $\chi(\zeta) = \xi(f(z(\zeta)))$  отображает голоморфно и однолистно единичный круг на область  $V$  без разреза  $L$  и раскладывается в нуле в ряд

$$\chi(\zeta) = c_1 \zeta + c_2 \zeta^2 + c_3 \zeta^3 + \dots, \quad c_1 \neq 0.$$

Тогда отображение  $f$  в области  $\{z: \operatorname{Im} z > M, 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi\}$  при некотором  $M > 0$  представимо в виде  $f(z) = -i \ln \xi(\zeta(z)) = z - i \ln(c_1 + c_2 e^{iz} + c_3 e^{2iz} + \dots)$ , и, следовательно,  $\lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty} (f(z) - z) = -i \ln c_1 = \gamma$  равномерно относительно  $\operatorname{Re} z$ . Возвращаясь к отображению  $f: \Pi^+ \rightarrow \Delta$  и учитывая свойство  $f(z + 2k\pi) = f(z) + 2k\pi$ , получаем утверждение леммы.

Двигаясь по границе счетного угольника от точки  $w_0$  до точки  $w_0 + 2\pi$  в положительном направлении, обозначим последовательно встречающиеся угловые точки границы через  $A_1^{(0)}, A_2^{(0)}, \dots, A_n^{(0)}, A_1^{(1)}$ ,  $A_1^{(1)} = A_1^{(0)} + 2\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Остальные вершины  $A_k^{(m)}$  определяются сдвигом вершин  $A_k^{(0)}$  вдоль вещественной оси  $A_k^{(m)} = A_k^{(0)} + 2\pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Вершины  $A_1^{(0)}, A_2^{(0)}, \dots, A_n^{(0)}$  будем называть

вершинами на основном периоде. Угол при вершине  $A_k^{(m)}$  счетноугольника обозначим через  $\alpha_k \pi$ ,  $k=1, \dots, n$ . Если  $A_k^{(m)} \in \mathbb{C}$ , то  $0 < \alpha_k \leq 2$ , если же  $A_k^{(m)} = \infty$ , то  $\alpha_k = 0$ . Видно, что  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n$ . Обозначим через  $a_k$  прообраз вершины  $A_k^{(0)}$ ,  $k=1, \dots, n$ , при отображении  $f$ . Для отображения  $f$ , нормированного условиями

$$f(\infty) = \infty, \quad f(z + 2k\pi) = f(z) + 2k\pi, \quad (2)$$

не ограничивая общности, можно считать, что  $a_k \in [0, 2\pi)$ ,  $k=1, \dots, n$ .

В работе [2] с помощью принципа симметрии Римана–Шварца получен следующий результат.

**Теорема 1.** *Отображение  $f$  верхней полуплоскости на счетноугольник  $\Delta$ , удовлетворяющее условиям (2), представимо в виде:*

$$f(z) = c_1 \int_{z_0}^z G(\zeta) \prod_{k=1}^n \left( \sin \frac{\zeta - a_k}{2} \right)^{\alpha_k - 1} d\zeta + c_2,$$

где  $a_k$ ,  $k=1, \dots, n$ , – прообразы вершин на основном периоде,  $\alpha_k \pi$ ,  $k=1, \dots, n$ , – углы при этих вершинах,  $c_1$ ,  $c_2$  – константы,  $G(z)$  – целая функция.

Покажем, что целая функция  $G(z)$  – константа. В равенстве

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{G'(z)}{G(z)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) \operatorname{ctg} \frac{z - a_k}{2}$$

выполним предельный переход при  $\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty$ . В силу (1) левая часть последнего равенства стремится к нулю, получаем

$$0 = \lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty} \frac{G'(z)}{G(z)} - \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) = \lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty} \frac{G'(z)}{G(z)}.$$

Таким образом, по теореме Лиувилля  $G(z) = \operatorname{const}$  и отображение  $f$  можно записать в виде:

$$f(z) = c_1 \int_{z_0}^z \prod_{k=1}^n \left( \sin \frac{\zeta - a_k}{2} \right)^{\alpha_k - 1} d\zeta + c_2. \quad (3)$$

Формула (3) получена в работе [3] с помощью формулы типа формулы Шварца. Интеграл Кристоффеля–Шварца распространен для отображений из верхней полуплоскости на прямолинейные счетноугольники с двойной симметрией [4]. В работе [5] для отображения из полуплоскости на круговой счетноугольник получено дифференциальное уравнение типа уравнения Шварца. Численный метод нахождения конформных отображений на счетноугольники предложен в [6]. С помощью алгебры свертки и теории рядов Фробениуса [7] предложен метод построения конформных отображений на полигональные области, в том числе счетноугольники типа полуплоскости. С помощью параметрического метода Левнера получено дифференциальное уравнение [8] типа дифференциального уравнения Левнера для отображения верхней полуплоскости на области с симметрией переноса на  $2\pi$ . В работе [9] метод П.П. Куфарева определения акцес-



сорных параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца распространяется на случай конформного отображения верхней полуплоскости на счетноугольник, в работе [10] – на случай круговых счетноугольников.

Конформные отображения полуплоскости на счетноугольники, ограниченные дугами окружностей или отрезками прямых, имеют приложения в различных задачах математической физики [11]–[15].

В настоящей статье метод определения параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца, предложенный в работе [16], распространяется на случай счетноугольника.

Рассмотрим счетноугольник  $\Delta(0)$ , имеющий  $n$  вершин  $A_1^{(0)}, A_2^{(0)}, \dots, A_n^{(0)}$  на основном периоде. Образует семейство счетноугольников  $\Delta(t)$ , сдвигая вершины счетноугольника  $\Delta(0)$  по закону  $A_k^{(m)}(t) := A_k^{(m)} + tB_k$ ,  $B_k \in \mathbb{C}$ ,  $0 \leq t \leq T$  так, чтобы углы многоугольника оставались неизменными при  $0 < t < T$ . Таким образом, многоугольник  $\Delta(t)$  имеет углы  $\alpha_k \pi$  при вершинах  $A_k^{(m)}(t)$ ,  $k=1, \dots, n$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

Пусть отображение  $\tilde{f}: \Pi^+ \times [0, T] \rightarrow \Delta(t)$ ,  $w = \tilde{f}(\zeta, t)$ , при фиксированном  $t$  переводит верхнюю полуплоскость на счетноугольник  $\Delta(t)$ . Отображение  $\tilde{f}$ , согласно лемме 1, обладает свойством

$$\lim_{\text{Im } z \rightarrow +\infty} (\tilde{f}(\zeta, t) - \zeta) = \gamma(t).$$

Будем далее рассматривать семейство отображений  $f(z, t) = \tilde{f}(z - \text{Re } \gamma(t), t)$ . Отображение  $f$  обладает свойством

$$\lim_{\text{Im } z \rightarrow +\infty} (f(z, t) - z) = i\delta(t), \quad \delta(t) \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Обозначим прообраз вершины на основном периоде  $A_k^{(0)}(t) = A_k^{(0)} + tB_k$  многоугольника  $\Delta(t)$  при отображении  $f$  через  $a_k(t)$ ,  $k=1, \dots, n$ , остальные прообразы вершин определяются равенством  $a_k^{(m)}(t) = a_k(t) + 2\pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

Отображение  $f$  можно представить с помощью формулы Кристоффеля–Шварца:

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = f'(z, t) = c(t) \prod_{k=1}^n \left( \sin \frac{z - a_k(t)}{2} \right)^{\alpha_k - 1}. \quad (5)$$

В следующей теореме для семейства отображений  $f$  получено дифференциальное уравнение по параметру  $t$ .

**Теорема 2.** Семейство отображений  $f = f(z, t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\ddot{f}(z, t) = \frac{c(t)}{2} \prod_{k=1}^n \left( \sin \frac{z - a_k}{2} \right)^{\alpha_k - 1} \sum_{k=1}^n \dot{a}_k^2(t) (\alpha_k - 1) \text{ctg} \frac{z - a_k(t)}{2}, \quad (6)$$

точка над функцией означает частную производную по  $t$ .

*Доказательство.* Отображение  $f$  продолжим по принципу симметрии через отрезок вещественной оси  $(a_{k_1}^{(m)}(t), a_{k_1+1}^{(m)}(t))$  в нижнюю полуплоскость, получим отображение  $f_1(z, t) = M_1 \overline{f(\bar{z}, t)} + L_1(t)$ ,  $M_1, L_1(t) \in \mathbb{C}$ , причем  $\dot{M}_1 = 0$  и  $L_1$  зависит от  $t$  линейно, т. е.  $\ddot{L}_1(t) = 0$ . Продолжим еще отображение  $f$  в нижнюю полуплоскость через отрезок  $(a_{k_2}^{(m_2)}(t), a_{k_2+1}^{(m_2)}(t))$ , получим отображение  $f_2(z, t) = M_2 \overline{f(\bar{z}, t)} + L_2(t)$ . Ветви  $f_1$  и  $f_2$  связаны между собой следующим образом:  $f_2(z, t) = \frac{M_2}{M_1} (f_1(z, t) - L_1(t)) + L_2(t)$ . Получаем  $\frac{\ddot{f}_1(z, t)}{f'_1(z, t)} = \frac{\ddot{f}_2(z, t)}{f'_2(z, t)}$ , и, следовательно, функция  $\frac{\ddot{f}}{f'}$  продолжается из верхней полуплоскости в нижнюю через любой отрезок  $(a_k^{(m)}(t), a_{k+1}^{(m)}(t))$  однозначным образом.

Функция  $\frac{\ddot{f}}{f'}$  однозначна в  $\mathbb{C}$  и голоморфна в  $\mathbb{C} \setminus \{a_k^{(m)}(t) : k = 1, \dots, n, m \in \mathbb{Z}\}$ .

Изучим ее поведение в окрестностях изолированных особых точек.

Пусть  $f(a_k^{(m)}(t), t) = A_k^{(m)}(t) \neq \infty$ . В окрестности точки  $a_k^{(m)}(t)$  отображение  $f$  раскладывается в ряд

$$f(z, t) = A_k^{(m)}(t) + c_{k1}^{(m)}(t)(z - a_k^{(m)}(t))^{\alpha_k} + c_{k2}^{(m)}(t)(z - a_k^{(m)}(t))^{\alpha_k+1} + \dots,$$

тогда

$$\begin{aligned} f'(z, t) &= c_{k1}^{(m)}(t)\alpha_k(z - a_k^{(m)}(t))^{\alpha_k-1} + c_{k2}^{(m)}(t)(\alpha_k+1)(z - a_k^{(m)}(t))^{\alpha_k} + \dots, \\ \ddot{f}(z, t) &= c_{k1}^{(m)}(t)(\dot{a}_k^{(m)}(t))^2\alpha_k(\alpha_k-1)(z - a_k^{(m)}(t))^{\alpha_k-2} + \tilde{c}_{k2}^{(m)}(t)(z - a_k^{(m)}(t))^{\alpha_k-1} + \dots, \end{aligned}$$

и

$$\frac{\ddot{f}(z, t)}{f'(z, t)} = \frac{(\dot{a}_k^{(m)}(t))^2(\alpha_k-1)}{z - a_k^{(m)}(t)} + O(1). \quad (7)$$

Пусть  $f(a_k^{(m)}(t), t) = A_k^{(m)}(t) = \infty$ , тогда угол при вершине  $A_k^{(m)}(t)$  в бесконечности равен нулю, и в окрестности точки  $a_k^{(m)}(t)$  отображение  $f$  раскладывается в ряд

$$f(z, t) = \mu \ln(z - a_k^{(m)}(t)) + c_{k0}^{(m)}(t) + c_{k1}^{(m)}(t)(z - a_k^{(m)}(t)) + c_{k2}^{(m)}(t)(z - a_k^{(m)}(t))^2 + \dots,$$

где  $|\mu\pi|$  – расстояние между лучами, образующими вершину в точке  $A_k^{(m)}(t)$ ,

$\arg \mu$  – угол наклона этих лучей к вещественной оси. Получаем, что функция  $\frac{\ddot{f}}{f'}$

в окрестности точки  $a_k^{(m)}(t)$  имеет разложение (7).

Видим, что

$$g(z, t) = \frac{\ddot{f}(z, t)}{f'(z, t)} - \sum_{k=1}^n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{(\dot{a}_k^{(m)}(t))^2 (\alpha_k - 1)}{z - a_k^{(m)}(t)}$$

является голоморфной в  $\mathbb{C}$  по  $z$  функцией.

Найдем сумму ряда

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - a_k^{(m)}(t)} &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - a_k(t) - 2\pi m} = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{z - a_k(t)}{2\pi} - m} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{\zeta} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta - m} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta + m} \right) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{\zeta} + 2\zeta \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta^2 - m^2} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \zeta \pi = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{z - a_k(t)}{2}, \end{aligned}$$

где  $\zeta = \frac{z - a_k(t)}{2\pi}$ . Учитывая, что  $\dot{a}_k^{(m)}(t) = \dot{a}_k(t)$ , получаем

$$g(z, t) = \frac{\ddot{f}(z, t)}{f'(z, t)} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \dot{a}_k^2(t) (\alpha_k - 1) \operatorname{ctg} \frac{z - a_k(t)}{2}. \quad (8)$$

В последнем равенстве выполним предельный переход при  $\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty$ . В силу условия (4)  $\lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty} \frac{\ddot{f}(z, t)}{f'(z, t)} = i\ddot{\delta}(t)$ . Получаем

$$\lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty} g(z, t) = i\ddot{\delta}(t) + \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n \dot{a}_k^2(t) (\alpha_k - 1).$$

Из теоремы Лиувилля следует, что  $g(z, t) = i\ddot{\delta}(t) + \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n \dot{a}_k^2(t) (\alpha_k - 1)$ . Но из равенства (8) видим, что для вещественных  $z$  функция  $g$  вещественна, поэтому  $g(z, t) = 0$  и

$$\ddot{\delta}(t) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \dot{a}_k^2(t) (\alpha_k - 1).$$

Теорема 2 доказана.

**Лемма 2.** Параметр  $c(t)$  не зависит от  $t$ , кроме того,

$$\sum_{k=1}^n \dot{a}_k(t) (\alpha_k - 1) = 0.$$

*Доказательство.* Рассмотрим равенство

$$A_k(t) - A_{k-1}(t) = c(t) \int_{a_{k-1}(t)}^{a_k(t)} \prod_{j=1}^n \left( \sin \frac{\zeta - a_j(t)}{2} \right)^{\alpha_j - 1} d\zeta.$$

Аргумент левой части и аргумент подынтегрального выражения не зависят от  $t$ , следовательно, аргумент  $c(t)$  не зависит от  $t$ .

Прологарифмируем и затем продифференцируем по  $t$  равенство (5), получим

$$\frac{\dot{f}'(z, t)}{f'(z, t)} = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) \dot{a}_k(t) \operatorname{ctg} \frac{z - a_k(t)}{2}.$$

Устремив  $\text{Im } z$  к  $+\infty$ , получим  $\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} + \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) \dot{a}_k(t) = 0$ . Так как  $\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} \in \mathbb{R}$ ,

то  $\dot{c}(t) = 0$ , и  $\sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) \dot{a}_k(t) = 0$ . Лемма 2 доказана.

**Теорема 3.** *Параметры  $a_k(t)$ ,  $k=1, \dots, n$ ,  $t \in [0, T]$ , отображения  $f$  удовлетворяют системе дифференциальных уравнений*

$$\ddot{a}_k(t) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (\alpha_j - 1) (\dot{a}_k(t) - \dot{a}_j(t))^2 \text{ctg} \frac{a_k(t) - a_j(t)}{2} = 0, \quad k=1, \dots, n. \quad (9)$$

*Доказательство.* Введем обозначение  $\phi(z, t) := \ln f'(z, t)$ , правую часть равенства (6) обозначим через  $f'(z, t)\psi(z, t)$ . Тогда

$$\ddot{\phi}(z, t) + \dot{\phi}^2(z, t) = \psi(z, t)\phi'(z, t) + \psi'(z, t).$$

Преобразовав это равенство с помощью (5), получим

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) \ddot{a}_k(t) \text{ctg} \frac{z - a_k(t)}{2} - \\ & -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) \dot{a}_k^2(t) \sin^{-2} \frac{z - a_k(t)}{2} + \frac{1}{4} \left( \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) \dot{a}_k(t) \text{ctg} \frac{z - a_k(t)}{2} \right)^2 = \\ & = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) \text{ctg} \frac{z - a_k(t)}{2} \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) \dot{a}_k^2(t) \text{ctg} \frac{z - a_k(t)}{2} - \\ & - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1) \dot{a}_k^2(t) \sin^{-2} \frac{z - a_k(t)}{2}. \end{aligned}$$

Раскладывая левую и правую части этого равенства в ряд Лорана в окрестности точки  $a_k(t)$  и приравнявая коэффициенты при  $(z - a_k(t))^{-1}$ , получаем (9). Теорема 3 доказана.

Пусть отображение  $f: \Pi^+ \times [0, T] \rightarrow \Delta(t)$ , при фиксированном  $t$  переводит  $\Pi^+$  на счетноугольник  $\Delta(t)$ . Рассмотрим случай, когда семейство счетноугольников  $\Delta(t)$  имеет  $n$  вершин  $A_k^{(0)}(t)$ ,  $k=1, \dots, n$ , на основном периоде при  $t \in [0, T]$ ,  $f^{-1}(A_k^{(0)}(t)) = a_k(t) \in [0, 2\pi)$ . В этом случае  $a_1(t) < a_2(t) < \dots < a_n(t)$  при  $t \in [0, T]$ . Угол при вершине  $A_k^{(0)}(t)$  равен  $\alpha_k \pi$ ,  $k=1, \dots, n$ ,  $t \in [0, T]$ . Отображение  $f = f(z, 0)$  известно, соответственно значения  $a_k(0)$ ,  $k=1, \dots, n$ , известны.

Параметры  $a_k(t)$ ,  $k=1, \dots, n$ , удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (9). Запишем ее в нормальной форме:

$$\begin{cases} \dot{b}_k(t) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (\alpha_j - 1) (b_k(t) - b_j(t))^2 \text{ctg} \frac{a_k(t) - a_j(t)}{2}, & k=1, \dots, n, \\ \dot{a}_k(t) = b_k(t), & k=1, \dots, n. \end{cases}$$

Выражения, стоящие в правых частях, имеют непрерывные частные производные по  $a_k$ ,  $b_k$  на отрезке  $t \in [0, T)$ , следовательно, по теореме существования и единственности решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений решение системы существует и единственно на отрезке  $t \in [0, T)$  при заданных начальных значениях  $a_k(0) = a_{k,0}$ ,  $b_k(0) = \dot{a}_k(0) = a_{k,1}$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

**Теорема 4.** Пусть  $A_p^{(0)}(t) \neq A_q^{(0)}(t)$ ,  $p \neq q$ , при  $t \in [0, T)$ , тогда начальные данные  $\dot{a}_k(0) = a_{k,1}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , системы дифференциальных уравнений (9) удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\frac{B_k - B_{k-1}}{c(a_{k,0} - a_{k-1,0})} = \frac{a_{k,1} - a_{k-1,1}}{a_{k,0} - a_{k-1,0}} \int_0^1 F_k(\xi) d\xi + \sum_{q=1}^n \frac{\alpha_q - 1}{2} \int_0^1 \left( \xi(a_{k,1} - a_{k-1,1}) + a_{k-1,1} - a_{q,1} \right) \operatorname{ctg} \frac{\xi(a_{k,0} - a_{k-1,0}) + a_{k-1,0} - a_{q,0}}{2} F_k(\xi) d\xi, \quad (10)$$

где

$$F_k(\xi) = \prod_{j=1}^n \left( \sin \frac{\xi(a_{k,0} - a_{k-1,0}) + a_{k-1,0} - a_{j,0}}{2} \right)^{\alpha_j - 1}.$$

*Доказательство.* Рассмотрим равенства

$$f(a_k(t), t) - f(a_{k-1}(t), t) = c \int_{a_{k-1}(t)}^{a_k(t)} \prod_{j=1}^n \left( \sin \frac{\zeta - a_j(t)}{2} \right)^{\alpha_j - 1} d\zeta, \quad k = 2, \dots, n+1,$$

где  $a_{n+1}(t) := a_1(t) + 2\pi$ ,  $f(a_k(t), t) - f(a_{k-1}(t), t) = t(B_k - B_{k-1}) + A_k^{(0)} - A_{k-1}^{(0)}$ .

Выполнив замену  $\zeta = \xi(a_k - a_{k-1}) + a_{k-1}$ , получим

$$t(B_k - B_{k-1}) + A_k^{(0)} - A_{k-1}^{(0)} = c(a_k(t) - a_{k-1}(t)) \int_0^1 J_k(\xi, t) d\xi, \quad k = 2, \dots, n+1, \quad (11)$$

где

$$J_k(\xi, t) = \prod_{j=1}^n \left( \sin \frac{\xi(a_k(t) - a_{k-1}(t)) + a_{k-1}(t) - a_j(t)}{2} \right)^{\alpha_j - 1}.$$

Функцию  $J_k$  можно записать в виде  $J_k(\xi, t) = h_k(\xi) g_k(\xi, t)$ , где

$$h_k(\xi) = \xi^{\alpha_{k-1}-1} (\xi - 1)^{\alpha_k - 1}, \quad g_k(\xi, t) = \xi^{1-\alpha_{k-1}} (\xi - 1)^{1-\alpha_k} J_k(\xi, t).$$

Функция  $g_k(\xi, t)$  непрерывна вместе с частной производной  $\frac{\partial g_k(\xi, t)}{\partial t}$  в прямо-

угольнике  $\{(\xi, t) : 0 \leq \xi \leq 1, 0 - \varepsilon \leq t \leq 0 + \varepsilon\}$ , и интеграл  $\int_0^1 h_k(\xi) d\xi$  сходится, следовательно, согласно [[16]. Лемма 2],

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 J_k(\xi, t) d\xi = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 h_k(\xi) g_k(\xi, t) d\xi = \int_0^1 h_k(\xi) \frac{\partial g_k(\xi, t)}{\partial t} d\xi = \int_0^1 h_k(\xi) \frac{\partial J_k(\xi, t)}{\partial t} d\xi.$$

Тогда, дифференцируя (11) по  $t$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{B_k - B_{k-1}}{c(a_k(t) - a_{k-1}(t))} &= \frac{\dot{a}_k(t) - \dot{a}_{k-1}(t)}{a_k(t) - a_{k-1}(t)} \int_0^1 J_k(\xi, t) d\xi + \\ &+ \sum_{q=1}^n \frac{\alpha_q - 1}{2} \int_0^1 (\xi(\dot{a}_k(t) - \dot{a}_{k-1}(t)) + \dot{a}_{k-1}(t) - \dot{a}_q(t)) \times \\ &\times \operatorname{ctg} \frac{\xi(a_k(t) - a_{k-1}(t)) + a_{k-1}(t) - a_q(t)}{2} J_k(\xi, t) d\xi, \end{aligned}$$

$k = 2, \dots, n+1$ . Переходя к пределу при  $t$  стремящемся к нулю, получим (10).

Теорема 4 доказана.

Как отмечалось выше, метод П.П. Куфарева определения параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца в работе [9] распространен на случай счетноугольника с границей, состоящей из отрезков прямых. Метод позволяет пошагово построить конформное отображение на произвольный счетноугольник. На  $n$ -м шаге рассматривается семейство счетноугольников  $\Delta(\tau)$ , получаемое проведение разрезов  $l^{(m)}(\tau) = l^{(0)}(\tau) + 2m\pi$  вдоль отрезков прямых в некотором начальном счетноугольнике  $\Delta(0)$ , начало разреза  $l^{(0)}(\tau)$  принадлежит границе  $\Delta(0)$ , параметр  $\tau$  связан с длиной разреза,  $0 \leq \tau < T$ . Если при  $\tau$  стремящемся к  $T$  подвижный конец разреза достигает некоторой граничной точки области  $\Delta(0)$ , то ядро семейства счетноугольников  $\Delta(\tau)$  можно выбрать различными способами (в процессе построения отображения на каждом шаге выбирается ядро, являющееся счетноугольником). Комбинируя метод определения параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца для счетноугольника, предложенный в работе [9], и метод, предложенный в данной работе, можно пошагово построить конформное отображение на произвольный счетноугольник так, чтобы на каждом шаге ядро семейства счетноугольников определялось однозначно. Такой подход улучшает точность вычислений.

#### Список источников

1. Driscoll T.A., Trefethen L.N. Schwarz-Christoffel mapping. Cambridge : Cambridge University Press, 2002. (Cambridge Monographs on Applied and Comput. Math. V. 8).
2. Александров И.А. Конформные отображения полуплоскости на области с симметрией переноса // Известия вузов. Математика. 1999. № 6 (445). С. 15–18.
3. Копанев С.А., Копанева Л.С. Формула типа формулы Кристоффеля–Шварца для счетноугольника // Вестник Томского государственного университета. 2003. № 280. С. 52–54.
4. Колесников И.А., Копанева Л.С. Конформное отображение на счетноугольник с двойной симметрией // Известия вузов. Математика. 2014. № 12. С. 37–47.
5. Колесников И.А. Отображение на круговой счетноугольник с симметрией переноса // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 2 (22). С. 33–43.
6. Floryan J.M. Schwarz–Christoffel methods for conformal mapping of regions with a periodic boundary // J. Comput. and Applied Math. 1993. № 46. P. 77–102. doi: 10.1016/0377-0427(93)90288-M

7. Hussenpflug W.S. Elliptic integrals and the Schwarz–Christoffel transformation // *Computers Math. Applic.* 1997. V. 33, No. 12. P. 15–114. doi: 10.1016/S0898-1221(97)00091-6
8. Александров И.А., Копанева Л.С. Левнеровские семейства отображений полуплоскости на области с симметрией переноса // *Вестник Томского государственного университета*. 2004. № 284. С. 5–7.
9. Колесников И.А. Определение аксессуарных параметров для отображения на счетно-угольник // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2014. № 2 (28). С. 18–28.
10. Колесников И.А. Определение аксессуарных параметров конформных отображений из верхней полуплоскости на прямолинейные счетноугольники с двойной симметрией и круговые счетноугольники // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2019. № 60. С. 42–60. doi: 10.17223/19988621/60/4
11. Neviere M., Cadilhac M., Petit R. Applications of conformal mappings to the diffraction of electromagnetic waves by a grating // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1973. V. 21, No. 1. P. 37–46. doi: 10.1109/TAP.1973.1140416
12. Tsarin Yu.A. Conformal mapping technique in the theory of periodic structures // *Microwave and Optical Technology Letters*. 2000. V. 26, No. 1. P. 57–61. doi: 10.1002/(SICI)1098-2760(20000705)26:1<57::AID-MOP18>3.0.CO;2-Q
13. Gysen B.L.J., Lomonova E.A., Paulides J.J.H., Vandenput A.J.A. Analytical and Numerical Techniques for Solving Laplace and Poisson Equations in a Tubular Permanent Magnet Actuator: Part II. Schwarz–Christoffel Mapping // *IEEE Transactions on Magnetics*. 2008. V. 44, No. 7. P. 1761–1767. doi: 10.1109/TMAG.2008.923438
14. Leontiou T., Kotsonis M., Fyrrillas M.M. Optimum isothermal surfaces that maximize heat transfer // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2013. V. 63. P. 13–19. doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.02.078
15. Aouiche A., Djellid A., Bouttout F. Fuzzy neuroconformal analysis of multilayer elliptical cylindrical and asymmetrical coplanar striplines // *Int. J. Electron. Commun. (AEÜ)*. 2015. V. 69. P. 1151–1166. doi: 10.1016/j.aeue.2015.04.004
16. Колесников И.А. Однопараметрический метод определения параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца // *Сибирский математический журнал*. 2021. Т. 62, No. 4. С. 784–802. doi: 10.33048/smzh.2021.62.407

## References

1. Driscoll T.A., Trefethen L.N. (2002) *Schwarz–Christoffel mapping*. Vol. 8 of Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press.
2. Aleksandrov I.A. (1999) Conformal Mappings of a Half-Plane onto Domains with Transfer Symmetry. *Russian Mathematics*. 43(6). pp. 13–16.
3. Kopanev S. A., Kopaneva L. S. (2003) Formula tipa formuly Kristoffelya – Shvartsa dlya schetnougol'nika [The Christoffel–Schwarz type formula for a polygon with the countable number of vertices]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 280. pp. 52–54.
4. Kolesnikov I. A., Kopaneva L. S. (2014) Conformal Mapping onto Numerable Polygon with Double Symmetry. *Russian Mathematics*. 58(12). pp. 32–40. DOI: 10.3103/S1066369X14120044.
5. Kolesnikov I. A. (2013) Otobrazheniye na krugovoy schetnougol'nik s simmetriyey perenosа [Mapping onto a circular numerable polygon with the symmetry of translation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(22). pp. 33–43.
6. Floryan J.M. (1993) Schwarz–Christoffel Methods for Conformal Mapping of Regions with a Periodic Boundary. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 46. pp. 77–102. DOI: 10.1016/0377-0427(93)90288-M.

7. Hussenpflug W.S. (1997) Elliptic Integrals and the Schwarz–Christoffel Transformation. *Computers & Mathematics with Applications*. 33(12). pp. 15–114. DOI: 10.1016/S0898-1221(97)00091-6.
8. Aleksandrov I.A., Kopaneva L.S. (2004) Levnerovskiye semeystva otobrazheniy poluploskosti na oblasti s simmetriyey perenosa [Loewner’s sets of mappings of a half-plane on domains with symmetry of translation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 284. pp. 5–7.
9. Kolesnikov I.A. (2014) Opredeleniye aktsessornykh parametrov dlya otobrazheniya na schetnougol’nik [Determination of accessory parameters for mapping onto a numerable polygon]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2014. 2(28). pp. 18–28.
10. Kolesnikov I.A. (2019) Opredeleniye aktsessornykh parametrov konformnykh otobrazheniy iz verkhney poluploskosti na pryamolineynyye schetnougol’niki s dvoynoy simmetriyey i krugovyye schetnougol’niki [Determining parameters of conformal mappings from the upper half-plane onto straight-line periodic polygons with double symmetry and onto circular periodic polygons]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 60. pp. 42–60. DOI: 10.17223/19988621/60/4.
11. Nevier M., Cadilhac M., Petit R. (1973) Applications of Conformal Mappings to the Diffraction of Electromagnetic Waves by a Grating. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 21(1). pp. 37–46. DOI: 10.1109/TAP.1973.1140416.
12. Tsarin Yu.A. (2000) Conformal mapping technique in the theory of periodic structures. *Microwave and Optical Technology Letters*. 26(1). pp. 57–61. DOI: 10.1002/(SICI)1098-2760(20000705)26:1<57::AID-MOP18>3.0.CO;2-Q
13. Gysen B.L.J., Lomonova E.A., Paulides J.J.H., Vandenput A.J.A. (2008) Analytical and Numerical Techniques for Solving Laplace and Poisson Equations in a Tubular Permanent Magnet Actuator: Part II. Schwarz–Christoffel Mapping. *IEEE Transactions on Magnetics*. 44(7). pp. 1761–1767. DOI: 10.1109/TMAG.2008.923438.
14. Leontiou T, Kotsonis M, Fyrrillas M.M. (2013) Optimum Isothermal Surfaces that Maximize Heat Transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 63. pp. 13–19. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.02.078.
15. Aouiche A., Djellid A., Bouttout F. (2015) Fuzzy Neuroconformal Analysis of Multilayer Elliptical Cylindrical and Asymmetrical Coplanar Striplines. *AEÜ – International Journal of Electronics and Communications*. 69. pp. 1151–1166. DOI: 10.1016/j.aeue.2015.04.004.
16. Kolesnikov I.A. (2021) A One-Parametric Method for Determining Parameters in the Schwarz–Christoffel Integral. *Siberian Mathematical Journal*. 62(4). pp. 784–802. DOI: 10.33048/smzh.2021.62.407.

#### **Сведения об авторе:**

**Колесников Иван Александрович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ia.kolesnikov@mail.ru

#### **Information about the author:**

**Kolesnikov Ivan A.** (Candidate of Physics and Mathematics, Regional Scientific and Educational Mathematical Center, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation) E-mail: ia.kolesnikov@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 30.12.2021; принята к публикации 19.05.2022*

*The article was submitted 30.12.2021; accepted for publication 19.05.2022*



Научная статья

УДК 512.552

MSC: 15B99, 16S50

doi: 10.17223/19988621/77/2

## О $k$ -ниль-хороших кольцах формальных матриц

Цырендоржи Дашацыренович Норбосамбуев<sup>1</sup>,  
Егор Александрович Тимошенко<sup>2</sup>

<sup>1, 2</sup> Томский государственный университет, Томск, Россия

<sup>1</sup> nstsddts@yandex.ru

<sup>2</sup> tea471@mail.tsu.ru

**Аннотация.** В 2018 г. Абдольюсефи, Ашрафи и Чэнь дали в своей работе определение 2-ниль-хорошего элемента кольца, обобщающее введенное двумя годами ранее Кэлулгэрян и Ламом понятие изящного элемента кольца, а также определение 2-ниль-хорошего кольца. В той же работе было показано, что кольцо контекста Мориты, т.е. кольцо формальных матриц второго порядка, является 2-ниль-хорошим, если кольца, над которыми оно рассматривается, сами являются 2-ниль-хорошими. В настоящей статье мы проводим дальнейшее обобщение, определяя  $k$ -ниль-хорошие элементы и  $k$ -ниль-хорошие кольца, и указываем условие, при котором кольцо формальных матриц произвольного конечного порядка будет  $k$ -ниль-хорошим.

**Ключевые слова:** кольцо,  $k$ -ниль-хорошее кольцо, кольцо формальных матриц, контекст Мориты

**Благодарности:** Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых – докторов наук МД-108.2020.1.

**Для цитирования:** Норбосамбуев Ц.Д., Тимошенко Е.А. О  $k$ -ниль-хороших кольцах формальных матриц // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 77. С. 17–26. doi: 10.17223/19988621/77/2

Original article

## About $k$ -nil-good formal matrix rings

Tsyrendorzh D. Norbosambuev<sup>1</sup>, Egor A. Timoshenko<sup>2</sup>

<sup>1, 2</sup> Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

<sup>1</sup> nstsddts@yandex.ru

<sup>2</sup> tea471@mail.tsu.ru

**Abstract.** We fix a positive integer  $t \geq 2$ . Let  $R_1, R_2, \dots, R_t$  be associative rings with identity and let  $M_{ij}$  be  $R_i$ - $R_j$ -bimodules ( $i, j \in \{1, 2, \dots, t\}$ ) such that  $M_{ii} = R_i$  for all  $i$ . Suppose

that for any  $i, j, k \in \{1, 2, \dots, t\}$ ,  $\varphi_{ijk}$  is a bimodule homomorphism  $M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \rightarrow M_{ik}$ ; we assume that  $\varphi_{iik}$  and  $\varphi_{ikk}$  coincide with the canonical isomorphisms  $R_i \otimes_{R_i} M_{ik} \rightarrow M_{ik}$  and  $M_{ik} \otimes_{R_k} R_k \rightarrow M_{ik}$  respectively. Instead of  $\varphi_{ijk}(a \otimes b)$ , where  $a \in M_{ij}$  and  $b \in M_{jk}$ , we write simply  $ab$ . We also require that  $(ab)c = a(bc)$  for all  $a \in M_{ij}$ ,  $b \in M_{jk}$  and  $c \in M_{kl}$ . The set

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} r_1 & m_{12} & \dots & m_{1t} \\ m_{21} & r_2 & \dots & m_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{t1} & m_{t2} & \dots & r_t \end{pmatrix} \mid r_i \in R_i, m_{ij} \in M_{ij} \right\}$$

forms an associative ring with identity under the usual addition and the multiplication defined by the homomorphisms  $\varphi_{ijk}$ . We say that  $K$  is a *formal matrix ring of order  $t$* .

Let  $R$  be an associative ring with identity and  $k \geq 2$ . An element of  $R$  is said to be *k-nil-good* if it is the sum of  $k$  invertible elements and a nilpotent; if all elements of  $R$  are *k-nil-good*, we say that  $R$  is a *k-nil-good ring*.

The main result is the following theorem.

**Theorem 3.7.** The ring  $K$  is *k-nil-good* ( $k \geq 2$ ) if the rings  $R_1, R_2, \dots, R_t$  are *k-nil-good*.

**Corollary 3.8.** If the ring  $R_i$  is  $k_i$ -nil-good for all  $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ , then the ring  $K$  is *k-nil-good*, where  $k = \max(k_1, k_2, \dots, k_t)$ .

**Corollary 3.9.** If  $R$  is a *k-nil-good ring*, then the ring  $M(t, R)$  of all  $t \times t$  square matrices over  $R$  is *k-nil-good* for every  $t$ .

The converses of Theorem 3.7 and Corollary 3.9 do not hold. For instance, the matrix ring  $M(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  is 2-nil-good, while the field  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  is not a *k-nil-good ring* for each  $k$ .

**Keywords:** ring, *k-nil-good ring*, formal matrix ring, Morita context

**Acknowledgments:** The research was supported by the President of the Russian Federation Grant for young Russian scientists MD-108.2020.1.

**For citation:** Norbosambuev, T.D., Timoshenko E.A. (2022) About *k-nil-good* formal matrix rings. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 17–26. doi: 10.17223/19988621/77/2

## 1. Кольца формальных матриц

Все кольца в статье – ассоциативные с единицей;  $M(t, R)$  обозначает кольцо всех  $(t \times t)$ -матриц над кольцом  $R$ , а  $U(R)$  – множество всех обратимых элементов кольца  $R$ . Через  $\mathbb{Z}$  обозначаем кольцо целых чисел; ■ – символ конца доказательства либо его отсутствия.

Кольцам формальных матриц посвящено много работ (см., напр., [1–9]). Понятия формальной матрицы и кольца формальных матриц появились благодаря работе Мориты [10], в которой он ввел объект, впоследствии названный *контекстом Мориты*.

Под контекстом Мориты понимается набор  $(R, M, N, S, \varphi, \psi)$ , в котором  $R$  и  $S$  – кольца,  ${}_R M_S$  и  ${}_S N_R$  – бимодули, а  $\varphi: M \otimes_S N \rightarrow R$  и  $\psi: N \otimes_R M \rightarrow S$  – бимодульные гомоморфизмы, для которых при всех  $m, m' \in M$  и  $n, n' \in N$  выполнены соотношения ассоциативности  $\varphi(m \otimes n) \cdot m' = m \cdot \varphi(n \otimes m')$  и  $\psi(n \otimes m) \cdot n' = n \cdot \psi(m \otimes n')$ . Наборы такого вида возникли при изучении контравариантных функторов  $D_1$

и  $D_2$  между категориями модулей  $Mod-R$  и  $Mod-S$ , таких что выполнено  $D_1 D_2 \approx Id_{Mod-R}$  и  $D_2 D_1 \approx Id_{Mod-S}$  (позже Морита установил, что на самом деле это функторы  $\text{Hom}$ ). С историей развития направления, связанного с контекстами Мориты, можно познакомиться в обзорной работе [6]; там же приведены ссылки на наиболее важные работы по этой теме.

Если дан контекст Мориты, то можно построить *кольцо контекста Мориты* (мы будем называть его также *кольцом формальных матриц второго порядка*)  $K$ , состоящее из всех матриц вида

$$X = \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}, \quad \text{где } r \in R, m \in M, n \in N, s \in S, \quad (1)$$

и снабженное поэлементным сложением и умножением, задаваемым правилом

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r' & m' \\ n' & s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rr' + \varphi(m \otimes n') & rm' + ms' \\ nr' + sn' & \psi(n \otimes m') + ss' \end{pmatrix}.$$

Понятия формальной матрицы и кольца формальных матриц можно перенести на случай произвольного порядка  $t \geq 2$ . Пусть  $R_1, R_2, \dots, R_t$  – некоторые кольца и  $M_{ij} - R_i R_j$ -бимодули, где  $i, j \in \{1, 2, \dots, t\}$ , такие, что  $M_{ii} = R_i$ . Далее, пусть для каждой тройки индексов  $i, j, k \in \{1, 2, \dots, t\}$  через  $\varphi_{ijk}$  обозначен бимодульный гомоморфизм  $M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \rightarrow M_{ik}$ , причем  $\varphi_{iik}$  и  $\varphi_{ikk}$  совпадают с каноническими изоморфизмами  $R_i \otimes_{R_i} M_{ik} \rightarrow M_{ik}$  и  $M_{ik} \otimes_{R_k} R_k \rightarrow M_{ik}$  соответственно. Для краткости элемент  $\varphi_{ijk}(a \otimes b)$ , где  $a \in M_{ij}$  и  $b \in M_{jk}$ , будем обозначать через  $ab$ . Как и для колец формальных матриц второго порядка, мы требуем выполнения соотношений ассоциативности  $(ab)c = a(bc)$  для всех  $a \in M_{ij}$ ,  $b \in M_{jk}$  и  $c \in M_{kl}$ . Множество

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} r_1 & m_{12} & \dots & m_{1t} \\ m_{21} & r_2 & \dots & m_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{t1} & m_{t2} & \dots & r_t \end{pmatrix} \mid r_i \in R_i, m_{ij} \in M_{ij} \right\} \quad (2)$$

всех матриц со значениями в бимодулях  $M_{ij}$  относительно поэлементного сложения и умножения, определяемого с помощью гомоморфизмов  $\varphi_{ijk}$ , образует кольцо, которое мы будем называть *кольцом формальных матриц порядка  $t$* .

## 2. Аддитивные задачи в кольцах

В работе [11] введены понятия  $k$ -хорошего элемента и  $k$ -хорошего кольца:

**Определение 2.1.** Пусть  $k$  – натуральное число, большее 1.

а) Элемент кольца называется  *$k$ -хорошим*, если его можно представить в виде суммы  $k$  элементов, обратимых в этом кольце.

б) Кольцо  $R$  называется  *$k$ -хорошим*, если все его элементы  $k$ -хорошие.

в) Если кольцо  $R$  не является  $k$ -хорошим ни для какого значения  $k$ , но каждый элемент из  $R$  является  $k$ -хорошим для подходящего значения  $k$ , то будем говорить, что  $R$  –  *$\omega$ -хорошее* кольцо.

**Замечание.** Несложно видеть, что если кольцо  $R$  является  $k$ -хорошим, то оно будет и  $(k + j)$ -хорошим для всякого натурального  $j$ . Поэтому имеет смысл говорить о минимальном  $k$ , для которого  $R$  есть  $k$ -хорошее кольцо.

Кольца, аддитивно порождаемые своими обратимыми элементами, – известная и достаточно хорошо изученная тема; хороший обзор дан в [12]. Отдельно выделим статью Хенриксена [13], в которой он показал, что кольцо  $M(t, R)$ , где  $t \geq 2$ , будет 3-хорошим вне зависимости от свойств кольца  $R$ . Независимо от Хенриксена в работе [14] Крылов установил, что кольцо  $M(t, R)$  всегда является 4-хорошим. Упомянем также работы [7–9], в которых свойство хорошеи рассматривалось для колец формальных матриц и отдельных формальных матриц.

В 1977 г. Николсон [15] ввел понятие чистоты для колец и их отдельных элементов:

**Определение 2.2.** а) Элемент кольца называется *чистым*, если он представим в виде суммы идемпотента и обратимого элемента.

б) Кольцо называется *чистым*, если все его элементы являются чистыми.

Работа Николсона послужила отправной точкой для дальнейших исследований чистоты. Так, в [16, 17] описываются некоторые классы абелевых групп, имеющих чистые кольца эндоморфизмов. В статье [18] Сяо и Тун рассматривали следующее обобщение понятия чистоты:

**Определение 2.3.** Пусть  $k$  – натуральное число.

а) Элемент кольца называют  *$k$ -чистым*, если его можно записать в виде суммы идемпотента и  $k$  обратимых элементов.

б) Кольцо  $R$  называют  *$k$ -чистым*, если все его элементы  $k$ -чистые.

В статье [19] появилось еще одно понятие, связанное с чистотой:

**Определение 2.4.** а) Элемент кольца называется *ниль-чистым* (*сильно ниль-чистым*), если он представим в виде суммы идемпотента и нильпотентного элемента (соответственно суммы коммутирующих между собой идемпотента и нильпотентного элемента).

б) Кольцо называется *ниль-чистым* (*сильно ниль-чистым*), если все его элементы являются ниль-чистыми (соответственно сильно ниль-чистыми).

Заметим, что всякое ниль-чистое кольцо является чистым (чистое разложение произвольного элемента  $x$  легко получить из ниль-чистого разложения элемента  $x - 1$ ). Обратное неверно: так, поле  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  является чистым кольцом, но не является ниль-чистым.

Отталкиваясь от статей [15, 19], Кэлулгэрян и Лам [20] дали следующее определение:

**Определение 2.5.** а) Элемент кольца называется *изящным*, если он представим в виде суммы нильпотентного и обратимого элементов.

б) Кольцо  $R$  называется *изящным*, если все его ненулевые элементы изящны.

В той же работе [20] было, в частности, установлено, что все изящные кольца являются простыми.

Обобщая свойство изящности, Данчев в статье [21] следующим образом определил свойство ниль-хорошеи для колец и их элементов:

**Определение 2.6.** а) Элемент кольца называют:

– *ниль-хорошим*, если он представим в виде суммы нильпотентного элемента и элемента, который обратим либо равен 0;

– *сильно ниль-хорошим*, если его можно представить в виде суммы нильпотентного элемента и элемента, который обратим либо равен 0, причем эти два элемента коммутируют между собой;

– *уникально ниль-хорошим*, если он либо нильпотентен, либо единственным образом представим в виде суммы нильпотентного и обратимого элементов.

б) Кольцо называют *ниль-хорошим* (*сильно ниль-хорошим*, *уникально ниль-хорошим*), если все его элементы являются ниль-хорошими (соответственно сильно ниль-хорошими, уникально ниль-хорошими).

Несложно видеть, что всякое изящное кольцо является ниль-хорошим, однако обратное неверно. Например, кольца классов вычетов  $\mathbb{Z}/2^l\mathbb{Z}$ , где  $l \geq 2$ , являются ниль-хорошими, но не изящными. Класс ниль-хороших колец оказался более содержательным по сравнению с изящными кольцами несмотря на то, что различия между определениями 2.5 и 2.6 на первый взгляд кажутся незначительными.

Наконец, в работе [22] было введено понятие 2-ниль-хорошести:

**Определение 2.7.** а) Элемент кольца называют *2-ниль-хорошим*, если он представим в виде суммы нильпотентного элемента и двух обратимых элементов.

б) Кольцо называют *2-ниль-хорошим*, если все его элементы 2-ниль-хорошие.

Несмотря на название, 2-ниль-хорошие кольца служат обобщением скорее для изящных колец, чем для ниль-хороших: так, кольца  $\mathbb{Z}/2^l\mathbb{Z}$ , где  $l \geq 1$ , ниль-хорошие, но не являются 2-ниль-хорошими. С другой стороны, в [20] было показано, что всякое изящное кольцо, не изоморфное полю  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , является 2-хорошим (а значит, оно является и 2-ниль-хорошим).

### 3. $k$ -ниль-хорошие формальные матрицы

В [22] было найдено достаточное условие, при котором кольцо формальных матриц второго порядка является 2-ниль-хорошим:

**Теорема 3.1** [22]. Пусть  $K$  – это кольцо формальных матриц, соответствующее контексту Мориты  $(R, M, N, S, \phi, \psi)$ . Если кольца  $R$  и  $S$  являются 2-ниль-хорошими, то и  $K$  – 2-ниль-хорошее кольцо. ■

Применяя индукцию, можно получить отсюда

**Следствие 3.2** [22]. Если  $R$  – 2-ниль-хорошее кольцо, то кольцо  $M(t, R)$  также будет 2-ниль-хорошим при любом  $t$ . ■

По аналогии с [18] введем следующее обобщение свойства 2-ниль-хорошести для колец и их элементов:

**Определение 3.3.** Пусть  $k$  – натуральное число, большее 1.

а) Элемент кольца назовем  *$k$ -ниль-хорошим*, если его можно представить в виде суммы одного нильпотентного и  $k$  обратимых элементов.

б) Кольцо  $R$  назовем  *$k$ -ниль-хорошим*, если все его элементы  $k$ -ниль-хорошие.

в) Если кольцо  $R$  не является  $k$ -ниль-хорошим ни для какого  $k$ , но каждый элемент из  $R$  является  $k$ -ниль-хорошим для подходящего  $k$ , то будем говорить, что  $R$  есть  *$\omega$ -ниль-хорошее* кольцо.

**Пример 3.4.** Кольца  $\mathbb{Z}/2^l\mathbb{Z}$ , где  $l \geq 1$ , являются  $\omega$ -ниль-хорошими.

Ясно, что если кольцо  $R$  является  $k$ -хорошим, то оно будет и  $k$ -ниль-хорошим.

**Предложение 3.5.** Если кольцо  $R$  является  $k$ -ниль-хорошим, то оно является и  $(k + j)$ -ниль-хорошим для всякого натурального  $j$ .

**Доказательство.** Достаточно доказать, что  $R$  является  $(k + 1)$ -ниль-хорошим кольцом. Действительно, для всякого  $x \in R$  мы можем записать элемент  $x - 1$  как сумму одного нильпотентного и  $k$  обратимых элементов. В этом случае элемент  $x = (x - 1) + 1$  будет суммой одного нильпотентного и  $k + 1$  обратимых элементов, что и требовалось. ■

В статье [23] было показано, что существует подкольцо  $R$  поля рациональных чисел, которое является  $k$ -хорошим кольцом для достаточно большого  $k$ , но не является 2-хорошим кольцом. Естественно, такое кольцо  $R$  служит также примером  $k$ -ниль-хорошего кольца, которое не является 2-ниль-хорошим.

Докажем следующий технический факт.

**Лемма 3.6.** Пусть  $K$  – кольцо формальных матриц порядка  $t$ , заданное равенством (2). Если  $X \in K$  – треугольная матрица, на главной диагонали которой стоят элементы, обратимые в соответствующих кольцах  $R_i$ , то  $X \in U(K)$ .

**Доказательство.** Заметим, что кольцо вида (2) можно естественным образом представить в виде кольца, соответствующего контексту Мориты  $(R, M, N, S, \varphi, \psi)$ , такому что  $R$  есть кольцо формальных матриц порядка  $t - 1$  и  $S = R_t$ . Поэтому достаточно будет доказать утверждение леммы для матрицы  $X$  вида (1), такой что  $r \in U(R)$ ,  $s \in U(S)$  и хотя бы один из элементов  $m$  и  $n$  равен 0 (после этого справедливость леммы легко устанавливается с помощью индукции). Положим

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} r^{-1} & -r^{-1}ms^{-1} \\ -s^{-1}nr^{-1} & s^{-1} \end{pmatrix} \in K;$$

очевидно, что  $E$  – единичный элемент кольца  $K$ . Имеем

$$XY = \begin{pmatrix} rr^{-1} - \varphi(m \otimes s^{-1}nr^{-1}) & -rr^{-1}ms^{-1} + ms^{-1} \\ nr^{-1} - ss^{-1}nr^{-1} & ss^{-1} - \psi(n \otimes r^{-1}ms^{-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

$$YX = \begin{pmatrix} r^{-1}r - \varphi(r^{-1}ms^{-1} \otimes n) & r^{-1}m - r^{-1}ms^{-1}s \\ -s^{-1}nr^{-1}r + s^{-1}n & s^{-1}s - \psi(s^{-1}nr^{-1} \otimes m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

(в этих равенствах мы воспользовались тем, что все значения аргументов, к которым применяются  $\varphi$  и  $\psi$ , равны 0, так как  $m = 0$  или  $n = 0$ ). Таким образом,  $Y = X^{-1}$  и  $X \in U(K)$ . ■

Теперь можно обобщить теорему 3.1 на случай формальных матриц порядка  $t \geq 2$  и  $k$ -ниль-хороших колец:

**Теорема 3.7.** Кольцо  $K$  формальных матриц порядка  $t$ , заданное условием (2), является  $k$ -ниль-хорошим (где  $k \geq 2$ ), если все кольца  $R_1, R_2, \dots, R_t$  сами являются  $k$ -ниль-хорошими.

**Доказательство.** Пусть матрица  $X \in K$  имеет вид, указанный в равенстве (2). Поскольку  $R_1, R_2, \dots, R_t$  –  $k$ -ниль-хорошие кольца, то для всякого  $i \in \{1, 2, \dots, t\}$  можно записать  $r_i = y_i + u_{i1} + u_{i2} + u_{i3} \dots + u_{ik}$ , где  $y_i$  – нильпотентный элемент из  $R_i$  и  $u_{ij} \in U(R_i)$  при всех  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Полагая

$$U_1 = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & u_{21} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{t1} & m_{t2} & \dots & u_{t1} \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} u_{12} & m_{12} & \dots & m_{1t} \\ 0 & u_{22} & \dots & m_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{t2} \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & y_t \end{pmatrix}, \quad U_j = \begin{pmatrix} u_{1j} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{2j} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{tj} \end{pmatrix}$$

(где  $j \in \{3, 4, \dots, k\}$ ), имеем  $X = N + U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_k$ . Очевидно, что матрица  $N$  является нильпотентным элементом кольца  $K$  и в силу леммы 3.6 для каждого  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$  выполнено  $U_j \in U(K)$ . Теорема доказана. ■

С учетом предложения 3.5 получаем такое следствие:

**Следствие 3.8.** Пусть кольцо  $K$  формальных матриц порядка  $t$  задано равенством (2). Если кольцо  $R_i$  является  $k_i$ -ниль-хорошим для всякого  $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ , то кольцо  $K$  является  $k$ -ниль-хорошим, где  $k = \max(k_1, k_2, \dots, k_t)$ . ■

Теорема 3.7 позволяет также обобщить следствие 3.2:

**Следствие 3.9.** Если  $R$  –  $k$ -ниль-хорошее кольцо, то кольцо  $M(t, R)$  также будет  $k$ -ниль-хорошим при любом  $t$ . ■

Заметим, что утверждения теоремы 3.7 и следствия 3.9 нельзя обратить:

**Пример 3.10.** Рассмотрим кольцо  $M(2, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ ; пусть  $E$  – единичная матрица. Всякий элемент кольца можно представить в виде суммы двух обратимых:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E + E, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + E, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = E + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(представления остальных десяти матриц из  $M(2, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$  получаются аналогично). Поэтому  $M(2, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$  – 2-хорошее кольцо, а значит, оно является  $k$ -ниль-хорошим кольцом для любого значения  $k \geq 2$ . При этом очевидно, что само поле  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  не является  $k$ -ниль-хорошим кольцом ни для какого  $k \geq 2$ .

### Список источников

1. Крылов П.А. Об изоморфизме колец обобщенных матриц // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 4. С. 456–463.
2. Крылов П.А., Туганбаев А.А. Формальные матрицы и их определители // Фундаментальная и прикладная математика. 2014. Т. 19, № 1. С. 65–119.
3. Крылов П.А., Туганбаев А.А. Кольца формальных матриц и модули над ними. М. : МЦНМО, 2017.
4. Крылов П.А., Норбосамбуев Ц.Д. Автоморфизмы алгебр формальных матриц // Сибирский математический журнал. 2018. Т. 59, № 5. С. 1116–1127. doi: 10.17377/smzh.2018.59.512
5. Крылов П.А., Норбосамбуев Ц.Д. Группа автоморфизмов одного класса алгебр формальных матриц // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 53, С. 16–21. doi: 10.17223/19988621/53/2
6. Lousaunau P., Shapiro J. Morita contexts // Non-Commutative Ring Theory. Springer, 1990. P. 80–92. doi: 10.1007/BFb0091253 (Lecture Notes in Mathematics. V. 1448).
7. Норбосамбуев Ц.Д. О суммах диагональных и обратимых обобщенных матриц // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 4 (36). С. 34–40. doi: 10.17223/19988621/36/4

8. Норбосамбуев Ц.Д. 2-хорошие диагональные формальные матрицы над кольцом целых чисел // Всерос. молодежная науч. конф. «Все грани математики и механики» : сб. ст. Томск : Изд. дом ТГУ, 2016. С. 6–12.
9. Норбосамбуев Ц.Д. Ранг формальной матрицы. Система формальных линейных уравнений. Делители нуля // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 52. С. 5–12. doi: 10.17223/19988621/52/1
10. Morita K. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition // Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A. 1958. V. 6. P. 83–142.
11. Vámos P. 2-good rings // Quart. J. Math. 2005. V. 56, No. 3. P. 417–430. doi: 10.1093/qmath/hah046
12. Srivastava A.K. A survey of rings generated by units // Ann. Fac. Sci. Toulouse. Math. 2010. V. 19. P. 203–213. doi: 10.5802/afst.1281
13. Henriksen M. Two classes of rings generated by their units // J. Algebra. 1974. V. 31, No. 1. P. 182–193. doi: 10.1016/0021-8693(74)90013-1.
14. Крылов П.А. Суммы автоморфизмов абелевых групп и радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов // Известия вузов. Математика. 1976. № 4. С. 56–66.
15. Nicholson W.K. Lifting idempotents and exchange rings // Trans. Amer. Math. Soc. 1977. V. 229. P. 269–278. doi: 10.2307/1998510
16. Сорокин К.С. Вполне разложимые абелевы группы с чистыми кольцами эндоморфизмов // Фундаментальная и прикладная математика. 2011/2012. Т. 17, № 8. С. 105–108.
17. Сорокин К.С. Самомалые SP-группы с чистыми кольцами эндоморфизмов // Фундаментальная и прикладная математика. 2015. Т. 20, № 5. С. 141–148.
18. Xiao G., Tong W.  $n$ -clean rings and weakly unit stable range rings // Comm. Algebra. 2005. V. 33, No. 5. P. 1501–1517. doi: 10.1081/AGB-200060531
19. Diesl A.J. Nil clean rings // J. Algebra. 2013. V. 383. P. 197–211. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2013.02.020
20. Călugăreanu G., Lam T.Y. Fine rings: A new class of simple rings // J. Algebra Appl. 2016. V. 15, No. 9. Art. 1650173. doi: 10.1142/S0219498816501735
21. Danchev P. Nil-good unital rings // Int. J. Algebra. 2016. V. 10, No. 5. P. 239–252. doi: 10.12988/ija.2016.6212
22. Abdolyousefi M.S., Ashrafi N., Chen H. On 2-nil-good rings // J. Algebra Appl. 2018. V. 17, No. 6. Art. 1850110. doi: 10.1142/S0219498818501104
23. Goldsmith B., Meehan C., Wallutis S.L. On unit sum numbers of rational groups // Rocky Mountain J. Math. 2002. V. 32, No. 4. P. 1431–1450. doi: 10.1216/rmj.2002.32.1431

## References

1. Krylov P.A. (2008) Isomorphism of generalized matrix rings. *Algebra and Logic*. 47(4). pp. 258–262. DOI: 10.1007/s10469-008-9016-y.
2. Krylov P.A., Tuganbaev A.A. (2015) Formal matrices and their determinants. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*. 211(3). pp. 341–380. DOI: 10.1007/s10958-015-2610-3.
3. Krylov P., Tuganbaev A. (2017) *Formal Matrices* (Algebra and Applications, Vol. 23). Springer. DOI: 10.1007/978-3-319-53907-2.
4. Krylov P.A., Norbosambuev T.D. (2018) Automorphisms of formal matrix algebras. *Siberian Mathematical Journal*. 59(5). pp. 885–893. DOI: 10.1134/S0037446618050129.
5. Krylov P.A., Norbosambuev T.D. (2018) Gruppy avtomorfizmov odnogo klassa algebr formal'nykh matrits [Group of automorphisms of one class of formal matrix algebras]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 53. pp. 16–21. DOI: 10.17223/19988621/53/2.
6. Lounstunau P., Shapiro J. (1990) Morita contexts. *Non-Commutative Ring Theory* (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1448). Springer. pp. 80–92. DOI: 10.1007/BFb0091253.



7. Norbosambuev T.D. (2015) O summakh diagonal'nykh i obratimyykh obobshchennykh matrits [On sums of diagonal and invertible formal matrices] *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(36). pp. 34–40. DOI: 10.17223/19988621/36/4.
8. Norbosambuev T.D. (2016) 2-khoroshiye diagonal'nye formal'nyye matritsy nad kol'tsom tselykh chisel [2-good diagonal formal matrices over the ring of integers]. *All-Russia Youth Scientific Conference "Vse grani matematiki i mekhaniki" (sbornik statey)*. Tomsk: Izd. dom TGU. pp. 6–12.
9. Norbosambuev T.D. (2018) Rang formal'noy matritsy. Sistema formal'nykh lineynykh uravneniy. Deliteli nulya [Rank of a formal matrix. System of formal linear equations. Zero divisors]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 52. pp. 5–12. DOI: 10.17223/19988621/52/1.
10. Morita K. (1958) Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku, Section A*. 6. pp. 83–142.
11. Vámos P. (2005) 2-good rings. *Quarterly Journal of Mathematics*. 56(3). pp. 417–430. DOI: 10.1093/qmath/hah046.
12. Srivastava A.K. (2010) A survey of rings generated by units. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Mathématiques*. 19. pp. 203–213. DOI: 10.5802/afst.1281.
13. Henriksen M. (1974) Two classes of rings generated by their units. *Journal of Algebra*. 31(1). pp. 182–193. DOI: 10.1016/0021-8693(74)90013-1.
14. Krylov P.A. (1976) Summy avtomorfizmov abelevykh grupp i radikal Dzhekobsona kol'tsa endomorfizmov [Sums of automorphisms of Abelian groups and the Jacobson radical of the endomorphism ring]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika*. 4. pp. 56–66.
15. Nicholson W.K. (1977) Lifting idempotents and exchange rings. *Transactions of the American Mathematical Society*. 229. pp. 269–278. DOI: 10.2307/1998510.
16. Sorokin K.S. (2014) Completely decomposable Abelian groups with clean endomorphism rings. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*. 197(5). pp. 655–657. DOI: 10.1007/s10958-014-1748-8.
17. Sorokin K.S. (2018) Self-small SP-groups with clean endomorphism rings. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*. 230(3). pp. 445–450. DOI: 10.1007/s10958-018-3752-x.
18. Xiao G., Tong W. (2005)  $n$ -clean rings and weakly unit stable range rings. *Communications in Algebra*. 33(5). pp. 1501–1517. DOI: 10.1081/AGB-200060531.
19. Diesl A.J. (2013) Nil clean rings. *Journal of Algebra*. 383. pp. 197–211. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2013.02.020.
20. Călugăreanu G., Lam T.Y. (2016) Fine rings: A new class of simple rings. *Journal of Algebra and Its Applications*. 15(9). Article ID: 1650173. DOI: 10.1142/S0219498816501735.
21. Danchev P. (2016) Nil-good unital rings. *International Journal of Algebra*. 10(5). pp. 239–252. DOI: 10.12988/ija.2016.6212.
22. Abdolousefi M.S., Ashrafi N., Chen H. (2018) On 2-nil-good rings. *Journal of Algebra and Its Applications*. 17(6). Article ID: 1850110. DOI: 10.1142/S0219498818501104.
23. Goldsmith B., Meehan C., Wallutis S.L. (2002) On unit sum numbers of rational groups. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*. 32(4). pp. 1431–1450. DOI: 10.1216/rmj.1181070032.

**Сведения об авторах:**

**Норбосамбуев Цырендоржи Дашацыренович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета, старший научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: nstsdts@yandex.ru

**ТИМОШЕНКО Егор Александрович** – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета, ведущий научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: tea471@mail.tsu.ru

***Information about the authors:***

**Norbosambuev Tsyrendorzhi D.** (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ntsddts@yandex.ru

**Timoshenko Egor A.** (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tea471@mail.tsu.ru

*Статья поступила в редакцию 30.03.2021; принята к публикации 19.05.2022*

*The article was submitted 30.03.2021; accepted for publication 19.05.2022*

## МЕХАНИКА

## MECHANICS

Научная статья

УДК 539.3+514.851

doi: 10.17223/19988621/77/3

**Анализ некоторых методов соединения ячеек  
в механическом тетрахиральном метаматериале**

**Линар Ришатович Ахметшин<sup>1</sup>,  
Игорь Юрьевич Смолин<sup>2</sup>**

<sup>1, 2</sup> *Томский государственный университет, Томск, Россия*

<sup>1, 2</sup> *Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, Россия*

<sup>1</sup> *akhmetshin.lr@gmail.com*

<sup>2</sup> *smolin@ispms.ru*

**Аннотация.** С использованием методов математического моделирования исследован вопрос о соединении элементарных ячеек в образце из механического ячеистого метаматериала. Структура метаматериала представляет собой ячейки из тетрахиральных элементов, обеспечивающих его необычное поведение – закручивание при одноосном нагружении. Рассмотрены два метода соединения ячеек в метаматериале. Описаны преимущества и недостатки каждого из методов. Обнаружено, что в первом случае явно наблюдается центр вращения, благоприятно влияющий на стабильную работу системы двух ячеек, но уменьшающий значение угла закручивания. Второй метод соединения усиливает эффект закручивания.

**Ключевые слова:** механический метаматериал, хиральность, скручивание, соединение ячеек, численное моделирование

**Благодарности:** Работа выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН, тема номер FWRW-2022-0003.

**Для цитирования:** Ахметшин Л.Р., Смолин И.Ю. Анализ некоторых методов соединения ячеек в механическом тетрахиральном метаматериале // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 77. С. 27–37. doi: 10.17223/19988621/77/3

## Analysis of some methods of integration of cells in a mechanical metamaterial

Linar R. Akhmetshin, Igor Yu. Smolin

<sup>1,2</sup> Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

<sup>1,2</sup> Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation

<sup>1</sup> akhmetshin.lr@gmail.com

<sup>2</sup> smolin@ispms.ru

**Abstract.** In this paper, the influence of integration of unit cells on the mechanical behavior of the sample made of mechanical tetrachiral metamaterial is studied by using mathematical modeling. A chiral structure of the cells provides unusual mechanical behavior of the metamaterial, namely, twisting under uniaxial loading. Two methods of integration of unit cells in the metamaterial are discussed: joining and overlapping. The advantages and disadvantages of each method are described. It has been found that in one of the cases, the rotation of the system of two cells is carried out around the center of mass, which favorably affects the stability of the system, but decreases the rotation angle. In another case, the absence of one of the faces leads to the rotation which is not relative to the center of mass and results in the asymmetric strain figure and instability of the system. Such instability is caused by disproportionate arrangement of the cells in the plane, which has been shown using the examples of the systems with two and nine cells. For the system of nine unit cells, both methods of integration lead to a symmetric rotation about two perpendicular axes. Further research of this topic is supposed to allow one to create metamaterials and structures with programmable mechanical behavior.

**Keywords:** mechanical metamaterial, chirality, twist, integration of cells, numerical modeling

**Acknowledgments:** The work was carried out according to the state assignment for ISPMs SB RAS, project FWRW-2022-0003.

**For citation:** Akhmetshin, L.R., Smolin, I.Yu. (2022) Analysis of some methods of integration of cells in a mechanical metamaterial. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 27–37. doi: 10.17223/19988621/77/3

Метаматериалы – это искусственно созданные материалы, уникальные свойства которых обусловлены их микроструктурой, а не химическим составом базового материала. Другими словами, механическое поведение метаматериалов ближе к поведению конструкций, а не материалов. В материалах элементарная ячейка представляет собой набор атомов, в то время как метаматериал строится из крупных ячеек, на порядки больше атомного значения.

Одним из методов создания метаматериалов является механическое изготовление иерархической ячеистой структуры на мезо- или макромасштабе. Данный подход в основном применяется для создания механических метаматериалов. Механические метаматериалы характеризуются необычными механическими свойствами и классифицируются по константам упругости: (1) модуль Юнга, (2) сдвиговой модуль, (3) объемный модуль, (4) коэффициент Пуассона [1].

Среди прочих видов метаматериалов ячеистые структуры достигают наивысшей эффективности благодаря меньшему удельному весу [2]. В последние годы интерес к исследованиям в области ячеистых структур метаматериалов расширился от чисто прикладных до фундаментальных исследований свойств.

Очень популярным типом структур метаматериалов является структура с хиральными элементами. Хиральность – это свойство объекта не накладываться на свое зеркальное отображение. Хиральность может быть как левосторонней, так и правосторонней [3]. Простой хиральный элемент имеет центральное кольцо и ребра, выходящие из него [4]. Количество ребер будет определять название хиральной структуры.

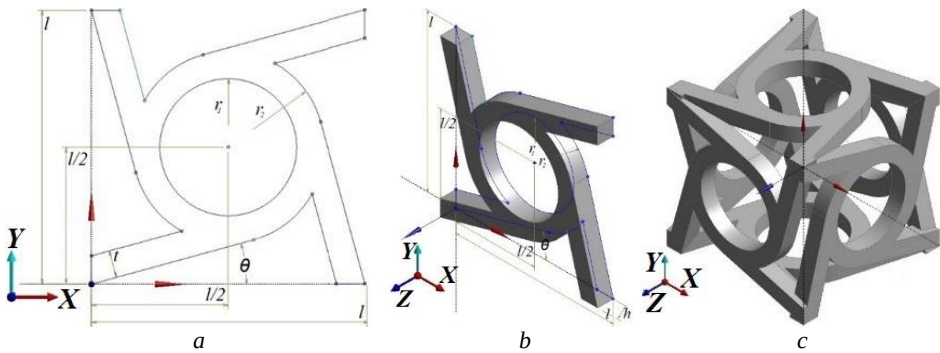
Впервые трехмерный образец из метаматериала с хиральной структурой, состоящей из кольца и четырех связок, был продемонстрирован в работе [5]. Авторы этой работы показали, что при одноосном нагружении стержня из механического метаматериала он проявляет необычный эффект, заключающийся в скручивании стержня. Полученный результат является аналогом оптической активности и именуется «механическая активность».

Метаматериалы активно развиваются в настоящее время и уже продемонстрировали исключительный потенциал для широкого спектра применений, в частности для теплоизоляции, электродов аккумуляторов, носителей катализаторов и гашения акустической, вибрационной или ударной энергии [6]. Вызывает интерес их применение для преобразования или демпфирования механических волн. В метаматериалах энергия может быть сконцентрирована в элементах структуры и эффективно поглощена [7]. В биомедицинской инженерии существует множество перспектив применения метаматериалов: в качестве протезов, имплантатов, стентов, скаффолдов, расширителей, швов, фиксаторов связок / мускулов, бинтов [8]. Особую актуальность разработке изделий из механических метаматериалов придают успехи в развитии современных технологий 3D-печати. Технологии производства трехмерных изделий являются перспективными и конкурентоспособными по сравнению с традиционными благодаря высокой производительности и возможности создавать детали со сложной геометрией для достижения ранее недоступных свойств [9].

Настоящая работа является следствием предыдущих работ [10, 11], по результатам которых было обнаружено, что отсутствуют исследования, связанные с изучением соединения элементарных ячеек в метаматериалах. Цель данной работы – анализ различных методов соединения элементарных ячеек в механическом тетрахиральном метаматериале.

### **Структура метаматериала**

Для исследования способов соединения элементарных ячеек в механическом ячеистом метаматериале можно провести анализ поведения системы двух элементарных ячеек. Чтобы создать геометрическую модель соединения двух ячеек были выделены этапы построения геометрической модели одной элементарной ячейки механического тетрахирального метаматериала (рис. 1). Затем элементарные ячейки соединяются между собой. Тетрахиральность означает, что в структуре присутствуют кольцо и четыре связки (ребра), соединенные с кольцом по касательной и взаимодействующие с другими ячейками.



**Рис. 1.** Структура метаматериала: эскиз (a), хиральная структура (b), элементарная ячейка (c)  
**Fig. 1.** Structures of a metamaterial: (a) scheme, (b) chiral structure, and (c) unit cell

После создания элементарной ячейки ее необходимо размножить для создания макротела. Как было выяснено и будет показано в данной работе, расположение элементарных ячеек играет важную роль в деформационном поведении образца из метаматериала.

Создание геометрической модели производили в модуле Design Modeler программного комплекса Ansys WB 2020R2.

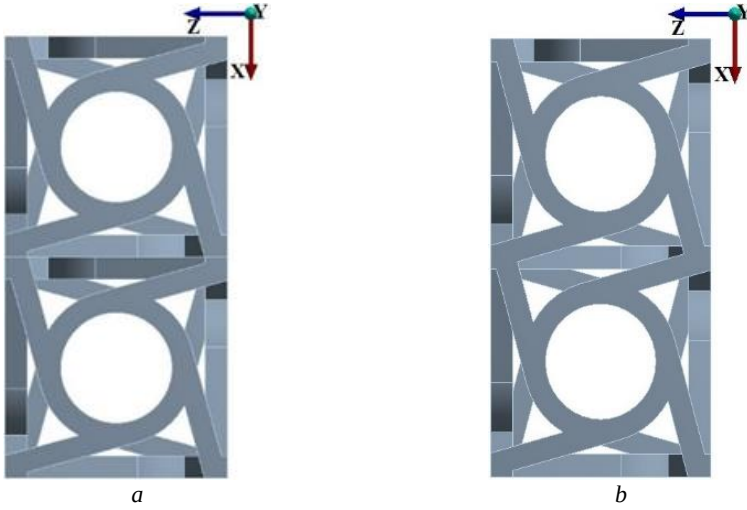
Для создания математической модели были приняты следующие значения параметров:  $l = 50$  мм – длина элементарной ячейки,  $t = 5$  мм – ширина ребра,  $h = 5$  мм – толщина ребра,  $r_2 = 17.5$  мм – внешний радиус кольцевого элемента,  $r_1 = 12.5$  мм – внутренний радиус кольцевого элемента,  $\theta$  – угол наклона ребра. Угол  $\theta$  строится между ребром метаматериала и горизонтальной плоскостью, является зависимым от параметров кольца и вычисляется следующим образом [12]:

$$\theta = \arccos \left( \frac{2 \left( \frac{r_2 - r_1}{2} \right)}{\sqrt{2}L} \right) - 45^\circ.$$

### Методы соединения элементарных ячеек

Основу метаматериала составляют элементарные ячейки. При создании метаматериала следует различать способы их соединения (рис. 2). Наиболее очевидным является метод «присоединения», когда одна ячейка присоединяется к другой, как показано на рис. 2, a. Другой метод соединения элементарных ячеек представлен на рис. 2, b. В этом случае происходит наложение краев ребер. Будем называть такой способ методом «внахлест». Видно, что при этом грань одной ячейки является также гранью другой ячейки.

Различия в методах соединения элементарных ячеек заметны даже на примере двух ячеек. Видно, что при использовании метода «присоединения» в области соединения двух ячеек возникает удвоение толщины. В методе «внахлест» не возникает утолщений, и вероятно, что такой способ будет более экономичным за счет отсутствия некоторых граней ячеек.



**Рис. 2.** Методы соединения ячеек в метаматериале: присоединение (а), внахлест (b)  
**Fig. 2.** Methods of integration of cells in a metamaterial: (a) joining and (b) overlapping

### Математическая постановка и особенности численного моделирования

Постановка краевой задачи выражается системой уравнений теории упругости для интересующих нас полей перемещений  $u_i$  и напряжений  $\sigma_{ij}$  в трехмерной постановке. Система включает уравнения равновесия (1), соотношения Коши (2) для определения деформаций через перемещения и определяющие соотношения (закон Гука) (3):

$$\nabla_j \cdot \sigma_{ij} = 0; \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{ij}, \quad (3)$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений,  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора деформаций,  $x_i$  – пространственные координаты,  $u_i$  – компоненты вектора перемещений,  $\lambda$ ,  $\mu$  – коэффициенты Ламе,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $i, j = 1, 2, 3$ .

Начальные условия в момент времени  $t_0 = 0$  соответствовали отсутствию начальных напряжений и деформаций и выглядят следующим образом:

$$\sigma_{ij}(t_0) = \varepsilon_{ij}(t_0) = 0. \quad (4)$$

В работе рассмотрена задача одноосного нагружения образца из механического метаматериала. Для этого на нижней грани образца из метаматериала были наложены условия жесткой заделки, а на верхней грани задавалось перемещение, соответствующее продольному сжатию на 3%. Перемещение может быть задано со знаком плюс или минус, что соответствует растяжению или сжатию. На остальных гранях образца заданы свободные граничные условия. В этом случае граничные условия можно записать следующим образом:

$$u_i = 0 \text{ для } x_i \in S_1, u_2 = -0.03l \text{ для } x_i \in S_2, \sigma_{ij} n_j = 0 \text{ для } x_i \in S_3, \quad (5)$$

где  $S_1$  – нижняя грань,  $S_2$  – верхняя грань,  $S_3$  – оставшиеся грани образца,  $l$  – начальная длина образца вдоль оси  $z(y)$ ,  $n_j$  – компоненты вектора нормали к поверхности  $S_3$ .

В данной работе для упругих постоянных были приняты следующие значения:  $E = 2.6$  ГПа – модуль Юнга,  $\nu = 0.4$  – коэффициент Пуассона. Связь модуля Юнга и коэффициента Пуассона с постоянными Ламе задается формулами:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (6)$$

Принятые значения констант соответствуют ABS-пластику. Свойства метаматериалов в большей степени зависят не от значений упругих модулей, а от геометрии макроструктуры метаматериала.

Численное моделирование проводилось методом конечных элементов в программном комплексе Ansys WB 2020R2. Элементарная ячейка рассматривалась как система стержней (балок), которые при расчете методом конечных элементов моделировались как совокупность трехмерных твердотельных элементов. Деформирование образца происходит без контактных взаимодействий составляющих его элементов.

## Результаты и обсуждение

### Сеточная сходимость

Для получения достоверных результатов математического моделирования, а также для уменьшения вычислительных затрат необходимо было провести исследование на сеточную сходимость. Это позволяет определить оптимальный размер элементов конечно-элементной сетки. Поскольку наибольший интерес в исследовании представляет описание закручивания образца из метаматериала, было решено оценивать сеточную сходимость по величине угла поворота крайней грани образца из метаматериала.

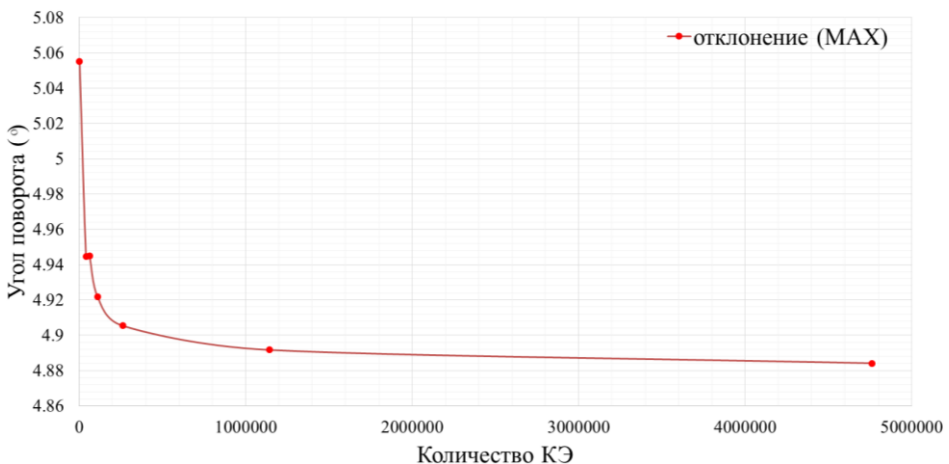


Рис. 3. Сеточная сходимость по усредненной характеристике – повороту грани  
Fig. 3. Grid convergence with respect to an averaged face rotation



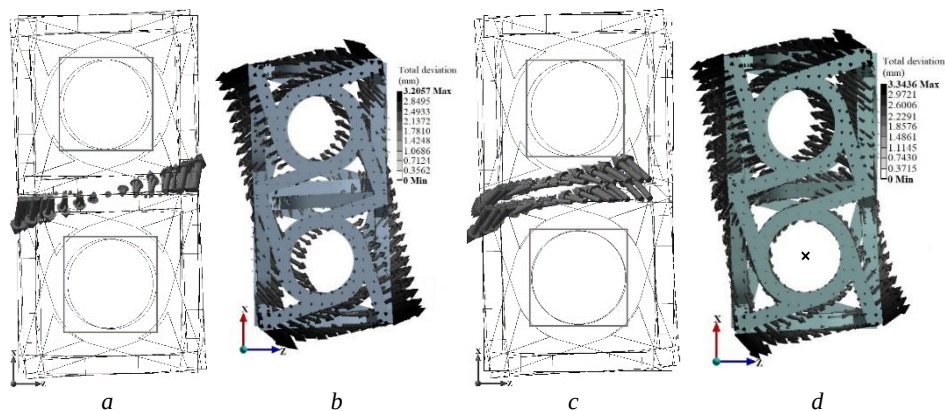
Проведенные расчеты (рис. 3) показали, что оптимальными конечными элементами будут являться тетраэдральные элементы с характерным размером 0.6 мм. Диапазон проверяемых значений размеров элементов составил 5, 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.1 мм. При выборе любого из размеров конечных элементов погрешность результатов составляла не более 3.6%.

### *Система двух элементарных ячеек*

Тетрахиальность позволяет двумерным структурам скручиваться вдоль некоторых направлений. Это говорит о том, что при приложении одноосной нагрузки (сжатие / растяжение) появляется дополнительная степень свободы, а именно вращение кольца [13].

Соединение ячеек в метаматериале методом «присоединения» может привести к разнонаправленному вращению граней в области контакта ячеек, что является отрицательным эффектом для закручивания всего образца из такого метаматериала (рис. 4, *a*).

Соединение ячеек методом «внахлест» не дает подобной реакции, поэтому закономерным будет предположить, что создание образца из метаматериала представленным методом позволит достичь лучших значений механического эффекта закручивания (рис. 4, *c*).



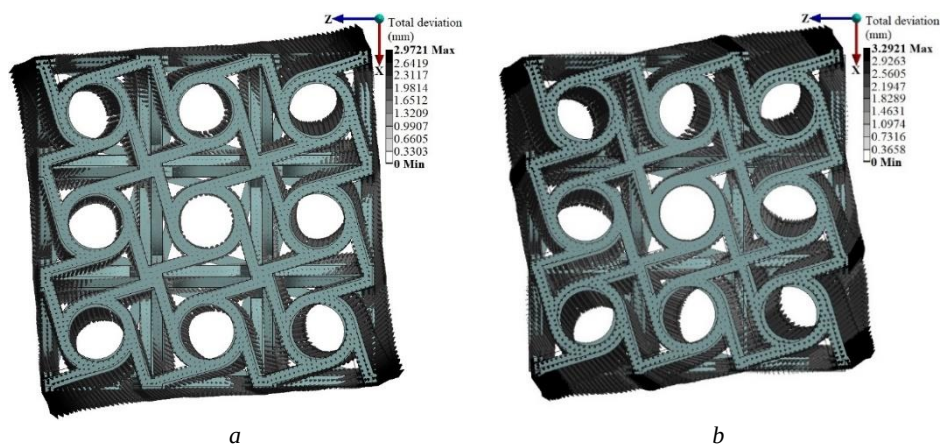
**Рис. 4.** Векторы смещений в образцах из двух элементарных ячеек  
**Fig. 4.** Displacement vectors in the samples build up from two cells

Наиболее интересный эффект проявляется, если рассматривать систему из двух ячеек целиком. Как видно из рис. 4, *a, b*, в методе «присоединения» центр вращения возникает в месте соединения граней. Это связано с тем, что в этой точке находится центр масс системы. Вращение направлено против часовой стрелки.

При рассмотрении системы ячеек, соединенных методом «внахлест», обнаружено, что такая система вращается относительно центра одного из колец тетрахиальной структуры (отмечен крестиком на рис. 4, *d*). То есть наблюдается асимметричная картина механического поведения, которая не замечена в системе двух ячеек, соединенных методом «присоединения».

### Система девяти элементарных ячеек

При рассмотрении результатов для системы двух ячеек получены интересные результаты, связанные с ассиметричным деформированием. Предполагается, что подобный эффект вызван несимметричным расположением ячеек по осям в плоскости  $XZ$ . Необходимо рассмотреть образец, в котором количество ячеек, расположенных как по оси  $X$ , так и по оси  $Z$  одинаково, например,  $3 \times 3$  ячеек. Результаты для рассматриваемой системы представлены на рис. 5.



**Рис. 5.** Механическое поведение в системе из девяти ячеек, соединенных методами присоединения (а), внахлест (б)

**Fig. 5.** Mechanical behavior in a system of nine cells integrated by the methods of (a) joining and (b) overlapping of cells

По соответствующим векторам движения узлов конечно-элементной сетки можно сделать вывод, что механическое поведение при обоих способах соединения ячеек симметричное, а по распределению векторов можно заключить, что эффект скручивания в методе «внахлест» выражен более сильно, чем в методе «присоединения». Отклонение от оси  $X$  при скручивании структуры составляет 2.38 мм и 2.26 мм для методов «внахлест» и «присоединение» соответственно.

### Заключение

Рассмотрена квазистатическая задача нагружения системы элементарных ячеек механического тетрахиального метаматериала в рамках линейной теории упругости для случая трехмерных однородных хиральных ячеистых структур. Эта работа является продолжением исследований авторов по изучению необычного эффекта «нагружение–скручивание» [10].

Математическое моделирование методом конечных элементов является удобным средством для прогнозирования деформационного поведения образца из механического метаматериала. В общем смысле проектирование материалов и метаматериалов путем математического моделирования позволяет избежать проб и ошибок при проведении натурных экспериментов.

В работе рассмотрены некоторые методы соединения элементарных ячеек в механическом тетрахиальном метаматериале. Описаны преимущества и недостатки каждого из методов соединения в системе двух ячеек. Обнаружено, что в одном из случаев вращение происходит вокруг центра масс системы, что благоприятно влияет на стабильную работу системы двух ячеек, но уменьшает значение угла поворота. При этом возникает симметричное деформационное поведение в обеих ячейках. В другом случае показано, как отсутствие одной из граней влияет на деформацию системы двух ячеек и приводит к асимметричной картине механического поведения. Нарушение симметрии вращения может вызвать эффекты изгиба, приводящие к неустойчивости.

При рассмотрении системы из ячеек, симметрично расположенных по осям плоскости, состоящей из  $3 \times 3$  ячеек, отсутствует асимметрия механического поведения. Можно утверждать, что поворот осуществляется симметрично относительно осей  $X$  и  $Z$ . Данное утверждение дает нам понимание того, что центр вращения находится в центре образцов для обоих методов.

Хотя оптимизация химического состава играет важную роль в разработке новых материалов, механические и функциональные свойства большинства материалов в значительной степени определяются их структурой на уровне выше атомного. Целенаправленное проектирование «архитектурных» микроструктур позволяет получать материалы с оптимальными механическими и новыми функциональными свойствами [14]. Мы предполагаем, что продолжение исследований в выбранном нами направлении позволит создать метаматериалы и конструкции с программируемым механическим поведением.

#### Список источников

1. Yu X., Zhou J., Liang H., Jiang Zh., Wu L. Mechanical metamaterials associated with stiffness, rigidity and compressibility: a brief review // *Progress in Materials Science*. 2018. V. 94. P. 114–173. doi: 10.1016/j.pmatsci.2017.12.003
2. Cummer S.A., Christensen J., Alù A. Controlling sound with acoustic metamaterials // *Nature Reviews Materials*. 2016. V. 1. Art. 16001. doi: 10.1038/natrevmats.2016.1
3. Grima J.N., Gatt R., Farrugia P.-S. On the properties of auxetic meta-tetrachiral structures // *Physica Status Solidi (B)*. 2008. V. 245. P. 511–520. doi: 10.1002/pspb.200777704
4. Prall D., Lakes R.S. Properties of a chiral honeycomb with a Poisson's ratio of  $-1$  // *International Journal of Mechanical Sciences*. 1997. V. 39, No. 3. P. 305–314.
5. Frenzel T., Kadic M., Wegener M. Three-dimensional mechanical metamaterials with a twist // *Science*. 2017. V. 358. Art. 6366. P. 1072–1074. doi: 10.1126/science.aao4640
6. Schaedler T., Jacobsen A., Torrents A., Sorensen A., Lian J., Greer J., Valdevit L., Carter W.B. Ultralight metallic microlattices // *Science*. 2011. V. 334. Art. 6058. P. 962–965. doi: 10.1126/science.1211649
7. Tan T., Yan Zh., Zou H., Ma K., Liu F., Zhao L., Peng Zh., Zhang W. Renewable energy harvesting and absorbing via multi-scale metamaterial systems for Internet of things // *Applied Energy*. 2019. V. 254. Art. 113717. doi: 10.1016/j.apenergy.2019.113717
8. Bhullar S.K., Lala N.L., Ramkrishna S. Smart biomaterials – a review // *Review on Advanced, Materials Science*. 2015. V. 40, No. 3. P. 303–314.
9. Kweun J.M., Lee H.J., Oh J.H., Seung H.M., Kim Y.Y. Transmodal Fabry-Pérot Resonance: Theory and Realization with Elastic Metamaterials // *Physical Review Letters*. 2017. V. 118. P. 205901-1–205901-6. doi: 10.1103/PhysRevLett.118.205901

10. Akhmetshin L.R., Smolin I.Yu. Influence of unit cell parameters of tetrachiral mechanical metamaterial on its effective properties // *Nanoscience and Technology: An International Journal*. 2020. V. 11, No. 3. P. 265–273. doi: 10.1615/NanoSciTechnolIntJ.2020033737
11. Akhmetshin L.R., Smolin I.Yu. The localization of deformations in mechanical metamaterial with a twist. Numerical investigation // *AIP Conference Proceedings*. 2020. V. 2310. Art. 020008. doi: 10.1063/5.0034083
12. Akhmetshin L.R., Iokhim K.V. Analytical and Numerical Analysis of the Deformation Behavior of Tetrachiral Metamaterial // *AIP Conference Proceedings*. 2020. V. 2310. Art. 20006. doi: 10.1063/5.0034072
13. Fu M.-H., Zheng B.B., Li W.-H. A novel chiral three-dimensional material with negative Poisson's ratio and the equivalent elastic parameters // *Composite Structures*. 2017. V. 176. P. 442–448. doi: 10.1016/j.compstruct.2017.05.027
14. Bonfanti S., Guerra R., Zaiser M., Zapperi S. Digital strategies for structured and architected materials design // *APL Materials*. 2021. V. 9. Art. 020904. doi: 10.1063/5.0026817

### References

1. Yu X., Zhou J., Liang H. Jiang Zh., Wu L. (2018) Mechanical metamaterials associated with stiffness, rigidity and compressibility: A brief review. *Progress in Materials Science*. 94. pp. 114–173. doi: 10.1016/j.pmatsci.2017.12.003
2. Cummer S.A., Christensen J., Alu A. (2016) Controlling sound with acoustic metamaterials. *Nature Reviews Materials*. 1. Article 16001. doi: 10.1038/natrevmats.2016.1
3. Grima J.N., Gatt R., Farrugia P.-S. (2008) On the properties of auxetic meta-tetrachiral structures. *Physica Status Solidi (B)*. 245. pp. 511–520. doi: 10.1002/pssb.200777704
4. Prall D., Lakes R.S. (1997) Properties of a chiral honeycomb with a Poisson's ratio of  $-1$ . *International Journal of Mechanical Sciences*. 39(3). pp. 305–314.
5. Frenzel T., Kadic M., Wegener M. (2017) Three-dimensional mechanical metamaterials with a twist. *Science*. 358. Article 6366. pp. 1072–1074. doi: 10.1126/science.aao4640
6. Schaedler T., Jacobsen A., Torrents A., Sorensen A., Lian J., Greer J., Valdevit L., Carter W.B. (2011) Ultralight metallic microlattices. *Science*. 334. Article 6058. pp. 962–965. doi: 10.1126/science.1211649
7. Tan T., Yan Zh., Zou H., Ma K., Liu F., Zhao L., Peng Zh., Zhang W. (2019) Renewable energy harvesting and absorbing via multi-scale metamaterial systems for Internet of things. *Applied Energy*. 254. Article 113717. doi: 10.1016/j.apenergy.2019.113717
8. Bhullar S.K., Lala N.L., Ramkrishna S. (2015) Smart biomaterials - a review. *Review on Advanced Materials Science*. 40(3). pp. 303–314.
9. Kweun J.M., Lee H.J., Oh J.H., Seung H.M., Kim Y.Y. (2017) Transmodal Fabry-Perot resonance: theory and realization with elastic metamaterials. *Physical Review Letters*. 118. Article 205901. doi: 10.1103/PhysRevLett.118.205901
10. Akhmetshin L.R., Smolin I.Yu. (2020) Influence of unit cell parameters of tetrachiral mechanical metamaterial on its effective properties. *Nanoscience and Technology: An International Journal*. 11(3). pp. 265–273. doi: 10.1615/NanoSciTechnolIntJ.2020033737
11. Akhmetshin L.R., Smolin I.Yu. (2020) The localization of deformations in mechanical metamaterial with a twist. Numerical investigation. *AIP Conference Proceedings*. 2310. Article 020008. doi: 10.1063/5.0034083
12. Akhmetshin L.R., Iokhim K.V. (2020) Analytical and numerical analysis of the deformation behavior of tetrachiral metamaterial. *AIP Conference Proceedings*. 2310. Article 20006. doi: 10.1063/5.0034072
13. Fu M.-H., Zheng B.B., Li W.-H. (2017) A novel chiral three-dimensional material with negative Poisson's ratio and the equivalent elastic parameters. *Composite Structures*. 176. pp. 442–448. doi: 10.1016/j.compstruct.2017.05.027

14. Bonfanti S., Guerra R., Zaiser M., Zapperi S. (2021) Digital strategies for structured and architected materials design. *APL Materials*. 9. Article 020904. doi: 10.1063/5.0026817

***Сведения об авторах:***

**Ахметшин Линар Ришатович** – аспирант кафедры механики деформируемого твердого тела физико-технического факультета Томского государственного университета, младший научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, Россия. E-mail: akhmetshin.lr@gmail.com

**Смолин Игорь Юрьевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прочности и проектирования физико-технического факультета Томского государственного университета, главный научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, Россия. E-mail: smolin@ispms.ru

***Information about the authors:***

**Akhmetshin Linar R.** (Tomsk State University, Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: akhmetshin.lr@gmail.com

**Smolin Igor Yu.** (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: smolin@ispms.ru

*Статья поступила в редакцию 14.07.2021; принята к публикации 19.05.2022*

*The article was submitted 14.07.2021; accepted for publication 19.05.2022*

Научная статья

УДК 539.3/.6

doi: 10.17223/19988621/77/4

## Расчет ступенчатого стержня при продольно-поперечном изгибе с дискретной осевой нагрузкой

Сергей Васильевич Бакушев

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,  
Пенза, Россия, bakuchsv@mail.ru*

**Аннотация.** Рассматривается построение расчетных соотношений для изгибающих моментов и поперечных сил в прямолинейном упругом ступенчатом стержне, находящемся в условиях плоского продольно-поперечного изгиба. Каждая ступень стержня (его интервал) может быть изготовлена из разного материала и иметь свою форму и размеры поперечного сечения. Кроме того, стержень может быть нагружен в начале каждой ступени осевой продольной силой. Учитывается эксцентриситет продольных сил в начале каждой ступени (интервала), возникающий за счет несовпадения продольных осей на текущей и предыдущей ступенях. На каждом интервале стержня может быть приложено поперечное воздействие в виде сосредоточенных изгибающих моментов и сосредоточенных сил, а также равномерно распределенной нагрузки.

**Ключевые слова:** упругий ступенчатый стержень, продольно-поперечный изгиб, изгибающие моменты, поперечные силы

**Для цитирования:** Бакушев С.В. Расчет ступенчатого стержня при продольно-поперечном изгибе с дискретной осевой нагрузкой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 77. С. 38–53. doi: 10.17223/19988621/77/4

Original article

## Calculation of a stepped rod under longitudinal-transverse bending with discrete axis loading

Sergey V. Bakushev

*Penza State University of Architecture and Construction,  
Penza, Russian Federation, Bakuchsv@mail.ru*

**Abstract.** This paper aims at obtaining formulas for bending moments and shear forces in a rectilinear elastic stepped rod under plane longitudinal-transverse bending. Each step of the rod (segment) can consist of different materials and have its own shape and cross-

sectional dimensions. The rod can be loaded by an axial longitudinal force at the beginning of each step. The eccentricity of longitudinal forces at the beginning of each step (segment) is taken into account, which occurs due to the mismatch of longitudinal axes at the current and previous steps. Each segment of the rod can be exposed to a transverse action represented as concentrated bending moments, concentrated forces, and uniformly distributed loading.

The resulting algebraic equations of the bending moments and shear forces are obtained for the stepped rod under longitudinal-transverse bending. The numerical model has been considered.

The study results show that allowance for longitudinal action on the stepped rod bending with discrete axial loading leads to an increase in the ordinates of epures and bending moments, as well as in shear forces as compared to transverse bending caused by transverse loading only. Moreover, the internal transverse forces do not remain constant on the rod segments which are free from uniformly-distributed transverse loading. The obtained formulas for bending moments and transverse forces can be applied in calculations of elastic stepped rods under longitudinal-transverse bending.

**Keywords:** elastic step rod, longitudinal-transverse bending, bending moments, transverse forces

**For citation:** Bakushev, S.V. (2022) Calculation of a stepped rod under longitudinal-transverse bending with discrete axis loading. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 38–53. doi: 10.17223/19988621/77/4

## Введение

Достаточно часто несущие колонны и стойки гражданских и промышленных зданий находятся в условиях продольно-поперечного изгиба. Причем и продольная, и поперечная нагрузка изменяется по длине стержня, как правило, дискретно. Более того, площадь и форма поперечного сечения также не остаются постоянными и на разных участках стержня могут иметь разные значения. Кроме того, и материал стержня, или по крайней мере его механические характеристики, на разных участках стержня могут иметь разные значения. Это приводит к необходимости иметь методику расчета таких ступенчатых стержней при продольно-поперечном изгибе с дискретной осевой нагрузкой.

Надо сказать, что расчету стержней при продольно-поперечном изгибе посвящены многие разработки как отечественных, так и зарубежных инженеров. Так, в работе [1] рассматривается продольно-поперечный изгиб балок, материал которых описывается нелинейной диаграммой деформирования. В статье [2] разработано дифференциальное уравнение для прогибов сжато-изогнутого стержня в начальных параметрах. В работе [3] выполнено теоретическое и экспериментальное исследование упругого деформирования прямого гибкого стержня при продольно-поперечном изгибе. В статье [4] на основе энергетического метода определения критической нагрузки и метода Галеркина рассмотрена методика расчета на прочность и устойчивость ферменной мачты – трехгранной фермы постоянного поперечного сечения, находящейся в условиях продольно-поперечного изгиба от действия собственного веса мачты и поперечной ветровой нагрузки. В работе [5] рассматривается проблема расчета на продольно-поперечный изгиб и устойчивость стержней ступенчато-переменного сечения при наличии сосредоточенных и распределенных продольных нагрузок. Принятая математическая

модель, полученная на основе аналитического решения уравнения изгиба в функциях Бесселя и Ломмеля, позволяет рассматривать стержневые системы с любым видом граничных условий. В статье [6] приводится аналитическое решение задачи продольно-поперечного изгиба для стержней, изгибная жесткость которых изменяется по степенному закону.

В работе [7] предложена математическая модель, позволяющая учесть поперечную нагрузку, возникающую из-за поддерживающего влияния сальника и возможных погрешностей при изготовлении и монтаже винта, при моделировании потери продольной устойчивости винтов приводов затворов напорных трубопроводов. В статье [8] рассматривается процедура вычисления изгибающих моментов в сжато-изогнутом, статически неопределимом стержне, нагруженном распределенной вдоль его оси сжимающей силой. В работе [9] рассматриваются вопросы определения прочности стержней переменного сечения при продольно-поперечном изгибе. В статье [10] установлены источник и характер систематической ошибки, вкравшейся в методической базе в расчетные формулы для продольно-поперечного изгиба трубопроводов на участках с активными грунтовыми изменениями.

В работе [11] описывается новое направление в моделировании стержневых и континуальных систем при расчете на статические и динамические нагрузки, а также на устойчивость, основанное на синтезируемой электронной модели исследуемого объекта, позволяющей получить точные алгебраические уравнения, соответствующие дифференциальным уравнениям равновесия при поперечном и продольно-поперечном изгибе как с учетом, так и без учёта вязкоупругих свойств материала. В статье [12] получены дифференциальные уравнения равновесия трубопровода, моделируемого протяженной упругой балкой с исходной кривизной. Для прямолинейных участков трубопровода полученные уравнения переходят в общеизвестные уравнения продольно-поперечного изгиба и продольного сдвига. В работе [13] описывается способ определения перемещений стержня малой жесткости при продольно-поперечном изгибе от равномерно распределенной поперечной нагрузки и продольной силы. На основе решения полного дифференциального уравнения изогнутой оси стержня выполнено сравнение результатов расчета при линейном и нелинейном решении.

В статье [14] рассматривается обратная задача продольно-поперечного изгиба стержня: по значениям прогибов стержня в пяти точках требуется найти общие краевые условия упругого закрепления стержня и интенсивность поперечной распределенной нагрузки. В работах [15, 16] рассматриваются многослойные бетонные стержни постоянного поперечного сечения, находящиеся в условиях продольно-поперечного изгиба. Закон деформирования каждого слоя стержня аппроксимирован полиномом третьего порядка. Решение строится методом Бубнова–Галёркина. В статье [17] рассматривается предельное состояние многослойных бетонных и железобетонных стержней постоянного поперечного сечения при сложном и продольно-поперечном изгибе. В качестве критерия условного предельного состояния принимается условие, при котором в одном или нескольких слоях стержня возникает максимальная деформация, соответствующая предельно допустимому значению при растяжении или сжатии, соответствующему на диаграмме деформирования точкам перехода к ниспадающей ветви. Исследование и анализ работы бетонных и железобетонных стержней, находящихся



в условиях продольно-поперечного изгиба, нашли свое отражение в ряде публикаций в зарубежных журналах [18–29].

В данной работе поставлена цель модификации расчетной методики профессора С.Н. Соколова для определения внутренних усилий (изгибающих моментов и поперечных сил) в ступенчатых стержнях при продольно-поперечном изгибе с дискретной осевой нагрузкой.

### Описание метода профессора С.Н. Соколова

Один из приемов расчета стержней при продольно-поперечном изгибе был разработан доктором технических наук, профессором кафедры сопротивления материалов Московского института химического машиностроения С.Н. Соколовым еще в конце 40-х – начале 50-х гг. XX столетия. Этот метод основан не на определении формы упругой линии стержня, а на вычислении в сжато-изогнутом стержне изгибающих моментов. Метод профессора С.Н. Соколова изложен в руководствах по сопротивлению материалов [30, 31] М.В. Рубинина. Отсылая читателей к указанным выше руководствам по сопротивлению материалов для более подробного ознакомления с методом С.Н. Соколова, приведем здесь лишь окончательные расчетные формулы для определения функций изгибающих моментов и поперечных сил на различных участках сжато-изогнутого упругого стержня постоянного поперечного сечения, выполненного из материала с модулем упругости  $E$  и моментом инерции поперечного сечения относительно нейтральной линии  $I$  (рис. 1).

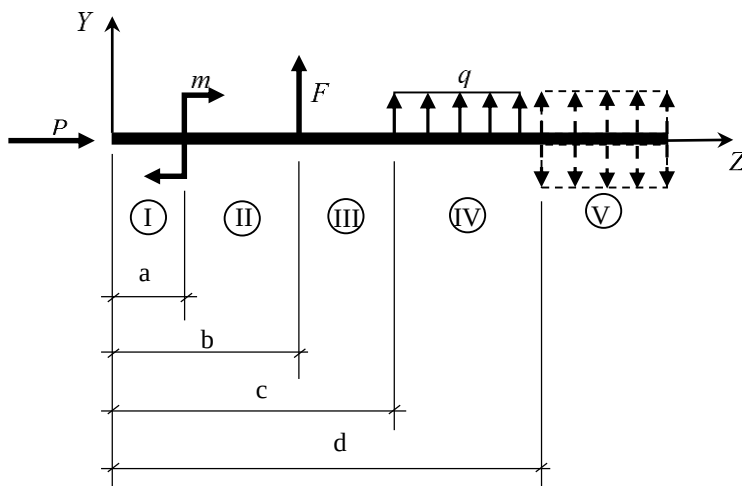


Рис. 1. Стержень в условиях продольно-поперечного изгиба

Fig. 1. A rod under longitudinal-transverse bending

Участок I:  $0 \leq z \leq a$ .

$$M'(z) = M_0 \cos(kz) + \frac{Q_0}{k} \sin(kz); \quad Q'(z) = -M_0 k \sin(kz) + Q_0 \cos(kz). \quad (1)$$

Участок II:  $a \leq z \leq b$ .

$$M''(z) = M'(z) + m \cos[k(z-a)]; \quad Q''(z) = Q'(z) - mk \sin[k(z-a)]. \quad (2)$$

Участок III:  $b \leq z \leq c$ .

$$M'''(z) = M''(z) + \frac{F}{k} \sin[k(z-b)]; \quad Q'''(z) = Q''(z) + F \cos[k(z-b)]. \quad (3)$$

Участок IV:  $c \leq z \leq d$ .

$$M^{IV}(z) = M'''(z) + \frac{q}{k^2} \{1 - \cos[k(z-c)]\};$$

$$Q^{IV}(z) = Q'''(z) + \frac{q}{k} \sin[k(z-c)]. \quad (4)$$

Участок V:  $z \geq d$ .

$$M^V(z) = M^{IV}(z) - \frac{q}{k^2} \{1 - \cos[k(z-d)]\};$$

$$Q^V(z) = Q^{IV}(z) - \frac{q}{k} \sin[k(z-d)]. \quad (5)$$

В формулах (1)–(5) параметр  $k^2 = \frac{P}{EI}$ . Величины  $M_0$  и  $Q_0$  представляют собой начальные параметры (постоянные интегрирования на первом участке) и определяются из условий на опорах.

При выводе соотношений (1)–(5) С.Н. Соколов исходил из условий, что каждый силовой участок имеет свое дифференциальное уравнение для изгибающих моментов, а постоянные интегрирования на каждом последующем участке выражаются через постоянные предыдущего участка, причем на стыке участков выполняются граничные условия для изгибающих моментов и поперечных сил (рис. 2).

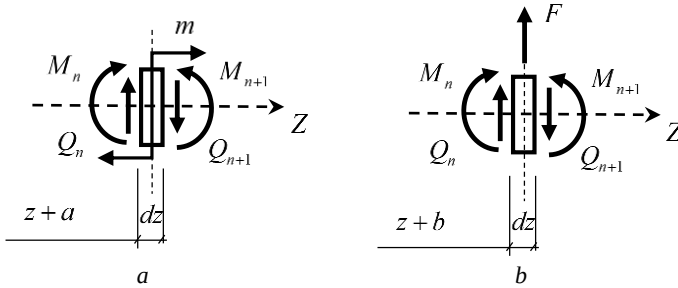


Рис. 2. Стыки участков стержня  
Fig. 2. Joints of rod sections

Если стык участков соответствует сосредоточенному изгибающему моменту (см. рис. 2, а), то граничные условия имеют вид:

$$M_n + m = M_{n+1}; \quad Q_n = Q_{n+1}. \quad (6)$$

Если стык участков соответствует сосредоточенной силе (рис. 2, б), то граничные условия записываются в форме:

$$M_n = M_{n+1}; \quad Q_n + F = Q_{n+1}. \quad (7)$$

### Модификация метода проф. С.Н. Соколова.

Составим уравнения изгибающих моментов и поперечных сил для стержня, имеющего несколько, например  $n$ , интервалов, на каждом из которых имеется пять, вообще говоря, участков, показанных на рис. 1. В начале каждого  $j$ -го интервала приложена сосредоточенная продольная сила  $P_j$ , совпадающая по направлению с центральной осью  $j$ -го интервала. Изгибная жесткость в пределах интервала остается постоянной:  $E_j I_j = \text{const}$  (рис. 3).

При составлении уравнений изгибающих моментов и поперечных сил будем исходить из уравнений (1)–(5) и равенств (6) и (7), а также из условия, что на стыке интервалов изгибающие моменты и сосредоточенные силы на пятом участке предыдущего интервала будут равны изгибающим моментам и поперечным силам на первом участке последующего интервала с учетом изгибающего момента, возникающего за счет эксцентриситета центральных осей на  $(j - 1)$ -м и  $j$ -м интервалах.

На рис. 3 показан  $j$ -й интервал длиной  $e_j$ , для которого параметр

$$k_j^2 = \left( \sum_{i=1}^j P_i \right) / (E_j I_j). \quad (8)$$

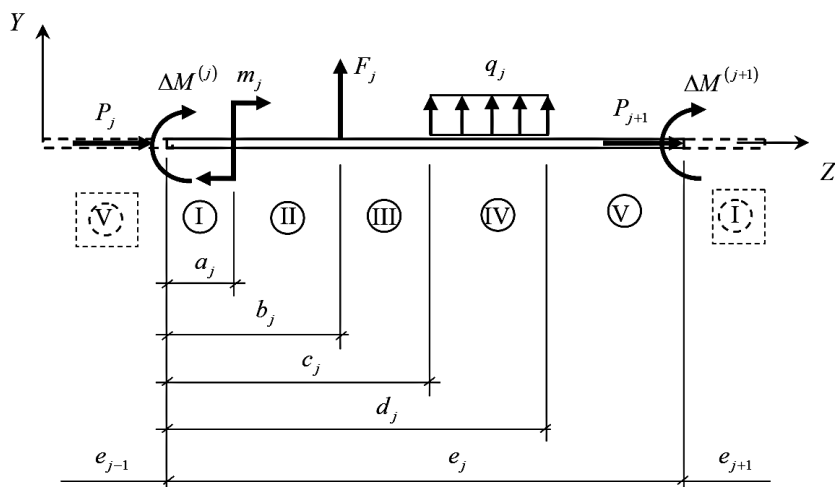


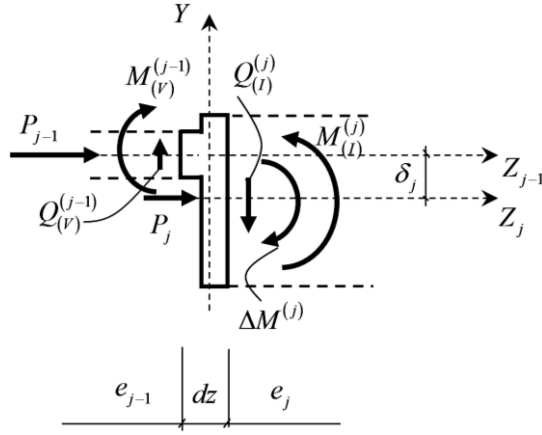
Рис. 3.  $j$ -й интервал стержня в условиях продольно-поперечного изгиба

Fig 3.  $j$ th segment of the rod under longitudinal-transverse bending

Изгибающий момент, возникающий за счет эксцентриситета центральных осей  $\Delta M^{(j)}$ , можно рассматривать как внешний момент, приложенный в начале  $j$ -го участка (рис. 4). Тогда

$$M_{(V)}^{(j-1)} + \Delta M^{(j)} = M_{(I)}^{(j)}; \quad Q_{(V)}^{(j-1)} = Q_{(I)}^{(j)}, \quad \text{где} \quad \Delta M^{(j)} = P_{(V)}^{(j-1)} \cdot (y_{Z_j} - y_{Z_{j-1}}) \quad (9)$$

Для изгибающего момента  $\Delta M^{(j)}$  примем следующее правило знаков: если момент направлен по ходу часовой стрелки, то он считается положительным.



**Рис. 4.** Стыки интервалов стержня с разными жесткостями  
**Fig. 4.** Joints of rod segments with different stiffness

Итак, уравнения изгибающих моментов и поперечных сил на каждом участке  $j$ -го интервала будут иметь вид:

Участок I:  $\sum_{i=1}^{j-1} e_i \leq z \leq \sum_{i=1}^{j-1} e_i + a_j$ .

$$\begin{aligned} M_{(l)}^{(j)}(z) &= \left[ M_{(v)}^{(j-1)} \left( \sum_{i=1}^{j-1} e_i \right) + \Delta M^{(j)} \right] \cdot \cos \left[ k_j \left( z - \sum_{i=1}^{j-1} e_i \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{k_j} Q_{(v)}^{(j-1)} \left( \sum_{i=1}^{j-1} e_i \right) \cdot \sin \left[ k_j \left( z - \sum_{i=1}^{j-1} e_i \right) \right]; \\ Q_{(l)}^{(j)}(z) &= - \left[ M_{(v)}^{(j-1)} \left( \sum_{i=1}^{j-1} e_i \right) + \Delta M^{(j)} \right] \cdot k_j \sin \left[ k_j \left( z - \sum_{i=1}^{j-1} e_i \right) \right] + \\ &+ Q_{(v)}^{(j-1)} \left( \sum_{i=1}^{j-1} e_i \right) \cdot \cos \left[ k_j \left( z - \sum_{i=1}^{j-1} e_i \right) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Участок II:  $\sum_{i=1}^{j-1} e_i + a_j \leq z \leq \sum_{i=1}^{j-1} e_i + b_j$ .

$$\begin{aligned} M_{(n)}^{(j)}(z) &= M_{(l)}^{(j)}(z) + m_j \cos \left[ k_j \left( z - \left( \sum_{i=1}^{j-1} e_i + a_j \right) \right) \right]; \\ Q_{(n)}^{(j)}(z) &= Q_{(l)}^{(j)}(z) - m_j \cdot k_j \sin \left[ k_j \left( z - \left( \sum_{i=1}^{j-1} e_i + a_j \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Участок III:  $\sum_{i=1}^{j-1} e_i + b_j \leq z \leq \sum_{i=1}^{j-1} e_i + c_j$ .

$$M_{(m)}^{(j)}(z) = M_{(n)}^{(j)}(z) + \frac{F_j}{k_j} \sin \left[ k_j \left( z - \left( \sum_{i=1}^{j-1} e_i + b_j \right) \right) \right]; \quad (12)$$

$$Q_{(III)}^{(j)}(z) = Q_{(II)}^{(j)}(z) + F_j \cos \left[ k_j \left( z - \left( \sum_{i=1}^{j-1} e_i + b_j \right) \right) \right].$$

$$\text{Участок IV: } \sum_{i=1}^{j-1} e_i + c_j \leq z \leq \sum_{i=1}^{j-1} e_i + d_j.$$

$$M_{(IV)}^{(j)}(z) = M_{(III)}^{(j)}(z) + \frac{q_j}{k_j^2} \left\{ 1 - \cos \left[ k_j \left( z - \left( \sum_{i=1}^{j-1} e_i + c_j \right) \right) \right] \right\}; \quad (13)$$

$$Q_{(IV)}^{(j)}(z) = Q_{(III)}^{(j)}(z) + \frac{q_j}{k_j} \sin \left[ k_j \left( z - \left( \sum_{i=1}^{j-1} e_i + c_j \right) \right) \right].$$

$$\text{Участок V: } \sum_{i=1}^{j-1} e_i + d_j \leq z \leq \sum_{i=1}^{j-1} e_i + e_j.$$

$$M_{(V)}^{(j)}(z) = M_{(IV)}^{(j)}(z) - \frac{q_j}{k_j^2} \left\{ 1 - \cos \left[ k_j \left( z - \left( \sum_{i=1}^{j-1} e_i + d_j \right) \right) \right] \right\}; \quad (14)$$

$$Q_{(V)}^{(j)}(z) = Q_{(IV)}^{(j)}(z) - \frac{q_j}{k_j} \sin \left[ k_j \left( z - \left( \sum_{i=1}^{j-1} e_i + d_j \right) \right) \right].$$

### Пример расчета сжато-изогнутого стержня.

Рассмотрим стержень на двух опорах, нагруженный поперечной и продольной нагрузками (рис. 5). Стержень находится в условиях продольно-поперечного изгиба и состоит из трех интервалов с длинами  $e_1$ ,  $e_2$  и  $e_3$ . При этом

$$k_1^2 = \frac{P_1}{E_1 I_1}; \quad k_2^2 = \frac{P_2}{E_2 I_2}; \quad k_3^2 = \frac{P_3}{E_3 I_3}.$$

Таким образом, изгибная жесткость постоянна в пределах каждого интервала. Пусть для определенности  $E_1 = E_2 = E_3$  и  $I_1 = I_3 < I_2$ . Стержень выполнен из двутавровых профилей, причем на стыках интервалов стержни обварены по контуру с совмещением по верхнему обрезу полков. При этом момент, возникающий за счет эксцентриситета осей на стыке первого и второго интервалов, будет положительным, а на стыке второго и третьего интервалов – отрицательным.

Вертикальные опорные реакции от действия поперечной нагрузки на левой шарнирно-подвижной и правой шарнирно-неподвижной опорах будут определяться соотношениями

$$R_A = \frac{1}{e_1 + e_2 + e_3} \left[ F_2 (e_2 + e_3 - b_2) - m_1 + q_3 (d_3 - c_3) \left( e_3 - d_3 + \frac{d_3 - c_3}{2} \right) \right];$$

$$R_B = \frac{1}{e_1 + e_2 + e_3} \left[ F_2 (e_1 + b_2) + m_1 + q_3 (d_3 - c_3) \left( e_1 + e_2 + c_3 + \frac{d_3 - c_3}{2} \right) \right].$$

Горизонтальная реакция на правой шарнирно-неподвижной опоре от действия продольных сил  $H = P_1 + P_2 + P_3$ .

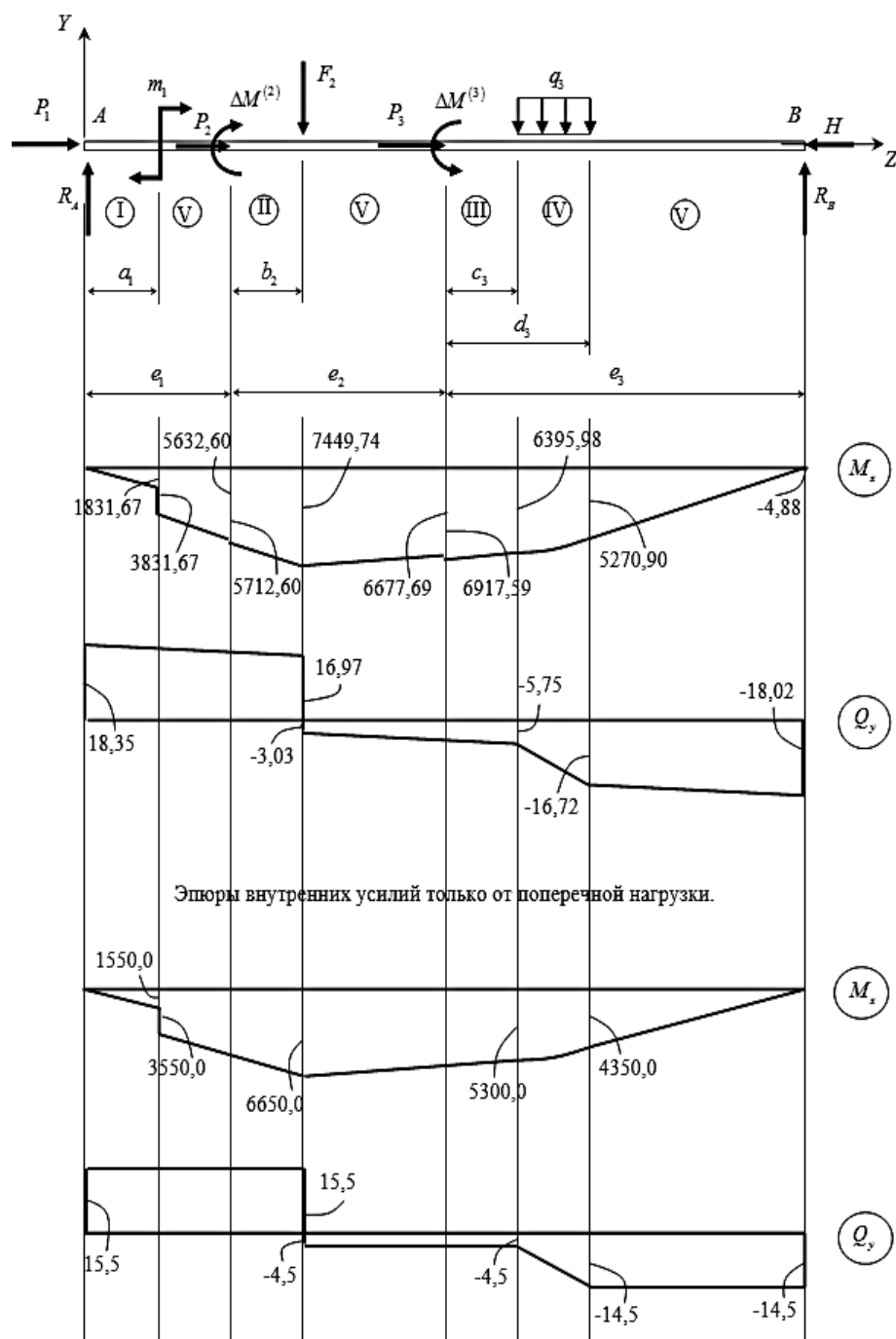


Рис. 5. Стержень на двух опорах в условиях продольно-поперечного изгиба  
Fig. 5. A rod on two supports under longitudinal-transverse bending

Выпишем расчетные формулы для изгибающих моментов и поперечных сил.

Интервал  $j = 1$ , участок I:  $0 \leq z \leq a_1$ .

$$M_{(I)}^{(1)}(z) = M_0 \cos(k_1 z) + \frac{Q_0}{k_1} \sin(k_1 z); \quad Q_{(I)}^{(1)}(z) = -M_0 k_1 \sin(k_1 z) + Q_0 \cos(k_1 z).$$

Интервал  $j = 1$ , участок V:  $a_1 \leq z \leq e_1$ .

$$M_{(V)}^{(1)}(z) = M_{(I)}^{(1)}(z) + m_1 \cos[k_1(z - a_1)]; \quad Q_{(V)}^{(1)}(z) = Q_{(I)}^{(1)}(z) - m_1 k_1 \sin[k_1(z - a_1)].$$

Интервал  $j = 2$ , участок II:  $e_1 \leq z \leq e_1 + b_2$ .

$$M_{(II)}^{(2)}(z) = [M_{(V)}^{(1)}(e_1) + \Delta M^{(2)}] \cdot \cos[k_2(z - e_1)] + \frac{Q_{(V)}^{(1)}(e_1)}{k_2} \sin[k_2(z - e_1)];$$

$$Q_{(II)}^{(2)}(z) = -[M_{(V)}^{(1)}(e_1) + \Delta M^{(2)}] \cdot k_2 \sin[k_2(z - e_1)] + Q_{(V)}^{(1)}(e_1) \cdot \cos[k_2(z - e_1)].$$

Интервал  $j = 2$ , участок V:  $e_1 + b_2 \leq z \leq e_1 + e_2$ .

$$M_{(V)}^{(2)}(z) = M_{(II)}^{(2)}(z) + \frac{F_2}{k_2} \sin[k_2(z - (e_1 + b_2))];$$

$$Q_{(V)}^{(2)}(z) = Q_{(II)}^{(2)}(z) + F_2 \cos[k_2(z - (e_1 + b_2))].$$

Интервал  $j = 3$ , участок III.

$$M_{(III)}^{(3)}(z) = [M_{(V)}^{(2)}(e_1 + e_2) + \Delta M^{(3)}] \cdot \cos[k_3(z - (e_1 + e_2))] + \frac{Q_{(V)}^{(2)}(e_1 + e_2)}{k_3} \sin[k_3(z - (e_1 + e_2))];$$

$$Q_{(III)}^{(3)}(z) = -[M_{(V)}^{(2)}(e_1 + e_2) + \Delta M^{(3)}] \cdot k_3 \sin[k_3(z - (e_1 + e_2))] + Q_{(V)}^{(2)}(e_1 + e_2) \cdot \cos[k_3(z - (e_1 + e_2))].$$

Интервал  $j = 3$ , участок IV:  $e_1 + e_2 + c_3 \leq z \leq e_1 + e_2 + d_3$ .

$$M_{(IV)}^{(3)}(z) = M_{(III)}^{(3)}(z) + \frac{Q_3}{k_3^2} \{1 - \cos[k_3(z - (e_1 + e_2 + c_3))]\};$$

$$Q_{(IV)}^{(3)}(z) = Q_{(III)}^{(3)}(z) + \frac{Q_3}{k_3} \sin[k_3(z - (e_1 + e_2 + c_3))].$$

Интервал  $j = 3$ , участок V:  $e_1 + e_2 + d_3 \leq z \leq e_1 + e_2 + e_3$ .

$$M_{(V)}^{(3)}(z) = M_{(IV)}^{(3)}(z) - \frac{Q_3}{k_3^2} \{1 - \cos[k_3(z - (e_1 + e_2 + d_3))]\};$$

$$Q_{(V)}^{(3)}(z) = Q_{(IV)}^{(3)}(z) - \frac{Q_3}{k_3} \sin[k_3(z - (e_1 + e_2 + d_3))].$$

Для определения начальных параметров  $M_0$ ,  $Q_0$  воспользуемся условиями на опорах:

– при  $z = 0$  имеем  $M_{(I)}^{(1)}(0) = 0$ , т.е.  $M_0 = 0$ ;

– при  $z = e_1 + e_2 + e_3$  имеем  $M_{(V)}^{(3)}(e_1 + e_2 + e_3) = 0$ , т.е.

$$\begin{aligned}
 Q_0 = & \left\langle -\frac{F_2}{k_2} \sin[k_2(e_2 - b_2)] \cdot \cos(k_3 e_3) - \frac{F_2}{k_3} \cos[k_2(e_2 - b_2)] \cdot \sin(k_3 e_3) - \right. \\
 & - \frac{q_3}{k_3} \{1 - \cos[k_3(e_3 - c_3)]\} + \frac{q_3}{k_3} \{1 - \cos[k_3(e_3 - c_3)]\} - m_1 \cos[k_1(e_1 - a_1)] \times \\
 & \times \left[ \cos(k_2 e_2) \cdot \cos(k_3 e_3) - \frac{k_2}{k_3} \sin(k_2 e_2) \cdot \sin(k_3 e_3) \right] + m_1 k_1 \sin[k_1(e_1 - a_1)] \times \\
 & \times \left[ \frac{1}{k_2} \sin(k_2 e_2) \cdot \cos(k_3 e_3) + \frac{1}{k_3} \cos(k_2 e_2) \cdot \sin(k_3 e_3) \right] + \Delta M^{(3)} \cos(k_3 e_3) - \\
 & - \Delta M^{(2)} \left[ \cos(k_2 e_2) \cdot \cos(k_3 e_3) - \frac{k_2}{k_3} \sin(k_2 e_2) \cdot \sin(k_3 e_3) \right] \Bigg\rangle \times \\
 & \times \left\{ \frac{1}{k_1} \sin(k_1 e_1) \cdot \left[ \cos(k_2 e_2) \cdot \cos(k_3 e_3) - \frac{k_2}{k_3} \sin(k_2 e_2) \cdot \sin(k_3 e_3) \right] + \right. \\
 & \left. + \cos(k_1 e_1) \cdot \left[ \frac{1}{k_2} \sin(k_2 e_2) \cdot \cos(k_3 e_3) + \frac{1}{k_3} \cos(k_2 e_2) \cdot \sin(k_3 e_3) \right] \right\}^{-1}.
 \end{aligned}$$

На рис. 5 показаны эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для следующих значений исходных данных:

$$\begin{aligned}
 a_1 = 1.0 \text{ м}; \quad b_2 = 1.0 \text{ м}; \quad c_3 = 1.0 \text{ м}; \quad d_3 = 2.0 \text{ м}; \quad e_1 = 2.0 \text{ м}; \quad e_2 = 3.0 \text{ м}; \quad e_3 = 5.0 \text{ м}; \\
 m_1 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad F_2 = 20 \text{ кН}; \quad q_3 = 10 \text{ кН/м}; \quad P_1 = 40 \text{ кН}; \quad P_2 = 80 \text{ кН}; \quad P_3 = 60 \text{ кН}; \\
 E_1 = E_2 = E_3 = 200\,000 \text{ МПа}; \quad I_1 = 1\,840 \text{ см}^4; \quad I_2 = 3\,460 \text{ см}^4; \quad I_3 = 1\,840 \text{ см}^4.
 \end{aligned}$$

При этом  $\Delta M^{(2)} = 2P_1 = 80 \text{ кН} \cdot \text{см}$ ;  $\Delta M^{(3)} = 2(P_1 + P_2) = 240 \text{ кН} \cdot \text{см}$ ;  $Q(0) = Q_0 = 18.350 \text{ кН}$ .

*Замечание.* Ненулевое значение изгибающего момента на правой шарнирно-неподвижной опоре сжато-изогнутого стержня объясняется накоплением погрешностей округлений при выполнении арифметических операций.

## Выводы

Численные расчеты позволили сделать следующие выводы.

1. Учет продольного воздействия при изгибе ступенчатого стержня с дискретной осевой нагрузкой приводит к увеличению ординат эпюр, изгибающих моментов и поперечных сил, а следовательно, и опорных реакций по сравнению поперечным изгибом только от поперечной нагрузки.

2. На участках стержня, свободных от равномерно-распределенной поперечной нагрузки, при продольно-поперечном изгибе внутренние поперечные силы не остаются постоянными, в отличие от плоского поперечного изгиба.

3. Учет эксцентриситета продольных сил в начале каждой ступени (интервала), возникающий за счет несовпадения продольных осей на текущей и предыдущей ступенях, приводит к незначительному скачку на эпюре моментов.

4. Полученные расчетные соотношения для изгибающих моментов и поперечных сил могут найти применение при расчете упругих ступенчатых стержней, находящихся в условиях продольно-поперечного изгиба.



### Список источников

1. Ахметзянова Д.Р., Иванов С.П. Продольно-поперечный изгиб физически нелинейных балок // Научному прогрессу – творчество молодых. 2018. № 1. С. 88–90.
2. Семёнов В.В., Уламбаяр Х. Расчет гибких стержней на продольно-поперечный изгиб // Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость. 2018. Т. 8, № 2 (25). С. 148–158.
3. Жубрин А.Н., Куликов Ю.А., Чернышова О.И. Расчетно-экспериментальное исследование упругого деформирования прямого гибкого стержня при продольно-поперечном изгибе // Научному прогрессу – творчество молодых. 2018. № 1. С. 70–73.
4. Лыкина Н.А. Устойчивость и продольно-поперечный изгиб ферменной мачты сотовой связи // Молодежный научно-технический вестник. 2016. № 6. С. 13.
5. Улитин Г.М., Царенко С.Н. Продольно-поперечный изгиб и устойчивость весомой стержневой системы // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 2 (271). С. 18–23.
6. Царенко С.Н. Продольно-поперечный изгиб стержней переменной жесткости // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2016. № 1 (685). С. 5–13.
7. Проскуряков Н.Е., Лопат И.В. Продольно-поперечный изгиб винтов запорной арматуры // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. № 12-2. С. 277–282.
8. Каган-Розенцвейг Л.М. Развитие прикладного метода расчета сжато-изогнутых стержней // Вестник гражданских инженеров. 2017. № 4 (63). С. 130–134. doi: 10.23968/1999-5571-2017-14-4-130-134
9. Чупеев Г.В. Продольно-поперечный изгиб стержней переменного поперечного сечения // Молодой ученый. 2015. № 8 (88). С. 340–344.
10. Глазков А.С., Климов В.П., Гумеров К.М. Продольно-поперечный изгиб трубопровода на участках грунтовых изменений // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. 2012. № 1 (87). С. 63–70.
11. Овсянко В.М. Моделирование дифференциальных уравнений при расчете на поперечный и продольно-поперечный изгиб стержневых систем без учета и с учетом вязкоупругих свойств материалов // Наука и техника. 2012. № 4. С. 35–43.
12. Гумеров А.К., Шадрин В.С., Валежжанин Д.Ю., Идрисов Р.Х., Хазипов Р.Х. Уравнения продольнопоперечного изгиба и сдвига трубопровода с учётом исходной кривизны участков // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. 2013. № 4 (94). С. 77–82.
13. Кауров П.В., Тимофеев А.А. Новый способ определения перемещений стержня малой жесткости при продольно-поперечном изгибе // Известия Петербургского университета путей сообщения. 2011. № 1 (26). С. 163–171.
14. Ахтямов А.М., Захарова М.А. Обратная задача для продольно-поперечного изгиба стержня // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2011. № 4. С. 31–33.
15. Немировский Ю.В., Тихонов С.В. Продольно-поперечный изгиб многослойного стержня из физически нелинейного материала // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2020. № 3 (45). С. 247–253. doi: 10.37972/chgpu.2020.46.88.028
16. Немировский Ю.В., Тихонов С.В. Продольно-поперечный изгиб многослойных стержней из бетонов и сталефибробетонов // Известия Алтайского государственного университета. 2021. № 1 (117). С. 40–46. doi: 10.14258/izvasu(2021)1-06
17. Немировский Ю.В., Тихонов С.В. Предельное состояние бетонных и железобетонных стержней при сложном и продольно-поперечном изгибе // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 1. С. 60–73.

18. Nemirovskii Y., Tikhonov S. Complex bend of multilayered concrete rods // EPJ Web of Conferences. 2019. V. 221. Art. 01048. doi: 10.1051/epjconf/201922101048
19. Cho C.-G., Lee S.-J. Inelastic Responses and Finite Element Predictions of Fiber Cementitious Composite and Concrete Columns // Materials. 2021. V. 14. Art. 2180. doi: 10.3390/ma14092180
20. Milanović M., Cvetkovska M., Knežević P. Load-bearing capacity of fire exposed composite columns // Građevinar. 2015. V. 67 (12). P. 1187–1197. doi: 10.14256/JCE.1329.2015
21. Agapov V.P., Vasil'ev A.V. Account for geometrical nonlinearity in the analysis of reinforced concrete columns of rectangular section by finite element method // Vestnik MGSU. 2014. No. 4. P. 37–43.
22. Rogovskii I.L., Titova L.L., Davydenko O.O., Trokhaniak V.I., Trokhaniak O.M. Technology of producing reinforced concrete columns of circular cross-sectional and investigation of their strain-stress state at transverse-longitudinal bending // Acta Polytechnica. 2019. V. 59 (5). P. 510–517. doi: 10.14311/AP.2019.59.0510
23. Trapko T., Musiał M. Effect of PBO–FRCM Reinforcement on Stiffness of Eccentrically Compressed Reinforced Concrete Columns // Materials. 2020. V. 13 (5). Art. 1221. doi: 10.3390/ma13051221
24. Tamrazyan A., Avetisyan L. Comparative analysis of analytical and experimental results of the strength of compressed reinforced concrete columns under special combinations of loads // MATEC Web of Conferences. 2016. V. 86. Art. 01029. doi: 10.1051/matecconf/20168601029
25. Yin S.P., Hu X.Q., Hua Y.T. Compression performance and bearing capacity calculation model of small-eccentricity columns strengthened with textile-reinforced mortar (TRM) // Materiales de Construcción. 2019. V. 69 (335). e195. doi: 10.3989/mc.2019.08418
26. Sarafraz E.M. Flexural Strengthening of RC Columns with Low Longitudinal Steel Ratio using GFRP Bars // International Journal of Concrete Structures and Materials. 2019. V. 13 (1). P. 1–11. doi: 10.1186/s40069-019-0354-z
27. Arslan G., Hacisalihoglu M. Nonlinear analysis of RC columns using the Drucker-Prager model // Journal of Civil Engineering and Management. 2013. V. 19 (1). P. 69–77. doi: 10.3846/13923730.2012.734858
28. Zong-Cai D., Daud J.R., Hui L. Seismic Behavior of Short Concrete Columns with Prestressing Steel Wires // Advances in Materials Science and Engineering. 2014. V. 2014, Art. 180193. doi: 10.1155/2014/180193
29. Li Q., Kuang Y., Guo W., Zhang Y. Experimental Research on Mechanical Performance of SSRC Columns under Eccentric Compression // Applied Sciences. 2020. V. 10 (16). Art. 5629. doi: 10.3390/app10165629
30. Рубинин М.В. Сопротивление материалов. Теория. М. : Машгиз, 1961. 467 с.
31. Рубинин М.В. Руководство к практическим занятиям по сопротивлению материалов. 3-е изд. М. : Машгиз, 1957. 603 с.

### References

1. Akhmetzyanova D.R., Ivanov S.P. (2018) Prodol'no-poperechnyy izgib fizicheski nelineynykh balok [Longitudinal-transverse bending of physically nonlinear beams]. *Nauchnomu progressu – tvorchestvo molodykh*. 1. pp. 88–90.
2. Semenov V.V., Ulambayar Kh. (2018) Raschet gibkikh sterzhney na prodol'no-poperechnyy izgib [Longitudinal and transverse bending of flexible rods]. *Izvestiya vuzov. Investitsii. Stroitel'stvo. Nedvizhimost' – Proceedings of Universities. Investment. Construction. Real Estate*. 8. 2(25). pp. 148–158.
3. Zhubrin A.N., Kulikov Yu.A., Chernyshova O.I. (2018) Raschetno-eksperimental'noe issledovanie uprugogo deformirovaniya pryamogo gibkogo sterzhnya pri prodol'no-poperechnom izgibe [Computational and experimental study of elastic deformation in a straight flexible rod under longitudinal-transverse bending]. *Nauchnomu progressu – tvorchestvo molodykh*. 1. pp. 70–73.

4. Lukina N.A. (2016) Ustoychivost' i prodol'no-poperechnyy izgib fermennoy machty sotovoy svyazi [Stability and longitudinal-transverse bending of a communication tower]. *Molodezhnyy nauchno-tehnicheskyy vestnik*. 6. pp. 1–13.
5. Ulitin G.M., Tsarenko S.N. (2017) Prodol'no-poperechnyy izgib i ustoychivost' vesomoy sterzhnevoy sistemy [Longitudinal-transverse bending and stability of weight rod system]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy – Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2(271). pp. 18–23.
6. Tsarenko S.N. (2016) Prodol'no-poperechnyy izgib sterzhney peremennoy zhestkosti [Longitudinal-transverse bending of variable stiffness rods]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Stroitel'stvo – News of Higher Educational Institutions. Construction*. 1(685). pp. 5–13.
7. Proskuryakov N.E., Lopa I.V. (2017) Prodol'no-poperechnyy izgib vintov zapornoy armatury [Longitudinal-transverse bending of the shutoff valves spindles]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki – Izvestiya Tula State University. Technical Sciences*. 12–2. pp. 277–282.
8. Kagan-Rozentsveyg L.M. (2017) Razvitie prikladnogo metoda rascheta szhato-izognutykh sterzhney [Development of the applied approach to analysis of rods subjected to bending and compression]. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov – Bulletin of Civil Engineers*. 4(63). pp. 130–134. DOI: 10.23968/1999-5571-2017-14-4-130-134.
9. Chupeev G.V. (2015) Prodol'no-poperechnyy izgib sterzhney peremennogo poperechnogo secheniya [Longitudinal-transverse bending of rods with variable cross-section]. *Molodoy uchenyy*. 8(88). pp. 340–344.
10. Glazkov A.S., Klimov V.P., Gumerov K.M. (2012) Prodol'no-poperechnyy izgib truboprovoda na uchastkakh gruntovykh izmeneniy [Longitudinal and transverse pipeline bending in the areas of ground changes]. *Problemy sbora, podgotovki i transporta nefi i nefteproduktov*. 1(87). pp. 63–70.
11. Ovsyanko V.M. (2012) Modelirovanie differentsial'nykh uravneniy pri raschete na poperechnyy i prodol'no-poperechnyy izgib sterzhnevyykh sistem bez ucheta i s uchedom vyazkouprugikh svoystv materialov [Differential equation simulation in calculation of lateral and transverse-longitudinal bending of frame structures without and with due account of viscoelastic material properties]. *Nauka i tekhnika*. 4. pp. 35–43.
12. Gumerov A.K., Shadrin V.S., Valekzhanin D.Yu., Idrisov R.Kh., Khazipov R.Kh. (2013) Uravneniya prodol'no-poperechnogo izgiba i sdviga truboprovoda s uchedom iskhodnoy krivizny uchastkov [Equations of longitudinal and transverse bending and shift of pipeline accounting the initial curvature of pipeline sections]. *Problemy sbora, podgotovki i transporta nefi i nefteproduktov*. 4(94). pp. 77–82.
13. Kaurov P.V., Timofeev A.A. (2011) Novyy sposob opredeleniya peremeshcheniy sterzhnya maloy zhestkosti pri prodol'no-poperechnom izgibe [A new method of determining deflection of low flexure stiffness rod at transverse-longitudinal bending]. *Izvestiya Peterburgskogo universiteta putey soobshcheniya – Proceedings of Petersburg Transport University*. 1(26). pp. 163–171.
14. Akhtyamov A.M., Zakharova M.A. (2011) Obratnaya zadacha dlya prodol'no-poperechnogo izgiba sterzhnya [The inverse problem for longitudinal-and-transversal bending of bar]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy – Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 4. pp. 31–33.
15. Nemirovskiy Yu.V., Tikhonov S.V. (2020) Prodol'no-poperechnyy izgib mnogosloynnogo sterzhnya iz fizicheskii nelineynogo materiala [Longitudinal-transverse bending of a multi-layer bar made of a physically nonlinear material]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya – Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. 3(45). pp. 247–253. DOI: 10.37972/chgpu.2020.46.88.028.

16. Nemirovskiy Yu.V., Tikhonov S.V. (2021) Prodol'no-poperechnyy izgib mnogosloynnykh sterzhney iz betonov i stalefibrobetonov [Transverse-longitudinal bending of multilayered concrete rods and steel fiber reinforced concrete rods]. *Izvestiya Altayskogo gosudarstvennogo universiteta – Izvestiya of Altai State University*. 1(117). pp. 40–46. DOI: 10.14258/izvasu(2021)1-06.
17. Nemirovskiy Yu.V., Tikhonov S.V. (2020) Predel'noe sostoyanie betonnykh i zhelezo-betonnykh sterzhney pri slozhnom i prodol'no-poperechnom izgibe [The limit state of concrete and reinforced concrete rods at complex and longitudinal-transverse bending]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 1. pp. 60–73.
18. Nemirovskii Y., Tikhonov S. (2019) Complex bend of multilayered concrete rods. *EPJ Web of Conferences*. 221. Article 01048. DOI: 10.1051/epjconf/201922101048.
19. Cho C.-G.; Lee S.-J. (2021) Inelastic responses and finite element predictions of fiber cementitious composite and concrete columns. *Materials*. 14. Article 2180. DOI: 10.3390/ma14092180.
20. Milanović M., Cvetkovska M., Knežević P. (2015) Load-bearing capacity of fire exposed composite columns. *Građevinar*. 67(12). pp. 1187–1197. DOI: 10.14256/JCE.1329.2015.
21. Agapov V.P., Vasil'ev A.V. (2014) Uchet geometricheskoy nelineynosti pri raschete zhelezobetonnykh kolonn pryamougol'nogo secheniya metodom konechnykh elementov [Account for geometrical nonlinearity in the analysis of reinforced concrete columns of rectangular section by finite element method]. *Vestnik MGSU*. 4. pp. 37–43.
22. Rogovskii I.L., Titova L.L., Davydenko O.O., Trokhaniak V.I., Trokhaniak O.M. (2019) Technology of producing reinforced concrete columns of circular cross-sectional and investigation of their strain-stress state at transverse-longitudinal bending. *Acta Polytechnica*. 59(5). pp. 510–517. DOI: 10.14311/AP.2019.59.0510.
23. Trapko T., Musiał M. (2020) Effect of PBO–FRCM reinforcement on stiffness of eccentrically compressed reinforced concrete columns. *Materials*. 13(5). Article 1221. DOI: 10.3390/ma13051221.
24. Tamrazyan A., Avetisyan L. (2016) Comparative analysis of analytical and experimental results of the strength of compressed reinforced concrete columns under special combinations of loads. *MATEC Web of Conferences*. 86. Article 01029. DOI: 10.1051/matecconf/20168601029.
25. Yin S.P., Hu X.Q., Hua Y.T. (2019) Compression performance and bearing capacity calculation model of small-eccentricity columns strengthened with textile-reinforced mortar (TRM). *Materiales de Construcción*. 69(335). DOI: 10.3989/mc.2019.08418.
26. Sarafraz E.M. (2019) Flexural strengthening of RC columns with low longitudinal steel ratio using GFRP bars. *International Journal of Concrete Structures and Materials*. 13(1). pp. 1–11. DOI: 10.1186/s40069-019-0354-z.
27. Arslan G., Hacısalihoglu M. (2013) Nonlinear analysis of RC columns using the Drucker-Prager model. *Journal of Civil Engineering and Management*. 19(1). pp. 69–77. DOI: 10.3846/13923730.2012.734858.
28. Zong-Cai D., Daud J.R., Hui L. (2014) Seismic behavior of short concrete columns with prestressing steel wires. *Advances in Materials Science and Engineering*. 2014. Article 180193. pp. 1–10. DOI: 10.1155/2014/180193.
29. Li Q., Kuang Y., Guo W., Zhang Y. (2020) Experimental research on mechanical performance of SSRC columns under eccentric compression. *Applied Sciences*. 10(16). Article 5629. DOI: 10.3390/app10165629.
30. Rubinin M.V. (1961) *Soprotivlenie materialov. Teoriya* [Strength of materials. Theory] Moscow: Mashgiz.
31. Rubinin M.V. (1957) *Rukovodstvo k prakticheskim zanyatiyam po soprotivleniyu materialov* [Guide to practical exercises on strength of materials] Moscow: Mashgiz.

***Сведения об авторе:***

**Бакушев Сергей Васильевич** – доктор технических наук, профессор кафедры механики строительного факультета Пензенского государственного университета архитектуры и строительства, Пенза, Россия. E-mail: bakuchsv@mail.ru

***Information about the author:***

**Bakushev Sergey V.** (Doctor of Technical Sciences, Professor, Penza State University of Architecture and Construction, Penza, Russian Federation). E-mail: Bakuchsv@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 03.07.2021; принята к публикации 19.05.2022*

*The article was submitted 03.07.2021; accepted for publication 19.05.2022*

Научная статья

УДК 531.352

doi: 10.17223/19988621/77/5

## Относительная динамика оболочек бифуллеренового комплекса

Михаил Алексеевич Бубенчиков<sup>1</sup>,  
Дмитрий Владимирович Мамонтов<sup>2</sup>, Анна Сергеевна Челнокова<sup>3</sup>

<sup>1, 2, 3</sup> *Томский государственный университет, Томск, Россия*

<sup>1</sup> *michael121@mail.ru*

<sup>2</sup> *orevaore@mail.ru*

<sup>3</sup> *smolina-nyuta@mail.ru*

**Аннотация.** С использованием динамических уравнений Эйлера, а также уравнений движения центров масс рассматриваемых фуллеренов разработана вычислительная процедура для анализа динамического состояния углеродного комплекса  $C_{80}@C_{320}$ . Силовые характеристики углеродных молекул найдены в рамках подхода перекрестных атом-атомных взаимодействий. Расчетами показана глобальная стабильность вращательного движения инкапсулированного фуллерена относительно поступательных перемещений внешней оболочки.

**Ключевые слова:** численное моделирование, молекулярная динамика, фуллерены

**Благодарности:** Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РНФ № 21-71-10066.

**Для цитирования:** Бубенчиков М.А., Мамонтов Д.В., Челнокова А.С. Относительная динамика оболочек бифуллеренового комплекса // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 77. С. 54–67. doi: 10.17223/19988621/77/5

Original article

## Relative dynamics of shells of a bifullerene complex

Mikhail A. Bubenchikov<sup>1</sup>, Dmitriy V. Mamontov<sup>2</sup>, Anna S. Chelnokova<sup>3</sup>

<sup>1, 2, 3</sup> *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

<sup>1</sup> *michael121@mail.ru*

<sup>2</sup> *orevaore@mail.ru*

<sup>3</sup> *smolina-nyuta@mail.ru*

**Abstract.** In this work, mathematical modeling of relative dynamics of a bifullerene complex is carried out on the assumption that the inner shell does not form covalent bonds with an outer carbon skeleton. This fact enables free angular movements of the inner

shell. In particular, the directed rotation of the inner fullerene can be provided. This, in turn, allows for accumulating of a significant fraction of kinetic energy at internal degrees of freedom of the complex under consideration. In this case, the direction of rotations is not related to temperature; the outer shell of the complex restrains the transfer of the stored energy into thermal vibrations. Therefore, calculations are performed to estimate the stability of the rotational motion of an encapsulated fullerene relative to translational displacements of the outer shell. The calculations are carried out using a separate description of the dynamics of closed carbon molecules in terms of translational and rotational displacements. Translational displacements are determined using the equations of motion for the centers of mass of molecules. Rotational displacements are found on the basis of the dynamic Euler equations. The power centers in the considered framework structures of the molecules are carbon atoms. Therefore, the strength characteristics of intermolecular interactions are obtained in accordance with an atom-atom approach. In this case, the interaction parameters of individual atoms correspond to the case when these atoms are located in a structure of the surface carbon crystal.

**Keywords:** numerical modeling, molecular dynamics, fullerenes

**Acknowledgments:** This work was partially supported by the Russian Science Foundation (project No. 21-71-10066).

**For citation:** Bubenchikov, M.A., Mamontov, D.V., Chelnokova, A.S. (2022) Relative dynamics of shells of a bifullerene complex. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 54–67. doi: 10.17223/19988621/77/5

## Введение

В последнее время вызывает большой интерес динамическое состояние различных молекул, инкапсулированных в углеродную оболочку. В работе [1] выполнен анализ поступательного и вращательного движения молекулы метана внутри фуллерена, имеющего отверстие, через которое был введен  $\text{CH}_4$  внутри кристаллической оболочки. В [2] представлены данные о движении и вращении молекул  $\text{H}_2$ , заключенных в  $\text{C}_{60}$ . В исследовании [3] продемонстрирован механизм, основанный на вращении треугольного кластера  $\text{Sc}_3\text{N}$  в икосаэдрической клетке фуллерена  $\text{C}_{80}$ . В [4] на основе экспериментальных данных о вращающихся фуллеренах в пластической фазе фуллерита изучены низкоэнергетические электронные состояния вращающегося  $\text{C}_{60}$ . В [5] продемонстрировано, что димеры фуллерена  $\text{C}_{70}$  свободно вращаются вокруг короткой оси молекулы. В работе [6] с использованием электронной микроскопии высокого разрешения изучено вращение фуллеренов в стручковых структурах, в которых роль оболочки выполняла открытая нанотрубка. В [7] рассмотрены устойчивость комплекса  $\text{C}_{20}@\text{C}_{80}$  и вращение  $\text{C}_{20}$  внутри него на основе модели сильных взаимодействий электронов. Наряду с этим в [8] исследованы атомная и электронная структуры фуллерена  $\text{C}_{28}$  в свободном состоянии, а также в случае, когда этот фуллерен инкапсулирован в замкнутую капсулу  $\text{C}_{450}$ . Показано, что  $\text{C}_{28}$  в поле удерживающего потенциала трубки имеет квантованное вращательное движение около оси симметрии капсулы. В [9] рассмотрено вращение фуллереновых ионов. В [10] продемонстрировано, что за счет взаимодействия лазерных импульсов приводятся во вращение молекулы  $\text{C}_{70}$ , обладающие собственной поляризацией и находящиеся в растворах фуллеренов. В [11] проанализировано влияние размера функ-

циональной группы на подвижность электронов в фуллереновых клетках, находящихся в пленках их производных. В [12] проведены расчеты основного спектра колебательно-вращательных движений в ГЦК фуллереновых решетках. В [13] предложена теория трансляционно-вращательной связи с позиции макроскопического гамильтониана и свободной энергии Ландау. Необходимо отметить, что  $C_{20}$  далеко не всегда свободно вращается в углеродных структурах.

Целая серия современных работ посвящена воздействию излучения на фуллерены. При этом поглощенная энергия излучения приводит к образованию вакансий либо интенсификации вращательного движения фуллеренов. По данным [14], для нанотрубок размером 0.85 и 1.2 нм энергия образования вакансий соответственно составила 5.98 и 7.44 эВ, а для фуллеренов  $C_{20}$ ,  $C_{30}$ ,  $C_{60}$ ,  $C_{80}$ ,  $C_{180}$ ,  $C_{240}$  и  $C_{450}$  – 2.91, 2.92, 9.2, 5.95, 8.09, 8.53 и 7.41 эВ. В [15] исследована ионизация икосаэдрических фуллеренов  $C_{20}$ ,  $C_{80}$  и  $C_{180}$  в интенсивном лазерном импульсе с использованием теории S-матрицы. При этом поглощение излучения также способствовало увеличению скорости вращения фуллеренов.

Интересными являются работы по изучению гибридных структур и комплексов, содержащих фуллерены. В [16] приведены расчеты для модельных нанотрубок, связанных с  $C_{84}$ ,  $C_{96}$  и  $C_{80}$ . Ковалентные связи делают рассматриваемые гибридные структуры из нанотрубок и крышек фуллеренов  $C_{36}$ ,  $C_{32}$  и  $C_{20}$  связанными в одно целое. В [17] установлено, что нейтронное рассеяние дает прямое доказательство свободного вращения фуллеренов и либрации кубанов в высокотемпературной фазе сокристалла фуллерен–кубан ( $C_{60}$ ,  $C_8H_8$ ). В [18] изучено воздействие фуллерена на однослойный графеновый лист. Стручковые структуры, где в качестве оболочек выступают открытые нанотрубки, очень интересны с точки зрения изучения вращения фуллеренов. В [19] обнаружено, что инкапсулированные фуллерены могут свободно вращаться в пространстве трубки (10,10) при комнатной температуре. Кроме того, расчеты показывают, что, в отличие от металлического реарод  $C_{60}@ (10,10)$  с несколькими несущими, реарод  $C_{60}@ (17,0)$  является полупроводником. В результате получены так называемые фуллереновые стручки. В [20] исследованы структура вращательного низкоэнергетического спектра собственных значений и собственная функция эндодральных фуллереновых комплексов  $C_{60}$ ; рассмотрены системы  $Li + \&C_{60}$ ,  $Na + \&C_{60}$ ,  $CoCo\&C_{60}$  и  $LiLi\&C_{60}$ . В [21] описаны исследования динамики вращения  $C_{60}$  в многослойных фуллереновых пленках, выращенных на поверхности  $WO_2/W(110)$ .

Если среда составлена крупными углеродными молекулами, например  $C_{320}$ , то при комнатных температурах мы получим сыпучую среду – порошок. Из-за наноскопических размеров исходных частиц такая среда будет обладать уникальными физическими свойствами. Если при этом  $C_{320}$  использовать как оболочку и поместить в нее фуллерен  $C_{80}$ , то полученная новая среда будет обладать удивительной способностью накапливать механическую энергию на внутренних вращательных степенях свободы. В настоящей работе мы попытались оценить потенциальные возможности такой системы частиц. Оценка заключалась в проведении молекулярно-динамических расчетов состояния углеродного комплекса  $C_{80}@C_{320}$  и определении способности инкапсулированного фуллерена сохранять начальное вращение в присутствии тепловых колебаний оболочки, отвечающих уровню комнатной температуры. Опыт моделирования подобных систем представлен в работах [22–24].



### Математическая модель и метод ее реализации

Проекции сил, действующих между фуллеренами, определяются в рамках модели атом-атомных взаимодействий. Согласно этой модели результирующее взаимодействие между двумя молекулами есть сумма всех возможных взаимодействий между отдельными атомами. Из-за отсутствия сферической симметрии и в общем случае не центрального расположения фуллеренов в комплексе  $C_{80}@C_{320}$  эта модель дает ненулевой момент сил, что и определяет угловые колебания фуллеренов. Действие окружающей температуры моделировалось одномерным колебательным движением внешней оболочки рассматриваемого комплекса.

Таким образом, фуллерены комплекса находятся в полях сил, определяющих их взаимное влияние. В этом влиянии силовыми центрами являются позиции атомов. На рис. 1 представлен рассматриваемый комплекс; в узлах каркасной структуры показаны атомы углерода.

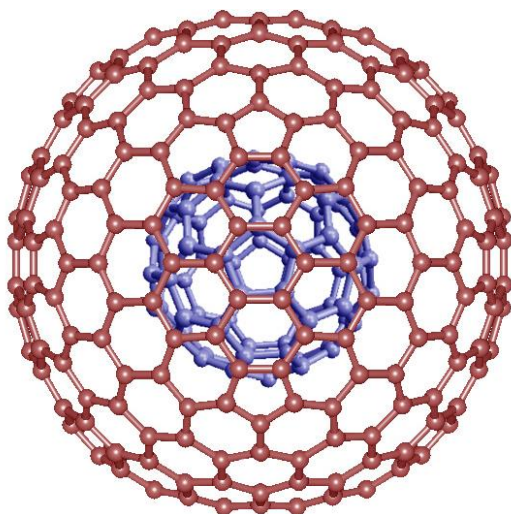


Рис. 1. Углеродный комплекс  $C_{80}@C_{320}$

Fig. 1. Carbon complex  $C_{80}@C_{320}$

Динамические уравнения Эйлера изначально представлены в проекциях на оси подвижной системы отсчета, связанной с отдельно взятым фуллереном. В то же время результирующее движение часто удобно представлять в абсолютной, неподвижной системе координат. В связи с этим силовые характеристики – проекции сил межатомного взаимодействия и их моменты – на первом этапе расчетов следует определять в абсолютном базисе. Далее с помощью матрицы поворота, имеющей компоненты в виде комбинаций тригонометрических функций от углов Эйлера, осуществляется переход к проекциям моментов сил в подвижном базисе. После этого данные проекции включаются в динамические уравнения Эйлера. Последние уравнения есть обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка относительно угловых скоростей вращающихся фуллеренов. Система таких уравнений будет замкнута, если включить в рассмотрение кинематические соотношения Эйлера, связывающие производные от углов Эйлера с проекциями

угловых скоростей и тригонометрическими функциями углов поворота. Дополняя все эти уравнения начальными данными, получим задачу Коши для определения углов Эйлера как функций времени.

В классической записи динамические уравнения Эйлера имеют вид:

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr = M_{\xi}, \quad (1)$$

$$B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr = M_{\eta}, \quad (2)$$

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq = M_{\zeta}. \quad (3)$$

Здесь  $p, q, r$  – проекции угловой скорости на оси подвижной системы отсчета,  $A, B, C$  – главные моменты инерции молекулы для ее центра масс,  $M_{\xi}, M_{\eta}, M_{\zeta}$  – моменты перекрестных атом-атомных взаимодействий.

Последние уравнения являются уравнениями вращательного движения молекулы вокруг ее центра масс. Эти уравнения замыкаются кинематическими соотношениями, связывающими проекции вектора мгновенной угловой скорости с углами Эйлера и их производными:

$$p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad (4)$$

$$q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \quad (5)$$

$$r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \quad (6)$$

Используемые в дальнейшем начальные условия выглядят следующим образом:

$$t = 0: \psi = 0, \theta = \pi/2, \varphi = 0; p = p_0, q = 0, r = 0. \quad (7)$$

Выписанные условия замыкают постановку задачи о вращательном движении фуллеренов рассматриваемого комплекса. Поступательные перемещения фуллеренов определяются векторными уравнениями перемещений их центров масс.

Все уравнения интегрировались численно с использованием схемы Рунге–Кутты высокого порядка точности. Постоянный шаг интегрирования составлял величину  $10^{-8}$  нс. Точность расчетов оценивалась по результатам решения простейших задач о вращении фуллеренов, а также по выполнению закона сохранения полной механической энергии в системе. Более подробное математическое описание представлено в работе [22].

## Результаты расчетов

Мы провели расчеты динамического состояния фуллеренового комплекса  $C_{80}@C_{320}$  в условиях, отвечающих колебательной температуре  $T = 300$  К. В дальнейшем индекс «1» будет относиться к инкапсулированному фуллерену, а индекс «2» – к фуллерену  $C_{320}$ . Температуру в системе, состоящей из рассматриваемых комплексов, можно смоделировать гармоническими колебаниями центра масс оболочки. Поэтому в расчетах было принято:  $x_2(t) = a \sin \omega t$ ,  $y_2 = 0$ ,  $z_2 = 0$ . Если при этом положить  $a = 0.05$  нм,  $\omega = 10^3$  нс $^{-1}$ , то внешняя оболочка будет участвовать в тепловом движении, отвечающем указанной выше средней температуре. Нас по-прежнему интересовал вопрос о возможности аккумуляции энергии на внутренних степенях свободы. Поэтому были проведены расчеты для двух

различных групп начальных условий:  $t = 0$ ,  $\frac{p_1}{2\pi} = 20 \text{ нс}^{-1}$ ,  $\frac{q_1}{2\pi} = 0$ ,  $\frac{r_1}{2\pi} = 0$  и  $t = 0$ ,  $\frac{p_1}{2\pi} = 200 \text{ нс}^{-1}$ ,  $\frac{q_1}{2\pi} = 0$ ,  $\frac{r_1}{2\pi} = 0$ , – обеспечивающих различные вращения внутреннего фуллера.

Данные, отвечающие умеренному начальному вращению инкапсулированного фуллера, приведены на рис. 2–8, данные для  $\frac{p_1}{2\pi} = 200 \text{ нс}^{-1}$  – на рис. 9–15.

На рис. 2 показаны колебания центра масс инкапсулированного фуллера, индуцированные гармоническими колебаниями оболочки вдоль оси  $x$ . Видно, что наряду с  $x$ -колебаниями (черная линия) генерируются квазигармонические колебания небольшой амплитуды по двум другим ортогональным осям (красная и зеленая линии). Абсолютные значения скоростей центральных точек фуллеренов показаны на рис. 3. Поскольку исходные колебания гармонические и представлены абсолютные значения, то кривая, определяющая движение центра масс оболочки, выглядит как  $|\sin t|$  (красная линия). Индуцированные этим движением скорости меньшего фуллера имеют в среднем несколько большие значения в сравнении со скоростью центра масс оболочки (черная линия). Зависимости углов Эйлера первого фуллера от времени имеют колебательный характер. Однако  $\theta_1(t)$  показывает со временем монотонный рост. На рис. 4  $\theta$  – зеленая линия,  $\psi$  – красная линия,  $\phi$  – черная линия. При заданном уровне вращения внутреннего фуллера ( $\frac{p_1}{2\pi} = 20 \text{ нс}^{-1}$ ) и гармонических колебаниях положения оболочки вращающийся внутренний фуллерен вовлекает в такое же вращение оболочку (распределения  $\theta$  на рис. 4, 5). На рис. 6 показаны распределения мгновенных значений угловых скоростей фуллеренов, составляющих рассматриваемый комплекс. Представленные скорости определяются через проекции по формуле

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

При этом сами проекции  $p$  (черная линия),  $q$  (красная линия),  $r$  (зеленая линия) показаны на рис. 7, 8. Из этого следует, что амплитуда колебаний всех проекций имеет одну частоту, но амплитуда угловых колебаний оболочки на порядок меньше соответствующих колебаний для инкапсулированного фуллера.

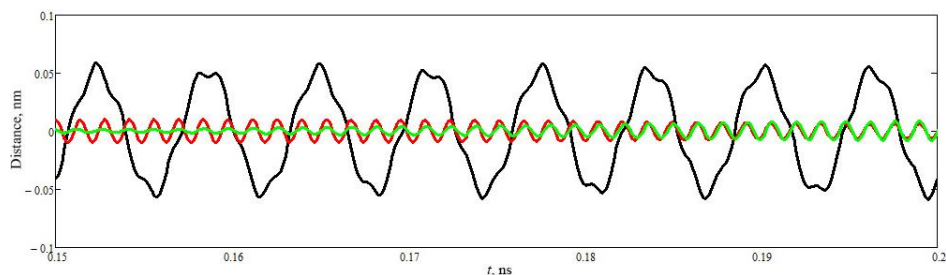
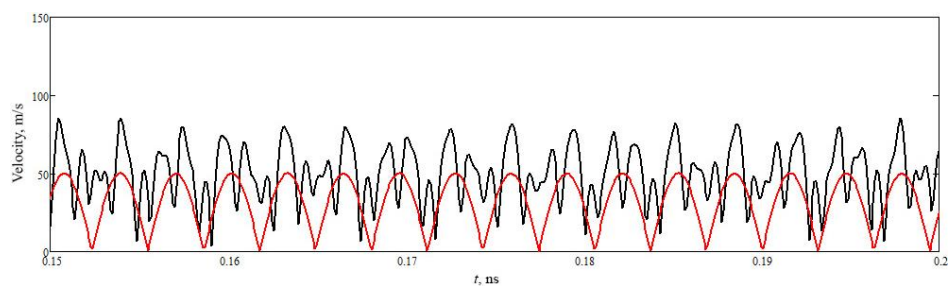
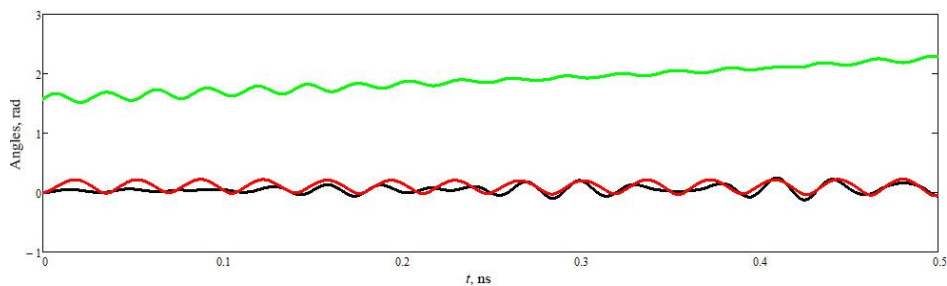


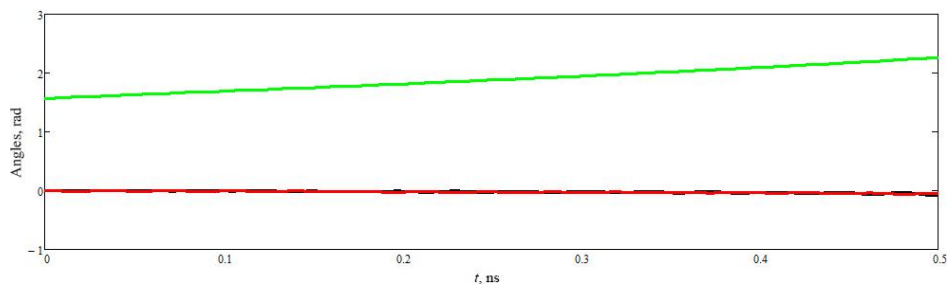
Рис. 2. Координаты центра масс  $C_{80}$   
Fig. 2. Coordinates of the center of mass of  $C_{80}$



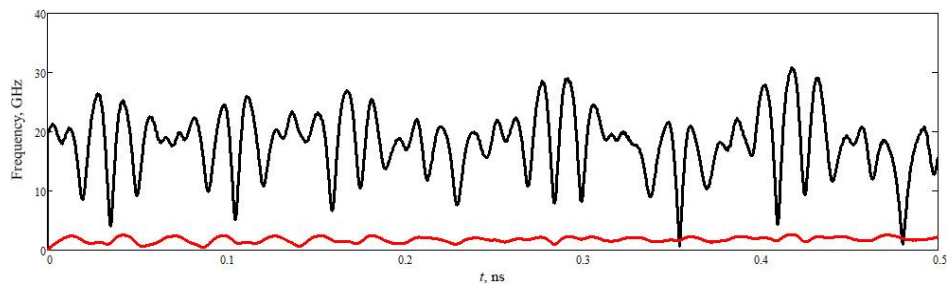
**Рис. 3.** Величины поступательных скоростей  $C_{80}$  и  $C_{320}$   
**Fig. 3.** Magnitude of a translational velocity of  $C_{80}$  and  $C_{320}$



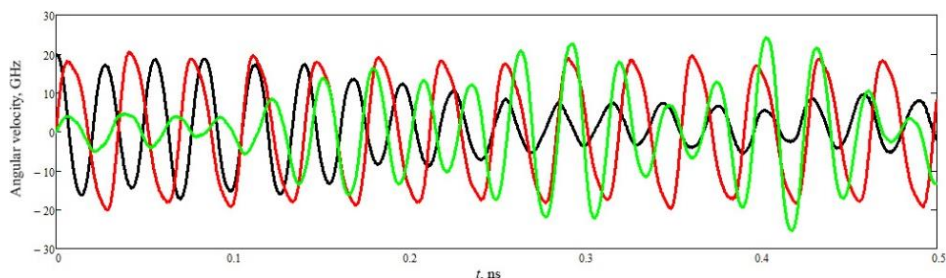
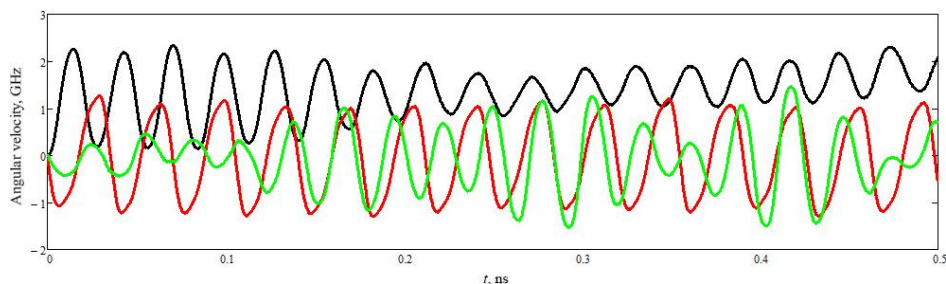
**Рис. 4.** Углы Эйлера  $C_{80}$   
**Fig. 4.** Euler angles of  $C_{80}$



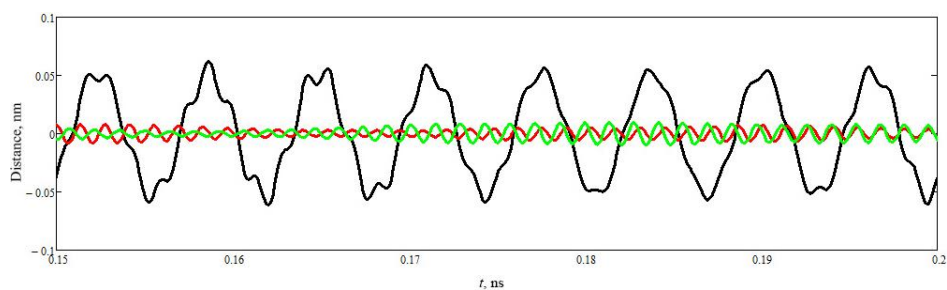
**Рис. 5.** Углы Эйлера  $C_{320}$   
**Fig. 5.** Euler angles of  $C_{320}$



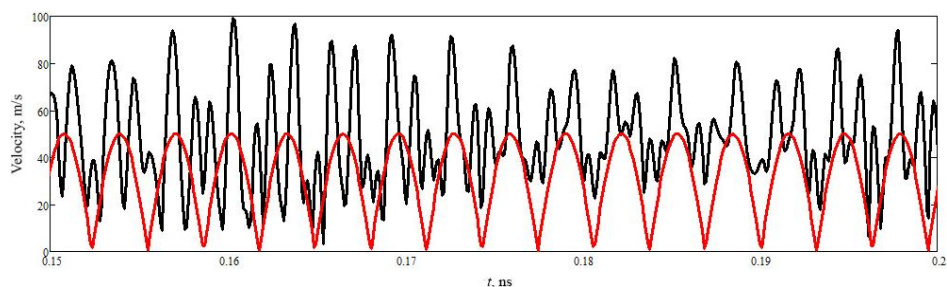
**Рис. 6.** Полные частоты вращения фуллеренов  
**Fig. 6.** Total rotational frequencies of fullerenes

Рис. 7. Компоненты угловой скорости  $C_{80}$ Fig. 7. Components of an angular velocity of  $C_{80}$ Рис. 8. Проекция частоты вращения  $C_{320}$ Fig. 8. Projections of a rotational frequency of  $C_{320}$ 

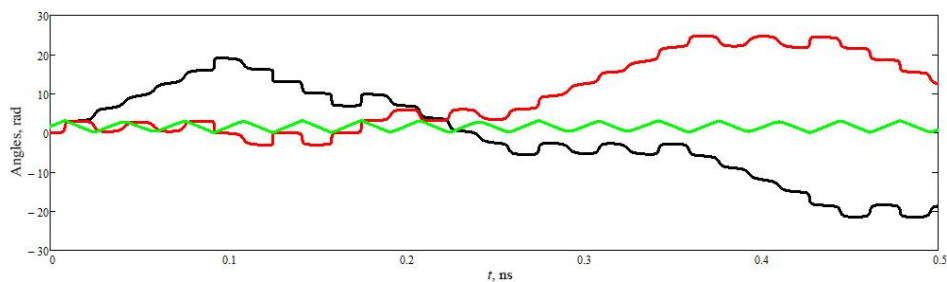
Теперь рассмотрим случай интенсивного начального вращения инкапсулированного фуллерена. Рисунки 9–15 отвечают случаю:  $t = 0$ ,  $p_1 = 200$  ГГц,  $q_1 = 0$ ,  $r_1 = 0$ . Цвета на этих рисунках такие же, как и на рис. 2–8. Внешняя оболочка по-прежнему участвует в поступательных перемещениях по гармоническому закону. Сравнивая рис. 9–10 с рис. 2–3 видим, что поступательная динамика внутреннего фуллерена осталась прежней. Понятно, что в этом случае изменения будут связаны с вращательной динамикой. Как видно из рис. 11, угол нутации инкапсулированного фуллерена меняется от нуля до  $\pi$  с четко выраженной частотой. При этом наблюдаются повороты на угол  $\pi$  вокруг двух других главных осей. Изменения углов  $\psi$  и  $\theta$  на угол  $\pi$  означают переворот фуллерена в пространстве. Поскольку  $C_{80}$  имеет близкие, но все же различные моменты инерции относительно своих главных осей, то отмеченный переворот есть проявление эффекта Джанибекова для атомизированного тела. Эффект Джанибекова рассмотрен в [25]. Значительные изменения углов  $\phi$  и  $\psi$  со временем определяют результирующий поворот вокруг соответствующих осей. Как видно из рис. 12, внешний фуллерен не имеет кувырков. Для него изменение углов Эйлера происходит плавно, причем на величину, не превосходящую  $\pi$ . Рисунок 13 определяет абсолютные величины мгновенных угловых скоростей фуллеренов. Видно, что их средние значения составляют величины порядка нескольких процентов от своих начальных значений. Таким образом, кинетическая энергия раскрученного фуллерена практически не меняется. Однако имеет место перераспределение энергии вращений по угловым степеням свободы (см. рис. 14). Рисунок 15 также демонстрирует такое перераспределение, однако величина частот вращения для  $C_{320}$  не превосходит 2.5% начальной частоты  $C_{80}$ .



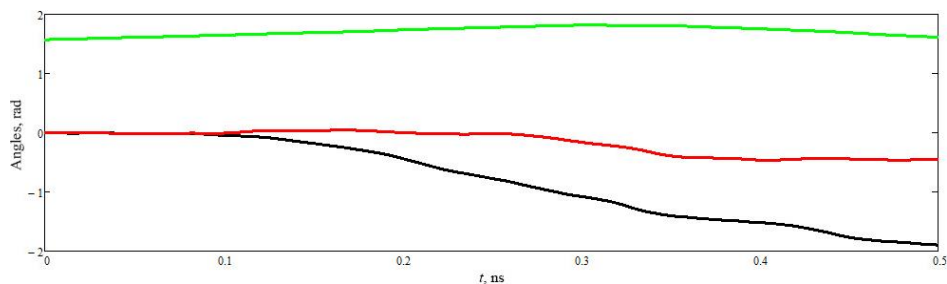
**Рис. 9.** Координаты центра масс внутреннего фуллерена  
**Fig. 9.** Coordinates of the center of mass of the inner fullerene



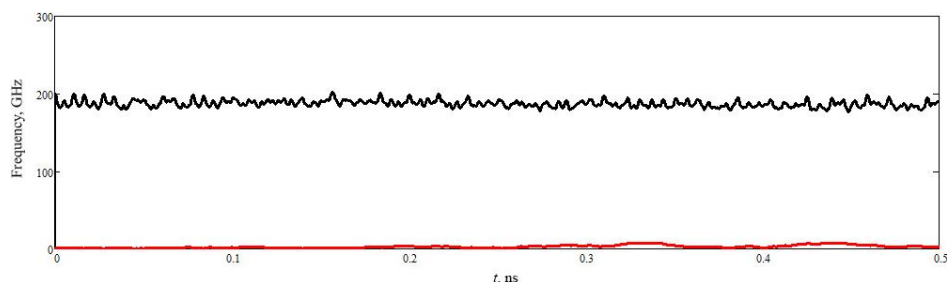
**Рис. 10.** Величины поступательных скоростей оболочки и внутреннего фуллерена  
**Fig. 10.** Magnitude of translational velocities of the shell and inner fullerene



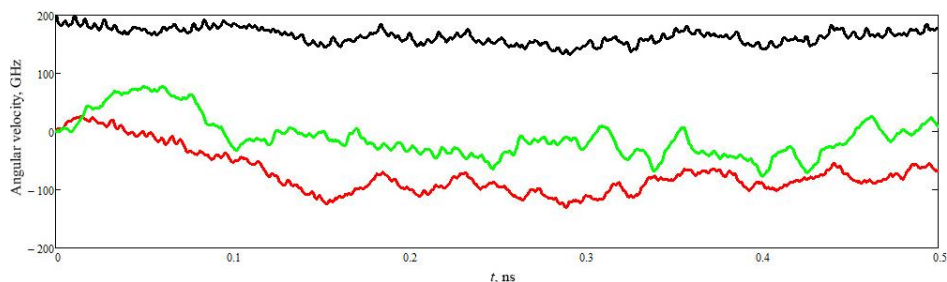
**Рис. 11.** Углы Эйлера инкапсулированного фуллерена  
**Fig. 11.** Euler angles of the encapsulated fullerene



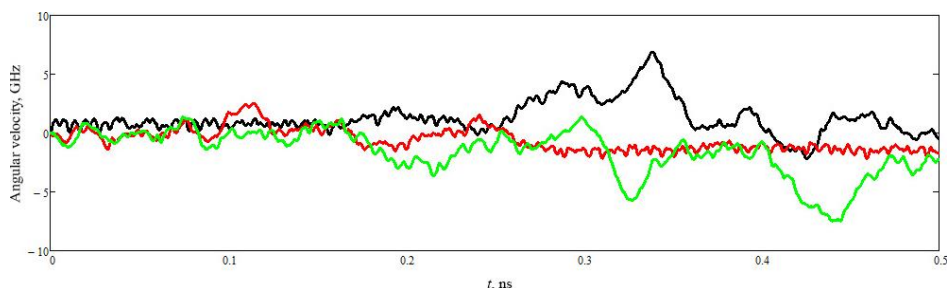
**Рис. 12.** Углы Эйлера оболочки фуллеренового комплекса  $C_{80}@C_{320}$   
**Fig. 12.** Euler angles of a shell of the fullerene complex  $C_{80}@C_{320}$



**Рис. 13.** Величины вращательных скоростей каждого из фуллеренов  
**Fig. 13.** Magnitude of a rotational frequency of each of the fullerenes



**Рис. 14.** Проекция частот вращения на главные подвижные оси внутреннего фуллерена  
**Fig. 14.** Projections of a rotational frequency on the main moving axes of the inner fullerene



**Рис. 15.** Проекция частоты вращения на главные оси для оболочки фуллеренового комплекса  
**Fig. 15.** Projections of a rotational frequency on the principal axes for a shell of the fullerene complex

Данные вычислений демонстрируют, что  $C_{80}$  можно раскручивать до тех пор, пока центробежная сила не разрушит его каркасную структуру.

### Заключение

В представленной вычислительной работе проведена оценка влияния тепловых колебаний на способность инкапсулированного фуллерена сохранять вращательное движение в фуллереновом комплексе  $C_{80}@C_{320}$ . Расчетами показано, что чем выше начальная угловая скорость внутреннего фуллерена, тем более выраженной является указанная способность. В результате сыпучая среда, составлен-



ная рассматриваемыми фуллереновыми комплексами, будет иметь возможность накапливать значительное количество энергии на внутренних вращательных степенях свободы. Если при этом  $C_{80}$  будет интеркалирован железом, то система бифуллереновых частиц будет обладать выраженными магнитными свойствами.

#### Список источников

1. Whitener E.K.J. Theoretical Studies of CH<sub>4</sub> Inside an Open-Cage Fullerene: Translation–Rotation Coupling and Thermodynamic Effects // *J. Phys. Chem.* 2010. V. 114 (45). P. 12075–12082. doi: 10.1021/jp104601g
2. Whitener E.K.J., Cross R.J., Saunders M., Iwamatsu Sho-ichi, Murata S., Nagase S. Methane in open-cage [60]fullene // *Journal of the American Chemical Society*. 2009. V. 131 (18). P. 6338–6339. doi: 10.1021/ja901383r
3. Huang T., Zhao J., Feng M., Dunsch L. et al. A multi-state single-molecule switch actuated by rotation of an encapsulated cluster within a fullerene cage // *Chemical Physics Letters*. 2012. V. 552 (12). P. 1–12. doi: 10.1016/j.cplett.2012.09.064
4. Lima R.F., Brandao J., Marcio M., Moraes F. Effects of rotation in the energy spectrum of C<sub>60</sub> // *The European Physics Journal D*. 2014. V. 68 (94). doi: 10.1140/epjd/e2014-40570-4
5. Konarev D.V., Lyubovskaya R.N., Khasanov S.S. Transition from free rotation of C<sub>70</sub> molecules to static disorder in the molecular C<sub>70</sub> complex with covalently linked porphyrin dimers: {FeIITPP}2O}×C<sub>70</sub> // *Journal of Porphyrins and Phthalocyanines*. 2010. V. 14 (4). P. 293–297. doi: 10.1142/S1088424610002112
6. Warner J.H., Ito Y., Zaka M., Ge L., Akachi T., Okimoto H., Porfyrakis K., Watt A.A.R., Shinohara H., Briggs G.A.D. Rotating Fullerene Chains in Carbon Nanopeapods // *Nano Letters*. 2008. V. 8 (8). P. 2328–2335. doi: 10.1021/nl801149z
7. Glukhova O.E., Zhdanov A.I., Rezkov A.G. Rotation of the inner shell in a C<sub>20</sub>@C<sub>80</sub> nanoparticle // *Physics of the Solid State*. 2005. V. 47 (2). P. 390–396. doi: 10.1134/1.1866425
8. Glukhova O.E. Theoretical study of the structure of the C<sub>60</sub>@C<sub>450</sub> nanoparticle and relative motion of the encapsulated C<sub>60</sub> molecule // *J. Struct. Chem.* 2007. V. 48. P. S141–S146. doi: 10.1007/s10947-007-0157-y
9. Dunn J.L., Hands I.D., Bates C.A. Pseudorotation in fullerene anions // *Journal of Molecular Structure*. 2006. V. 838 (1–3). P. 60–65. doi: 10.1016/j.molstruc.2006.12.066
10. Yang S., Wey T. et al. Chlorination-Promoted Skeletal-Cage Transformations of C<sub>88</sub> Fullerene by C<sub>2</sub> Losses and a C–C Bond Rotation // *Chemistry*. 2015. V. 21 (43). P. 15138–15141. doi: 10.1002/chem.201501549
11. MacKenzie R.C.I., Frost J.M., Nelson J. A numerical study of mobility in thin films of fullerene derivatives // *Phys. Chem.* 2010. V. 132. Art. 064904. doi: 10.1063/1.3315872
12. Herman R.M., Lewis J.C. Vibration–rotation–translation spectrum of molecular hydrogen in fullerite lattices around 80 K // *Physica B: Condensed Matter*. 2009. V. 404 (8–11). P. 1581–1584. doi: 10.1016/j.physb.2009.01.029
13. Lynden-Bell R.M., Michael K.H. Translation-rotation coupling, phase transitions, and elastic phenomena in orientationally disordered crystals // *Reviews of Modern Physics*. 1994. V. 66 (3). Art. 721. doi: 10.1103/RevModPhys.66.721
14. Griadun V.I. Vacancies in nanotubes and fullerenes // *Proceedings of the 16th International Crimean Microwave and Telecommunication Technology, Sevastopol, 11–15 September, 2006. IEEE*. 2006. P. 669–670. doi: 10.1109/CRMICO.2006.256150
15. Jaron-Becker A., Becker A., Faisal F.H.M. Saturated Ionization of Fullerenes in Intense Laser Fields // *Phys. Rev. Letters*. 2006. V. 96. Art. 143006. doi: 10.1103/PhysRevLett.96.143006
16. Slanina Z., Zhao X. Model narrow nanotubes related to C<sub>36</sub>, C<sub>32</sub> and C<sub>20</sub>: Initial computational structural sampling // *Materials Science and Engineering B*. 2002. V. 96 (2). P. 164–168. doi: 10.1016/S0921-5107(02)00312-4



17. Bousige C., Verberck B. et al. Lattice dynamics of a rotor-stator molecular crystals: Fullerene-cubane C<sub>60</sub> C<sub>8</sub>H<sub>8</sub> // *Phys. Rev. B*. 2010. V. 82 (19). Art. 195413. doi: 10.1103/PhysRevB.82.195413
18. Hosseini-Hashemi S., Sepahi-Boroujeni A., Sepahi-Boroujeni S. Analytical and molecular dynamics studies on the impact loading of single-layered graphene sheet by fullerene // *Applied Surface Science*. 2018. V. 437. P. 366–374. doi: 10.1016/j.apsusc.2017.12.141
19. Yang L., Chen J., Dong J. Stability of single-wall carbon nanotube tori // *Physica Status Solidi (B)*. 2004. V. 241 (6). P. 1269–1273. doi: 10.1002/pssb.200301998
20. Ruiz A., Hernández-Rojas J., Bretón J., Gomez Llorente J.M. Low-temperature dynamics and spectroscopy in exohedral rare-gas C<sub>60</sub> fullerene complexes // *J. Phys. Chem.* 2001. V. 114. doi: 10.1063/1.1350918
21. Bozhko S.I., Levchenko E.A., Semenov V.N., Bulatov M.F., Shvets I.V. Rotation dynamics of C<sub>60</sub> molecules in a monolayer fullerene film on the WO<sub>2</sub>/W(110) surface near the rotational phase transition // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2015. V. 120 (5). P. 831–837. doi: 10.1134/S1063776115040032
22. Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Mamontov D.V., Lun-Fu A.V. MD-simulation of fullerene rotations in molecular crystall fullerite // *Crystals*. 2019. V. 9 (10). Art. 496. doi: 10.3390/cryst9100496
23. Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Mamontov D.V., Kaparulin D.S., Lun-Fu A.V. Dynamic state of columnar structures formed on the basis of carbon nanotori // *Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures*. 2021. V. 29 (10). P. 825–831. doi: 10.1080/1536383X.2021.1908268
24. Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Mamontov D.V. The dynamic state of a pseudo-crystalline structure of B42 molecules // *Crystals*. 2020. Vol. 10 (6). Art. 510. doi: 10.3390/cryst10060510
25. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика : в 10 т. М. : Наука, 1988. Т. 1: Механика. 216 с.

### References

1. Whitener E.K.J. (2010) Theoretical studies of CH<sub>4</sub> inside an open-cage fullerene: translation-rotation coupling and thermodynamic effects. *The Journal of Physical Chemistry*. 114(45). pp. 12075–12082. doi: 10.1021/jp104601g
2. Whitener E.K.J., Cross R.J., Saunders M., Iwamatsu S-I., Murata S., Nagase S. (2009) Methane in open-cage [60]fullerene. *Journal of the American Chemical Society*. 131(18). pp. 6338–6339. doi: 10.1021/ja901383r
3. Huang T., Zhao J., Feng M., Popov A.A., Yang Sh., Dunsch L., Petek H. (2012) A multi-state single-molecule switch actuated by rotation of an encapsulated cluster within a fullerene cage. *Chemical Physics Letters*. 552(12). pp. 1–12. doi: 10.1016/j.cplett.2012.09.064
4. Lima R.F., Brandao J., Marcio M., Moraes F. (2014) Effects of rotation in the energy spectrum of C<sub>60</sub>. *The European Physics Journal D*. 68(94). doi: 10.1140/epjd/e2014-40570-4
5. Konarev D.V., Lyubovskaya R.N., Khasanov S.S. (2010) Transition from free rotation of C<sub>70</sub> molecules to static disorder in the molecular C<sub>70</sub> complex with covalently linked porphyrin dimers: {(Fe<sup>III</sup>TPP)<sub>2</sub>O}×C<sub>70</sub>. *Journal of Porphyrins and Phthalocyanines*. 14(4). pp. 293–297. doi: 10.1142/S1088424610002112
6. Warner J.H., Ito Y., Zaka M., Ge L., Akachi T., Okimoto H., Porfyrakis K., Watt A.A.R., Shinohara H., Briggs G.A.D. (2008) Rotating fullerene chains in carbon nanopeapods. *Nano Letters*. 8(8). pp. 2328–2335. doi: 10.1021/nl801149z
7. Glukhova O.E., Zhbanov A.I., Rezkov A.G. (2005) Rotation of the inner shell in a C<sub>20</sub>@C<sub>80</sub> nanoparticle. *Physics of the Solid State*. 47(2). pp. 390–396. doi: 10.1134/1.1866425
8. Glukhova O.E. (2007) Theoretical study of the structure of the C<sub>60</sub>@C<sub>450</sub> nanoparticle and relative motion of the encapsulated C<sub>60</sub> molecule. *Journal of Structural Chemistry*. 48(1). pp. S141–S146. doi: 10.1007/s10947-007-0157-y

9. Dunn J.L., Hands I.D., Bates C.A. (2007) Pseudorotation in fullerene anions. *Journal of Molecular Structure*. 838(1–3). pp. 60–65. doi: 10.1016/j.molstruc.2006.12.066
10. Yangs Sh., Wey T., Scheurell K., Kemnitz E., Troyanov S.I. (2015) Chlorination-promoted skeletal-cage transformations of  $C_{88}$  fullerene by  $C_2$  losses and a C–C bond rotation. *Chemistry – A European Journal*. 21(43). pp. 15138–15141. doi: 10.1002/chem.201501549
11. MacKenzie R.C.I., Frost J.M., Nelson J. (2010) A numerical study of mobility in thin films of fullerene derivatives. *The Journal of Chemical Physics*. 132(064904). doi: 10.1063/1.3315872
12. Herman R.M., Lewis J.C. (2009) Vibration–rotation–translation spectrum of molecular hydrogen in fullerite lattices around 80 K. *Physica B: Condensed Matter*. 404(8–11). pp. 1581–1584. doi: 10.1016/j.physb.2009.01.029
13. Lynden-Bell R.M., Michel K.H. (1994) Translation-rotation coupling, phase transitions, and elastic phenomena in orientationally disordered crystals. *Reviews of Modern Physics*. 66(3). Article 721. doi: 10.1103/RevModPhys.66.721
14. Griadun V.I. (2006) Vacancies in nanotubes and fullerenes. *Proceedings of the 16<sup>th</sup> International Crimean Microwave and Telecommunication Technology, Sevastopol, 11–15 September, 2006. IEEE*. pp. 669–670. doi: 10.1109/CRMICO.2006.256150
15. Jaron-Becker A., Becker A., Faisal F.H.M. (2006) Saturated ionization of fullerenes in intense laser fields. *Physical Review Letters*. 96(14). Article 143006. doi: 10.1103/PhysRevLett.96.143006
16. Slanina Z., Zhao X. (2002) Model narrow nanotubes related to  $C_{36}$ ,  $C_{32}$  and  $C_{20}$ : initial computational structural sampling. *Materials Science and Engineering B*. 96(2). pp. 164–168. doi: 10.1016/S0921-5107(02)00312-4
17. Bousige C., Rols S., Cambedouzou J., Verberck B., Pekker S., Kovats E., Durko G., Jalsovsky I., Pellegrini E., Launois P. (2010) Lattice dynamics of a rotor-stator molecular crystals: Fullerene-cubane  $C_{60} \cdot C_8H_8$ . *Physical Review B*. 82(19). Article 195413. doi: 10.1103/PhysRevB.82.195413
18. Hosseini-Hashemi Sh., Sepahi-Boroujeni A., Sepahi-Boroujeni S. (2018) Analytical and molecular dynamics studies on the impact loading of single-layered graphene sheet by fullerene. *Applied Surface Science*. 437. pp. 366–374. doi: 10.1016/j.apsusc.2017.12.141
19. Yang L., Chen J., Dong J. (2004) Stability of single-wall carbon nanotube tori. *Physica Status Solidi (b)*. 241(6). pp. 1269–1273. doi: 10.1002/pssb.200301998
20. Ruiz A., Hernandez-Rojas J., Breton J., Gomez Llorente J.M. (2001) Low-temperature dynamics and spectroscopy in exohedral rare-gas  $C_{60}$  fullerene complexes. *The Journal of Physical Chemistry*. 114(12). Article 5156. doi: 10.1063/1.1350918
21. Bozhko S.I., Levchenko E.A., Semenov V.N., Bulatov M.F., Shvets I.V. (2015) Rotation dynamics of  $C_{60}$  molecules in a monolayer fullerene film on the  $WO_2/W(110)$  surface near the rotational phase transition. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 120(5). pp. 831–837. doi: 10.1134/S1063776115040032
22. Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Mamontov D.V., Lun-Fu A.V. (2019) MD-simulation of fullerene rotations in molecular crystall fullerite. *Crystals*. 9(10). Article 496. doi: 10.3390/cryst9100496
23. Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Mamontov D.V., Kaparulin D.S., Lun-Fu A.V. (2021) Dynamic state of columnar structures formed on the basis of carbon nanotori. *Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures*. 29(10) pp. 825–831. doi: 10.1080/1536383X.2021.1908268
24. Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Mamontov D.V. (2020) The dynamic state of a pseudo-crystalline structure of  $B_{42}$  molecules. *Crystals*. 10(6). Article 510. doi: 10.3390/cryst10060510
25. Landau L.D., Lifshitz E.M. (1982) *Course of Theoretical Physics, Vol. 1: Mechanics, 3rd Edition*. Oxford: Butterworth-Heinemann.

***Сведения об авторах:***

**Бубенчиков Михаил Алексеевич** – доктор физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: michael121@mail.ru

**Мамонтов Дмитрий Владимирович** – младший научный сотрудник регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: orevaore@mail.ru

**Челнокова Анна Сергеевна** – старший преподаватель кафедры теоретической механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: smolina-nyuta@mail.ru

***Information about the authors:***

**Bubenchikov Mikhail A.** (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: michael121@mail.ru

**Mamontov Dmitriy V.** (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: orevaore@mail.ru

**Chelnokova Anna S.** (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: smolina-nyuta@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 09.11.2021; принята к публикации 19.05.2022*

*The article was submitted 09.11.2021; accepted for publication 19.05.2022*

Научная статья

УДК 51-72, 532.5.032, 532.51

doi: 10.17223/19988621/77/6

## Неоднородное течение Пуазейля

Наталья Владимировна Бурмашева<sup>1, 2</sup>,

Анастасия Викторовна Дьячкова<sup>3, 4</sup>, Евгений Юрьевич Просвирыков<sup>5, 6</sup>

<sup>1, 3, 5</sup> Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург, Россия

<sup>2, 4, 6</sup> Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

<sup>1, 2</sup> nat\_burm@mail.ru

<sup>3, 4</sup> larinakaterina@hotmail.com

<sup>5, 6</sup> evgen\_pros@mail.ru

**Аннотация.** Представлено новое точное решение системы уравнений Навье–Стокса, описывающее неоднородное сдвиговое течение Пуазейля в бесконечном горизонтальном слое. Система уравнений, характеризующая исследуемое движение жидкости, получается переопределенной после редукции уравнений Навье–Стокса и уравнения несжимаемости. Для разрешимости системы уравнений построено точное решение. Получено полиномиальное точное решение краевой задачи. Проведен анализ спектральных свойств поля скоростей. Показано, что в потоке имеет место существование застойных точек и зон с обратным течением, а также областей, где касательное напряжение меняет свой тип.

**Ключевые слова:** вертикально завихренная жидкость, изотермическое течение, неоднородное течение Пуазейля, точное решение, уравнения Навье–Стокса, противотечение, застойная точка

**Для цитирования:** Бурмашева Н.В., Дьячкова А.В., Просвирыков Е.Ю. Неоднородное течение Пуазейля // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 77. С. 68–85. doi: 10.17223/19988621/77/6

Original article

## Inhomogeneous Poiseuille flow

Natal'ya V. Burmasheva<sup>1, 2</sup>, Anastasiya V. Dyachkova<sup>3, 4</sup>,

Evgeniy Yu. Prosviryakov<sup>5, 6</sup>

<sup>1, 3, 5</sup> Institute of Engineering Science UB RAS, Ekaterinburg, Russian Federation

<sup>2, 4, 6</sup> Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation

<sup>1, 2</sup> nat\_burm@mail.ru

<sup>3, 4</sup> larinakaterina@hotmail.com

<sup>5, 6</sup> evgen\_pros@mail.ru

**Abstract.** The paper presents an investigation of the isothermal steady flow of a viscous incompressible fluid in an extended flat layer using hydrodynamic equations. The solu-

tion to the overdetermined system of equations is found in a class of velocities that are linear in regards to coordinates.

The bottom of the layer under consideration is limited by a stationary solid hydrophilic surface. At the upper boundary of the layer, the pressure field, which is inhomogeneous in both horizontal coordinates, and the velocity field are specified. These boundary conditions allow one to generalize the classical Poiseuille flow.

The exact solution, satisfying the set boundary value problem, is described by a series of polynomials of different orders. The highest (fifth) degree of the polynomials corresponds to a homogeneous component of the horizontal velocity. Here, the pressure field depends only on the horizontal coordinates; the dependence is linear. The detailed analysis of the velocity field is carried out. The obtained results confirm that the determined exact solution can describe multiple stratification of the velocity field and the corresponding field of tangent stresses.

The analysis of spectral properties of the velocity field is performed for a general case without specifying the values of physical constants that unambiguously identify the studied fluid. Therefore, the presented results are applicable to viscous fluids of various nature.

**Keywords:** vertically swirling fluid, isothermal flow, inhomogeneous Poiseuille flow, exact solution, Navier-Stokes equations, countercurrent, stagnation point

**For citation:** Burmasheva, N.V., Dyachkova, A.V., Prosviryakov, E.Yu. (2022) Inhomogeneous Poiseuille flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 68–85. doi: 10.17223/19988621/77/6

## Введение

Движение жидкости, индуцируемое градиентом (изменением) давления на границах слоя, впервые было описано практически одновременно Хагеном и Пуазейлем [1–3]. В литературе, посвященной гидродинамике и ее приложениям, нет единства по терминологии названия такого движения жидкости [4]. Выводы Пуазейля о пропорциональности расхода жидкости четвертой степени радиуса (диаметра) трубы основывались на более тщательно разработанной методике и широте эксперимента, на точности наблюдений [4]. Термин «течение жидкости Хагена–Пуазейля» используется в основном в гемодинамике человека и животных [5, 6].

Точное решение Пуазейля является отправной точкой для описания ламинарного движения в трубах произвольного поперечного сечения [7–9]. Оно широко используется в задачах гидродинамической устойчивости для объяснения возникновения турбулентности при высоких значениях числа Рейнольдса [10–17]. Аналогичные исследования справедливы при изучении движений проводящих жидкостей и сред с неньютоновской реологией [18, 19]. Кроме того, использование профиля Пуазейля необходимо при моделировании течений жидкости в геофизической гидродинамике. Вращение жидкости и наличие градиента давления приводят к неожиданным эффектам при крупномасштабных течениях [20, 21].

Отдельно отметим, что именно точное решение Пуазейля фактически породило семейство точных решений Остроумова–Бириха для описания конвективных потоков в точной постановке [22, 23]. В настоящее время точное решение Остроумова–Бириха, примененное для описания однонаправленных потоков, используется для двумерных и трехмерных течений [20, 24–35].

В последнее время начат цикл исследований переопределенных систем уравнений в частных производных, которые получены после редукций уравнений

Навье–Стокса для несжимаемых жидкостей, движущихся в различных силовых полях [36–38]. Особый интерес представляют изобарические пространственно неоднородные течения жидкости типа Куэтта [39, 40]. В статьях [36–38, 40] были получены нетривиальные точные решения переопределенной системы уравнений Навье–Стокса и изучены их свойства. Показано, что точными решениями размерности «два с половиной» (две компоненты вектора скорости зависят от трех координат) можно осуществлять моделирование течений в экваториальной зоне Мирового океана. Учет градиентов давления при заданном трении (касательных напряжениях) на границе атмосферы и океана позволил исследовать противотечения в жидкости, вызванные вторичными градиентными потоками [41]. В данной статье предлагается восполнить пробел и исследовать неоднородные течения Пуазейля, используя классические граничные условия (течение Куэтта–Пуазейля).

### Постановка задачи

Изотермическое установившееся течение (вертикальная компонента вектора скорости полагается тождественно равной нулю) вязкой несжимаемой жидкости описывается следующей системой уравнений [36–40]:

$$\begin{aligned} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}, \\ V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В системе (1), состоящей из уравнений переноса момента импульса и уравнения несжимаемости, введены обозначения:  $V_x$ ,  $V_y$  – компоненты скорости, параллельные соответственно горизонтальным осям  $Ox$ ,  $Oy$  введенной декартовой системы координат;  $P = P(x, y, z)$  – давление, отнесенное к постоянной плотности жидкости  $\rho$ ;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости. Система уравнений (1) является квадратично нелинейной. Она описывает слоистые и сдвиговые течения вязкой несжимаемой жидкости в приближении гидростатики, поскольку в силу допущения о сдвиговом характере течения конвективная производная и лапласиан в третьем уравнении системы Навье–Стокса тождественно равны нулю [42, 43]. Напомним, что изобарические течения были изучены в [34, 35, 40, 44, 45], и там же были описаны механизмы генерации и эволюции противотечений в бесконечном горизонтальном слое жидкости.

Будем искать точное решение системы (1) в следующем виде [31–33]:

$$V_x = u(z) + a(z)y, \quad V_y = v(z), \quad P = P_0 + S_1x + S_2y. \quad (2)$$

Структура точного решения для давления определяется простейшим дифференциальным уравнением в частных производных  $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$ . Горизонтальные градиенты  $S_1$ ,  $S_2$  и фоновое  $P_0$  являются постоянными значениями по толщине слоя и определяются граничными условиями. Неоднородное поле скоростей (2) порождает неоднородное поле касательных напряжений:

$$\tau_{xz} = \eta \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) = \eta(u' + a' y), \quad \tau_{yz} = \eta \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) = \eta v'.$$

Здесь  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости, а штрихом обозначена производная по переменной  $z$ .

Подставляя выражения (2) для гидродинамических полей в систему (1), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения неизвестных функций  $u$ ,  $a$ ,  $v$ ,  $P$ :

$$a'' = 0, \quad vv'' = P_2, \quad vu'' = P_1 - va, \quad P_0' = 0. \quad (3)$$

Система (3) состоит из обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и имеет девятый порядок. Она является замкнутой (число уравнений совпадает с числом определяемых функций) и наследует нелинейные свойства системы (1). Кроме того, уравнения (3) преимущественно являются однородными и изолированными, исключение составляет только уравнение для нахождения скорости  $u$ .

Общее решение системы (3) получается последовательным интегрированием уравнений, которое определяется набором полиномиальных функций:

$$\begin{aligned} a &= c_3 z + c_4, \\ v &= \frac{P_2}{2v} P_2 z^2 + c_1 z + c_2, \\ u &= \frac{c_3 P_2^2}{40v^2} z^5 + \frac{12vc_1 c_3 + c_4 P_2^2}{24v^2} z^4 + \frac{c_1 c_4 + c_2 c_3}{6v} z^3 + \frac{c_2 c_4 + P_1}{2v} z^2 + c_5 z + c_6. \end{aligned} \quad (4)$$

В решении (4) наибольшая степень (пятая) приведенных полиномов отвечает выражению для скорости  $u$ . Также заметим, что коэффициенты представления (2) для поля давления, согласно общему решению (4), оказались постоянными. Это означает, что распределение поля давления  $P$  во всей области течения вязкой жидкости можно считать известным из краевого условия для давления. Линии уровня давления представляют набор вертикальных плоскостей, пересекающих горизонтальную плоскость по прямым вида  $P_1 x + P_2 y = \text{const}$ . По этой причине больший интерес вызывают характеристики распределения поля скорости.

Решение (4) системы дифференциальных уравнений (1) содержит ряд постоянных интегрирования, значения которых необходимо определить из краевых условий. Рассмотрим далее течение жидкости в горизонтальном бесконечно протяженном слое заданной толщины  $h$ , нижней границе которого соответствует значение  $z = 0$  вертикальной координаты. Будем полагать, что на границе  $z = 0$  выполняется условие прилипания, которое ввиду структуры решения (2) равносильно условиям

$$u(0) = v(0) = 0, \quad a(0) = 0.$$

Кроме того, будем считать известным распределение полей скорости и давления на верхней границе  $z = h$ . Эти условия, согласно выражениям (2), можно представить в следующем виде [39, 40, 45]:

$$\begin{aligned} u(h) &= W \cos \varphi, \quad a(h) = \Omega, \quad v(h) = W \sin \varphi, \\ P_0(h) &= S, \quad P_1(h) = S_1, \quad P_2(h) = S_2. \end{aligned}$$

Здесь  $W$  – значение скорости на поверхности жидкости,  $\varphi$  – угол, характеризующий направление этой скорости [30, 39, 45]. Приведенные граничные условия записаны в приближении «твердой» крышки [5, 39, 42, 45]. Это означает, что верхняя граница слоя не деформируется, т.е. является плоской. В этом случае, поскольку рассматривается изобарическое течение, кинематическое и динамическое условия для свободной границы выполняются автоматически [5, 39, 40, 42, 43, 45]. Такой подход позволяет исследовать крупномасштабные ветровые течения, отфильтровывая при этом возможность описания волн на межфазной границе. Такой подход хорошо себя зарекомендовал, поэтому используется в статье. К тому же классическое точное решение Пуазейля было получено для известной границы, поэтому для сравнения результатов решено было не вводить в рассмотрение деформацию свободной поверхности.

### Краевая задача

Решение (4) с учетом сформулированных краевых условий принимает вид:

$$u = Z \left[ \frac{h^4 \Omega S_1}{120\nu^2} (3Z^4 - 5Z^3 + 2) + \frac{h^2 S_2}{2\nu} (Z - 1) + \frac{h^2 W \Omega \sin \varphi}{12\nu} (Z^3 - 1) + W \cos \varphi \right], \quad (5)$$

$$v = Z \left( W \sin \varphi + \frac{S_1 h^2}{2\nu} (Z - 1) \right), \quad (6)$$

$$a = \Omega Z, \quad (7)$$

$$P = S + S_1 x + S_2 y. \quad (8)$$

Здесь  $Z = z/h$  – безразмерная вертикальная координата, принимающая значения в интервале  $[0, 1]$ .

Решение (5)–(7) для поля скорости является полиномиальным, оно определяется суперпозицией нескольких потоков, индуцированных различными физическими причинами. Прежде всего это движение ветра на верхней границе слоя и неоднородное распределение давления на этой границе. Выражение (6) для скорости  $v$  описывает классическое течение Куэтта–Пуазейля. На формирование свойств скорости (5), помимо потоков, вызванных горизонтальным перепадом давления и движением верхней границы слоя, влияет еще наличие ненулевой вертикальной завихренности на этой поверхности. Таким образом, полученное решение обобщает классическое решение Пуазейля [2, 3] на случай неоднородных течений вертикально завихренных жидкостей.

Отметим, что если горизонтальные перепады давления  $S_1$  и  $S_2$  положить равными нулю, то решение (5)–(8) примет более простой вид:

$$V_x = \frac{WZ}{12\nu} \left[ h^2 \Omega \sin \varphi (Z^3 - 1) + 12\nu \cos \varphi \right] + \Omega Z, \\ V_y = W \sin \varphi Z, \quad P = S = \text{const}.$$

Это точное решение, описывающее неоднородное течение Куэтта, было найдено и исследовано в статье [40]. Скорость  $V_y$  не допускает возникновения противотечений вдоль оси  $Oy$ . Ввиду этих обстоятельств интерес представляет исследование влияния неоднородных членов в представлении поля давления (влияния коэффициентов  $S_1$  и  $S_2$ ) на свойства течения (5)–(7).



### Анализ поля скорости

Точное решение (6) определяется квадратичной зависимостью от вертикальной координаты  $Z$ . При этом один из нулей рассматриваемого полинома (6) выделен явно – это  $Z = 0$ . Линейная функция, стоящая в скобках в (6), может обращаться в нуль внутри рассматриваемого слоя не более одного раза. Достаточным условием для этого является выполнение неравенства:

$$v(0)v(1) = W \sin \varphi \left( W \sin \varphi - \frac{S_1 h^2}{2v} \right) < 0.$$

Далее проанализируем поведение скорости  $V_x = u + ay$ . Для удобства представим решение (5), (7) в следующем виде:

$$V_x = Z(mZ^4 + kZ^3 + nZ + d_y). \quad (9)$$

В выражении (9) для краткости введены обозначения:

$$d_y = d + \Omega y,$$

$$d = \frac{1}{120v^2} (2h^4 \Omega S_1 - 60vh^2 S_2 - 10vh^2 W \Omega \sin \varphi + 120Wv^2 \cos \varphi),$$

$$k = \frac{h^2 \Omega}{24v^2} (2vW \sin \varphi - h^2 S_1), \quad m = \frac{h^4 \Omega S_1}{40v^2}, \quad n = \frac{h^2 S_2}{2v}.$$

Слагаемое  $d_y = d + \Omega y$  является постоянным в конкретном сечении, определяемом координатой  $y$ , и меняется только при переходе к другому сечению (при изменении  $y$ ).

Рассмотрим сначала случай, когда коэффициент  $d_y = 0$ . Решение (9) тогда принимает вид:

$$V_x = Z^2(mZ^3 + kZ^2 + n). \quad (10)$$

Заметим, что при  $m = k = n = 0$  решение (10) вырождается в тривиальное ( $V_x = 0$ ). При этом случаи, где  $m = k = 0$ ,  $m = n = 0$ ,  $k = n = 0$ , также не представляют интереса, так как при указанных комбинациях значений параметров скорость  $V_x$  будет иметь вид  $V_x = CZ^q$  (где  $q = 2, 4$  или  $5$  соответственно), и единственной нулевой точкой скорости  $V_x$  будет точка  $Z = 0$ . Поэтому остаются два альтернативных варианта: только один из коэффициентов  $m, k, n$  равен нулю и ни один из коэффициентов  $m, k, n$  не равен нулю. Начнем анализ с первого варианта.

Если в решении (10) только один из коэффициентов  $m, k, n$  принимает нулевое значение, то полином  $f = mZ^3 + kZ^2 + n$ , стоящий в круглых скобках в (10), определяется одним из следующих выражений:

$$f|_{m=0} = kZ^2 + n, \quad f|_{k=0} = mZ^3 + n, \quad f|_{n=0} = mZ^3 + kZ^2.$$

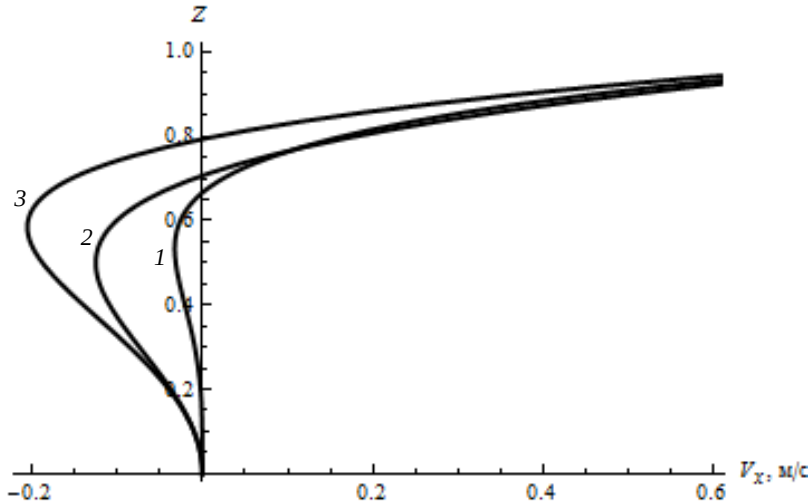
В случаях  $m = 0$  и  $k = 0$  производные этих функций соответственно равны

$$f'|_{m=0} = 2kZ \quad \text{и} \quad f'|_{k=0} = 3mZ^2.$$

Очевидно, указанные производные на интервале  $(0, 1)$  в нуль не обращаются, а значит, функции  $f|_{m=0}$  и  $f|_{k=0}$  являются монотонными. Следовательно, скорость  $V_x$  при  $m = 0$  и  $k = 0$  имеет не более одного нуля (рис. 1). В случае же  $n = 0$  скорость  $V_x$  (10) можно преобразовать к виду:

$$V_x|_{n=0} = Z^4(mZ + k),$$

из которого следует, что у скорости  $V_x$  также не может быть более одной нулевой точки на исследуемом интервале  $(0, 1)$  (см. рис. 1). Причем указанная точка имеет место только при выполнении неравенства  $k(m + k) < 0$ .



**Рис. 1.** Профиль скорости  $V_x$  при  $d_y = 0$ ,  $v = 1.412 \cdot 10^2$  м/с,  $\varphi = \pi/3$ ,  $h = 100$  м,  $W = 2$  м/с (кривая 1 – случай  $n = 0$  ( $S_1 = 0$ ,  $S_2 = 0.0815219$  кг/(м<sup>2</sup>с<sup>2</sup>),  $\Omega = 0.293479$  с<sup>-1</sup>), кривая 2 – случай  $k = 0$  ( $S_1 = 0.0815219$  кг/(м<sup>2</sup>с<sup>2</sup>),  $S_2 = 0$ ,  $\Omega = 0.293479$  с<sup>-1</sup>), кривая 3 – случай  $m = 0$  ( $S_1 = 0$ ,  $S_2 = -0.02824$  кг/(м<sup>2</sup>с<sup>2</sup>),  $\Omega = 0.195652$  с<sup>-1</sup>))  
**Fig. 1.** Profile of velocity  $V_x$  at  $d_y = 0$ ,  $v = 1.412 \cdot 10^2$  м/с,  $\varphi = \pi/3$ ,  $h = 100$  м,  $W = 2$  м/с (1, the case of  $n = 0$  ( $S_1 = 0$ ,  $S_2 = 0.0815219$  кг/(м<sup>2</sup>с<sup>2</sup>),  $\Omega = 0.293479$  с<sup>-1</sup>); 2, the case of  $k = 0$  ( $S_1 = 0.0815219$  кг/(м<sup>2</sup>с<sup>2</sup>),  $S_2 = 0$ ,  $\Omega = 0.293479$  с<sup>-1</sup>); and 3, the case of  $m = 0$  ( $S_1 = 0$ ,  $S_2 = -0.02824$  кг/(м<sup>2</sup>с<sup>2</sup>),  $\Omega = 0.195652$  с<sup>-1</sup>))

В случае, когда все коэффициенты в выражении (10) отличны от нуля, скорость  $V_x$ , согласно [46], принимает нулевое значение внутри слоя не более двух раз (рис. 2). Необходимым условием для этого является выполнение неравенства

$$n(m + n + k) > 0,$$

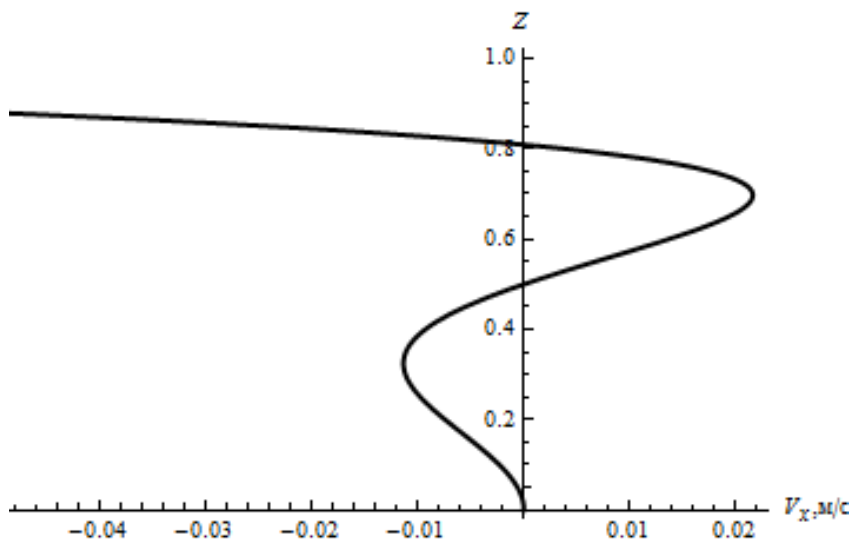
означающего, что полином  $f$ , входящий в (10), принимает на концах интервала  $(0, 1)$  значения одного знака.

В общем же случае ( $d_y \neq 0$ ) скорость  $V_x$ , определяемая точным решением (6), может иметь на одну нулевую точку больше [46]. Появление дополнительной нулевой точки обосновывается учетом дополнительного потока, определяемого коэффициентом  $d_y$ . Профиль скорости (9) с максимальным числом нулевых точек приведен на рис. 3.

Отметим, что удельная кинетическая энергия

$$E_k = \frac{\rho}{2} (V_x^2 + V_y^2)$$

принимает нулевое значение только при одновременном обращении в нуль обеих (ненулевых) компонент вектора скорости. Выше было показано, что скорость  $V_y$  может обращаться в нуль внутри рассматриваемого горизонтального слоя не более одного раза. Это означает, что энергия  $E_k$  может иметь не более одной нулевой точки внутри слоя (рис. 4).

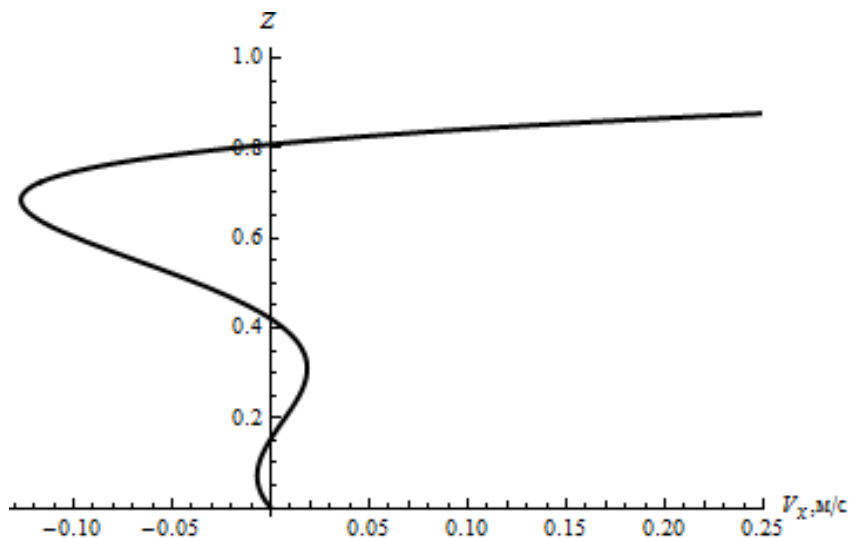


**Рис. 2.** Профиль скорости  $V_x$  при  $d_y = 0$  и  $m, k, n \neq 0$

( $\nu = 1.412 \cdot 10^2 \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\varphi = \pi/3$ ,  $h = 100 \text{ м}$ ,  $W = -0.5 \text{ м/с}$ ,  $S_1 = -0.0305707 \text{ кг}/(\text{м}^2\text{с}^2)$ ,  
 $S_2 = -0.00706 \text{ кг}/(\text{м}^2\text{с}^2)$ ,  $\Omega = 0.52174 \text{ с}^{-1}$ )

**Fig. 2.** Profile of velocity  $V_x$  at  $d_y = 0$  and  $m, k, n \neq 0$

( $\nu = 1.412 \cdot 10^2 \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\varphi = \pi/3$ ,  $h = 100 \text{ м}$ ,  $W = -0.5 \text{ м/с}$ ,  $S_1 = -0.0305707 \text{ кг}/(\text{м}^2\text{с}^2)$ ,  
 $S_2 = -0.00706 \text{ кг}/(\text{м}^2\text{с}^2)$ ,  $\Omega = 0.52174 \text{ с}^{-1}$ )

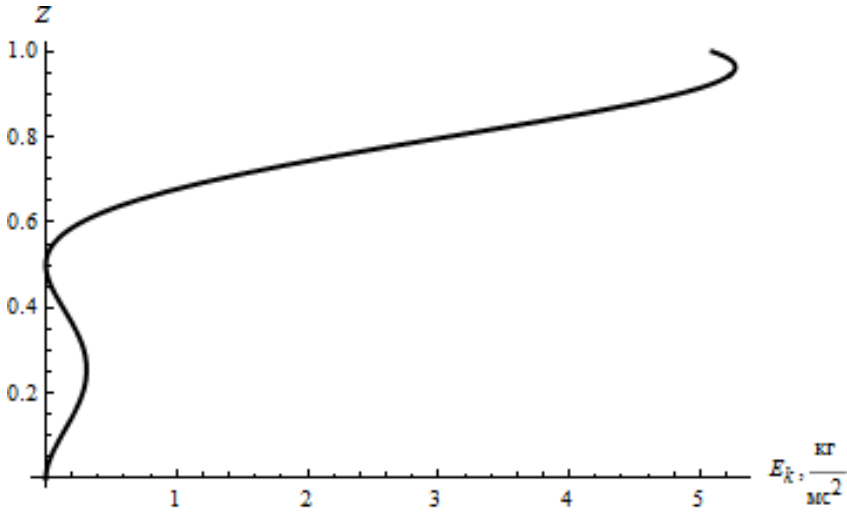


**Рис. 3.** Профиль скорости  $V_x$  в общем случае

( $\nu = 1.412 \cdot 10^2 \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\varphi = \pi/3$ ,  $h = 100 \text{ м}$ ,  $W = 1.6 \text{ м/с}$ ,  $S_1 = 0.0978262 \text{ кг}/(\text{м}^2\text{с}^2)$ ,  
 $S_2 = 0.02824 \text{ кг}/(\text{м}^2\text{с}^2)$ ,  $\Omega = 0.815219 \text{ с}^{-1}$ )

**Fig. 3.** Profile of velocity  $V_x$  in a general case

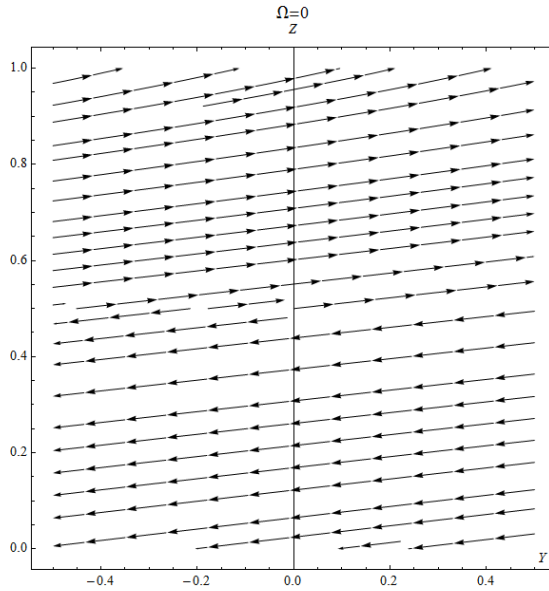
( $\nu = 1.412 \cdot 10^2 \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\varphi = \pi/3$ ,  $h = 100 \text{ м}$ ,  $W = 1.6 \text{ м/с}$ ,  $S_1 = 0.0978262 \text{ кг}/(\text{м}^2\text{с}^2)$ ,  
 $S_2 = 0.02824 \text{ кг}/(\text{м}^2\text{с}^2)$ ,  $\Omega = 0.815219 \text{ с}^{-1}$ )



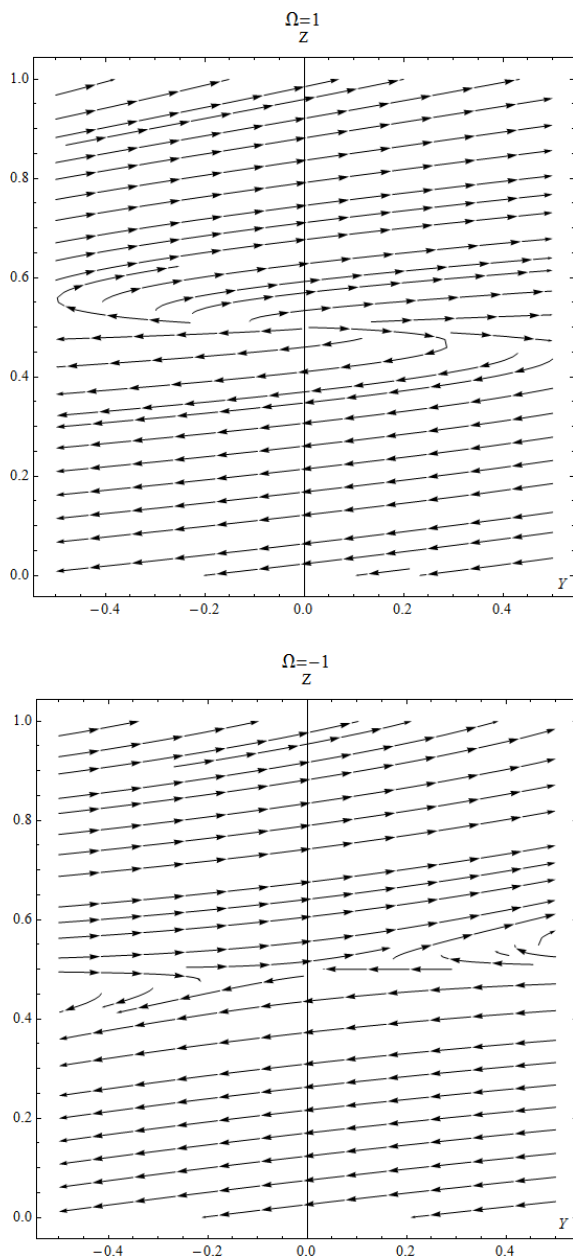
**Рис. 4.** Профиль кинетической энергии  $E_k$   
**Fig. 4.** Profile of kinetic energy  $E_k$

Профиль, представленный на рис. 4, иллюстрирует наличие одной нулевой точки внутри рассматриваемого слоя, а также немонотонный характер энергии  $E_k$ . Последнее объясняется сложной нелинейной зависимостью скорости  $V_x$  от вертикальной координаты  $Z$ .

Распределение линий тока для значений, отвечающих приведенному профилю удельной кинетической энергии  $E_k$ , представлено на рис. 5.



**Рис. 5.** Линии тока при  $\Omega = 0$   
**Fig. 5.** Streamlines at  $\Omega = 0$



**Рис. 6.** Линии тока при разных значениях параметра  $\Omega \neq 0$   
**Fig. 6.** Streamlines at different values of parameter  $\Omega \neq 0$

Отметим, что для сечения  $y = 0$  вклад неоднородного слагаемого  $au$  в структуру скорости  $V_x$  будет нулевой. Учет неоднородного слагаемого  $au$  (т.е. выбор сечения  $y \neq 0$ ) приводит к усложнению топологии поля скорости, что хорошо видно на рис. 6.

### Анализ поля касательных напряжений

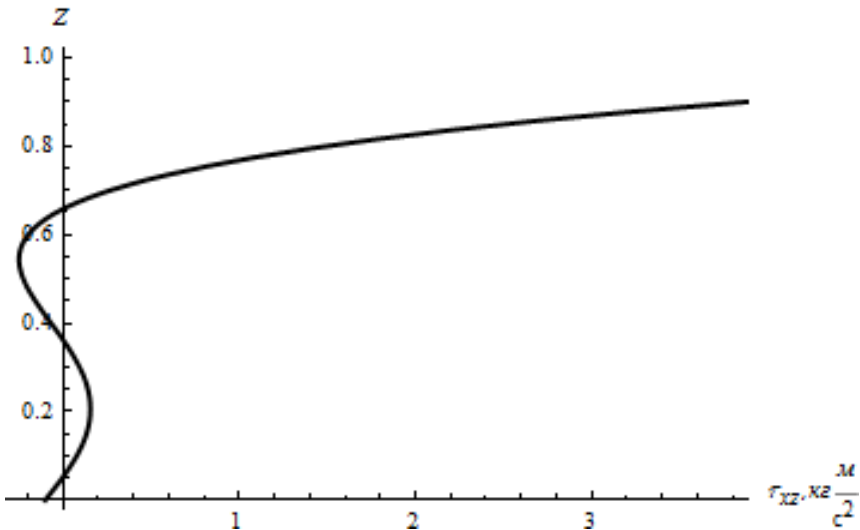
Аналогично исследованию для поля скорости проанализируем свойства касательных напряжений

$$\tau_{xz} = \eta \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) = \eta \frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\eta}{h} \frac{\partial V_x}{\partial Z} = \frac{\eta}{h} (5mZ^4 + 4kZ^3 + 2nZ + d_y), \quad (11)$$

$$\tau_{yz} = \eta \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) = \eta \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\eta}{h} \frac{\partial V_y}{\partial Z} = \frac{\eta}{h} (2bZ + c). \quad (12)$$

Структура выражения (12) позволяет сделать вывод о том, что внутри слоя рассматриваемой жидкости может существовать только одна точка стратификации. В этой точке касательное напряжение  $\tau_{xz}$  меняет свой тип с растягивающего на сжимающее или наоборот.

Касательное напряжение  $\tau_{xz}$  (11) определяется линейной комбинацией монотонных функций  $Z^4$ ,  $Z^3$ ,  $Z$  и  $d_y$ . Согласно [46], такая комбинация (как функция) может принимать нулевое значение не более трех раз (рис. 7).



**Рис. 7.** Профиль касательного напряжения  $\tau_{xz}$  в общем случае

( $\eta = 144.179$  кг·с/м,  $\varphi = \pi/3$ ,  $h = 100$  м,  $W = 1.24845$  м/с,  $S_1 = 0.0763317$  кг/(м²с²),  
 $S_2 = 0.0195867$  кг/(м²с²),  $\Omega = 0.434783$  с⁻¹)

**Fig. 7.** Profile of tangential stress  $\tau_{xz}$  in a general case

( $\eta = 144.179$  kg·s/m,  $\varphi = \pi/3$ ,  $h = 100$  m,  $W = 1.24845$  m/s,  $S_1 = 0.0763317$  kg/(m²s²),  
 $S_2 = 0.0195867$  kg/(m²s²),  $\Omega = 0.434783$  s⁻¹)

Наличие трех нулевых точек у напряжения  $\tau_{xz}$  говорит о возможности решения (5), (7) описывать множественную стратификацию. В данном случае речь идет о возможности расслоения поля  $\tau_{xz}$  на четыре зоны, при пересечении границ которых напряжение  $\tau_{xz}$  меняет знак (или, что то же самое, меняет тип).

### Заключение

Получено аналитическое решение краевой задачи, описывающей неоднородное течение Пуазейля вертикально завихренной жидкости в горизонтальном слое при учете ветрового воздействия на одной из его границ. Исследовано возможное поведение поля скорости течения в зависимости от задаваемых на верхней границе характеристик ветра. Показано, что в слое жидкости могут возникать области с обратным течением, причем в рассматриваемом слое в некоторых случаях течение может сменить направление до трех раз. Соответственно, в жидкости могут существовать точки стратификации, делящие рассматриваемый слой на подслои, в которых касательное напряжение меняет свой тип – с растягивающего на сжимающее или наоборот. Показано, что число этих областей меняется в зависимости от значений параметров краевой задачи (граничного управления). Кинетическая энергия внутри рассматриваемого слоя однократно принимает нулевое значение и имеет немонотонный характер, что объясняется структурой построенного решения для поля скорости и его сложной зависимостью от вертикальной координаты.

### Список источников

1. Hagen G. Über die Bewegung des Wasser in engen zylindrischen Röhren // Pogg. Ann. 1839. Ver. 46. S. 423–442.
2. Poiseuille J.-L.-M. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. 1840. V. 11. P. 961–967; 1041–1048.
3. Poiseuille J.-L.-M. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres (suite) // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. 1841. V. 12. P. 112–115.
4. Воларович М.П. Работы Пуазейля о течении жидкости в трубах // Известия Академии наук СССР. Сер. физическая. 1947. Т. XI, № 1. С. 7–18.
5. Pedley T.J., The fluid mechanics of large blood vessels. Cambridge monographs on mechanics and applied mathematics. Cambridge ; New York ; Melbourne : Cambridge University Press, 1980. 446 p.
6. Регирер С.А. Квазиодномерная теория перистальтических потоков // Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа. 1984. № 5. С. 89–97.
7. Polyanin A.D., Kutepov A.M., Vyazmin A.V., Kazenin D.A. Hydrodynamics, mass and heat transfer in chemical engineering. London : Taylor & Francis, 2002. 406 p.
8. Князев Д.В., Колпаков И.Ю. Точные решения задачи о течении вязкой жидкости в цилиндрической области с меняющимся радиусом // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11, № 1. С. 89–97.
9. Аристов С.Н., Князев Д.В. Новое точное решение задачи о вращательно-симметричном течении Куэтта–Пуазейля // Прикладная механика и техническая физика. 2007. Т. 48, № 5 (285). С. 71–77. doi: 10.1007/s10808-007-0087-7
10. Фомин А.А., Фомина Л.Н. Численное моделирование течения жидкости в плоской каверне при больших числах Рейнольдса // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т. 7, № 4. С. 363–377. doi: 10.7242/1999-6691/2014.7.4.35
11. Бойко А.В., Кириловский С.В., Маслов А.А., Поплавская Т.В. Инженерное моделирование ламинарно-турбулентного перехода: достижения и проблемы (обзор) // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56, № 5. С. 30–49. DOI: 10.15372/PMTF20150503

12. Станкевич Ю.А., Фисенко С.П. Перестройка профиля Пуазейля в неизотермических течениях в реакторе // Инженерно-физический журнал. 2011. Т. 84, № 6. С. 1225–1228.
13. Савенков И.В. О неустойчивости плоского течения Пуазейля между упругими пластинами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51, № 12. С. 2288–2295.
14. Трошкин О.В. К нелинейной устойчивости течений Куэтта, Пуазейля и Колмогорова в плоском канале // Доклады Академии наук. 2012. Т. 443, № 1. С. 29.
15. Проскурин А.В., Сагалаков А.М. Устойчивость течения Пуазейля при наличии продольного магнитного поля // Журнал технической физики. 2012. Т. 82, № 5. С. 29–35.
16. Чефранов С.Г., Чефранов А.Г. Устранение парадокса линейной устойчивости течения Хагена–Пуазейля и вязкий диссипативный механизм возникновения турбулентности в пограничном слое // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2014. Т. 146, № 2. С. 373–383.
17. Савенков И.В. Об осесимметричной неустойчивости течения Пуазейля–Куэтта между концентрическими цилиндрами при высоких числах Рейнольдса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 2. С. 295. doi: 10.7868/S0044466915020179
18. Скульский О.И., Аристов С.Н. Механика аномально вязких жидкостей. Екатеринбург : Изд-во УрО РАН, 2004. 156 с.
19. Алтухов Ю.А., Гусев А.С., Макарова М.А., Пышнограй Г.В. Обобщение закона Пуазейля для плоскопараллельного течения вязкоупругих сред // Механика композиционных материалов и конструкций. 2007. Т. 13, № 4. С. 581–590.
20. Аристов С.Н., Шварц К.Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. Пермь : Пермский гос. ун-т, 2006. 155 с.
21. Аристов С.Н., Шварц К.Г. Адвективное течение во вращающейся жидкой пленке // Прикладная механика и техническая физика. 2016. Т. 57, № 1. doi: 10.15372/PMTF20160121
22. Остроумов Г.А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М. : Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1952. 256 с.
23. Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 1966. Т. 3. С. 69–72.
24. Бирих Р.В., Пухначёв В.В. Осевое конвективное течение во вращающейся трубе с продольным градиентом температуры // Доклады РАН. 2011. Т. 436, № 3. С. 323–327.
25. Бирих Р.В., Пухначёв В.В. Конвективное течение в горизонтальном канале с неньютоновской реологией поверхности при нестационарном продольном градиенте температуры // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2015. № 1. С. 192–198.
26. Пухначёв В.В. Нестационарные аналоги решения Бириха // Известия Алтайского государственного университета. 2011. № 1-2. С. 62–69.
27. Андреев В.К. Решения Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения. Красноярск : ИВМ СО РАН, 2010. 68 с.
28. Андреев В.К., Бекежанова В.Б. Устойчивость неизотермических жидкостей (обзор) // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54, № 2. С. 3–20. doi: 10.1134/S0021894413020016
29. Шварц К.Г. Плоскопараллельное адвективное течение в горизонтальном слое несжимаемой жидкости с твердыми границами // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2014. № 4. С. 26–30.
30. Аристов С.Н., Просвирыков Е.Ю. О слоистых течениях плоской свободной конвекции // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9, №4. С. 651–657.
31. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation // Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2019. V. 23, No. 2. P. 341–360. doi: 10.14498/vsgtu1670.



32. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Temperature field investigation // Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. V. 24, No. 3. С. 528–541. doi: 10.14498/vsgtu1770
33. Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. Термокапиллярная конвекция вертикально завихренной жидкости // Теоретические основы химической технологии. 2020. Т. 54, № 1. С. 114–124. doi: 10.31857/S0040357119060034
34. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю., Сневак Л.Ф. Нестационарная слоистая тепловая и концентрационная конвекция марангони вязкой несжимаемой жидкости // Вычислительная механика сплошных сред. 2015. Т. 8, № 4. С. 445–456. doi: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.38
35. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю., Сневак Л.Ф. Нестационарная конвекция Бенара–Марангони слоистых течений вязкой несжимаемой жидкости // Теоретические основы химической технологии. 2016. Т. 50, № 2. С. 132–141. doi: 10.7868/S0040357116020019
36. Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. Точное решение уравнений Навье–Стокса, описывающее пространственно неоднородные течения вращающейся жидкости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 79–87. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87
37. Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. Класс точных решений для двумерных уравнений геофизической гидродинамики с двумя параметрами Кориолиса // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. 2020. Т. 32. С. 33–48. doi: 10.26516/1997-7670.2020.32.33.
38. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Isothermal layered flows of a viscous incompressible fluid with spatial acceleration in the case of three Coriolis parameters // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. 2020. Is. 3. P. 29–46. doi: 10.17804/2410-9908.2020.3.029-046
39. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. Неоднородное конвективное течение Куэтта // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2016. № 5. С. 3–9. doi: 10.7868/S0568528116050030
40. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. Неоднородные течения Куэтта // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10, № 2. С. 177–182.
41. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu., Simonov M.A. Nonlinear gradient flow of a vertical vortex fluid in a thin layer // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2019. V. 15, No. 3. P. 271–283.
42. Marshall J., Hill C., Perelman L., Adroft A. Hydrostatic, quasi-hydrostatic and non-hydrostatic ocean modeling // Geophys. Res J. 1997. V. 102, No. C.3. P. 5733–5752.
43. Гилл А. Динамика атмосферы и океана : в 2 т. М. : Мир, 1986.
44. Зубарев Н.М., Просвиряков Е.Ю. О точных решениях для слоистых трехмерных нестационарных изобарических течений вязкой несжимаемой жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 2019. № 6. С. 65–71. DOI: 10.15372/PMTF20190607
45. Привалова В.В., Просвиряков Е.Ю. Нелинейное изобарическое течение вязкой несжимаемой жидкости в тонком слое с проницаемыми границами // Вычислительная механика сплошных сред. 2019. Т. 12, № 2. С. 230–242. doi: 10.7242/1999-6691/2019.12.2.20
46. Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. Исследование стратификации гидродинамических полей для слоистых течений вертикально завихренной жидкости // DReaM. 2020. Вып. 4. С. 62–78. doi: 10.17804/2410-9908.2020.4.062-078

## References

1. Hagen G. (1839) Über die Bewegung des Wasser in engen cylindrischen Röhren. *Annalen der Physik*. 46. pp. 423–442.

2. Poiseuille J.-L.-M. (1840) Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*. 11. pp. 961–967, pp. 1041–1048.
3. Poiseuille J.-L.-M. (1841) Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres (suite). *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*. 12. pp. 112–115.
4. Volarovich M.P. (1947) Raboty Puazeylya o techenii zhidkosti v trubakh [Poiseuille's work on a fluid flow in pipes]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Seriya fizicheskaya*. 1. pp. 7–18.
5. Pedley T.J. (1980) *The Fluid Mechanics of Large Blood Vessels*. Cambridge monographs on mechanics and applied mathematics. Cambridge–New York–Melbourne: Cambridge University Press.
6. Regirer S.A. (1984) Quasi-one-dimensional theory of peristaltic flows. *Fluid Dynamics*. 19(5). pp. 747–754.
7. Polyanin A.D., Kutepov A.M., Vyazmin A.V., Kazenin D.A. (2002) *Hydrodynamics, Mass and Heat Transfer in Chemical Engineering*. London: Taylor & Francis.
8. Knyazev D.V., Kolpakov I.Yu. (2015) Tochnye resheniya zadachi o techenii vyazkoy zhidkosti v tsilindricheskoy oblasti s menyayushchimsya radiusom [The exact solutions of the problem of a viscous fluid flow in a cylindrical domain with varying radius]. *Nelineynaya dinamika – Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 11(1). pp. 89–97.
9. Aristov S.N., Knyazev D.V. (2007) New exact solution of the problem of rotationally symmetric Couette-Poiseuille flow. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 48(5). pp. 680–685. DOI: 10.1007/s10808-007-0087-7.
10. Fomin A.A., Fomina L.N. (2014) Chislennoe modelirovanie techeniya zhidkosti v ploskoy kaverne pri bol'shikh chislakh Reynol'dsa [Numerical simulation of viscous 2d lid-driven cavity flow at high Reynolds numbers]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred – Computational Continuum Mechanics*. 7(4). pp. 363–377. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.4.35.
11. Boiko A.V., Kirilovskiy S.V., Maslov A.A., Poplavskaya T.V. (2015) Engineering modeling of the laminar–turbulent transition: achievements and problems (review). *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 56(5). pp. 761–776. DOI: 10.1134/S002189441505003X.
12. Stankevich Yu.A., Fisenko S.P. (2011) Perestroyka profilya Puazeylya v neizotermicheskikh techeniyakh v reaktore [Reconstruction of the Poiseuille profile in nonisothermal flows in a reactor]. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal – Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 84(6). pp. 1225–1228.
13. Savenkov I.V. (2011) Instability of the two-dimensional Poiseuille flow between elastic plates. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 51(12). pp. 2155–2161. DOI: 10.1134/S0965542511120177.
14. Troshkin O.V. (2012) K nelineynoy ustoychivosti techeniy Kuetta, Puazeylya i Kolmogorova v ploskom kanale [Nonlinear stability of Couette, Poiseuille, and Kolmogorov flows in a plane channel]. *Doklady Akademii nauk*. 443(1). p. 29.
15. Proskurin A.V., Sagalakov A.M. (2012) Ustoychivost' techeniya Puazeylya pri nalichii prodol'nogo magnitnogo polya [Stability of Poiseuille flow in the presence of a longitudinal magnetic field]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki – Technical Physics*. 82(5). pp. 29–35.
16. Chefranov S.G., Chefranov A.G. (2014) Ustranenie paradoksa lineynoy ustoychivosti techeniya Khagena-Puazeylya i vyazkiy dissipativnyy mekhanizm vozniknoveniya turbulentnosti v pogranichnom sloye [Hagen-Poiseuille flow linear stability paradox resolving and viscous dissipative mechanism of the turbulence emergence in the boundary layer]. *Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki – Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 146(2). pp. 373–383.
17. Savenkov I.V. (2015) Axisymmetric instability of the Poiseuille-Couette flow between concentric cylinders at high Reynolds numbers. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 55(2). pp. 291–297. DOI: 10.1134/S0965542515020177.

18. Skul'skiy O.I., Aristov S.N. (2004) *Mekhanika anomal'no vyazkikh zhidkostey* [Mechanics of abnormally viscous fluids]. Ekaterinburg: Izdatel'stvo UrO RAN.
19. Altukhov Yu.A., Gusev A.S., Makarova M.A., Pyshnograd G.V. (2007) Obobshchenie zakona Puazeilya dlya ploskoparallel'nogo techeniya vyazkoupругikh sred [Generalization of the Poiseuille law for a plane-parallel flow of viscoelastic media]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy – Mechanics of Composite Materials and Structures*. 13(4). pp. 581–590.
20. Aristov S.N., Shvarts K.G. (2006) *Vikhrevye techeniya advektivnoy prirody vo vrashchayushchemsya sloe zhidkosti* [Vortical flows of advective nature in a rotating fluid layer]. Perm: Perm State University Publ.
21. Aristov S.N., Shvarts K.G. (2016) Advective flow in a rotating liquid film. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 57(1). pp. 188–194. DOI: 10.1134/S0021894416010211.
22. Ostroumov G.A. (1958) *Free Convection under the Condition of the Internal Problem*. National Advisory Committee for Aeronautics. Washington: NACA Technical Memorandum 1407.
23. Birikh R.V. (1966) Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 7. pp. 43–44.
24. Birih R.V., Puhnachev V.V. (2011) An axial convective flow in a rotating tube with a longitudinal temperature gradient. *Doklady Physics*. 56(1). pp. 47–52. DOI: 10.1134/S1028335811010095.
25. Birih R.V., Puhnachev V.V. (2015) Convective flow in a horizontal channel with non-Newtonian surface rheology under time-dependent longitudinal temperature gradient. *Fluid Dynamics*. 50(1). pp. 173–179. DOI: 10.1134/S0015462815010172.
26. Pukhnachev V.V. (2011) Nestatsionarnye analogi resheniya Birikha [Non-stationary analogues of the Birikh solution]. *Izvestiya AltGU – Izvestiya of Altai State University*. 1–2. pp. 62–69.
27. Andreev V.K. (2010) *Resheniya Birikha uravneniy konveksii i nekotorye ego obobshcheniya* [The Birikh solution of the convection equations and some of generalizations]. Krasnoyarsk: IVM SO RAN Publ.
28. Andreev V.K., Bekezhanova V.B. (2013) Stability of non-isothermal fluids (Review). *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 54(2). pp. 171–184. DOI: 10.1134/S0021894413020016.
29. Shvarts K.G. (2014) Plane-parallel advective flow in a horizontal incompressible fluid layer with rigid boundaries. *Fluid Dynamics*. 49 (4). pp. 438–442. DOI: 10.1134/S0015462814040036.
30. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. (2013) O sloistykh techeniyakh ploskoy svobodnoy konveksii [On laminar flows of planar free convection]. *Nelineynaya dinamika – Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 9(4). pp. 651–657.
31. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. (2019) Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 23(2). pp. 341–360. DOI: 10.14498/vsgtu1670.
32. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. (2020) Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Temperature field investigation. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 24(3). pp. 528–541. DOI: 10.14498/vsgtu1770.
33. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. (2020) Thermocapillary convection of a vertical swirling liquid. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 54(1). pp. 230–239. DOI: 10.1134/S0040579519060034.
34. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu., Spevak L.F. (2015) Nonstationary laminar thermal and solutal Marangoni convection of a viscous fluid. *Computational Continuum Mechanics*. 8(4). pp. 445–456. DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.38.

35. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y., Spevak L.F. (2016) Unsteady-state Bénard-Marangoni convection in layered viscous incompressible flows. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 50(2). pp. 132–141. DOI: 10.1134/S0040579516020019.
36. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. (2020) Tochnoe reshenie uravneniy Nav'e–Stoksa, opisyvayushchee prostranstvenno neodnorodnye techeniya vrashchayushcheyasya zhidkosti [Exact solution of Navier–Stokes equations describing spatially inhomogeneous flows of a rotating fluid]. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN – Proceedings of Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS*. 26(2). pp. 79–87. DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87.
37. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. (2020) A class of exact solutions for two-dimensional equations of geophysical hydrodynamics with two Coriolis parameters. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series “Mathematics”*. 32. pp. 33–48. DOI: 10.26516/1997-7670.2020.32.33.
38. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. (2020) Isothermal layered flows of a viscous incompressible fluid with spatial acceleration in the case of three Coriolis parameters. *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*. 3. pp. 29–46. DOI: 10.17804/2410-9908.2020.3.029-046.
39. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. (2016) Neodnorodnoe konvektivnoe techenie Kuetta [Inhomogeneous convective Couette flow]. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza – Fluid Dynamics*. 5. pp. 3–9. DOI: 10.7868/S0568528116050030.
40. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. (2014) Neodnorodnye techeniya Kuetta [Inhomogeneous Couette flow]. *Nelineynaya dinamika – Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 10(2). pp. 177–182.
41. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu., Simonov M.A. (2019) Nonlinear gradient flow of a vertical vortex fluid in a thin layer. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 15(3). pp. 271–283. DOI: 10.20537/nd190306.
42. Marshall J., Hill C., Perelman L., Adcroft A. (1997) Hydrostatic, quasi-hydrostatic and non-hydrostatic ocean modeling. *Journal of Geophysical Research*. 102(3). pp. 5733–5752.
43. Gill A.E. (1982) *Atmosphere-Ocean Dynamics*. New York: Academic Press.
44. Zubarev N.M., Prosviryakov E.Yu. (2019) Exact solutions for layered three-dimensional nonstationary isobaric flows of a viscous incompressible fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 60(6). pp. 1031–1037. DOI: 10.1134/S0021894419060075.
45. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu. (2019) Nonlinear isobaric flow of a viscous incompressible fluid in a thin layer with permeable boundaries. *Computational Continuum Mechanics*. 12(2). pp. 230–242. DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.2.20.
46. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. (2020) Studying the stratification of hydrodynamic fields for laminar flows of vertically swirling fluids. *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*. 4. pp. 62–78. DOI: 10.17804/2410-9908.2020.4.062-078.

#### Сведения об авторах:

**Бурмашева Наталья Владимировна** – кандидат технических наук, старший научный сотрудник сектора нелинейной вихревой гидродинамики Института машиноведения УрО РАН; доцент Уральского гуманитарного института Уральского федерального университета, Екатеринбург, Россия. E-mail: nat\_burm@mail.ru

**Дьячкова Анастасия Викторовна** – инженер сектора нелинейной вихревой гидродинамики Института машиноведения УрО РАН; магистрант Института естественных наук и математики Уральского федерального университета, Екатеринбург, Россия. E-mail: larinakaterina@hotmail.com

**Просвирыков Евгений Юрьевич** – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник сектора нелинейной вихревой гидродинамики Института машиноведения УрО РАН; профессор Института фундаментального образования Уральского федерального университета, Екатеринбург, Россия. E-mail: evgen\_pros@mail.ru

***Information about the authors:***

**Burmasheva Natal'ya V.** (Candidate of Technical Sciences, Institute of Engineering Science UB RAS, Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation). E-mail: nat\_burm@mail.ru

**Dyachkova Anastasiya V.** (Institute of Engineering Science UB RAS, Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation). E-mail: larinakaterina@hotmail.com

**Prosviryakov Evgeniy Yu.** (Doctor of Physics and Mathematics, Institute of Engineering Science UB RAS, Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation). E-mail: evgen\_pros@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 07.07.2021; принята к публикации 19.05.2022*

*The article was submitted 07.07.2021; accepted for publication 19.05.2022*

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/77/7

## Определение упругих полей в трансверсально-изотропных телах вращения, вызванных действием объемных сил

Дмитрий Алексеевич Иванычев

*Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия, Lsivdmal@mail.ru*

**Аннотация.** Представлена методика определения напряженно-деформированного состояния анизотропных тел вращения, возникающего от действия неосесимметричных стационарных объемных сил, заданных по циклическому закону. Предложен способ формирования базиса, по которому искомое упругое состояние раскладывается ряд Фурье, коэффициенты которого представляют собой квадратуры. Решены конкретные задачи для конечного кругового цилиндра. Полученные характеристики упругого поля зависят от трех координат и имеют аналитический вид.

**Ключевые слова:** метод граничных состояний, трансверсально-изотропные материалы, объемные силы, пространство состояний, неосесимметричная деформация

**Благодарности:** Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Липецкой области в рамках научного проекта № 19-41-480003 "p\_a".

**Для цитирования:** Иванычев Д.А. Определение упругих полей в трансверсально-изотропных телах вращения, вызванных действием объемных сил // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 77. С. 86–100. doi: 10.17223/19988621/77/7

Original article

## Determination of the elastic fields induced by body forces in transtropic bodies of revolution

Dmitriy A. Ivanychev

*Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation, lsivdmal@mail.ru*

**Abstract.** The paper presents a method for determining the stress-strain state of transversely isotropic bodies of revolution under the action of non-axisymmetric stationary body forces. This problem solution involves the use of boundary state method definitions. The basis of the space of internal states is formed using the fundamental polynomials. The polynomial is placed in any position of a displacement vector of the plane auxiliary state; the spatial state is determined by transition formulas. A set of such states forms a finite-dimensional basis, in which after orthogonalization, the desired state is expanded

into Fourier series with the same coefficients. The series coefficients are scalar products of the vectors of given and basic body forces. Finally, the determination of the elastic state is reduced to solving quadratures.

The solutions to problems of elasticity theory for a transversely isotropic circular cylinder are analyzed in terms of the action of body forces given by various cyclic laws (sine and cosine). Recommendations are given for constructing the basis of internal states depending on the type of the function of the given body forces. The analysis of the series convergence and the estimation of the solution accuracy are given in a graphical form.

**Keywords:** boundary state method, transversely isotropic materials, body forces, state space, non-axisymmetric deformation

**Acknowledgments:** The study was funded by RFBR and Lipetsk Region (project No. 19-41-480003).

**For citation:** Ivanychev, D.A. (2022) Determination of the elastic fields induced by body forces in transtropic bodies of revolution. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 86–100. doi: 10.17223/19988621/77/7

Развитие существующих и создание новых методов расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) тел из сложных по структуре и реологии материалов по большей части опирается на общее или фундаментальное решение той или иной задачи теории упругости. Фундаментальный вклад в создание общих решений для анизотропной среды внесли С.Г. Лехницкий, А.Я. Александров, Ю.И. Соловьев, А.С. Космодамианский и др. Однако эти решения были разработаны еще в прошлом столетии. Естественно, что современными учеными получены решения частных задач, которые могут быть применены для построения математических моделей на основе различных методов механики. Особенно это касается аналитических или численно-аналитических методов, которые позволяют получить решение в виде функции нескольких переменных (координаты, времени, температуры и др.). Развитие именно аналитических методов в последнее время преобладает над численными методами, где результатом решения является таблица значений той или иной величины во всей (а порой и не во всей) области тела.

В области реализации различных методов анализа НДС эластостатических тел с учетом влияния объемных сил можно выделить следующие исследования. В статье [1] исследовалось изотропное упругое тело, ограниченное концентрическими сферами и находящееся под действием осесимметричных нестационарных объемных сил. В работах [2, 3], используя разложения компонент вектора перемещений в ряды по окружной и радиальной координатам, получены аналитические решения задач о равновесии толстостенных трансверсально-изотропных составных сфер, находящихся под действием внутреннего давления и массовых сил. В работе [4] исследовались вынужденные деформации, возникающие от воздействий поверхностных и объемных сил. В [5] в дополнение к двум комплексным потенциалам Колосова–Мусхелишвили предложен третий потенциал, учитывающий влияние массовых сил. Приводятся аналитические решения некоторых задач плоской деформации. Работа [6] посвящена развитию метода ортогональных проекций. Исследовались задачи теории упругости с участием объемных и поверхностных сил в функциональных энергетических пространствах тензоров напряжений и деформаций.

В работах [7, 8] редуцирован метод определения напряженно-деформированного состояния изотропных упругих тел от действия объемных сил непотенциального характера.

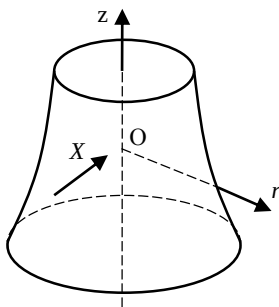
Для трансверсально-изотропных тел, ограниченных коаксиальными поверхностями вращения, средствами метода граничных состояний решены первая основная [9] и вторая основная [10] задачи теории упругости при одновременном действии на тело массовых сил. По идентичной методике решена контактная задача [11].

Определению упругих полей от действия осесимметричных массовых сил на трансверсально-изотропное тело вращения вкупе с действием поверхностных сил и установившегося поля температур посвящены работы [12, 13].

Цель данной работы – развитие аналитического метода определения НДС, предложенного в работе [7], на класс трансверсально-изотропных тел вращения, находящихся под действием объемных сил, заданных по циклическому закону. Объемные силы носят неосесимметричный характер и зависят от трех цилиндрических координат.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается упругое равновесие трансверсально-изотропного тела, ограниченного одной или несколькими коаксиальными поверхностями вращения (рис. 1), под действием неосесимметричных объемных сил  $X = \{R, Q, Z\}$ , заданных по циклическому закону. Ось анизотропии трансверсально-изотропного тела совпадает с геометрической осью вращения  $z$ .



**Рис. 1.** Трансверсально-изотропное тело вращения

**Fig. 1.** A transversely isotropic body of revolution

Задача состоит в определении напряженно-деформированного состояния, возникающего в теле под действием объемных сил.

## 2. Определяющие соотношения

В общем случае деформации трансверсально-изотропного тела в цилиндрической системе координат  $r, \theta, z$  имеют место следующие соотношения.



Дифференциальные уравнение равновесия [14]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + Q &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{zr}}{r} + Z &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

Соотношения Коши:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \\ \gamma_{zr} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}.\end{aligned}\quad (2)$$

Уравнения совместности деформаций [15]:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta}) &= 0; \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \varepsilon_{z\theta}}{\partial \theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial z} &= 0; \\ -\frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial (r \varepsilon_{z\theta})}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zr}}{\partial \theta}) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta \partial z} &= 0; \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{z\theta}}{\partial \theta \partial z} - \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zr}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial \theta \partial z} + r \frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{z\theta}}{\partial z}) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial \theta}) &= 0; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial r \partial z} &= 0.\end{aligned}\quad (3)$$

Обобщенный закон Гука [14]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E_r} (\sigma_r - \nu_r \sigma_\theta) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z; \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E_z} [\sigma_z - \nu_z (\sigma_r + \sigma_\theta)]; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E_r} (\sigma_\theta - \nu_r \sigma_r) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z; \\ \gamma_{zr} &= \frac{1}{G_z} \tau_{zr}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{1}{G_z} \tau_{z\theta}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_r} \tau_{r\theta} = \frac{2(1+\nu_r)}{E_r} \tau_{r\theta}.\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь:  $u, v, w$  – компоненты вектора перемещения вдоль осей  $r, \theta, z$  соответственно;  $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{r\theta}, \gamma_{zr}, \gamma_{z\theta}$  – компоненты тензора деформаций;  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{zr}, \tau_{z\theta}$  – компоненты тензора напряжений;  $R, Q, Z$  – компоненты вектора объемных сил  $\mathbf{X}$  вдоль соответствующих осей;  $E_z$  и  $E_r$  – модули упругости соответственно в направлении оси  $z$  и в плоскости изотропии;  $\nu_z$  – коэффициент Пуассона, характеризующий сжатие вдоль оси  $r$  при растяжении вдоль оси  $z$ ;

$\nu_r$  – коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сжатие в плоскости изотропии при растяжении в этой же плоскости;  $G_r$  и  $G_z$  – модули сдвига в плоскости изотропии и перпендикулярной к ней.

### 3. Общее решение

В работе [14] методом интегральных наложений установлена зависимость между пространственным напряженно-деформированным состоянием упругого трансверсально-изотропного тела вращения и некоторыми вспомогательными двумерными состояниями, компоненты которых зависят от двух координат  $z$  и  $y$  (переменных). Ось  $\eta$  перпендикулярна плоскости  $zy$ . В качестве плоских вспомогательных состояний используется плоская деформация  $\mathbf{u}^{pl} = \{u_y^{pl}, u_\eta^{pl}, u_z^{pl}\}$ , возникающая в бесконечных цилиндрах, имеющих в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную плоскости  $zy$  (направление  $\eta$ ).

Переход к пространственному состоянию в цилиндрических координатах осуществляется по зависимостям

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^\pi (u_y^{pl} + u_\eta^{pl}) \cos[(n-1)\beta] d\beta + \int_0^\pi (u_y^{pl} - u_\eta^{pl}) \cos[(n+1)\beta] d\beta \right); \\ v_n &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^\pi (u_y^{pl} + u_\eta^{pl}) \cos[(n-1)\beta] d\beta - \int_0^\pi (u_y^{pl} - u_\eta^{pl}) \cos[(n+1)\beta] d\beta \right); \\ w_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u_z^{pl} \cos(n\beta) d\beta; \quad y = r \cos(\beta). \\ u &= \sum_{n=a}^b [u_n \cos(n\theta) + u_n \sin(n\theta)]; \\ v &= \sum_{n=a}^b [-v_n \sin(n\theta) + v_n \cos(n\theta)]; \\ w &= \sum_{n=a}^b [w_n \cos(n\theta) + w_n \sin(n\theta)], \end{aligned} \quad (5)$$

где  $a$  и  $b$  – пределы суммирования.

Деформации вычисляются через соотношения Коши (2), напряжения – через закон Гука (3), объемные силы – из уравнений равновесия (1).

### 4. Метод решения

Определение упругого состояния анизотропного тела осуществляется средствами, схожими со средствами метода граничных состояний (МГС) [16]. В качестве базиса в пространстве внутренних состояний  $\Xi$  принимаются наборы

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots\}, \quad \xi_k = \{u_i^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}, \sigma_{ij}^{(k)}, X_i^{(k)}\}.$$

В работах [12, 13] изложен метод определения напряженно-деформированного состояния изотропных тел от действия неконсервативных непрерывных объемных сил. Здесь используем тот же подход.

Для построения поля перемещений для тела от действия объемных сил для плоских вспомогательных состояний применяется фундаментальная система многочленов  $y^\alpha z^\beta$ , которую можно поместить в любую позицию вектора перемещения  $\mathbf{u}^{pl}(y, z)$ , образуя некоторое допустимое упругое состояние:

$$\mathbf{u}^{pl} = \begin{Bmatrix} u_y^{pl} \\ u_\eta^{pl} \\ u_z^{pl} \end{Bmatrix} \in \left\{ \begin{Bmatrix} y^\alpha z^\beta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ y^\alpha z^\beta \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ y^\alpha z^\beta \end{Bmatrix} \right\}.$$

Далее согласно (5) и (6) определяются компоненты вектора перемещения  $\mathbf{u}(r, \theta, z)$  пространственного состояния, и по цепочке (2), (4), (1) определяются соответствующие тензоры деформаций, напряжений и объемные силы.

Осуществляя перебор всевозможных вариантов в пределах  $\alpha + \beta \leq n$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), можно получить множество состояний и сформировать конечномерный базис, позволяющий разложить произвольный вектор непрерывных объемных сил в ряд Фурье по его элементам при увеличении числа  $n$  до бесконечности.

После построения базиса состояний проводится его ортонормирование, используя рекурсивно-матричный алгоритм ортогонализации [17]. Алгоритм реализует процесс ортогонализации Грама–Шмидта, в котором перекрестные скалярные произведения (например, для 1-го и 2-го состояний) вычисляются по формуле

$$(\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}) = \int_V \mathbf{X}^{(1)} \cdot \mathbf{X}^{(2)} dV;$$

$$\mathbf{X}^{(k)} = X_i^{(k)} = \{R^{(k)}(r, \theta, z), Q^{(k)}(r, \theta, z), Z^{(k)}(r, \theta, z)\}.$$

Любой непрерывный вектор объемных сил может быть представлен в виде ряда Фурье, разложенного по элементам ортонормированного базиса:

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{X}^{(k)}; \quad c_k = (\mathbf{X}, \mathbf{X}^{(k)}), \quad (7)$$

где  $\mathbf{X} = \{R, Q, Z\}$  – заданные объемные силы.

Каждому базисному вектору  $\mathbf{X}^{(k)}$  соответствуют вектор перемещения и тензоры деформаций и напряжений, в совокупности образующие внутреннее состояние от действия объемных сил

$$\xi_0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k,$$

или в развернутом виде:

$$u_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^{(k)}; \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^{(k)}; \quad \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^{(k)}; \quad X_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_i^{(k)}. \quad (8)$$

Тестирование коэффициентов Фурье осуществляется подстановкой объемных сил одного из базисных элементов в качестве заданных, при этом должны выполняться условия  $c_n = 1$ ,  $n$  – номер тестируемого базисного элемента, остальные коэффициенты Фурье должны равняться нулю.

## 5. Решение задач

Исследуем упругое равновесие трансверсально-изотропного кругового цилиндра из горной породы алевролита крупного темно-серого [18]. После процедуры обезразмеривания параметров задачи (с масштабным коэффициентом  $\eta^* = 10^5$  кгс/см<sup>2</sup>), аналогия которой представлена в работе [19], упругие характеристики материала составили:  $E_z = 6.21$ ;  $E_r = 5.68$ ;  $G_r = 2.29$ ;  $G_z = 2.55$ ;  $\nu_z = 0.22$ ;  $\nu_r = 0.24$ . Цилиндр занимает область  $V = \{(z, r) \mid 0 \leq r \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$ .

Для решения задачи, когда все три компоненты заданного вектора объемных сил не равны нулю, требуется довольно большой «отрезок» базиса внутренних состояний. В этом случае целесообразно воспользоваться принципом независимости действия сил и решить три отдельных задачи, в каждой из которых заданы  $\mathbf{X} = \{R, 0, 0\}$ ,  $\mathbf{X} = \{0, Q, 0\}$ ,  $\mathbf{X} = \{0, 0, Z\}$ , а полученные упругие поля сложить.

При практической реализации приема решения задач и его тестировании при различных видах функций заданных объемных сил оказалось, что не для любого вида функций объемных сил существует решение. Возможность получения строгого или приближенного решения зависит от способа формирования базиса.

В общем случае формирования базиса внутренних состояний в выражениях (6) суммирование осуществляется от  $a = 0$ , до  $b = \infty$ . При построении базиса необходимо стремиться к наибольшей простоте вида функций, описывающих компоненты упруго поля. Поэтому рассмотрим сначала базис, формируемый из левых частей выражений (6), с пределами суммирования  $a = 0$  и  $b = 1$ :

$$u = \sum_{n=a}^b [u_n \cos(n\theta)]; \quad v = \sum_{n=a}^b [-v_n \sin(n\theta)]; \quad w = \sum_{n=a}^b [w_n \cos(n\theta)]. \quad (9)$$

В данном случае задача будет разрешима, если заданные объемные силы  $R, Q, Z$  содержат тригонометрические функции  $\cos \theta, \sin \theta, \cos \theta$  соответственно, например:

$$R = r^m z^k (1 - p \cos \theta); \quad m, k \in N; \quad p \in Z. \quad (10)$$

В противном случае скалярные произведения и коэффициенты Фурье (7) будут равны нулю.

Если формировать базис из правых частей выражений (6) с пределами суммирования  $a = 0$  и  $b = 1$ :

$$u = \sum_{n=a}^b [u_n \sin(n\theta)]; \quad v = \sum_{n=a}^b [v_n \cos(n\theta)]; \quad w = \sum_{n=a}^b [w_n \sin(n\theta)], \quad (11)$$

то приближенное решение возможно получить, если объемные силы  $R, Q, Z$  содержат тригонометрические функции  $\sin \theta, \cos \theta, \sin \theta$  соответственно.

Если в выражениях (9) и (11) использовать пределы суммирования  $a = 1$  и  $b = 1$ , то объемные силы вида (10) восстановить нельзя, в этом случае приближенное решение задачи ищется для функции вида  $r^m z^k p \cos \theta$  или  $r^m z^k p \sin \theta$ .

Если объемные силы имеют вид  $r^m z^k (\cos \theta + \sin \theta)$ , то уже необходимо использовать выражения (6) в полной мере с пределами суммирования  $a = 0$  и  $b = 1$ . При этом возможно получение не только приближенных, но и строгих решений.

Для последнего случая и приведем пример решения задачи, когда задана объемная сила

$$\mathbf{X} = \{r^3 z^2 (\sin \theta + \cos \theta), 0, 0\}. \quad (12)$$

После построения базиса по соотношениям (6), исключения базисных элементов, для которых  $\mathbf{X} = 0$ , а также линейно зависимых элементов, в процессе ортогонализации, базисные компоненты объемных сил примут вид, представленный в таблице (показано 7 элементов).

**Ортонормированный базисный компонент объемной силы**

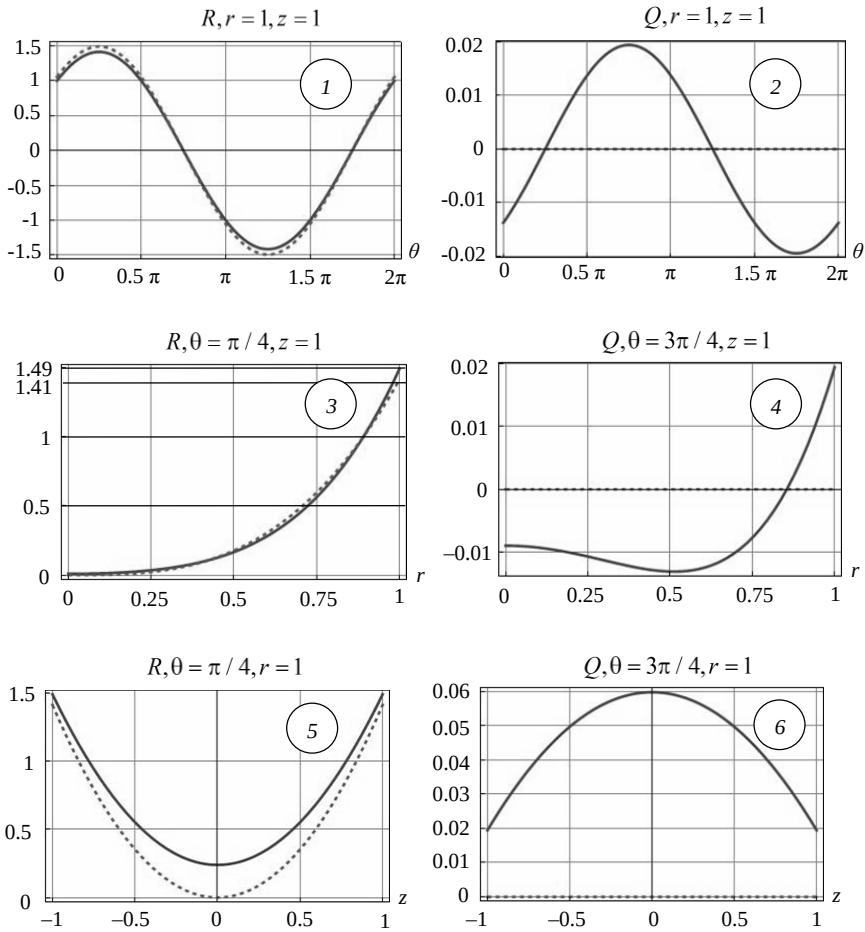
| Номер элемента | $R$                                  | $Q$                                  | $Z$                                |
|----------------|--------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|
| $\xi_1$        | $-0.2(\cos \theta + \sin \theta)$    | $-0.2(\cos \theta - \sin \theta)$    | 0                                  |
| $\xi_2$        | 0                                    | 0                                    | -0.282                             |
| $\xi_3$        | $-0.172z(\cos \theta + \sin \theta)$ | $-0.172z(\cos \theta - \sin \theta)$ | 0                                  |
| $\xi_4$        | 0                                    | 0                                    | -0.244z                            |
| $\xi_5$        | -0.399r                              | 0                                    | 0                                  |
| $\xi_6$        | 0                                    | -0.399r                              | 0                                  |
| $\xi_7$        | 0                                    | 0                                    | -0.399r(\cos \theta + \sin \theta) |

Используем базис внутренних состояний из 50 элементов. Ненулевые коэффициенты Фурье:  $c_1 = -1.3368$ ;  $c_8 = -1.1957$ ;  $c_{13} = -1.8712$ ;  $c_{14} = 0.4678$ ;  $c_{32} = -1.6736$ ;  $c_{33} = 0.4184$ ;  $c_{38} = -0.2684$ ;  $c_{39} = 0.0671$ . Решение формируется соотношениями (8).

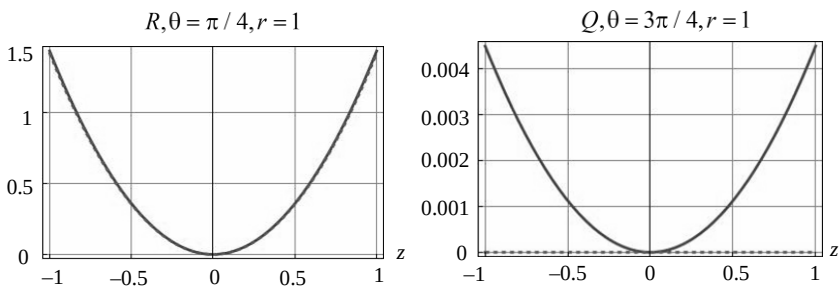
Оценка точности осуществляется сопоставлением заданных объемных сил (рис. 2, штриховая линия) с восстановленными в результате решения (сплошная линия).

Согласно первому графику рис. 2, максимальная погрешность находится в точках  $\pi/4$  и  $5\pi/4$ , поэтому для оценки точности восстановленной силы  $R$  в зависимости от  $r$  и  $z$  целесообразно провести для сечения с угловой координатой  $\pi/4$  (графики 3, 5 на рис. 2). На втором графике рис. 2 максимальная погрешность находится в точке  $3\pi/4$ , поэтому верификация силы  $Q$  в зависимости от  $r$  и  $z$  рассматривается в сечении с угловой координатой  $3\pi/4$  (графики 4, 6 на рис. 2).

Максимальная погрешность задачи составила 25% и определена в точке  $(1, \pi/4, 0)$  (график 5 на рис. 2). Погрешность преодолевается путем увеличения числа используемых элементов базиса. При использовании базиса из 70 элементов добавляется два ненулевых коэффициента Фурье:  $c_{69} = -0.24$ ;  $c_{70} = 0.06$ , – и точность решения значительно повышается. На рис. 3 изображены графики 5 и 6 рис. 2 при 70 удержанных элементах базиса.



**Рис. 2.** Верификация объемных сил при 50 удержанных элементах базиса  
**Fig. 2.** Verification of body forces with 50 elements of the basis kept



**Рис. 3.** Верификация объемных сил при 70 удержанных элементах базиса  
**Fig. 3.** Verification of body forces with 70 elements of the basis kept

Окончательное внутреннее состояние  $\xi_0$  построено на 70 базисных элементах и имеет вид:

$$\begin{aligned} u_0 &= (31.123z^4 - 1369.44r^2z^4 - 1971.16r^4z^4 + 165.557z^6 + \\ &\quad + 1390.77r^2z^6 - 74.417z^8)(\cos\theta + \sin\theta) \cdot 10^{-5}; \\ v_0 &= (31.123z^4 - 124.494r^2z^4 + 103.745r^4z^4 + 165.557z^6 + \\ &\quad + 264.805r^2z^6 - 74.417z^8)(\cos\theta - \sin\theta) \cdot 10^{-5}; \\ w_0 &= (500.016rz^5 + 1250.04r^3z^5 - 436.69rz^7)(\cos\theta + \sin\theta) \cdot 10^{-5}; \\ R_0 &= (-952.381z^2 + 4190.8r^2z^2 + 60317.5r^4z^2)(\cos\theta + \sin\theta) \cdot 10^{-5}; \\ Q_0 &= (-952.381z^2 + 3809.5r^2z^2 - 3174.6r^4z^2)(\cos\theta - \sin\theta) \cdot 10^{-5}; \\ Z_0 &= 0. \end{aligned}$$

Приближенное решение можно получить и для объемной силы вида  $r^m(z+p)^k \cos\theta$  или  $r^m(z+p)^k \sin\theta$ , а при  $m=k=2$  – строгое.

Если при  $\sin$  и  $\cos$  в выражении (12) разные коэффициенты, например  $r^m z^k (p \sin\theta + l \cos\theta)$ , то решение получить не удастся. Это связано с одинаковыми коэффициентами (единица) при соответствующих функциях в базисных выражениях (6).

В случае, когда объемные силы зависят от  $\sin(n\theta)$  или  $\cos(n\theta)$ ,  $n=2, 3, \dots$ , в выражениях (6), (9), (11) необходимо использовать пределы суммирования  $a=b=n$ .

Рассмотрим функцию, описывающую, например, объемную силу  $R$  следующего вида:  $R = r^m z^k p \cos(n\theta)$ . Особенность решения при  $n > 1$  заключается в том, что восстановленные объемные силы отличаются по амплитуде от заданных на некоторую константу – корректирующий коэффициент  $\kappa$ , который вычисляется через заданную  $R$  и восстановленную  $R_0$  компоненты объемных сил для фиксированных координат  $r$  и  $z$ :

$$\kappa = \frac{R}{R_0} \Big|_{r,z}.$$

Затем все остальные характеристики полученного упругого поля умножаются на коэффициент  $\kappa$ .

Пусть задана объемная сила  $\mathbf{X} = \{0, r^2 z \cos(3\theta), 0\}$ . Базис формируется с помощью выражений (11), и для решения данной задачи используется 76 элементов базиса (коэффициенты Фурье приводить не будем). Результат представлен графически на рис. 4 (показаны значения объемных сил  $R$ ,  $Q$  на поверхности  $r=1, z=1$ ).

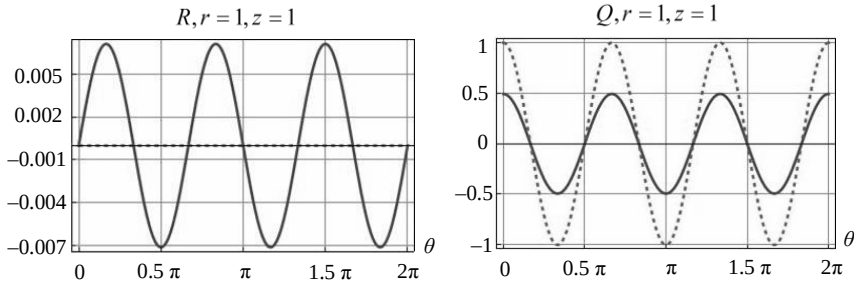
Восстановленные выражения для объемных сил:

$$\begin{aligned} R_0 &= (0.25r^2z - 2r^4z + 5.4r^6z - 6r^8z + 2.357r^{10}z)\sin(3\theta); \\ Q_0 &= (0.25r^2z + 2r^4z - 5.4r^6z + 6r^8z - 2.357r^{10}z)\cos(3\theta); Z_0 = 0. \end{aligned}$$

Корректирующий коэффициент

$$\kappa = r^2 / (0.25r^2 + 2r^4 - 5.4r^6 + 6r^8 - 2.357r^{10}).$$

В данной задаче  $\kappa$  зависит только от  $r$ .



**Рис. 4.** Верификация объемных сил в задаче с коэффициентом  
**Fig. 4.** Verification of body forces in the problem with a coefficient

Окончательно решение имеет вид:  $\xi = \kappa \xi_0$ . При  $r=1$ ,  $z=1$  коэффициент  $\kappa = 2.029$  и погрешность для  $R$  увеличилась, однако результат по-прежнему удовлетворителен (максимальная погрешность составила 1.5%).

### Заключение

В работе решение задачи теории упругости от действия объемных сил строится следующим образом. Задается зависимость вектора перемещения плоского вспомогательного состояния от координат  $y^\alpha z^\beta$ , и на его основе определяется вектор перемещения пространственного состояния, зависящего от координат  $r, \theta, z$ . Для такого вектора по соотношению Коши определяется тензор деформаций, из закона Гука – тензор напряжений, а из уравнения равновесия – объемные силы. Этим строится строгое частное решение задачи, соответствующее заданной в каждой точке тела функции перемещения. Перебирая  $\alpha + \beta \leq n$  ( $n = 1, 2, 3 \dots$ ), строится множество строгих частных решений задачи линейной теории упругости: векторы перемещения  $\mathbf{u}_k$ , тензоры деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ , тензоры напряжений  $\boldsymbol{\sigma}_k$ , векторы объемных сил  $\mathbf{X}_k$ . Оставляя среди этих решений только линейно независимые и осуществляя их ортогонализацию, получаем базис, по которому соответствующие векторы или тензоры разлагаются в ряды с одинаковыми коэффициентами (7). Поэтому изложенный подход позволяет сразу строить решение задачи с заданными объемными силами.

Выбор способа конструирования базиса зависит от вида заданной функции компоненты объемных сил. Для решения задач требуется довольно большой базис внутренних состояний, однако при формировании рядов число ненулевых коэффициентов Фурье невелико.

Таким образом, в работе сформулирован подход решения задачи от действия объемных сил, заданных по циклическому закону. Компоненты упругого поля зависят от всех трех координат и носят неосесимметричный циклический характер.

### Список источников

1. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Нестационарное осесимметричное деформирование упругой толстостенной сферы под действием объемных сил // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56, № 6. С. 59–69.



2. Фукалов А.А. Задачи об упругом равновесии составных толстостенных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил и внутреннего давления, и их приложения // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20–24 августа 2015. Казань, 2015. С. 3951–3953.
3. Зайцев А.В., Фукалов А.А. Точные аналитические решения задач о равновесии упругих анизотропных тел с центральной и осевой симметрией, находящихся в поле гравитационных сил, и их приложения к задачам геомеханики // Математическое моделирование в естественных науках. 2015. Т. 1. С. 141–144.
4. Агаханов Э.К. О развитии комплексных методов решения задач механики деформируемого твердого тела // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2013. № 2 (29). С. 39–45.
5. Шарафутдинов Г.З. Функции комплексного переменного в задачах теории упругости при наличии массовых сил // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, № 1. С. 69–87.
6. Стружанов В.В. О решении краевых задач теории упругости методом ортогональных проекций // Математическое моделирование систем и процессов. 2004. № 12. С. 89–100.
7. Кузьменко В.И., Кузьменко Н.В., Левина Л.В., Пеньков В.Б. Способ решения задач изотропной теории упругости с объемными силами в полиномиальном представлении // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83, вып. 1. С. 84–94. doi: 10.17223/19988621/61/5
8. Пеньков В.Б., Левина Л.В., Новикова О.С. Аналитическое решение задач эластостатики односвязного тела, нагруженного неконсервативными объемными силами. Теоретическое и алгоритмическое обеспечение // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. 2020. Т. 24, № 1. С. 56–73. doi: 10.14498/vsgtu1711.
9. Иванычев Д.А. Метод граничных состояний в решении первой основной задачи теории анизотропной упругости с массовыми силами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 66. С. 96–111. doi: 10.17223/19988621/66/8
10. Иванычев Д.А. Метод граничных состояний в решении второй основной задачи теории анизотропной упругости с массовыми силами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 61. С. 45–60. doi: 10.17223/19988621/61/5
11. Иванычев Д.А. Решение контактной задачи теории упругости для анизотропных тел вращения с массовыми силами // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 2. С. 49–62. doi: 10.15593/perm.mech/2019.2.05
12. Ivanychev D.A., Levina E.Yu. Solution of thermo elasticity problems for solids of revolution with transversal isotropic feature and a body force // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1348. Art. 012058. 15 p. doi: 10.1088/17426596/1348/1/012058
13. Ivanychev D.A. The method of boundary states in solving problems of thermoelasticity in the presence of mass forces // Proceedings of the 1st International Conference on Control Systems, Mathematical Modelling, Automation and Energy Efficiency. SUMMA 2019. 2019. P. 83–87. doi: 10.1109/SUMMA48161.2019.8947505
14. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного). М. : Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1978. 464 с.
15. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М. : Госиздат техн.-теорет. лит., 1955. 491 с.
16. Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. 2001. Т. 2, № 2. С. 115–137.
17. Саталкина Л.В. Нарращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоемкости вычислений // Сборник тезисов докладов научной конференции

- студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета. Липецк, 2007. С. 130–131.
18. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. 2-е изд. М. : Наука, 1977. 416 с.
  19. Левина Л.В., Новикова О.С., Пеньков В.Б. Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела // Вестник Липецкого государственного технического университета. 2016. № 2 (28). С. 16–24.

## References

1. Vestyak V.A., Tarlakovskiy D.V. (2015) Nestatsionarnoe osesimmetrichnoe deformirovanie uprugoy tolstostennoy sfery pod deystviyem ob'yomnykh sil [Unsteady axisymmetric deformation of an elastic thick-walled sphere under the action of volume forces]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 56(6). pp. 59–69.
2. Fukalov A.A. (2015) Zadachi ob uprugom ravновесии sostavnykh tolstostennykh transversal'no-izotropnykh sfer, nakhodyashchikhsya pod deystviem massovykh sil i vnutrennego davleniya, i ikh prilozheniya [Problems on elastic equilibrium of composite thick-walled transversely isotropic spheres under the action of mass forces and internal pressure, and their applications]. *XI All-Russian Congress on Fundamental Problems in Theoretical and Applied Mechanics, Kazan, 2015*. pp. 3951–3953.
3. Zaytsev A.V., Fukalov A.A. (2015) Tochnye analiticheskie resheniya zadach o ravновесии uprugikh anizotropnykh tel s tsentral'noy i osevoy simmetriey, nakhodyashchikhsya v pole gravitatsionnykh sil, i ikh prilozheniya k zadacham geomekhaniki [Exact analytical solutions of equilibrium problems for elastic anisotropic bodies with central and axial symmetry in the field of gravitational forces, and their applications to problems of geomechanics]. *Matematicheskoe modelirovanie v estestvennykh naukakh*. 1. pp. 141–144.
4. Agakhanov E.K. (2013) O razvitiі kompleksnykh metodov resheniya zadach mekhaniki deformiruемого твердого тела [About development of complex decision methods of the problems of deformable solid body mechanics]. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskiye nauki – Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences*. 2(29). pp. 39–45. DOI: 10.21822/2073-6185-2013-29-2-39-45.
5. Sharafutdinov G.Z. (2009) Funktsii kompleksnogo peremennogo v zadachakh teorii uprugosti pri nalichii massovykh sil [Functions of a complex variable in problems of elasticity theory in the presence of mass forces]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 73(1). pp. 69–87.
6. Struzhanov V.V. (2004) O reshenii kraevykh zadach teorii uprugosti metodom ortogonal'nykh proektsiy [On the solution of boundary value problems in the theory of elasticity by the method of orthogonal projections]. *Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov*. 12. pp. 89–100.
7. Kuz'menko V.I., Kuz'menko N.V., Levina L.V., Pen'kov V.B. (2019) Sposob resheniya zadach izotropnoy teorii uprugosti s ob'yomnymi silami v polinomial'nom predstavlenii [A method for solving problems of the isotropic theory of elasticity with body forces in a polynomial representation]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 83(1). pp. 84–94. DOI: 10.17223/19988621/61/5.
8. Pen'kov V.B., Levina L.V., Novikova O.S. (2020) Analiticheskoe reshenie zadach elastostatiki odnosvyaznogo tela, nagruzhennogo nekonservativnymi ob'yomnymi silami. Teoreticheskoe i algoritmicheskoe obespechenie [Analytical solution of problems of elastostatics of a simply connected body loaded with non-conservative volumetric forces. Theoretical and algorithmic support]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya «Fiziko-*

- matematicheskie nauki» – Journal of Samara State Technical University, Series Physical and Mathematical Sciences.* 24(1). pp. 56–73. DOI: 10.14498/vsgtu1711.
9. Ivanychev D.A. (2020) Metod granichnykh sostoyaniy v reshenii pervoy osnovnoy zadachi teorii anizotropnoy uprugosti s massovymi silami [A method of boundary states in a solution to the first fundamental problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i. mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 66. pp. 96–111. DOI: 10.17223/19988621/66/8.
  10. Ivanychev D.A. (2019) Metod granichnykh sostoyaniy v reshenii vtoroy osnovnoy zadachi teorii anizotropnoy uprugosti s massovymi silami [A method of boundary states in a solution to the second fundamental problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i. mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 61. pp. 45–60. DOI: 10.17223/19988621/61/5.
  11. Ivanychev D.A. (2019) Resheniye kontaktnoy zadachi teorii uprugosti dlya anizotropnykh tel vrashcheniya s massovymi silami [The contact problem solution of the elasticity theory for anisotropic rotation bodies with mass forces]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin.* 2. pp. 49–62. DOI: 10.15593/pern.mech/2019.2.05.
  12. Ivanychev D.A., Levina E.Yu. (2019) Solution of thermo elasticity problems for solids of revolution with transversal isotropic feature and a body force. *Journal of Physics: Conference Series.* 1348. Article 012058. pp. 1–15. DOI: 10.1088/17426596/1348/1/012058.
  13. Ivanychev D.A. (2019) The method of boundary states in solving problems of thermoelasticity in the presence of mass forces. *Proceedings of the 1st International Conference on Control Systems, Mathematical Modelling, Automation and Energy Efficiency. SUMMA 2019.* pp. 83–87. DOI: 10.1109/SUMMA48161.2019.8947505.
  14. Aleksandrov A.Ya., Solov'ev Yu.I. (1978) *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti (primeneniye metodov teorii funktsii kompleksnogo peremennogo)* [Three-dimensional problems of the theory of elasticity (application of methods of the theory of functions of a complex variable)]. Moscow: Nauka.
  15. Lur'e A.I. (1955) *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti* [Three-dimensional problems of the theory of elasticity]. Moscow: Gostekhizdat.
  16. Pen'kov V.B., Pen'kov V.V. (2001) Metod granichnykh sostoyaniy dlya resheniya zadach lineynoy mekhaniki [A method of boundary states for solving problems of linear mechanics]. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal.* 2(2). pp. 115–137.
  17. Satalkina L.V. (2007) Narashchivaniye bazisa prostranstva sostoyaniy pri zhestkikh ogranicheniyakh k energoyomkosti vychisleniy [Expansion of the state space basis with severe limitations on the energy consumption of computations]. *Book of Abstracts of Scientific Conference for Students and Postgraduate Students of Lipetsk State Technical University.* pp. 130–131.
  18. Lekhnitskiy S.G. (1977) *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [Theory of elasticity of an anisotropic body]. Moscow: Nauka.
  19. Levina L.V., Novikova O.S., Pen'kov V.B. (2016) Polnparametricheskoye resheniye zadachi teorii uprugosti odnosvyaznogo ograniченного tela [Full-parameter solution to the problem of the theory of elasticity of a simply connected bounded body]. *Vestnik Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Bulletin of LGTU.* 2(28). pp. 16–24.

**Сведения об авторе:**

**Иванычев Дмитрий Алексеевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей механики Липецкого государственного технического университета, Липецк, Россия. E-mail: Lsivdml@mail.ru

**Information about the author:**

**Ivanychev Dmitriy A.** (Candidate of Physics and Mathematics, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation). E-mail: lsivdmal@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 20.03.2021; принята к публикации 19.05.2022*

*The article was submitted 20.03.2021; accepted for publication 19.05.2022*

Научная статья

УДК 622.276.26, 532.54

doi: 10.17223/19988621/77/8

## **Аналитическая модель притока жидкости для многоствольной скважины в анизотропном пласте**

**Алексей Алексеевич Орлов<sup>1</sup>, Анастасия Сергеевна Русских<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> *Томский политехнический университет, Томск, Россия, orlovaa@tpu.ru*

<sup>2</sup> *ООО «Недра-Консалт», Тюмень, Россия, anastasiya\_russkih@bk.ru*

**Аннотация.** Представлена разработанная методика аналитического расчета и экспресс-оценки притока жидкости к многоствольной скважине. Приведены результаты верификации данной методики и результаты расчета с ее помощью предельной длины стволов скважины, а также угла между ними, обеспечивающих максимальную продуктивность и экономическую эффективность добычи нефти.

**Ключевые слова:** фильтрация жидкости, многоствольная скважина, приток жидкости, контур питания, аналитическая модель

**Для цитирования:** Орлов А.А., Русских А.С. Аналитическая модель притока жидкости для многоствольной скважины в анизотропном пласте // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 77. С. 101–109. doi: 10.17223/19988621/77/8

Original article

## **An analytical model of the fluid influx for a multilateral well in an anisotropic formation**

**Aleksey A. Orlov<sup>1</sup>, Anastasiya S. Russkikh<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> *Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation, orlovaa@tpu.ru*

<sup>2</sup> *LLC “Nedra-Consult”, Tyumen, Russian Federation, anastasiya\_russkih@bk.ru*

**Abstract.** Depletion and deterioration of the structure of reserves in the fields of Western Siberia requires the involvement in the development and operation of hydrocarbon deposits represented by reservoirs with secondary filtration-volumetric properties and complex heterogeneous structure. A technology, which is successfully applied by resource companies, uses multilateral wells. Development of deposits using such wells is complicated by the choice of the optimal layout and development system for a particular field. Our goal is to propose a common approach to the creation of an optimal system for the development of oil fields.

To solve this problem, it is reasonable to develop an analytical calculation method that performs express assessment of the fluid inflow to a dual-lateral well avoiding the use of multivariate and time-consuming calculations by hydrodynamic models built in a simulator. In this work, such an analytical method is developed and verified using the actual geological and geophysical data on the productive Neocomian deposits of the Severo-Ostrovnoye field in Khanty-Mansi autonomous okrug.

**Keywords:** liquid filtration, multilateral well, fluid influx, external boundary, analytical model

**For citation:** Orlov, A.A., Russkikh, A.S. (2022) An analytical model of the fluid influx for a multilateral well in an anisotropic formation. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 101–109. doi: 10.17223/19988621/77/8

## Введение

Истощение и ухудшение структуры запасов на месторождениях Западной Сибири требует вовлечения в разработку и эксплуатацию залежей углеводородов, представленных коллекторами с вторичными фильтрационно-емкостными свойствами и сложным и неоднородным строением.

Вовлечение в разработку подобных коллекторов требует применения новых подходов и технологий, позволяющих увеличить добычу нефти путем увеличения охвата дренируемых запасов и одновременно сократить экономические издержки. Одной из таких технологий, успешно внедряемых в добывающих компаниях, является технология с применением многоствольных скважин (скважин со сложным профилем), которые в условиях анизотропии (неоднородности) подобных коллекторов экономически эффективнее, чем вертикальные скважины [1].

Разработка залежей с использованием скважин подобной конфигурации осложнена выбором оптимальной схемы их размещения и системы разработки для конкретного месторождения. В связи с этим нашей целью являлась выработка общего подхода к формированию оптимальной системы разработки месторождений нефти, включающей подбор схемы размещения и наиболее эффективных режимов эксплуатации скважин.

Для решения данной проблемы целесообразно разработать методику аналитического расчета, позволяющую проводить экспресс-оценку притока жидкости к двуствольной скважине, не прибегая к многовариантным и затратным по времени расчетам с использованием гидродинамических моделей.

## Объект исследования

На сегодняшний день фильтрация жидкости к вертикальной скважине достаточно полно изучена как российскими, так и зарубежными специалистами. Однако, как уже упоминалось выше, разработка и эксплуатация залежей, приуроченных к коллекторам с вторичными фильтрационно-емкостными свойствами, вертикальными скважинами неэффективна. Приток к скважинам сложного профиля (с несколькими стволами) остается предметом изучения современных исследователей.

Одними из первых формулу притока жидкости для многоствольной скважины получили Ю.П. Борисов, В.П. Пилатовский и В.П. Табаков [2]:

$$Q = \frac{2\pi\varepsilon\Delta P}{\ln R_k - \ln \frac{L \cdot \sin \alpha}{4} + \frac{h}{L \cdot n} \ln \frac{h \cdot \sin \alpha}{2\pi r_c}}, \quad (1)$$

$$\varepsilon = \frac{k \cdot h}{\mu}$$

где  $Q$  – дебит жидкости многоствольной скважины,  $k$  – проницаемость пласта,  $h$  – толщина пласта,  $\Delta P$  – депрессия на пласт,  $\mu$  – вязкость жидкости,  $\varepsilon$  – коэффициент гидропроводности пласта,  $r_c$  – радиус скважины,  $R_k$  – радиус контура питания,  $\alpha$  – угол наклона горизонтального ствола от вертикали,  $L$  – длина стволов,  $n$  – количество стволов.

В работе [3] задача расчета фильтрации жидкости к многоствольной скважине решена без учета анизотропии пласта в вертикальном направлении. По этой причине, как отмечают авторы методики, расчет может давать заниженные результаты по сравнению с фактическими данными о работе скважин.

Одной из наиболее применяемых на практике аналитических моделей притока жидкости к многоствольной скважине является модель В.Г. Григулецкого и Б.А. Никитина [2]:

$$Q = \frac{2\pi\varepsilon\Delta P}{\ln \frac{4R_k}{L}} + \frac{\beta \cdot h}{L \cdot n} \cdot \ln \frac{\beta \cdot h}{2\pi r_c} \quad (2)$$

где  $\beta$  – анизотропия проницаемости пласта.

Методика [3] представляет собой частный случай решения [2] той же задачи, вследствие чего обе методики имеют существенный недостаток – не учитывают влияние области дренирования стволов друг на друга.

Для расчета притока жидкости к многоствольной скважине также используется полуэмпирическая формула В.П. Меркулова [4]:

$$Q = \frac{2\pi\varepsilon\Delta P}{\pi b^* + h \cdot \left( \ln \left( \frac{a^* + c^*}{2c^*} \right) + \lambda \right) + l \ln \left( \frac{2R_k}{n(a^* + b^*)\delta^{n-1}} \right) \cdot \left[ 1 - \left( \frac{\delta^*}{R_k} \right)^{2n} \right]}, \quad (3)$$

где  $\delta^*$  – относительное смещение горизонтального ствола от среднего положения в пласте, а значения параметров  $a^*$ ,  $b^*$ ,  $c^*$ ,  $\lambda$  определяются следующим образом:

$$a^* = l + 2h; \quad b^* = 2lh + 4h^2; \quad c^* = l; \quad \lambda = \frac{0,426l}{h} + 4,45. \quad (4)$$

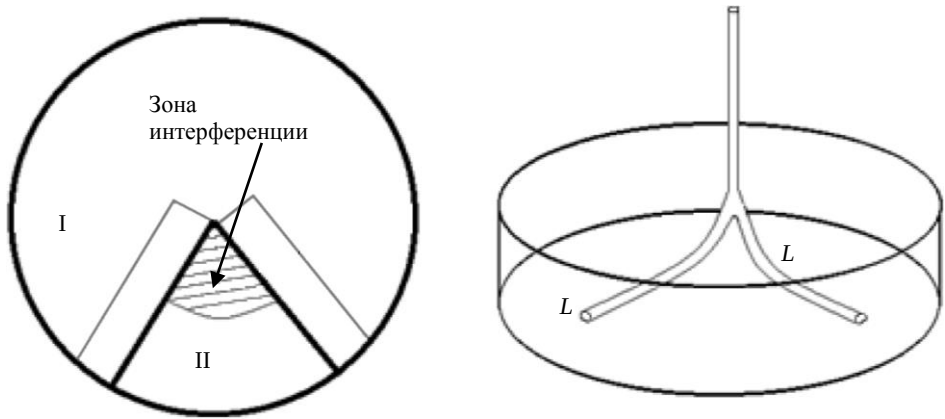
Недостатком методики [3] является то, что она полуэмпирическая, следовательно, не обладает необходимой универсальностью.

При выборе конфигурации многоствольной скважины основными факторами являются длина стволов и угол между ними. Расчет максимальных дебита и продуктивности двуствольной скважины затрудняет интерференция, связанная с взаимным расположением стволов скважины. Выбор оптимального варианта расположения стволов скважины путем многовариантных расчетов с использованием гидродинамической модели занимает значительное количество времени.

В известных аналитических методиках [2–4] не рассмотрено влияние угла между стволами, а также длины стволов на интерференцию (взаимовлияние), и, следовательно, на продуктивность многоствольной скважины.

### Аналитическая методика расчета притока жидкости к двуствольной скважине

Рассмотрим приток к двуствольной скважине, у которой оба ствола расположены в одной плоскости, на одном уровне и имеют длину  $L$ . Для оценки притока область вокруг скважины схематично разделена на две зоны: зона I – внешняя часть двуствольной скважины, зона II – ее внутренняя часть, для которой характерна интерференция стволов (рис. 1).



**Рис. 1.** Геометрическое представление двуствольной скважины  
**Fig. 1.** Geometry of a dual-lateral well

Каждая из зон фильтрации имеет соответствующие граничные условия (5).

|                                                                                                 |                                                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Зона I                                                                                          | Зона II                                                                                                               |
| $\begin{cases} \Delta P = 0 \\ P _{r=r_c} = P_c = \text{const} \\ P _{r=r_k} = P_k \end{cases}$ | $\begin{cases} \Delta P = 0 \\ P _{r=r_c} = P_c, P _{\varphi=0=2\pi} = P_c \\ P _{r=r_k} = P_k \end{cases} \quad (5)$ |

где  $P_c$  – давление в скважине,  $P_k$  – давление на контуре питания,  $r_k$  – радиус контура питания,  $\varphi$  – угол между стволами.

Уравнение, описывающее приток жидкости  $Q$  к двуствольной скважине, является решением системы уравнений (5) [5, 6]

$$\begin{cases} v = \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r}, \\ Q = \frac{v}{s} \end{cases} \quad (6)$$

где  $v$  – скорость фильтрации,  $S$  – площадь фильтрации.

Решение системы уравнений (6) для описания притока жидкости к двуствольной скважине имеет вид:



$$Q = \frac{4kL\Delta P}{\mu} \left\{ \frac{\cos^{-1}(1-A^2)}{\ln\left(\frac{\beta h}{2r_c} A^{-1}\right)} + \frac{2h \cos^{-1}(A)}{b \ln\left(\frac{\beta h}{2r_c}\right)} \right\} + \frac{2kh^3\Delta P \exp(B)}{al^2\mu} \left\{ \frac{h}{2l} \frac{1}{\ln\left(\frac{Br_c}{l}\right)} \right\}, \quad (7)$$

$$A = \frac{a\beta h}{2b^2}, \quad B = \frac{\sin \alpha}{2r_c}, \quad (8)$$

где  $a$  – большая полуось эллипса дренирования,  $b$  – малая полуось эллипса дренирования (рис. 2),  $r_c$  – радиус скважины.

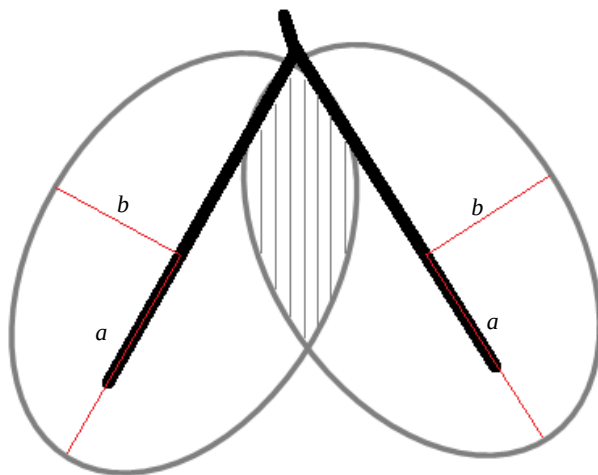


Рис. 2. Схема области дренирования стволов скважины

Fig. 2. Scheme of a drainage area of wellbores

Депрессия на пласт  $\Delta P$  вычисляется как разница между пластовым давлением и давлением в скважине [7, 8]:

$$\Delta P = P_{пл} - P_c, \quad (10)$$

$$P_{пл} = \rho g \left( H + \frac{L}{2} \sin \theta \right). \quad (11)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости;  $g$  – ускорение свободного падения;  $H$  – глубина залегания пласта;  $\theta$  – угол наклона горизонтального ствола к вертикали пласта;  $L$  – эффективная мощность продуктивного пласта.

Учет взаимовлияния стволов друг на друга в модели описан коэффициентами  $A$  и  $B$  (8), которые учитывают угол между стволами и радиус их дренирования соответственно.

### Полученные результаты и их анализ

Для расчета притока были использованы данные, представленные в таблице 1.

Верификация предложенной модели проведена с использованием фактической геолого-геофизической информации, характерной для Неокомских продуктивных

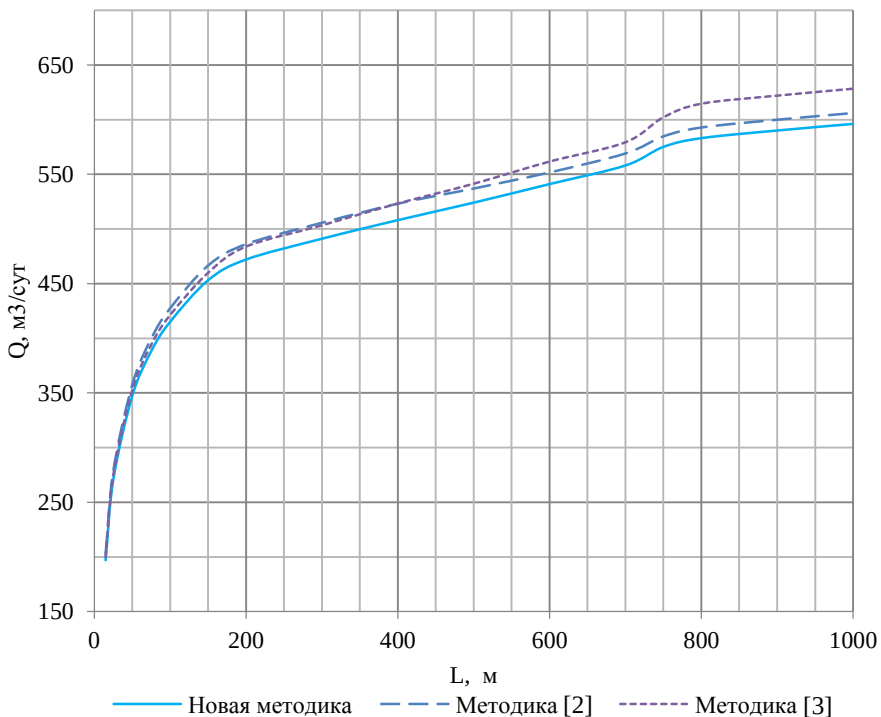
отложений Северо-Островного месторождения Ханты-Мансийского автономного округа (см. табл. 1); она показала, что результаты проведенных нами расчетов коррелируют с результатами расчетов, полученных с помощью методик [2] и [3], использующих другие подходы к описанию притока жидкости к многоствольной скважине (рис. 3).

Таким образом, можно сделать вывод, что наша модель адекватно описывает приток жидкости к двуствольной скважине и может быть использована для дальнейших расчетов.

Таблица 1

Исходные данные для расчета

| Параметр                                               | Размерность | Значение |
|--------------------------------------------------------|-------------|----------|
| Глубина залегания пласта                               | м           | 2200     |
| Мощность пласта                                        | м           | 10       |
| Проницаемость пласта в латеральном направлении пласта  | мД          | 14.2     |
| Проницаемость пласта в вертикальном направлении пласта | мД          | 7.1      |
| Вязкость жидкости                                      | сПз         | 1.3      |
| Радиус скважины                                        | м           | 0.1      |
| Давление на забое скважины                             | МПа         | 15       |



**Рис. 3.** Зависимость дебита от длины стволов двуствольной скважины при расчете разными методами

**Fig. 3.** Well flow rate as a function of the length of bores for a dual-lateral well calculated by different methods

С использованием предложенной методики проведена оценка влияния изменения длины стволов скважины на ее дебит жидкости (угол между стволами принят в расчетах  $45^\circ$  – наиболее распространенное значение при бурении двухствольных скважин) [9].

В результате проведенных расчетов определена эффективная длина стволов скважины, которая составила 750 м (см. рис. 3). При увеличении длины ствола до 1 000 м прирост дебита жидкости составляет менее 3%, а затраты на бурение увеличиваются на 17%. Следовательно, использование стволов длиной более 750 м экономически неэффективно.

После выбора длины стволов скважины исследовано влияние угла между стволами на ее продуктивность. Результаты расчетов с учетом критерия минимального прироста дебита жидкости ( $< 3\%$ ) представлены в табл. 2.

Рекомендуемый угол между стволами скважины составил  $50^\circ$ . При его увеличении до  $180^\circ$  прирост дебита жидкости незначительный (табл. 3) – около 1%.

Таблица 2

**Зависимость дебита жидкости от изменения длины стволов**

| Длина стволов скважины, м | Дебит жидкости, м <sup>3</sup> /сут | Прирост дебита жидкости, % |
|---------------------------|-------------------------------------|----------------------------|
| 15                        | 197                                 | –                          |
| 25                        | 270                                 | 37.1                       |
| 50                        | 347                                 | 28.5                       |
| 75                        | 388                                 | 11.8                       |
| 100                       | 415                                 | 7.0                        |
| 150                       | 453                                 | 9.2                        |
| 200                       | 472                                 | 4.2                        |
| 300                       | 491                                 | 4.0                        |
| 400                       | 508                                 | 3.5                        |
| 500                       | 524                                 | 3.1                        |
| 600                       | 541                                 | 3.2                        |
| 700                       | 558                                 | 3.1                        |
| 750                       | 575                                 | 3.0                        |
| 800                       | 583                                 | 1.4                        |
| 900                       | 590                                 | 1.2                        |
| 1000                      | 596                                 | 1.0                        |

Таблица 3

**Зависимость дебита жидкости от углов между стволами**

| Угол между стволами, град | Дебит жидкости, м <sup>3</sup> /сут | Прирост дебита жидкости, % |
|---------------------------|-------------------------------------|----------------------------|
| 0                         | 166                                 | –                          |
| 10                        | 184                                 | 10.8                       |
| 20                        | 202                                 | 9.8                        |
| 30                        | 225                                 | 11.4                       |
| 35                        | 246                                 | 9.3                        |
| 40                        | 300                                 | 22.0                       |
| 45                        | 431                                 | 43.7                       |
| 50                        | 510                                 | 18.3                       |
| 55                        | 523                                 | 2.5                        |
| 60                        | 528                                 | 1.0                        |

Окончание табл. 3

| Угол между стволами, град | Дебит жидкости, м <sup>3</sup> /сут | Прирост дебита жидкости, % |
|---------------------------|-------------------------------------|----------------------------|
| 80                        | 538                                 | 1.9                        |
| 100                       | 549                                 | 2.0                        |
| 120                       | 558                                 | 1.6                        |
| 140                       | 567                                 | 1.6                        |
| 160                       | 572                                 | 0.9                        |
| 180                       | 578                                 | 1.0                        |

Таким образом, наибольшей эффективностью обладает двуствольная скважина с длиной стволов 750 м и углом между стволами 50°.

### Заключение

Разработана методика аналитического расчета притока жидкости к двуствольной скважине, учитывающая угол между стволами многоствольной скважины и интерференцию между ними, позволяющая проводить экспресс-оценку притока жидкости к двуствольной скважине, которая отличается от известных методик тем, что позволяет без использования многовариантных расчетов на гидродинамическом симуляторе определить с параметры скважины, которые обеспечат ее максимальную продуктивность и экономическую эффективность.

На основании численных исследований с использованием разработанной нами аналитической модели определена эффективная конфигурация двуствольной скважины с максимальной эффективностью, которая учитывает интерференцию между стволами скважины: длина стволов скважины 750 м, угол между ними 50°.

### Список источников

1. Гусейнова Е.Л., Гусейнов Э.М. Технология бурения многоствольных скважин // Современные технологии в нефтегазовом деле – 2017 : сб. тр. Междунар. науч.-техн. конф. : в 2 т. Уфа : Изд-во УГНТУ, 2017. Т. 1. С. 239–242.
2. Борисов Ю.П., Пилатовский В.П., Табаков В.П. Разработка нефтяных месторождений горизонтальными и многозабойными скважинами. М. : Недра, 1964. 156 с.
3. Никитин Б.А., Григулецкий В.Г. Стационарный приток нефти к одиночной горизонтальной скважине в анизотропном пласте // Нефтяное хозяйство. 1992. № 8. С. 10–12.
4. Меркулов В.П. О дебите наклонных и горизонтальных скважин // Нефтяное хозяйство. 1960. № 2. С. 51–56.
5. Басниев К.С. Подземная гидромеханика : учебник для вузов. Ижевск : Ин-т компьютерных исслед., 2006. 488 с.
6. Гиматудинов Ш.К. Физика нефтяного и газового пласта : учебник для вузов. М. : Альянс, 2005. 311 с.
7. Баренблатт Г.И. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М. : Недра, 1984. 208 с.
8. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М. : Гостоптехиздат, 1949. 590 с.
9. Фрайя Х., Омер Э., Пулик Т., Джардон М., Кайя М., Пазс Р., Сотомор П.Г., Умуджоро К. Новые подходы к строительству многоствольных горизонтальных скважин // Нефтегазовое обозрение. 2003. Весна. С. 44–67.

## References

1. Guseynova E.L., Guseynov E.M. (2017) Tekhnologiya bureniya mnogostvol'nykh skvazhin [Technology of drilling of multilateral wells]. *Proceedings of the International Science and Technology Conference «Modern Technology in Oil and Gas Engineering – 2017»*, Ufa. 1. pp. 239–242.
2. Borisov Yu.P., Pilatovskiy V.P., Tabakov V.P. (1964) *Razrabotka neftyanykh mestorozhdeniy gorizontalmi i mnogoabzonnymi skvazhinami*. [Oil field development with horizontal and multilateral wells]. Moscow: Nedra.
3. Nikitin B.A., Griguletskiy V.G. (1992) *Statsionarnyy pritek nefti k odinochnoy gorizontalmu skvazhine v anizotropnom plaste* [Regular oil flow to a single horizontal borehole in an anisotropic formation]. *Neftyanoe hozyaystvo – Oil Industry*. 8. pp. 10–12.
4. Merkulov V.P. (1960) *O debite naklonnykh i gorizontalmu skvazhin* [About the flow rate of directional and horizontal wells]. *Neftyanoe hozyaystvo – Oil Industry*. 2. pp. 51–56.
5. Basniev K.S. (2006) *Podzemnaya gidromekhanika: uchebnik dlya vuzov* [Underground hydromechanics: textbook for universities]. Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy.
6. Gimatudinov Sh.K. (2005) *Fizika neftyanogo i gazovogo plasta: uchebnik dlya vuzov* [Physics of oil and gas reservoir: textbook for universities]. Moscow: Al'yans.
7. Barenblatt G.I. (1984) *Dvizhenie zhidkostey i gazov v prirodnykh plastakh* [The flow of liquids and gases in natural formations]. Moscow: Nedra.
8. Masket M. (1949) *Techenie odnorodnykh zhidkostey v poristoy srede* [The flow of homogeneous fluids in a porous medium]. Moscow: Gostoptekhizdat.
9. Frayya Kh., Omer E., Pulik T., Dzhardon M., Kayya M., Paes R., Sotomaor P.G., Umudzhoro K. (2003) *Novye podkhody k stroitel'stvu mnogostvol'nykh gorizontalmu skvazhin* [New approaches to the construction of multilateral horizontal wells]. *Neftegazovoe obozrenie. Vesna – Oil and Gas Review. Spring*. pp. 44–67.

### Сведения об авторах:

**Орлов Алексей Алексеевич** – доктор технических наук, профессор Отделения ядерно-топливного цикла Инженерной школы ядерных технологий Томского политехнического университета, Томск, Россия. E-mail: orlovaa@tpu.ru

**Русских Анастасия Сергеевна** – начальник отдела гидродинамического моделирования ООО «Недра-Консалт», Тюмень, Россия. E-mail: anastasiya\_russkih@bk.ru

### Information about the authors:

**Orlov Aleksey A.** (Doctor of Technical Sciences, Professor, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: orlovaa@tpu.ru

**Russkikh Anastasiya S.** (LLC “Nedra-Consult”, Tyumen, Russian Federation). E-mail: anastasiya\_russkih@bk.ru

*Статья поступила в редакцию 04.03.2021; принята к публикации 19.05.2022*

*The article was submitted 04.03.2021; accepted for publication 19.05.2022*

Научная статья

УДК 531.39, 52-17

doi: 10.17223/19988621/77/9

## Анализ динамической структуры вековых резонансов в окололунном орбитальном пространстве

Никита Андреевич Попандопуло<sup>1</sup>, Анна Геннадьевна Александрова<sup>2</sup>,  
Т.В. Бордовицына<sup>3</sup>

<sup>1, 2, 3</sup> Томский государственный университет, Томск, Россия

<sup>1</sup> [nikas.popandopulos.com](mailto:nikas.popandopulos.com)

<sup>2</sup> [aleksann@sibmail.com](mailto:aleksann@sibmail.com), [aleksandrovaannag@mail.ru](mailto:aleksandrovaannag@mail.ru)

<sup>3</sup> [tvbord@sibmail.com](mailto:tvbord@sibmail.com)

**Аннотация.** Представлены результаты выявления вековых и полuveковых резонансов, действующих на искусственные спутники Луны. Приведены результаты анализа данных большого численного эксперимента по исследованию динамической эволюции модельных окололунных объектов с орбитами в диапазоне от 1 911.8 до 26 070 км по большой полуоси и с наклонениями от 0 до 180°, равномерно распределенных в космическом пространстве Луны. Даны карты распределения выявленных вековых резонансов. Представлена карта наложения всех рассмотренных в данной работе резонансов. Полученные результаты будут полезными при построении целостной динамической структуры окололунного орбитального пространства.

**Ключевые слова:** окололунное пространство, искусственные спутники Луны, динамическая структура, вековые и полuveковые резонансы, карты резонансов

**Благодарности:** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-72-10022).

**Для цитирования:** Попандопуло Н.А., Александрова А.Г., Бордовицына Т.В. Анализ динамической структуры вековых резонансов в окололунном орбитальном пространстве // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 77. С. 110–124. doi: 10.17223/19988621/77/9

Original article

## Analysis of a dynamic structure of secular resonances in circumlunar orbital space

Nikita A. Popandopulo<sup>1</sup>, Anna G. Aleksandrova<sup>2</sup>,  
Tat'yana V. Bordovitsyna<sup>3</sup>

<sup>1, 2, 3</sup> Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

<sup>1</sup> [nikas.popandopulos.com](mailto:nikas.popandopulos.com)

<sup>2</sup> [aleksann@sibmail.com](mailto:aleksann@sibmail.com), [aleksandrovaannag@mail.ru](mailto:aleksandrovaannag@mail.ru)

<sup>3</sup> [tvbord@sibmail.com](mailto:tvbord@sibmail.com)

**Abstract.** When developing new circumlunar satellite systems for various purposes, it is necessary to know the dynamic features of various regions of circumlunar space. It is noted that one of the main features of the dynamics of artificial Moon satellites (AMS) is the increase in the eccentricity of their orbits. It is known that such orbital evolution of objects can be caused by resonant perturbations. In this regard, the purpose of this paper is to study the influence of secular and half-secular resonances occurring on the AMS. The results are obtained by means of the processing of data from an extensive numerical experiment to study the orbital evolution of the uniformly distributed circumlunar objects moving in the range of large semi-axes from 1911.8 to 26070 km and with inclinations from 0 to 180°.

The study of the influence of secular and half-secular resonances on the orbital evolution of the AMS is carried out using numerical and analytical techniques. Both techniques have advantages and disadvantages and are used in the study.

Maps of secular and half-secular resonances are of great practical importance. They clearly demonstrate the areas of influence of secular resonances on the orbital evolution of circumlunar objects depending on the initial values of the semimajor axis and inclination of the orbits of objects. The analysis of each particular resonance consists in the revealing of a resonant characteristic type, which is determined by the nature of the change in a critical argument: libration – stable resonance, libration/circulation – unstable resonance, and circulation – no resonance.

To estimate the whole range of the influence of resonances on the AMS dynamics, maps of their overlaps are built. The maps allow one to determine areas with significant influence of the resonances on the orbital evolution of circumlunar objects. The obtained results show that the reason for a large increase in the eccentricity in a vast area of circumlunar orbital space is the presence of the stable apsidal resonance of the Kozai–Lidov type.

**Keywords:** circumlunar space, artificial satellites of the Moon, dynamic structure, secular and half-secular resonances, resonance maps

**Acknowledgments:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 19-72-10022).

**For citation:** Popandopulo, N.A., Aleksandrova, A.G., Bordovitsyna, T.V. (2022) Analysis of a dynamic structure of secular resonances in circumlunar orbital space. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 110–124. doi: 10.17223/19988621/77/9

## Введение

В настоящее время в связи с планируемым международным научным сообществом, и Россией в том числе, освоением Луны стала весьма актуальной задача исследования динамических особенностей различных областей окололунного пространства. Знание этих особенностей необходимо при разработке, размещении и эксплуатации окололунных спутниковых систем различного назначения.

Для выявления особенностей динамики искусственных спутников Луны (ИСЛ) был проведен обширный численный эксперимент. Мы рассмотрели орбиты в диапазоне больших полуосей от 1.1 до 15 радиусов Луны с наклонениями от 0 до 180°. С помощью программного комплекса «Численная модель движения ИСЛ», раз-

работанного авторами статьи [1], проводилось прогнозирование динамической эволюции порядка 5 тыс. окололунных объектов на 10-летнем интервале времени. В ходе исследования в качестве возмущений, оказывающих влияние на движение ИСЛ, учитывались: несферичность селенопотенциала до гармоник 50-х порядка и степени, притяжение Солнца и Земли, рассматриваемых как материальные точки.

В одной из наших предыдущих работ было отмечено, что у значительной части окололунных спутников наблюдается рост эксцентриситетов орбит [1]. Как правило, такая особенность орбитальной эволюции может быть следствием влияния открытых в 1962 г Г. Куком [2] вековых резонансов на динамику околопланетных объектов [3–8]. В связи с этим мы детально рассмотрели данный вопрос. В настоящей работе приведены результаты исследования по выявлению областей действия вековых и полuveковых резонансов низких порядков в окололунном орбитальном пространстве.

### Методика исследования вековых резонансов

Исследование структуры вековых резонансов осуществлялось при помощи объединенной методики [1, 9], включающей в себя аналитический и численный подходы, детально изложенные в наших более ранних работах (см. напр.: [10, 11]).

В работе [9] мы обосновали необходимость совместного применения аналитического и численного подходов определения вековых частот в процессе выявления вековых резонансов в динамике околопланетных объектов. Дадим описание методики.

Запишем аргумент возмущающей функции в виде:

$$\psi = (l - 2p' + q')\lambda' - (l - 2p + q)\lambda - q'\varpi' + q\varpi + (\bar{m} - l + 2p')\Omega' - (\bar{m} - l + 2p)\Omega. \quad (1)$$

Здесь  $\lambda = \varpi + M$ ,  $\lambda' = \varpi' + M'$  – средние долготы спутника и третьего тела соответственно,  $\varpi = \Omega + \omega$ ,  $\varpi' = \Omega' + \omega'$  – долготы перигея спутника и возмущающего тела (здесь и далее элементы без штриха относятся к орбите спутника, а со штрихом – к орбите третьего тела). Наклонения и долготы восходящего узла  $i$ ,  $\Omega$ ,  $i'$ ,  $\Omega'$  отнесены к экватору Луны.

Аргумент разложения возмущающей функции в ряд в однократно осредненной задаче запишется в виде:

$$\underline{\psi} = (l - 2p' + q')M' - (l - 2p)\omega + (l - 2p')\omega' - \bar{m}(\Omega - \Omega'), \quad (2)$$

а в двукратно осредненной задаче запишется как

$$\underline{\underline{\psi}} = (l - 2p')\omega' - (l - 2p)\omega - \bar{m}(\Omega - \Omega'). \quad (3)$$

Условие возникновения резонанса может быть представлено следующими выражениями:

$$\underline{\dot{\psi}} \approx 0, \quad \underline{\underline{\dot{\psi}}} \approx 0. \quad (4)$$

Будем называть выражения (4) резонансными соотношениями (РС), а соотношения (2) и (3) – критическими, или резонансными, аргументами.

Взяв производные от (2), (3), получим левые части резонансных соотношений из (4), определяющие наличие вековых резонансов для однократно и двукратно осредненных задач трех тел, в данной работе это системы тел: Луна–спутник–



Земля; Луна–спутник–Солнце. Под типом резонансного соотношения будем понимать левую часть РС (4).

Далее путем моделирования движения ИСЛ с учетом влияния селенопотенциала, притяжения Земли ( $E$ ) и Солнца ( $S$ ) будем проверять наличие этих резонансов в динамике окололунных объектов.

В табл. 1 представлены типы апсидально-нодальных резонансов с 1-го по 4-й порядок, а типы вековых резонансов 2–5-го порядков со средним движением возмущающих тел даны в табл. 2.

Таблица 1

Типы апсидально-нодальных резонансов 1–4-го порядков

| № | Тип РС                                               | №  | Тип РС                                                 |
|---|------------------------------------------------------|----|--------------------------------------------------------|
| 1 | $\dot{\omega}$                                       | 6  | $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_E) - \dot{\omega}'_E$   |
| 2 | $\dot{\omega} + \dot{\omega}'_E$                     | 7  | $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) + \dot{\omega}$  |
| 3 | $\dot{\omega} - \dot{\omega}'_E$                     | 8  | $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) - \dot{\omega}$  |
| 4 | $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S})$               | 9  | $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) + 2\dot{\omega}$ |
| 5 | $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_E) + \dot{\omega}'_E$ | 10 | $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) - 2\dot{\omega}$ |

Таблица 2

Типы вековых резонансов 2–5-го порядков со скоростью движения Земли и Солнца

| № | Тип РС                           | № | Тип РС                                                                 | №  | Тип РС                                                                 |
|---|----------------------------------|---|------------------------------------------------------------------------|----|------------------------------------------------------------------------|
| 1 | $\vec{n}'_{E,S} - \dot{\omega}$  | 5 | $\vec{n}'_{E,S} - (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S})$                | 9  | $\vec{n}'_{E,S} - \dot{\omega} - (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S})$ |
| 2 | $\vec{n}'_{E,S} + \dot{\omega}$  | 6 | $\vec{n}'_{E,S} + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S})$                | 10 | $\vec{n}'_{E,S} + \dot{\omega} + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S})$ |
| 3 | $\vec{n}'_{E,S} - 2\dot{\omega}$ | 7 | $\vec{n}'_{E,S} + \dot{\omega} - (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S})$ | 11 | $\vec{n}'_{E,S} - 2(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S})$               |
| 4 | $\vec{n}'_{E,S} + 2\dot{\omega}$ | 8 | $\vec{n}'_{E,S} - \dot{\omega} + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S})$ | 12 | $\vec{n}'_{E,S} + 2(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S})$               |

Как известно, параметры прецессии орбиты Солнца, являющиеся отражением прецессии орбиты Земли, пренебрежимо малы, особенно это касается частоты в долготе перицентра Солнца, поэтому резонансы, содержащие эту частоту, мы исключили из рассмотрения (см. табл. 1).

Элементы орбит в (2)–(3), а также вековые частоты, входящие в формулы (4) и табл. 1, 2, определяются в данной работе двумя способами: численным и аналитическим.

#### Численный способ

В численном методе используются уравнения Ньютона–Эйлера для вычисления частот спутника [12]:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \sin u}{p \sin i} W; \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\cos u}{e} S + \frac{\sin u}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) T - \frac{r \sin u}{p \operatorname{tg} i} W. \quad (5)$$

Здесь  $S$ ,  $T$ ,  $W$  – возмущающие ускорения, записанные в орбитальной системе координат и связанные с правыми частями уравнений движения известными соотношениями [12].

Для определения элементов орбит используется переход от прямоугольных координат к кеплеровским элементам по формулам задачи двух тел [12].

Прогнозирование движения рассматриваемых объектов осуществляется с помощью «Численной модели движения ИСЛ» [1], предназначенной для исследования динамической структуры околосолнечного космического пространства. Численная модель позволяет учитывать возмущения от селенопотенциала до 1 199-х порядка и степени (в данной работе мы ограничиваемся 50-ми порядком и степенью), влияние приливных деформаций поверхности Луны, гравитационные влияния Земли и Солнца, а также возмущения от светового давления. Дифференциальные уравнения движения интегрируются численно с помощью колокационного интегратора Lobbie [13]. Данный интегратор является усовершенствованной версией высокоточного интегратора Гаусса–Эверхарта [14]. Разработанный нами программный комплекс позволяет проводить высокоточные исследования в динамике ИСЛ, что подтверждается сравнениями, которые можно найти в [1], с работами зарубежных авторов [15, 16], где они представили свои численные модели.

Вековые частоты и элементы орбит возмущающих тел определяются с помощью фонда DE438/LE438 [9, 17]. Для определения частот из фонда извлекаются координаты и скорости возмущающих тел на 12 моментов времени с шагом 1 мин, затем эта сетка координат и скоростей преобразуется в сетки из элементов орбиты  $q = \{\Omega', \omega'\}$  по формулам задачи двух тел. После этого с помощью производной от интерполяционного полинома Лагранжа 12-го порядка [18]

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^n x_i \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n \frac{1}{(t_i - t_j)} \left( \sum_{j=1}^n \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq i, k \neq j}}^n (t - t_k) \right) \quad (7)$$

определяются величины  $\dot{\Omega}'$ ,  $\dot{\omega}'$ .

Стоит отметить, что вычисления проводятся без введения ограничений на величины входящих в них параметров. Поскольку уравнения (5), как и формулы задачи двух тел, имеют особенности при значениях наклонения и эксцентриситета орбиты, близких к нулю, рекомендуется в процессе анализа результатов эксперимента для вычисления вековых частот использовать также аналитический подход, который пригоден для исследования динамики объектов только на орбитах с малым значением эксцентриситета.

#### *Аналитический способ*

В этом случае вычисления строятся на предположении, что спутник движется в гравитационном поле Луны, ограниченном второй зональной гармоникой селенопотенциала ( $J_2$ ), и испытывает возмущения, обусловленные притяжением Земли ( $E$ ) и Солнца ( $S$ ), рассматриваемых как материальные точки, движущиеся по эллипсам с вращающимися линиями аписид и узлов.

С учетом вышеназванных предположений для вычисления вековых частот в движении спутника можно использовать формулы

$$\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_{J_2} + \dot{\Omega}_E + \dot{\Omega}_S, \quad \dot{\omega} = \dot{\omega}_{J_2} + \dot{\omega}_E + \dot{\omega}_S, \quad (8)$$

компоненты  $\dot{\Omega}_{J_2}$ , определяемые влиянием второй зональной гармоник селенопотенциала  $J_2$ , вычисляются по формулам [19]

$$\dot{\Omega}_{J_2} = -\frac{3}{2} J_2 \bar{n} \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \cos i (1-e^2)^{-2}, \quad \dot{\omega}_{J_2} = \frac{3}{4} J_2 \bar{n} \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{5 \cos^2 i - 1}{(1-e^2)^2}, \quad (9)$$

а компоненты, связанные с влиянием внешних тел – Земли и Солнца, – с применением формул [20]

$$\dot{\Omega}_{E,S} = -\frac{3}{16} \bar{n} \frac{\mu_{E,S}}{\mu} \left( \frac{a}{a_{E,S}} \right)^3 \frac{2+3e^2}{\sqrt{1-e^2}} (2-3\sin^2 i_{E,S}) \cos i, \quad (10)$$

$$\dot{\omega}_{E,S} = \frac{3}{16} \bar{n} \frac{\mu_{E,S}}{\mu} \left( \frac{a}{a_{E,S}} \right)^3 \frac{4-5\sin^2 i + e^2}{\sqrt{1-e^2}} (2-3\sin^2 i_{E,S}). \quad (11)$$

Элементы орбит определяются следующим образом:

$$M' = M'_0 + \bar{n}'(t-t_0), \quad \omega' = \omega'_0 + \dot{\omega}'(t-t_0), \quad \Omega' = \Omega'_0 + \dot{\Omega}'(t-t_0), \quad (12)$$

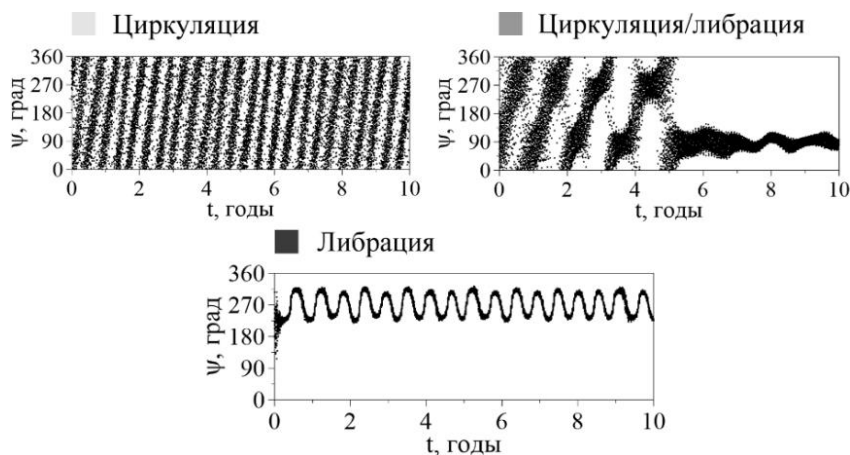
$$\omega = \omega_0 + \dot{\omega}(t-t_0), \quad \Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}(t-t_0).$$

Вековые частоты возмущающих тел в аналитическом способе считаются константами, численные значения которых можно найти, например, в [12].

### Карты вековых и полuveковых резонансов

Анализ каждого конкретного резонанса состоит в определении типа его резонансной характеристики, которая определяется по характеру изменения критического аргумента (2), (3).

Правила выбора типа резонансных характеристик: либрация – устойчивый резонанс, либрация / циркуляция – неустойчивый резонанс, циркуляция – отсутствие резонанса, – а также их обозначения в градиенте серого на резонансных картах показаны на рис. 1.

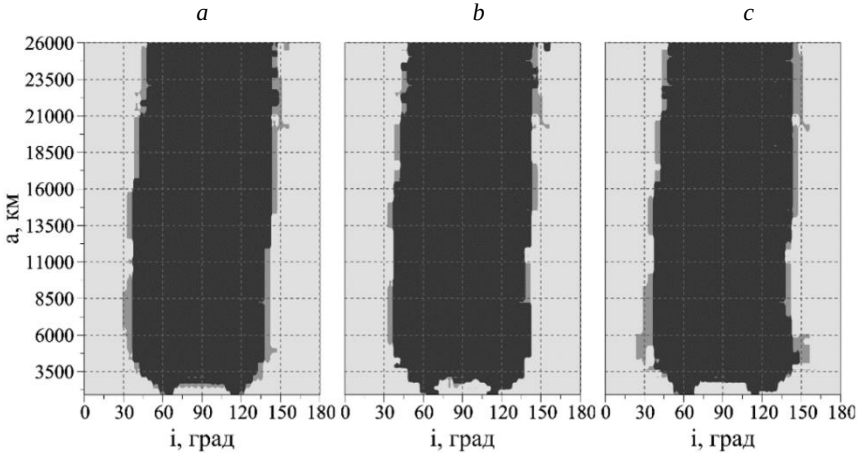


**Рис. 1.** Правила выбора типа резонансных характеристик и их обозначения в градиенте серого на резонансных картах

**Fig. 1.** Rules for choosing the type of resonant characteristics and their designations in a gray gradient on resonance maps

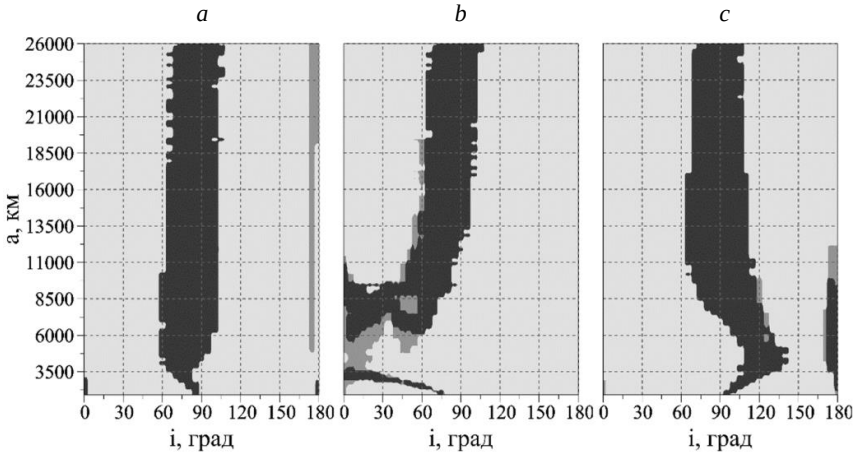
При анализе результатов численного моделирования для классификации устойчивых и неустойчивых резонансов различных типов использовались как обученная искусственная нейронная сеть [21], так и ручной метод.

В итоге были получены карты распределения вековых апсидально-нодальных резонансов, являющихся следствием соизмеримости параметров прецессии орбиты спутника, возникающей под действием возмущений, и параметров прецессии возмущающих тел: Солнца и Земли (рис. 2–5).



**Рис. 2.** Области влияния апсидального резонанса первого порядка и смежных с ним резонансов:  $\dot{\omega}$  (a),  $\dot{\omega} + \dot{\omega}'_E$  (b),  $\dot{\omega} - \dot{\omega}'_E$  (c)

**Fig. 2.** Areas of influence of the first-order apsidal resonance and adjacent resonances: (a)  $\dot{\omega}$ , (b)  $\dot{\omega} + \dot{\omega}'_E$ , and (c)  $\dot{\omega} - \dot{\omega}'_E$



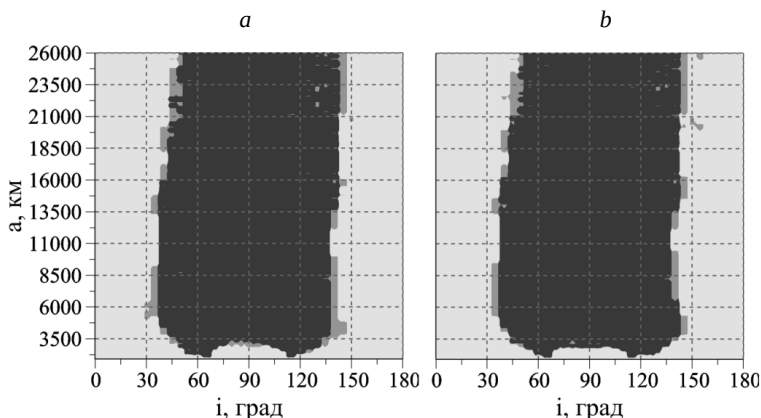
**Рис. 3.** Области влияния нодального резонанса и смежных с ним резонансов:

$$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) \text{ (a), } (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_E) + \dot{\omega}'_E \text{ (b), } (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_E) - \dot{\omega}'_E \text{ (c)}$$

**Fig. 3.** Areas of influence of the nodal resonance and adjacent resonances:

$$(a) (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}), (b) (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_E) + \dot{\omega}'_E, \text{ and (c) } (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_E) - \dot{\omega}'_E$$

Поскольку действие большинства резонансов охватывает достаточно значительные области окололунного орбитального пространства, объединить все резонансы на одной карте не представляется возможным. В связи с этим большинство резонансов имеет отдельные карты.

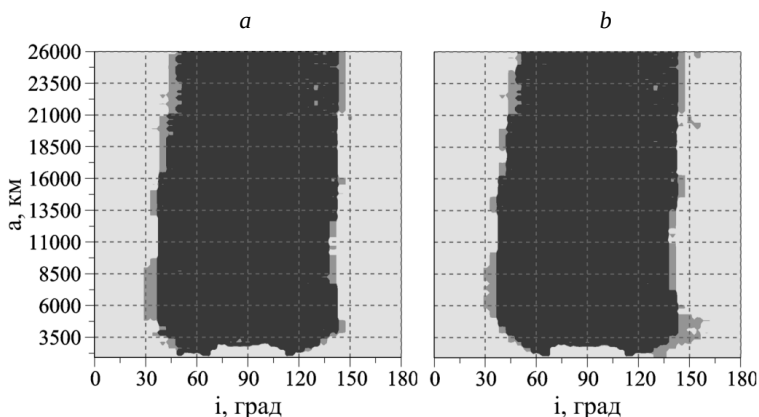


**Рис. 4.** Области влияния апсидально-нодальных резонансов третьего порядка:

$$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) + \dot{\omega} \text{ (a)}, (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) - \dot{\omega} \text{ (b)}$$

**Fig. 4.** Areas of influence of third-order apsidal-nodal resonances:

$$(a) (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) + \dot{\omega} \text{ and } (b) (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) - \dot{\omega}$$



**Рис. 5.** Области влияния апсидально-нодальных резонансов четвертого порядка:

$$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) + 2\dot{\omega} \text{ (a)}, (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) - 2\dot{\omega} \text{ (b)}$$

**Fig. 5.** Areas of influence of fourth-order apsidal-nodal resonances:

$$(a) (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) + 2\dot{\omega} \text{ and } (b) (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_{E,S}) - 2\dot{\omega}$$

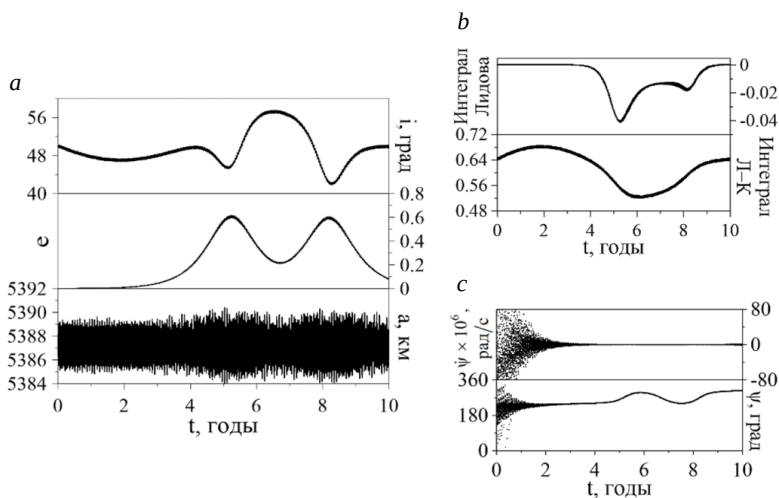
Оценка влияния апсидально-нодальных резонансов на динамику окололунных объектов показала, что наибольшим влиянием обладает вековой апсидально-нодальный резонанс первого порядка между частотами аргумента перигентра

и долготы восходящего узла (см. рис. 2), который приводит к обнулению частоты в долготе перицентра. Область влияния данного резонанса расширяется вдоль большой полуоси с 2 500 до 4 500 км и медленно смещается при прямом движении объектов вдоль наклона с 35 до 50° с повышением высоты. Правая граница области влияния резонанса остается равной примерно 140°.

Апсидально-нодальный резонанс первого порядка (№ 1 в табл. 1) был впервые обнаружен в рамках двукратно осредненной ограниченной задачи трех тел М.Л. Лидовым в 1961 г. [22] для спутникового движения и Й. Козаи в 1962 г. [23] для астероидов. Резонанс и очень часто сопровождающий его эффект взаимосвязанных колебаний значений наклона и эксцентриситета (своеобразной перекачки энергии между эксцентриситетом и наклоном) получили название резонанса и эффекта Лидова–Козаи.

Характерной особенностью орбитальной эволюции объектов, подверженных действию резонанса типа Лидова–Козаи, является рост эксцентриситетов орбит, который на длительных интервалах времени может сопровождаться перекачкой энергии между эксцентриситетом и наклоном. Пример показан на рис. 6. При этом в соответствии с теорией [24] должен сохраняться интеграл Моисеева–Лидова–Козаи  $c_1 = \sqrt{1-e^2} \cos i$ , а значения интеграла Лидова  $c_2 = \left(\frac{2}{5} - \sin^2 \omega \sin^2 i\right) e^2$  должны лежать в отрицательной области, что и имеет место в приведенном примере динамики окололунного объекта.

Сравнение между собой карт резонансов, содержащих в своем составе частоту долготы перицентра (см. рис. 2, 4 и 5), показывает, что области этих резонансов почти полностью совпадают с областью самого резонанса типа Лидова–Козаи.



**Рис. 6.** Пример проявления эффекта типа Лидова–Козаи: *a* – орбитальная эволюция (сверху вниз) элементов  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ; *b* – динамика (сверху вниз) интегралов Лидова и Лидова–Козаи; *c* – эволюция (сверху вниз) резонансного соотношения  $\dot{\omega}$  и критического аргумента  $\omega$

**Fig. 6.** An example of the Kozai–Lidov type effect: (a) orbital evolution (from top to bottom) of elements  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ; (b) dynamics (from top to bottom) of the Lidov and Kozai–Lidov integrals; and (c) evolution (from top to bottom) of the resonant relation  $\dot{\omega}$  and critical argument  $\omega$

Как оказалось, эта область покрывает участки окололунного пространства, где наблюдается рост эксцентриситетов орбит. Поэтому главной причиной роста эксцентриситета и значительного сокращения времени жизни на орбите для объектов на средних и больших высотах следует считать влияние резонанса типа Лидова–Козаи на орбитальную динамику ИСЛ.

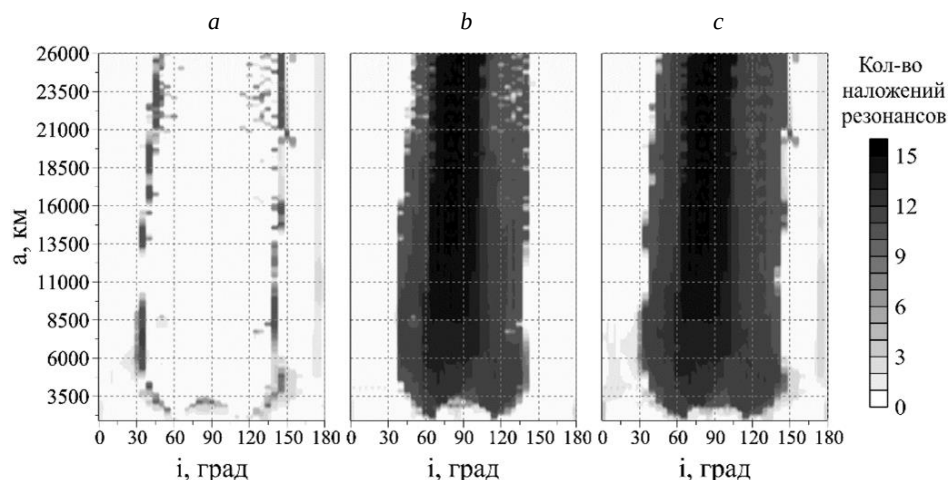
Нодальные резонансы низких порядков (см. рис. 3) сконцентрированы в окрестности наклонения, равного  $90^\circ$ , и налагаются на область апсидально-нодальных резонансов, усиливая рост эксцентриситета и вследствие этого уменьшая продолжительность жизни объектов.

Полувековые резонансы, представленные в табл. 2, не влияют на динамику ИСЛ, в критических аргументах наблюдается циркуляция на всем промежутке прогнозирования.

### Карты наложения вековых и полувековых резонансов

В предыдущем разделе можно заметить, что большинство резонансных карт имеют зоны пересечения. В связи с этим было бы интересным рассмотреть общую картину влияния резонансов на динамику ИСЛ.

Карты наложения вековых резонансов представлены на рис. 7. В каждой точке плоскости  $\{i, a\}$  показано количество одновременно действующих на объект устойчивых и неустойчивых резонансов. Под устойчивым резонансом на рис. 7, *b* мы понимаем либрацию резонансного аргумента на всем промежутке прогнозирования, а под неустойчивым резонансом на рис. 7, *a* – переход резонансного аргумента от либрации к циркуляции или наоборот. На рис. 7, *c* представлена карта наложения как устойчивых, так и неустойчивых резонансов.



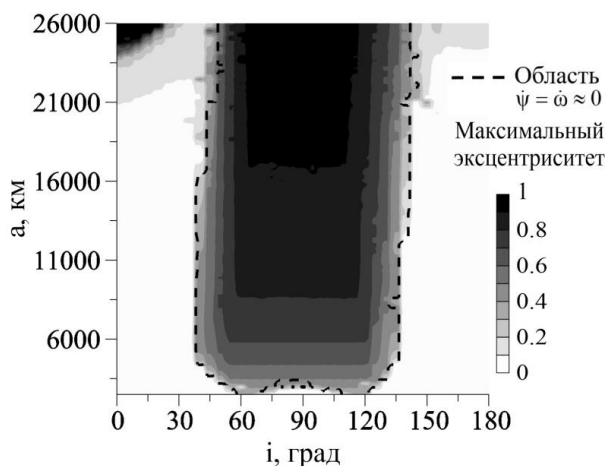
**Рис. 7.** Карты наложений вековых резонансов:

*a* – наложение только неустойчивых резонансов; *b* – наложение только устойчивых резонансов; *c* – наложение устойчивых и неустойчивых резонансов

**Fig. 7.** Maps of overlaps of the secular resonances:

(*a*) overlap of unstable resonances; (*b*) overlap of stable resonances; and (*c*) overlap of stable and unstable resonances

Из рис. 7 видно, что область действия вековых резонансов захватывает значительную часть окололунного орбитального пространства. Для орбит с большими полуосями выше 3 500 км основная часть резонансов расположена в диапазоне наклонений от 40 до 130° с некоторым смещением в сторону увеличения при возрастании большой полуоси. Для более низких орбит резонансы сосредоточены в окрестности наклонений, равных 60 и 120°. Для данных областей окололунного пространства характерен сильный рост эксцентриситета орбит, который обусловлен в первую очередь наличием устойчивого резонанса Лидова–Козаи. Это подтверждает рис. 8, на котором градиентом серого показаны наибольшие достигнутые в процессе динамической эволюции модельных окололунных объектов значения эксцентриситетов орбит. Пунктирная линия – границы влияния устойчивого резонанса Лидова–Козаи. Область наложения различных вековых резонансов, а также неустойчивого резонанса Лидова–Козаи чуть шире (см. рис. 2–7).



**Рис. 8.** Оценки роста эксцентриситетов и область устойчивого влияния резонанса Лидова–Козаи (выделена пунктирной линией) в зависимости от начальных значений большой полуоси и наклона объектов

**Fig. 8.** Assessments of the growth of eccentricities and the area of stable influence of the Kozai–Lidov resonance (indicated by a dashed line) depending on the initial values of the large semi-major axis and inclination of objects

Как видно из рис. 7, влияние неустойчивых резонансов сосредоточено на границе области наложения устойчивых резонансов. Что касается сильного роста эксцентриситета на высоких орбитах с малыми наклонениями, то он обусловлен прямым влиянием Земли.

### Заключение

Таким образом, данная работа посвящена результатам исследования динамической структуры вековых резонансов в окололунном орбитальном пространстве, которые представлены в виде карт областей влияния вековых резонансов. Показано, что апсидально-нодальные резонансы имеют значительные области влияния на орбитальную эволюцию окололунных объектов. Что касается резонансов



со средним движением возмущающих тел, то они показали циркуляцию критического аргумента для всей рассматриваемой области, поэтому в работе сделан вывод об отсутствии их влияния на орбитальную эволюцию ИСЛ. Для оценки общей картины влияния резонансов на окололунные орбиты были построены карты наложений рассматриваемых резонансов. Полученные результаты позволили сделать вывод, что причиной большого роста эксцентриситета в обширной области окололунного орбитального пространства является наличие устойчивого резонанса типа Лидова–Козаи.

#### Список источников

1. Попандопуло Н.А., Александрова А.Г., Томилова И.В., Авдюшев В.А., Бордовицына Т.В. Численное моделирование динамики искусственных спутников Луны // *Астрономический вестник*. 2022. Т. 56, № 4. (В печати).
2. Cook G.E. Luni-Solar Perturbations of the Orbit of an Earth Satellite // *Geophys. J.* 1962. V. 6, No. 3. P. 271–291. doi: 10.1111/j.1365-246X.1962.tb00351.x
3. Breiter S. Lunisolar apsidal resonances at low-satellite orbits // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 1999. V. 74. P. 253–274. doi: 10.1023/A:1008379908163
4. Breiter S. Lunisolar resonances revisited // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 2001. V. 81. P. 81–91. doi: 10.1023/A:1013363221377
5. Chao C., Gick R. Long-term evolution of navigation satellite orbits // *Adv. Space Res.* 2004. V. 34. P. 1221–1226. doi: 10.1016/j.asr.2003.01.021
6. Rossi A. Resonant dynamics of Medium Earth Orbits: space debris // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 2008. V. 100. P. 267–286. doi: 10.1007/s10569-008-9121-1
7. Прохоренко В.И. Геометрическое исследование решений ограниченной круговой двукратно осредненной задачи трех тел // *Космические исследования*. 2001. Т. 39, № 6. С. 622–633.
8. Wang Y., Gurfil P. The Role of Solar Apsidal Resonance in the Evolution of Geostationary Transfer Orbits // *Advances in Space Research*. 2017. V. 1 (8). P. 2101–2116. doi: 10.1016/j.asr.2017.01.038
9. Попандопуло Н.А., Александрова А.Г., Бордовицына Т.В. К обоснованию численно-аналитической методики выявления вековых резонансов // *Известия вузов. Физика*. 2022. Т. 62. (В печати).
10. Бордовицына Т.В., Томилова И.В., Чувашов И.Н. Влияние вековых резонансов на долговременную орбитальную эволюцию неуправляемых объектов спутниковых радионавигационных систем в области МЕО // *Астрономический вестник*. 2012. Т. 46, № 5. С. 356–368.
11. Александрова А.Г., Бордовицына Т.В., Попандопуло Н.А., Томилова И.В. Новый подход к вычислению вековых частот в динамике околоземных объектов на орбитах с большими эксцентриситетами // *Известия вузов. Физика*. 2020. Т. 63, № 1 (745). С. 57–62. doi: 10.17223/00213411/63/1/57
12. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М. : Физматгиз, 1963. 586 с.
13. Авдюшев В.А. Новый коллокационный интегратор для решения задач динамики. I. Теоретические основы // *Известия вузов. Физика*. 2020. Т. 63, № 11. С. 131–140. doi: 10.17223/00213411/63/11/131
14. Авдюшев В.А. Интегратор Гаусса–Эверхарта // *Вычислительные технологии*. 2010. Т. 15, № 4. С. 31–46.
15. Song Y.J., Park S.Y., Kim H.D., Sim E.S. Development of precise lunar orbit propagator and lunar polar orbiter's lifetime analysis // *Journal of Astronomy and Space Sciences*. 2010. V. 27 (2). P. 97–106. doi: 10.5140/JASS.2010.27.2.097

16. Gupta S., Sharma R. Effect of Altitude, Right Ascension of Ascending Node and Inclination on Lifetime of Circular Lunar Orbits // *International Journal of Astronomy and Astrophysics*. 2011. V. 1 (3). P. 155–163. doi: 10.4236/ijaa.2011.13020
17. Folkner W.M., Park R.S. Planetary ephemeris DE438 for Juno : Technical Report IOM392R-18-004. Pasadena, CA : Jet Propulsion Laboratory, 2018.
18. Александрова А.Г., Блинкова Е.В., Бордовитсына Т.В., Попандопуло Н.А., Томилова И.В. Вековые резонансы в динамике объектов, движущихся в областях LEO–MEO околоземного орбитального пространства // *Астрономический вестник*. 2021. Т. 55, № 3. С. 272–287. doi: 10.31857/S0320930X21030014
19. Аксенов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли. М. : Наука, 1977. 360 с.
20. Тимашкова Е.И., Холшевников К.В. Лунно-солнечные возмущения в движении спутников планеты // *Ученые записки ЛГУ*. 1974. № 373. С. 141–156.
21. Красавин Д.С., Александрова А.Г., Томилова И.В. Применение искусственных нейронных сетей в исследовании динамической структуры околоземного орбитального пространства // *Известия вузов. Физика*. 2021. Т. 64, № 10 (767). С. 38–43. doi: 10.17223/00213411/64/10/38
22. Лидов М.Л. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел // *Искусственные спутники Земли*. 1961. № 8. С. 5–45.
23. Kozai Y. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity // *Astron. J.* 1962. V. 67. P. 591–598. doi: 10.1086/108790
24. Вашковьяк М.А., Тесленко Н.М. Михаил Львович Лидов – яркое имя в космической науке // М.Л. Лидов – яркое имя в космической науке : сб. докл. / под ред. М.А. Вашковьяка. М. : ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. С. 9–38.

## References

1. Popandopulo N.A., Aleksandrova A.G., Tomilova I.V., Bordovitsyna T.V., Avdyushev V.A. (2022) Numerical modeling of the dynamics of artificial Moon satellites. *Solar System Research*. (in print)
2. Cook G.E. (1962) Luni-solar perturbations of the orbit of an Earth satellite. *Geophysical Journal*. 6(3). pp. 271–291. doi: 10.1111/j.1365-246X.1962.tb00351.x.
3. Breiter S. (1999) Lunisolar apsidal resonances at low satellite orbits. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 74. pp. 253–274. doi: 10.1023/A:1008379908163.
4. Breiter S. (2001) Lunisolar resonances revisited. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 81. pp. 81–91. doi: 10.1023/A:1013363221377.
5. Chao C., Gick R. (2004) Long-term evolution of navigation satellite orbits. *Advances in Space Research*. 34. pp. 1221–1226. doi: 10.1016/j.asr.2003.01.021.
6. Rossi A. (2008) Resonant dynamics of Medium Earth Orbits: space debris. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 100. pp. 267–286. doi: 10.1007/s10569-008-9121-1.
7. Prokhorenko V.I. (2001) A geometric study of solutions to restricted circular double-averaged three-body problem. *Cosmic Research*. 39(6). pp. 583–593. doi: 10.1023/A:1013057428421.
8. Wang Y., Gurfil P. (2017) The role of solar apsidal resonance in the evolution of geostationary transfer orbits. *Advances in Space Research*. 1(8). pp. 2101–2116. doi: 10.1016/j.asr.2017.01.038.
9. Popandopulo N.A., Aleksandrova A.G., Bordovitsyna T.V. (2022) To the substantiation of a numerical-analytical method for revealing secular resonances. *Russian Physics Journal*. 62. (in print)
10. Bordovitsyna T.V., Tomilova I.V., Chuvashov I.N. (2012) The effect of secular resonances on the long-term orbital evolution of uncontrollable objects on satellite radio navigation systems in the MEO region. *Solar System Research*. 46(5). pp. 329–340. doi: 10.1134/S0038094612040016.

11. Aleksandrova A.G., Bordovitsyna T.V., Popandopulo N.A., Tomilova I.V. (2020) A new approach to calculation of secular frequencies in the dynamics of near-Earth objects in orbits with large eccentricities. *Russian Physics Journal*. 63(1). pp. 64–70. doi: 10.1007/s11182-020-02003-9.
12. Duboshin G.N. (1963) *Nebesnaya mekhanika. Osnovnye zadachi i metody* [Celestial mechanics. Main issues and methods]. Moscow: Fizmatgiz.
13. Avdyushev V.A. (2021) New collocation integrator for solving dynamic problems. I. Theoretical background. *Russian Physics Journal*. 63(11). pp. 1977–1988. doi: 10.1007/s11182-021-02260-2.
14. Avdyushev V.A. (2010) Gauss–Everhart Integrator. *Computational Technologies*. 15(4). pp. 31–46.
15. Song Y.J., Park S.Y., Kim H.D., Sim E.S. (2010) Development of precise lunar orbit propagator and lunar polar orbiter's lifetime analysis. *Journal of Astronomy and Space Sciences*. 27(2). pp. 97–106. doi: 10.5140/JASS.2010.27.2.097.
16. Gupta S., Sharma R. (2011) Effect of altitude, right ascension of ascending node and inclination on lifetime of circular lunar orbits. *International Journal of Astronomy and Astrophysics*. 1(3). pp. 155–163. doi: 10.4236/ijaa.2011.13020.
17. Folkner W.M., Park R.S. (2018) *Planetary Ephemeris DE438 for Juno*. Technical Report IOM392R-18-004. Pasadena, CA: Jet Propulsion Laboratory.
18. Aleksandrova A.G., Blinkova E.V., Bordovitsyna T.V., Popandopulo N.A., Tomilova I.V. Secular resonances in the dynamics of objects moving in Leo–Meo regions of near-Earth orbital space. *Solar System Research*. 55(3). pp. 266–281. doi: 10.1134/S0038094621030011.
19. Aksenov E.P. (1977) *Teoriya dvizheniya iskusstvennykh sputnikov Zemli* [Theory of the motion of artificial Earth satellites]. Moscow: Nauka.
20. Timoshkova E.I., Kholoshevnikov K.V. (1974) Lunno-solnechnye vozmushcheniya v dvizhenii sputnikov planety [Lunar–Sun perturbations in planet satellites motion]. *Uchebnye Zapiski Leningradskogo Gosudarstvennogo Universiteta*. 373. pp. 141–156.
21. Krasavin D.S., Aleksandrova A.G., Tomilova I. V. (2022) Application of artificial neural networks in studying the dynamic structure of the near-Earth orbital space. *Russian Physics Journal*. 64(10). pp. 1824–1830. doi: 10.1007/s11182-022-02528-1.
22. Lidov M.L. (1962) The evolution of orbits of artificial satellites of planets under the action of gravitational perturbations of external bodies. *Planetary and Space Science*. 9(10). pp. 719–759. doi: 10.2514/3.1983.
23. Kozai Y. (1962) Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. *The Astronomical Journal*. 67. pp. 591–598. doi: 10.1086/108790.
24. Vashkov'yak M.A., Teslenko N.M. (2016) Mikhail L'vovich Lidov – yarkoe imya v kosmicheskoy nauke [Mikhail L'vovich Lidov – bright name in space science]. *M.L. LIDOV – BRIGHT NAME IN SPACE SCIENCE: The Collection of Papers / Ed. by M.A. Vashkov'yak*. Moscow: Keldysh Institute of Applied Mathematics. pp. 9–38.

**Сведения об авторах:**

**Попандопуло Никита Андреевич** – младший научный сотрудник лаборатории компьютерного моделирования и машинного анализа астрономических данных НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: nikas.popandopulos.com

**Александрова Анна Геннадьевна** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник 50-го отдела НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: aleksann@sibmail.com, aleksandrovaannag@mail.ru

**Бордовицына Татьяна Валентиновна** – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории компьютерного моделирования и машинного анализа астрономических данных НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: tvbord@sibmail.com

**Information about the authors:**

**Popandopulo Nikita A.** (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nikas.popandopulos.com

**Aleksandrova Anna G.** (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: aleksann@sibmail.com, aleksandrovaannag@mail.ru

**Bordovitsyna Tat'yana V.** (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tvbord@sibmail.com

*Статья поступила в редакцию 28.04.2022; принята к публикации 19.05.2022*

*The article was submitted 28.04.2022; accepted for publication 19.05.2022*

Научная статья

УДК 539.3, 669

doi: 10.17223/19988621/77/10

## Исследование структуры и свойств металломатричных композиционных материалов, полученных методом прямого лазерного выращивания

Владимир Васильевич Промахов<sup>1</sup>, Алексей Евгеньевич Матвеев<sup>2</sup>,  
Никита Александрович Шульц<sup>3</sup>, Владислав Романович Бахмат<sup>4</sup>,  
Филипп Юрьевич Дронов<sup>5</sup>, Тимур Эшанкулович Туранов<sup>6</sup>

*1, 2, 3, 4, 5, 6 Томский государственный университет, Томск, Россия*

*<sup>1</sup> vvpromakhov@mail.ru*

*<sup>2</sup> cool.mr.c@mail.ru*

*<sup>3</sup> schulznikita97@gmail.com*

*<sup>4</sup> bakhmatvr@gmail.com*

*<sup>5</sup> filipp\_dronov93@mail.ru*

*<sup>6</sup> timur.kb2@icloud.com*

**Аннотация.** Работа посвящена изучению технологии прямого лазерного выращивания образцов из металлокерамического композиционного материала. С применением самораспространяющегося высокотемпературного синтеза были получены порошки системы NiTi–TiB<sub>2</sub>, которые смешивались с порошками Inconel 625. Полученная смесь применялась для отработки режимов прямого лазерного выращивания образцов композиционных материалов. Определены технологические параметры для бездефектного выращивания образцов металлокерамических композиционных материалов. Изучены структуры и проведены испытания по определению механических свойств у выращенных образцов.

**Ключевые слова:** аддитивные технологии, керамические композиционные материалы, прямое лазерное выращивание, гетерофазная лазерная порошковая металлургия, исследование структуры и механических свойств

**Благодарности:** Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РФФИ 19-48-703019 р\_мол\_a.

**Для цитирования:** Промахов В.В., Матвеев А.Е., Шульц Н.А., Бахмат В.Р., Дронов Ф.Ю., Туранов Т.Э. Исследование структуры и свойств металломатричных композиционных материалов, полученных методом прямого лазерного выращивания // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 77. С. 125–139. doi: 10.17223/19988621/77/10

# A study of the structure and properties of the metal matrix composite materials obtained by a method of direct laser growing

Vladimir V. Promakhov<sup>1</sup>, Aleksey E. Matveev<sup>2</sup>,  
Nikita A. Schulz<sup>3</sup>, Vladislav R. Bakhmat<sup>4</sup>,  
Filipp Yu. Dronov<sup>5</sup>, Timur E. Turanov<sup>6</sup>

<sup>1, 2, 3, 4, 5, 6</sup> Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

<sup>1</sup> vvpromakhov@mail.ru

<sup>2</sup> cool.mr.c@mail.ru

<sup>3</sup> schulznikita97@gmail.com

<sup>4</sup> bakhmatvr@gmail.com

<sup>5</sup> filipp\_dronov93@mail.ru

<sup>6</sup> timur.kb2@icloud.com

**Abstract.** Due to mechanical properties, Inconel family alloys are proven to be functional materials that are used at elevated temperatures in chemically aggressive environments and under high loads. Development of additive technologies has revealed a potential of these alloys as an initial powder raw material for additive manufacturing machines.

In this work, the application of metal matrix composite materials in a direct laser growing technology is studied. The technology of self-propagating high-temperature synthesis is used to manufacture the composite material. The study results show that the application of metal matrix materials in the technology of direct laser growing allows one to increase wettability of ceramic particles by a matrix metal. As a result, the quality of particle–matrix borders is improved, the porosity is decreased, and the uniformity of the distribution of particles in the matrix is increased. The structure of the obtained materials is represented by Inconel 625 matrix alloy and inclusions of TiB<sub>2</sub> ceramics. The average size of the ceramic particles is less than 300 nm. It is shown that adding to Inconel 625 powder of a composite metal matrix SHS powder of NiTi–TiB<sub>2</sub> in an amount of 5 wt% leads to an increase in the microhardness of the material by 1.5 times relative to the materials obtained from pure Inconel 625. At the same time, there is an increase in the ultimate strength of the materials up to 920 MPa and a decrease in the ductility by 15% relative to the samples made of pure Inconel 625 alloy.

**Keywords:** additive technologies, ceramic composite materials, direct laser growing, heterophase laser powder metallurgy, investigation of the structure and mechanical properties

**Acknowledgments:** The study was supported by RFBR project No. 19-48-703019 p\_мол\_a.

**For citation:** Promakhov, V.V., Matveev, A.E., Schulz, N.A., Bakhmat, V.R., Dronov, F.Yu., Turanov, T.E. (2022) A study of the structure and properties of the metal matrix composite materials obtained by a method of direct laser growing. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 125–139. doi: 10.17223/19988621/77/10

## **Введение**

Благодаря своим механическим свойствам сплавы семейства Inconel хорошо зарекомендовали себя в качестве функциональных материалов, которые используются при повышенных температурах в химически агрессивных средах и высоких нагрузках [1]. Развитие аддитивных технологий раскрыло потенциал этих сплавов в качестве исходного порошкового сырья для машин аддитивного производства [2–4]. Стоит отметить, что использование технологий аддитивного производства (АП) позволяет уменьшить время, затраты и человеческий фактор в производственных процессах, а также сократить ограничения по форме производимых изделий [5]. Рядом исследований показано, что сочетание преимуществ АП и высоких механических свойств сплавов Inconel позволяет экономически выгодно получать изделия со сложной геометрией, которые можно применять в агрессивных условиях (повышенная температура, высокие напряжения и др.), например турбины и форсунки двигателей, узлы связи и др., обеспечивая им более длительный срок службы при одновременном снижении общего веса и производственных затрат [6–10]. Работа [11] была направлена на отработку режимов 3D-печати деталей из жаропрочного сплава на основе никеля, а также исследованию механических свойств экспериментальных образцов и сравнению режимов термообработки. В качестве исходного сырья использовался порошок жаропрочного сплава на основе никеля, идентичного Inconel 718, со сферическими частицами. Получение образов осуществлялось с использованием машины SLM 280HL (IPG Laser). В работе был установлен оптимальный режим машины SLM: мощность лазера  $190 \pm 20$  Вт и скорость сканирования лазера  $855 \pm 90$  мм/с. Эти параметры позволили получить материал с равномерной структурой и минимальным соотношением пор (2.5%). Кроме того, авторы установили, что прочность полученных материалов на разрыв равна 1 070 МПа, что на 118 МПа больше, чем у материалов, полученных традиционными методами.

Несмотря на высокие показатели физико-механических свойств материалов, полученных из сплавов Inconel, в области авиакосмической, двигателестроительной и автомобильной индустрии имеется запрос на более высокие рабочие температуры двигателей и энергоблоков, что позволило бы повысить их энергоэффективность и работоспособность [12]. Появляется потребность в материалах с новым уровнем параметров, таких как твердость, прочность, износостойкость, работа при высоких температурах, стойкость к многоцикловому нагружению, высокая стойкость к растрескиванию и т.д. Классическая физика конденсированного состояния говорит о том, что свойства материалов определяются их структурой, изменение которой может привести к появлению новых (иногда уникальных) свойств материалов. Следовательно, создание нового типа порошковых композиций на основе Inconel в сочетании с развитием аддитивных технологий может внести существенный вклад в решение вопроса о повышении энергоэффективности изделий.

Материалами, которые способны обеспечить высокие показатели физико-механических свойств, являются композиты с металломатричной структурой и керамическими включениями. Металломатричные композиты состоят из металлической или интерметаллической матрицы, в которой равномерно распределены керамические включения [13, 14]. Эти композиты обладают такими свойствами,

как повышенная механическая прочность, твердость, износостойкость и рабочие температуры, которые трудно достичь в обычных металлических сплавах [15–18]. Традиционно металломатричные композиты готовятся из смеси порошков Inconel и керамических порошков TiC [19], WC [20] и CrC [21]. Использование такого способа позволяет получить композиты, состоящие из металлической матрицы, в которой распределены упрочняющие керамические частицы. Однако применение этого метода снижает смачиваемость керамических включений, что приводит к их агломерации и образованию неоднородной структуры, а также к снижению плотности образцов и образованию большого количества пор. Для повышения однородности и плотности структуры необходимо увеличивать мощность лазерного пучка, что позволит повысить смачиваемость и оплавление керамических частиц. Однако повышение мощности приводит к дополнительным энергозатратам и усложнению технологии лазерного выращивания [22].

В работе [23] авторы продемонстрировали, что снижение размера керамических частиц порошка карбида титана (TiC), а также применение механической активации позволили получить равномерное распределение керамических частиц на поверхности частиц сплава Inconel в исходной порошковой смеси. Применение такого способа обеспечивает равномерную структуру композитов после аддитивного выращивания и уменьшает количество пор в образцах. Однако даже в этом случае для достижения желаемых физико-механических свойств авторам работы пришлось подбирать режимы аддитивного выращивания и увеличить подводимую лазерную энергию на единицу длины (LEIPUL). Было показано, что при LEIPUL 72–100 кДж/м полученные композиты обладали прочностью на разрыв 1 077.3 МПа, пределом текучести 659.3 МПа и удлинением 20.7%.

В связи с этим возникает вопрос о повышении смачиваемости керамических включений без дополнительных этапов обработки и повышения мощности лазерного пучка. Одним из возможных решений данной проблемы может служить создание композиционного порошкового сырья для машин лазерного выращивания. Частицы такого порошка состоят из металлической матрицы с равномерно распределенными керамическими включениями. Применение таких порошков в аддитивном производстве позволило бы повысить смачиваемость керамических частиц расплавом матрицы и, следовательно, снизить их агломерацию, а также повысить плотность получаемых материалов без применения дополнительных операций и повышения мощности лазерного пучка.

В наших предыдущих работах [24, 25] методом самораспространяющегося высокотемпературного синтеза (СВС) из порошковых смесей CrN–TiNi и NiB–Ti были получены композиционные порошковые материалы CrNi–TiN и (Ni–Ti)–TiB<sub>2</sub>. Структура частиц этих порошков состояла из интерметаллической матрицы CrNi/Ni–Ti, в которой равномерно распределены частицы TiN/TiB<sub>2</sub>. Формирование структуры осуществлялось в процессе синтеза (in situ) благодаря экзотермическим реакциям между компонентами исходной смеси. Стоит отметить, что процесс СВС происходит за счет тепла, выделяемого от этих реакций, что позволяет получать материалы без дополнительных источников энергии [26]. Полученные композиционные порошки были использованы в качестве исходного сырья для машин аддитивного выращивания материалов. В работе [14] показано, что структура материалов, полученных методом прямого лазерного выращивания, наследует структуру частиц СВС-порошков. Частицы TiN равномерно рас-



пределены в интерметаллической матрице CrNi. Размер частиц изменялся от 0.3 до 9 мкм, а их средний размер был равен 2.8 мкм. Средняя микротвердость образцов составляла 760 HV. Полученные результаты продемонстрировали успешное применение композиционных металломатричных порошков в качестве сырья для машин аддитивного выращивания. Однако в работе [27] было установлено, что присутствие большого количества керамической фазы (50–90 мас. %) в материалах, полученных методом АТ с использованием композиционных порошков NiTi–TiB<sub>2</sub>, приводит к возникновению больших внутренних напряжений, что способствует образованию трещин в этих материалах и их хрупкому разрушению. При этом авторы работы предположили, что использование композиционных СВС-порошков в качестве добавки к порошкам Inconel 625 в количестве 5 мас. % позволит получить более равномерное распределение керамических частиц в металлической матрице, снизить влияние внутренних напряжений и реализовать несколько механизмов упрочнения: дислокационное и дисперсионное [28].

Таким образом, цель работы – исследование структуры и механических свойств материалов, полученных из порошковой смеси 95% Inconel 625 + 5% NiTi + TiB<sub>2</sub> методом селективного лазерного выращивания.

### Материалы и методы

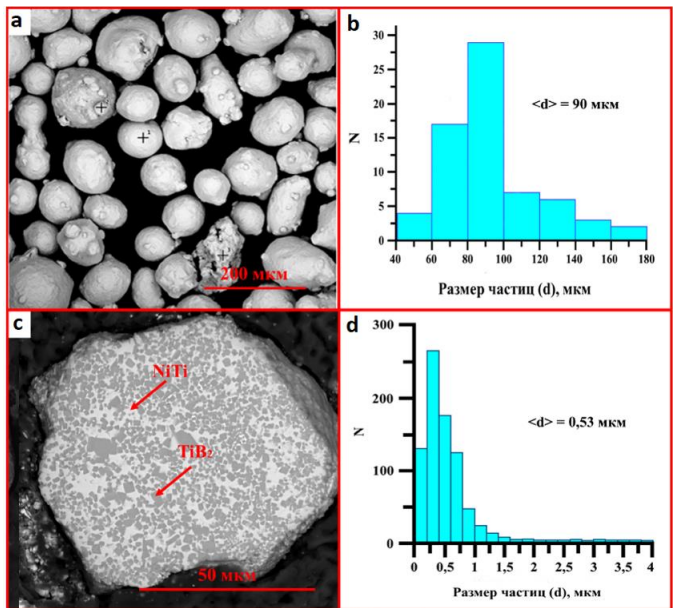
В качестве исходных компонентов смеси для получения образцов методом прямого лазерного выращивания использовались порошки марки Inconel 625 (Hoganas) и композиционный металломатричный порошок NiTi–TiB<sub>2</sub>. Показано, что сферичность порошка Hoganas составляет 0.805. На поверхности порошков встречаются отдельные сателлиты формой, близкой к многограннику (рис. 1, а). Размер частиц порошка изменяется от 40 до 180 мкм, а их средний размер равен 90 мкм (рис. 1, б). Химический состав порошка Inconel 625 представлен в табл. 1.

Порошок NiTi–TiB<sub>2</sub> получен в режиме самораспространяющегося высокотемпературного синтеза из порошковой смеси NiB–Ti согласно методологии, представленной в статье [25]. Спек, полученные в процессе СВС, измельчались в порошок дисперсностью 50–150 мкм. Структура частиц порошка представлена интерметаллической матрицей NiTi, в которой распределены частицы TiB<sub>2</sub> (рис. 1, с, d). Средний размер частиц составил 0.5 мкм.

Порошки Inconel 625 и NiTi–TiB<sub>2</sub> смешивались в соотношении: 95 мас. % Inconel 625 + 5 мас. % NiTi–TiB<sub>2</sub>. Смешивание осуществлялось в шаровой мельнице в течении 30 мин.

Получение образцов проводили путем прямого лазерного выращивания порошковой смеси на подложку из стали РСЕ36 толщиной 7 мм. Для наплавки использовался иттербиевый волоконный лазер ЛС-3 фирмы ИРЭ-Полус (рис. 2, а). В качестве стратегии выращивания было выбрано комбинированное двустороннее выращивание (рис. 2, б). Стоит отметить, что такая стратегия выращивания позволит избежать дефектов, связанных с искажением формы получаемых материалов.

Лазерное излучение фокусировалось с помощью технологической головки FLW D30 фирмы IPG Photonics. Для формирования газопорошковой струи использовалось коаксиальное наплавочное сопло COAX9 производства Fraunhofer ILT. В качестве манипулятора применялся промышленный робот LRM-200iD\_7L фирмы Fanuc. Параметры режима лазерного выращивания представлены в табл. 2.

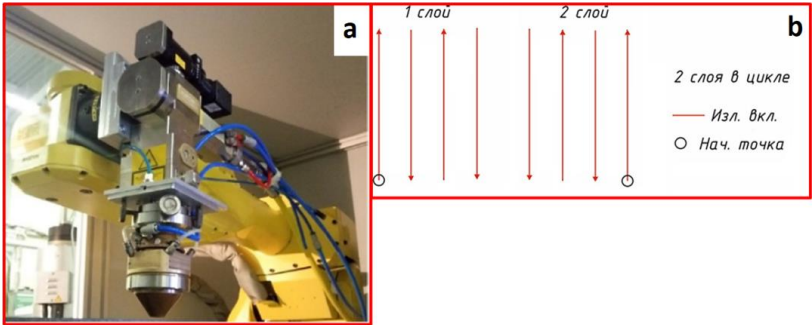


**Рис. 1.** РЭМ-изображение частиц порошка Inconel 625 и гистограмма этих частиц по размерам (a, b); РЭМ-изображение структуры частиц композиционного порошка NiTi–TiB<sub>2</sub> и гистограмма распределения по размерам частиц TiB<sub>2</sub> в матрице NiTi (c, d)  
**Fig. 1.** (a), (b) SEM image of particles of Inconel 625 powder and a histogram of these particles in size; (c), (d) SEM image of the structure of particles of a composite powder NiTi–TiB<sub>2</sub> and a histogram of size distribution for TiB<sub>2</sub> particles in a NiTi matrix

Таблица 1

Химический состав порошка Inconel 625

| Производитель            | Химический состав порошка |      |      |      |      |                |   |    |      |
|--------------------------|---------------------------|------|------|------|------|----------------|---|----|------|
|                          | Ni                        | Cr   | Fe   | Mo   | P    | Nb             | B | Ti | Др.  |
| Inconel 625<br>(Hoganas) | Осн.                      | 20.8 | 0.51 | 8.9  | —    | 3.51           | — | —  | 0.08 |
|                          | Si                        | Co   | C    | Mn   | Al   | O <sub>2</sub> | S | Cu |      |
|                          | 0.43                      | —    | 0.01 | 0.37 | 0.01 | 0.07           | — | —  |      |



**Рис. 2.** Иттербиевый волоконный лазер ЛС-3 (a),  
комбинированная двусторонняя стратегия выращивания (b)  
**Fig. 2.** (a) LS-3 ytterbium fiber laser and (b) combined two-sided growing strategy

Таблица 2

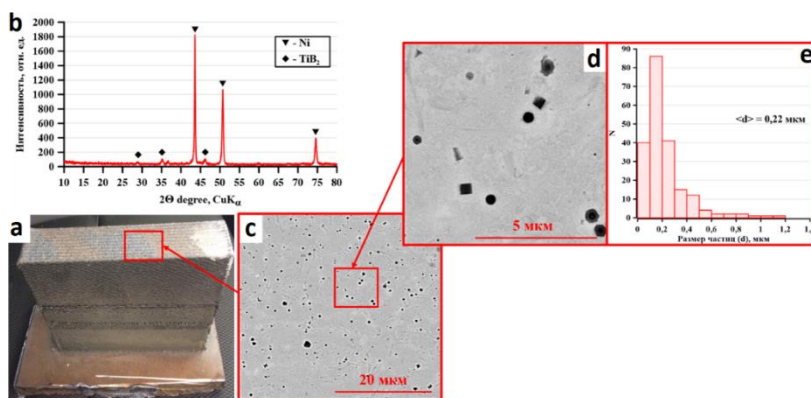
Параметры прямого лазерного выращивания

| Диаметр луча в зоне обработки, мм | Мощность, Вт | Скорость выращивания крайних валиков, мм/с | Скорость выращивания заполняющих валиков, мм/с | Расход порошка, г/мин | Смещение по X, мм | Смещение по Z, мм |
|-----------------------------------|--------------|--------------------------------------------|------------------------------------------------|-----------------------|-------------------|-------------------|
| 1.5                               | 500          | 10                                         | 15                                             | 5.1                   | 0.7               | 0.2               |

Фазовый состав материалов, полученных методом прямого лазерного выращивания из порошковой смеси 95% Inconel 625 + 5% NiTi + TiB<sub>2</sub>, исследовался на дифрактометре Shimadzu XRD-6000 (излучение CuK $\alpha$ , Ni-фильтр) (Shimadzu Corporation, Токио, Япония). Фазы определялись путем сравнения пиков и полученных дифрактограмм с базой данных Powder Diffraction File 4 Международного центра дифракционных данных (ICDD®; PA 19073, США). Структура материалов исследовалась при помощи оптической и сканирующей электронной металлографии на микроскопе T-Scan. Твердость измерялась на твердомере Buehler Wilson Micromet 6040 с анализатором изображений Thixomet Pro. Испытания на растяжение проводились на статической универсальной испытательной машине Instron.

Результаты и обсуждения

На рис. 3, а представлен внешний вид материалов, полученных методом прямого лазерного выращивания из порошковой смеси 95 мас. % Inconel 625 + 5 мас. % NiTi–TiB<sub>2</sub>. Использование стратегии комбинированного двустороннего выращивания позволило получить материалы прямоугольной формы с равномерным построением слоев оболочки и без ярко выраженных дефектов. Рентгенограмма материалов, а также РЭМ-изображение их структуры представлены на рис. 3, b–d), результаты рентгенофазового анализа представлены в табл. 3.



**Рис. 3.** Внешний вид материалов, полученных методом селективного лазерного выращивания из порошковой смеси 95 мас. % Inconel 625 + 5 мас. % NiTi–TiB<sub>2</sub> (a), рентгенограмма полученных материалов (b), РЭМ-изображения структуры материалов (c, d), распределение по размерам частиц TiB<sub>2</sub> в этих материалах (e)

**Fig. 3.** (a) External view of the materials obtained by a method of selective laser growing from a powder mixture of 95 mass. % Inconel 625 + 5 wt. % NiTi–TiB<sub>2</sub>; (b) X-ray diffraction pattern of the obtained materials; (c),(d) SEM images of the structure of the materials; and (e) size distribution of TiB<sub>2</sub> particles in these materials

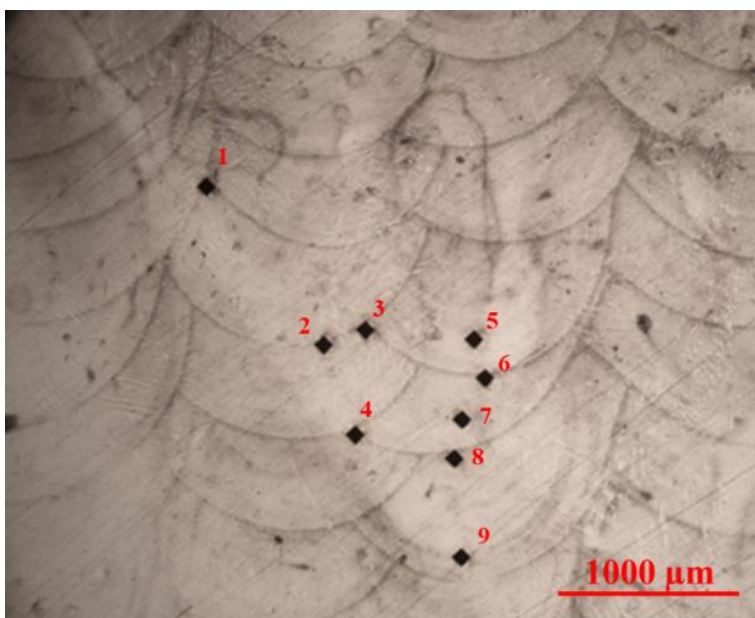
Таблица 3

**Результаты рентгенофазового анализа материалов, полученных методом  
селективного лазерного выращивания из порошковой смеси  
95 мас. % Inconel 625 + 5 мас. % NiTi–TiB<sub>2</sub>**

| Обнаруженные фазы               | Содержание фаз, mass% | Параметры решетки, Å     |
|---------------------------------|-----------------------|--------------------------|
| Ni <sub>225</sub>               | 95                    | a = 3.6218               |
| TiB <sub>2</sub> <sub>191</sub> | < 5                   | a = 2.9468<br>c = 3.1359 |

В процессе лазерного выращивания в материалах формируется композиционная металломатричная структура. В матрице на основе никеля (Inconel 625) равномерно распределены частицы диборида титана прямоугольной и сферической формы. Размер частиц изменяется в диапазоне от 0.05 до 1.2 мкм, а их средний размер равен 0.22 мкм (рис. 3, е). При этом наибольший вклад в распределение вносят частицы, размер которых изменяется в диапазоне от 0.1 до 0.2 мкм. Стоит отметить, что структура полученных материалов схожа со структурой СВС-композитов NiTi–TiB<sub>2</sub>, полученных в работе [25]. При этом частицы диборида титана в СВС-композитах имеют угловатую неправильную или прямоугольную форму. Предположительно, в процессе лазерного выращивания происходит оплавление некоторых частиц TiB<sub>2</sub>, что приводит к изменению их формы до сферической.

На рис. 4 показано изображение макроструктуры материалов, полученных методом прямого лазерного выращивания из порошковой смеси 95 мас. % Inconel 625 + 5 мас. % NiTi–TiB<sub>2</sub>, с отпечатками индентора после испытания на микротвердость. Результаты испытаний представлены в табл. 4.



**Рис. 4.** Макроструктуры материалов с отпечатками индентора после испытания на микротвердость

**Fig. 4.** Macrostructures of the materials with indentations after microhardness test

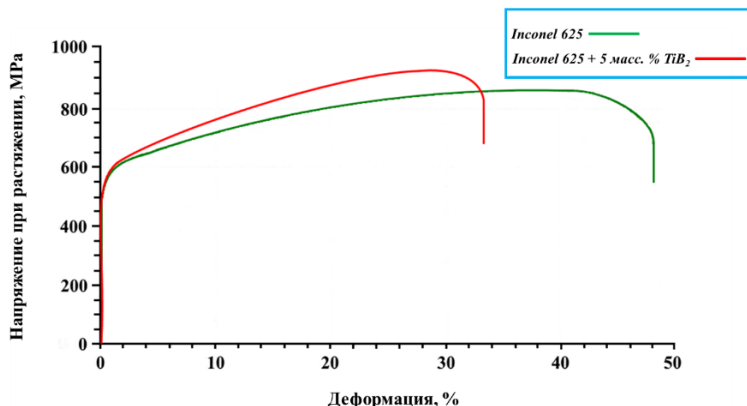
Таблица 4

**Микротвердость образцов материалов, полученных методом селективного лазерного выращивания из порошковой смеси 95 мас. % Inconel 625 + 5 мас. % NiTi–TiB<sub>2</sub>**

| Номер точки | Микротвердость, HV <sub>0,1</sub> |
|-------------|-----------------------------------|
| 1           | 389                               |
| 2           | 395                               |
| 3           | 411                               |
| 4           | 405                               |
| 5           | 405                               |
| 6           | 404                               |
| 7           | 398                               |
| 8           | 407                               |
| 9           | 403                               |
| Среднее     | 402                               |

Микротвердость материалов, полученных методом прямого лазерного выращивания из порошковой смеси 95 мас. % Inconel 625 + 5 мас. % NiTi–TiB<sub>2</sub>, изменяется от 389 до 411 HV<sub>0,1</sub>. Среднее значение микротвердости равно 402 HV<sub>0,1</sub>. Для проведения сравнительного анализа была измерена микротвердость материалов, полученных методом селективного лазерного выращивания из чистого Inconel 625. Установлено, что микротвердость образцов изменяется от 260 до 284 HV<sub>0,1</sub>, а средняя микротвердость равна 273 HV<sub>0,1</sub>. Следовательно, добавление к порошку Inconel 625 композиционного металломатричного СВС-порошка NiTi–TiB<sub>2</sub> в количестве 5 мас. % приводит к повышению микротвердости материала в 1.5 раза относительно материалов, полученных из чистого Inconel 625.

Рисунок 5 демонстрирует диаграмму вида напряжение–деформация, полученную при испытании на растяжение образцов выращенных из порошковой смеси 95 мас. % Inconel 625 + 5 мас. % NiTi–TiB<sub>2</sub>, а также образцов, выращенных из чистого Inconel 625. Результаты испытаний представлены в табл. 5.



**Рис. 5.** Диаграмма вида напряжение–деформация, полученная при испытании на растяжение образцов выращенных из порошковой смеси 95 мас. % Inconel 625 + 5 мас. % NiTi–TiB<sub>2</sub>, а также образцов, выращенных из чистого Inconel 625

**Fig. 5.** Stress-strain diagram obtained during tensile testing of the samples grown from a powder mixture of 95 mass. % Inconel 625 + 5 wt. % NiTi–TiB<sub>2</sub> and the samples grown from pure Inconel 625

Таблица 5

**Результаты испытаний на растяжение материалов,  
полученных методом селективного лазерного выращивания**

| Состав исходной смеси                             | Модуль упругости (E), МПа | Относительное удлинение (%) | Предел прочности на растяжение ( $\sigma_b$ ), МПа |
|---------------------------------------------------|---------------------------|-----------------------------|----------------------------------------------------|
| Inconel 625 +<br>+ 5 мас. % NiTi–TiB <sub>2</sub> | 550                       | 33                          | 920                                                |
| Inconel 625                                       | 545                       | 48                          | 850                                                |

Добавление 5 мас. % порошка NiTi–TiB<sub>2</sub> приводит к незначительному повышению модуля упругости относительно материалов, полученных из чистого порошка Inconel 625. При этом наблюдается увеличение предела прочности от 850 до 920 МПа, которое сопровождается снижением пластичности материала. Увеличение микротвердости и предела прочности образцов, полученных из порошковой смеси 95 мас. % Inconel 625 + 5 мас. % NiTi–TiB<sub>2</sub>, связано с рядом факторов. Во-первых, высокая твердость диборида титана (25–35 ГПа) интегрально сказывается на повышении твердости полученных материалов. Во-вторых, в процессе лазерного выращивания наночастицы диборида титана выступают зародышами при кристаллизации, за счет чего может снижаться средний размер зерна и повышаться прочность [29]. Таким образом, сформированная композиционная структура образцов способствует реализации нескольких механизмов упрочнения: зернограницного механизма упрочнения и препятствия движению дислокаций, а также упрочнения за счет измельчения зеренной структуры и реализации закона Холла–Петча [30].

### Заключение

Исследования показали, что применение композиционных по своей структуре порошков, полученных с применением самораспространяющегося высокотемпературного синтеза, позволяет повысить смачиваемость керамических частиц матричным металлом. За счет этого повышается качество границ частица–матрица, снижается пористость и повышается равномерность распределения частиц в матрице. Структура полученных материалов представлена матричным сплавом Inconel 625 и включением керамики TiB<sub>2</sub>. Средний размер керамических частиц составил не более 300 нм. Показано, что добавление к порошку Inconel 625 композиционного металломатричного СВС-порошка NiTi–TiB<sub>2</sub> в количестве 5 мас. % приводит к повышению микротвердости материала в 1.5 раза относительно материалов, полученных из чистого Inconel 625. При этом наблюдаются повышение предела прочности материалов до 920 МПа и снижение пластичности на 15% относительно образцов из чистого сплава Inconel 625. По-видимому, сформированная композиционная структура образцов способствует реализации нескольких механизмов упрочнения: зернограницного механизма упрочнения и препятствия движению дислокаций, а также упрочнения за счет измельчения зеренной структуры и реализации закона Холла–Петча.

### Список источников

1. Fox G.R., Liang H. Wear mode comparison of high-performance Inconel alloys // Journal of Tribology. 2010. V. 132 (2). Art. 021603. doi: 10.1115/1.4001170

2. Pleass C., Jothi S. Influence of powder characteristics and additive manufacturing process parameters on the microstructure and mechanical behaviour of Inconel 625 fabricated by Selective Laser Melting // *Additive Manufacturing*. 2018. V. 24. P. 419–431. doi: 10.1016/j.addma.2018.09.023
3. Dhinakaran V., Ajith J., Fahmidha A.F., Jagadeesha T., Sathish T., Stalin B. Wire Arc Additive Manufacturing (WAAM) process of nickel based superalloys – a review // *Materials Today : Proceedings*. 2020. V. 21. P. 920–925.
4. Proceedings of the 9th International Symposium on Superalloy 718 & Derivatives: Energy, Aerospace, and Industrial Applications / Ott E. et al. (ed.). Cham.: Springer, 2018.
5. Wong K.V., Hernandez A. A review of additive manufacturing // *International Scholarly Research Notices*. 2012. V. 2012. Art. 208760. doi: 10.5402/2012/208760
6. Raj B.A., Jappes J.T., Khan M.A., Dillibabu V., Brintha N.C. Direct metal laser sintered (DMLS) process to develop Inconel 718 alloy for turbine engine components // *Optik*. 2020. V. 202. Art. 163735. doi: 10.1016/j.ijleo.2019.163735
7. Schilke P.W., Foster A.D., Pepe J.J. *Advanced gas turbine materials and coatings*. New-York : GE Energy Schenectady, 1991.
8. Sharma P., Chakradhar D., Narendranath S. Evaluation of WEDM performance characteristics of Inconel 706 for turbine disk application // *Materials & Design*. 2015. V. 88. P. 558–566.
9. Farid A.A., Sharif S., Namazi H. Effect of machining parameters and cutting edge geometry on surface integrity when drilling and hole making in Inconel 718 // *SAE International Journal of Materials and Manufacturing*. 2009. V. 2 (1). P. 564–569.
10. Ngo T.D., Kashani G., Nguyen K., Hui D. Additive manufacturing (3D printing): a review of materials, methods, applications and challenges // *Composites Part B: Engineering*. 2018. V. 143. P. 172–196. doi: 10.1016/j.compositesb.2018.02.012
11. Mazalov A., Shmatov D., Zelenina L., Platko D., Promakhov V., Vorozhtsov A., Schulz N. Researching the Properties of Samples Fabricated Using Selective Laser Melting from a High-Temperature Nickel-Based Alloy // *Applied Sciences*. 2021. V. 11 (4). Art. 1419. doi: 10.3390/app11041419
12. Rao H., Oleksak R.P., Favara K., Harooni A., Dutta B., Maurice D. Behavior of yttria-stabilized zirconia (YSZ) during laser direct energy deposition of an Inconel 625-YSZ cermet // *Additive Manufacturing*. 2020. V. 31. Art. 100932. doi: 10.1016/j.addma.2019.100932
13. Zhukov I.A., Kozulin A.A., Khrustalyov A.P., Matveev A.E., Platov V.V., Vorozhtsov A.B., Zhukova T.V., Promakhov V.V. The impact of particle reinforcement with  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ,  $\text{TiB}_2$ , and  $\text{TiC}$  and severe plastic deformation treatment on the combination of strength and electrical conductivity of pure aluminum // *Metals*. 2019. V. 9 (1). Art. 65. DOI: 10.3390/met9010065
14. Matveev A., Zhukov I., Ziatdinov M., Zhukov A. Planetary milling and self-propagating high-temperature synthesis of Al-TiB<sub>2</sub> composites // *Materials*. 2020. V. 13 (5). Art. 1050. doi: 10.3390/ma13051050
15. Hashim J., Looney L., Hashmi M.S. Metal matrix composites: production by the stir casting method // *Journal of materials processing technology*. 1999. V. 92. P. 1–7. doi: 10.1016/S0924-0136(99)00118-1
16. Tjong S.C. Novel nanoparticle-reinforced metal matrix composites with enhanced mechanical properties // *Advanced engineering materials*. 2007. V. 9 (8). P. 639–653. doi: 10.1002/adem.200700106.
17. Vorozhtsov S.A., Eskin D.G., Tamayo J., Vorozhtsov A.B., Promakhov V.V., Averin A.A., Khrustalyov A.P. The application of external fields to the manufacturing of novel dense composite master alloys and aluminum-based nanocomposites // *Metallurgical and Materials Transactions A*. 2015. V. 46 (7). P. 2870–2875. doi: 10.1007/s11661-015-2850-3
18. Rawal S.P. Metal-matrix composites for space applications // *JOM*. 2001. V. 53 (4). P. 14–17. DOI: 10.1007/s11837-001-0139-z

19. Wilson J.M., Shin Y.C. Microstructure and wear properties of laser-deposited functionally graded Inconel 690 reinforced with TiC // *Surface and Coatings Technology*. 2012. V. 207. P. 517–522. doi: 10.1016/j.surfcoat.2012.07.058
20. Ghadami F., Sohi M.H., Ghadami S. Effect of TIG surface melting on structure and wear properties of air plasma-sprayed WC–Co coatings // *Surface and Coatings Technology*. 2015. V. 261. P. 108–113. doi: 10.1016/j.surfcoat.2014.11.050
21. Nurminen J., Näkki J., Vuoristo P. Microstructure and properties of hard and wear resistant MMC coatings deposited by laser cladding // *International Journal of Refractory Metals and Hard Materials*. 2009. V. 27 (2). P. 472–478. doi: 10.1016/j.ijrmhm.2008.10.008
22. Gu D., Hong C., Jia Q., Dou D., Gasser A., Weisheit A., Kelbassa I., Zhong M., Poprawe R. Combined strengthening of multi-phase and graded interface in laser additive manufactured TiC/Inconel 718 composites // *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2013. V. 47 (4). Art. 045309. doi: 10.1088/0022-3727/47/4/045309
23. Hong C., Gu D., Dai D., Alkhayat M., Urban W., Yuan P., Cao S., Gasser A., Weisheit A., Kelbassa I., Zhang M., Poprawe R. Laser additive manufacturing of ultrafine TiC particle reinforced Inconel 625 based composite parts: Tailored microstructures and enhanced performance // *Materials Science and Engineering: A*. 2015. V. 635. P. 118–128. doi: 10.1016/j.msea.2015.03.043
24. Matveev A., Promakhov V., Schulz N., Vorozhtsov A. Synthesis of Metal Matrix Composites Based on CrxNiy-TiN for Additive Technology // *Materials*. 2021. V. 11 (5). Art. 5914. doi: 10.3390/ma14205914
25. Promakhov V., Matveev A., Schulz N., Grigoriev M., Olisov A., Vprpzhstsov A., Zhukov A., Klimenko A. High-Temperature Synthesis of Metal–Matrix Composites (Ni-Ti)-TiB<sub>2</sub> // *Applied Sciences*. 2021. V. 11 (5). Art. 2426. doi: 10.3390/app11052426
26. Амосов А.П. Порошковая технология самораспространяющегося высокотемпературного синтеза материалов. М. : Машиностроение-1, 2007. 567 с.
27. Promakhov V., Zhukov A., Ziatdinov M., Zhukov I., Schulz N., Kovalchuk S., Dubcova Y., Korsmik R., Klimova-Korsmik O., Turichin G., Perminov A. Inconel 625/TiB<sub>2</sub> Metal Matrix Composites by Direct Laser Deposition // *Metals*. 2019. V. 9 (2). 141. doi: doi.org/10.3390/met9020141
28. Lorusso M., Aversa A., Manfredi D., Calignano F., Ambrosio E.P., Ugues D., Pavese M. Tribological behavior of aluminum alloy AlSi<sub>10</sub>Mg-TiB<sub>2</sub> composites produced by direct metal laser sintering (DMLS) // *Journal of Materials Engineering and Performance*. 2016. V. 25. P. 3152–3190. doi: 10.1007/s11665-016-2190-5
29. Li W., Yang Y., Liu J., Zhan Y., Li M., Wen S., Wei Q., Yan C., Shi Y. Enhanced nanohardness and new insights into texture evolution and phase transformation of TiAl/TiB<sub>2</sub> in-situ metal matrix composites prepared via selective laser melting // *Acta Materialia*. 2017. V. 136. P. 90–104. doi: 10.1016/j.actamat.2017.07.003
30. Chen L., Sun Y., Li L., Ren Y., Ren X. In situ TiC/Inconel 625 nanocomposites fabricated by selective laser melting: Densification behavior, microstructure evolution, and wear properties // *Applied Surface Science*. 2020. V. 518. Art. 145981. doi: 10.1016/j.apsusc.2020.145981

## References

1. Fox G.R., Liang H. (2010) Wear mode comparison of high-performance Inconel alloys. *Journal of Tribology*. 132(2). Article 021603. DOI: 10.1115/1.4001170.
2. Pleass C., Jothi S. (2018) Influence of powder characteristics and additive manufacturing process parameters on the microstructure and mechanical behaviour of Inconel 625 fabricated by selective laser melting. *Additive Manufacturing*. 24. pp. 419–431. DOI: 10.1016/j.addma.2018.09.023.



3. Dhinakaran V., Ajith J., Fahmidha A.F., Jagadeesha T., Sathish T., Stalin B. (2020) Wire arc additive manufacturing (WAAM) process of nickel based superalloys – a review. *Materials Today: Proceedings*. 21. pp. 920–925.
4. Ott E. et al. (ed.) (2018) *Proceedings of the 9th International Symposium on Superalloy 718 & Derivatives: Energy, Aerospace, and Industrial Applications*. Cham.: Springer.
5. Wong K.V., Hernandez A. (2012) A review of additive manufacturing. *International scholarly Research Notices. ISRN Mechanical Engineering*. 2012(4). DOI: 10.5402/2012/208760.
6. Raj B.A., Jappes J.T., Khan M.A., Dillibabu V., Brintha N.C. (2020) Direct metal laser sintered (DMLS) process to develop Inconel 718 alloy for turbine engine components. *Optik*. 202. Article 163735. DOI: 10.1016/j.ijleo.2019.163735.
7. Schilke P.W., Foster A.D., Pepe J.J. (1991) *Advanced Gas Turbine Materials and Coatings*. New-York: GE Energy Schenectady.
8. Sharma P., Chakradhar D., Narendranath S. (2015) Evaluation of WEDM performance characteristics of Inconel 706 for turbine disk application. *Materials & Design*. 88. pp. 558–566.
9. Farid A.A., Sharif S., Namazi H. (2009) Effect of machining parameters and cutting edge geometry on surface integrity when drilling and hole making in Inconel 718. *SAE International Journal of Materials and Manufacturing*. 2(1). pp. 564–569.
10. Ngo T.D., Kashani G., Nguyen K., Hui D. (2018) Additive manufacturing (3D printing): A review of materials, methods, applications and challenges. *Composites Part B: Engineering*. 143. pp. 172–196. DOI: 10.1016/j.compositesb.2018.02.012.
11. Mazalov A., Shmatov D., Zelenina L., Platko D., Promakhov V., Vorozhtsov A., Schulz N. (2021) Researching the properties of samples fabricated using selective laser melting from a high-temperature nickel-based alloy. *Applied Sciences*. 11(4). Article 1419. DOI: 10.3390/app11041419.
12. Rao H., Oleksak R.P., Favara K., Harooni A., Dutta B., Maurice D. (2020) Behavior of yttria-stabilized zirconia (YSZ) during laser direct energy deposition of an Inconel 625-YSZ cermet. *Additive Manufacturing*. 31. Article 100932. DOI: 10.1016/j.addma.2019.100932.
13. Zhukov I.A., Kozulin A.A., Khurstalyov A.P., Matveev A.E., Platov V.V., Vorozhtsov A.B., Zhukova T.V., Promakhov V.V. (2019) The impact of particle reinforcement with  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ,  $\text{TiB}_2$ , and  $\text{TiC}$  and severe plastic deformation treatment on the combination of strength and electrical conductivity of pure aluminum. *Metals*. 9(1). Article 65. DOI: 10.3390/met9010065.
14. Matveev A., Zhukov I., Ziatdinov M., Zhukov A. (2020) Planetary milling and self-propagating high-temperature synthesis of Al-TiB<sub>2</sub> composites. *Materials*. 13(5). Article 1050. DOI: 10.3390/ma13051050.
15. Hashim J., Looney L., Hashmi M.S. (1999) Metal matrix composites: production by the stir casting method. *Journal of Materials Processing Technology*. 92. pp. 1–7. DOI: 10.1016/S0924-0136(99)00118-1.
16. Tjong S.C. (2007) Novel nanoparticle-reinforced metal matrix composites with enhanced mechanical properties. *Advanced Engineering Materials*. 9(8). pp. 639–653. DOI: 10.1002/adem.200700106.
17. Vorozhtsov S.A., Eskin D.G., Tamayo J., Vorozhtsov A.B., Promakhov V.V., Averin A.A., Khurstalyov A.P. (2015) The application of external fields to the manufacturing of novel dense composite master alloys and aluminum-based nanocomposites. *Metallurgical and Materials Transactions A*. 46(7). pp. 2870–2875. DOI: 10.1007/s11661-015-2850-3.
18. Rawal S.P. (2001) Metal-matrix composites for space applications. *Journal of Metals*. 53(4). pp. 14–17. DOI: 10.1007/s11837-001-0139-z.
19. Wilson J.M., Shin Y.C. (2012) Microstructure and wear properties of laser-deposited functionally graded Inconel 690 reinforced with TiC. *Surface and Coatings Technology*. 207. pp. 517–522. DOI: 10.1016/j.surfcoat.2012.07.058.
20. Ghadami F., Sohi M.H., Ghadami S. (2015) Effect of TIG surface melting on structure and wear properties of air plasma-sprayed WC–Co coatings. *Surface and Coatings Technology*. 261. pp. 108–113. DOI: 10.1016/j.surfcoat.2014.11.050.

21. Nurminen J., Näkki J., Vuoristo P. (2009) Microstructure and properties of hard and wear resistant MMC coatings deposited by laser cladding. *International Journal of Refractory Metals and Hard Materials*. 27(2). pp. 472–478. DOI: 10.1016/j.ijrmhm.2008.10.008.
22. Gu D., Hong C., Jia Q., Dou D., Gasser A., Weisheit A., Kelbassa I., Zhong M., Poprawe R. (2013) Combined strengthening of multi-phase and graded interface in laser additive manufactured TiC/Inconel 718 composites. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 47(4). Article 045309. DOI: 10.1088/0022-3727/47/4/045309.
23. Hong C., Gu D., Dai D., Alkhayat M., Urban W., Yuan P., Cao S., Gasser A., Weisheit A., Kelbassa I., Zhang M., Poprawe R. (2015) Laser additive manufacturing of ultrafine TiC particle reinforced Inconel 625 based composite parts: Tailored microstructures and enhanced performance. *Materials Science and Engineering: A*. 635. pp. 118–128. DOI: 10.1016/j.msea.2015.03.043.
24. Matveev A., Promakhov V., Schulz N., Vorozhtsov A. (2021) Synthesis of metal matrix composites based on crxniy-tin for additive technology. *Materials*. 11(5). Article 5914. DOI: 10.3390/ma14205914.
25. Promakhov V., Matveev A., Schulz N., Grigoriev M., Olisov A., Vprzhtsov A., Zhukov A., Klimenko A. (2021) High-temperature synthesis of metal–matrix composites (Ni-Ti)-TiB<sub>2</sub>. *Applied Sciences*. 11(5). Article 2426. DOI: 10.3390/app11052426.
26. Amosov A.P. (2007) *Poroshkovaya tekhnologiya samorasprostranyayushchegosya vysokotemperaturnogo sinteza materialov* [Powder technology for self-propagating high-temperature synthesis of materials]. Moscow: Mashinostroenie - 1.
27. Promakhov V., Zhukov A., Ziatdinov M., Zhukov I., Schulz N., Kovalchuk S., Dubcova Y., Korsmik R., Klimova-Korsmik O., Turichin G., Perminov A. (2019) Inconel 625/TiB<sub>2</sub> metal matrix composites by direct laser deposition. *Metals*. 9(2). Article 141. DOI: 10.3390/met9020141.
28. Lorusso M., Aversa A., Manfredi D., Calignano F., Ambrosio E.P., Ugues D., Pavese M. (2016) Tribological behavior of aluminum alloy AlSi<sub>10</sub>Mg-TiB<sub>2</sub> composites produced by direct metal laser sintering (DMLS). *Journal of Materials Engineering and Performance*. 25. pp. 3152–3190. DOI: 10.1007/s11665-016-2190-5.
29. Li W., Yang Y., Liu J., Zhan Y., Li M., Wen S., Wei Q., Yan C., Shi Y. (2017) Enhanced nanohardness and new insights into texture evolution and phase transformation of TiAl/TiB<sub>2</sub> in-situ metal matrix composites prepared via selective laser melting. *Acta Materialia*. 136. pp. 90–104. DOI: 10.1016/j.actamat.2017.07.003.
30. Chen L., Sun Y., Li L., Ren Y., Ren X. (2020) In situ TiC/Inconel 625 nanocomposites fabricated by selective laser melting: Densification behavior, microstructure evolution, and wear properties. *Applied Surface Science*. 518. Article 145981. DOI: 10.1016/j.apsusc.2020.145981.

#### Сведения об авторах:

**Промахов Владимир Васильевич** – кандидат технических наук, заместитель директора НОЦ «Аддитивные технологии» Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: vvpromakhov@mail.ru

**Матвеев Алексей Евгеньевич** – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: cool.mr.c@mail.ru

**Шульц Никита Александрович** – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: schulznikita97@gmail.com

**Бахмат Владислав Романович** – студент физико-технического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: bakhmatvr@gmail.com

**Дронов Филипп Юрьевич** – студент физико-технического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: filipp\_dronov93@mail.ru

**Туранов Тимур Эшанкулович** – студент физико-технического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: timur.kb2@icloud.com

***Information about the authors:***

**Promakhov Vladimir V.** (Candidate of Technical Sciences, Deputy Director of Scientific and Research Center “Additive Technologies”, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vvpromakhov@mail.ru

**Matveev Aleksey E.** (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: cool.mr.c@mail.ru

**Schulz Nikita A.** (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: schulznikita97@gmail.com

**Bakhmat Vladislav R.** (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bakhmatvr@gmail.com

**Dronov Filipp Yu.** (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: filipp\_dronov93@mail.ru

**Turanov Timur E.** (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: timur.kb2@icloud.com

*Статья поступила в редакцию 17.12.2021; принята к публикации 19.05.2022*

*The article was submitted 17.12.2021; accepted for publication 19.05.2022*

Научная статья

УДК 532.5

doi: 10.17223/19988621/77/11

## Особенности экспериментального изучения устойчивого и неустойчивого вытеснения в ячейке Хеле-Шоу, заполненной стеклянными шариками

Артур Ашотович Рахимов<sup>1</sup>, Азат Ахматович Валиев<sup>2</sup>

<sup>1, 2</sup> Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа Россия

<sup>1</sup> [ragar83@mail.ru](mailto:ragar83@mail.ru)

<sup>2</sup> [azatphysic@mail.ru](mailto:azatphysic@mail.ru)

**Аннотация.** Изучены особенности несмешивающихся вытеснений: воды нефтью, нефти газом или водой при постоянном перепаде давления ( $\Delta P$ ) в ячейках Хеле-Шоу, заполненных стеклянными шариками. Показано, что при равных объемах вытеснение водой эффективнее, чем газом. Обнаружено, что при вытеснении нефтью движение идет по пройденным каналам; при вытеснении нефти увеличение  $\Delta P$  приводит к росту эффективности вытеснения, на входе происходит разрастание «пальцев».

**Ключевые слова:** ячейка Хеле-Шоу, вытеснение, перепад давления, объемный расход, «вязкие пальцы», фрактальная размерность, капиллярные силы, вязкостная неустойчивость

**Благодарности:** Работа выполнена с использованием средств государственного бюджета по госзаданию на 2019–2022 гг. (№ 0246-2019-0052).

**Для цитирования:** Рахимов А.А., Валиев А.А. Особенности экспериментального изучения устойчивого и неустойчивого вытеснения в ячейке Хеле-Шоу, заполненной стеклянными шариками // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 77. С. 140–157. doi: 10.17223/19988621/77/11

Original article

## Features of an experimental study of the stable and unstable displacement in the Hele-Shaw cell filled with glass balls

Artur A. Rakhimov<sup>1</sup>, Azat A. Valiev<sup>2</sup>

<sup>1, 2</sup> Mavlutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russian Federation

<sup>1</sup> [ragar83@mail.ru](mailto:ragar83@mail.ru)

<sup>2</sup> [azatphysic@mail.ru](mailto:azatphysic@mail.ru)

**Abstract.** The paper presents the results of an experimental study of immiscible displacements: displacement of water by oil (stable) and displacement of oil by air or water

(unstable) at constant pressure drop in the Hele-Shaw cell filled with glass balls, which is a physical model of a porous fracture in an oil reservoir. The presented data allows one to draw a logical conclusion: the higher the inlet pressure, the higher the displacement efficiency. With the same oil displacement time in the Hele-Shaw cell, the passed volume of the gas significantly exceeds that of the water. The displacement by water is more complete, though. Displacements are highly dependent on inhomogeneity of the model skeleton, most significantly for the flow at low pressure drop. At the edges of the model, where the volume of the dispersed medium is greater, the motion is faster. When displacement in the model with balls is stable, the flow spreads out towards the outlet and takes a "funnel" shape that gradually expands; the motion is directed through the channel passed. For unstable displacement at low pressure drop, the motion occurs along the edges of the cell; with an increase in the pressure drop, the motion becomes more uniform, and the "viscous fingers" begin to "branch" and grow even at a distance from the outlet.

**Keywords:** Hele-Shaw cell, displacement, pressure drop, volume flow rate, "viscous fingers", fractal dimension, capillary forces, viscous instability

**Acknowledgments:** The work was funded by the state budget according to the state assignment for 2019-2022 (No. 0246-2019-0052).

**For citation:** Rakhimov, A.A., Valiev, A.A. (2022) Features of an experimental study of the stable and unstable displacement in the Hele-Shaw cell filled with glass balls. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 140–157. doi: 10.17223/19988621/77/11

## Введение

При несмешивающемся вытеснении одних флюидов другими образуется граница раздела, форма которой устойчива, если вязкость вытесняющего флюида больше, чем вытесняемого. Граница раздела становится неустойчивой, когда менее вязкая среда вытесняет более вязкую. Вытесняющая жидкость прорывается через слой вытесняемой, образуя в ней ветвящиеся каналы, называемые «вязкими пальцами» («языками»). Образование «вязких пальцев» является одной из причин преждевременного обводнения добывающих скважин.

Еще в конце 60-х гг. XX столетия появилась работа Дж.А. Дэвиса [1], в которой методом фотолитографии была изготовлена модель для фильтрации многофазных систем, названная микромоделью. Стеклопластиковая пластинка с вытравленной системой сложных каналов в поверхностном слое спекалась с другой целой пластинкой в муфельной печи. Большими преимуществами обладают разборные микромодели [2]. Разборность микромодели реализуется за счет использования стекол с высокой плоскостностью, применяемых в оптической интерферометрии. Прозрачный плоский канал позволяет наблюдать эволюцию структуры «вязких пальцев» с изменением условий подачи вытесняющей жидкости. Ветвление «вязких пальцев» обусловлено вязкостной неустойчивостью, форма «вязких пальцев» зависит от соотношения вязкостей жидкостей, капиллярных сил, условий смачивания поверхностей и гидродинамических условий. Соответственно, развитие «вязких пальцев» будет определять интенсивность вытеснения.

В процессе неустойчивого вытеснения нефти водой важно выделить два этапа: течение до достижения выхода ячейки – прорыва, и после прорыва. Большое количество работ [3–5] посвящено изучению и моделированию развития «вязких

пальцев» до прорыва, однако изменение структуры вытесняющих «пальцев» развивается очень динамично после прорыва; наиболее ярко это проявляется при вытеснении нефти газом [6] и поддается качественной интерпретации. Теоретическая работа [7] показывает, что изменение геометрии ячейки Хеле-Шоу существенно влияет на линейную устойчивость и нелинейную динамику формирования структур в неплоских, ограниченных потоках жидкости. Для практического использования, в частности оценки эффективности вытеснения, оказываются важными процессы, влияющие на расширение зоны вытеснения, которые происходят после прорыва.

В работе представлены экспериментальные результаты по устойчивому и неустойчивому вытеснению при постоянном перепаде давления ( $\Delta P$ ) в ячейке Хеле-Шоу, заполненной стеклянными шариками, являющейся физической моделью пористой трещины нефтяного пласта. Постоянный расход соответствует работе насоса, однако в малых элементах нефтяного пласта реализуется постоянный перепад давления. При постоянном расходе перепад давления постепенно падает по мере замещения в процессе вытеснения высоковязкой нефти маловязкой водой, в то время как подача с постоянным перепадом давления приводит к постепенному увеличению скорости течения по мере замещения нефти водой и, соответственно, более активному вытеснению.

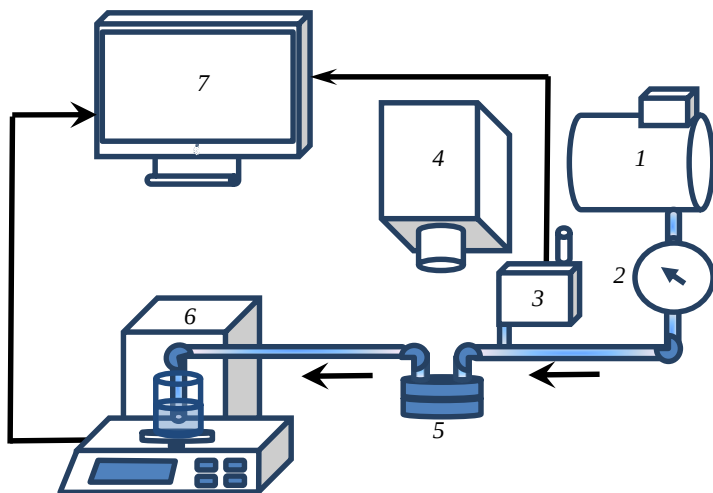
### Экспериментальная установка и методика измерений

В качестве экспериментальной ячейки использовали модель трещины – ячейку Хеле-Шоу, образованную двумя оптическими стеклянными пластинами, между которыми зажимается фольга разной толщины с вырезанным окном. Входные и выходные отверстия высверлены в верхнем стекле, к ним подведены трубки.

Экспериментальная установка показана на рис. 1. Подача воды проводилась при постоянном перепаде давления, который обеспечивался давлением газа от компрессора с ресивером (1) и контролировался образцовым манометром (2). Давление на входе ячейки Хеле-Шоу (5) измерялось тензометрическим датчиком MPX 5100 (3) и фиксировалось с помощью программы RS-Weight на персональном компьютере (ПК) (7). Жидкость, выходящая из ячейки (5), вытесняла из выходной трубки дистиллированную воду, которая поступала в мерный стакан, находящийся на прецизионных электронных весах A&D GH-252 (6) для измерения расхода весовым методом по массе вытесняемой дистиллированной воды. На верхнюю поверхность воды в стакане налито машинное масло, слой масляной пленки предотвращает интенсивное испарение воды. Видеосъемка процессов, происходящих в ячейке Хеле-Шоу, проводилась камерой Sony DCR-TRV530E (4) с частотой 25 кадров в секунду и минимальной выдержкой, видеозахват с камеры обеспечивался программой VirtualDub. Показания датчика давления, весов и видеоизображение синхронизировались по времени и поступали на ПК (7).

Предварительно поверхности оптических пластин промывались последовательно бензином марки «Калоша» и этиловым спиртом. Стеклянные пластины с окном, образованным фольгой между пластинами, помещались в обойму и зажимались винтами. Получившаяся ячейка Хеле-Шоу заполнялась через отверстие в верхнем стекле нефтью (устойчивое вытеснение) и выдерживалась в нефти не менее часа. В экспериментах использовались дистиллированная вода и природ-

ная нефть. Измеренная при комнатной температуре (25°C) динамическая вязкость используемой нефти составила 17.4 мПа·с, а поверхностное натяжение на границе вода–нефть – 32 мН/м. Погрешности измеряемого объема определялись по массе дистиллированной воды, поступавшей на весы, которая считывалась 1 раз в секунду, и составляли 5% до прорыва, 1% до протекания 1 объема ячейки и 0.1% при больших объемах; перепад давления контролировался датчиком давления с погрешностью в 1%. Отклонение данных по обработке изображений в бинарный вид – 0.3%. Отклонение расходных характеристик после разборки и сборки ячейки – не более 10% при малых расходах.



**Рис. 1.** Схема установки для проведения микрогидродинамических исследований и визуализации структуры течения

**Fig. 1.** Experimental setup for microhydrodynamic studies and flow structure visualization

Гидравлическая система в эксперименте состоит из прямоугольной ячейки Хеле-Шоу и подводящих цилиндрических трубок (на вход и выход) с одним и тем же объемным расходом  $Q$  в сечениях. Падение давления при течении через ячейку Хеле-Шоу описывается формулой [8]

$$\Delta P_1 = \frac{3\mu l_1}{2bh^3} Q, \quad (1)$$

где  $\mu$  – вязкость,  $l_1$  – длина ячейки,  $b$  – ширина ячейки,  $h$  – половина зазора (глубины).

Перепад давления на каждой трубке по формуле Пуазейля

$$\Delta P_i = \frac{8\mu l_i}{\pi R_i^4} Q, \quad (2)$$

где  $l_i$  – длина трубки,  $R_i$  – радиус трубки,  $i = 2, 3, 4$ .

Используя формулы (1) и (2), получаем отношение перепадов давления в трубке и ячейке:

$$\frac{\Delta P_i}{\Delta P_1} = \frac{16}{3\pi} \frac{bh^3 l_i}{R_i^4 l_1} \approx 1.7 \frac{bh^3 l_i}{R_i^4 l_1}. \quad (3)$$

Размеры прямоугольного канала в ячейке Хеле-Шоу: ширина  $b = 2$  см, зазор  $2h = 20$  мкм, длина  $l_1 = 3.5$  см. В системе на входе (от датчика давления, манометра, до входного отверстия) вставлены короткая трубка (10 см) диаметром 1 мм (по формуле (3)  $\Delta P_2/\Delta P_1 \approx 0.00155$ , что соответствует 0.155%) и подводящая трубка (20 см) диаметром 2 мм ( $\Delta P_3/\Delta P_1 \approx 1.9 \cdot 10^{-4}$ , что соответствует 0.019%), а на выходе – длинная (1 м) толстая трубка диаметром 3 мм, подходящая к стакану с водой на весах ( $\Delta P_4/\Delta P_1 \approx 1.9 \cdot 10^{-4}$ , что соответствует 0.019%). Суммарная потеря перепада давления на всех трубках по сравнению с перепадом давления в ячейке – около 0.2%, ею пренебрегаем в экспериментах.

### Обработка изображений и фрактальная размерность

По видеокадрам, полученным при неустойчивом вытеснении, проводился анализ вытеснения нефти при различных режимах нагнетания. Оцифрованные кадры видеоизображений обрабатывались в программе ImageJ (программа в открытом доступе) для перевода в бинарный (черно-белый) вид. Поскольку «вязкие пальцы» обладают самоподобием, был проведен фрактальный анализ. Обработка фрактальной размерности структуры вытеснения проводилась в программе HarFa 5.5L light version (программа в открытом доступе) с использованием метода box-counting [9]. Методом box-counting определялись размерность самих «вязких пальцев» и граница раздела вытесняющей жидкости с вытесняемой. Для получения изображения в бинарном виде программа накладывает равномерную сетку с шагом  $\epsilon$  и считает количество ячеек  $N_\epsilon$ , содержащих цвета: черный, белый, черный с белым. С каждой новой итерацией шаг сетки уменьшается, соответственно количество ячеек  $N$  растёт. Фрактальная размерность  $D$  вычисляется в соответствии с пределом отношения логарифмов:

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\epsilon}{\ln \left( \frac{1}{\epsilon} \right)}, \quad (4)$$

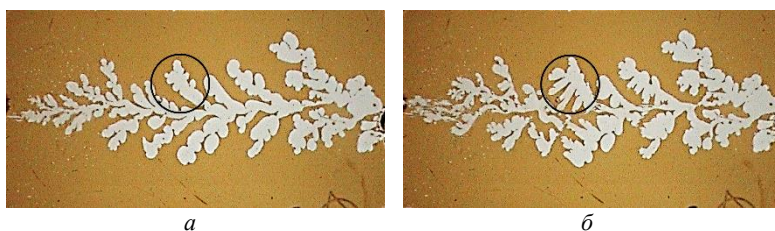
где наименьшее значение размера ячейки сетки  $\epsilon$  равно 1 пикселю.

Таким образом, получается сетка с уменьшающимися с каждой итерацией размерами ячеек, содержащих только черный B(Black) и только белый W(White) цвета, а также области (граница) с присутствием черного и белого цветов – BW. Измерения для BW заканчиваются на двух пикселях, так как в одном пикселе бинарного изображения не может содержаться два цвета. Нами было решено черным цветом (B) выделять область, занимаемую нефтью, а белым (W) – водой. В случае вытеснения нефти водой фрактальной частью является область W + BW (белые и черно-белые области), а область, занимаемая нефтью – B + BW (черные и черно-белые области). В случае устойчивого вытеснения с прямой границей раздела между жидкостями для вытесняемой и вытесняющей жидкостей вычисляемая размерность равна 2, для границы раздела – 1. «Вязкие пальцы» по мере развития формируют ветвистую структуру, направленную в сторону выходной зоны. Усложняется и сама граница раздела, часть целиков нефти остается внутри фракталоподобной структуры.



### Картина вытеснения до прорыва

Изображения вытесняющей и вытесняемой жидкости (вода–нефть) различаются по прозрачности и дают достаточно контрастную картину. В процессе вытеснения регистрируются кадры видеоизображения в цифровом виде, показания весов, соответствующие объему нагнетаемой жидкости, и перепад давления. Эти три группы данных синхронно записываются на ПК. Процесс вытеснения по его развитию следует разделить на два этапа: первичное вытеснение до прорыва и «доотмыв» после прорыва. Неустойчивое вытеснение под действием постоянного перепада приводит к образованию ветвящихся структур («пальцев»). Образующиеся в процессе течения при неустойчивом вытеснении в ячейке Хеле-Шоу «вязкие пальцы» (рис. 2) количественно описываются с использованием теории фракталов [10–11].



**Рис. 2.** Изменение ориентации «вязких пальцев» до (а) и после (б) прорыва газа (газ дошел до выходной зоны ячейки) в ячейке Хеле-Шоу. Окружностью обведен один из «пальцев»

**Fig. 2.** Variation in the orientation of “viscous fingers” (a) before and (b) after the gas breakthrough (the gas has reached an outlet region of the cell) in a Hele-Shaw cell. One of the “fingers” is encircled

На первый взгляд представляется, что маловязкая жидкость, прорвавшаяся до выходной зоны ячейки Хеле-Шоу, будет продолжать течь по тем каналам, из которых она вытеснила высоковязкую нефть [3]. Но сразу после прорыва происходит перераспределение локальных полей давления. Об этом свидетельствует изменение направления развития отдельных «вязких пальцев» (см. рис. 2). До прорыва давление во всем газовом кластере практически равно давлению на входе в ячейку, так как вязкость газа на три порядка меньше вязкости жидкости. Как только газ достигает выходной зоны, давление мгновенно перераспределяется, что приводит к изменению формы кластера, мобилизации окружающей нефти и, как следствие, дальнейшему вытеснению нефтяной фазы после прорыва вытесняющего агента.

Ячейка модели Хеле-Шоу насыщалась нефтью и отстаивалась больше часа для адгезии тяжелых фракций нефти на стеклах. При вытеснении нефти агентами структура неустойчивого вытеснения была фрактальной. В экспериментах, когда вытеснение проводилось сразу после заполнения ячейки нефтью, нефть вымывалась практически сразу.

Приведем оценку размеров капель, удерживаемых капиллярными силами при создавшемся градиенте давления в модели. Капиллярное давление на цилиндрической поверхности будет равно  $P_k = \sigma/h$ , где  $\sigma$  – поверхностное натяжение. Перепад давления на капле можно оценить из градиента давления в ячейке:

$\nabla P = \Delta P/l_1$ . Длину капли обозначим  $l_k$ , на ней будет перепад давления:  $l_k \cdot \nabla P$ . Таким образом, размер капли при заданном градиенте давления будет определяться отношением:  $l_k = P_k/|\nabla P| = \sigma l_1/(h|\Delta P|)$ . При перепаде давления  $\Delta P = 20$  кПа,  $h = 10$  мкм,  $\sigma = 32$  мН/м,  $l_1 = 3.5$  см размер защемленной капли будет  $l_k = 5.6$  мм. При перепаде давления 50 кПа длина защемленных капель будет порядка 2 мм.

### Трехмерная пористая структура

Экспериментальная установка с обеспечением перепада давления с помощью компрессора для всех экспериментов была одной и той же (см. рис. 1), менялись только вытесняющие жидкости, перепады давления и сами ячейки Хеле-Шоу. Ячейка Хеле-Шоу изготовлена следующим образом: между двух стеклянных оптических стекол зажат лист латунной фольги толщиной  $2h = 190$  мкм, в котором сделано прямоугольное окошко со сглаженными углами, длина  $l = 40$  мм, ширина  $b = 20$  мм. Расход течения в данной модели находится по формуле (1). Для перепада давления  $\Delta P = 10$  кПа при течении дистиллированной воды и заданных размерах расход равен 2.86 мл/с.

Ячейку планировалось заполнить стеклянными шариками и далее изучить вытеснение нефти водой в полученной пористой модели. Использовали стеклянные шарики, просеянные предварительно через сито 70 мкм. С помощью программы ImageJ (программа в свободном доступе) рассчитано распределение по размерам для 122 шариков (табл. 1).

Таблица 1

**Распределение стеклянных шариков по размерам**  
( $D$  – диаметр,  $n$  – количество в %,  $N$  – количество)

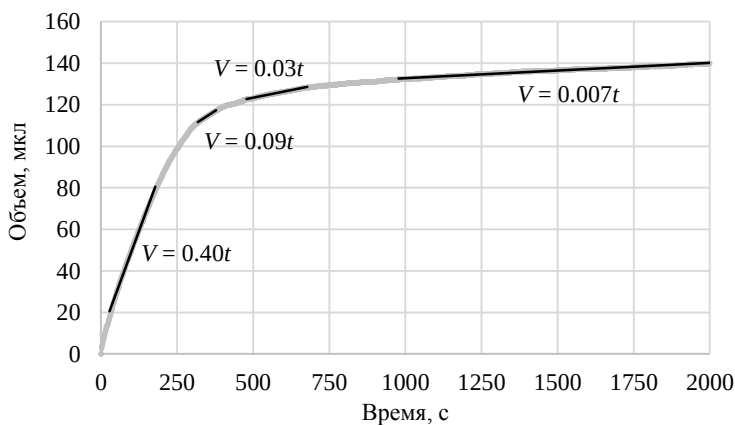
| $D$     | 0   | 5   | 10  | 15  | 20  | 25  | 30  | 35  | 40   | 45   | 50   | 55   | 60   | 65   | 70  | 75  |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|-----|-----|
| $n, \%$ | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.8 | 1.6 | 3.3 | 3.3 | 8.2 | 11.5 | 12.3 | 11.5 | 17.2 | 12.3 | 10.7 | 6.6 | 0.8 |
| $N$     | 0   | 0   | 0   | 1   | 2   | 4   | 4   | 10  | 14   | 15   | 14   | 21   | 15   | 13   | 8   | 1   |

Подавляющее большинство шариков оказалось в диапазоне 35–70 мкм. Для того чтобы ограничить выход шариков из ячейки, перед выходным отверстием ячейки поставили кусок покровного стекла толщиной 150 мкм, уменьшающий сечение выходного отверстия, при этом зазор на выходе составил 40 мкм (толщина латунной фольги минус толщина покровного стекла). Предполагалось, что шарики займут плотную упаковку в несколько рядов по всей поверхности ячейки, и на выходе перед стеклом окажутся шарики с диаметром более 40 мкм, поскольку шарики с диаметром менее 40 мкм либо выйдут из ячейки, либо окажутся в плотной упаковке не в непосредственной близости от края со стеклом. Расчет участка с покровным стеклом по формуле (1) в данной модели показывает, что отношение локального перепада давления к перепаду давления в ячейке на данном участке на два порядка больше, чем в остальной зоне ячейки. Экспериментальный расход по течению дистиллированной воды до заполнения шариками оказался равен 0.59 мл/с, что в 4.8 раз ниже подсчитанного расхода (2.86 мл/с) при отсутствии шариков и покровного стекла, т.е. наличие покровного стекла привело к уменьшению расхода почти в 5 раз.

Суспензию из шариков (5% по массе) в дистиллированной воде под давлением 20 кПа подавали во входное отверстие ячейки Хеле-Шоу. Шарики, по всей

видимости, забивали входное отверстие, уменьшили сечение, что привело к уменьшению потока жидкости, и поэтому движение замедлилось и остановилось. Затем, не убирая подаваемое давление 20 кПа, ячейку поместили в наполненную водой ультразвуковую ванну CD-4820 ( $V_{\max} = 2\,500$  мл, мощность 170 Вт, частота 42 кГц). В ультразвуке входное отверстие очистилось, движение суспензии с шариками сразу возобновилось, фронт течения выровнялся, и шарики в течение 13 с заняли ячейку. Таким образом, ультразвуковое воздействие помогло распределить шарики и очистить входное отверстие. Поддержали несколько минут в ультразвуке для равномерного распределения шариков по всей ячейке, наблюдая визуально за шариками: некоторые области были светлыми, поскольку шарики еще совершали движение в ультразвуке, а потом темнели, когда, уплотнившись, шарики переставали двигаться, что подтверждалось наблюдением при большем увеличении микроскопа. Добившись уплотненной структуры шариков, провели проверочный эксперимент по течению дистиллированной воды через полученное устройство. Расход по воде составил 0.65 мл/с при постоянно заданном перепаде давления 20 кПа. Для сравнения: экспериментальный расход в модели без шариков при 10 кПа составил 0.59 мл/с (соответственно, для 20 кПа он составит около 1.18 мл/с), т.е. получается, что он уменьшился в 1 800 раз.

Далее ячейку, в которой находились шарики в дистиллированной воде, заполняли нефтью (рис. 3, 4). Динамическая вязкость используемой нефти 17.94 мПа·с. Каждая точка на графике соответствует весовому значению, которое снимается автоматически, записывается и пересчитывается на компьютере. Погрешность измерений не превышает размеров маркеров на графике, обусловлена в основном погрешностью измерения давления тензиометрическим датчиком и не превышает 1%.

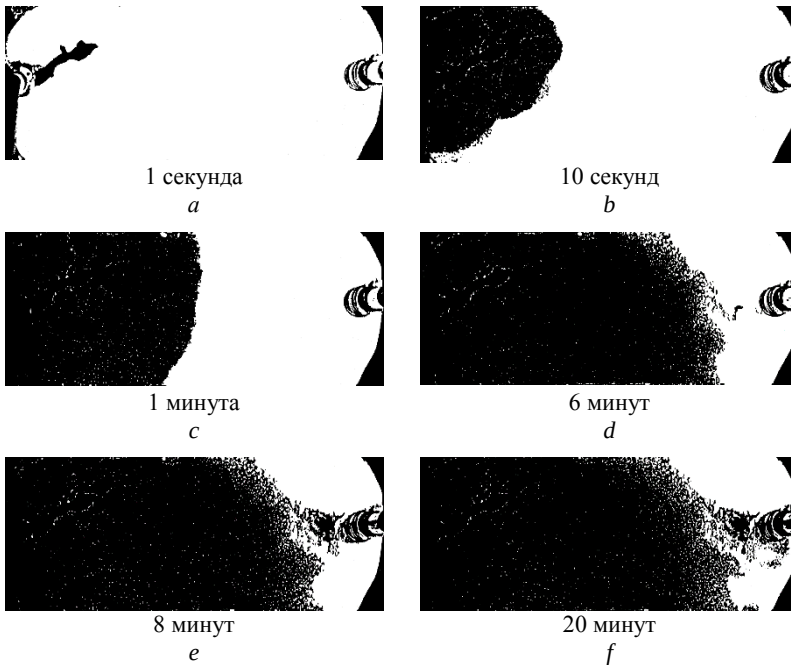


**Рис. 3.** Зависимость прошедшего объема от времени при вытеснении воды нефтью в ячейке Хеле-Шоу, заполненной шариками, при перепаде давления 20 кПа. Указанные на графике зависимости объема ( $V$ ) от времени ( $t$ ) соответствуют отмеченным прямым линиям. Измерения проводились каждую секунду, поэтому график имеет вид сплошной линии

**Fig. 3.** Dependence of the passed volume on time in the case of water displacement by oil in the Hele-Shaw cell filled with balls at a pressure drop of 20 kPa. The volume ( $V$ ) versus time ( $t$ ) expressions, which are indicated on the graph, correspond to highlighted straight lines.

Solid lines are the result of the measurements taken every second

На рис. 3 видно, что расход в начальном участке (до прорыва) равен 0.4 мкл/с, что связано с наполненностью ячейки водой, он близок к расходу воды. Нефть, попав в ячейку, в течение первой секунды движется по отдельному микроканалу (рис. 4, *a*), однако быстро движущийся фронт начинает выравниваться, за первые 10 с произошло быстрое заполнение трети ячейки (рис. 4, *b*). Далее фронт продолжает выравниваться, движение начинает замедляться, в течение 1 мин произошло заполнение около половины ячейки (рис. 4, *c*), и лишь на 6-й минуте нефть дошла до края модели (рис. 4, *d*), расход упал до 0.09 мкл/с (см. рис. 3). Далее некоторое время шла смесь нефти и воды, пока расход не стал равен расходу нефти. На графике (см. рис. 3) видим, что последний участок аппроксимирован одной длинной линией.



**Рис. 4.** Фотоизображения, приведенные в бинарном (черно-белом) виде, устойчивого вытеснения воды нефтью в ячейке Хеле-Шоу, заполненной шариками (движение слева направо) при перепаде давления 20 кПа. Время от начала эксперимента приведено под кадрами

**Fig. 4.** Binary (black and white) images of the stable water displacement by oil in the Hele-Shaw cell filled with balls (left-to-right motion) at a pressure drop of 20 kPa. The duration of a test run is indicated below the images

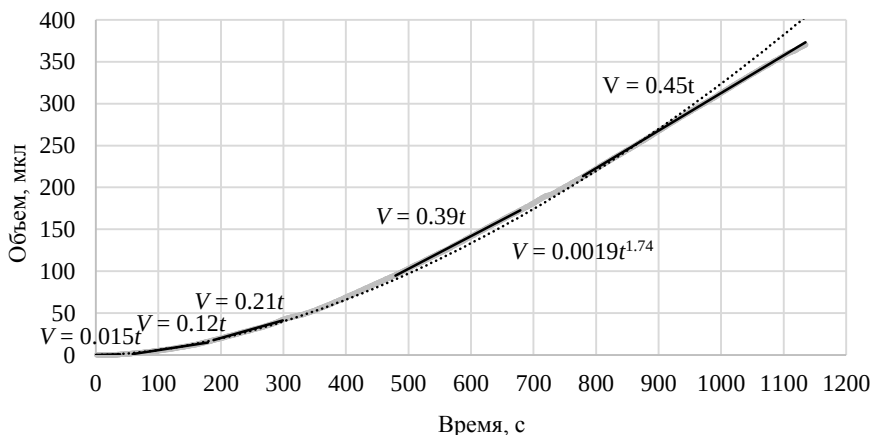
Как видно из рис. 4, при вытеснении воды нефтью в модели с шариками края движущегося фронта неровные, что связано с разными размерами шариков в ячейке и, соответственно, разным поровым пространством между ними. На выходе образуется сужение потока к выходу – «воронка», которая постепенно разрастается (рис. 4, *d–f*). Нефть не заняла весь объем: добравшись до выхода, ей «проще» идти по имеющемуся каналу, поскольку на выходе ячейки присутствует пласти-

на, обеспечивающая зазор 40 мкм, что больше пространства между шариками в остальной части ячейки.

Таким образом, вытеснение нефти водой в ячейке Хеле-Шоу, заполненной шариками, отличается от вытеснения в модели без шариков (устойчивое вытеснение), где фронт вытеснения вплоть до самого выхода ровный, перпендикулярный направлению течения.

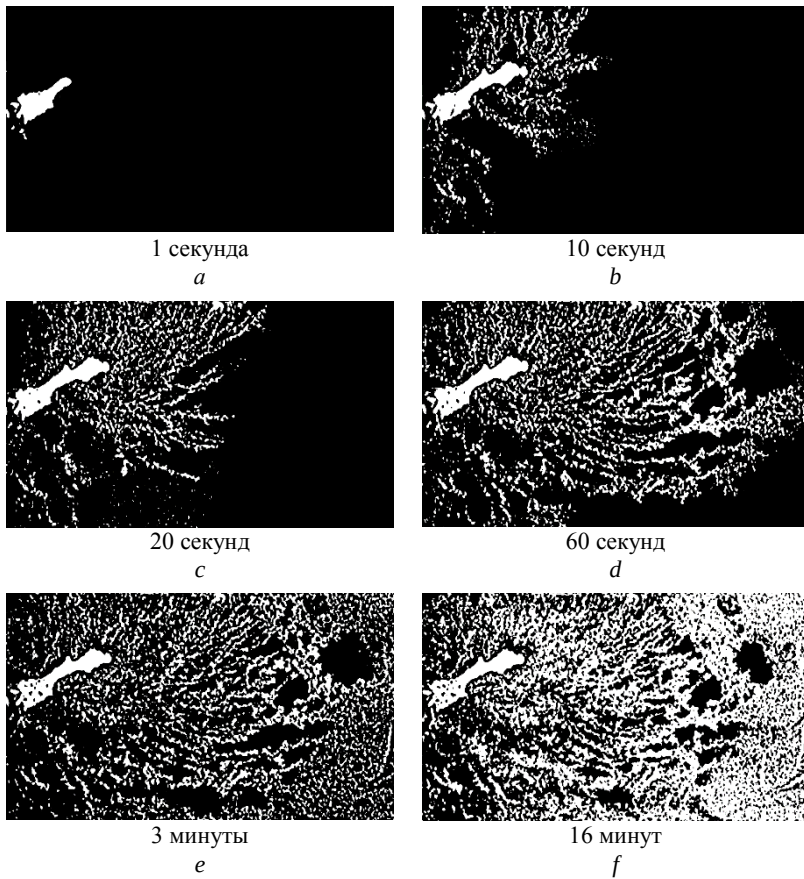
После заполнения нефтью (остаток мы выдавили шприцем, чтобы ячейка была полностью заполнена нефтью) начали вытеснение дистиллированной водой. На рис. 5 представлен график течения, а на рис. 6 – соответствующие графику фотоизображения. Вначале, первые десятки секунд, пока вода не достигла выходного отверстия (рис. 6, *a–c*) расход низкий – 0.015 мкл/с, немного выше, чем расход по нефти. Далее, на 60-й секунде, вода достигла выходного отверстия (рис. 6, *d*), и расход резко вырос до 0.12 мкл/с (см. рис. 5). По мере заполнения водой ячейки расход увеличивается, примерно к 8-й минуте становится близким к 0.39 мкл/с, что немного меньше расхода в 0.45 мкл/с, образовавшегося примерно на 13-й минуте и остающегося примерно таким же до конца измерения на 18-й минуте. График (см. рис. 5) аппроксимирован степенной функцией  $V = 0.0019t^{1.74}$ , близкой к уравнению параболы.

На фотоизображениях (см. рис. 6) видим сильно ветвящуюся фрактальную структуру с тонкими линиями, заполняющую по мере вытеснения весь фронт модели (рис. 6, *b, c*) и вытягивающуюся лишь ближе к выходу (рис. 6, *d*), что отличается от вытеснения в ячейке без шариков (см. рис. 2), в которой ветвящиеся структуры значительно толще и располагаются по центру ячейки.



**Рис. 5.** Зависимость прошедшего объема от времени при вытеснении нефти водой в ячейке Хеле-Шоу, заполненной шариками, при перепаде давления 20 кПа. Приведенные зависимости объема ( $V$ ) от времени ( $t$ ) соответствуют отмеченным прямым линиям. Измерения проводились каждую секунду, поэтому график имеет вид сплошной линии. Точками показана аппроксимация всего графика степенной функцией

**Fig. 5.** Dependence of the passed volume on time in the case of oil displacement by water in the Hele-Shaw cell filled with balls at a pressure drop of 20 kPa. The volume ( $V$ ) versus time ( $t$ ) expressions correspond to highlighted straight lines. Solid lines are the result of the measurements taken every second. Dotted lines show the approximation of the entire graph by a power function



**Рис. 6.** Фотоизображения, приведенные в бинарном (черно-белом) виде, неустойчивого вытеснения нефти водой в ячейке Хеле-Шоу, заполненной шариками (движение слева направо) при перепаде давления 20 кПа. Время от начала эксперимента приведено под кадрами

**Fig. 6.** Binary (black and white) images of the unstable oil displacement by water in the Hele-Shaw cell filled with balls (left-to-right motion) at a pressure drop of 20 kPa. The duration of a test run is indicated below the images

Соответствующие фрактальные размерности, найденные из неустойчивого вытеснения нефти водой в ячейке Хеле-Шоу (см. рис. 6), приведены в табл. 2.

Таблица 2

**Фрактальные размерности бинарных изображений (см. рис. 6)**

| Время, с | BW     | W + BW |
|----------|--------|--------|
| 1        | 1.0967 | 1.4199 |
| 10       | 1.4709 | 1.5964 |
| 20       | 1.5630 | 1.6570 |
| 60       | 1.6384 | 1.7387 |
| 180      | 1.6865 | 1.7642 |
| 960      | 1.7244 | 1.8893 |

Из табл. 2 видим, что вычисленная в программе HarFa фрактальная размерность образовавшихся «вязких пальцев» при неустойчивом вытеснении в момент прорыва (60-я секунда) равна 1.74 ( $W + BW$ ), полученное значение совпадает с вычислением фрактальной размерности в такой же момент прорыва для ячейки без шариков (см. рис. 2); аналогичные фрактальные расчеты в ячейке Хеле-Шоу без шариков отображены в работе [12]. Поскольку увеличение области вытеснения приводит к увеличению фрактальной размерности, ее можно использовать в качестве оценки остаточной нефтенасыщенности.

Как оказалось, в модели Хеле-Шоу с латунной фольгой вода частично просачивалась через латунный лист при перепаде давления свыше 200 кПа, поскольку из-за недостаточной деформации латунного листа создавались неоднородности по зазору. Мы вновь сделали аналогичное устройство ячейки Хеле-Шоу, поставившись исправить минусы предыдущей модели. Зазор обеспечили с помощью 20 слоев тонкой алюминиевой фольги толщиной 10 мкм, суммарный зазор составил 200 мкм. Неоднородности затяжки крепления болтов выравниваются фольгой, и вода не просачивается. В фольге вырезано окошко для фильтрации длиной 40 мм и шириной 10 мм. Расчетный расход по течению дистиллированной воды по формуле (1) при перепаде 10 кПа в данной ячейке составляет 1 667 мкл/с. Для изучения фильтрации в трехмерной модели с шариками на выходе ячейки поместили кусок покровного стекла, обеспечивая зазор на выходе в 40 мкм, и измерили расход по течению дистиллированной воды при перепаде давления 10 кПа, он составил 330 мкл/с. Уменьшение выходного отверстия за счет наличия стекла привело к уменьшению расхода в 5 раз, отношение расходов согласуется с ранее приведенными результатами для ячейки Хеле-Шоу схожей конструкции.

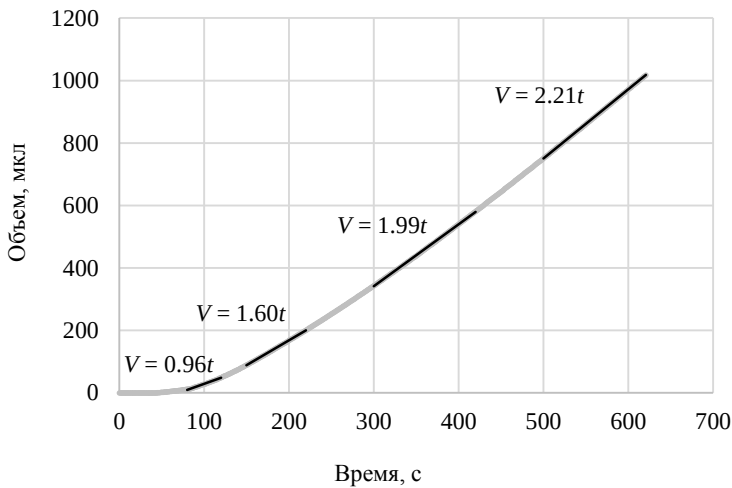
Аналогично предыдущему эксперименту заполнили ячейку шариками с помощью ультразвуковой ванны. Измерили расход по течению дистиллированной воды, он составил 0.55 мкл/с при перепаде давления 20 кПа, что в 1 200 раз меньше расхода в ячейке со стеклом без шариков (660 мкл/с при перепаде давления 20 кПа). Экспериментальный расход по течению дистиллированной воды при 50 кПа составил 2.3 мкл/с. Заполнили нефтью полученную ячейку с шариками и стали вытеснять ее водой при постоянном перепаде давления 50 кПа (рис. 7, 8).

На 25-й секунде вода достигла края ячейки (рис. 8, с), и расход увеличился до 0.96 мкл/с (см. рис. 7). В отличие от эксперимента при 10 кПа, здесь изначально подано давление 50 кПа, вытеснение идет не по самому краю, а ближе к центру модели.

Ближе к 10 минутам расход, ставший равным 2.21 мкл/с (см. рис. 7), близкий к измеренному расходу по воде (2.3 мкл/с), свидетельствует о практически полном вымывании нефти.

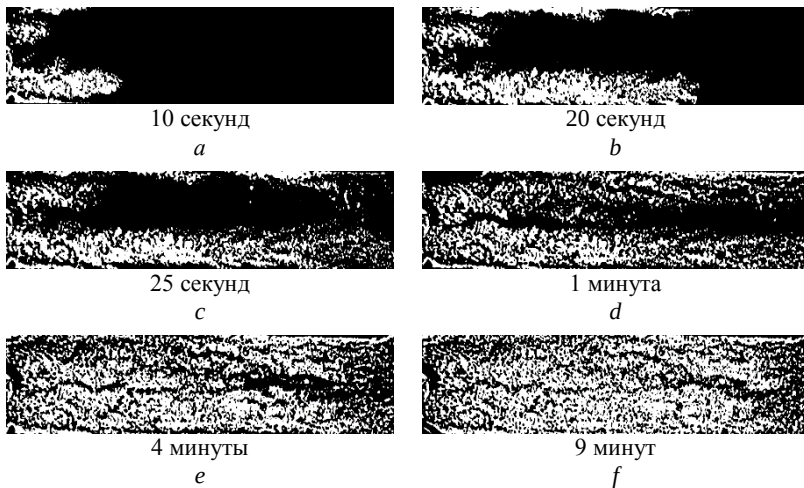
Заполнили нефтью полученную ячейку с шариками и стали вытеснять ее газом (воздухом) при постоянном перепаде давления 10 кПа (рис. 9).

На 344-й секунде газ достиг края ячейки, и расход увеличился до 0.22 мкл/с. Расход оставался низким, как и в прошлой модели при вытеснении водой, газ вначале заполнялся по краям ячейки, там, где поровое пространство выше, что связано с малым подаваемым давлением (10 кПа). Не дождавшись полного вытеснения нефти, промыли ячейку, заполнили нефтью и вновь стали вытеснять нефть газом (воздухом) при перепаде давления 50 кПа (рис. 10, 11).



**Рис. 7.** Зависимость прошедшего объема от времени при вытеснении нефти водой в ячейке Хеле-Шоу, заполненной шариками, при перепаде давления 50 кПа. Приведенные на графике зависимости объема ( $V$ ) от времени ( $t$ ) соответствуют отмеченным прямым линиям. Измерения проводились каждую секунду, поэтому график имеет вид сплошной линии

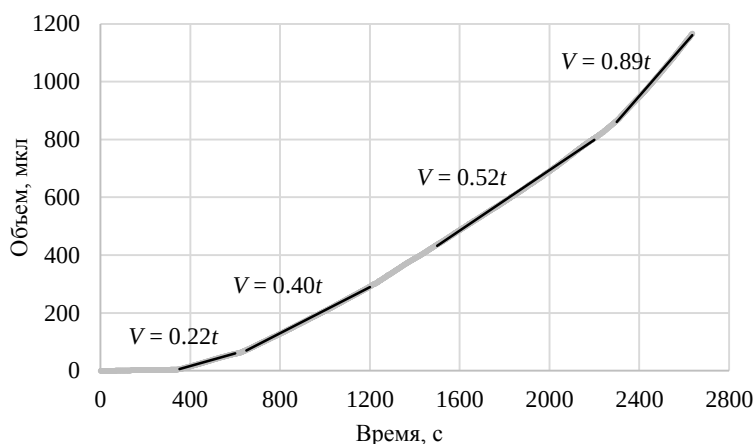
**Fig. 7.** Dependence of the passed volume on time in the case of oil displacement by water in the Hele-Shaw cell filled with balls at a pressure drop of 50 kPa. The volume ( $V$ ) versus time ( $t$ ) expressions correspond to highlighted straight lines. Solid lines are the result of the measurements taken every second



**Рис. 8.** Фотоизображения, приведенные в бинарном (черно-белом) виде, неустойчивого вытеснения нефти водой в ячейке Хеле-Шоу, заполненной шариками (движение слева направо) при перепаде давления 50 кПа. Время от начала эксперимента приведено под кадрами

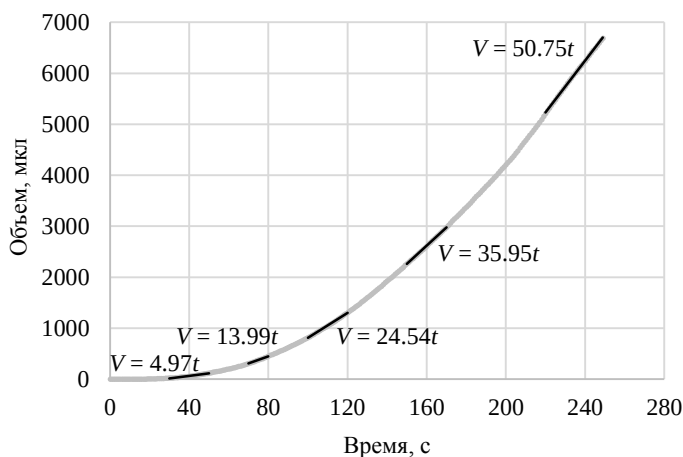
**Fig. 8.** Binary (black and white) images of the unstable oil displacement by water in the Hele-Shaw cell filled with balls (left-to-right motion) at a pressure drop of 50 kPa. The duration of a test run is indicated below the images





**Рис. 9.** Зависимость прошедшего объема от времени при вытеснении нефти газом (воздухом) в ячейке Хеле-Шоу, заполненной шариками, при перепаде давления 10 кПа. Приведенные на графике зависимости объема ( $V$ ) от времени ( $t$ ) соответствуют отмеченным прямым линиям. Измерения проводились каждую секунду, поэтому график имеет вид сплошной линии

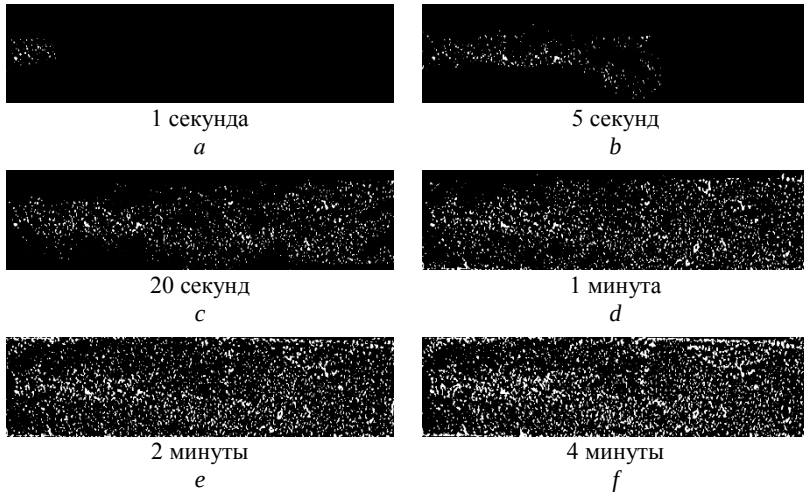
**Fig. 9.** Dependence of the passed volume on time in the case of oil displacement by gas (air) in the Hele-Shaw cell filled with balls at a pressure drop of 10 kPa. The volume ( $V$ ) versus time ( $t$ ) expressions correspond to highlighted straight lines. Solid lines are the result of the measurements taken every second



**Рис. 10.** Зависимость прошедшего объема от времени при вытеснении нефти газом (воздухом) в ячейке Хеле-Шоу, заполненной шариками, при перепаде давления 50 кПа. Приведенные на графике зависимости объема ( $V$ ) от времени ( $t$ ) соответствуют отмеченным прямым линиям. Измерения проводились каждую секунду, поэтому график имеет вид сплошной линии

**Fig. 10.** Dependence of the passed volume on time in the case of oil displacement by gas (air) in the Hele-Shaw cell filled with balls at a pressure drop of 50 kPa. The volume ( $V$ ) versus time ( $t$ ) expressions correspond to highlighted straight lines. Solid lines are the result of the measurements taken every second

Как и в предыдущих экспериментах, при достижении выхода расход увеличился с 0.17 мкл/с до 1 мкл/с. Соответствующие графику (см. рис. 10) изображения приведены на рис. 11. В отличие от 10 кПа, при 50 кПа газ идет по центру модели, а не по краю.



**Рис. 11.** Фотоизображения, приведенные в бинарном (черно-белом) виде, неустойчивого вытеснения нефти газом (воздухом) в ячейке Хеле-Шоу, заполненной шариками (движение слева направо) при перепаде давления 50 кПа. Время от начала эксперимента приведено под кадрами

**Fig. 11.** Binary (black and white) images of the unstable oil displacement by gas (air) in the Hele-Shaw cell filled with balls (left-to-right motion) at a pressure drop of 50 kPa. The duration of a test run is indicated below the images

В отличие от движения воды (см. рис. 7), газ за то же время проходит в намного большем объеме с большим расходом (см. рис. 10), однако, судя по фотоизображениям (см. рис. 8, 11), при одинаковом перепаде давления и времени вытеснения вытеснение нефти водой лучше, чем газом, т.е. остаточная нефтенасыщенность при вытеснении водой меньше, чем при вытеснении газом. Результат подтверждается сравнением фрактальных размерностей для одинакового пройденного времени 4 минуты при перепаде давления 50 кПа: при вытеснении водой (см. рис. 8, e) фрактальная размерность  $W + BW = 1.8783$ , а при вытеснении газом (см. рис. 11, f)  $W + BW = 1.7229$ .

В плоской модели без шариков заполнение нефтью устойчивое, однородное, а вытеснение нефти водой идет по центру даже для малых перепадов давления [12]. В модели с шариками, как оказалось, заполнение нефтью и вытеснение водой сильно зависят от неоднородности скелета модели. По краям модели, где объемное пространство дисперсионной среды больше, жидкости двигаться легче, между крупными шариками пространство больше, движение тоже пойдет быстрее, чем между мелкими шариками. При достижении выхода модели движение стремится идти по пройденному каналу. При увеличении перепада давления движение становится более однородным, «вязкие пальцы» начинают сразу «ветвиться», разрастаться.

### Заключение

Представлены результаты экспериментального исследования неустойчивого несмешивающегося вытеснения нефти газом или водой при постоянном перепаде давления в ячейке Хеле-Шоу, заполненной стеклянными шариками, физической модели пористой трещины в нефтяном пласте.

Разработана установка с использованием методов визуализации для микрогидродинамических исследований, в том числе процессов вытеснения. Все элементы установки управляются с компьютера и в синхронизованном виде сохраняются в нем (видеоизображения, показания датчика давления, весов и заданного расхода).

Представленные данные наглядно иллюстрируют закономерный вывод: чем больше давление на входе (и, соответственно, перепад давления и скорость фильтрации), тем выше эффективность вытеснения. При равном времени вытеснения нефти в ячейке Хеле-Шоу газ проходит в значительно большем объеме по сравнению с водой, однако вытеснение водой при этом более полное. Зависимость объема протекшей жидкости от времени имеет нелинейный вид. Структура вытеснения при постоянном перепаде давления изменяется до прорыва и после. После прорыва как газа, так и воды наблюдается локальное перераспределение давления, что приводит к дополнительному доизвлечению нефти.

Сравнительное изучение устойчивого вытеснения воды нефтью, неустойчивого вытеснения нефти водой и газом в ячейке Хеле-Шоу со стеклянными шариками и ранее полученных результатов в плоской ячейке Хеле-Шоу без шариков [12] показало, что заполнение нефтью в модели с шариками и вытеснение водой сильно зависят от неоднородности скелета модели, особенно при течении с малым перепадом давления. По краям модели и между крупными шариками, где больше объемное пространство дисперсионной среды, движение идет быстрее. При устойчивом вытеснении воды нефтью в модели с шариками на выходе образуется «воронка», которая постепенно разрастается, движение стремится идти по пройденному каналу, а при вытеснении в модели без шариков фронт вытеснения ровный, перпендикулярный направлению течения. При неустойчивом вытеснении с малым перепадом давления движение ориентировано по краям ячейки, с увеличением перепада давления движение становится более однородным, «вязкие пальцы» начинают «ветвиться», разрастаться еще до достижения края модели. При неустойчивом вытеснении в плоской модели без шариков «вязкие пальцы» ориентированы по центру даже для малых перепадов давления [12].

Ультразвуковое воздействие при постоянно действующем перепаде давления является качественным способом воздействия, оно оказалось важным для равномерного заполнения ячейки шариками и их однородного распределения.

### Список источников

1. Davis J.A., Jones S.C. Displacement mechanisms of micellar solutions // *Journal of Petroleum Technology*. 1968. V. 20, No 12. P. 1415–1428. doi: 10.2118/1847-2-PA
2. Нигматулин Р.И., Ахметов А.Т., Федоров К.М. О механизме вытеснения нефти из пористой среды мицеллярными растворами // *Доклады АН СССР*. 1987. Т. 293, № 3. С. 558–563. URL: <http://www.mathnet.ru/links/6a23ef4d31c7ac01deade4cbfe0ba73b/dan47862.pdf>

3. Homsy G.M. Viscous fingering in porous media // Annual review of fluid mechanics. 1987. V. 19, No. 1. P. 271–311. doi: 10.1146/annurev.fl.19.010187.001415
4. Jackson S.J., Power H., Giddings D., Stevens D. The stability of immiscible viscous fingering in Hele-Shaw cells with spatially varying permeability // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2017. V. 320. P. 606–632. doi: 10.1016/j.cma.2017.03.030
5. Chesnokov A., Liapidevskii V. Viscosity-stratified flow in a Hele–Shaw cell // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2017. V. 89. P. 168–176. 10.1016/j.ijnonlinmec.2016.12.016
6. Мавлетов М.В., Валиев А.А. Эффективность неустойчивого вытеснения нефти из ячейки Хеле-Шоу // Нефтепромышленное дело. 2018. № 8. С. 42–45. doi: 10.30713/0207-2351-2018-8-42-45
7. Brandao R., Miranda J.A. Capillary and geometrically driven fingering instability in nonflat Hele-Shaw cells // Physical Review E. 2017. V. 95, No. 3. Art. 033104. doi: 10.1103/PhysRevE.95.033104
8. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М. : Физматгиз, 1959.
9. Li J., Du Q., Sun C. An improved box-counting method for image fractal dimension estimation // Pattern Recognition. 2009. Vol. 42, No. 11. P. 2460–2469. doi: 10.1016/j.patcog.2009.03.001
10. McCloud K.V., Maher J.V. Experimental perturbations to Saffman-Taylor flow // Physics Reports. 1995. V. 260, No. 3. P. 139–185. doi: 10.1016/0370-1573(95)91133-U
11. Nittmann J., Daccord G., Stanley H.E. Fractal growth viscous fingers: quantitative characterization of a fluid instability phenomenon // Nature. 1985. V. 314, No. 6007. P. 141–144. doi: 10.1038/314141a0
12. Валиев А.А., Ахметов А.Т., Рахимов А.А. Неустойчивое вытеснение в плоскопараллельном микроканале // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 65. С. 68–82. doi: 10.17223/19988621/65/5

## References

1. Davis J.A., Jones S.C. (1968) Displacement mechanisms of micellar solutions. *Journal of Petroleum Technology*. 20(12). pp. 1415–1428. DOI: 10.2118/1847-2-PA.
2. Nigmatulin R.I., Akhmetov A.T., Fedorov K.M. (1987) O mekhanizme vytesneniya nefti iz poristoy sredy mitsellyarnymi rastvorami [On the mechanism of oil displacement from a porous medium by micellar solutions]. *Proceedings of the Academy of Sciences USSR*. 293(3). pp. 558–563.
3. Homsy G.M. (1987) Viscous fingering in porous media. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 19(1). pp. 271–311. DOI: 10.1146/annurev.fl.19.010187.001415.
4. Jackson S.J., Power H., Giddings D., Stevens D. (2017) The stability of immiscible viscous fingering in Hele-Shaw cells with spatially varying permeability. *Computer Methods in / Applied Mechanics and Engineering*. 320. pp. 606–632. DOI: 10.1016/j.cma.2017.03.030.
5. Chesnokov A., Liapidevskii V. (2017) Viscosity-stratified flow in a Hele–Shaw cell. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 89. pp. 168–176. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2016.12.016.
6. Mavletov M.V., Valiev A.A. (2018) Effektivnost' neustoychivogo vytesneniya nefti iz yacheyki Hele-Shou [Efficiency of unstable oil displacement from a Hele-Shaw cell]. *Neftepromyslovoe delo – Oilfield Engineering*. 8. pp. 42–45. DOI: 10.30713/0207-2351-2018-8-42-45.
7. Brandao R., Miranda J.A. (2017) Capillary and geometrically driven fingering instability in non-flat Hele-Shaw cells. *Physical Review E*. 95(3). Article 033104. DOI: 10.1103/PhysRevE.95.033104.
8. Loitsyanskiy L.G. (1959) *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid and gas mechanics]. Moscow: Fizmatgiz.
9. Li J., Du Q., Sun C. (2009) An improved box-counting method for image fractal dimension estimation. *Pattern Recognition*. 42(11). pp. 2460–2469. DOI: 10.1016/j.patcog.2009.03.001.

10. McCloud K.V., Maher J.V. (1995) Experimental perturbations to Saffman-Taylor flow. *Physics Reports*. 260(3). pp. 139–185. DOI: 10.1016/0370-1573(95)91133-U.
11. Nittmann J., Daccord G., Stanley H.E. (1985) Fractal growth viscous fingers: quantitative characterization of a fluid instability phenomenon. *Nature*. 314. Article 6007. pp. 141–144. DOI: 10.1038/314141a0.
12. Valiev A.A., Akhmetov A.T., Rakhimov A.A. (2020) Neustoychivoe vytesnenie v ploskoparallel'nom mikrokanale [Unstable displacement in a plane-parallel microchannel]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 65. pp. 68–82. DOI: 10.17223/19988621/65/5.

**Сведения об авторах:**

**Рахимов Артур Ашотович** – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории «Экспериментальная гидродинамика» Института механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа Россия. E-mail: ragar83@mail.ru

**Валиев Азат Ахматович** – младший научный сотрудник лаборатории «Экспериментальная гидродинамика» Института механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа Россия. E-mail: azatphysic@mail.ru

**Information about the authors:**

**Rakhimov Artur A.** (Candidate of Physics and Mathematics, Researcher in Laboratory of Experimental Hydrodynamics IMech UFRC RAS, Mavlutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa, Russian Federation). E-mail: ragar83@mail.ru

**Valiev Azat A.** (Junior Researcher Researcher in Laboratory of Experimental Hydrodynamics IMech UFRC RAS, Mavlutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa, Russian Federation). E-mail: azatphysic@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 06.12.2021; принята к публикации 19.05.2022*

*The article was submitted 06.12.2021; accepted for publication 19.05.2022*

Научная статья

УДК 532.5.013.2

doi: 10.17223/19988621/77/12

## Моделирование нестационарной фильтрации в системе пласт – трещина гидроразрыва

Ильдус Лутфурахманович Хабибуллин<sup>1</sup>, Артур Альфирович Хисамов<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

<sup>1</sup> habibi.bsu@mail.ru

<sup>2</sup> khisamovartur@list.ru

**Аннотация.** Представлены результаты моделирования процесса нестационарной фильтрации жидкости в пласте, вскрытом скважиной, которая пересекается по всей толщине пласта вертикальной трещиной гидроразрыва. Используя метод интегральных преобразований Лапласа, построено аналитическое решение системы уравнений, описывающей фильтрацию жидкости в пласте и в трещине. На основе анализа полученных решений установлены основные характерные особенности исследуемого процесса фильтрации в системе пласт–трещина.

**Ключевые слова:** пласт, трещина гидроразрыва, нестационарная фильтрация, аналитическое решение, метод преобразований Лапласа, распределение давления, дебит скважины

**Для цитирования:** Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А. Моделирование нестационарной фильтрации в системе пласт – трещина гидроразрыва // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 77. С. 158–168. doi: 10.17223/19988621/77/12

Original article

## Modeling of unsteady filtration in a formation – hydraulic fracture system

Il'dus L. Khabibullin<sup>1</sup>, Artur A. Khisamov<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Bashkir State University, Ufa, Russian Federation

<sup>1</sup> habibi.bsu@mail.ru

<sup>2</sup> khisamovartur@list.ru

**Abstract.** This paper presents the results of modeling of unsteady fluid filtration in the formation penetrated by a well, which intersects a vertical hydraulic fracture throughout the entire thickness of the formation. The model of a bilinear fluid flow in a formation –

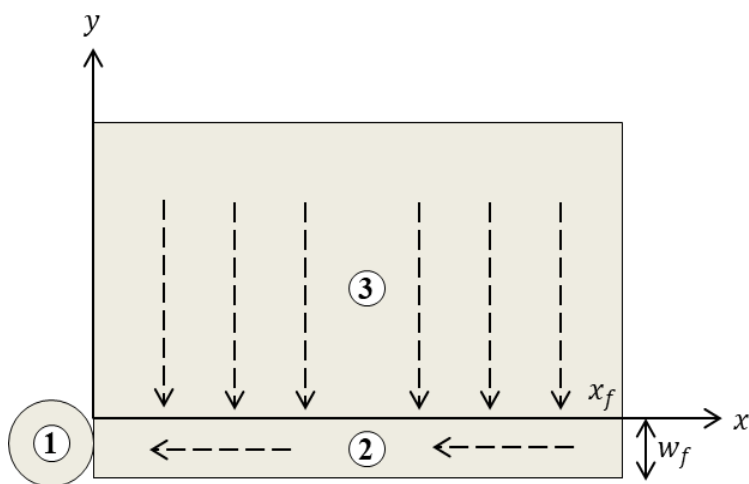
vertical hydraulic fracture system is considered in the case when the horizontal extent of the formation is considered to be infinite, and the fracture is of a finite length. The bilinearity of the flow means that in the formation – fracture system there are two mutually perpendicular fluid flows: from the formation to the fracture and along the fracture to the well. The analytical solution to a system of equations describing fluid filtration in the formation and fracture is obtained using the Laplace transform method. Analyzing the derived solution, main characteristic features of the filtration in the formation – fracture system are determined.

**Keywords:** formation, hydraulic fracture, unsteady filtration, analytical solution, Laplace transform method, pressure distribution, well flow rate

**For citation:** Khabibullin, I.L., Khisamov, A.A. (2022) Modeling of unsteady filtration in a formation – hydraulic fracture system. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 158–168. doi: 10.17223/19988621/77/12

Рассматривается модель билинейного потока флюида в системе пласт – вертикальная трещина гидравлического разрыва пласта, для случая, когда протяженность пласта по горизонтали считается бесконечной, а трещина имеет конечную длину. Билинейность потока означает, что в системе пласт–трещина реализуется два взаимно перпендикулярных потока флюида – из пласта в трещину и по трещине к скважине. Флюид из пласта в трещину поступает только через ее боковые поверхности, поток флюида через торцы трещины не учитывается вследствие его незначительности. Давление в трещине принимается равным его осредненному значению по ширине трещины. Эти приближения являются приемлемыми, поскольку длина и высота трещины намного больше, чем ее ширина. Аналогичные модели в случае трещины бесконечной длины рассмотрены в [1–6].

Область фильтрации является симметричной относительно осей  $x$  и  $y$ , поэтому при описании исследуемого процесса фильтрации можно рассматривать только одну четвертую часть этой области (рис. 1).



**Рис. 1.** Схема области течения (вид сверху): 1 – скважина, 2 – трещина, 3 – пласт  
**Fig. 1.** Flow area diagram (top view): (1) well, (2) fracture, and (3) formation

Распределения давления в пласте  $P_r$  и трещине  $P_f$  описываются уравнениями [1–5]:

$$\frac{\partial P_r}{\partial t} = \kappa_r \frac{\partial^2 P_r}{\partial y^2}, \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad 0 \leq y \leq \infty, \quad (1)$$

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = \kappa_f \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} + \frac{\kappa_f k_r}{w_f k_f} \frac{\partial P_r}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad 0 \leq x \leq x_f, \quad -w_f \leq y \leq 0. \quad (2)$$

Здесь  $t$  – время, индексы  $r$  и  $f$  относятся к пласту и трещине,  $\kappa$  – коэффициент пьезопроводности,  $k$  – проницаемость,  $w_f$  – полуширина трещины,  $x_f$  – полудлина трещины.

Второе слагаемое в правой части (2) описывает поток жидкости через боковую поверхность трещины.

Начальное распределение давления принимается в виде:

$$P_r(x, y, t = 0) = P_f(x, t = 0) = P_0.$$

На боковой поверхности трещины (плоскость раздела пласт–трещина) имеет место условие равенства давлений

$$P_r(x, y = 0, t) = P_f(x, t). \quad (3)$$

Также выполняются условия:

$$P_r(x, y = \infty, t) = P_0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial P_f(x = x_f, t)}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Принимается, что скважина эксплуатируется в режиме заданного дебита  $Q$ :

$$\frac{k_f h_r w_f}{\mu} \frac{\partial P_f(x = 0, t)}{\partial x} = Q. \quad (6)$$

Здесь  $\mu$  – вязкость жидкости,  $h_r$  – толщина пласта, которая равна высоте трещины, т.е. трещина вскрывает пласт на всю толщ.

Введя безразмерные переменные

$$\bar{P}_r = \frac{P_r - P_0}{P^*}, \bar{P}_f = \frac{P_f - P_0}{P^*}, P^* = \frac{Q\mu}{k_r h_r}, \bar{y} = \frac{y}{x_f}, \bar{x} = \frac{x}{x_f}, \bar{t} = t \frac{\kappa_r}{x_f^2},$$

задачу (1)–(6) представим в виде:

$$\frac{\partial \bar{P}_r}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 \bar{P}_r}{\partial \bar{y}^2}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \bar{P}_f}{\partial \bar{t}} = a \frac{\partial^2 \bar{P}_f}{\partial \bar{x}^2} + b \frac{\partial \bar{P}_r}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0}, \quad (8)$$

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t} = 0) = \bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t} = 0) = 0, \quad (9)$$

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y} = 0, \bar{t}) = \bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}), \quad (10)$$

$$\frac{\partial \bar{P}_f(\bar{x} = 0, \bar{t})}{\partial \bar{x}} = \frac{b}{a}, \quad \frac{\partial \bar{P}_f(\bar{x} = 1)}{\partial \bar{x}} = 0, \quad (11)$$

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y} = \infty, \bar{t}) = 0. \quad (12)$$

Здесь введены обозначения  $a = \kappa_f / \kappa_r$ ,  $b = a(k_r / k_f)(x_f / w_f)$ , причем величина  $\frac{a}{b} = \frac{k_f w_f}{k_r x_f}$  совпадает с безразмерной проводимостью трещины, широко используемой в литературе. Также отметим, что рассматриваемая модель позволяет исследовать процессы как закачки жидкости в пласт, так и отбора жидкости из пласта. Эти случаи отличаются знаком дебита  $Q$  в условии (6).



Для решения задачи (7)–(12) используем метод преобразований Лапласа по переменной  $\bar{t}$ :

$$\bar{P}(\bar{x}, s) = L[\bar{P}(\bar{x}, \bar{t})] = \int_0^\infty \bar{P}(\bar{x}, \bar{t}) e^{-s\bar{t}} d\bar{t}.$$

Здесь  $s$  – переменная преобразования Лапласа.

С учетом начальных условий (9) задача (7)–(12) в пространстве изображений Лапласа преобразуется к виду:

$$\frac{d^2 \bar{P}_f}{d\bar{x}^2} + \frac{b}{a} \frac{d\bar{P}_r}{d\bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} = \frac{s}{a} \bar{P}_f, \quad (13)$$

$$\frac{d\bar{P}_f(\bar{x}=0)}{d\bar{x}} = \frac{b}{a} \frac{1}{s}, \quad (14)$$

$$\frac{d\bar{P}_f(\bar{x}=1)}{d\bar{x}} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{d^2 \bar{P}_r}{d\bar{y}^2} = s \bar{P}_r, \quad (16)$$

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}=0, s) = \bar{P}_f(\bar{x}, s); \quad \bar{P}_r(\bar{y} \rightarrow \infty, s) = 0. \quad (17)$$

Задача (13)–(17) решается стандартными методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение имеет вид:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, s) = -\frac{b}{a} \frac{1}{sf(s)} \frac{\text{ch}[f(s)(1-\bar{x})]}{\text{sh}[f(s)]}, \quad f(s) = \sqrt{\frac{s}{a} + \frac{b}{a}\sqrt{s}}. \quad (18)$$

Здесь  $\text{ch}$  и  $\text{sh}$  – символы гиперболических функций косинуса и синуса.

При известном  $\bar{P}_f(\bar{x}, s)$  по (18) распределение давления в пласте определяется из выражения

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}, s) = \bar{P}_f(\bar{x}, s) e^{-\bar{y}\sqrt{s}}. \quad (19)$$

Рассмотрим нахождение оригинала в (18). Для этого данное выражение представим в виде двух сомножителей, зависящих от параметра  $s$ :

$$\bar{P}_f(x, s) = -\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{1}{s} L[V(x, t)], \quad (20)$$

здесь

$$L[V(\bar{x}, \bar{t})] = \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{b^2} + \sqrt{\frac{s}{b^2}}}} \frac{\text{ch} \left[ (1-\bar{x}) \frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{s}{b^2} + \sqrt{\frac{s}{b^2}}} \right]}{\text{sh} \left[ \frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{s}{b^2} + \sqrt{\frac{s}{b^2}}} \right]}. \quad (21)$$

На основе теоремы о подобии  $f(at) \doteq \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$  [8] (здесь и далее функции  $f(t)$  и  $F(s)$  соответственно обозначают оригинал и изображение) выражение (21) можно записать в виде:

$$L[V(\bar{x}, \bar{t}b^2)] \frac{1}{b^2} = \frac{1}{\sqrt{s + \sqrt{s}}} \frac{\text{ch} \left[ (1-\bar{x}) \frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{s + \sqrt{s}} \right]}{\text{sh} \left[ \frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{s + \sqrt{s}} \right]}. \quad (22)$$

Далее, используя правило преобразования Лапласа [8]

$$\frac{1}{s} F(s) \equiv \int_0^t f(\tau) d\tau,$$

выражение (20) представим в виде:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = -\frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{\bar{t}} V(\bar{x}, \tau) d\tau. \quad (23)$$

Данное выражение определяет распределение давления в трещине, при этом  $V(\bar{x}, \tau)$  находится из (22). Для нахождения этого оригинала используем следующее правило преобразования Лапласа [9]:

$$L^{-1}[F(s + \sqrt{s})] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u}{(t-u)^{3/2}} \exp\left(-\frac{u^2}{4(t-u)}\right) f(u) du,$$

$$\text{здесь } f(t) = L^{-1}F(s), F(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{\text{ch}\left[(1-\bar{x})\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{s}\right]}{\text{sh}\left[\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{s}\right]}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} V(\bar{x}, \bar{t}b^2) \frac{1}{b^2} = \\ = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}b} \int_0^{\bar{t}b^2} \frac{u}{(\bar{t}b^2 - u)^{3/2}} \exp\left(-\frac{u^2}{4(\bar{t}b^2 - u)}\right) \theta_0\left(\frac{1-\bar{x}}{2} \middle| \frac{i\pi u a}{b^2}\right) du. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь использовано следующее соотношение, связывающее изображение и оригинал [9]:

$$L^{-1}\left[\frac{\text{ch}\left[\frac{b}{\sqrt{a}}(1-\bar{x})\sqrt{s}\right]}{\sqrt{s} \text{sh}\left[\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{s}\right]}\right] = \frac{\sqrt{a}}{b} \theta_0\left(\frac{1-\bar{x}}{2} \middle| \frac{i\pi \bar{t} a}{b^2}\right). \quad (25)$$

Тета-функция  $\theta_0(v|\tau)$  выражается в виде ряда [9]

$$\theta_0(v|\tau) = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \exp\left(-\frac{i\pi}{\tau} \left(v - \frac{1}{2} + n\right)^2\right).$$

Таким образом, имеем

$$\theta_0\left(\frac{1-\bar{x}}{2} \middle| \frac{i\pi \bar{t} a}{b^2}\right) = \frac{b}{\sqrt{\pi a \bar{t}}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \exp\left(-\frac{b^2(2n-\bar{x})^2}{4a\bar{t}}\right). \quad (26)$$

Подставляя (24) в (23) с учетом (26) находим

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| $\begin{aligned} \bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = & -\frac{b^2}{2\pi\sqrt{a}} \int_0^{\bar{t}} d\tau \times \\ & \times \int_0^{\tau b^2} \exp\left(-\frac{u^2}{4(\tau b^2 - u)}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{b^2(2n-\bar{x})^2}{4a\tau}\right) \cdot \frac{\sqrt{u} du}{(\tau b^2 - u)^{3/2}}. \end{aligned}$ | (27) |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|

Изменяя в этом двойном интеграле порядок интегрирования и вычисляя интеграл по  $\tau$ :

$$\int_{\frac{u}{b^2}}^{\bar{t}} \exp\left(-\frac{u^2}{(\tau b^2 - u)}\right) \frac{d\tau}{(\tau b^2 - u)^{3/2}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{ub^2} \text{erfc}\left(\frac{u}{2\sqrt{b^2 \bar{t} - u}}\right),$$

имеем

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = -\frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_0^{b^2 \bar{t}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp\left(-\frac{b^2(2n - \bar{x})^2}{4au}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{u}{2\sqrt{b^2 \bar{t} - u}}\right) \frac{du}{\sqrt{u}} \quad (28)$$

Используя замену переменной  $u = \rho^2 b^2 \bar{t}$ , это выражение можно представить в виде:

$$\bar{P}_f(\bar{x}, \bar{t}) = -\frac{2b\sqrt{\bar{t}}}{\sqrt{\pi a}} \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp\left(-\frac{(2n - \bar{x})^2}{4a\rho^2 \bar{t}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\rho^2 b\sqrt{\bar{t}}}{2\sqrt{1 - \rho^2}}\right) d\rho. \quad (29)$$

Переход к оригиналу в (19) реализуется по аналогичной методике. В результате получено

$$\bar{P}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = -\frac{2b\sqrt{\bar{t}}}{\sqrt{\pi a}} \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp\left(-\frac{(2n - \bar{x})^2}{4a\rho^2 \bar{t}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\rho^2 b\bar{t} + \bar{y}}{2\sqrt{\bar{t}}(1 - \rho^2)}\right) d\rho. \quad (30)$$

Таким образом, решение задачи о нестационарной фильтрации в системе пласт – трещина гидроразрыва определяется выражениями (29) – (30).

Рассмотрим частные случаи, имеющие самостоятельный интерес.

При  $n = 0$  из (29) следует выражение для давления в трещине бесконечной протяженности [5].

При  $k_r = 0$  из (29) следует выражение, которое в размерном виде представляется формулой

$$P_f(x, t) = P_0 + \frac{Q\mu\sqrt{\kappa_f t}}{k_f w_f h_r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \exp\left(-\frac{(2nx_f - x)^2}{4\kappa_f t}\right) - \sqrt{\pi} \frac{2nx_f - x}{2\sqrt{\kappa_f t}} \operatorname{erfc}\left(\frac{2nx_f - x}{2\sqrt{\kappa_f t}}\right) \right].$$

Если в этом выражении все индексы  $f$  заменить на  $r$ , т.е. рассматривать только пласт, можно прийти к следующим частным случаям:

- плоскопараллельная фильтрация жидкости в пласте ограниченной галереей с заданным дебитом и непроницаемой поверхностью разлома;
- фильтрация жидкости из пласта в трещину бесконечной проводимости при отборе жидкости из скважины с заданным дебитом [1].

– при  $n = 0$  приходим к формуле распределения давления в плоскопараллельном потоке в области  $0 < x < \infty$  при заданном дебите на линии  $x = 0$  [10].

При  $\bar{x} = 0$  из (29) следует формула для давления на забое скважины от времени. Переходя к размерным величинам, эту формулу можно представить в виде:

$$P_f(0, t) = P_0 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{Q\sqrt{\mu}}{h_r} \frac{1}{\sqrt{\beta} w_f \sqrt{k_f}} \int_0^1 \left[ \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 x_f^2 \mu \beta}{k_f t \rho^2}\right) \right) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{t k_r \rho^2}}{\sqrt{\mu \beta} w_f \sqrt{1 - \rho^2}}\right) \right] d\rho. \quad (31)$$

Данное выражение можно рассматривать как так называемую типовую кривую, которая определяет зависимость давления на забое скважины от времени и параметров фильтрующей жидкости, пласта и трещины. Сопоставительный анализ типовых кривой с экспериментально определяемой в скважине кривой падения (восстановления) давления является методической основой определения параметров пласта и трещины при гидродинамических исследованиях скважин и пластов.

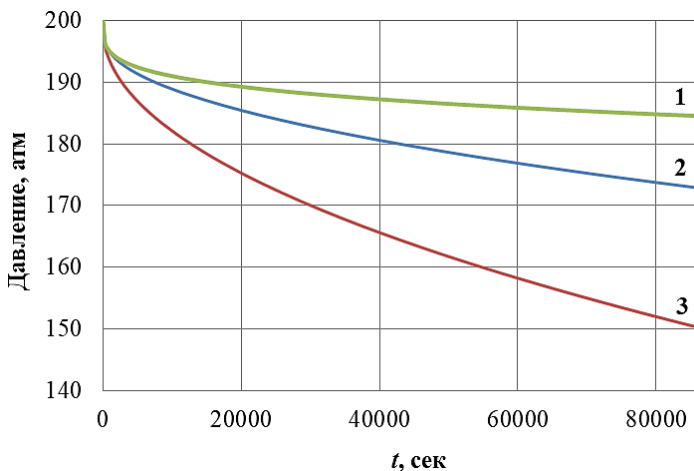
Используя закон Дарси, из (29) можно найти скорость фильтрации жидкости в трещине:

$$\bar{v} = -\frac{b}{\sqrt{\pi a a \sqrt{t}}} \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2n - \bar{x}) \exp\left(-\frac{(2n - \bar{x})^2}{4a\rho^2 \bar{t}}\right) \cdot \operatorname{erfc} \frac{\rho^2 b \sqrt{\bar{t}}}{2\sqrt{1-\rho^2}} \frac{d\rho}{\rho^2}.$$

Скорость фильтрации имеет значимость при теоретическом обосновании термометрических и трассерных методов исследований нефтяных пластов с трещинами гидроразрыва. Дело в том, что аналитические модели этих методов должны учитывать конвективный перенос соответствующих субстанций (тепла или трассера) в трещине. Интенсивность конвективного переноса, в свою очередь, определяется скоростью фильтрации в трещине.

Проанализируем некоторые результаты численных расчетов. Рассматривается отбор жидкости из пласта при следующих базовых значениях параметров: начальное давление пласта  $P_0 = 200 \cdot 10^5$  Па, мощность пласта  $h_r = 10$  м, дебит  $Q = 10$  м<sup>3</sup>/сут, ширина трещины  $w_f = 5 \cdot 10^{-3}$  м, проницаемости пласта и трещины соответственно  $k_r = 10^{-15}$  м<sup>2</sup>,  $k_f = 10^{-9}$  м<sup>2</sup>, вязкость жидкости  $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$  Па·с, коэффициент упругости  $\beta = 10^{-9}$  Па<sup>-1</sup>, полудлина трещины  $x_f = 100$  м. При расчетах параметр  $n$  изменялся в пределах от  $-3$  до  $3$ , и этого оказалось вполне достаточно вследствие быстрой сходимости рядов, входящих в решение.

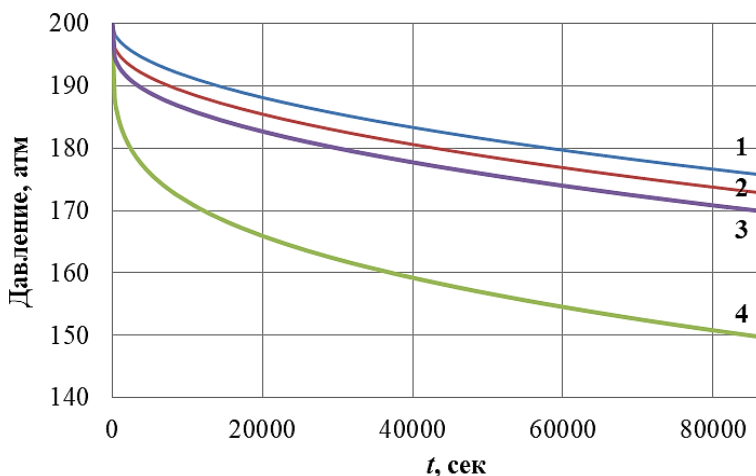
На рис. 2 показано изменение забойного давления со временем для трещин различной длины. Кривая 1 построена для трещины неограниченной протяженности (формула (29) при  $n = 0$ ). Кривые 2 и 3 относятся к трещинам полудлиной 50 и 100 м соответственно. На забое скважины происходит падение давления, причем в фиксированный момент времени уменьшение давления больше в случае более коротких трещин.



**Рис. 2.** Изменение давления на забое скважины со временем при различных длинах трещины: 1 – трещина бесконечной длины, 2, 3 – трещина конечной длины,  $x_f$  составляет 100 и 50 м соответственно

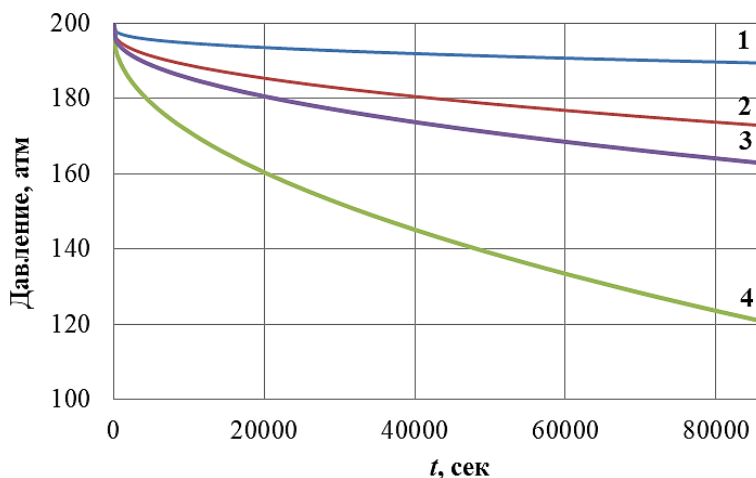
**Fig. 2.** Pressure distribution at a downhole over time at different fracture lengths: (1) infinite length and (2), (3) finite length;  $x_f$  is equal to 100 and 50 m, respectively

На рис. 3 и 4 показано изменение забойного давления в зависимости от проницаемостей трещины и пласта. Видно, что при увеличении проницаемости как трещины, так и пласта падение забойного давления уменьшается. Этот эффект наиболее заметно проявляется для пластов и трещин меньшей проницаемости.



**Рис. 3.** Изменение давления на забое скважины со временем при различных проницаемостях трещины: 1 –  $k_f = 10^{-8} \text{ м}^2$ , 2 –  $k_f = 10^{-9} \text{ м}^2$ , 3 –  $k_f = 5 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2$ , 4 –  $k_f = 10^{-10} \text{ м}^2$

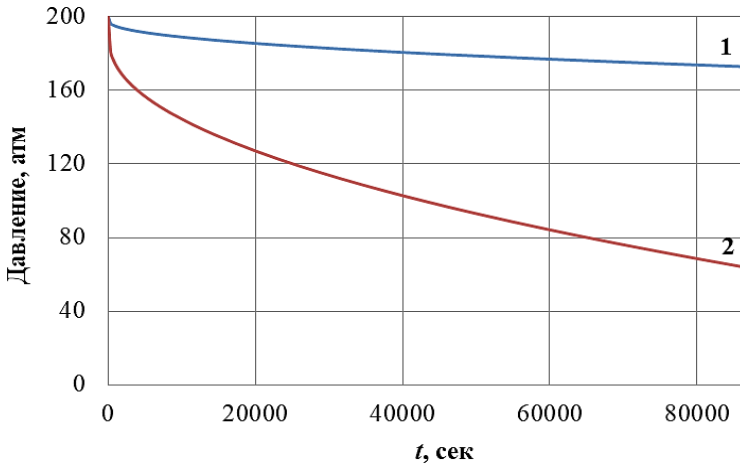
**Fig. 3.** Pressure distribution at a downhole over time at different fracture permeabilities:  $k_f = (1) 10^{-8}$ , (2)  $10^{-9}$ , (3)  $5 \cdot 10^{-10}$ , and (4)  $10^{-10} \text{ м}^2$



**Рис. 4.** Изменение давления на забое скважины со временем при различных проницаемостях пласта: 1 –  $k_r = 10^{-14} \text{ м}^2$ , 2 –  $k_r = 10^{-15} \text{ м}^2$ , 3 –  $k_r = 5 \cdot 10^{-16} \text{ м}^2$ , 4 –  $k_r = 10^{-16} \text{ м}^2$ ,  $x_f = 100 \text{ м}$

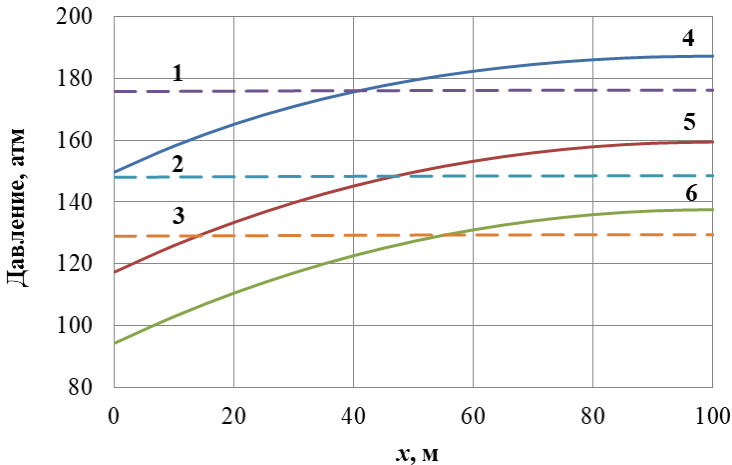
**Fig. 4.** Pressure distribution at a downhole over time at different layer permeabilities:  $k_r = (1) 10^{-14}$ , (2)  $10^{-15}$ , (3)  $5 \cdot 10^{-16}$ , and (4)  $10^{-16} \text{ м}^2$ ;  $x_f = 100 \text{ м}$

Из рис. 5 видно, что с ростом дебита падение давления на забое скважины увеличивается. Зависимость дебита от разности забойного и пластового давлений является важнейшей технической характеристикой скважины, определяющей эффективность ее эксплуатации (так называемый коэффициент продуктивности скважины). Формула (31) позволяет провести анализ зависимости чувствительности этой характеристики от всего набора параметров пласта, трещины и флюида.



**Рис. 5.** Изменение забойного давления от времени при разных значениях дебита:  
 $1 - q = 10 \text{ м}^3/\text{сут}$ ,  $2 - q = 50 \text{ м}^3/\text{сут}$

**Fig. 5.** Pressure distribution at a downhole over time at different flow rates:  
 $q = (1) 10 \text{ and } (2) 50 \text{ м}^3/\text{day}$



**Рис. 6.** Зависимость давления вдоль трещины при различных проницаемостях трещины (сплошные линии –  $k_f = 10^{-10} \text{ м}^2$ , штриховые линии –  $k_f = 10^{-8} \text{ м}^2$ ):  $t = 1 \text{ сут}$  (1, 4), 5 сут (2, 5), 10 сут (3, 6)

**Fig. 6.** Pressure distribution along the fracture at various fracture permeabilities (the solid lines indicate  $k_f = 10^{-10} \text{ м}^2$ , the dashed lines indicate  $k_f = 10^{-8} \text{ м}^2$ ):  $t = (1),(4) 1; (2),(5) 5$ , and  $(3),(6) 10 \text{ day(s)}$

Из рис. 6 (формула (29)) видно, что падение давления наблюдается по всей длине трещины, и это наиболее заметно в ближайшей окрестности скважины. Градиент давления вдоль трещины уменьшается, при  $x = x_f$  (торец трещины) градиент равен нулю, что является следствием выполнения условия непроницаемости (условие (6)). При этом с уменьшением проницаемости падение давления в трещине растет. Как следует из рис. 6, при  $k_f = 10^{-8} \text{ м}^2$  перепад давления в трещине составляет менее 1 атм. Это означает, что при принятых параметрах трещина имеет большую проводимость ( $\frac{k_f w_f}{k_r x_f} = 500$ ), поэтому распределение давления вдоль трещины становится практически однородным и равным давлению на забое скважины (приближение так называемой трещины бесконечной проводимости).

В работе получены новые аналитические формулы теории фильтрации, описывающие распределение давления в системе пласт – вертикальная трещина гидроразрыва, когда скважина, пересекаемая трещиной, эксплуатируется в режиме заданного дебита. Эти формулы позволяют найти скорость фильтрации флюида в пласте и в трещине в зависимости от времени и от гидродинамических параметров, характеризующих рассматриваемый процесс. Выражение, определяющее зависимость давления в скважине от времени, может рассматриваться как типовая кривая и использоваться при реализации гидродинамических методов исследования пластов с трещинами гидроразрыва. Выражение для скорости фильтрации в трещине можно использовать при моделировании трассерных и термометрических методов исследований пластов, вскрытых трещинами гидроразрыва.

#### Список источников

1. Каневская Р.Д. Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта. М. : Недра-Бизнесцентр, 1999. 212 с.
2. Cinco-Ley H., Samaniego-V. F. Transient Pressure Analysis for Fractured Wells // J. Pet. Tech. 1981. V. 9. P. 1749–1766.
3. Cinco-Ley H., Samaniego-V. F., Dominguez A.N. Transient Pressure Behavior for a Well with a Finite-Conductivity Vertical Fracture // Soc. Pet. Eng. J. 1978. V. 18 (04). P. 253–264.
4. Нагаева З.М., Шагапов В.Ш. Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81, вып. 3. С. 319–329.
5. Хабидуллин И.Л., Хисамов А.А. Нестационарная фильтрация в пласте с трещиной гидроразрыва // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2019. № 5. С. 6–14.
6. Хабидуллин И.Л., Хисамов А.А. Моделирование нестационарной фильтрации вокруг скважины с вертикальной трещиной гидроразрыва // Вестник Башкирского университета. 2017. Т. 22, № 2. С. 309–313.
7. Хабидуллин И.Л., Хисамов А.А. К теории билинейного режима фильтрации в пластах с трещинами гидроразрыва // Вестник Башкирского университета. 2018. Т. 23, № 4. С. 958–963.
8. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М. : Наука, 1971. 288 с.
9. Бейтмен Г., Эрдейи П. Таблицы интегральных преобразований. М. : Наука, 1969. Т. 1.
10. Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Розенберг Г.Д. Нефтегазовая гидромеханика. М. ; Ижевск : Ин-т компьютерных исслед., 2005. 544 с.

## References

1. Kanevskaya R.D. (1999) *Matematicheskoe modelirovanie razrabotki mestorozhdeniy nefi i gaza s primeneniem gidravlicheskogo razryva plasta* [Mathematical simulation of the oil and gas field development using a reservoir hydraulic fracture]. Moscow: Nedra.
2. Cinco-Ley H., Samaniego-V. F. (1981) Transient pressure analysis for fractured wells. *Journal of Petroleum Technology*. 33(9), pp. 1749–1766. DOI: 10.2118/7490-PA.
3. Cinco-Ley H., Samaniego-V. F., Dominguez A.N. (1978) Transient pressure behavior for a well with a finite-conductivity vertical fracture. *Society of Petroleum Engineers Journal*. 18(04), pp. 253–264. DOI: 10.2118/6014-PA.
4. Nagaeva Z.M., Shagapov V.Sh. (2017) Elastic seepage in a fracture located in an oil or gas reservoir. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 81(3), pp. 214–222.
5. Khabibullin I.L., Khisamov A.A. (2019) Unsteady flow through a porous stratum with hydraulic fracture. *Fluid Dynamics*. 54, pp. 594–602. DOI: 10.1134/S0015462819050057.
6. Khabibullin I.L., Khisamov A.A. (2017) Modelirovanie nestatsionarnoy fil'tratsii vokrug skvazhiny s vertikal'noy treshchinoy gidrorazryva [Modeling of unsteady filtration around the well with vertical hydraulic fracture]. *Vestnik Bashkirskogo universiteta – Bulletin of Bashkir University*. 22(2), pp. 309–313.
7. Khabibullin I.L., Khisamov A.A. (2018) K teorii bilineynogo rezhima fil'tratsii v plastakh s treshchinami gidrorazryva [On the theory of bilinear flow regime in the layers with hydraulic fracturing cracks]. *Vestnik Bashkirskogo universiteta – Bulletin of Bashkir University*. 23(4), pp. 958–963.
8. Diach G. (1971) *Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniyu preobrazovaniya Laplasa* [Guide to a practical application of the Laplace transform]. Moscow: Nauka.
9. Beytmen G., Erdelyi P. (1969) *Tablitsy integral'nykh preobrazovaniy. T. 1* [Tables of integral transformations. Vol. 1]. Moscow: Nauka.
10. Basniev K.S., Dmitriev N.M., Kanevskaya R.D., Maksimov V.M. (2006) *Podzemnaya gidromekhanika* [Underground hydrodynamics]. Moscow–Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy.

### Сведения об авторах:

**Хабибуллин Ильдус Лутфурахманович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной физики Башкирского государственного университета, Уфа, Россия. E-mail: habibi.bsu@mail.ru

**Хисамов Артур Альфирович** – аспирант кафедры прикладной физики Башкирского государственного университета, Уфа, Россия. E-mail: khisamovartur@list.ru

### Information about the authors:

**Khabibullin Il'dus L.** (Doctor of Physics and Mathematics, Bashkir State University, Ufa, Russian Federation). E-mail: habibi.bsu@mail.ru

**Khisamov Artur A.** (Bashkir State University, Ufa, Russian Federation). E-mail: khisamovartur@list.ru

*Статья поступила в редакцию 02.08.2021; принята к публикации 19.05.2022*

*The article was submitted 02.08.2021; accepted for publication 19.05.2022*



*Научный журнал*

**ВЕСТНИК  
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.  
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

**2022. № 77**

Редактор Е.Г. Шумская  
Оригинал-макет Е.Г. Шумской  
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано в печать 03.06.2022 г. Формат 70×100<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Печ. л. 10,6; усл. печ. л. 13,8. Цена свободная.  
Тираж 250 экз. Заказ № 5042.

Дата выхода в свет 17.06.2022 г.

**Адрес издателя и редакции:** 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36  
Томский государственный университет

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании  
Издательства Томского государственного университета  
634050, г. Томск, Ленина, 36  
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75  
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: [rio.tsu@mail.ru](mailto:rio.tsu@mail.ru)