УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

Научная статья

УДК 681.5

doi: 10.17223/19988605/58/1

Метод формирования семейства модальных регуляторов полного порядка с эллиптической областью принадлежности коэффициентов**Андрей Николаевич Паршуков***Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия, anparshukov@mail.ru*

Аннотация. Разработан метод формирования семейства модальных регуляторов с эллиптической областью принадлежности коэффициентов, гарантирующих заданное качество управления. Данный метод оформлен в виде алгоритма вычисления оценки сверху радиуса эллиптической области коэффициентов. Эффективность метода проиллюстрирована примером.

Ключевые слова: модальное управление; регулятор полного порядка; семейство регуляторов с эллиптической областью принадлежности коэффициентов

Для цитирования: Паршуков А.Н. Метод формирования семейства модальных регуляторов полного порядка с эллиптической областью принадлежности коэффициентов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 58. С. 4–13. doi: 10.17223/19988605/58/1

Original article

doi: 10.17223/19988605/58/1

A method for forming a family of full-order modal regulators with an elliptic domain of coefficients belonging**Andrej N. Parshukov***Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation, anparshukov@mail.ru*

Abstract. The problem of synthesis of regulators consists of two sequentially solved problems:

1) find the regulator (if it exists) such that it provides stability and a given quality of control to a closed system;

2) if possible, find not one regulator, but some set: a set of controller settings on the one hand guarantees that some inaccuracies in the controller settings will not lead to a violation of the specified control quality, and on the other hand, it will allow you to set the task of finding the optimal controller settings from an acceptable set.

Currently, a large number of methods for the synthesis of regulators have been developed, taking into account both the features of the task of the mathematical model of the control object and the features of the task of the control objectives: as examples, we can cite works on the synthesis of PI and PID regulators, on modal control, on the synthesis of stabilizing feedbacks in the presence of structural and parametric

uncertainty in the model of the control object, etc. Thus, the first of these tasks can be attributed to the solved ones.

Two approaches can be attributed to the solution of the second problem: the D -partitioning method and the Yula-Kucher parametrization. The D -partitioning method allows you to build stability regions of a closed control system in the space of one or two parameters (most often, the parameters of the controller). It is known that the D -partitioning method can also be used if it is required to provide the specified root quality indicators: root stability margin and oscillation. A significant disadvantage of the D -partitioning method is that in the case of several variables, only two independent variables should be left as variable, and the rest should be artificially fixed. The parametrization of Yula-Kucera reduces the problem of forming stabilizing regulators to solving the polynomial Bezu equation. However, these methods do not solve the problem of forming a family of regulators that provide a given quality of control.

The modal control method allows synthesizing a controller for control objects of arbitrary order; this method assumes that the control object is described by a linear differential equation of the n -th order (where n is any non-negative integer) without delay. The modal regulator is also sought in the form of a linear differential equation. The quality of control is given in the form of a region S on a complex plane that determines the desired location of the poles of the transfer function of a closed system. It has been repeatedly proved in the literature that a modal regulator of the order $n-1$ and higher provides any given location of the poles of the transfer function of a closed system, and thereby guarantees stability and specified root quality indicators for a closed system. The $(n-1)$ -th order regulator is called a full-order modal regulator.

In this article, a method for forming a family of full-order modal regulators with an elliptic domain of coefficients that guarantee a given control quality is developed. This method is a generalization of D -partitioning. It should be noted that there are no analytical methods for solving this problem, in this regard, it is of interest to obtain estimates (from above and from below) of the ellipsoid radius in the space of the regulator coefficients. The paper proposes an algorithm for calculating an estimate from above of the radius of the elliptical region of setting the coefficients of the regulator. The effectiveness of the method is illustrated by an example.

The expansion of the range of permissible values of the regulator coefficients can be obtained by combining two (or more) ellipsoids with different orientation of the semi-axes. Therefore, the proposed method can be used to form in the space of the coefficients of the regulator of the boundary of the stability region and a given control quality.

Keywords: modal control; a full-order regulator; a family of regulators with an elliptic domain of coefficients belonging

For citation: Parshukov, A.N. (2022) A method for forming a family of full-order modal regulators with an elliptic domain of coefficients belonging. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 58. pp. 4–13. doi: 10.17223/19988605/58/1

Проблема синтеза регуляторов состоит из двух последовательно решаемых задач:

1) найти регулятор (если он существует), обеспечивающий устойчивость и заданное качество управления замкнутой системе;

2) по возможности найти не один регулятор, а некоторое множество: множество настроек регулятора, с одной стороны, гарантирует, что некоторые неточности в настройках регулятора еще не приведут к нарушению заданного качества управления, а с другой – позволит поставить задачу поиска оптимальных настроек регулятора из допустимого множества.

В настоящее время разработано большое количество методов синтеза регуляторов, учитывающих как особенности задания математической модели объекта управления, так и особенности задания целей управления; в качестве примеров можно привести работы по синтезу ПИ- и ПИД-регуляторов [1], по модальному управлению [2–3], по синтезу стабилизирующих обратных связей при наличии структурно-параметрической неопределенности в модели объекта управления [4–6] и т.д. Таким образом, первую из указанных задач можно отнести к решенным.

К реализации второй задачи можно отнести два подхода: метод D -разбиения и параметризацию Юлы–Кучеры. Метод D -разбиения предложен в работе Ю.И. Неймарка [7], он позволяет строить об-

ласти устойчивости замкнутой системы управления в пространстве одного или двух параметров (чаще всего – параметров регулятора). Известно (см.: [8]), что метод D-разбиения также может быть использован тогда, когда требуется обеспечить заданные корневые показатели качества: корневой запас устойчивости и колебательность. Существенным недостатком метода D-разбиения является то, что в случае нескольких переменных в качестве варьируемых следует оставить только две независимые переменные, а остальные искусственно зафиксировать. Параметризация Юлы–Кучеры [9–11] сводит задачу формирования стабилизирующих регуляторов к решению полиномиального уравнения Безу. Однако указанные методы не решают задачу формирования семейства регуляторов, обеспечивающих заданное качество управления.

В настоящей статье разработан метод формирования семейства модальных регуляторов полного порядка с эллиптической областью принадлежности коэффициентов, гарантирующих заданное качество управления. Следует отметить, что аналитических методов решения поставленной задачи не существует, в этой связи представляет интерес получение оценок (сверху и снизу) радиуса эллипсоида в пространстве коэффициентов регулятора. В работе предложен алгоритм вычисления оценки сверху радиуса эллиптической области задания коэффициентов регулятора.

В статье приняты следующие обозначения: $\doteq$ – равно по определению; R^n , C^n – пространства n -мерных векторов $\mathbf{x} \doteq [x_1; \dots; x_n]$, коэффициенты которых соответственно вещественные или мнимые числа; $\mathbf{A}^T$ – матрица, транспонированная по отношению к исходной матрице $\mathbf{A}$; $\mathbf{0}$ – матрица (или вектор) необходимой размерности, состоящая из нулей; s – комплексная переменная; $\bar{s}$ – число, комплексно сопряженное числу s ; S – область на C^1 ; ∂S – граница области S ; $\text{int } S$ – внутренняя часть области S ; t – непрерывное время; p^i – оператор i -й степени дифференцирования по времени:

$$p^i \doteq d^i/dt^i; \quad i \in \overline{0, n}, \quad p^0 \doteq 1.$$

Полиномиальным оператором степени n будем называть дифференциальный оператор вида

$$a(n, p) = \sum_{i=0}^n a_i p^i,$$

где a_i – постоянные коэффициенты. В изображениях по Лапласу оператору $a(n, p)$ соответствует алгебраический полином

$$a(n, s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i,$$

определенный на C^1 ; здесь за $s \in C^1$ обозначена переменная преобразования Лапласа.

Множество корней (нулей) полинома $a(n, s)$ будем обозначать $\Lambda(a)$:

$$\Lambda(a) \doteq \{ \lambda_i : a(n, \lambda_i) = 0, \quad i \in \overline{1, n} \}.$$

1. Метод формирования семейства модальных регуляторов полного порядка с эллиптической областью принадлежности коэффициентов

1.1. Классическая постановка задачи синтеза модального регулятора

Изложим классическую постановку задачи синтеза модального регулятора следуя [2. С. 5–20].

Пусть одномерный линейный стационарный динамический объект управления задан дифференциальным уравнением n -го порядка

$$a(n, p)y(t) = b(m, p)u(t), \quad n > m, \quad a_n = 1, \quad (1)$$

где $y(t)$ – управляемая переменная (выходной сигнал), $u(t)$ – управляющая переменная (входной сигнал). Модальный регулятор ищется в виде дифференциального уравнения l -го порядка

$$\beta(l, p)u(t) = \alpha(l, p)y(t) + \chi(l, p)g(t), \quad \beta_l = 1, \quad (2)$$

где $g(t)$ – входной сигнал для замкнутой системы. Уравнение замкнутой системы имеет вид:

$$a^{c.l.}(n+l, p)y(t) = b^{c.l.}(m+l, p)g(t), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} a^{c.l.}(n+l, p) &= a(n, p)\beta(l, p) - b(m, p) \cdot \alpha(l, p), \\ b^{c.l.}(m+l, p) &= b(m, p)\chi(l, p). \end{aligned}$$

Качество управления назначается в виде области S , определяющей допустимое расположение корней полинома $a^{c.l.}(n+l, s)$ на C^1 , что может быть записано в виде целевого условия

$$\Lambda(a^{c.l.}) \subset S. \quad (4)$$

Предполагается, что S удовлетворяет следующим требованиям: расположена в ограниченной части C^1 слева от мнимой оси; односвязна; для любой точки $s \in S$ также выполняется $\bar{s} \in S$.

В классической постановке задачи модального управления цель управления назначается эталонной системой (эталонном)

$$a^{et.}(n+l, p)y(t) = b^{et.}(m+l, p)g(t), \quad a_{n+l}^{et.} = 1, \quad (5)$$

при этом характеристический полином эталона $a^{et.}(n+l, s)$ выбирается из условия

$$\Lambda(a^{et.}) \subset \text{int } S. \quad (6)$$

Коэффициенты операторов $\beta(l, p)$ и $\alpha(l, p)$ регулятора (2) находятся из условия

$$a(n, s)\beta(l, s) - b(m, s)\alpha(l, s) \equiv a^{et.}(n+l, s). \quad (7)$$

Тождеству (7) соответствует система из $n+l$ линейных алгебраических уравнений относительно $2l+1$ неизвестных. В [3, с. 9–12] доказано, что данная система всегда имеет решение, если $l = n-1$.

Модальные регуляторы порядка $n-1$ в монографии [3. С. 11] предложено называть регуляторами *полного порядка*. Составление системы линейных алгебраических уравнений для расчета модального регулятора полного порядка описано в книге [12. С. 10–14] и в данной работе не приводится. Следует отметить, что выбор полинома $\chi(n-1, s)$ в (2) не влияет на выполнение целевого условия (4) и в классической задаче модального управления не рассматривается.

1.2. Постановка задачи формирования семейства модальных регуляторов полного порядка с эллиптической областью принадлежности коэффициентов

Далее под *модальным регулятором* понимается модальный регулятор полного порядка, под *эталонном* – характеристический полином $a^{et.}(2n-1, s)$ системы (5).

Свобода в выборе эталона $a^{et.}(2n-1, s)$ (см. условие (6)) означает, что существуют такие вариации коэффициентов регулятора, которые еще не выведут корни характеристического полинома замкнутой системы за границу области S . В этой связи естественно поставить вопрос о формировании семейства регуляторов, для которых еще выполняется целевое условие (4).

Итак, пусть заданы объект управления (1), область S , и выбран эталон $a^{et.0}(2n-1, s)$ такой, что

$$\Lambda(a^{et.0}) \subset \text{int } S. \quad (8)$$

Для определенности выбранный эталон будем называть номинальным. Пусть

$$\beta^0(n-1, s) = s^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \beta_i^0 s^i, \quad \alpha^0(n-1, s) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^0 s^i,$$

полиномы модального регулятора, полученные в результате синтеза модального регулятора с номинальным эталоном. Непосредственно из описанной технологии синтеза модального регулятора следует, что полиномы $\beta^0(n-1, s)$, $\alpha^0(n-1, s)$ и $a^{et.0}(2n-1, s)$ связаны тождеством

$$a(n, s)\beta^0(n-1, s) - b(m, s)\alpha^0(n-1, s) \equiv a^{et.0}(2n-1, s).$$

Любой другой эталон $a^{et.}(2n-1, s)$ может быть рассмотрен как вариация от номинального, т.е.

$$a^{et.}(2n-1, s) = a^{et.0}(2n-1, s) + a(n, s)\delta\beta(n-2, s) - b(m, s)\delta\alpha(n-1, s), \quad (9)$$

где $\delta\beta(n-1, s)$ и $\delta\alpha(n-1, s)$ – вариации полиномов регулятора

$$\delta\beta(n-1, s) = \sum_{i=0}^{n-2} \delta\beta_i s^i, \quad \delta\alpha(n-1, s) = \sum_{i=0}^{n-1} \delta\alpha_i s^i.$$

Обозначим за $\mathbf{x}^0$ вектор коэффициентов *номинального* регулятора

$$\mathbf{x}^0 \doteq \text{col}[\beta_0^0; \dots; \beta_{n-2}^0; \alpha_0^0; \dots; \alpha_{n-1}^0],$$

а за $\mathbf{x}$ – вектор вариации коэффициентов регулятора

$$\mathbf{x} \doteq \text{col}[\delta\beta_0; \dots; \delta\beta_{n-2}; \delta\alpha_0; \dots; \delta\alpha_{n-1}].$$

Условие выхода корней эталона $a^{et}(2n-1, s)$ в точке s границы области S :

$$\begin{cases} \text{Re}(a^{et}(2n-1, s)) = 0, \\ \text{Im}(a^{et}(2n-1, s)) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Подставляя в систему (10) выражение для полинома $a^{et}(2n-1, s)$ согласно (9) получаем

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}, \quad (11)$$

здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = & \begin{bmatrix} \text{Re}(a(n, s)); & \text{Re}(a(n, s) \cdot s); & \dots; & \text{Re}(a(n, s) \cdot s^{n-2}); \\ \text{Im}(a(n, s)); & \text{Im}(a(n, s) \cdot s); & \dots; & \text{Im}(a(n, s) \cdot s^{n-2}); \\ -\text{Re}(b(m, s)); & -\text{Re}(b(m, s) \cdot s); & \dots; & -\text{Re}(b(m, s) \cdot s^{n-1}); \\ -\text{Im}(b(m, s)); & -\text{Im}(b(m, s) \cdot s); & \dots; & -\text{Im}(b(m, s) \cdot s^{n-1}) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{d} = & \begin{bmatrix} -\text{Re}(a^{et,0}(2n-1, s)) \\ -\text{Im}(a^{et,0}(2n-1, s)) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

а $\mathbf{x}$ – вектор вариации коэффициентов регулятора (определен выше).

В системе уравнений (11) коэффициенты матрицы $\mathbf{C}$ и вектора $\mathbf{d}$ зависят от точки $s \in \partial S$. Обозначим за Ω множество решений системы (11) в точке s :

$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} \in R^{2n-1} \mid \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d} \right\}.$$

Если в какой-то точке $s \in \partial S$ множество Ω пусто, следовательно, нет таких векторов $\mathbf{x}$, которые бы выводили корни эталона на границу области S в этой точке.

Рассмотрим в пространстве векторов $\mathbf{x}^0 + \mathbf{x} \in R^{2n-1}$ область X вида

$$X = \left\{ \mathbf{x}^0 + \mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \doteq \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \leq \rho^2 \right\}. \quad (12)$$

Матрицу $\mathbf{Q} = [q_{ij}]$, $i, j = \overline{1, 2n-1}$ в (12) будем считать заданной и удовлетворяющей следующим условиям: а) положительно определена; б) матрица Гесса $\mathbf{H}$ функции $f(\mathbf{x})$

$$\mathbf{H} = [h_{ij}], \quad h_{ij} \doteq \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{cases} 2q_{ii}, & j = i, \\ q_{ij}, & j \neq i, \end{cases} \quad i, j = \overline{1, 2n-1},$$

положительно определена; в) $\exists \mathbf{H}^{-1}$.

Поставим следующую задачу: найти максимальное значение параметра ρ в (12) при условии

$$\Lambda(a^{et}) \subset S.$$

Очевидно, что решение данной задачи существует, обозначим его ρ^* .

Значение ρ^* определяет в пространстве коэффициентов регулятора эллипсоид X с центром в точке $\mathbf{x}^0$, такой что для любого $\mathbf{x}$, удовлетворяющего условию

$$\mathbf{x}^0 + \mathbf{x} \in X,$$

корни характеристического полинома замкнутой системы (или корни эталона) еще не выходят из области S . Поставленную задачу поиска ρ^* назовем **задачей формирования семейства модальных регуляторов полного порядка с эллиптической областью принадлежности коэффициентов**.

1.3. Алгоритм формирования семейства модальных регуляторов с эллиптической областью принадлежности коэффициентов

Задачу поиска ρ^* можно представить в виде:

$$\rho^* = \min_{s \in \partial S} \rho(s), \quad (13)$$

где $\rho(s) = \infty$, в тех точках $s \in \partial S$, где множество Ω пусто, и

$$\rho(s) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x})^{1/2}, \quad (14)$$

в остальных точках $s \in \partial S$. Далее для удобства рассуждений положим, что выбрана точка $s \in \partial S$. Определить, совместна ли в точке s система уравнений (11) можно по теореме Кронекера–Капелли:

$$\text{rank } \mathbf{C} = \text{rank } \hat{\mathbf{C}}, \quad (15)$$

где $\mathbf{C}$ – матрица системы (11), а $\hat{\mathbf{C}} = [\mathbf{C}|\mathbf{d}]$ – присоединенная матрица.

Задача (14) представляет собой задачу поиска условного экстремума квадратичной функции $f(\mathbf{x})$ с ограничениями типа линейных уравнений (11). Данная задача может быть решена аналитически методом множителей Лагранжа. Представим задачу (14) в следующей форме:

$$f(\mathbf{x}) \doteq \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \rightarrow \min, \quad (16)$$

при условиях

$$\begin{cases} \mathbf{c}_1 \mathbf{x} - d_1 = 0, \\ \mathbf{c}_2 \mathbf{x} - d_2 = 0, \end{cases} \quad (17)$$

где $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$ соответственно 1-я и 2-я строки матрицы $\mathbf{C}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= [\text{Re}(a(n, s)); \text{Re}(a(n, s) \cdot s); \dots; \text{Re}(a(n, s) \cdot s^{n-2}); \\ &\quad - \text{Re}(b(m, s)); - \text{Re}(b(m, s) \cdot s); \dots; - \text{Re}(b(m, s) \cdot s^{n-1})], \\ \mathbf{c}_2 &= [\text{Im}(a(n, s)); \text{Im}(a(n, s) \cdot s); \dots; \text{Im}(a(n, s) \cdot s^{n-2}); \\ &\quad - \text{Im}(b(m, s)); - \text{Im}(b(m, s) \cdot s); \dots; - \text{Im}(b(m, s) \cdot s^{n-1})], \end{aligned}$$

а d_1 и d_2 – элементы вектора $\mathbf{d}$:

$$d_1 = -\text{Re}(a^{er,0}(2n-1, s)), \quad d_2 = -\text{Im}(a^{er,0}(2n-1, s)).$$

По условиям задачи система уравнений (17) совместна.

Для решения задачи (16)–(17) составляем функцию Лагранжа:

$$L(\mathbf{x}, \lambda_1, \lambda_2) = f(\mathbf{x}) + \lambda_1 (\mathbf{c}_1 \mathbf{x} - d_1) + \lambda_2 (\mathbf{c}_2 \mathbf{x} - d_2),$$

здесь λ_1 и λ_2 – множители Лагранжа. Необходимое условие экстремума функции $L(\mathbf{x}, \lambda_1, \lambda_2)$

$$\begin{cases} \partial L(\mathbf{x}, \lambda_1, \lambda_2) / \partial x_i = 0, \quad i = \overline{1, 2n-1}, \\ \partial L(\mathbf{x}, \lambda_1, \lambda_2) / \partial \lambda_1 = 0, \\ \partial L(\mathbf{x}, \lambda_1, \lambda_2) / \partial \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

после подстановки производных функции Лагранжа принимает следующий вид:

$$\begin{cases} 2q_{ii}x_i + \sum_{j \neq i} q_{ij}x_j + \lambda_1 \cdot c_{1i} + \lambda_2 \cdot c_{2i} = 0, \quad i = \overline{1, 2n-1}, \\ \mathbf{c}_1 \mathbf{x} - d_1 = 0, \\ \mathbf{c}_2 \mathbf{x} - d_2 = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Пусть $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)$ – решение системы (18), тогда точка $\mathbf{x}^*$ является критической (подозрительна на экстремум). Достаточным условием минимума функции $f(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}^*$ является положительная определенность гессиана $\mathbf{H}$, что обеспечено условиями задачи. Найдем критические точки $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)$, для этого систему уравнений (18) запишем с помощью матрицы $\mathbf{H}$:

$$\begin{cases} \mathbf{H}\mathbf{x} + \lambda_1 \cdot \mathbf{c}_1^T + \lambda_2 \cdot \mathbf{c}_2^T = \mathbf{0}, \\ \mathbf{c}_1\mathbf{x} - d_1 = 0, \\ \mathbf{c}_2\mathbf{x} - d_2 = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Система уравнений (17) входит в систему (19).

При решении системы (19) возможны следующие ситуации: а) одно из уравнений системы (17) обращается в тождество; б) ни одно из уравнений системы (17) не обращается в тождество. Одновременное обращение в тождество всех уравнений системы (17) исключено условием (8).

Утверждение. Решение системы уравнений (19):

$$\begin{cases} \mathbf{x}^* = d_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_1^T (\mathbf{c}_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_1^T)^{-1}, \\ \lambda_1^* = -d_1 (\mathbf{c}_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_1^T)^{-1}, \end{cases} \quad (20)$$

в точках $s \in \partial S$, где обращается в тождество 2-е уравнение системы (17), или

$$\begin{cases} \mathbf{x}^* = d_2 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_2^T (\mathbf{c}_2 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_2^T)^{-1}, \\ \lambda_2^* = -d_2 (\mathbf{c}_2 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_2^T)^{-1}, \end{cases} \quad (21)$$

в точках $s \in \partial S$, где обращается в тождество 1-е уравнение системы (17), или

$$\begin{cases} \mathbf{x}^* = -\mathbf{H}^{-1} (\lambda_1^* \cdot \mathbf{c}_1^T + \lambda_2^* \cdot \mathbf{c}_2^T), \\ \lambda_1^* = -\frac{\mathbf{c}_2 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_2^T d_1 - \mathbf{c}_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_2^T d_2}{(\mathbf{c}_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_1^T)(\mathbf{c}_2 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_2^T) - (\mathbf{c}_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_2^T)(\mathbf{c}_2 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_1^T)}, \\ \lambda_2^* = \frac{\mathbf{c}_2 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_1^T d_1 - \mathbf{c}_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_1^T d_2}{(\mathbf{c}_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_1^T)(\mathbf{c}_2 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_2^T) - (\mathbf{c}_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_2^T)(\mathbf{c}_2 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_1^T)}. \end{cases} \quad (22)$$

в остальных точках $s \in \partial S$.

Доказательство. Докажем формулу (20). В этом случае система (19) принимает вид:

$$\begin{cases} \mathbf{H}\mathbf{x} + \lambda_1 \mathbf{c}_1^T = \mathbf{0}, \\ \mathbf{c}_1\mathbf{x} - d_1 = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Решение первого уравнения системы (23) с учетом того, что $\exists \mathbf{H}^{-1}$, может быть записано в виде:

$$\mathbf{x}^* = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_1^T \lambda_1,$$

подставляя его во второе уравнение системы (23) получаем

$$-(\mathbf{c}_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_1^T) \lambda_1 - d_1 = 0. \quad (24)$$

Число $(\mathbf{c}_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_1^T)$ не может быть равно нулю, так как в противном случае из уравнения (24) следовало бы, что $d_1 = 0$, что исключено условием (8). Разделив обе части уравнения (24) на $(\mathbf{c}_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_1^T)$, получаем

$$\lambda_1^* = -d_1 (\mathbf{c}_1 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}_1^T)^{-1}.$$

В результате получили формулу (20). Что и требовалось доказать.

Формулы (21) и (22) доказываются аналогично.

Вычислив вектор $\mathbf{x}^*$ по формулам (20)–(22) находим решение задачи (14):

$$\rho(s) = \left((\mathbf{x}^*)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}^* \right)^{1/2}. \quad (25)$$

Приведенные рассуждения можно рассматривать как доказательство следующего алгоритма формирования семейства модальных регуляторов с эллиптической областью принадлежности коэффициентов. Очевидно, что получить аналитическое выражение для ρ^* возможно только в исключительных случаях, поэтому видится только численная реализация данного алгоритма, что требует конечного числа точек s границы области S , т.е.

$$\partial S = \{s_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad N < \infty\}.$$

2. Алгоритм формирования семейства модальных регуляторов

Шаг 1. Принять $k = 1$.

Шаг 2. Для точки $s_k \in \partial S$ составить систему уравнений (11).

Шаг 3. Проверить полученную систему уравнений на совместность по условию (15). Если система несовместна – перейти на следующий шаг, если совместна – перейти на шаг 5.

Шаг 4. Принять $\rho(s_k) = \infty$. Перейти на шаг 9.

Шаг 5. Проверить, обращается ли в тождество 2-е уравнение системы, если да, то $\mathbf{x}^*$ вычислить по формуле (20) и перейти на шаг 8. В противном случае перейти на следующий шаг.

Шаг 6. Проверить, обращается ли в тождество 1-е уравнение системы, если да, то $\mathbf{x}^*$ вычислить по формуле (21) и перейти на шаг 8. В противном случае перейти на следующий шаг.

Шаг 7. Вычислить $\mathbf{x}^*$ по формуле (22) и перейти на следующий шаг.

Шаг 8. Вычислить $\rho(s_k)$ по формуле (25).

Шаг 9. Принять $k = k + 1$.

Шаг 10. Проверить, выполняется ли условие $k = N$. Если да, то перейти на следующий шаг, в противном случае – перейти на шаг 2.

Шаг 11. Вычислить ρ^* по формуле (13). Останов.

3. Пример формирования семейства регуляторов

Объект управления задан дифференциальным уравнением

$$a(3, p)y(t) = b(2, p)u(t),$$

где

$$a(3, p) = (s + 21)(s + 3)(s - 2) = p^3 + 22p^2 + 15p - 126,$$

$$b(2, p) = 10(s + 20)(s + 6) = 10p^2 + 260p + 1200.$$

Требования к качеству управления замкнутой системой заданы в виде области

$$S = \{s \mid \eta_2 \leq -\operatorname{Re}(s) \leq \eta_1, \quad |\operatorname{Im}(s_i)/\operatorname{Re}(s_i)| \leq \zeta_1\} \subset C^1,$$

где $\eta_1 = 25$, $\eta_2 = 2$, $\zeta_1 = 1$. Область S на C^1 расположена в левой полуплоскости, имеет трапециевидную форму и удовлетворяет всем вышеперечисленным требованиям. Параметр η_2 определяет допустимый корневой запас устойчивости, а ζ_1 – допустимую колебательность.

Регулятор полного порядка ищется на классе дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\ddot{u}(t) + \beta_1^0 \dot{u}(t) + \beta_0^0 u(t) = \alpha_2^0 \ddot{y}(t) + \alpha_1^0 \dot{y}(t) + \alpha_0^0 y(t) + \chi_0 g(t). \quad (26)$$

Номинальный эталон $a^{et.0}(5, s)$ будем назначать по биномиальной схеме [2. С. 6] с параметром $\omega_0 = 5$:

$$a^{et.0}(5, s) = (s + \omega_0)^5 = s^5 + 25s^4 + 250s^3 + 1250s^2 + 3125s + 3125.$$

В соответствии со схемой синтеза модального регулятора [12. С. 10–14] нахождение коэффициентов регулятора (26) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^0 = \mathbf{b}, \quad (27)$$

где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{b}$ – соответственно матрица и вектор, составленные из коэффициентов операторов $a(3, p)$ и $b(2, p)$ объекта управления и характеристического полинома эталона $a^{et.0}(5, s)$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -126 & 0 & -1200 & 0 & 0 \\ 15 & -126 & -260 & -1200 & 0 \\ 22 & 15 & -10 & -260 & -1200 \\ 1 & 22 & 0 & -10 & -260 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3125 \\ 3125 \\ 1376 \\ 235 \\ 3 \end{bmatrix},$$

а $\mathbf{x}^0 = \text{col}[\beta_0^0; \beta_1^0; \alpha_0^0; \alpha_1^0; \alpha_2^0]$ – вектор коэффициентов регулятора. Решая (27) получаем

$$\mathbf{x}^0 = \text{col}[990,2; 171,0; -106,6; 14,9; 16,8],$$

таким образом, регулятор полного порядка (номинальный регулятор)

$$\ddot{u}(t) + 171,0\dot{u}(t) + 990,2u(t) = 16,8\ddot{y}(t) + 14,9\dot{y}(t) - 106,6y(t) + \chi_0 g(t).$$

Задача формирования семейства модальных регуляторов. Выберем $\mathbf{Q} = \text{diag}(1; 1; 1; 1; 1)$, матрица $\mathbf{Q}$ положительно определена. Матрица Гесса $\mathbf{H} = \text{diag}(2; 2; 2; 2; 2)$ также положительно определена, обратная к ней матрица существует: $\mathbf{H}^{-1} = \text{diag}(0,5; 0,5; 0,5; 0,5; 0,5)$. Требуется найти ρ^* .

Решение. В таблице приведены выбранные точки s_k на границе области S и соответствующие им значения $\rho(s_k)$. Следует отметить, что в точках s_k и $\bar{s}_k$ значения функции $\rho(s_k)$ будут одинаковыми.

Результаты расчётов функции $\rho(s_k)$

s_k	$-2,0 + 0,0j$	$-2,0 + 0,2j$	$-2,0 + 0,4j$	$-2,0 + 0,6j$	$-2,0 + 0,8j$	$-2,0 + 1,0j$	$-2,0 + 1,2j$
$\rho(s_k)$	0,07	0,54	0,53	0,51	0,48	0,45	0,41
s_k	$-2,0 + 1,4j$	$-2,0 + 1,6j$	$-2,0 + 1,8j$	$-2,0 + 2,0j$	$-4,3 + 4,3j$	$-6,6 + 6,6j$	
$\rho(s_k)$	0,38	0,34	0,30	0,26	0,25	0,73	
s_k	$-8,9 + 8,9j$	$-11,2 + 11,2j$	$-13,5 + 13,5j$	$-15,8 + 15,8j$	$-18,1 + 18,1j$	$-20,4 + 20,4j$	
$\rho(s_k)$	2,62	5,46	8,96	12,61	16,07	19,23	
s_k	$-22,7 + 22,7j$	$-25,0 + 25,0j$	$-25,0 + 22,5j$	$-25,0 + 20,0j$	$-25,0 + 17,5j$	$-25,0 + 15,0j$	
$\rho(s_k)$	22,11	24,79	26,49	27,81	28,65	28,89	
s_k	$-25,0 + 12,5j$	$-25,0 + 10,0j$	$-25,0 + 7,5j$	$-25,0 + 5,0j$	$-25,0 + 2,5j$	$-25,0 + 0,0j$	
$\rho(s_k)$	28,26	26,31	25,26	15,13	6,48	5,36	

Из таблицы получаем, что минимальное значение функции $\rho(s_k)$ достигается в точке $(-2,0 + 0,0j)$ и равно 0,07. Задача решена: $\rho^* = 0,07$.

Заключение

В статье разработан метод формирования семейства модальных регуляторов с эллиптической областью принадлежности коэффициентов, гарантирующих заданное качество управления. Данный метод оформлен в виде алгоритма вычисления оценки сверху радиуса эллиптической области коэффициентов. Расширение области допустимых значений коэффициентов регулятора можно получить путем объединения двух (и более) эллипсоидов с различной ориентацией полуосей. Следовательно, предложенный метод может использоваться для формирования (в пространстве коэффициентов регулятора) границы области устойчивости и заданного качества управления.

Список источников

1. Ротач В.Я. Теория автоматического управления. М. : Изд. дом МЭИ, 2004. 400 с.
2. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М. : Машиностроение, 1976. 184 с.
3. Соловьев И.Г. Методы мажоризации в анализе и синтезе адаптивных систем. Новосибирск : Наука, 1992. 191 с.
4. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Линейные матричные неравенства в системах управления с неопределенностью // Автоматика и телемеханика. 2021. № 1. С. 3–54.
5. Баландин Д.В., Коган М.М., Кривдина Л.Н., Федюков А.А. Синтез обобщенного H_∞ -оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах // Автоматика и телемеханика. 2014. № 1. С. 3–22.
6. Kogan M.M. Optimal discrete-time H_∞/γ_0 filtering and control under unknown covariances // Int. J. Control. 2016. V. 89, № 4. P. 691–700.

7. Неймарк Ю.И. Об определении значений параметров, при которых система автоматического регулирования устойчива // Автоматика и телемеханика. 1948. № 3 (9). С. 190–203.
8. Зубов И.В. Проблема устойчивости процессов управления. Л. : Судостроение, 1980. 253 с.
9. Youla D.C., Jabr H.A., Bonjorno J.J. Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers. Part II: The multivariable case // IEEE Trans. Autom. Control. 1976. V. 21, № 3. P. 319–338.
10. Bonjorno J.J., Youla D.C. On the design of single-loop single-input-output feedback control systems in the complex frequency domain // IEEE Trans. Autom. Control. 1977. V. 22, № 3. P. 416–423.
11. Kucera V. Discrete Linear Control: The Polynomial Equation Approach. New York : John Wiley, 1979. 206 p.
12. Паршуков А.Н. Методы синтеза модальных регуляторов. Тюмень : ТюмГНГУ, 2009. 84 с.

References

1. Rotach, V. Ya. (2004) *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya* [Automatic Control Theory]. Moscow: Izd. dom MEI.
2. Kuzovkov, N.T. (1976) *Modal'noe upravlenie i nablyudayushchie ustroystva* [Modal Control and Monitoring Devices]. Moscow: Mashinostroenie.
3. Soloviev, I.G. (1992) *Metody mazhorizatsii v analize i sinteze adaptivnykh sistem* [Methods of Majorization in the Analysis and Synthesis of Adaptive Systems]. Novosibirsk: Nauka.
4. Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V. & Shcherbakov, P.S. (2021) Linear matrix inequalities in control systems with uncertainty. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 82(1). pp. 1–40. DOI: 10.31857/S0005231021010013
5. Balandin, D.V., Kogan, M.M., Krivdina, L.N. & Fedjukov, A.A. (2014) Design of Generalized Discrete-time H_∞ -optimal Control over Finite and Infinite Intervals. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 75(1). pp. 1–17.
6. Kogan, M.M. (2016) Optimal discrete-time H_∞/γ_0 filtering and control under unknown covariances. *International Journal of Control*. 89(4). pp. 691–700. DOI: 10.1080/00207179.2015.1091511
7. Neimark, Yu.I. (1948) On determining the values of parameters at which the automatic control system is stable. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 9(3). pp. 190–203.
8. Zubov, I.V. (1980) *Problema ustoychivosti protsessov upravleniya* [The Problem of Stability of Management Processes]. Leningrad: Sudostroenie.
9. Youla, D.C., Jabr, H.A. & Bonjorno, J.J. (1976) Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers. Part II: The multivariable case. *IEEE Trans. Autom. Control*. 21(3). pp. 319–338. DOI: 10.1109/TAC.1976.1101223
10. Bonjorno, J.J. & Youla, D.C. (1977) On the design of single-loop single-input-output feedback control systems in the complex frequency domain. *IEEE Trans. Autom. Control*. 22(3). pp. 416–423. DOI: 10.1109/TAC.1977.1101507
11. Kucera, V. (1979) *Discrete Linear Control: The Polynomial Equation Approach*. New York: John Wiley.
12. Parshukov, A.N. (2009) *Metody sinteza modal'nykh regulyatorov* [Methods of Synthesis of Modal Regulators]. Tyumen: TyumGNGU.

Информация об авторе:

Паршуков Андрей Николаевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Электроэнергетика» Тюменского индустриального университета (Тюмень, Россия). E-mail: anparshukov@mail.ru

Information about the author:

Parshukov Andrej Nikolaevich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Federal State Budget Educational Institution of Higher Education «Industrial University of Tyumen» (Tyumen, Russian Federation). E-mail: anparshukov@mail.ru

Поступила в редакцию 09.08.2021; принята к публикации 28.02.2022

Received 09.08.2021; accepted for publication 28.02.2022