

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE

Научный журнал

2022

№ 59

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере
массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-29497 от 27 сентября 2007 г.)

Подписной индекс в объединённом каталоге «Пресса России» 44031

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук»,
Высшей аттестационной комиссии

Founder – Tomsk State University

EDITORIAL BOARD

Alexander Gortsev – Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. Tel: +73822529599
Valery Smagin – Deputy Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof. of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. Tel: +73822529599
Lyudmila Nezhelskaya – Executive Editor, Doctor. of Sc., Prof. of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Sergey Vorobeychikov – Doctor of Sc., Prof. of the System Analysis and Mathematical Modeling Department Tomsk State University
Vladimir Vishnevsky – Doctor of Sc., Prof. Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).
Gennady Koshkin – Doctor of Sc., Prof. of the System Analysis and Mathematical Modeling Department Tomsk State University
Yury Kostyuk – Doctor of Sc., Prof. of the Theoretical Informatics Department Tomsk State University
Anjela Matrosova – Doctor of Sc., Prof. of the Department of Computer Security Tomsk State University
Anatoly Nazarov – Doctor of Sc., Prof. of the Probability Theory and Mathematical Statistics Department Tomsk State University
Konstantin Samouylov – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied Probability and Informatics Department RUDN University (Moscow, Russia)
Eugene Semenk – Doctor of Sc., Prof. System Analysis and Operations Research Department Reshetnev Siberian State University of Science and Technology (Krasnoyarsk, Russia)
Sergey Sushchenko – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied of Information Department Tomsk State University
Mais Farkhadov – Doctor of Sc., Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).
Gurami Tsitsishvili – Doctor of Sc., Prof., Chief researcher Institute for Applied Mathematics Far Eastern Branch of RAS, Prof. Far Eastern Federal University (Vladivostok, Russia)
Editorial address:
Institute of Applied Mathematics and Computer Science,
unit of Applied Mathematics
National Research Tomsk State University
36 Lenina Avenue, Tomsk, 634050
Telephone / fax: +73822529599
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

EDITORIAL COUNCIL

Ana Rosa Cavalli PhD, Prof. University VII Paris, France	Gilbert Saporta PhD, Prof. Pierre and Marie Curie University, Paris, France
Alexander Dudin Doctor of Sc., Prof. Belarusian State University Minsk, Republic Belorussia	Raimund Ubar Doctor of Sc., Prof. University of Technology Tallinn, Estonia
Reindert Nobel Doctor of Sc., Associate Prof. Vrije University, Amsterdam, Netherlands	Nina Yevtushenko Doctor of Sc., Prof. Ivannikov V.P. ISP RAS Moscow, Russia
Enco Orzinger PhD, Prof. University of Rome, Italy	Yervant Zorian PhD, Fellow & Chief Architect, Synopsys, Mountain View, CA, USA
Paolo Prinetto Prof. Politecnico Institute, Torino, Italy	

JOURNAL INFO

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is an independent peer-reviewed research journal that welcomes submissions from across the world.

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is issued four times per year, and can be subscribed to in the Russian Press Joint Catalogue (Subscription Index 44031)

The publication in the journal is free of charge and may be in Russian or in English.

The topics of the journal are the following:

- control of dynamical systems,
- mathematical modeling,
- data processing,
- informatics and programming,
- discrete function and automation,
- designing and diagnostics of computer systems.

Rules of registration articles are given in a site:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

Учредитель – Томский государственный университет

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Горцев Александр Михайлович – гл. редактор, проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной математики ТГУ. Тел. +73822529599
Смагин Валерий Иванович – зам. гл. редактора, проф., д-р техн. наук, проф. кафедры прикладной математики ТГУ. Тел. +73822529599
Нежелская Людмила Алексеевна – ответственный секретарь, доц., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры прикладной математики ТГУ
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Воробейчиков Сергей Эрикович – д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры системного анализа и математического моделирования ТГУ
Вишневский Владимир Миронович – проф., д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)
Кошкин Геннадий Михайлович – проф., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры системного анализа и математического моделирования ТГУ
Костюк Юрий Леонидович – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры теоретической информатики ТГУ
Матросова Анжела Юрьевна – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры компьютерной безопасности ТГУ
Назаров Анатолий Андреевич – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры теории вероятностей и математической статистики ТГУ
Самуйлов Константин Евгеньевич – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (г. Москва)
Семенкин Евгений Станиславович – проф., д-р техн. наук, проф. каф. системного анализа и исследования операций, СибГУ им. акад. М.Ф. Решетнева (г. Красноярск)
Сушенко Сергей Петрович – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики ТГУ
Фархадов Маис Паша Оглы – д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)
Цициашвили Гурами Шалвович – проф., д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. Института прикладной математики ДВО РАН, проф. ДВФУ (г. Владивосток)

Адрес редакции и издателя: 634050, Томск, пр. Ленина, 36
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Институт прикладной математики и компьютерных наук,
отделение прикладной математики
Телефон / факс: +73822529599
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Ана Роза Ковали д-р. философии, проф. Университет VII Париж, Франция	Жильберт Сапорта д-р. философии, проф. Университет им. Пьера и Марии Кюри, Париж, Франция
Александр Дудин д.ф.-м.н., проф. БГУ, Минск, Республика Беларусь	Раймонд Убар д-р. проф. Технологический университет, Таллинн, Эстония
Рейндерт Нобель д-р., доцент Свободный университет, Амстердам, Нидерланды	Нина Евтушенко д-р. техн. наук, проф. ИСП РАН им. Иванникова В.П., Москва, Россия
Енцо Орзингер д-р. философии, проф. Римский университет, Италия	Ервант Зорян д-р. философии, гл. научный сотр. Фирмы «Синописис», США
Паоло Принетто проф. Политехнический институт Турин, Италия	

О ЖУРНАЛЕ

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» выходит ежеквартально и распространяется по подписке

Статьи публикуются на русском и английском языках.

Тематика публикаций журнала:

- управление динамическими системами,
- математическое моделирование,
- обработка информации,
- информатика и программирование,
- дискретные функции и автоматы,
- проектирование и диагностика вычислительных систем.

Журнал входит в систему Российского Индекса Научного Цитирования (РИНЦ).

Правила оформления статей приведены на сайте:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

СОДЕРЖАНИЕ

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Антипина Е.В., Мустафина С.А., Антипин А.Ф. Алгоритм поиска приближенного решения задачи оптимального управления химическим процессом при наличии терминальных ограничений	4
Мансимов К.Б., Чырахова М.У. О необходимых условиях существования седловой точки в задаче оптимального управления для систем разностных уравнений типа Вольтерра	13

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Chimitova E.V., Osintseva E.A. Optimal design of reliability experiment based on the Wiener degradation model with covariates	23
Горцев А.М., Бочарова М.А. Аналитическое исследование однолинейной системы массового обслуживания с входящим синхронным потоком событий	34
Ким К.С., Смагин В.И. Робастная экстраполяция в дискретных системах с интервальными параметрами с использованием алгоритмов оценивания неизвестного входа	47
Кривов М.В., Асламова Е.А., Асламова В.С. Система выработки стратегий управления промышленной безопасностью	55
Rouban A.I. The sensitivity coefficients for dynamic systems described by interconnected difference ordinary equations and equations with the distributed memory	66
Семенов В.И. Сравнение алгоритма кратномасштабного анализа изображений в частотной области с алгоритмом Малла	73
Vorobeychikov S.E., Pupkov A.V. Non-asymptotic Confidence Estimation of the Autoregressive Parameter in AR(1) Process by Noisy Observations	83

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Батенков А.А., Батенков К.А., Фокин А.Б. Анализ вероятности связности телекоммуникационной сети на основе инверсий ее состояний	91
Глазкова А.В. Подход к преобразованию обучающей выборки для повышения качества генерации заголовков научных текстов	99
Ушенина И.В. Использование синтеза высокого уровня для реализации на ПЛИС адаптивных LMS-фильтров, работающих в формате с плавающей запятой	108

CONTENTS

CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

Antipina E.V., Mustafina S.A., Antipin A.F. Algorithm for finding an approximate solution of the problem of optimal control of a chemical process in the presence of terminal restrictions	4
Mansimov K.B., Chiragova M.U. On necessary conditions for the existence of a saddle point in the problem of optimal control for systems of difference equations of Volterra type	13

DATA PROCESSING

Chimitova E.V., Osintseva E.A. Optimal design of reliability experiment based on the Wiener degradation model with covariates	23
Gortsev A.M., Bocharova M.A. Analytical study of a single-line system queuing with incoming synchronous events flow	34
Kim K.S., Smagin V.I. Robust extrapolation in discrete systems with interval parameters using algorithms for estimating unknown input	47
Krivov M.V., Aslamova E.A., Aslamova V.S. System for developing industrial safety management strategies	55
Rouban A.I. The sensitivity coefficients for dynamic systems described by interconnected difference ordinary equations and equations with the distributed memory	66
Semenov V.I. Comparison of the algorithm of multiscale image analysis in the frequency domain with the Mall algorithm	73
Vorobeychikov S.E., Pupkov A.V. Non-asymptotic Confidence Estimation of the Autoregressive Parameter in AR(1) Process by Noisy Observations	83

INFORMATICS AND PROGRAMMING

Batenkov A.A., Batenkov K.A., Fokin A.B. Network connectivity probability analysis based on its states inversion	91
Glazkova A.V. Approach to transforming training data for improving the title generation performance for scientific texts	99
Ushenina I.V. FPGA implementation of floating-point LMS adaptive filters using high-level synthesis	108

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

Научная статья

УДК 519.688, 004.942

doi: 10.17223/19988605/59/1

Алгоритм поиска приближенного решения задачи оптимального управления химическим процессом при наличии терминальных ограничений**Евгения Викторовна Антипина¹, Светлана Анатольевна Мустафина²,
Андрей Федорович Антипин³**^{1,3} *Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, Россия*² *Башкирский государственный университет, Уфа, Россия*¹ *stepashinaev@ya.ru*² *mustafina_sa@mail.ru*³ *andrejantipin@ya.ru*

Аннотация. Разрабатывается численный алгоритм поиска приближенного решения задачи оптимального управления химическим процессом с терминальными ограничениями. Сформулирована в общем виде постановка задачи оптимального управления для химического процесса с ограничениями на параметр управления и фазовые переменные. Для ее решения описан пошаговый алгоритм, в основу которого положены метод штрафов и генетический алгоритм. Проведена апробация алгоритма на примере реакции аминотетирования тиолов. Определены приближенные оптимальные концентрации веществ и приближенный оптимальный температурный режим, обеспечивающий близкий к максимальному выход целевого продукта реакции при выполнении терминальных ограничений.

Ключевые слова: задача оптимального управления; терминальные ограничения; метод штрафов; генетические алгоритмы; реакция аминотетирования тиолов

Благодарности: Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код: FZWU-2020-0027).

Для цитирования: Антипина Е.В., Мустафина С.А., Антипин А.Ф. Алгоритм поиска приближенного решения задачи оптимального управления химическим процессом при наличии терминальных ограничений // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 59. С. 4–12. doi: 10.17223/19988605/59/1

Original article

doi: 10.17223/19988605/59/1

Algorithm for finding an approximate solution of the problem of optimal control of a chemical process in the presence of terminal restrictions**Evgenia V. Antipina¹, Svetlana A. Mustafina², Andrey F. Antipin³**^{1,3} *Sterlitamak Branch of the Bashkir State University, Sterlitamak, Russian Federation*² *Bashkir State University, Ufa, Russian Federation*¹ *stepashinaev@ya.ru*

² mustafina_sa@mail.ru

³ andrejantipin@ya.ru

Abstract. The article is devoted to the development of a numerical algorithm for finding an approximate solution to the problem of optimal control by a chemical process with terminal constraints. One of the most important tasks of mathematical modeling of chemical processes is the task of determining the optimal conditions for their conduct, as well as the creation of automated complexes for their calculation. The search for optimal methods for conducting chemical processes leads to optimal control problems, including restrictions on phase variables and control parameters, since their permissible values are limited by technological limits. The presence of restrictions on phase variables significantly complicates the search for solutions to optimization problems, including in the course of computer implementation of their numerical methods for finding optimal control. Therefore, the development of algorithms and programs for solving optimal control problems with phase constraints is an urgent problem and is of practical interest. To construct realizable algorithms for solving the optimal control problem with phase constraints, the penalty method is often used. The main idea of this method is to replace a problem with constraints on a problem without constraints by adding a "penalty" to the optimality criterion, the sequence of solutions of which gives a solution to the original problem. It is possible to overcome the difficulties arising from the use of classical optimization methods, such as the nonlinearity of mathematical models of processes, the requirements for the continuity of the objective function and its derivatives, the large dimension of the problem, by using genetic algorithms. Genetic algorithms make it possible to find an approximate solution to the optimal control problem, which is acceptable from a practical point of view. An important advantage of genetic algorithms is the independence of the solution found with their help from the choice of the starting point of the search. Genetic algorithms can be easily modified for different processes and tasks by changing the number of phase variables and control parameters. The article formulates a general formulation of the optimal control problem for a chemical process with constraints on the control parameter and phase variables. To solve it, a step-by-step algorithm is described, the operation of which is based on two methods: the method of penalties and the genetic algorithm. Using the penalty method, the original problem with terminal constraints is reduced to a problem without constraints on the phase variables. The resulting new optimal control problem with a new optimality criterion is solved using a genetic algorithm. This algorithm is implemented as a software tool in the Delphi visual programming environment, which allows the user to configure the parameters of the penalty method and the genetic algorithm. The algorithm was tested on the example of the aminomethylation reaction of thiols. The formulation of the problem of finding the optimal temperature regime for a given reaction with restrictions on the control parameter (reaction temperature) and terminal restrictions (selectivity of formation of the target substance, conversion of substances) is formulated to determine the maximum yield of the reaction product. The suboptimal temperature regime and the corresponding concentrations of substances at which the terminal restrictions are fulfilled have been calculated. The values of the selectivity of the target reaction product, the conversion of substances, and the values of the optimality criterion at some permissible temperature values are given. It is shown that the suboptimal concentration of the target substance calculated using the algorithm exceeds the values of its concentrations determined under other temperature conditions.

Keywords: optimal control problem; terminal restrictions; penalty method; genetic algorithms; thiol aminomethylation reaction

Acknowledgments: The research was carried out within the framework of the state task of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (code FZWU-2020-0027).

For citation: Antipina, E.V., Mustafina, S.A., Antipin, A.F. (2022) Algorithm for finding an approximate solution of the problem of optimal control of a chemical process in the presence of terminal restrictions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 59. pp. 4–12. doi: 10.17223/19988605/59/1

Одной из важнейших задач математического моделирования химических процессов является задача определения оптимальных условий их ведения, а также создание автоматизированных комплексов для их расчета. Математическую модель химического процесса можно представить системой обыкновенных дифференциальных уравнений [1], включающей в себя фазовые переменные, определяющие состояние процесса, но не поддающиеся непосредственному воздействию, и управляющие параметры, которые можно варьировать и влиять тем самым на течение процесса. В качестве фазовых переменных для химических процессов можно выбрать концентрации веществ, количество веществ, адсорбированных на катализаторе, давление, температуру и т.д. Параметрами управления могут быть температура, скорость подачи или состав реакционной смеси.

Поиск оптимальных способов ведения химических процессов приводит к задачам оптимального управления, включающим ограничения на фазовые переменные и управляющие параметры,

поскольку их допустимые значения ограничены технологическими пределами. Если ограничения на переменные состояния заданы в конечный момент времени функционирования системы, то такие ограничения являются терминальными ограничениями. Наличие ограничений на фазовые переменные существенно усложняет поиск решения оптимизационных задач, в том числе и в ходе компьютерной реализации численных методов поиска оптимального управления. Поэтому разработка алгоритмов и программ для решения задач оптимального управления с фазовыми ограничениями является актуальной проблемой и представляет практический интерес.

Общая схема вывода условий оптимальности для задач оптимального управления с ограничениями, накладываемыми на фазовые переменные, получена в работах [2, 3]. Однако при практической реализации данного подхода возникают трудности, связанные с исследованием свойств решений и разработкой численных алгоритмов для их расчета.

Для построения реализуемых алгоритмов решения задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями нередко применяют метод штрафов [4]. Основная идея данного метода состоит в замене задачи с ограничениями на задачу без ограничений путем добавления «штрафа» к критерию оптимальности, последовательность решений которой дает решение исходной задачи. В работе [5] показано решение задачи оптимального управления на основе метода штрафов, при этом решение задачи без ограничений найдено с помощью градиентного метода. Однако решения, найденные градиентными методами, зависят от выбора начальной точки поиска решения, что создает дополнительные трудности, поскольку от исследователя требуется знание некоторого приближения этой начальной точки хотя бы из физических соображений поставленной задачи.

Математическое описание химического процесса представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений, причем высокой размерности, связанной со сложностью процесса. Это создает ряд трудностей для применения некоторых методов оптимизации, например линейного и динамического программирования [6–8]. Наличие ограничений на фазовые переменные и управление затрудняет использование методов вариационного исчисления.

Преодолеть перечисленные трудности можно путем применения генетических алгоритмов. Генетические алгоритмы позволяют найти приближенное решение задачи оптимального управления, но которое при этом является приемлемым с практической точки зрения. В процессе поиска решения оптимизационной задачи с помощью генетических алгоритмов обрабатывается одновременно несколько точек пространства поиска, в отличие от традиционных методов, в которых осуществляется последовательный переход от точки к точке [9, 10]. Данная особенность генетических алгоритмов позволяет преодолеть попадание решения в точку локального экстремума полимодальной целевой функции. В процессе работы генетических алгоритмов не требуется вычисления производной целевой функции, а также отсутствуют требования ее непрерывности и непрерывности производных. Важным достоинством генетических алгоритмов является независимость найденного решения от начального приближения. Показателями эффективности работы генетического алгоритма являются скорость и устойчивость поиска. Скорость работы генетического алгоритма определяется временем, затрачиваемым на достижение заданного количества итераций или качества популяции. Устойчивость поиска определяется возможностью преодоления попадания в точки локальных экстремумов, а также способностью из поколения в поколение повышать качество популяции. Кроме того, генетические алгоритмы можно легко модифицировать для разных процессов и задач, изменяя количество фазовых переменных и параметры управления.

1. Постановка задачи

Сформулируем задачу поиска оптимального температурного режима химического процесса с терминальными ограничениями.

Пусть динамика химического процесса на интервале $[0, t_{end}]$ описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений [11]:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x(t), T(t), t) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ – вектор концентраций (фазовых переменных), $T(t)$ – температура (параметр управления), t – время, $f_i(x(t), T(t), t)$ – непрерывные вместе со своими частными производными функции.

Управление $T(t)$ принадлежит классу кусочно-постоянных функций $T(t) = T_j, \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j = \overline{0, N}$, где N – число моментов переключений при разбиении $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N+1}, \quad t_{N+1} = t_{end}$.

Пусть на фазовые переменные (значения концентраций в конце протекания реакции) наложены ограничения вида равенств и (или) неравенств

$$\begin{aligned} h_j(x(t_{end})) &= 0, \quad j = \overline{1, r}, \\ h_j(x(t_{end})) &\leq 0, \quad j = \overline{r+1, m}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $h_j(x(t_{end}))$ – непрерывно-дифференцируемые функции по всем аргументам.

На значения параметра управления (значения температуры реакции) наложены ограничения вида:

$$T_{\min} \leq T(t) \leq T_{\max}, \quad (4)$$

где $T_{\min}, T_{\max}$ – минимальное и максимальное допустимые значения температуры соответственно.

Пусть критерием оптимальности является некоторая функция от значений концентраций веществ в конечный момент времени протекания реакции

$$I(T) = h_0(x(t_{end})). \quad (5)$$

Необходимо определить температурный режим $T^*(t)$ из класса кусочно-постоянных функций для химического процесса, описываемого системой дифференциальных уравнений (1) с начальными условиями (2), такой что выполнены терминальные ограничения (3) и ограничения на температуру (4), при этом критерий оптимальности (5) должен достигать экстремального значения.

Для определенности будем рассматривать задачу на поиск минимума критерия (5). Для того чтобы решить задачу на максимум, нужно заменить знак перед функцией (5) на противоположный, т.е.

$$I(T^*) = \max_{T_{\min} \leq T^* \leq T_{\max}} h_0(x(t_{end})) = - \min_{T_{\min} \leq T^* \leq T_{\max}} [-h_0(x(t_{end}))]$$

2. Алгоритм поиска приближенного решения задачи оптимального управления с терминальными ограничениями для химического процесса

Сформулируем алгоритм поиска приближенного оптимального температурного режима с терминальными ограничениями, применяя метод штрафов и генетический алгоритм.

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию [12]:

$$W(T) = I(T) + G(T, q^k) \rightarrow \min, \quad (6)$$

где $G(T, q^k)$ – штрафная функция, зависящая от управления T и параметра штрафа q^k (k – номер итерации). Чем больше значение параметра штрафа q^k , тем больше штраф за нарушение ограничений.

Построение штрафной функции осуществляется исходя из следующих условий: $G(T, q^k) = 0$, если ограничения (3) выполняются; $G(T, q^k) > 0$, если ограничения (3) не выполняются.

Если ограничения (3) нарушены и $q^k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, то $G(T, q^k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$.

В качестве штрафной функции рассмотрим функцию вида:

$$G(T, q^k) = \frac{q^k}{2} \left(\sum_{j=1}^r [h_j(x)]^2 + \sum_{j=r+1}^m [h_j^+(x)]^2 \right),$$

где $h_j^+(x)$ – срезка функции, определяемая по правилу: $h_j^+(x) = 0$, если $h_j(x) \leq 0$; $h_j^+(x) = h_j(x)$, если $h_j(x) > 0$.

Задача оптимального управления (1)–(5) с терминальными ограничениями сводится к задаче оптимального управления без ограничений путем поиска управляющего параметра $T^*(t)$, который доставляет минимум критерию оптимальности (6). При этом на каждой итерации метода штрафа найденный вектор $T^*(t)$ является начальным для следующей итерации.

Для решения задачи без ограничений воспользуемся генетическим алгоритмом. Работа генетического алгоритма заключается в последовательной смене поколений особей, при котором наследуются лучшие свойства родителей и приобретаются новые полезные свойства, позволяющие выживать наиболее приспособленным особям. Будем применять генетический алгоритм с вещественным кодированием (Real-Coded Genetic Algorithm, RGGA) [13], поскольку применение вещественного кодирования повышает точность решения и скорость поиска глобального экстремума за счет отсутствия операций кодирования-декодирования.

Пусть математическим аналогом особи выступает параметр управления (температура) $T = (T_0, T_1, \dots, T_N)$, где T_i будем называть геном, $T_i = T(t_i)$, $t_i \in [0, t_{end}]$ ($i = \overline{1, N}$): $t_{i+1} > t_i \quad \forall i = \overline{0, N}$, $t_0 = 0$, $t_{N+1} = t_{end}$. Тогда в качестве популяции из P живых организмов будем рассматривать набор векторов $T_j = (T_{j0}, T_{j1}, \dots, T_{jN})$, $j = \overline{1, P}$. Функцией приспособленности будет выступать критерий оптимальности (6), для вычисления значения которого необходимо решить систему дифференциальных уравнений (1) с начальными условиями (2).

Сформулируем пошаговую работу алгоритма решения задачи поиска оптимального температурного режима химического процесса с терминальными ограничениями.

Шаг 1. Задать начальные параметры для метода штрафов: номер текущей итерации $k = 0$, начальное значение штрафа q^0 , параметр для увеличения штрафа S (рекомендуется выбрать число от 4 до 10 [14]), положительную константу ε для окончания работы алгоритма. Задать начальные параметры генетического алгоритма: P – количество особей в популяции, N – количество генов, G_Max – максимальное количество поколений, номер текущей итерации генетического алгоритма $G_k=0$. Сгенерировать случайным образом на интервале $[T_{min}, T_{max}]$ начальную популяцию $T_j^0 = (T_{j0}^0, T_{j1}^0, \dots, T_N^0)$, $j = \overline{1, P}$. Вычислить для каждой особи значение функции приспособленности.

Шаг 2. Селекция. На данном шаге отбираются две особи – $a = (a_0, a_1, \dots, a_N)$, $b = (b_0, b_1, \dots, b_N)$ – из текущей популяции для последующего скрещивания. Оператор селекции «турнирный отбор» выполняет случайный выбор двух особей из текущей популяции и последующий случайный отбор одной особи из двух особей, выбранных на первом турнире.

Шаг 3. Кроссовер. На данном шаге создаются потомки из двух особей-родителей, отобранных на предыдущем шаге. Арифметический кроссовер создает два потомка – $c = (c_0, c_1, \dots, c_N)$, $d = (d_0, d_1, \dots, d_N)$ – по правилу [10]:

$$c_i = \gamma a_i + (1 - \gamma) b_i, \quad d_i = \gamma b_i + (1 - \gamma) a_i, \quad i = \overline{0, N},$$

где $\gamma \in (0, 1)$ – случайное число.

Шаг 4. Мутация. На данном шаге преобразуются гены потомков с целью приобретения новых генов и повышения приспособленности популяции в целом. Случайная мутация осуществляет случайный выбор гена каждого из потомков c , d и его замену случайным значением из интервала $[T_{min}, T_{max}]$. Для каждой особи необходимо вычислить значение приспособленности.

Шаг 5. Обновление популяции. Случайным образом выбрать один из потомков-мутантов и поместить в текущую популяцию вместо особи с наихудшей приспособленностью. Для задачи на минимум наихудшая приспособленность есть наибольшее значение критерия оптимальности (6).

Шаг 6. Проверка условия окончания работы генетического алгоритма. Если значение текущего номера итерации G_k не превышает максимального количества поколений G_Max , то увеличить счетчик итераций $G_k = G_k + 1$ и перейти на шаг 2. В противном случае выбрать из последней популяции особь $T^*(t)$ с наилучшим значением функции приспособленности.

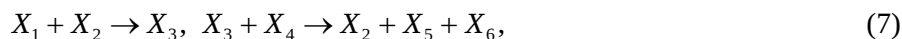
Шаг 7. Проверка условия окончания поиска решения. Если $G(T^*(t), q^k) > \varepsilon$, то положить $q^{k+1} = S \cdot q^k$, $T_j^0(t) = T^*(t)$, $j = \overline{1, P}$, $G_k = 0$, $k = k + 1$, и перейти на шаг 2. Иначе остановить поиск. В качестве приближенного решения задачи оптимального управления (1)–(5) принять особь $T^*(t)$ из последней популяции с наилучшим значением функции приспособленности.

Данный алгоритм реализован в виде программного средства в среде визуального программирования Delphi, которое позволяет пользователю осуществлять настройку параметров метода штрафов и генетического алгоритма.

3. Вычислительный эксперимент

Используя сформулированный алгоритм, решим задачу поиска оптимального управления с терминальными ограничениями для реакции аминотетирования тиолов.

Азот и серосодержащие органические соединения находят широкое применение в качестве эффективных средств защиты растений, антиокислительных, противокоррозионных, противоизносных присадок к топливам и маслам. Экспериментальные исследования реакции аминотетирования тиолов проводятся с помощью тетраметилметандиамина. Механизм данной реакции описывается совокупностью стадий [14]:



где $X_1 = N_2(CH_3)_4$, $X_2 = Sm$, $X_3 = N_2(CH_3)_4[Sm]$, $X_4 = HSC_5H_{11}$, $X_5 = (CH_3)_2NSC_5H_{11}$, $X_6 = (CH_3)_2NH$.

Кинетические уравнения скоростей стадий определяются согласно закону действующих масс и имеют вид:

$$\omega_1 = k_1 x_1 x_2, \quad \omega_2 = k_2 x_3 x_4, \quad (8)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_6)^T$ – вектор концентраций веществ (моль/л), k_1, k_2 – кинетические константы реакции (л/(моль·с)), рассчитываемые исходя из уравнения Аррениуса:

$$k_j = k_{0j} \exp\left(-\frac{E_j}{RT}\right), \quad j = 1, 2,$$

где k_{0j} – предэкспоненциальный множитель (л/(моль·с)), E_j – энергия активации j -й стадии (Дж/моль), T – температура протекания реакции (К), R – универсальная газовая постоянная (Дж/(моль·К)).

Динамика концентраций веществ описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^2 \gamma_{ij} \omega_j, \quad i = \overline{1, 6}, \quad (9)$$

с начальными условиями

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, 6}, \quad (10)$$

где (γ_{ij}) – матрица стехиометрических коэффициентов веществ реакции (7).

В системе дифференциальных уравнений (9) фазовыми переменными являются концентрации веществ x_i ($i = \overline{1, 6}$), управляющим параметром – температура в реакторе $T(t)$.

Целевым продуктом реакции (7) является вещество X_5 . В связи с этим критерий задачи оптимального управления – максимальный выход X_5 в конечный момент времени протекания реакции:

$$I(T) = x_5(t_{end}) \rightarrow \max. \quad (11)$$

Поскольку выход X_5 зависит от селективности его образования и конверсии веществ X_3, X_4 , наложим на решение задачи следующие ограничения:

1) селективность образования X_5 не менее 60%:

$$S_{X_5} \geq 0,6; \quad (12)$$

2) конверсия X_3, X_4 в конце реакции составляет 90%:

$$1 - \frac{x_3(t_{end}) + x_4(t_{end})}{x_3(0) + x_4(0)} = 0,9. \quad (13)$$

Допустимые значения температуры задаются неравенством

$$293 \text{ K} \leq T(t) \leq 333 \text{ K}. \quad (14)$$

Начальные концентрации веществ заданы значениями [14]:

$$x_1(0) = 0,445, \quad x_2(0) = 0,223, \quad x_3(0) = 0, \quad x_4(0) = 0,367, \quad x_5(0) = x_6(0) = 0. \quad (15)$$

Необходимо определить оптимальный температурный режим $T^*(t)$ реакции (7), описываемой системой дифференциальных уравнений (9) с начальными условиями (15), с учетом ограничений на параметр управления (14) и терминальных ограничений (12), (13), доставляющий максимальное значение критерию оптимальности (11).

В ходе поиска решения поставленной задачи система дифференциальных уравнений (9) с начальными условиями (15) решалась методом Рунге–Кутты четвертого порядка. Численные значения кинетических параметров реакции аминотилирования тиолов с помощью тетраметилметандиамина приведены в работе [14]. Время протекания реакции $t_{\text{end}} = 1$ ч. Генетический алгоритм для поиска безусловного экстремума применен со следующими параметрами: количество особей в популяции $P = 60$, максимальное количество поколений $G_{\text{Max}} = 2000$, количество генов $N = 450$. Для метода штрафов установлены следующие параметры: начальное значение штрафа $q^0 = 0,1$, параметр увеличения штрафа $S = 10$, параметр для окончания работы алгоритма $\varepsilon = 0,01$.

Результаты расчета показали, что для обеспечения максимального выхода продукта реакции X_5 и выполнения ограничений (12)–(14) необходимо на протяжении 0,75 ч удерживать температуру на постоянном уровне 298 К, а затем вести процесс оставшееся время при максимальной допустимой температуре 333 К (рис. 1).

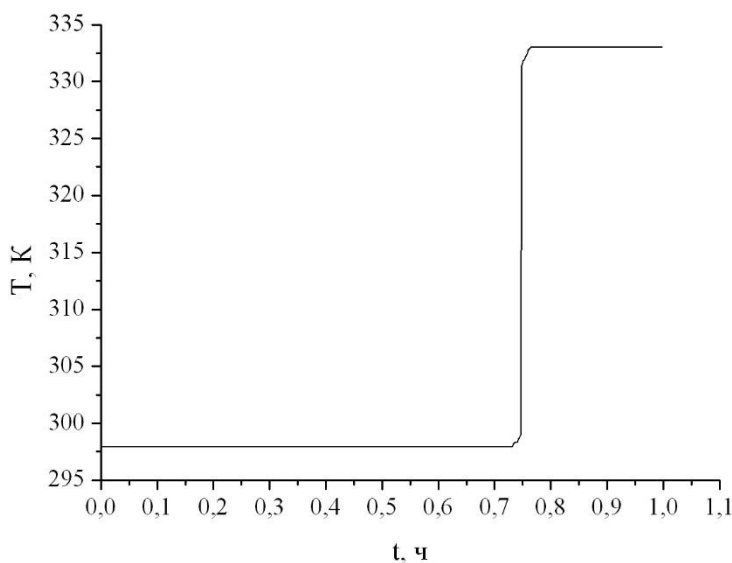


Рис. 1. Субоптимальный температурный режим
Fig. 1. Suboptimal temperature regime

Вычислены концентрации веществ, соответствующие субоптимальному температурному режиму. При соблюдении рассчитанного температурного режима концентрация целевого вещества составит 0,34 моль/л, селективность $S_{X_5} = 61\%$, конверсия X_3, X_4 в конце реакции 89,8%.

Результаты расчета показателей реакции аминотилирования тиолов

№	T, К	Селективность образования X_5 , %	Конверсия X_3, X_4 , %	Концентрация X_5 , моль/л
1	293	59,1	89,7	0,217
2	303	59,9	89,9	0,307
3	313	60,1	89,6	0,311
4	323	59,8	90,1	0,317
5	333	60,2	89,8	0,321

Для реакции аминометилирования тиолов решена прямая кинетическая задача при некоторых значениях температуры из допустимого диапазона. На основе ее решения рассчитаны значения селективности образования X_5 и конверсии веществ X_3 , X_4 (таблица). Видно, что концентрация целевого вещества X_5 меньше соответствующей концентрации, полученной при температурном режиме, рассчитанном с помощью сформулированного алгоритма.

Заключение

Таким образом, сформулированный алгоритм позволяет находить приближенное решение задачи оптимального управления химическим процессом с терминальными ограничениями и ограничениями на управляющий параметр. В основу работы алгоритма положены два метода: метод штрафов и генетический алгоритм. С помощью метода штрафов исходная задача с терминальными ограничениями сводится к задаче без ограничений на фазовые переменные. Полученная новая задача оптимального управления с новым критерием оптимальности решается с помощью генетического алгоритма. Разработанный алгоритм позволяет преодолеть трудности, возникающие в ходе решения оптимизационных задач для химических процессов, такие как нелинейность математических моделей процессов, требования непрерывности целевой функции и ее производных, большая размерность задачи. При этом найденное решение не зависит от выбора начального приближения.

С помощью разработанной на основе алгоритма программы проведен вычислительный эксперимент для реакции аминометилирования тиолов. Рассчитаны субоптимальный температурный режим и соответствующие ему концентрации веществ, при которых выполняются терминальные ограничения. Приведены значения селективности целевого продукта реакции, конверсии веществ и значения критерия оптимальности при некоторых допустимых значениях температуры. Показано, что вычисленная с помощью алгоритма субоптимальная концентрация целевого вещества превосходит значения его концентраций, определенных при других температурных режимах.

Список источников

1. Антипина Е.В., Мустафина С.А., Антипин А.Ф. Численный алгоритм идентификации кинетической модели химической реакции // Вестник Технологического университета. 2019. Т. 22, № 9. С. 13–17.
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. : Химия, 1976. 392 с.
3. Дикусар В.В., Милютин А.А. Качественные и численные методы в принципе максимума. М. : Наука, 1989. 144 с.
4. Васильев Ф.И. Численные методы решения экстремальных задач : учеб. пособие для вузов. М. : Наука, 1988. 552 с.
5. Jiang C., Lin Q., Yu C., Teo K.L., Duan G.R. An Exact Penalty Method for Free Terminal Time Optimal Control Problem with Continuous Inequality Constraints // Journal of Optimization Theory and Applications. 2012. V. 154. P. 30–53.
6. Островский Г.М., Зиятдинов Н.Н., Емельянов И.И. Синтез оптимальных систем простых ректификационных колонн с рекуперацией тепла // Доклады Академии наук. 2015. Т. 461, № 2. С. 189–192.
7. Santos L., Villas-Boas F., Oliveira A.R.L., Perin C. Optimized choice of parameters in interiorpoint methods for linear programming // Computational Optimization and Applications. 2019. V. 73. P. 535–574.
8. Biegler L.T. Integrated Optimization Strategies for Dynamic Process Operations // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. 2017. V. 51, № 6. P. 910–927.
9. Mustafina S., Antipin A., Antipina E., Odinkova E., Tuchkina L., Kolyazov K., Mustafina S. Numerical algorithm for finding optimal initial concentrations of chemical reactions // IIUM Engineering Journal. 2020. V. 21, № 1. P. 167–174.
10. Пантелеев А.В., Скавинская Д.В. Метаэвристические алгоритмы глобальной оптимизации. М. : Вузовская книга, 2019. 332 с.
11. Антипина Е.В., Антипин А.Ф. Алгоритм расчета оптимальных начальных концентраций веществ химических реакций // Вестник Технологического университета. 2017. Т. 20, № 13. С. 84–87.
12. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах : учеб. пособие. М. : Высшая школа, 2005. 544 с.
13. Herrera F., Lozano M., Verdegay J.L. Tackling real-coded genetic algorithms: operators and tools for the behaviour analysis // Artificial Intelligence Review. 1998. V. 12, № 4. P. 265–319.
14. Новичкова А.В. Численный анализ реакционной способности олефинов и алюминийорганических соединений на основе кинетических моделей частных и общих реакций : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Уфа, 2015. 110 с.

References

1. Antipina, E.V., Mustafina, S.A. & Antipin, A.F. (2019) Numerical algorithm of identifying the kinetic model of a chemical reaction. *Vestnik Tekhnologicheskogo universiteta*. 22(9). pp. 13–17.
2. Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V. & Mishchenko, E.F. (1976) *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [The Mathematical Theory of Optimal Processes]. Moscow: Khimiya.
3. Dikusar, V.V. & Milyutin, A.A. (1989) *Kachestvennye i chislennye metody v printsipe maksimuma* [Qualitative and Numerical Methods in the Maximum Principle]. Moscow: Nauka.
4. Vasiliev, F.I. (1988) *Chislennye metody resheniya ehkstremal'nykh zadach* [Numerical methods for solving extreme problems]. Moscow: Nauka.
5. Jiang, C., Lin, Q., Yu, C., Teo, K.L. & Duan, G.R. (2012) An Exact Penalty Method for Free Terminal Time Optimal Control Problem with Continuous Inequality Constraints. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 154. pp. 30–53. DOI: 10.1007/s10957-012-0006-9
6. Ostrovskii, G.M., Ziyatdinov, N.N. & Emelyanov, I.I. (2015) Synthesis of optimal systems of simple distillation columns with heat recovery. *Doklady Akademii nauk*. 461(1). pp. 89–92.
7. Santos, L., Villas-Boas, F., Oliveira, A.R.L. & Perin, C. (2019) Optimized choice of parameters in interior point methods for linear programming. *Computational Optimization and Applications*. 73. pp. 535–574. DOI: 10.1007/s10589-019-00079-9
8. Biegler, L.T. (2017) Integrated Optimization Strategies for Dynamic Process Operations. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 51(6). pp. 910–927. DOI: 10.1134/S004057951706001X
9. Mustafina, S., Antipin, A., Antipina, E., Odinkova, E., Tuchkina, L., Kolyazov, K. & Mustafina, S. (2020) Numerical algorithm for finding optimal initial concentrations of chemical reactions. *IIUM Engineering Journal*. 21(1). pp. 167–174. DOI: 10.31436/iiumej.v21i1.1180
10. Panteleev, A.V. & Skavinskaya, D.V. (2019) *Metaevristicheskie algoritmy global'noy optimizatsii* [Metaheuristic Algorithms for Global Optimization]. Moscow: Vuzovskaya kniga.
11. Antipina, E.V. & Antipin, A.F. (2017) Algorithm for calculating the optimal initial concentrations of substances in chemical reactions. *Vestnik Tekhnologicheskogo universiteta*. 20(13). pp. 84–87.
12. Panteleev, A.V. & Letova, T.A. (2005) *Metody optimizatsii v primerakh i zadachakh* [Optimization methods in examples and tasks]. Moscow: Vysshaya shkola.
13. Herrera, F., Lozano, M. & Verdegay, J.L. (1998) Tackling real-coded genetic algorithms: operators and tools for the behaviour analysis. *Artificial Intelligence Review*. 12(4). pp. 265–319. DOI: 10.1023/A:1006504901164
14. Novichkova, A.V. (2015) *Chislennyy analiz reaktsionnoy sposobnosti olefinov i alyuminiyorganicheskikh soedineniy na osnove kineticheskikh modeley chastnykh i obshchikh reaktsiy* [Numerical analysis of the reactivity of olefins and organoaluminum compounds based on kinetic models of partial and general reactions]. Physics and Mathematics Cand. Diss. Ufa.

Информация об авторах:

Антипина Евгения Викторовна – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник научно-инновационного управления Стерлитамакского филиала Башкирского государственного университета (Стерлитамак, Россия). E-mail: stepashinaev@ya.ru

Мустафина Светлана Анатольевна – профессор, доктор физико-математических наук, проректор по научной и инновационной работе Башкирского государственного университета (Уфа, Россия). E-mail: mustafina_sa@mail.ru

Антипин Андрей Федорович – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной информатики и программирования Стерлитамакского филиала Башкирского государственного университета (Стерлитамак, Россия). E-mail: andrejantipin@ya.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Antipina Evgenia V. (Candidate of Physics and Mathematics, Junior Researcher, Science and Innovation Management, Sterlitamak Branch of the Bashkir State University, Sterlitamak, Russian Federation). E-mail: stepashinaev@ya.ru

Mustafina Svetlana A. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Vice-rector for Scientific and Innovative work, Bashkir State University, Ufa, Russian Federation). E-mail: mustafina_sa@mail.ru

Antipin Andrey F. (Candidate of Technical Science, Associate Professor, Department of Applied Informatics and Programming, Sterlitamak Branch of the Bashkir State University, Sterlitamak, Russian Federation). E-mail: andrejantipin@ya.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 10.08.2021; принята к публикации 30.05.2022

Received 10.08.2021; accepted for publication 30.05.2022

Научная статья

УДК 517.934

doi: 10.17223/19988605/59/2

О необходимых условиях существования седловой точки в задаче оптимального управления для систем разностных уравнений типа Вольтерра

Камиль Байрамали оглы Мансимов¹, Махнура Узеир кызы Чырахова²

¹ Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан

^{1, 2} Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан

¹ kamilbmansimov@gmail.com

² kmansimov@mail.ru

Аннотация. Изучается задача оптимального управления для объектов, описываемых системой разностных уравнений типа Вольтерра. Доказаны необходимые условия существования седловой точки.

Ключевые слова: разностное уравнение Вольтерра; седловая точка; терминальный функционал; аналог дискретного принципа максимума

Для цитирования: Мансимов К.Б., Чырахова М.У. О необходимых условиях существования седловой точки в задаче оптимального управления для систем разностных уравнений типа Вольтерра // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 59. С. 13–22. doi: 10.17223/19988605/59/2

Original article

doi: 10.17223/19988605/59/2

On necessary conditions for the existence of a saddle point in the problem of optimal control for systems of difference equations of Volterra type

Kamil B. Mansimov¹, Mahnura U. Chiragova²

¹ Baku State University, Baku, Azerbaijan

^{1, 2} Institute of Control problems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan

¹ kamilbmansimov@gmail.com

² kmansimov@mail.ru

Abstract. On solutions of a system of nonlinear difference equations of Volterra type

$$x(t) = \sum_{\tau=t_0}^t f(t, \tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)), \quad t \in T,$$

define the terminal functional

$$J(u, v) = \varphi(x(t_1)).$$

Here $f(t, \tau, x, u, v)$ is a given n -dimensional vector function continuous in (x, u, v) for all (t, τ) together with partial derivatives in x , $\varphi(x)$ is a given twice continuously differentiable scalar function.

Consider a game problem. Suppose that control $u(t)$ is controlled by player A, striving to minimize functional, and control $v(t)$ is controlled by player B, striving to maximize functional.

Consider the following game problem: among all admissible pairs $(u(t), v(t))$, on which functional is defined, find an admissible pair $(u^0(t), v^0(t))$ such that for any $(u(t), v(t))$

$$J(u^0, v) \leq J(u^0, v^0) \leq J(u, v^0).$$

A pair $(u^0(t), v^0(t))$, satisfying condition, following the accepted terminology, is called a saddle point of functional. A necessary condition for optimality controls is established.

Keywords: Volterra difference equation; saddle point; terminal functional; analogue of the discrete maximum principle

For citation: Mansimov, K.B., Chiragova, M.U. (2022) On necessary conditions for the existence of a saddle point in the problem of optimal control for systems of difference equations of Volterra type. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 59. pp. 13–22. doi: 10.17223/19988605/59/2

В работах [1–2] и других найдены условия существования седловой точки в процессах, описываемых системами интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.

В предлагаемой работе, применяя модификацию методов, предложенных в работах [3–6], найдены различные необходимые условия существования седловой точки в задаче оптимального управления для систем, модели которых описываются системами нелинейных разностных уравнений.

1. Постановка задачи

Пусть R^r , R^q , R^n – линейные пространства r -, q - и n -мерных векторов соответственно, $(u(t), v(t))$ – $r(q)$ -мерный дискретный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $U(V)$, т.е.,

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1\}, \quad (1)$$

$$v(t) \in V \subset R^q, \quad t \in T, \quad (2)$$

где t_0, t_1 – заданные числа, причем разность $t_1 - t_0$ есть натуральное число.

Пару $(u^0(t), v^0(t))$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимой парой. На решениях системы нелинейных разностных уравнений типа Вольтерра

$$x(t) = \sum_{\tau=t_0}^t f(t, \tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)), \quad t \in T, \quad (3)$$

определим терминальный функционал

$$J(u, v) = \varphi(x(t_1)). \quad (4)$$

Здесь $f(t, \tau, x, u, v)$ – заданная n -мерная вектор-функция, непрерывная по (x, u, v) при всех (t, τ) вместе с частными производными по x , $\varphi(x)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция.

Ясно, то функционал (4) определен для всех совокупностей (пар) $(u(t), v(t))$, для которых соответствующее решение $x(t)$ уравнения (3) определено на T .

Перейдем к постановке следующей игровой задачи. Предположим, что управлением $u(t)$ распоряжается игрок A , стремящийся минимизировать функционал (4), а управлением $v(t)$ распоряжается игрок B , стремящийся максимизировать функционал (4).

Рассмотрим следующую игровую задачу: среди всех допустимых пар $(u(t), v(t))$, на которых определен функционал (4), найти такую допустимую пару $(u^0(t), v^0(t))$ чтобы при любых $(u(t), v(t))$

$$J(u^0, v) \leq J(u^0, v^0) \leq J(u, v^0). \quad (5)$$

Пару $(u^0(t), v^0(t))$, удовлетворяющую условию (5), следуя принятой терминологии, назовем седловой точкой функционала (4).

2. Аналог принципа максимума Понтрягина для существования седловой точки

Пусть $(u^0(t), v^0(t))$ – седловая точка функционала (4). Это означает, что для любых $(u(t), v(t))$

$$J(u, v^0) \geq J(u^0, v^0), \quad J(u^0, v) \leq J(u^0, v^0). \quad (6)$$

Предположим, что $x^0(t)$ – решение уравнения

$$x^0(t) = \sum_{\tau=t_0}^t f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)), \quad (7)$$

а множества

$$f(t, \tau, x^0(\tau), U) = \{\alpha : \alpha = f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)), u(\tau) \in U\}, \quad (8)$$

$$f(t, \tau, x^0(\tau), V) = \{\alpha : \alpha = f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)), v(\tau) \in V\} \quad (9)$$

выпуклы при всех (t, τ) .

Пусть $\varepsilon \in [0, 1]$, $\mu \in [0, 1]$, $u(t) \in U$, $t \in T$, $v(t) \in V$, $t \in T$, – произвольные числа и произвольные допустимые управляющие функции соответственно.

В силу выпуклости множеств (8), (9) следует, что существуют допустимые процессы $(u(t; \varepsilon), v^0(t), x(t; \varepsilon))$, $(u^0(t), v^0(t; \mu), x(t; \mu))$, такие что

$$\begin{aligned} x(t; \varepsilon) &= \sum_{\tau=t_0}^t f(t, \tau, x(t; \varepsilon), u(\tau; \varepsilon), v^0(\tau)) \equiv \\ &\equiv \sum_{\tau=t_0}^t \left[\varepsilon f(t, \tau, x(t; \varepsilon), u(\tau), v^0(\tau)) + (1 - \varepsilon) f(t, \tau, x(t; \varepsilon), u^0(\tau), v^0(\tau)) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} x(t; \mu) &= \sum_{\tau=t_0}^t f(t, \tau, x(t; \mu), u^0(\tau), v(\tau; \mu)) \equiv \\ &\equiv \sum_{\tau=t_0}^t \left[\mu f(t, \tau, x(t; \mu), u^0(\tau), v(\tau)) + (1 - \mu) f(t, \tau, x(t; \mu), u^0(\tau), v^0(\tau)) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Введем обозначения

$$a(t) = \left. \frac{\partial x(t; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \quad b(t) = \left. \frac{\partial^2 x(t; \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0}, \quad (12)$$

$$z(t) = \left. \frac{\partial x(t; \mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}, \quad y(t) = \left. \frac{\partial^2 x(t; \mu)}{\partial \mu^2} \right|_{\mu=0}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{u(\tau)} f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) &\equiv \\ &\equiv f(t, \tau, x^0(\tau), u(\tau), v^0(\tau)) - f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{v(\tau)} f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) &\equiv \\ &\equiv f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v(\tau)) - f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)). \end{aligned} \quad (15)$$

Используя (12), (13) и учитывая условия гладкости, наложенные на правую часть уравнений (10), (11), доказывается, что

$$a(t) = \sum_{\tau=t_0}^t \left[f_x(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) a(\tau) + \Delta_{u(\tau)} f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) \right], \quad (16)$$

$$b(t) = \sum_{\tau=t_0}^t \left[f_x(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) a(\tau) + 2\Delta_{u(\tau)} f_x(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) + \right. \\ \left. + a'(\tau) f_{xx}(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) a(\tau) \right], \quad (17)$$

$$z(t) = \sum_{\tau=t_0}^t \left[f_x(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) z(\tau) + \Delta_{u(\tau)} f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) \right], \quad (18)$$

$$y(t) = \sum_{\tau=t_0}^t \left[f_x(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) y(\tau) + 2\Delta_{u(\tau)} f_x(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) z(\tau) + \right. \\ \left. + z'(\tau) f_{xx}(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) z(\tau) \right]. \quad (19)$$

Используя (12), (13), вычислим специальные приращения

$$J(u(t; \varepsilon), v^0(t)) - J(u^0(t), v^0(t)), \quad (20)$$

$$J(u^0(t), v(t; \mu)) - J(u^0(t), v^0(t)) \quad (21)$$

функционала (4), соответствующие допустимым управлениям $(u^0(t), u(t; \varepsilon))$, $(u^0(t), v(t; \mu))$ соответственно.

Применяя формулу Тейлора, эти специальные приращения (20), (21) записываются в виде:

$$\Delta_u J_\varepsilon(u^0(t), v^0(t)) = J(u(t; \varepsilon), v^0(t)) - J(u^0(t), v^0(t)) = \varphi(x(t_1; \varepsilon)) - \varphi(x^0(t_1)) = \\ = \frac{d}{d\varepsilon} \varphi(x(t_1; \varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \varphi(x(t_1; \varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} + o(\varepsilon^2) = \varepsilon \frac{\partial \varphi(x^0(t_1))}{\partial x} a_1(t_1) + \\ + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x^0(t_1))}{\partial x^2} b(t_1) + \frac{\varepsilon^2}{2} a'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi(x^0(t_1))}{\partial x^2} a(t_1) + o(\varepsilon^2), \quad (22)$$

$$\Delta_v J_\mu(u^0(t), v^0(t)) = J(u^0(t), v(t; \mu)) - J(u^0(t), v^0(t)) = \\ = \frac{d}{d\mu} \varphi(x(t_1; \mu)) \Big|_{\mu=0} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\mu^2} \varphi(x(t_1; \mu)) \Big|_{\mu=0} + o(\mu^2) = \mu \frac{\partial \varphi(x^0(t_1))}{\partial x} z(t_1) + \\ + \frac{\mu^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x^0(t_1))}{\partial x^2} y(t_1) + \frac{\mu^2}{2} z'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi(x^0(t_1))}{\partial x^2} z(t_1) + o(\mu^2). \quad (23)$$

Введем аналог функции Гамильтона–Понтрягина:

$$H(t, x(t), u(t), v(t), \psi^0(t)) = \sum_{\tau=t_0}^t \psi^{0'}(\tau) f(\tau, \tau, x^0(\tau), u(\tau), v(\tau)) - \varphi'_x(x^0(t_1)) f(t_1, t, x^0(t), u(t), v(t)),$$

где $\psi(t)$ – n -мерная вектор-функция, являющаяся решением линейного разностного уравнения типа Вольтерра

$$\psi(t) = H_x(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)). \quad (24)$$

Из тождеств (16)–(19) получаем, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} \psi^{0'}(t) a(t) = \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t \psi^{0'}(\tau) f_x(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau), \psi^0(t)) a(\tau) + \right.$$

$$+ \sum_{\tau=t_0}^{t_1} \psi^{0'}(t) \Delta_{u(\tau)} f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) \Big], \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1} \psi^{0'}(t) b(t) = \sum_{t=t_0}^{t_1} \Big[\sum_{\tau=t_0}^t \psi^{0'}(t) f_x(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) b(\tau) + \\ + \sum_{\tau=t_0}^{t_1} \psi^{0'}(t) \Delta_{u(\tau)} f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) a(\tau) + \psi^0(\tau) z'(\tau) f_{xx}(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) z(\tau) \Big], \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1} \psi^{0'}(t) z(t) = \sum_{t=t_0}^{t_1} \Big[\sum_{\tau=t_0}^t (\psi^{0'}(t) f_x(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) z(\tau) + \\ + \psi^{0'}(t) \Delta_{u(\tau)} f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau))) \Big], \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1} \psi^{0'}(t) y(t) = \sum_{t=t_0}^{t_1} \Big[\sum_{\tau=t_0}^t (\psi^{0'}(t) f_x(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) y(\tau) + \\ + 2\psi^{0'}(t) \Delta_{u(\tau)} f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) z(\tau) + z'(\tau) \psi^0(\tau) f_{xx}(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) z(\tau)) \Big]. \quad (28) \end{aligned}$$

Используя дискретный аналог формулы Фубини (см., напр.: [7, 8]), доказывается справедливость тождеств

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1} \Big[\sum_{\tau=t_0}^t \psi^{0'}(t) f_x(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) a(\tau) = \\ = \sum_{t=t_0}^{t_1} \Big[\sum_{\tau=t_0}^t \psi^{0'}(\tau) f_x(\tau, t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) a(t), \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1} \Big[\sum_{\tau=t_0}^t \psi^{0'}(t) \Delta_{u(\tau)} f_x(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) = \\ = \sum_{t=t_0}^{t_1} \Big[\sum_{\tau=t_0}^t \psi^{0'}(\tau) \Delta_{u(t)} f(\tau, t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)), \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1} \Big[\sum_{\tau=t_0}^t (\psi^{0'}(t) f_x(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) a(\tau) + \\ + 2\psi^{0'}(t) \Delta_{u(\tau)} f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) + a'(\tau) \psi^0(\tau) f_{xx}(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) a(\tau)) \Big] = \\ = \sum_{t=t_0}^{t_1} \Big[\sum_{\tau=t}^t (\psi^{0'}(\tau) f_x(\tau, t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) a(t) + \\ + 2\psi^{0'}(t) \Delta_{u(\tau)} f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) + a'(t) \psi^0(t) f_{xx}(t, \tau, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) a(t)) \Big]. \quad (31) \end{aligned}$$

Далее из соотношений (16), (19) следует, что

$$a(t_1) = \sum_{t=t_0}^t \Big[f_x(t_1, t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) a(t) + \Delta_{u(t)} f(t_1, t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) \Big], \quad (32)$$

$$\begin{aligned} b(t_1) = \sum_{t=t_0}^t \Big[f_x(t_1, t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) b(t) + \\ + 2 \Delta_{u(t)} f_x(t_1, t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) a(t) + a'(t) f_{xx}(t_1, t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) z(t) \Big], \quad (33) \end{aligned}$$

$$z(t_1) = \sum_{t=t_0}^t \left[f_x(t_1, t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) z(t) + \right. \\ \left. + \Delta_{v(t)} f(t_1, t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) \right], \quad (34)$$

$$y(t_1) = \sum_{t=t_0}^t \left[f_x(t_1, t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) y(t) + \right. \\ \left. + 2\Delta_{v(t)} f_x(t_1, t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) z(t) \right]. \quad (35)$$

Учитывая выражение аналога функции Гамильтона–Понтрягина, сопряженную систему (24) и тождества (25)–(35), после некоторых преобразований специальные приращения (22), (23) функционала (4) по управляющим функциям $(u^0(t), u(t; \varepsilon))$ и $(v^0(t), v(t; \mu))$ соответственно представляются в виде

$$\Delta_u J_\varepsilon(u^0(t), v^0(t)) = J(u(t; \varepsilon), v^0(t)) - J(u^0(t), v^0(t)) = \\ = -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{u(t)} H(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[a'(t_1) \phi_{xx}(x^0(t)) a(t_1) - \right. \\ \left. - \sum_{t=t_0}^{t_1} a'(t) H_{xx}(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) a(t_1) - \right. \\ \left. - 2 \sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{u(t)} H'_x(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) a(t) \right] + o(\varepsilon^2), \quad (36)$$

$$\Delta_v J_\mu(u^0(t), v^0(t)) = J(u^0(t), v(t; \mu)) - J(u^0(t), v^0(t)) = \\ = -\mu \sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) + \frac{\mu^2}{2} \left[z(t_1) \phi_{xx}(x^0(t)) z(t_1) - \right. \\ \left. - \sum_{t=t_0}^{t_1} z'(t) H_{xx}(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) z(t) - \right. \\ \left. - 2 \sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H'_x(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) z(t) \right] + o(\mu^2). \quad (37)$$

Полученные разложения (36), (37) позволяют сформулировать необходимые условия оптимальности типа принципа максимума Понтрягина, а также исследовать случай их вырождения.

3. Необходимые условия оптимальности для существования седловой точки

По предположению $(u^0(t), v^0(t))$ является седловой точкой в рассматриваемой задаче. Поэтому из разложений (36), (37) следует, что

$$-\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{u(t)} H(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) + o(\varepsilon) \geq 0, \quad (38)$$

$$-\mu \sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) + o(\mu) \leq 0. \quad (39)$$

Из неравенств (38), (39) в силу произвольности ε и μ получаем справедливость утверждения.

Теорема 1. В случае выпуклости множеств (8), (9) для существования седловой точки $(u^0(t), v^0(t))$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы неравенства

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{u(t)} H(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) \leq 0, \quad (40)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) \geq 0 \quad (41)$$

выполнялись для всех $u(t) \in U, t \in T, v(t) \in V, t \in T$ соответственно.

Неравенства (40), (41) представляют собой необходимые условия оптимальности первого порядка, причем первое из них – типа принципа максимума Понтрягина, а второе – типа принципа минимума Понтрягина.

Известно (см., напр.: [3, 6]), что часто различные необходимые условия оптимальности первого порядка вырождаются. Подобные случаи называются особыми, а соответствующие управления – особыми управлениями. В этом случае для исследования рассматриваемой задачи надо иметь новые содержательные условия оптимальности.

Изучим случай вырождения необходимых условий оптимальности (40), (41).

Определение. Допустимое управление $(u^0(t), v^0(t))$ назовем особым первого порядка управлением, если для всех $u(t) \in U, t \in T$ и $v(t) \in V, t \in T$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{u(t)} H(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) = 0, \quad (42)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) = 0 \quad (43)$$

соответственно.

Из введенного определения ясно, что для особого управления необходимые условия оптимальности теряют свое содержательное значение.

Из разложений (36), (37) сразу следует

Теорема 2. Пусть множества (8), (9) выпуклы. Тогда для того, чтобы особое допустимое управление $(u^0(t), v^0(t))$ было седловой точкой, необходимо, чтобы неравенства

$$\begin{aligned} & a'(t_1) \phi_{xx}(x^0(t)) a(t_1) - \sum_{t=t_0}^{t_1} a'(t) H_{xx}(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) a(t) - \\ & - 2 \sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{u(t)} H'_{xx}(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) a(t) \geq 0, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & z(t_1) \phi_{xx}(x^0(t)) z(t_1) - \sum_{t=t_0}^{t_1} z'(t) H_{xx}(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) z(t) - \\ & - 2 \sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H'_{xx}(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) z(t) \leq 0 \end{aligned} \quad (45)$$

выполнялись для всех $u(t) \in U, t \in T, v(t) \in V, t \in T$ соответственно.

Неравенства (44), (45) являются довольно общими, но вместе с тем неявными необходимыми условиями оптимальности для особых седловых точек $(u^0(t), v^0(t))$.

Однако с их помощью при некоторых предположениях можно получить необходимые условия оптимальности, явно выраженные через параметры рассматриваемой задачи.

Пусть $R(\tau, t) - (n \times n)$ – матричная функция, являющаяся решением разностного матричного уравнения типа Вольтерра

$$R(\tau, t) = \sum_{s=t}^{\tau} R(\tau, s) \left(f_x(s, t, x^0(t), u(t), v(t)) - f_x(s, t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) \right), t_0 \leq t \leq \tau. \quad (46)$$

Матричная функция $R(\tau, t)$ называется резольвентой уравнения (18) (см., напр.: [7, 8]).

Следуя [7, 8], можно показать, что резольвента $R(\tau, t)$ является также решением уравнения

$$R(\tau, t) = \sum_{s=t}^{\tau} R(\tau, s) \left(f_x(\tau, s, x^0(s), u^0(s), v^0(s)) - f_x(\tau, t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) \right). \quad (47)$$

Уравнения (46), (47) называются уравнениями резольвенты.

Решения $a(t)$ и $z(t)$ уравнений (16), (18) допускают соответственно представления

$$a(t) = \sum_{\tau=t_0}^t \Delta_{u(\tau)} f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) - \sum_{\tau=t_0}^t \left[\sum_{s=t_0}^{\tau} R(t, \tau) \Delta_{u(s)} f(\tau, s, x^0(s), u^0(s), v^0(s)) \right], \quad (48)$$

$$z(t) = \sum_{\tau=t_0}^t \Delta_{v(\tau)} f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) - \sum_{\tau=t_0}^t \left[\sum_{s=t_0}^{\tau} R(t, \tau) \Delta_{v(s)} f(\tau, s, x^0(s), u^0(s), v^0(s)) \right]. \quad (49)$$

Далее, принимая во внимание тождество 2 из [5. С. 45], представления (48), (49) записываются в следующей форме:

$$a(t) = \sum_{\tau=t_0}^t \Delta_{u(\tau)} f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) - \sum_{\tau=t_0}^t \left[\sum_{s=\tau}^t R(t, s) \Delta_{u(\tau)} f(s, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) \right], \quad (50)$$

$$z(t) = \sum_{\tau=t_0}^t \Delta_{v(\tau)} f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) - \sum_{\tau=t_0}^t \left[\sum_{s=\tau}^t R(t, s) \Delta_{v(\tau)} f(s, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) \right]. \quad (51)$$

Предположим, что

$$f(t, \tau, x, u, v) = A(t, \tau) g(\tau, x, u, v), \quad (52)$$

где $A(t, \tau)$ – заданная $(n \times n)$ дискретная матричная функция, а $g(\tau, x, u, v)$ – заданная n -мерная вектор-функция, непрерывная по (x, u, v) при всех τ .

Пусть по определению

$$Q(t, \tau) = A(t, \tau) - \sum_{s=\tau}^t R(t, s) A(s, \tau).$$

Тогда представления (50), (51) примут вид:

$$a(t) = \sum_{\tau=t_0}^t Q(t, \tau) \Delta_{u(\tau)} g(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)), \quad (53)$$

$$z(t) = \sum_{\tau=t_0}^t Q(t, \tau) \Delta_{v(\tau)} g(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)), \quad (54)$$

С помощью представлений (53), (46)–(54) убеждаемся в справедливости тождеств

$$\begin{aligned} a'(t_1) \Phi_{xx}(x^0(t)) a(t_1) &= \sum_{\alpha=t_0}^{t_1} \sum_{\beta=t_0}^{\alpha} \Delta_{u(\alpha)} g'(\alpha, x^0(\alpha), u^0(\alpha), v^0(\alpha)) Q(t_1, \alpha) \Phi_{xx}(x^0(t_1)) \times \\ &\times Q(t_1, \beta) \Delta_{u(\beta)} g(\beta, x^0(\beta), u^0(\beta), v^0(\beta)), \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{u(t)} H'_x(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) a(t) = \\ &= \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t \Delta_{u(t)} H'_x(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) Q(t, \tau) \Delta_{u(\tau)} g(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) \right], \end{aligned} \quad (56)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} a'(t) H_{xx}(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) a(t) = \sum_{\alpha=t_0}^{t_1} \sum_{\beta=t_0}^{t_1} \Delta_{u(\alpha)} g'(\alpha, x^0(\alpha), u^0(\alpha), v^0(\alpha)) \times \\ \times \left[\sum_{\max(\alpha, \beta)}^{t_1} Q'(t, \alpha) H_{xx}(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) Q(t, \beta) \right] \Delta_{u(\beta)} g(\beta, x^0(\beta), u^0(\beta), v^0(\beta)), \quad (57)$$

$$z'(t_1) \phi_{xx}(x^0(t_1)) z(t_1) = \sum_{\alpha=t_0}^{t_1} \sum_{\beta=t_0}^{t_1} \Delta_{v(\alpha)} g'(\alpha, x^0(\alpha), u^0(\alpha), v^0(\alpha)) Q(t_1, \alpha) \phi_{xx}(x^0(t)) \times \\ \times Q(t_1, \beta) \Delta_{v(\beta)} g(\beta, x^0(\beta), u^0(\beta), v^0(\beta)), \quad (58)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H'_x(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi_0(t)) z(t) = \\ = \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^{t_1} \Delta_{v(\tau)} H'_x(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) Q(t, \tau) \Delta_{v(\tau)} g(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) \right], \quad (59)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} z'(t) H_{xx}(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi_0(t)) z(t) = \sum_{\alpha=t_0}^{t_1} \sum_{\beta=t_0}^{t_1} \Delta_{v(\alpha)} g'(\alpha, x^0(\alpha), u^0(\alpha), v^0(\alpha)) \times \\ \times \left[\sum_{\max(\alpha, \beta)}^{t_1} Q'(t, \alpha) H_{xx}(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) Q(t, \beta) \right] \Delta_{v(\beta)} g(\beta, x^0(\beta), u^0(\beta), v^0(\beta)). \quad (60)$$

Введем матричную функцию $K(\alpha, \beta)$ формулой

$$K(\alpha, \beta) = -Q(t_1, \alpha) \phi_{xx}(x^0(t_1)) Q(t_1, \beta) + \sum_{\max(\alpha, \beta)}^{t_1} Q'(t, \alpha) H_{xx}(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) Q(t, \beta).$$

Сейчас, принимая во внимание это обозначение и тождества (46)–(58) в неравенствах (44), (45) получаем, что

$$\sum_{\alpha=t_0}^{t_1} \sum_{\beta=t_0}^{t_1} \Delta_{u(\alpha)} g'(\alpha, x^0(\alpha), u^0(\alpha), v^0(\alpha)) K(\alpha, \beta) \Delta_{u(\beta)} g(\beta, x^0(\beta), u^0(\beta), v^0(\beta)) + \\ + 2 \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t \Delta_{u(\tau)} H'_x(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) Q(t, \tau) \Delta_{u(\tau)} g(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) \right] \leq 0, \quad (61)$$

$$\sum_{\alpha=t_0}^{t_1} \sum_{\beta=t_0}^{t_1} \Delta_{v(\alpha)} g'(\alpha, x^0(\alpha), u^0(\alpha), v^0(\alpha)) K(\alpha, \beta) \Delta_{v(\beta)} g(\beta, x^0(\beta), u^0(\beta), v^0(\beta)) + \\ + 2 \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t \Delta_{v(\tau)} H'_x(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) Q(t, \tau) \Delta_{v(\tau)} g(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) \right] \geq 0. \quad (62)$$

Сформулируем полученный результат в виде следующей теоремы.

Теорема 3. Если множества (8), (9) выпуклы, то для того, чтобы особое управление $(u^0(t), v^0(t))$ было седловой точкой функционала (4), при сделанных предположениях необходимо, чтобы неравенства (61), (62) выполнялись для всех $u(t) \in U, t \in T, v(t) \in V, t \in T$ соответственно.

Таким образом, используя специфику (52) уравнения (3), удалось получить конструктивно проверяемое необходимое условие оптимальности особых управлений.

Заключение

В статье исследуется одна игровая задача оптимального управления, описываемая системой нелинейных разностных уравнений типа Вольтерра. Доказано необходимое условие существования

седловой точки в рассматриваемой задаче управления. Отдельно изучен случай вырождения (особый случай) установленного необходимого условия оптимальности типа принципа максимума Понтрягина. При некоторых дополнительных предположениях установлено необходимое условие второго порядка для существования седловой точки.

Список источников

1. Васильев Ф.П. Об условиях существования седловой точки в детерминированных интегро-дифференциальных играх с запаздыванием при наличии параметров // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1970. № 1. С. 15–25.
2. Васильев Ф.П. Об условиях существования седловой точки в детерминированных интегро-дифференциальных играх для интегро-дифференциальных систем с запаздыванием нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. 1972. № 2. С. 40–51.
3. Габасов Р., Кириллова Ф.М. и др. Методы оптимизации. Минск : Четыре четверти, 2011. 472 с.
4. Дымков М.П. Оптимальное управление дискретной системой Вольтерра по квадратному функционалу // Доклады НАН Белоруссии. 1997. Т. 41, № 3. С. 10–16.
5. Дымков М.П. Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления. Минск : БГУ, 2005, 313 с.
6. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. Баку : ЭЛМ, 1999. 176 с.
7. Goo Yoon Hoe, Koo Nam Jip. Asymptotic behavior of nonlinear Volterra difference systems // Bull. Korean Math. Soc. 2007. № 1. P.177–184.
8. Колмановский В.Б. Об асимптотических свойствах решений некоторых нелинейных систем Вольтерра // Автоматика и телемеханика. 2000. № 4. С. 42–50.

References

1. Vasiliev, F.P. (1970) Conditions for the existence of a saddle point in deterministic integro-differential games with delay in the presence of parameters. *Vychislitel'naya matematika i matematicheskaya fizika – Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1. pp. 15–25.
2. Vasiliev, F.P. (1972) On the conditions for the existence of a saddle point in deterministic integro-differential games for integro-differential systems with delay of neutral type. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 2. pp. 40–51.
3. Gabasov, R., Kirillova F.M., et al. (2011) *Optimization Methods*. Minsk: Four quarters.
4. Dymkov, M.P. (1997) Optimal control of a discrete Volterra system with respect to a square functional. *Dokl. NAS of Belarus*. 41(3). pp. 10–16.
5. Dymkov, M.P. (2005) *Extreme Problems in Multiparameter Control Systems*. Minsk: [s.n.].
6. Mansimov, K.B. (1999) *Singular controls in delayed systems*. Baku: ELM.
7. Goo Yoon Hoe & Koo Nam Jip. (2007) Asymptotic behavior of nonlinear Volterra difference systems. *Bull. Korean Math. Soc*. 1. pp. 177–184.
8. Kolmanovsky, V.B. (2000) On the asymptotic properties of solutions of some nonlinear Volterra systems. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 4. pp. 42–50.

Информация об авторах:

Мансимов Камил Байрамали оглы – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики Бакинского государственного университета; руководитель лаборатории «Управление в сложных динамических системах» Института систем управления НАН Азербайджана (Баку, Азербайджан). E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

Чырахова Махнура Узейр кызы – диссертант лаборатории «Управление в сложных динамических системах» Института систем управления НАН Азербайджана (Баку, Азербайджан). E-mail: kmansimov@mail.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Mansimov Kamil B. (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Baku State University, Institute of Control problems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan). E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

Chiragova Mahnura U. (Institute of Control problems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan). E-mail: kmansimov@mail.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 06.04.2021; принята к публикации 30.05.2022

Received 06.04.2021; accepted for publication 30.05.2022

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

DATA PROCESSING

Original article

doi: 10.17223/19988605/59/3

Optimal design of reliability experiment based on the Wiener degradation model with covariates**Ekaterina V. Chimitova¹, Evgeniia A. Osintseva²**^{1, 2} Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation¹ chimitova@corp.nstu.ru² osinceva.j@gmail.com

Abstract. The Wiener degradation models with covariates are widely used for reliability analysis. In this paper, an algorithm for constructing an optimal design, which includes determining optimal stress levels, number of tested devices and time moments for measuring the degradation index, has been developed. The proposed algorithm is based on the optimization of some functional of the Fisher information matrix under restrictions on stress levels, experiment duration and minimum time interval between measurements of the degradation index. Moreover, the example of LED degradation analysis has been considered.

Keywords: Wiener degradation model; covariates; Fisher information matrix; optimal design; light-emitting diodes

For citation: Chimitova, E.V., Osintseva, E.A. (2022) Optimal design of reliability experiment based on the Wiener degradation model with covariates. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 59. pp. 23–33. doi: 10.17223/19988605/59/3

Научная статья

УДК 519.2

doi: 10.17223/19988605/59/3

Оптимальное планирование эксперимента на основе винеровской деградационной модели с ковариатами**Екатерина Владимировна Чимитова¹, Осинцева Евгения Алексеевна Осинцева²**^{1, 2} Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия¹ chimitova@corp.nstu.ru² osinceva.j@gmail.com

Аннотация. Винеровские деградационные модели с ковариатами широко используются для оценки функции надежности по данным об изменении показателя деградации во времени. В данной статье разработан алгоритм построения оптимального плана эксперимента на надежность, который предусматривает вычисление оптимальных величин нагрузок, количества исследуемых изделий и моментов времени измерения показателя деградации. Предложенный алгоритм основан на оптимизации функционала от информационной матрицы Фишера при заданных ограничениях на величину нагрузки, длительность проведения эксперимента и мини-

мальный интервал между моментами времени измерения показателя деградации. Применение разработанного алгоритма рассмотрено на примере данных об исследовании светодиодов (LED).

Ключевые слова: винеровская деградационная модель; ковариаты; информационная матрица Фишера; оптимальное планирование эксперимента; светодиоды

Для цитирования: Чимитова Е.В., Осинцева Е.А. Оптимальное планирование эксперимента на основе винеровской деградационной модели с ковариатами // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 59. С. 23–33. doi: 10.17223/19988605/59/3

Among all degradation models proposed in literature (see, for example, [1]), the most popular degradation models are the Wiener, gamma and inverse Gaussian models [2, 3]. Gamma [4–6] and inverse Gaussian [7, 8] degradation models are widely used for describing the aging processes of equipment, if the degradation index changes monotonously. On the contrary, the Wiener degradation model can be used in the case of non-monotonic degradation, when there are both positive and negative increments of the degradation index. The Wiener degradation models are widely used in various applications [9–14]. For example, in [12] it is applied for the reliability analysis of hard disk head units, in [13, 14] it is used to describe the degradation of LED.

The modern world requires development of new high-tech devices during extremely restricted period of time. At the same time, productivity, reliability and overall quality must be constantly improved. It has encouraged the wider use of optimal design to improve the quality of devices and processes in general. High reliability requirements have increased the need for testing materials, components and systems in early stages.

Evaluating the lifetime distribution and the reliability characteristics of components in high-tech devices is an essentially challenging task. Most modern devices are designed for operation without failure during long period of time. Thus, under normal conditions, most objects will maintain functionality. For example, in the design and construction of a communication satellite, there are only 6 months to test components which are expected to operate for 15 – 20 years. For this reason, accelerated testing is widely used for industrial purposes, in particular for obtaining well-timed information on the reliability of components and product materials. Usually, results obtained from testing under high levels of stresses (such as temperature, voltage, pressure and others) are extrapolated using a physically based statistical model to provide estimates of reliability characteristics under normal conditions of use.

The issue of constructing an optimal design has been raised by many scientists since the middle of the 20th century. Over time, scientists have noticed that traditional research methods are ineffective and costly. Therefore, scientists began to look for new ways to speed up testing and ensure that made decisions are close to optimal. The English statistician Sir Ronald Aylmer Fisher introduced fresh ideas into the planning experiments [15]. He was the first to show the expediency of simultaneous variation by all factors as opposed to the widespread ‘vary one factor at a time’ approach with other factors assigned fixed values. Since then, a new era of optimal design has begun, which is still relevant in our time. At the beginning of the 21st century, scientists discussed optimal design of degradation tests in the presence of cost constraint. In [16], the authors proposed an approach to determine the number of units to test and stress levels by minimizing the variance of estimated percentile of failure time distribution under determined cost of experiment and degradation test duration. An example of the optimal design for the accelerated reliability experiment on the basis of the Wiener degradation model was considered in [17]. However, there are no recommendations for the time moments for measuring the degradation index.

In [18], we showed that the choice of time moments for measuring the degradation index significantly influence on the accuracy of maximum likelihood estimates of the Wiener degradation model parameters. The optimal distribution of measurement time points depends on the model describing the degradation process as well as the experimental conditions, such as stress levels, experiment duration and minimum time interval between measurements of the degradation index [18–20]. Thus, the main purpose of the paper is to develop an algorithm for constructing A- and D-optimal designs based on the Wiener degradation model, which includes determining of optimal stress levels, number of tested devices and time moments for measuring the degradation index.

1. The Wiener degradation model in reliability analysis

Let us assume that the observed stochastic process $Z(t)$ is a stochastic process with independent increments and $Z(0) = 0$. For the Wiener degradation model, increments have the normal distribution with the probability density function

$$f(u, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\theta_2 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(u - \theta_1)^2}{2\theta_2^2}\right),$$

where $\theta_1 = \mu(\rho(t + \Delta t) - \rho(t))$ is the shift parameter, $\theta_2 = \sigma\sqrt{\rho(t + \Delta t) - \rho(t)}$ is the scale parameter, $\sigma > 0$, $\rho(t)$ is a positive increasing function.

Let us denote the vector of stresses (which are also often referred to as covariates) as $x = (x^1, x^2, \dots, x^m)^T$. The range of values for each covariate x^j , $j = \overline{1, m}$ is determined by the conditions of experiment. In this paper, the degradation process $Z(t)$ is supposed to be observed under a constant in time stress.

Here, we assume that the covariate x influences the degradation paths as in the accelerated failure time model [5]:

$$Z_x(t) = Z\left(\frac{t}{r(x; \beta)}\right),$$

where $r(x; \beta)$ is a the positive covariate function, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)^T$ is the vector of regression parameters.

Denote the mathematical expectation of degradation process $Z_x(t)$ by

$$E(Z_x(t)) = \mu\rho\left(\frac{t}{r(x; \beta)}, \gamma\right).$$

The time to failure, which depends on covariate x is defined as:

$$\tau = \sup\{t : Z_x(t) < z_0\},$$

where z_0 is the critical value of the degradation index. Then, the reliability function can be represented as:

$$S(t) = P\{\tau > t\} = P\{Z_x(t) < z_0\} = \Phi\left(\frac{z_0 - \mu\rho(t/r(x; \beta); \gamma)}{\sigma\sqrt{\rho(t/r(x; \beta); \gamma)}}\right).$$

Suppose the experiment is running over time T . The degradation index values are measured at time points $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = T$.

Let us denote the sample of independent degradation index increments with covariates as following:

$$\mathbf{X}_n = \left\{(\Delta Z_{1j}, x_1), (\Delta Z_{2j}, x_2), \dots, (\Delta Z_{nj}, x_n), j = \overline{1, k}\right\},$$

where k is the number of measurements of the degradation index for each object, x_i is the value of the covariate vector for the i -th object, $\Delta Z_{ij} = Z_i(t_j) - Z_i(t_{j-1})$ is the increment of the degradation index during the time from t_{j-1} to t_j .

Unknown parameters of the model can be estimated using the maximum likelihood method. The logarithmic likelihood function for the parameters of the Wiener degradation model is defined as:

$$\ln L(\mathbf{X}_n) = -nk(\ln \sqrt{2\pi} + \ln \sigma) - \frac{n}{2} \sum_{j=1}^k \ln(\rho(t_{j+1}) - \rho(t_j)) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{[\Delta Z_{ij} - \mu(\rho(t_{j+1}) - \rho(t_j))]^2}{(\rho(t_{j+1}) - \rho(t_j))}. \quad (1)$$

The maximum likelihood estimate (MLE) of an unknown parameter corresponds to maximum of the likelihood function (1). For solving the optimization problem, we have calculated the derivatives of the log-likelihood function with respect to the model parameters:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} &= -\frac{nk}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{(\Delta Z_{ij} - \mu(\Delta \rho(t_j)))^2}{(\Delta \rho(t_j))} = 0; \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma^2} \left(\mu n \sum_{j=1}^k \Delta \rho(t_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \Delta Z_{ij} \right) = 0; \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \gamma} &= -\frac{n}{2} \sum_{j=1}^k \frac{\left(\frac{\partial \Delta \rho(t_j)}{\partial \gamma} \right)}{(\Delta \rho(t_j))} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \left(\mu^2 \left(\frac{\partial \Delta \rho(t_j)}{\partial \gamma} \right) - \frac{\Delta Z_{ij}^2 \left(\frac{\partial \Delta \rho(t_j)}{\partial \gamma} \right)}{(\Delta \rho(t_j))^2} \right) = 0; \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} &= -\frac{n}{2} \sum_{j=1}^k \frac{\left(\frac{\partial \Delta \rho(t_j)}{\partial \beta} \right)}{(\Delta \rho(t_j))} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \left(\mu^2 \left(\frac{\partial \Delta \rho(t_j)}{\partial \beta} \right) - \frac{\Delta Z_{ij}^2 \left(\frac{\partial \Delta \rho(t_j)}{\partial \beta} \right)}{(\Delta \rho(t_j))^2} \right) = 0. \end{aligned} \right. \quad (2)$$

In the general case, system of equations (2) is solved using numerical methods. In the case of a model without covariates with the linear trend function, i.e. $\gamma = 1$, $\beta = 0$, the MLE of parameters have the following form:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \Delta Z_{ij}}{nT}, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (\Delta Z_{ij} - \hat{\mu}(t_{j+1} - t_j))^2}{(t_{j+1} - t_j)}}.$$

2. Optimal design of experiments

As shown in [18], the accuracy of the estimates of unknown parameters significantly depends on the conditions of reliability experiment - stress levels, the number of tested devices and the time moments for measuring the degradation index. Therefore, the stage of experiment design is very important in practice.

2.1. The problem of optimal design for reliability experiments

We denote the experiment design as a set of values:

$$\xi = \left\{ \begin{matrix} x_{(1)} & \dots & x_{(q)} \\ \omega_1 & \dots & \omega_q \end{matrix}, t_1 \dots t_k \right\},$$

where $x_{(1)}, \dots, x_{(q)}$ are the reference points of the plan, which are necessarily different; $\omega_i = \frac{n_i}{n}$, $\omega_i \geq 0$,

$\sum_{i=1}^q \omega_i = 1$, where n_i is the number of objects (individuals) examined under the stress level $x_{(i)}$, $i = \overline{1, q}$,

$q \leq n$, $\sum_{i=1}^q n_i = n$, and $t_1 \dots t_k$ are the time moments for measuring the degradation index. All objects of the

sample are divided into q groups corresponding to different values of the covariate vector (reference points of the design).

Thus, the problem of an optimal design can be written as follows:

$$\begin{cases} M(I(\xi)) \rightarrow \min, \\ x_{\min} \leq x_{(i)} \leq x_{\max}, \\ t_0 = 0, t_k = T, t_j - t_{j-1} > \Delta t_{\min}, j = \overline{1, k}, \end{cases}$$

where $M(\cdot)$ is some functional of the Fisher information matrix, $x_{\min}$, $x_{\max}$ are the minimum and maximum values of stress levels determined by the conditions of experiment, $\Delta t_{\min}$ is the minimum interval between adjacent time points of measuring the degradation index.

There are various optimal designs: A, D, G, Q, etc. In this paper, we consider the problem of experiment design from the standpoint of increasing the accuracy of the model parameters estimates. The procedures for constructing A- and D- optimal designs make it possible to obtain a redistribution of suitable candidate points taking into account the extraction of the maximum information about the model parameters from the experimental data.

The construction of the A-optimal design consists in minimizing the sum of the diagonal elements of the inverse Fisher matrix:

$$M(I(\xi)) = \text{Trace}(I^{-1}(\xi)).$$

The A-optimal design corresponds to the scattering ellipsoid of the parameter estimates with the least sum of squares of the axes lengths.

The construction of the D-optimal design is based on maximizing the determinant of the Fisher information matrix:

$$M(I(\xi)) = -\det(I(\xi)).$$

The scattering ellipsoid of the parameter estimates corresponding to the D-optimal design has the minimum volume.

2.2. Fisher information matrix for the Wiener degradation model

To obtain the Fisher information matrix for the Wiener degradation model, it is necessary to calculate the mathematical expectation of the second derivatives with respect to the parameters of the likelihood function. The first-order derivatives of the likelihood function are represented by formula (2).

Elements of the Fisher information matrix are given by the following formulas:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{2}{\sigma^2} nk; & I_{23} = I_{32} &= \frac{\mu^2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^k \frac{\partial \Delta \rho_{ij}}{\partial \gamma}; \\ I_{12} = I_{21} &= 0; & I_{24} = I_{42} &= \frac{\mu^2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^k \frac{\partial \Delta \rho_{ij}}{\partial \beta}; \\ I_{13} = I_{31} &= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^k \frac{1}{\Delta \rho_{ij}} \cdot \frac{\partial \Delta \rho_{ij}}{\partial \gamma}; & I_{33} &= \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial \Delta \rho_{ij}}{\partial \gamma} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2\Delta \rho_{ij}^2} + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{\Delta \rho_{ij}} \right); \\ I_{14} = I_{41} &= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^k \frac{1}{\Delta \rho_{ij}} \cdot \frac{\partial \Delta \rho_{ij}}{\partial \beta}; & I_{34} = I_{43} &= \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial \Delta \rho_{ij}}{\partial \gamma} \right) \cdot \left(\frac{\partial \Delta \rho_{ij}}{\partial \beta} \right) \cdot \left(\frac{1}{2\Delta \rho_{ij}^2} + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{\Delta \rho_{ij}} \right); \\ I_{22} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^k \Delta \rho_{ij}; & I_{44} &= \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial \Delta \rho_{ij}}{\partial \beta} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2\Delta \rho_{ij}^2} + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{\Delta \rho_{ij}} \right); \end{aligned}$$

where

$$\Delta \rho_{ij} = \rho \left(\frac{t_{ij+1}}{r(x_i; \beta)}, \gamma \right) - \rho \left(\frac{t_{ij}}{r(x_i; \beta)}, \gamma \right).$$

2.3. Algorithm of the direct search procedure for optimal design

The direct approach assumes solving the optimization problem:

$$\xi^* = \arg \min M(I(\xi)).$$

Step 1. Set the initial non-degenerate design:

$$\xi^0 = \left\{ \begin{matrix} x_{(1)}^0 & \dots & x_{(q)}^0 \\ \omega_1^0 & \dots & \omega_q^0 \end{matrix}, t_1^0 \dots t_k^0 \right\}.$$

Set $iter = 0$.

Step 2. Calculate the Fisher information matrix $I(\xi^0)$ for the initial design.

Step 3. Fix the values of $\omega_1^0, \dots, \omega_q^0, t_1^0, \dots, t_k^0$, and solve the optimization problem

$$M(I(\xi)) \rightarrow \min_{x_{(1)} \dots x_{(q)}}.$$

Calculate $I(\xi^{iter})$ according to the received design:

$$\xi^{iter} = \left\{ \begin{matrix} x_{(1)}^{iter+1} & \dots & x_{(q)}^{iter+1} \\ \omega_1^{iter} & \dots & \omega_q^{iter} \end{matrix}, t_1^{iter} \dots t_k^{iter} \right\}.$$

Step 4. Fix the values of $x_{(1)}^{iter+1}, \dots, x_{(q)}^{iter+1}, t_1^{iter}, \dots, t_k^{iter}$, and solve the optimization problem

$$M(I(\xi)) \rightarrow \min_{\omega_1, \dots, \omega_q}.$$

Calculate $I(\xi^{iter})$ according to the received design:

$$\xi^{iter} = \left\{ \begin{matrix} x_{(1)}^{iter+1} & \dots & x_{(q)}^{iter+1} \\ \omega_1^{iter+1} & \dots & \omega_q^{iter+1} \end{matrix}, t_1^{iter} \dots t_k^{iter} \right\}.$$

Step 5. Fix the values of $x_{(1)}^{iter+1}, \dots, x_{(q)}^{iter+1}, \omega_1^{iter+1}, \dots, \omega_q^{iter+1}$, and solve the optimization problem:

$$M(I(\xi)) \rightarrow \min_{t_1, \dots, t_k},$$

Calculate $I(\xi^{iter})$ according to the received design.

Step 6. Check the termination condition for the obtained design

$$\xi^{iter+1} = \left\{ \begin{matrix} x_{(1)}^{iter+1} & \dots & x_{(q)}^{iter+1} \\ \omega_1^{iter+1} & \dots & \omega_q^{iter+1} \end{matrix}, t_1^{iter+1} \dots t_k^{iter+1} \right\}.$$

If for a small positive number ε the inequality:

$$|M(\xi^{iter+1}) - M(\xi^{iter})| \leq \varepsilon$$

holds, then the optimal design is obtained; else set $iter = iter + 1$ and repeat steps 3-6.

3. Optimal design for the light-emitting diodes reliability test

Light-emitting diodes have higher brightness and lower power consumption than traditional light sources. In [21], the degradation of light-emitting diodes was studied under two electric current levels: 35 mA and 40 mA, while the normal stress level is 25 mA. Light intensity data for 24 light-emitting diodes are shown in Table 1. As can be seen from the table, the output light intensity decreases with time. The data were recorded every 50 hours up to 250 hours. When the light intensity decreases by 50 percent the failure of unit is recorded.

Table 1

Degradation data of LED

№	I	$t_0 = 0$	$t_1 = 50$	$t_2 = 100$	$t_3 = 150$	$t_4 = 200$	$t_5 = 250$
1	40	100	86,6	78,7	76,0	71,6	68,0
2		100	82,1	71,4	65,4	61,7	58,0
3		100	82,7	70,3	64,0	61,3	59,3
4		100	79,8	68,3	62,3	60,0	59,0
5		100	75,1	66,7	62,8	59,0	54,0
6		100	83,7	74,0	67,4	63,0	61,3
7		100	73,0	65,0	60,7	58,3	58,0
8		100	86,2	67,6	62,7	60,0	59,7
9		100	81,2	65,0	60,6	59,3	57,3
10		100	66,1	64,2	59,4	58,0	55,3
11		100	76,5	61,7	61,3	59,7	56,0
12		100	66,8	63,3	59,3	57,3	56,5
13	35	100	95,1	86,0	77,6	70,0	66,7
14		100	93,3	87,1	79,7	74,3	73,0
15		100	98,3	92,4	89,0	84,3	83,0
16		100	96,6	88,2	85,1	81,4	78,6
17		100	95,8	89,0	84,0	81,0	80,0
18		100	94,0	82,4	77,4	71,7	70,6
19		100	88,2	78,7	75,0	70,0	69,3
20		100	86,7	78,0	73,3	68,7	67,3
21		100	89,0	80,0	76,3	72,3	71,3
22		100	96,2	86,5	81,4	74,5	74,2
23		100	97,5	84,5	81,0	75,0	74,1
24		100	92,4	85,4	80,0	73,3	71,5

The degradation model describing the reliability function can be constructed by the given preliminary data. Then, on the basis of the obtained model it is proposed to determine the optimal design, which enables to increase the precision of model parameters estimates.

Let us consider the Wiener degradation model with the power-law trend function $\rho(t) = t^\gamma$ for different covariate functions:

1. Log-linear model: $r_1(x, \beta) = \exp(\beta \cdot x)$;
2. Power model: $r_2(x, \beta) = x^\beta = \exp(\beta \cdot \ln(x))$, $x > 0$;
3. Arrhenius model: $r_3(x, \beta) = \exp(\beta / x)$.

As the Wiener degradation model described above requires $Z(0) = 0$ and the increasing trend function, the data were processed as follows: the values of degradation index are equal to 100 minus values of light intensity, given in Table 1.

Maximum likelihood estimates of unknown parameters for the considered Wiener degradation models as well as obtained values of information criteria AIC and BIC are given in Table 2.

Table 2

Estimation Results of Unknown Parameters ($\sigma, \mu, \gamma, \beta$) for the Wiener degradation model with the power-law trend

Covariate function	Log-linear	Power	Arrhenius
Parameters estimates	[0,52; 0,13; 0,48; -6,46]	[0,84; 0,33; 0,48; -1,72]	[18,00; 156,45; 0,48; 24,16]
AIC	646	648	644
BIC	658	660	656

As can be seen from Table 2, the more preferable model is the Wiener degradation model with power-law trend function, where the influence of the current strength is described by log-linear covariate function. Figures 1 and 2 illustrate the graphs of trend functions and the values of degradation index under stress levels 35 and 40 mA.

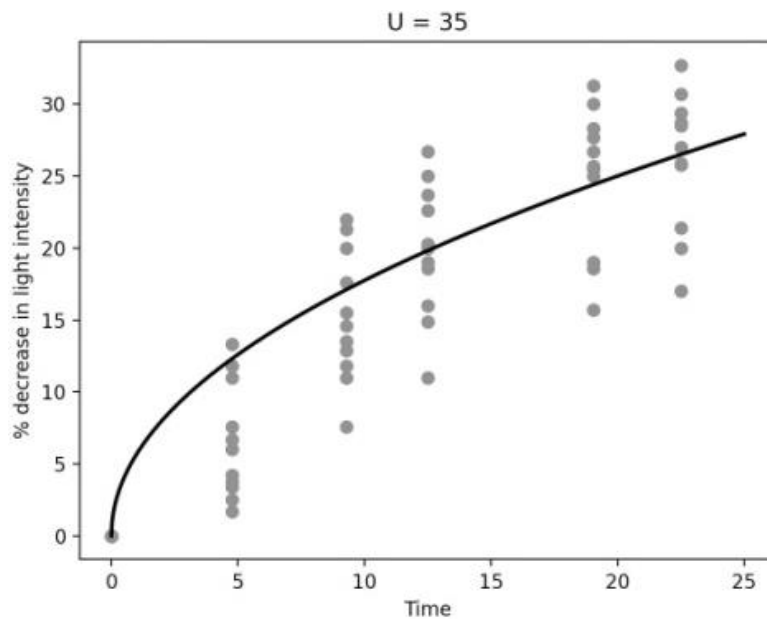


Fig. 1. Degradation processes at a current of 35

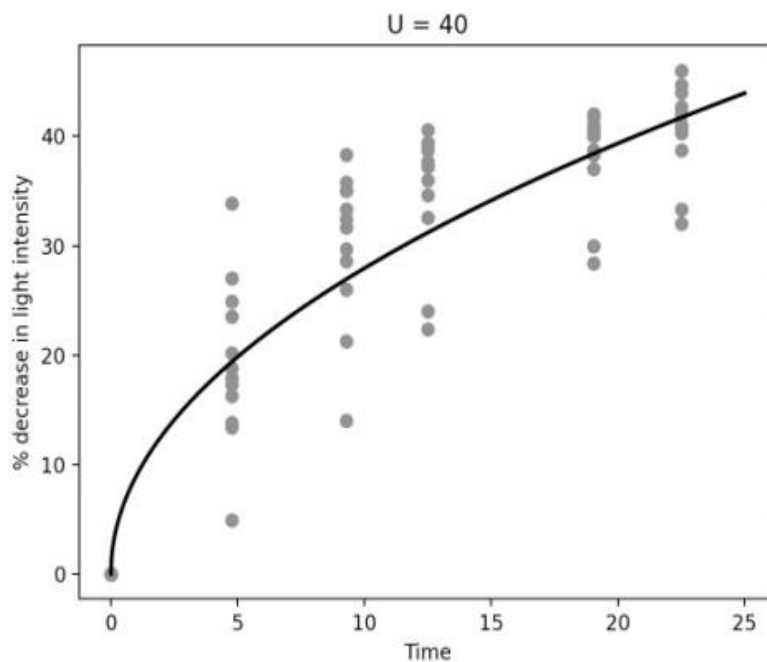


Fig. 2. Degradation processes at a current of 40

On the basis of the obtained Wiener degradation model we build the optimal design for the further experiment. Let us find the optimal experiment design using the proposed algorithm presented in Section 2.3 as a result of solving the optimization problem

$$\begin{cases} M(I(\xi)) = -\det(I(\xi)) \rightarrow \min, \\ 30 \leq x_{(i)} \leq 50, i = \overline{1, q}, \\ t_0 = 0, t_k \leq 400, t_{j+1} - t_j > 10, j = \overline{0, k}, \end{cases}$$

where $q = 2$ and $k = 5$.

In Table 3, there are the initial design and obtained D-optimal design as well as the corresponding values of determinant of the Fisher information matrix.

Table 3

D-Optimal Experiment Design

Initial design	Optimal design
$\xi^0 = \begin{Bmatrix} 35 & 40 \\ 0,5 & 0,5 \end{Bmatrix}, 0 \ 50 \ 100 \ 150 \ 200 \ 250 \}$	$\xi^* = \begin{Bmatrix} 30 & 50 \\ 0,5 & 0,5 \end{Bmatrix}, 0 \ 10 \ 44 \ 150 \ 360 \ 500 \}$
$\det(I(\xi^0)) = 6,7e + 09$	$\det(I(\xi^*)) = 1e + 12$

The purpose of developing the proposed algorithm is to select the optimal experimental conditions in order to improve the accuracy of model parameters estimates. Let us analyze statistical properties of model parameters estimates using the Monte Carlo method. We generated $N = 100000$ samples of degradation paths following the initial and optimal designs. In Table 4, there are the values of determinant of the estimated covariance matrix

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N (\hat{\theta}_l^i - \bar{\theta}^i) (\hat{\theta}_l^j - \bar{\theta}^j) \right\|_{4 \times 4},$$

where $(\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4) = (\sigma, \mu, \gamma, \beta)$, $\hat{\theta}_l^i$ is the maximum likelihood estimate of parameter θ^i obtained from the l -th sample and $\bar{\theta}^i = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \hat{\theta}_l^i$.

Table 4

Determinant of the estimated covariance matrix

Initial design	Optimal design
3,35e-08	1,75e-12

As can be seen from Table 4, the determinant of the estimated covariance matrix has decreased tenfold for the optimal design, which confirms that the parameters estimates for the optimal design are indeed more accurate.

Conclusion

In this paper, we have proposed the algorithm for direct search of optimal design basing on the Wiener degradation model. The algorithm enables to determine the optimal stress levels, number of tested devices and time moments for measuring the degradation index. As an example, we have considered the problem of reliability analysis for light-emitting diodes. Following the proposed algorithm, the D-optimal design for testing reliability of light-emitting diodes has been obtained. It has been shown that the determinant of the estimated covariance matrix has decreased tenfold for the optimal design in comparison with the initial design, which confirms accuracy of parameter estimates has become higher.

However, in this paper we have not taken into account the fact that the object observation should be terminated when the degradation path reaches the threshold. Our further research is associated with the improvement of the algorithm on the basis of the conditional Fisher information matrix, which can result in the change of the optimal design.

References

1. Nima, G., Lin M., Murthy, M., Prasad, Y. & Yong, S. (2009) A review on degradation models in reliability analysis. *Proceedings of the 4th World Congress on Engineering Asset Management*. Athens, Greece. pp. 379–384. DOI: 10.1007/978-0-85729-320-6_42
2. Chimitova, E.V., Chetvertakova, E.S., Sergeeva, S.A. & Osintseva, E.A. (2017) A comparative analysis of the Wiener, Gamma and Inverse gaussian degradation models. *Proceedings of the intern. workshop "Applied methods of statistical analysis. Nonparametric methods in cybernetics and system analysis"*. Krasnoyarsk. pp. 160–167.
3. Meeker, W., Hong, Y. & Escobar, L. (2011) Degradation Models and Analyses. In: Kotz, S. et al. *Encyclopedia of Statistical Sciences*. John Wiley & Sons. pp.1–23. DOI: 10.1002/0471667196.ess7148
4. Chetvertakova, E.S. & Chimitova, E.V. (2019) Testing significance of random effects for the gamma degradation model. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 49. pp. 92–100. DOI:10.17223/19988605/49/11
5. Ling, M.H., Tony Ng, H.K. & Tsui, K.-L. (2017) Inference on Remaining Useful Life Under Gamma Degradation Models with Random Effects. In: Ding-Geng (Din) Chen, Yuhlong Lio, Hon Keung Tony Ng & Tzong-Ru Tsai. *Statistical Modeling for Degradation Data*. Springer, Singapore. pp. 253–266. DOI:10.1007/978-981-10-5194-4_1
6. Rodriguez-Picon, L.A., Rodriguez-Picon, A.P., Mendez-Gonzalez, L.C., Rodriguez-Borbon, M.I. & Alvarado-Iniesta, A. (2017) Degradation modeling based on gamma process models with random effect. *Communications in Statistic-Simulation and Computation*. 47. pp. 1796–1810. DOI: 10.1080/03610918.2017.1324981
7. Chen, X., Ji, G., Sun, X. & Li, Z. (2019) Inverse Gaussian-based model with measurement errors for degradation analysis. *Risk and Reliability*. 233(6). DOI: 10.1177/1748006X19860682
8. Teng, F. & Wang, H. (2018) Analyzing Accelerated Degradation Data via an Inverse Gaussian Degradation Model with Random Parameters. *Proceedings of Prognostics and System Health Management Conference*. Chongqing, China. pp. 1031–1036. DOI: 10.1109/PHM-Chongqing.2018.00183
9. Ye, Z.-Z., Tsui, K.-L., Wang, Y. & Pecht, M. (2013) Degradation Data Analysis Using Wiener Processes With Measurement Errors. *IEEE Transactions on Reliability*. 62(4). pp. 772–780. DOI: 10.1109/TR.2013.2284733
10. Chetvertakova, E.S. & Chimitova, E.V. (2021) Testing significance of random effects for the Wiener degradation model. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh – Analysis and Data Processing Systems*. 3(83). pp. 129–142. DOI: 10.17212/2782-2001-2021-3-129-142
11. Dong, J., Long, Y., Jiao, X. & Huang, Y. (2021) Research on Wiener Degradation Model and Failure Mechanism of Interconnect Solder Joints Under Random Vibration Load. *IEEE Access*. 9. pp. 117444–117455. DOI: 10.1109/ACCESS.2021.3106261
12. Ye, Z.-S., Chen, N. & Shen, Y. (2015) A new class of Wiener process models for degradation analysis. *Reliability Engineering & System Safety*. 139. pp. 58–67. DOI: 10.1016/j.ress.2015.02.005
13. Peng, C.Y. & Tseng, S.T. (2009) Mis-Specification Analysis of Linear Degradation Models. *IEEE Transactions on Reliability*. 58(3). pp. 444–455. DOI: 10.1109/TR.2009.2026784
14. Tang, J. & Su, T. (2008) Estimating failure time distribution and its parameters based on intermediate data from a Wiener degradation model. *Naval Research Logistics*. 55(3). pp. 265–276. DOI: 10.1002/nav.20280
15. Fisher, R.A. (1951) *The Design of Experiments*. 6th ed. London: Oliver and Boyd.
16. Wu, S.J. & Chang, C.T. (2002) Optimal design of degradation tests in presence of cost constraint. *Reliability Engineering and System Safety*. 76. pp. 109–115. DOI: 10.1016/S0951-8320(01)00123-5
17. Liao, C.M. & Tseng, S.T. (2006) Optimal design for step-stress accelerated degradation tests. *IEEE Trans on Reliability*. 55(1). pp. 59–66. DOI: 10.1109/TR.2005.863811
18. Osintseva, E.A. & Chimitova, E.V. (2017) Informacionnaya matrica Fishera dlya parametrov vinеровской degradatsionnoy modeli [Fisher information matrix for the parameters of the Wiener degradation model]. *Information Processing and Mathematical Modeling*. Proc. of the Russian Scientific and Technical Conference. Novosibirsk. pp. 100–107.
19. Osintseva, E.A. & Chimitova, E.V. (2018) Postroenie optimal'nykh planov eksperimenta na osnove vinеровской degradatsionnoy modeli [Construction of optimal experimental designs based on the Wiener degradation model]. *Information Processing and Mathematical Modeling*. Proc. of the Russian Scientific and Technical Conference. Novosibirsk. pp. 75–85.
20. Osintseva, E.A. & Chimitova, E.V. (2019) Informatsionnaya matritsa Fishera dlya vinеровской degradatsionnoy modeli s uchetom ob'yasnayushchikh peremennykh [Fisher's information matrix for the Wiener degradation model with covariate]. *Information Processing and Mathematical Modeling*. Proc. of the Russian Scientific and Technical Conference. Novosibirsk. pp. 92–97.
21. Chaluvaadi, V. (2008) *Accelerated Life Testing of Electronic Revenue Meters*. Master Thesis. Clemson University. Clemson, SC, USA.

Information about the authors:

Chimitova Ekaterina V. (Doctor of Technical Science, Professor of the Department of Theoretical and Applied Informatics of Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: ekaterina.chimitova@gmail.com

Osintseva Evgeniia A. (Post-graduate Student of the Department of Theoretical and Applied Informatics of Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: osinceva.j@gmail.com

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Информация об авторах:

Чимитова Екатерина Владимировна – доктор технических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной информатики Новосибирского государственного технического университета (Новосибирск, Россия). E-mail: chimitova@corp.nstu.ru

Осинцева Евгения Алексеевна – аспирант кафедры теоретической и прикладной информатики Новосибирского государственного технического университета (Новосибирск, Россия). E-mail: osinceva.j@gmail.com

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Received 17.11.2021; accepted for publication 30.05.2022

Поступила в редакцию 17.11.2021; принята к публикации 30.05.2022

Научная статья

УДК 519.21

doi: 10.17223/19988605/59/4

Аналитическое исследование однолинейной системы массового обслуживания с входящим синхронным потоком событий

Александр Михайлович Горцев¹, Мария Александровна Бочарова²

^{1, 2} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ a-gortsev@mail.ru

² 89131140060@mail.ru

Аннотация. Изучается однолинейная система массового обслуживания (СМО) с входящим коррелированным синхронным дважды стохастическим потоком событий (запросов, сообщений и т.п.) с двумя состояниями. Приводятся явные аналитические формулы для стационарного распределения вероятностей состояний системы, а также явные аналитические выражения для числовых характеристик системы: средней длины очереди, среднего числа запросов в системе, вероятности простоя системы. Приводятся численные результаты расчета характеристик системы, представленные в виде таблиц. Рассматривается частный случай входящего потока запросов – рекуррентный синхронный поток с двумя состояниями.

Ключевые слова: синхронный поток событий (запросов, сообщений); однолинейная система массового обслуживания (СМО); стационарное распределение вероятностей состояний системы; числовые характеристики

Для цитирования: Горцев А.М., Бочарова М.А. Аналитическое исследование однолинейной системы массового обслуживания с входящим синхронным потоком событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 59. С. 34–46. doi: 10.17223/19988605/59/4

Original article

doi: 10.17223/19988605/59/4

Analytical study of a single-line system queuing with incoming synchronous events flow

Alexander M. Gortsev¹, Maria A. Bocharova²

^{1, 2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ a-gortsev@mail.ru

² 89131140060@mail.ru

Abstract. In this article, we study a single-server queuing system with an incoming correlated synchronous doubly stochastic two-state event stream, which is a special case of the MAP events stream.

The mathematical expectation of the duration of the intervals between the events of the stream has the form:

$$M(\tau) = \frac{\lambda_1 p + \lambda_2 q}{\lambda_1 \lambda_2 (p + q)}.$$

The formula for the intensity of the considered synchronous flow is obtained:

$$\lambda = \frac{1}{M(\tau)} = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2.$$

An analytical stationary probability distribution of process states (i, j) is derived, where i is the queue length in the system, $i = 0, 1, \dots, j$, j is the state of the synchronous events flow, $j = 1, 2$, for three different cases: 1) $p + q = 1$,

2) $0 < p + q < 1$, 3) $1 < p + q \leq 2$, where p is the probability of transition of the synchronous flow from the first state (flow intensity in the first state λ_1) to the second (flow intensity in the second state λ_2 , $\lambda_1 > \lambda_2$); q is the probability of a synchronous flow transition from the second state (flow intensity in the second state λ_2) to the first (flow intensity in the first state λ_1).

Numerical characteristics of the system are found explicitly: the probability of the system downtime $P(-1)$, the average queue length in the system $M(I)$ and the average number of requests in the system $M(I+1)$. Numerical calculations of characteristics with different initial data are given. The tables present the results of the dependence of the found numerical characteristics on the parameters of the investigated queuing system.

Keywords: synchronous flow of events (requests, messages); single line queuing system (QS); stationary probability distribution of system states; numerical characteristics

For citation: Gortsev, A.M., Bocharova, M.A. (2022) Analytical study of a single-line system queuing with incoming synchronous events flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 59. pp. 34–46. doi: 10.17223/19988605/59/4

Системы и сети массового обслуживания (СМО и СеМО) широко применялись и применяются в качестве математических моделей различных технических, физических, экономических и других систем. Случайные потоки событий, являющиеся основными элементами СМО и СеМО, в свою очередь, применяются в качестве математических моделей различных реальных процессов, протекающих в таких системах. В частности, случайные потоки событий служили и служат математическими моделями информационных потоков запросов в телекоммуникационных сетях.

Подавляющее число статей прошлого столетия посвящено изучению СМО и СеМО с входящими простейшими потоками событий. Однако в связи с интенсивным развитием (с конца XIX в.) телекоммуникационных сетей, беспроводных и мобильных сетей связи математическая модель простейшего потока перестала быть адекватной реальным информационным потокам запросов.

Современными математическими моделями информационных потоков в телекоммуникационных сетях являются коррелированные дважды стохастические потоки запросов. Систематизированное описание СМО и СеМО с коррелированными потоками приведено в монографии [1], в своем роде единственной в мировой литературе. Здесь отметим, что одними из первых работ, положивших начало систематическому исследованию коррелированных потоков (дважды стохастических потоков, МС-потоков, MVP-потоков, МАР-потоков), были работы [2–8].

Аналитическое исследование СМО и СеМО с коррелированными потоками – достаточно труднительный процесс [1], тем более нахождение, скажем, характеристик СМО и СеМО в явном виде представляет собой сложную задачу, порой неразрешимую. В настоящей статье проводится аналитическое исследование однолинейной СМО с входящим синхронным дважды стохастическим потоком событий с двумя состояниями [9–12], с бесконечным числом мест для ожидания и экспоненциальным обслуживанием. Подчеркнем, что синхронный дважды стохастический поток является частным случаем МАР-потока событий [13–15]. Для стационарного режима функционирования СМО выводятся явные выражения для средней длины очереди, среднего числа запросов в системе и вероятности простоя системы.

1. Математическая модель системы. Постановка задачи

Рассматривается однолинейная СМО с ожиданием и длительностью обслуживания, распределенной по экспоненциальному закону. На вход обслуживающего прибора поступает синхронный поток событий (запросов, сообщений и т.п.), сопровождающий процесс (интенсивность) $\lambda(t)$ которого есть кусочно-постоянный случайный процесс с двумя состояниями: $\lambda(t) = \lambda_1$ (первое состояние) либо $\lambda(t) = \lambda_2$ (второе состояние) ($\lambda_1 > \lambda_2 > 0$). Будем говорить, что имеет место j -е состояние процесса $\lambda(t)$, если $\lambda(t) = \lambda_j$, $j = 1, 2$. Если имеет место j -е состояние процесса $\lambda(t)$, то в течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_j$, имеет место пуассоновский поток событий с параметром (интенсивностью) λ_j , $j = 1, 2$.

Пусть процесс $\lambda(t)$ находится в первом состоянии. Тогда в момент наступления события пуассоновского потока с параметром λ_1 процесс $\lambda(t)$ либо переходит из первого состояния в первое (остается в первом состоянии) с вероятностью $1 - p$, либо переходит из первого состояния во второе с вероятностью p ($0 < p \leq 1$). Если процесс $\lambda(t)$ находится во втором состоянии, то в момент наступления события пуассоновского потока с параметром λ_2 процесс $\lambda(t)$ остается во втором состоянии с вероятностью $1 - q$ или переходит в первое состояние с вероятностью q ($0 < q \leq 1$). Таким образом, переход из состояния в состояние процесса $\lambda(t)$ осуществляется только в момент наступления события пуассоновского потока с параметром λ_j , $j = 1, 2$ (свойство синхронности дважды стохастического потока событий). Рассматривается стационарный режим функционирования СМО. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – сопровождающий стационарный кусочно-постоянный скрытый (принципиально ненаблюдаемый) транзитивный марковский процесс с двумя состояниями – λ_1 и λ_2 .

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \dots$ – значение длительности k -го интервала между двумя соседними событиями потока ($\tau_k \geq 0$). Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятности значений длительности k -го интервала $p(\tau_k) = p(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого $k \geq 1$. В силу этого момент времени t_k без потери общности можно положить равным нулю или, что то же самое, момент наступления события есть $\tau = 0$. Тогда справедливо [9]

$$p(\tau) = \gamma \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} + (1 - \gamma) \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau}, \quad \tau \geq 0, \quad \gamma = \frac{q}{p + q}, \quad (1)$$

$$0 < p \leq 1, \quad 0 < q \leq 1, \quad \lambda_1 > \lambda_2.$$

Пусть (t_k, t_{k+1}) , (t_{k+1}, t_{k+2}) – два смежных интервала, значения длительностей которых есть $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$ соответственно; их расположение на временной оси в силу стационарности потока произвольно. Тогда, полагая $k = 1$, будем рассматривать два соседних интервала (t_1, t_2) , (t_2, t_3) с соответствующими значениями длительностей $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$; $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$. При этом $\tau_1 = 0$ соответствует моменту t_1 наступления события потока; $\tau_2 = 0$ соответствует моменту t_2 наступления следующего события потока. Соответствующая совместная плотность вероятности при этом есть [16]

$$p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1) p(\tau_2) + (1 - p - q) \gamma (1 - \gamma) (\lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_1} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_1}) \times$$

$$\times (\lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_2} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_2}), \quad \tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0, \quad (2)$$

где γ , $p(\tau_k)$ определены в (1) для $\tau = \tau_k$, $k = 1, 2$.

Подчеркнем, что из (2) следует, что в общем случае синхронный поток является коррелированным потоком. Только в частных случаях он становится рекуррентным либо вырождается в простейший.

Частный случай 1: $p + q = 1$ – рекуррентный синхронный поток с двумя состояниями. Тогда $p(\tau)$ определяется формулой (1), где $\gamma = 1 - p$, $1 - \gamma = p$ (либо $\gamma = q$, $1 - \gamma = 1 - q$).

Из (2) получаем $p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1) p(\tau_2)$. Тогда, так как моменты наступления событий в потоке $t_1, \dots, t_k$ порождают вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, нетрудно показать, что $p(\tau_1, \dots, \tau_k) = p(\tau_1) \cdots p(\tau_k)$, $k \geq 2$. Таким образом, синхронный поток с двумя состояниями в первом частном случае всегда является рекуррентным.

Частный случай 2: $\gamma = 0$ – простейший поток с параметром λ_2 . Из (1) находим $p(\tau) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau}$, $\tau \geq 0$.

Частный случай 3: $\gamma = 1$ – простейший поток с параметром λ_1 . Из (1) находим $p(\tau) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau}$, $\tau \geq 0$.

Задача анализа рассматриваемой СМО заключается в нахождении явного аналитического вида числовых характеристик системы: среднего числа сообщений в очереди; среднего числа сообщений в системе; вероятности простоя обслуживающего прибора. Обозначим $i(t)$ – число сообщений в очереди в произвольный момент времени t ($i(t)=0,1,\dots$). Случайный процесс $i(t)$ не является марковским, так как входящий синхронный поток обладает последствием. Для того чтобы построить марковский процесс, необходимо учесть состояние входящего потока. Введем дополнительную переменную $j(t)$ – состояние входящего синхронного потока (состояние сопровождающего процесса $\lambda(t)$ в произвольный момент времени t), $j(t)=1,2$. Если $j(t)=1$, то $\lambda(t)=\lambda_1$; если $j(t)=2$, то $\lambda(t)=\lambda_2$. Тогда двумерный процесс $(i(t), j(t))$ становится марковским. Так как рассматривается стационарный режим ($t \rightarrow \infty$), то состояние системы будем обозначать (i, j) , $i=0,1,\dots$, $j=1,2$. Отметим, что возможны ещё два состояния: $(-1,1)$, $(-1,2)$, при которых в системе находится ноль сообщений (длина очереди равна нулю и прибор не обслуживает – прибор простаивает).

Сделанные предпосылки позволяют представить математическую модель исследуемой СМО в виде связанного стохастического графа (рис. 1) [17].

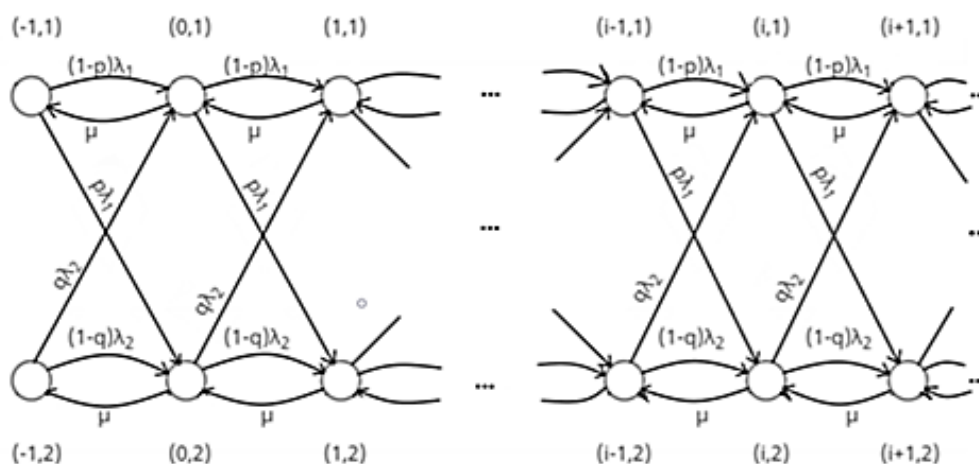


Рис. 1. Стохастический граф переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние
Fig. 1. Stochastic graph of process $\lambda(t)$ from state to state

Вершинам графа (см. рис. 1) соответствуют состояния СМО; каждой дуге графа поставлены в соответствие интенсивности переходов из состояния в состояние (инфинитезимальные характеристики), причем петли в каждом состоянии опущены; каждая вершина графа (каждое состояние) достижима и возвратна.

2. Вывод числовых характеристик системы при входящем коррелированном синхронном потоке сообщений

Обозначим $P(i, 1)$, $P(i, 2)$ – стационарные (финальные) вероятности состояний системы ($i = -1, 0, 1, \dots$). Тогда для сечений стохастического графа $F_{11} = \{(i-1, 1; i, 1), (i, 1; i-1, 1), (i, 1; i+1, 1), (i+1, 1; i, 1), (i, 1; i+1, 2), (i-1, 2; i, 1)\}$, $F_{12} = \{(i-1, 2; i, 2), (i, 2; i-1, 2), (i, 2; i+1, 2), (i+1, 2; i, 2), (i, 2; i+1, 1), (i-1, 1; i, 2)\}$, $i=0,1,\dots$, имеет место бесконечная система разностных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \lambda_1(1-p)P(i-1,1) - (\lambda_1 + \mu)P(i,1) + \mu P(i+1,1) + \lambda_2 q P(i-1,2) &= 0, \\ \lambda_2(1-q)P(i-1,2) - (\lambda_2 + \mu)P(i,2) + \mu P(i+1,2) + \lambda_1 p P(i-1,1) &= 0, \quad i=0,1,\dots \end{aligned} \quad (3)$$

Решение системы (3) будем искать в виде [18]: $P(i,1)=\xi^i$, $P(i,2)=C\xi^i$ ($i=0,1,\dots$). Тогда характеристическое уравнение для системы (3) примет вид:

$$(\xi-1)\left\{\mu^2\xi^3-\mu(\lambda_1+\lambda_2+\mu)\xi^2+\left[\lambda_1\lambda_2+\lambda_1(1-p)\mu+\lambda_2(1-q)\mu\right]\xi-\lambda_1\lambda_2(1-p-q)\right\}=0. \quad (4)$$

Сначала рассмотрим условия существования вероятностей $P(i,1)$, $P(i,2)$, $i=-1,0,1,\dots$. Математическое ожидание τ – длительности интервала между двумя соседними событиями в синхронном потоке – определится в виде $M(\tau)=\int_0^\infty \tau p(\tau)d\tau$, где плотность вероятности $p(\tau)$ задана в (1). Подставляя в выражение для $M(\tau)$ плотность $p(\tau)$, находим $M(\tau)=\frac{\lambda_1 p + \lambda_2 q}{\lambda_1 \lambda_2 (p+q)}$. Тогда математическое

ожидание числа сообщений во входящем коррелированном синхронном потоке в единицу времени определится в виде: $\lambda = \frac{1}{M(\tau)} = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2$, где π_j – стационарная вероятность j -го состояния потока, $j=1,2$; при этом $\pi_1 = \frac{\lambda_2 q}{\lambda_1 p + \lambda_2 q}$, $\pi_2 = \frac{\lambda_1 p}{\lambda_1 p + \lambda_2 q}$ [9]. Рассмотрим ситуацию, когда $\lambda = \mu$. Подставляя $\mu = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2$ в (4), находим характеристическое уравнение для рассматриваемой ситуации:

$$(\xi-1)^2 \left[(\lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2)^2 \xi^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2) \xi + \lambda_1 \lambda_2 (1-p-q) \right] = 0. \quad (5)$$

Характеристическое уравнение (5) имеет кратные корни. Тогда общее решение системы разностных уравнений (3), в котором $\mu = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2$, выражается в виде

$$\begin{aligned} P(i,1) &= D_1 \xi_1^i + D_2 i \xi_2^i + D_3 \xi_3^i + D_4 \xi_4^i, \\ P(i,2) &= B_1 D_1 \xi_1^i + B_2 D_2 i \xi_2^i + B_3 D_3 \xi_3^i + B_4 D_4 \xi_4^i, \quad i=0,1,\dots \end{aligned} \quad (6)$$

В (6) $P_s(i,1)=D_s \xi_s^i$; $P_s(i,2)=B_s D_s \xi_s^i$, $s=1,3,4$, $P_2(i,1)=D_2 i \xi_2^i$, $P_2(i,2)=B_2 D_2 i \xi_2^i$ – частные решения системы (3); B_s , D_s – некоторые константы, определяемые из граничных условий, $s=\overline{1,4}$; $\xi_1 = \xi_2 = 1$,

$$\xi_{3,4} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2) \mp \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4\lambda_1 \lambda_2 (p+q)}}{2(\lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2)}. \quad \text{Здесь возможно три случая: 1) } p+q=1; \text{ 2) } 0 < p+q < 1;$$

3) $1 < p+q \leq 2$.

Рассмотрим первый случай. Тогда имеем $\xi_1 = \xi_2 = 1$, $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2}$, $\xi_4 > 1$. Поскольку $P(i,1)$, $P(i,2)$ – вероятности, то для них должно выполняться условие нормировки $\sum_{i=-1}^\infty P(i,1) + \sum_{i=-1}^\infty P(i,2) = 1$. Тогда необходимым условием его выполнения является выполнение предельных соотношений $\lim_{i \rightarrow \infty} P(i,1) = 0$, $\lim_{i \rightarrow \infty} P(i,2) = 0$ при $i \rightarrow \infty$. В противном случае ряды $\sum_{i=-1}^\infty P(i,1)$, $\sum_{i=-1}^\infty P(i,2)$ будут расходиться. С учетом сказанного в общем решении (6) константы D_1 , D_2 , D_4 необходимо положить равными нулю. Тогда $P(i,1)=0$, $P(i,2)=0$, $i=0,1,\dots$. Так как для сечений стохастического графа $F_{-1,1} = \{(-1, 1; 0, 1), (0, 1; -1, 1), (-1, 1; 0, 2)\}$, $F_{-1,2} = \{(-1, 2; 0, 2), (0, 2; -1, 2), (-1, 2; 0, 1)\}$ имеют место граничные уравнения

$$\lambda_1 P(-1,1) = \mu P(0,1); \quad \lambda_2 P(-1,2) = \mu P(0,2), \quad (7)$$

то и $P(-1, 1) = 0$, $P(-1, 2) = 0$. Таким образом, стационарные вероятности $P(i, 1)$, $P(i, 2)$, $i = 0, 1, \dots$, для случая $\lambda = \mu$ и $p + q = 1$ все равны нулю, а это означает, что стационарного распределения не существует (и тем более не существует при $\lambda > \mu$), и очередь в однолинейной СМО стремится к бесконечности.

Рассмотрим второй случай. Тогда имеем $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 1$, $0 < \xi_3 < 1$, $\xi_4 > 1$. Аналогично первому случаю константы D_1 , D_2 , D_4 в общем решении (6) нужно положить равными нулю. Тогда общее решение (6) запишется в виде:

$$P(i, 1) = D_3 \xi_3^i, \quad P(i, 2) = B_3 D_3 \xi_3^i, \quad i = 0, 1, \dots \quad (8)$$

Определим константу B_3 . Подставляя (8) в первое уравнение системы (3), в котором $\mu = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2$, получаем

$$B_3 = -\frac{1}{2\lambda_1 \lambda_2 (p+q)} \left[(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 (p+q) + (\lambda_1 - \lambda_2) \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4\lambda_1 \lambda_2 (p+q)} \right] < 0. \quad (9)$$

Таким образом, $B_3 < 0$. Тогда из (8) следует, что $D_3 < 0$. Последнее, в свою очередь, приводит к противоречию: $P(i, 1) < 0$, $i = 0, 1, \dots$; $P(i, 2) > 0$, $i = 0, 1, \dots$. Противоречие устраняется, если положить $D_3 = 0$: $P(i, 1) = P(i, 2) = 0$, $i = 0, 1, \dots$. Отсюда с присоединением граничных уравнений (7) следует, что при $\lambda = \mu$ и $0 < p + q < 1$ стационарное распределение $P(i, 1)$, $P(i, 2)$, $i = -1, 0, 1, \dots$, не существует, и тем более не существует при $\lambda > \mu$.

Рассмотрим третий случай. Тогда имеем $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 1$, $-1 < \xi_3 < 0$, $\xi_4 > 1$. Тогда по аналогии с первым случаем общее решение (6) запишется в виде (8). Константа B_3 определится в виде (9). Тогда имеем: 1) $D_3 > 0$, $B_3 < 0$, отсюда следует, что $P(i, 1) > 0$ для четных i и $P(i, 1) < 0$ для нечетных i ; аналогично для $P(i, 2)$; 2) $D_3 < 0$, $B_3 < 0$, отсюда следует, что $P(i, 1) > 0$ для нечетных i и $P(i, 1) < 0$ для четных i ; аналогично для $P(i, 2)$. Полученные противоречия снимаются, если положить $D_3 = 0$: $P(i, 1) = P(i, 2) = 0$, $i = 0, 1, \dots$. Тогда при $\lambda = \mu$ и $1 < p + q \leq 2$ (с присоединением граничных уравнений (7)) стационарное распределение $P(i, 1)$, $P(i, 2)$, $i = -1, 0, 1, \dots$, не существует, и тем более не существует при $\lambda > \mu$.

Перейдём к случаю $\lambda < \mu$ ($\lambda = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2$). Общее решение системы (3) с учетом (4) выпишется в виде

$$\begin{aligned} P(i, 1) &= A_1 \xi_1^i + A_2 \xi_2^i + A_3 \xi_3^i + A_4 \xi_4^i, \\ P(i, 2) &= C_1 A_1 \xi_1^i + C_2 A_2 \xi_2^i + C_3 A_3 \xi_3^i + C_4 A_4 \xi_4^i, \quad i = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (10)$$

где $P_s(i, 1) = A_s \xi_s^i$, $P_s(i, 2) = C_s A_s \xi_s^i$ – частные решения системы (3); C_s , A_s – некоторые константы, определяемые из граничных условий, $s = \overline{1, 4}$; $\xi_4 = 1$; ξ_1, ξ_2, ξ_3 – корни кубического уравнения

$$\mu^2 \xi^3 - \mu(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu) \xi^2 + [\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1(1-p)\mu + \lambda_2(1-q)\mu] \xi - \lambda_1 \lambda_2 (1-p-q) = 0. \quad (11)$$

Рассмотрим случай: $0 < p + q < 1$ ($0 < p < 1$, $0 \leq q < 1$ либо $0 \leq p < 1$, $0 < q < 1$). Подчеркнем, во-первых, что вероятности p , q не могут быть равными нулю одновременно, так как последнее приводит к вырождению коррелированного синхронного потока в некий простейший поток событий, во-вторых, ситуация, когда $p = 0$, $q \neq 0$, приводит (формула (1)) к вырождению коррелированного синхронного потока в простейший поток с параметром λ_1 , в-третьих, ситуация, когда $p \neq 0$, $q = 0$, приводит (формула (1)) к вырождению коррелированного синхронного потока в простейший поток с параметром λ_2 . Для рассматриваемого случая имеем три корня кубического уравнения (11): $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1 < \xi_3$, при этом

$$\xi_1 \in \left(0, \frac{\lambda_2}{\mu}\right), \quad \xi_2 \in \left(\frac{\lambda_2}{\mu}, \frac{\lambda_1}{\mu}\right), \quad \frac{\lambda_1}{\mu} < 1. \quad \text{Тогда общее решение (10) (так как } \xi_3 > 1, \xi_4 = 1, \text{ то } A_3 = A_4 = 0)$$

выпишется в виде:

$$P(i,1) = A_1 \xi_1^i + A_2 \xi_2^i, \quad P(i,2) = C_1 A_1 \xi_1^i + C_2 A_2 \xi_2^i, \quad i = 0, 1, \dots \quad (12)$$

Подставляя частные решения $P_s(i,1) = A_s \xi_s^i$, $P_s(i,2) = C_s A_s \xi_s^i$, $i = 0, 1, \dots$, $s = 1, 2$, в исходную систему (3) (сначала для $s = 1$, затем для $s = 2$), находим

$$C_s = \frac{-\lambda_1(1-p) + (\lambda_1 + \mu)\xi_s - \mu\xi_s^2}{\lambda_2 q}, \quad s = 1, 2. \quad (13)$$

Для определения констант A_i , $i = 1, 2$, и вероятностей $P(-1, 1)$, $P(-1, 2)$ нужно привлечь граничные условия (7) и граничное уравнение $\sum_{i=-1}^{\infty} \lambda_1 p P(i, 1) = \sum_{i=-1}^{\infty} \lambda_2 q P(i, 2)$, определяемое сечением графа $F = \{(i, 1; i + 1, 2), (i, 2; i + 1, 1), i = -1, 0, 1, \dots\}$; присоединяя сюда условие нормировки: $P(-1, 1) + P(-1, 2) + \sum_{i=0}^{\infty} [P(i, 1) + P(i, 2)] = 1$, с учетом (12), получаем

$$P(-1, 1) = \frac{\mu}{\lambda_1} (A_1 + A_2); \quad P(-1, 2) = \frac{\mu}{\lambda_2} (C_1 A_1 + C_2 A_2); \quad (14)$$

$$A_1 = \frac{b_1 \pi_2 - C_2 a_2 \pi_1}{C_1 b_1 b_2 - C_2 a_1 a_2}; \quad A_2 = \frac{C_1 b_2 \pi_1 - a_1 \pi_2}{C_1 b_1 b_2 - C_2 a_1 a_2}; \quad a_1 = \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{1}{1 - \xi_1}; \quad a_2 = \frac{\mu}{\lambda_2} + \frac{1}{1 - \xi_2}; \quad b_1 = \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{1}{1 - \xi_2};$$

$b_2 = \frac{\mu}{\lambda_2} + \frac{1}{1 - \xi_1}$, π_1 , π_2 определены при выводе уравнения (5); C_1 , C_2 определены в (13); ξ_1 , ξ_2 – корни кубического уравнения (11), $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1$.

Формулы (12), (14) позволяют определить числовые характеристики системы: $P(-1)$ – вероятность простоя обслуживающего прибора; $M(I)$ – среднюю длину очереди в системе; $M(I + 1)$ – среднее число сообщений в системе:

$$P(-1) = \mu \left[A_1 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{C_1}{\lambda_2} \right) + A_2 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{C_2}{\lambda_2} \right) \right], \quad (15)$$

$$M(I) = \frac{\xi_1 A_1 (1 + C_1)}{(1 - \xi_1)^2} + \frac{\xi_2 A_2 (1 + C_2)}{(1 - \xi_2)^2}, \quad M(I + 1) = \frac{A_1 (1 + C_1)}{(1 - \xi_1)^2} + \frac{A_2 (1 + C_2)}{(1 - \xi_2)^2},$$

где C_1 , C_2 определены в (13); A_1 , A_2 – в (14); ξ_1 , ξ_2 – корни кубического уравнения (11), $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1$.

В табл. 1–3 в качестве иллюстрации приведены зависимости $P(-1)$, $M(I)$, $M(I + 1)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $p + q = 0,3$ ($p = 0,05$, $q = 0,25$); $0,4$ ($p = 0,05$, $q = 0,35$); $0,5$ ($p = 0,05$, $q = 0,45$); $0,6$ ($p = 0,05$, $q = 0,55$); $0,7$ ($p = 0,5$, $q = 0,65$) при фиксированных значениях параметров $\lambda_2 = 1$, $\mu = 12$, вычисленные по формулам (15). Поведение указанных характеристик в зависимости от параметра λ_1 соответствует физическим представлениям о процессе обслуживания в рассматриваемой однолинейной СМО с входящим коррелированным синхронным потоком сообщений.

Таблица 1

Зависимость вероятности простоя $P(-1)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $p + q = 0,3; 0,4; \dots; 0,7$

$p + q \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,3	0,8571	0,8125	0,7778	0,7500	0,7273	0,7083	0,6923	0,6786	0,6667	0,6563
0,4	0,8519	0,8000	0,7576	0,7222	0,6923	0,6667	0,6444	0,6250	0,6078	0,5926
0,5	0,8485	0,7917	0,7436	0,7024	0,6667	0,6354	0,6078	0,5833	0,5614	0,5417
0,6	0,8462	0,7857	0,7333	0,6875	0,6471	0,6111	0,5789	0,5500	0,5238	0,5000
0,7	0,8444	0,7812	0,7255	0,6759	0,6316	0,5917	0,5556	0,5227	0,4928	0,4653

Таблица 2

Зависимость средней длины очереди $M(I)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $p + q = 0,3; 0,4; \dots; 0,7$

$p + q \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,3	0,0258	0,0539	0,0925	0,1432	0,2089	0,2936	0,4027	0,5427	0,7200	0,9390
0,4	0,0275	0,0595	0,1049	0,1660	0,2466	0,3521	0,4899	0,6693	0,9000	1,1905
0,5	0,0285	0,0633	0,1136	0,1825	0,2746	0,3967	0,5580	0,7706	1,0482	1,4037
0,6	0,0292	0,0659	0,1199	0,1949	0,2962	0,4318	0,6129	0,8541	1,1733	1,5890
0,7	0,0297	0,0679	0,1248	0,2046	0,3135	0,4604	0,6583	0,9246	1,2814	1,7532

Таблица 3

Зависимость среднего числа сообщений в системе $M(I + 1)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $p + q = 0,3; 0,4; \dots; 0,7$

$p + q \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,3	0,1687	0,2414	0,3147	0,3932	0,4816	0,5852	0,7104	0,8641	1,0533	1,2828
0,4	0,1756	0,2595	0,3473	0,4438	0,5543	0,6855	0,8455	1,0443	1,2922	1,5979
0,5	0,1800	0,2716	0,3700	0,4801	0,6079	0,7613	0,9502	1,1872	1,4868	1,8620
0,6	0,1831	0,2802	0,3866	0,5074	0,6491	0,8207	1,0340	1,3041	1,6495	2,0890
0,7	0,1853	0,2867	0,3994	0,5287	0,6819	0,8687	1,1028	1,4019	1,7886	2,2880

Рассмотрим случай: $1 < p + q \leq 2$ ($0 < p \leq 1, 0 < q \leq 1$). Для этого случая имеем три корня кубического уравнения (11): $-1 < \xi_1 < \xi_2 < 1 < \xi_3$; при этом $\xi_1 \in (-1, 0)$, $\xi_2 \in \left(\frac{\lambda_2}{\mu}, \frac{\lambda_1}{\mu}\right)$, $\frac{\lambda_1}{\mu} < 1$. Тогда общее решение (10) (так как $\xi_1 < 0$, $\xi_3 > 1$, $\xi_4 = 1$, то $A_1 = A_3 = A_4 = 0$) выпишется в виде:

$$P(i, 1) = A_2 \xi_1^i, \quad P(i, 2) = C_2 A_2 \xi_2^i, \quad i \geq 0. \quad (16)$$

Константа C_2 в (16) определится в виде (13) для $s = 2$. Для определения константы A_2 и вероятностей $P(-1, 1)$, $P(-1, 2)$ привлекаются граничные уравнения (7) и условие нормировки. Тогда, с учетом (16), находим

$$P(-1, 1) = \frac{\mu}{\lambda_1} A_2, \quad P(-1, 2) = \frac{\mu}{\lambda_2} C_2 A_2, \quad A_2 = 1 / \left(\mu \frac{\lambda_2 + \lambda_1 C_2}{\lambda_1 \lambda_2} + \frac{1 + C_2}{1 - \xi_2} \right), \quad (17)$$

в (17) величина C_2 определена выражением (13) для $s = 2$; ξ_2 – корень уравнения (11), $\frac{\lambda_2}{\mu} < \xi_2 < \frac{\lambda_1}{\mu}$.

Формулы (16), (17) позволяют определить числовые характеристики системы:

$$P(-1) = \mu \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{C_2}{\lambda_2} \right) A_2, \quad M(I) = \frac{\xi_2 (1 + C_2)}{(1 - \xi_2)^2} A_2, \quad M(I + 1) = \frac{1 + C_2}{(1 - \xi_2)^2} A_2, \quad (18)$$

где C_2 определена в (13) для $s = 2$; A_2 – в (17); ξ_2 – корень уравнения (11), $\frac{\lambda_2}{\mu} < \xi_2 < \frac{\lambda_1}{\mu}$.

Таблица 4

Зависимость вероятности простоя $P(-1)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $p + q = 1,3; 1,4; \dots; 1,7$ ($p = q$)

$p + q \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1,3	0,8914	0,8812	0,8760	0,8729	0,8709	0,8695	0,8685	0,8677	0,8671	0,8666
1,4	0,8920	0,8826	0,8781	0,8756	0,8740	0,8730	0,8722	0,8717	0,8713	0,8709
1,5	0,8925	0,8838	0,8799	0,8779	0,8767	0,8759	0,8754	0,8750	0,8747	0,8745
1,6	0,8929	0,8849	0,8815	0,8798	0,8789	0,8783	0,8780	0,8778	0,8776	0,8775
1,7	0,8933	0,8858	0,8828	0,8814	0,8807	0,8804	0,8802	0,8801	0,8801	0,8801

Таблица 5

Зависимость средней длины очереди $M(I)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $p + q = 1,3; 1,4; \dots; 1,7$ ($p = q$)

$p + q \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1,3	0,0149	0,0212	0,0268	0,0320	0,0368	0,0412	0,0454	0,0492	0,0527	0,0560
1,4	0,0147	0,0206	0,0257	0,0303	0,0345	0,0383	0,0418	0,0450	0,0480	0,0507
1,5	0,0145	0,0201	0,0248	0,0289	0,0326	0,0359	0,0389	0,0417	0,0442	0,0465
1,6	0,0144	0,0197	0,0240	0,0277	0,0310	0,0339	0,0365	0,0389	0,0411	0,0431
1,7	0,0143	0,0193	0,0233	0,0267	0,0297	0,0322	0,0346	0,0366	0,0385	0,0402

Таблица 6

Зависимость среднего числа сообщений в системе $M(I + 1)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $p + q = 1,3; 1,4; \dots; 1,7$ ($p = q$)

$p + q \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1,3	0,1235	0,1400	0,1508	0,1591	0,1659	0,1717	0,1768	0,1815	0,1856	0,1894
1,4	0,1227	0,1380	0,1476	0,1547	0,1604	0,1653	0,1696	0,1733	0,1767	0,1798
1,5	0,1220	0,1363	0,1449	0,1510	0,1559	0,1600	0,1635	0,1667	0,1695	0,1720
1,6	0,1215	0,1348	0,1425	0,1479	0,1521	0,1556	0,1585	0,1611	0,1634	0,1655
1,7	0,1210	0,1335	0,1405	0,1453	0,1489	0,1519	0,1543	0,1565	0,1584	0,1601

В табл. 4–6 в качестве иллюстрации приведены зависимости $P(-1)$, $M(I)$, $M(I + 1)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $p + q = 1,3$ ($p = q = 0,65$); $1,4$ ($p = q = 0,7$); $1,5$ ($p = q = 0,75$); $1,6$ ($p = q = 0,8$); $1,7$ ($p = q = 0,85$) при фиксированных значениях параметров $\lambda_2 = 1$, $\mu = 12$, вычисленные по формулам (18). Поведение указанных характеристик в зависимости от параметра λ_1 соответствует физическим представлениям о процессе обслуживания в рассматриваемой однолинейной СМО с входящим коррелированным синхронным потоком сообщений.

3. Частный случай. Входящий рекуррентный синхронный поток сообщений

Для рассматриваемого случая имеем $p + q = 1$ ($0 < p < 1$, $0 < q < 1$). Тогда система (3) примет вид:

$$\begin{aligned} \lambda_1(1-p)P(i-1,1) - (\lambda_1 + \mu)P(i,1) + \mu P(i+1,1) + \lambda_2(1-p)P(i-1,2) &= 0, \\ \lambda_2 p P(i-1,2) - (\lambda_2 + \mu)P(i,2) + \mu P(i+1,2) + \lambda_1 p P(i-1,1) &= 0, \quad i = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Ситуации $p = 0$, $q = 1$ и $p = 1$, $q = 0$ приводят к вырождению рекуррентного синхронного потока событий в простейший поток (формула (1)) с параметром λ_1 либо с параметром λ_2 соответственно.

Решение системы (19) будем по-прежнему искать в виде $P(i,1) = \xi^i$, $P(i,2) = G\xi^i$ ($i = 0, 1, \dots$). Тогда характеристическое уравнение для системы (19) примет вид:

$$(\xi - 1) \left[\mu^2 \xi^2 - \mu(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu)\xi + (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1(1-p)\mu + \lambda_2 p \mu) \right] = 0. \quad (20)$$

Рассматривается случай $\lambda < \mu$, где $\lambda = \frac{1}{M(\tau)} = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2$, $M(\tau) = \frac{\lambda_1 p + \lambda_2 q}{\lambda_1 \lambda_2}$; π_1 , π_2 определены при выводе формулы (5). Случай $\lambda = \mu$ приводит (аналогично рассмотренному в разделе 2 случаю $\lambda < \mu$ и $p + q = 1$) к ситуации, когда стационарного распределения $P(i,1)$, $P(i,2)$, $i = 0, 1, \dots$, не существует.

Обозначим по-прежнему ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 – корни характеристического уравнения (20), где $\xi_3 = 1$,

$$\xi_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu) \mp \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu)^2 - 4[\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1(1-p) + \lambda_2 p \mu]} \right\}, \quad (21)$$

при этом $0 < \xi_1 < 1 < \xi_2$. Тогда общее решение системы (19), с учетом (20), выпишется в виде:

$$P(i,1)=R_1\xi_1^i+R_2\xi_2^i+R_3\xi_3^i, P(i,2)=G_1R_1\xi_1^i+G_2R_2\xi_2^i+G_3R_3\xi_3^i, i=0,1,... \quad (22)$$

В общем решении (22), так как $\xi_2 > 1$, $\xi_3 = 1$, необходимо константы R_2, R_3 положить равными нулю. Тогда (22) примет вид:

$$P(i,1)=R_1\xi_1^i, P(i,2)=G_1R_1\xi_1^i, i=0,1,... \quad (23)$$

Подставляя решение (23) в первое уравнение системы (19), находим константу G_1 :

$$G_1=\frac{-\lambda_1(1-p)+(\lambda_1+\mu)\xi_1-\mu\xi_1^2}{\lambda_2(1-p)}. \quad (24)$$

Для нахождения константы R_1 и вероятностей $P(-1, 1), P(-1, 2)$ привлечем граничные уравнения (7) и условие нормировки. Тогда получаем

$$P(-1,1)=\frac{\mu}{\lambda_1}R_1, P(-1,2)=\frac{\mu}{\lambda_2}G_1R_1, R_1=\left\{\mu\frac{\lambda_2+\lambda_1G_1}{\lambda_1\lambda_2}+\frac{1+G_1}{1-\xi_1}\right\}^{-1}, \quad (25)$$

где ξ_1 определена в (21), G_1 – в (24).

Формулы (23), (25) позволяют определить числовые характеристики системы, введенные выше:

$$P(-1)=\mu\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{G_1}{\lambda_2}\right)R_1; M(I)=\frac{\xi_1(1+G_1)}{(1-\xi_1)^2}R_1; M(I+1)=\frac{1+G_1}{(1-\xi_1)^2}R_1, \quad (26)$$

где R_1 определена в (25), G_1 – в (24), ξ_1 – в (21).

Таблица 7

Зависимость вероятности простоя $P(-1)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, ..., 11$) для $p = 0,3; 0,4; ..., 0,7; q = 1 - p$

$p \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,3	0,8718	0,8438	0,8246	0,8106	0,8000	0,7917	0,7849	0,7794	0,7748	0,7708
0,4	0,8810	0,8611	0,8485	0,8397	0,8333	0,8284	0,8246	0,8214	0,8188	0,8167
0,5	0,8889	0,8750	0,8667	0,8611	0,8571	0,8542	0,8519	0,8500	0,8485	0,8472
0,6	0,8958	0,8864	0,8810	0,8775	0,8750	0,8732	0,8718	0,8707	0,8698	0,8690
0,7	0,9020	0,8958	0,8925	0,8904	0,8889	0,8878	0,8870	0,8864	0,8858	0,8854

Таблица 8

Зависимость средней длины очереди $M(I)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, ..., 11$) для $p = 0,3; 0,4; ..., 0,7; q = 1 - p$

$p \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,3	0,0209	0,0376	0,0566	0,0776	0,1000	0,1236	0,1480	0,1729	0,1980	0,2229
0,4	0,0180	0,0298	0,0422	0,0550	0,0681	0,0811	0,0940	0,1067	0,1190	0,1310
0,5	0,0156	0,0238	0,0319	0,0399	0,0476	0,0551	0,0623	0,0692	0,0758	0,0820
0,6	0,0135	0,0191	0,0243	0,0292	0,0338	0,0381	0,0422	0,0461	0,0496	0,0530
0,7	0,0117	0,0153	0,0185	0,0214	0,0240	0,0265	0,0288	0,0308	0,0328	0,0346

Таблица 9

Зависимость среднего числа сообщений в системе $M(I+1)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, ..., 11$) для $p = 0,3; 0,4; ..., 0,7; q = 1 - p$

$p \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,3	0,1491	0,1938	0,2321	0,2670	0,3000	0,3319	0,3631	0,3935	0,4232	0,4521
0,4	0,1371	0,1687	0,1937	0,2153	0,2347	0,2527	0,2695	0,2853	0,3002	0,3143
0,5	0,1267	0,1488	0,1652	0,1787	0,1905	0,2010	0,2105	0,2192	0,2273	0,2347
0,6	0,1177	0,1327	0,1433	0,1517	0,1588	0,1650	0,1704	0,1754	0,1798	0,1839
0,7	0,1098	0,1194	0,1260	0,1310	0,1352	0,1387	0,1418	0,1445	0,1469	0,1491

В табл. 7–9 в качестве иллюстрации приведены зависимости $P(-1)$, $M(I)$, $M(I + 1)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$) для $p = 0,3; 0,4; \dots; 0,7$; $q = 1 - p$ при фиксированных значениях параметров $\lambda_2 = 1$, $\mu = 12$, вычисленные по формулам (26). Поведение указанных характеристик в зависимости от параметра λ_1 соответствует физическим представлениям о процессе обслуживания в рассматриваемой однолинейной СМО с входящим рекуррентным синхронным потоком сообщений.

Заключение

В настоящей статье изучена однолинейная СМО с входящим коррелированным синхронным дважды стохастическим потоком событий с двумя состояниями, являющимся частным случаем MAP-потока событий. Немарковский процесс $i(t)$ – число запросов в очереди в момент времени t – путем введения дополнительной переменной $j(t)$ – состояние входящего синхронного потока в момент времени t – сводится к двумерному процессу $(i(t), j(t))$, являющемуся марковским процессом. С использованием метода диаграмм интенсивностей переходов находится явное аналитическое стационарное распределение вероятностей состояний процесса $(i(t), j(t))$ ($t \rightarrow \infty$). Приводятся явные аналитические формулы для числовых характеристик системы и построенные на основании этих формул зависимости числовых характеристик от параметров СМО, представленные в таблицах. Рассмотрен также частный случай входящего потока запросов – рекуррентный синхронный поток с двумя состояниями.

Список источников

1. Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.Н. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М. : Техносфера, 2018. 564 с.
2. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // Proc. of the Cambridge Philosophical Society. 1995. V. 51, № 3. P. 433–441.
3. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60, № 4. P. 923–930.
4. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
5. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
6. Neuts M.F. A versatile Markovian point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16, № 4. P. 764–779.
7. Lucatoni D.M. New results on the single server queue with a bath Markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7, № 1. P. 1–46.
8. Lucatoni D.M., Neuts M.F. Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue // Communications in Statistics Stochastic Models. 1994. V. 10, № 3. P. 575–598.
9. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № S1–1. С. 24–29.
10. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока событий // Вестник Томского государственного университета. 2003. № S6. С. 232–239.
11. Горцев А.М., Голофастова М.Н. Оптимальная оценка состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2 (23). С. 42–53.
12. Василевская Т.П., Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока с проявлением либо не проявлением событий // Вестник Томского государственного университета. 2004. № S9–2. С. 129–138.
13. Nezhel'skaya L. Probability Density Function for Modulated MAP Event Flows with Unextendable Dead Time // Communications in Computer and Information Science. 2015. V. 564, P. 141–151.
14. Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного MAP-потока событий и условия рекуррентности потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1 (30). С. 57–67.
15. Нежелская Л.А. Оценка состояний дважды стохастических потоков событий. Томск : Изд-во Том. гос. ун-та, 2020. 210 с.
16. Горцев А.М., Нежелская Л.А. О рекуррентности дважды стохастических потоков событий // Вестник Томского государственного университета. 2005. № S14. С. 258–266.

17. Медведев Г.А. Анализ стохастических графов, описывающих поведение шаговых систем автоматического поиска // Автоматика и вычислительная техника. 1968. № 4. С. 27–30.
18. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М. : Физматлит, 1959. 400 с.

References

1. Vishnevsky, V.M., Dudin, A.N. & Klimenok, V.N. (2018) *Stokhasticheskie sistemy s korrelirovannymi potokamy. Teoria i primeneniye v telekommunikatsionnykh setyakh* [Stochastic systems with correlated flows. Theory and application in telecommunication networks]. Moscow: Tekhnosfera.
2. Cox, D.R. (1995) The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 51(3). pp. 433–441. DOI: 10.1017/S0305004100030437
3. Kingman, J.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930. DOI: 10.1017/S030500410003838X
4. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch.1 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. Part 1]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 6. pp. 92–99.
5. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch.2 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. Part 2]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 1. pp. 55–61.
6. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markovian point process. *Journal of Applied Probability*. 16(4). pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143
7. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a bath Markovian arrival process. *Communications in Statistics Stochastic Models*. 7(1). pp. 1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174
8. Lucantoni, D.M. & Neuts, M.F. (1994) Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue. *Communications in Statistics Stochastic Models*. 10(3). pp. 575–598. DOI: 10.1080/15326349408807311
9. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Estimation of the parameters of a synchronous doubly stochastic event flow by the method of moments. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. S1-1. pp. 24–29.
10. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Dead time and parameters estimating of a synchronous alternating flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. S6. pp. 232–239.
11. Gortsev, A.M. & Golofastova, M.N. (2013) The optimal state estimation of modulated synchronous twice stochastic flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computing Science*. 2(23). pp. 42–53.
12. Vasilevskaya, T.P., Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2004) Dead time and parameters estimation of a synchronous alternating flow with the manifestation or non-manifestation of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. S9-2. pp. 129–138.
13. Nezhelskaya, L. (2015) Probability Density Function for Modulated MAP Event Flows with Unextendable Dead Time. *Communications in Computer and Information Science*. 564. pp. 141–151. DOI: 10.1007/978-3-319-25861-4_12
14. Nezhelskaya, L.A. (2015) Joint probability density of the intervals duration in modulated MAP event flows and its recurrence conditions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computing Science*. 1(30). pp. 57–67.
15. Nezhelskaya, L.A. (2020) *Otsenka sostoyaniy dvazhdy stokhasticheskikh potokov sobytiy* [States Estimation of Doubly Stochastic Event Flows]. Tomsk: Tomsk State University.
16. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2005) On the recurrence of doubly stochastic flows of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. S14. pp. 258–266.
17. Medvedev, G.A. (1968) Analiz stokhasticheskikh grafov, opisuyayushchikh povedeniye shagovykh system avtomaticheskogo poiska [Analysis of stochastic graphs describing the behavior of stepwise automatic search systems]. *Avtomatika i vychislitel'naya tekhnika – Automation and Computer Science*. 4. pp. 27–30.
18. Gelfond, A.O. (1959) *Ischislenie konechnykh raznostey* [Calculus of finite differences]. Moscow: Fizmatlit.

Информация об авторах:

Горцев Александр Михайлович – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: a-gortsev@mail.ru

Бочарова Мария Александровна – магистрант кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: 89131140060@mail.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Gortsev Alexander M. (Doctor of Technical Sciences, Professor, Head. Department of PM IPMKN, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: a-gortsev@mail.ru

Bocharova Maria A. (National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: 89131140060@mail.com

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 25.12.2021; принята к публикации 30.05.2022

Received 25.12.2021; accepted for publication 30.05.2022

Научная статья

УДК 681.5

doi: 10.17223/19988605/59/5

Робастная экстраполяция в дискретных системах с интервальными параметрами с использованием алгоритмов оценивания неизвестного входа

Константин Станиславович Ким¹, Валерий Иванович Смагин²

^{1, 2} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ kks93@rambler.ru

² vsm@mail.tsu.ru

Аннотация. Рассматривается задача синтеза экстраполятора для дискретного объекта с интервальными параметрами. Задача решена на основе вероятностного подхода, в основе которого лежит замена неопределенных параметров интервального типа на независимые случайные величины с равномерным законом распределения. Задача решена с использованием принципа разделения, рекуррентных алгоритмов, метода наименьших квадратов и сглаживающих процедур.

Ключевые слова: оценки экстраполяции; дискретная система; интервальные параметры; неизвестный вход, неизвестные параметры

Для цитирования: Ким К.С., Смагин В.И. Робастная экстраполяция в дискретных системах с интервальными параметрами с использованием алгоритмов оценивания неизвестного входа // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 59. С. 47–54. doi: 10.17223/19988605/59/5

Original article

doi: 10.17223/19988605/59/5

Robust extrapolation in discrete systems with interval parameters using algorithms for estimating unknown input

Konstantin S. Kim¹, Valery I. Smagin²

^{1, 2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ kks93@rambler.ru

² vsm@mail.tsu.ru

Abstract. A model with interval parameters and unknown input is described by the equation:

$$x(k+1) = \tilde{A}x(k) + Bu(k) + f(k) + q(k), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

where $x(k) \in \mathbb{R}^n$ is the state vector, $u(k) \in \mathbb{R}^p$ is a known input, $f(k)$ is an unknown input; x_0 is a random vector (the variance $N_0 = M\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T\}$ and the expectation $\bar{x}_0 = M\{x_0\}$ are assumed to be known); $\tilde{A}$ is an interval matrix, B is a known matrix; $q(k)$ is a Gaussian random sequence with the following characteristics: $M\{q(k)\} = 0$, $M\{q(k)q^T(j)\} = Q(k)\delta_{kj}$.

The observation channel is described by the formula:

$$y(k) = Sx(k) + v(k), \quad (2)$$

where $v(k)$ is a Gaussian random sequence with the following characteristics: $M\{v(k)\} = 0$, $M\{v(k)v^T(j)\} = V(k)\delta_{kj}$.

It is assumed that the sequences $q(k)$, $v(k)$ are independent of each other, the systems (1), (2) are observed with parametric perturbations of the dynamics matrix of the system (1). It is also assumed that the matrices $Q(k)$ and $V(k)$ are unknown.

The solution of the problem is proposed to be performed on the basis of the separation principle using the optimal recurrent extrapolation, the least squares method with additional smoothing and a probabilistic approach to accounting for interval uncertainty. The probabilistic method is based on the replacement of interval parameters by independent random variables distributed over their uncertainty intervals according to a uniform distribution.

It is shown that the use of probabilistic approach, smoothing algorithms for estimating an unknown input for a discrete model with interval parameters allows to increase the prediction accuracy.

Keywords: Robust extrapolation estimates; discrete system; unknown input; interval parameters; least-squares

For citation: Kim, K.S., Smagin, V.I. (2022) Robust extrapolation in discrete systems with interval parameters using algorithms for estimating unknown input. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 59. pp. 47–54. doi: 10.17223/19988605/59/5

Задачи синтеза фильтров, экстраполяторов и наблюдателей для динамических систем с неопределенными параметрами, в частности с интервальными параметрами, рассматривались в работах [1–7], при этом использовались методы робастной обработки информации, методы интервальной математики, методы обработки информации с применением оценок неизвестного входа [8–13]. В работах [8–11] для вычисления оценок неизвестного входа использовался МНК, в работах [12, 13] для вычислений оценок неизвестного входа предложено использовать компенсационный подход, в работе [14] для повышения точности оценивания неизвестного входа применялись алгоритмы непараметрического сглаживания.

В настоящей статье рассматривается задача робастной экстраполяции в дискретных системах с аддитивными возмущениями с неизвестным входом и интервальными параметрами. Задача решается на основе вероятностного подхода, принципа разделения с использованием алгоритмов оценивания неизвестного входа с помощью МНК и сглаживающих процедур непараметрического сглаживания.

1. Постановка задачи

Пусть модель объекта с интервальными параметрами описывается разностным уравнением

$$x(k+1) = \tilde{A}x(k) + Bu(k) + f(k) + q(k), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u(k) \in \mathbb{R}^p$ – известный вход; $f(k)$ – неизвестный вход, x_0 – случайный вектор (предполагаются известными дисперсионная матрица $N_0 = M\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T\}$ и математическое ожидание $\bar{x}_0 = M\{x_0\}$); $\tilde{A}$ – интервальная матрица (с нижней и верхней границами $\underline{A}$ и $\bar{A}$ соответственно), B – заданная матрица; $q(k)$ – векторная гауссовская случайная последовательность со следующими характеристиками:

$$M\{q(k)\} = 0, \quad M\{q(k)q^T(j)\} = Q(k)\delta_{kj}.$$

Здесь δ_{kj} – символ Кронекера.

Канал наблюдений имеет вид:

$$y(k) = Sx(k) + v(k), \quad (2)$$

где $v(k)$ – гауссовская случайная последовательность с характеристиками: $M\{v(k)\} = 0$, $M\{v(k)v^T(j)\} = V(k)\delta_{kj}$. Предполагается, что последовательности $q(k)$, $v(k)$ и x_0 независимы между собой, система (1), (2) наблюдаема при параметрических возмущениях матрицы динамики системы (1).

По информации, поступившей в момент $k \in [0; T]$, требуется найти оценку прогноза $\hat{x}(k+1)$ на основе минимизации следующего критерия:

$$J(0;T) = M\left\{\sum_{k=0}^T e^T(k)R(k)e(k)\right\}, \quad (3)$$

где $R(k) > 0$ – весовая матрица, $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ – вектор ошибок.

2. Синтез оптимального экстраполятора

Для решения задачи будем использовать рекуррентный экстраполятор Калмана (ЭК), при этом для нахождения его коэффициентов передачи воспользуемся вероятностным подходом. Вероятностный подход используется при анализе робастной устойчивости систем с интервальными параметрами [15] и может также использоваться для синтеза робастных систем управления [16]. Суть метода заключается в том, что интервальные параметры заменяются независимыми случайными величинами, распределенными на своих интервалах неопределенности по равномерному закону.

Воспользовавшись вероятностным подходом, интервальную матрицу $\tilde{A}$ заменим на матрицу, элементы которой зависят от случайных величин:

$$A(\theta) = (A + \sum_{s=1}^m A_s \theta_s), \quad (4)$$

где θ_i – независимые случайные величины, распределенные по равномерному закону распределения на интервале $[-1, +1]$ ($-1 \leq \theta_s \leq 1$ ($s = \overline{1, m}$)). Здесь мы будем предполагать, что случайные величины θ_s не зависят от x_0 , $q(k)$ и $v(k)$. В (4) матрица $A = \frac{1}{2}(\underline{A} + \bar{A})$ является медианой интервальной матрицы (номинальная матрица). Значение $m \leq n^2$ определяет количество интервальных элементов в матрице $\tilde{A}$ (матрица A_s , соответствующая ij -му интервальному элементу матрицы $\tilde{A}$, определится по следующему правилу: ее ij -й элемент вычисляется по формуле $(A_s)_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{A} - \underline{A})_{ij}$, при этом все остальные элементы будут равны нулю).

В этом случае исходная модель объекта описывается разностным уравнением

$$x(k+1) = A(\theta)x(k) + Bu(k) + f(k) + q(k), \quad x(0) = x_0. \quad (5)$$

Для построения оценки будем использовать рекуррентный алгоритм экстраполятора Калмана

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + f(k) + K(k)(y(k) - S\hat{x}(k)), \quad \hat{x}(0) = \bar{x}_0, \quad (6)$$

где $K(k)$ – матрица коэффициентов передачи экстраполятора.

Найдем матрицу $K(k)$, обеспечивающую минимум критерия (3), с использованием принципа разделения. Для этого сначала построим оценки вектора $\hat{x}(k)$ в предположении, что вектор $f(k)$ известен точно, затем – оценки вектора неизвестного входа в предположении, что оценка вектора состояния $\hat{x}(k)$ известна.

Для этого запишем уравнение для вектора ошибок $e(k)$, вычитая из уравнения (5) уравнение (6):

$$\begin{aligned} e(k+1) &= x(k+1) - \hat{x}(k+1) = \\ &= (A - KS)e(k) + \sum_{s=1}^m A_s x(k)\theta_s(k) + q(k) - Kv(k). \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая (7), уравнение для матрицы $N(k) = M\{e(k)e(k)^T\}$ с учетом того, что θ_s распределены по равномерному закону распределения, получим следующее матричное разностное уравнение:

$$\begin{aligned} N(k+1) &= (A - K(k)S)N(k)(A - K(k)S)^T + \frac{1}{3} \sum_{s=1}^m A_s N(k)A_s^T + \\ &+ \frac{1}{3} \sum_{s=1}^m A_s \hat{x}(k)\hat{x}(k)^T A_s^T + Q(k) + K(k)V(k)K(k)^T, \quad N(0) = N_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Представим критерий (3) в виде:

$$J(0;T) = \text{tr } N_0 R(0) + \sum_{k=1}^T \text{tr } N(k) R(k), \quad (9)$$

где tr – след матрицы. Тогда, подставив в (9) формулу (8) со сдвигом на один такт, в результате имеем:

$$J(0;T) = \text{tr } N_0 R(0) + \sum_{k=1}^T \text{tr}((A - K(k-1)S)N(k-1)(A - K(k-1)S)^T + \frac{1}{3} \sum_{s=1}^m A_s N(k-1)A_s^T + \frac{1}{3} \sum_{s=1}^m A_s \hat{x}(k-1)\hat{x}(k-1)^T A_s^T + Q(k-1) + K(k-1)V(k-1)K(k-1)^T)R(k). \quad (10)$$

Используя правила дифференцирования функции след (tr) от произведения матриц [17]:

$$\frac{\partial \text{tr } AXB}{\partial X} = A^T B^T, \quad \frac{\partial \text{tr } A^T X B^T}{\partial X} = BA, \quad (11)$$

из уравнения

$$\frac{\partial J(0;T)}{\partial K} = 0, \quad (12)$$

учитывая, что матрица $R(k)$ не вырождена, получим выражение для матрицы $K(k)$:

$$K(k) = AN(k)S^T(SN(k)S^T + V(k))^{-1}. \quad (13)$$

3. Оценка неизвестного входа

В модели (6) в силу того, что в качестве матрицы динамики используется медиана интервальной матрицы (A), изменится вектор неизвестного входа (этот вектор обозначим $r(k)$):

$$r(k) = f(k) + \sum_{m=1}^s A_s \theta_s x(k) \quad -1 \leq \theta_s \leq 1 (s = \overline{1, m}), \quad (14)$$

где второе слагаемое является дополнительным неизвестным входом, возникающим из-за неопределенности задания матрицы динамики объекта.

В качестве алгоритма оценивания неизвестного входа $r(k)$, будем использовать алгоритмы МНК, в этом случае оценку можно построить на основе минимизации дополнительного критерия [8, 9]:

$$I = \sum_{t=1}^k \left\{ \|y(t) - S\tilde{x}(t)\|_C^2 + \|r(t-1)\|_D^2 \right\}, \quad (15)$$

где C, D – положительно определенные весовые матрицы, $\tilde{x}(t) = A\hat{x}(t-1) + Bu(t-1) + r(t-1)$. Построенные на основе минимизации (15) МНК-оценки неизвестного входа примут вид:

$$\hat{r}^{(LSM)}(k) = [S^T C S + D]^{-1} S^T C [y(k) - S(A\hat{x}(k-1) + Bu(k-1))]. \quad (16)$$

Для повышения точности оценивания неизвестного входа будем дополнительно использовать алгоритмы непараметрического сглаживания [14]:

$$\hat{r}^{(NP)}(k) = [S^T C S + D]^{-1} S^T C \hat{\Omega}, \quad (17)$$

где j -я компонента вектора $\hat{\Omega}(k)$ имеет вид:

$$\hat{\Omega}_j(k) = \frac{\sum_{i=1}^k [y(i) - S(A\hat{x}(i-1) + Bu(i-1))]_j G\left(\frac{k-i+1}{\mu_j}\right)}{\sum_{i=1}^k G\left(\frac{k-i+1}{\mu_j}\right)}. \quad (18)$$

В соотношении (18) $G(\cdot)$ является ядерной функцией и μ_j – коэффициентом сглаживания.

Оценки экстраполяции в дискретных системах с интервальными параметрами определялись из рекуррентного уравнения

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + \hat{r}(k) + K(k)(y(k) - S\hat{x}(k)), \quad \hat{x}(0) = \bar{x}_0, \quad (19)$$

где матрица коэффициентов передачи $K(k)$ вычислялась по формулам (8) и (13), а оценка $\hat{r}(k)$ определялась по формулам (16) или (17).

4. Результаты моделирования

Моделирование выполнено для следующих исходных данных:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0,06 & 0 \\ 0 & 0,02 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,15 \end{pmatrix},$$

$$f(k) = \begin{cases} (0,3 \quad -0,2)^T & \text{if } k \in [1; 30], \\ (0,6 \quad 0,1)^T & \text{if } k \in [31; 75], \\ (0,1 \quad -0,3)^T & \text{if } k \in [76; 126], \\ (0,8 \quad -0,6)^T & \text{if } k \in [127; 184], \\ (0,2 \quad 0,1)^T & \text{if } k \in [185; 200]. \end{cases}$$

Варианты значений медианы интервальной матрицы A , для которых выполнено моделирование, приведены в таблице.

Среднеквадратические ошибки оценок вектора состояния ($\sigma_{x,i}$)

№ п/п	Матрицы медианы и реализации двумерной случайного вектора θ	σ_x	Алгоритм 1	Алгоритм 2	Алгоритм 3
1	$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,15 \\ -0,25 & 0,68 \end{pmatrix}, \bar{\theta}_1 = 0,75, \bar{\theta}_2 = 0,6$	$\sigma_{x,1}$ $\sigma_{x,2}$	1,626 1,303	0,811 0,672	0,737 0,575
2	$A = \begin{pmatrix} 0,94 & 0,15 \\ -0,25 & 0,62 \end{pmatrix}, \bar{\theta}_1 = -0,2, \bar{\theta}_2 = 0,65$	$\sigma_{x,1}$ $\sigma_{x,2}$	2,248 1,492	0,930 0,624	0,759 0,538
3	$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,15 \\ -0,25 & 0,8 \end{pmatrix}, \bar{\theta}_1 = 0,75, \bar{\theta}_2 = 0,5$	$\sigma_{x,1}$ $\sigma_{x,2}$	1,938 1,892	0,929 0,797	0,852 0,671
4	$A = \begin{pmatrix} 0,81 & 0,15 \\ -0,25 & 0,52 \end{pmatrix}, \bar{\theta}_1 = 0,85, \bar{\theta}_2 = 1,0$	$\sigma_{x,1}$ $\sigma_{x,2}$	1,632 1,038	0,888 0,610	0,771 0,568
5	$A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ -0,25 & 0,6 \end{pmatrix}, \bar{\theta}_1 = 0,9, \bar{\theta}_2 = 1,0$	$\sigma_{x,1}$ $\sigma_{x,2}$	1,246 0,932	0,640 0,617	0,601 0,575
6	$A = \begin{pmatrix} 0,71 & 0,15 \\ -0,25 & 0,92 \end{pmatrix}, \bar{\theta}_1 = -0,5, \bar{\theta}_2 = -0,5$	$\sigma_{x,1}$ $\sigma_{x,2}$	1,948 2,267	0,633 0,618	0,585 0,553

В (18) использовалась ядерная функция гауссовского вида:

$$G(z) = \frac{\exp\left(\frac{-z^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}.$$

В таблице приведены результаты сравнения среднеквадратических ошибок отклонений оценок вектора состояния для трех алгоритмов (при различных матрицах A и различных реализациях компонент случайного вектора θ):

- алгоритм 1 – ЭК с матрицей динамики A и с использованием оценок МНК неизвестного входа (16) (в этом случае в уравнении (8) в правой части исключены второе и третье слагаемые);
- алгоритм 2 – ЭК с матрицей динамики A и с использованием оценок неизвестного входа МНК и дополнительного сглаживания (17) (в этом случае в уравнении (8) в правой части также исключены второе и третье слагаемые);
- алгоритм 3 – ЭК с использованием оценок МНК, сглаживания и робастного подхода для оценивания вектора состояния (8), (13).

Усреднение производилось по 100 реализациям. Расчет среднеквадратических ошибок оценивания выполнялся по формулам

$$\sigma_{x,i} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (x_i(k) - \hat{x}_i(k))^2}{N-1}}, (i = \overline{1,2}).$$

Из таблицы видно, что применение для оценок прогноза вектора состояния на 1 такт метода МНК для оценивания неизвестного входа с дополнительным сглаживанием с помощью алгоритма непараметрического сглаживания и робастного алгоритма экстраполяции (8), (13), позволяет уменьшить среднеквадратические ошибки оценивания.

Заключение

С использованием вероятностного подхода, в основе которого лежит замена неопределенных параметров интервального типа на независимые случайные величины с равномерным законом распределения, предложен алгоритм синтеза робастного экстраполятора для линейной дискретной модели с неизвестным входом. Задача решена с использованием принципа разделения, рекуррентных алгоритмов, метода наименьших квадратов и сглаживающих процедур. На численном примере показано, что применение алгоритмов сглаживания и робастного подхода позволяет повысить точность прогнозирования.

Список источников

1. Wang Y., Bevly D., Rajamani R. Interval observer design for LPV systems with parametric uncertainty // *Automatica*. 2015. V. 60. P. 79–85.
2. Abolhasani M., Rahmani M. Robust Kalman filtering for discrete-time systems with stochastic uncertain time-varying parameters // *Electronics Letters*. 2017. V. 53. No. 3. P. 146–148.
3. Ichalal D., Marx B., Maquin D., Ragot J. State estimation of system with bounded uncertain parameters: interval multi-model approach // *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. 2018. V. 32 (3). P. 480–493.
4. Hattab O., Franchek M.A., Grigoriadis K. Observer based parameter estimation for linear uncertain discrete-time systems // *J. of Engineering Research and Application*. 2018. V. 8, is. 10 (part II). P. 51–60. doi: 10.9790/9622-0810025160
5. Wang Z., Lim C., Shen Y. Interval observer design for uncertain discrete time linear systems // *Systems & Control Letters*. 2018. V. 116. P. 41–46.
6. Rocha K.D.T., Terra M.H. Robust Kalman filter for systems subject to parametric uncertainties // *Systems & Control Letters*. 2021. V. 157. Art. 105034.
7. Ким К.С., Смагин В.И. Экстраполяция в дискретных системах с мультипликативными возмущениями при неполной информации // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2019. № 47. С. 49–56.
8. Janczak D., Grishin Yu. State estimation of linear dynamic system with unknown input and uncertain observation using dynamic programming // *Control and Cybernetics*. 2006. № 4. P. 851–862.
9. Gillijns S., Moor B. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems // *Automatica*. 2007. V. 43. P. 111–116.
10. Hsien C.-S. On the optimality of two-stage Kalman filter for systems with unknown input // *Asian J. of Control*. 2010. V. 12, № 4. P. 510–523.

11. Witczak M. Fault diagnosis and fault-tolerant control strategies for non-linear systems : Analytical and Soft Computing Approaches. Springer International Publishing, 2014. 239 p. (Lecture Notes in Electrical Engineering; v. 266).
12. Smagin V.I. State estimation for nonstationary discrete systems with unknown input using compensations // Russian Physics Journal. 2015. V. 58, is. 7. P. 1010–1017.
13. Smagin V.I. Prediction of states of discrete systems with unknown input of the model using compensation // Russian Physics Journal. 2017. V. 59, is. 9, P. 1507–1514.
14. Smagin V.I., Koshkin G.M. Kalman filtering and control algorithms for systems with unknown disturbances and parameters using nonparametric technique // Proceedings 20th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR 2015), 24–27 August, Miedzyzdroje, Poland. 2015. P. 247–251.
15. Barmish B.R., Polyak B.T. A new approach to open robustness problems based on probabilistic predication formulae // Proc. 13th World IFAC Congr., 30 June – 5 July, San Francisco, USA. 1996. V. H. P. 1–6.
16. Mukhina O.O., Smagin V.I. Locally Optimal Control for Discrete Time Delay Systems with Interval Parameters // Communications in Computer and Information Science. 2014. V. CCIS 487. P. 301–311.
17. Athans M. The matrix minimum principle // Informat. and Contr. 1968. V. 11. P. 592–606.

References

1. Wang, Y., Bevely, D. & Rajamani, R. (2015) Interval observer design for LPV systems with parametric uncertainty. *Automatica*. 60. pp. 79–85. DOI: 10.1016/j.automatica.2015.07.001
2. Abolhasani, M. & Rahmani, M. (2017) Robust Kalman filtering for discrete-time systems with stochastic uncertain time-varying parameters. *Electronics Letters*. 53(3). pp. 146–148. DOI: 10.1049/el.2016.2520
3. Ichalal, D., Marx, B., Maquin, D. & Ragot, J. (2018) State estimation of system with bounded uncertain parameters: interval multi-model approach. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. 32(3). pp. 480–493. DOI: 10.1002/acs.2855
4. Hattab, O., Franchek, M.A. & Grigoriadis, K. (2018) Observer based parameter estimation for linear uncertain discrete-time systems. *Journal of Engineering Research and Application*. 8-2(10). pp. 51–60. DOI: 10.9790/9622-0810025160
5. Wang, Z., Lim, C. & Shen, Y. (2018) Interval observer design for uncertain discrete time linear systems. *Systems & Control Letters*. 116. pp. 41–46. DOI: 10.1016/j.sysconle.2018.04.003
6. Rocha, K.D.T. & Terra, M.H. (2021) Robust Kalman filter for systems subject to parametric uncertainties. *Systems & Control Letters*. 157. Art. no. 105034. DOI: 10.1016/j.sysconle.2021.105034
7. Kim, K.S. & Smagin, V.I. (2019) Extrapolation in discrete systems with multiplicative perturbations at incomplete information. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 47. pp. 49–56. DOI: 10.17223/19988605/47/6
8. Janczak, D. & Grishin, Yu. (2006) State estimation of linear dynamic system with unknown input and uncertain observation using dynamic programming. *Control and Cybernetics*. 4. pp. 851–862.
9. Gillijns, S. & Moor, B. (2007) Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems. *Automatica*. 43. pp. 111–116.
10. Hsien, C.-S. (2010) On the optimality of two-stage Kalman filter for systems with unknown input. *Asian Journal of Control*. 12(4). pp. 510–523. DOI: 10.1002/asjc.205
11. Witczak, M. (2014) Fault diagnosis and fault-tolerant control strategies for non-linear systems. Chapter 2. Unknown input observers and filters. In: Di Cecco, L. (ed.) *Lecture Notes in Electrical Engineering*. Springer International Publishing, Switzerland. pp. 19–56.
12. Smagin, V.I. (2015) State estimation for nonstationary discrete systems with unknown input using compensations. *Russian Physics Journal*. 58(7). pp. 1010–1017. DOI: 10.1007/s11182-015-0602-x
13. Smagin, V.I. (2017) Prediction of states of discrete systems with unknown input of the model using compensation. *Russian Physics Journal*. 59(9). pp. 1507–1514. DOI: 10.1007/s11182-017-0937-6
14. Smagin, V.I. & Koshkin, G.M. (2015) Kalman filtering and control algorithms for systems with unknown disturbances and parameters using nonparametric technique. *Proc. of the 20th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR 2015)*. 24–27 August. Miedzyzdroje, Poland. pp. 247–251.
15. Barmish, B.R. & Polyak, B.T. (1996) A new approach to open robustness problems based on probabilistic predication formulae. *Proc. 13th World IFAC Congr.* 30 June–5 July. San Francisco, USA. vol. H. pp. 1–6.
16. Mukhina, O.O. & Smagin, V.I. (2014) Locally Optimal Control for Discrete Time Delay Systems with Interval Parameters. *Communications in Computer and Information Science*. CCIS 487. pp. 301–311. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_35
17. Athans, M. (1968) The matrix minimum principle. *Information and Control*. 11. pp. 592–606.

Информация об авторах:

Ким Константин Станиславович – кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: kks93@rambler.ru

Смагин Валерий Иванович – профессор, доктор технических наук, профессор Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: vsm@mail.tsu.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Kim Konstantin S. (Candidate of Physics and Mathematics, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kks93@rambler.ru

Smagin Valery I. (Doctor of Technical Science, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vsm@mail.tsu.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 06.11.2021; принята к публикации 30.05.2022

Received 06.11.2021; accepted for publication 30.05.2022

Научная статья

УДК 519.2; 62-503.55; 621.65.331

doi: 10.17223/19988605/59/6

Система выработки стратегий управления промышленной безопасностью

Максим Викторович Кривов¹, Елизавета Александровна Асламова², Вера Сергеевна Асламова³

¹ Ангарский государственный технический университет, Ангарск, Россия, vmk@angtu.ru

² Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия, liza.ocean@mail.ru

³ Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Россия, aslamovav@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрена экспертная система, советуемая стратегию управления промышленной безопасностью на основе обработки в системе поддержки принятия решений экспертных данных аудита и экспертизы промышленного объекта с использованием теории нечетких множеств. Критерием выбора эталонной ситуации является максимальное значение степени нечеткого равенства текущей и эталонной ситуаций, которая должна быть не менее 0,5.

Ключевые слова: советуемая экспертная система; стратегия управления; промышленная безопасность; система поддержки принятия решений

Для цитирования: Кривов М.В., Асламова Е.А., Асламова В.С. Система выработки стратегий управления промышленной безопасностью // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 59. С. 55–65. doi: 10.17223/19988605/59/6

Original article

doi: 10.17223/19988605/59/6

System for developing industrial safety management strategies

Maxim V. Krivov¹, Elizaveta A. Aslamova², Vera S. Aslamova³

¹ Angarsk State Technical University, Angarsk, Russian Federation, vmk@angtu.ru

² Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation, liza.ocean@mail.ru

³ Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russian Federation, aslamovav@yandex.ru

Abstract. Expert system AREOI.Expert was developed using fuzzy set theory. It gives a recommendation on the choice of an industrial safety management strategy based on the processing of expert audit data and a survey of the state of industrial safety at the facility in the AREOI Decision Support System. AREOI is part of AREOI.Expert. The expert system AREOI.Expert is implemented according to the principle of situational management of industrial safety, which is based on the formalization with the help of specialists of a number of reference (typical) industrial safety situations that are possible at the production facility, and comparison with each situation of any control action leading to an improvement in state indicators industrial safety. The criterion for choosing a strategy for a reference situation is the maximum value of the degree of fuzzy equality of the current and reference situations, which must be at least 0,5.

To form a fuzzy inference system, the linguistic variables "DEGREE OF FULFILLMENT OF REQUIREMENTS (aggregated estimates of the degree of fulfillment of classes of factors affecting industrial safety)" and "VALUE of a class of factors for the level of industrial safety" are used. The sets of terms and the main set of linguistic variables are specified in the form:

$$P = \left\{ \begin{aligned} &\langle \text{DEGREE OF FULFILLMENT OF REQUIREMENTS}, \langle \text{bad, abnormal, normal, good} \rangle, [0...100] \rangle, \\ &\langle \text{VALUE}, \langle \text{low, medium, high} \rangle, [0...100] \rangle \end{aligned} \right\}$$

To determine the boundaries of term sets of the variable "DEGREE OF FULFILLMENT OF REQUIREMENTS", a triangular membership function is used, and for the variable "VALUE" is a trapezoidal membership function.

In the operating mode, AREOI.Expert works according to the following algorithm: reception of assessments of the current situation of the state of industrial safety, which are formed by the decision support system AREOI; transformation of the assessment into the current fuzzy situation; comparison of the current fuzzy situation of the industrial safety state with reference situations and the search for the closest reference situation; comparison of the current fuzzy situation with reference situations and search for the nearest reference situation; if the degree of equality of the reference situation exceeds the confidence threshold $\geq 0,6$, then the expert system generates a control decision characteristic of a similar reference situation. Otherwise, the network (knowledge base) of fuzzy situations should be expanded with an expert assessment of the current situation. Otherwise, the network (knowledge base) of fuzzy situations should be expanded by an expert assessment of the current situation.

If the current situation is indistinctly equal to two or more reference situations, then the coefficient of the degree of preference α is additionally introduced to resolve this conflict. The value $\alpha = 1$, if the strategy is always used, often – $\alpha = 0,9$, sometimes – $\alpha \approx 0,7$. The degree of preference makes it possible to increase the influence on the choice of a particular situation when comparing the current industrial safety situation with the reference ones.

Interfaces of AREOI.Expert and AREOI systems are created using WPF (Windows presentation foundation) technology based on frames. To separate the application logic from the user interface, the MVVM design pattern was applied, which ensures the separation of the application business logic and is implemented in the format of the entity class relationship system. The data storage was the free software of the SQLite DBMS. Using the Database-First approach in Entity Framework 6.0, an ORM is generated Object Relational Mapping of the Data Model.

Keywords: advising expert system; management strategy; industrial safety; decision support system

For citation: Krivov, M.V., Aslamova, E.A., Aslamova, V.S. (2022) System for developing industrial safety management strategies. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 59. pp. 55–65. doi: 10.17223/19988605/59/6

На эффективность управления промышленной безопасности (ПБ) оказывают существенное влияние качество информационного обеспечения, служащего для сбора и анализа информации, необходимой для принятия решений по обеспечению ПБ [1, 2], культура безопасности, под которой понимается психологическая и квалификационная подготовленность персонала [3], соблюдение требований нормативных документов и регламента технологического режима, техническое состояние и своевременность технического обслуживания и ремонтов, оценка и разработка способов контроля риска аварии и др. В Указе Президента РФ № 198 «Об основах государственной политики РФ в области промышленной безопасности на период до 2025 года и дальнейшую перспективу» от 6 мая 2018 г. также отмечается, что необходимы развитие, внедрение информационных технологий, которые осуществляют взаимодействие с организациями, оптимизируют процесс получения, хранения, обработки и анализа информации о производственном контроле за соблюдением требований ПБ. Это подтверждает актуальность разработки экспертной системы выработки стратегий управления ПБ на основе проведения аудита и экспертизы ПБ на объектах железнодорожного транспорта (ОЖДТ).

Опасные производственные объекты (ОПО) на протяжении всего жизненного цикла поднадзорны Ростехнадзору и подлежат постоянному мониторингу и контролю, что обосновывает актуальность задачи создания советующей системы выработки стратегий управления ПБ. К.В. Буйко и Ю.В. Пантюхова провели сравнительный анализ способов оценки ПБ ОПО, который продемонстрировала следующие преимущества использования экспертных оценок для расчета уровня ПБ: простота использования и вычислений; объективность, применимость как для разных отраслей промышленности, так и для одного предприятия; полнота охвата влияющих факторов и наличие необходимых данных [4].

Актуальность проблемы обеспечения ПБ ОПО диктуется также старением используемого оборудования, машин, установок, которое существенно обгоняет темпы их замены и модернизации [5]. Поэтому необходимо проводить их диагностику и техническое освидетельствование для обнаружения потенциально опасных элементов и принятия упреждающих решений, предотвращающих катастрофические отказы техники. Для повышения качества и эффективности обработки информации при проведении освидетельствования и диагностики необходимы формализация и структуризация предметной области (ПрОб), а также разработка на основе прецедентного подхода системы поддержки принятия решений (СППР), что и выполнено в работе [5].

В работе [6] осуществлена модификация редактора CLIPS баз знаний продукции, предназначенного для анализа ПрОб, проектирования информационных моделей, описывающих причинно-следственные взаимосвязи в задачах прогнозной оценки исходной дефектности, поврежденности, разрушения и отказа объектов нефтехимии при проведении экспертизы ПБ.

В [7] отмечено, что экспертные системы (ЭС) способны вырабатывать логические выводы, используя знания специалистов предметной области, что позволяет использовать этот опыт для формирования рекомендаций. ЭС, разработанная в [8], автоматически анализирует параметры процесса производства полиакриловых волокон. В одном из блоков ЭС формируются и накапливаются в БД знания и правила эксперта по оптимальному проведению процесса с учетом изменяющегося сырья, состава оборудования и др. В другом блоке эти правила используются операторами-технологами. Все правила состоят из набора логических выводов: условный оператор перехода if, параметры или функции процесса then, результат работы ЭС. Предполагается, что правило не может зависеть от наименований и значений параметров процесса производства.

Учитывая сложность системы управления ПБ, существенное число влияющих факторов, необходимость переработки большого объема качественной информации, преобладающей над количественной, актуальной задачей является использование методов обработки качественной информации на основе теории нечетких множеств и нечеткой логики [9–11].

В процессе поиска стратегий управления лицо, принимающее решение (ЛПР), обсуждает, формулирует и упрощает задачу поиска с применением таких нечетких понятий, как «много», «мало», «хорошо», «плохо» и т.д. По причине применения лингвистических и нечетких переменных целесообразно реализовать приведенные нечеткие понятия в модели принятия стратегии управления промышленной безопасностью на основе советующей ЭС с помощью ситуационного подхода [9, 10].

В разработанной ЭС стратегии выдаются на базе информации, получаемой в СППР AREOI, входящей в ЭС и описанной в [12–14].

1. Ситуационное управление промышленной безопасностью

Предлагаемый в настоящей работе принцип ситуационного управления ПБ основан на формализации с помощью экспертов ряда эталонных (типовых) ситуаций ПБ, которые возможны на производственном объекте, и сопоставлении с каждой ситуацией некоторого управляющего воздействия, ведущего к улучшению показателей ПБ.

Будем понимать под термином «ситуация ПБ» набор (множество) признаков P_j ($j = 1..N$), характеризующих ПБ, и их значений v_k^j ($k = 1..K$), позволяющих различать и характеризовать уровень (качество) ПБ:

$$s_i = \langle P_j / v_k^j, R_i \rangle, \quad s_i \in S, \quad (1)$$

где R_i – управляющее решение или стратегия улучшения ПБ. В выражении (1) значения признаков v_k^j дискретизированы на K интервалов с целью показать возможность использования дискретных, или интервальных, оценок для признаков. При этом множество S эталонных ситуаций в (1) представляет собой набор определенных экспертами ситуаций ПБ производственного объекта (назовем их эталонными), которыми можно управлять, улучшая уровень ПБ. Множество S можно представить также в форме ситуационного графа, вершинами которого являются определенные экспертами ситуации $s_i \in S$, а дуги есть управляющие решения R_i , обеспечивающие изменение состояния ПБ. На рис. 1 представлена структура ЭС для управления ПБ.

В режиме эксплуатации ЭС работает по следующему алгоритму:

- 1) прием оценок текущей ситуации ПБ, которые формирует СППР;
- 2) преобразование оценки в текущую нечеткую ситуацию;
- 3) сопоставление текущей нечеткой ситуации ПБ с эталонными ситуациями и поиск наиболее близкой эталонной ситуации;

4) если степень равенства эталонной ситуации превышает порог доверия ($\geq 0,6$), то экспертная система формирует управляющее решение, характерное для схожей эталонной ситуации. Иначе сеть (БЗ) нечетких ситуаций следует расширить экспертной оценкой текущей ситуацией.

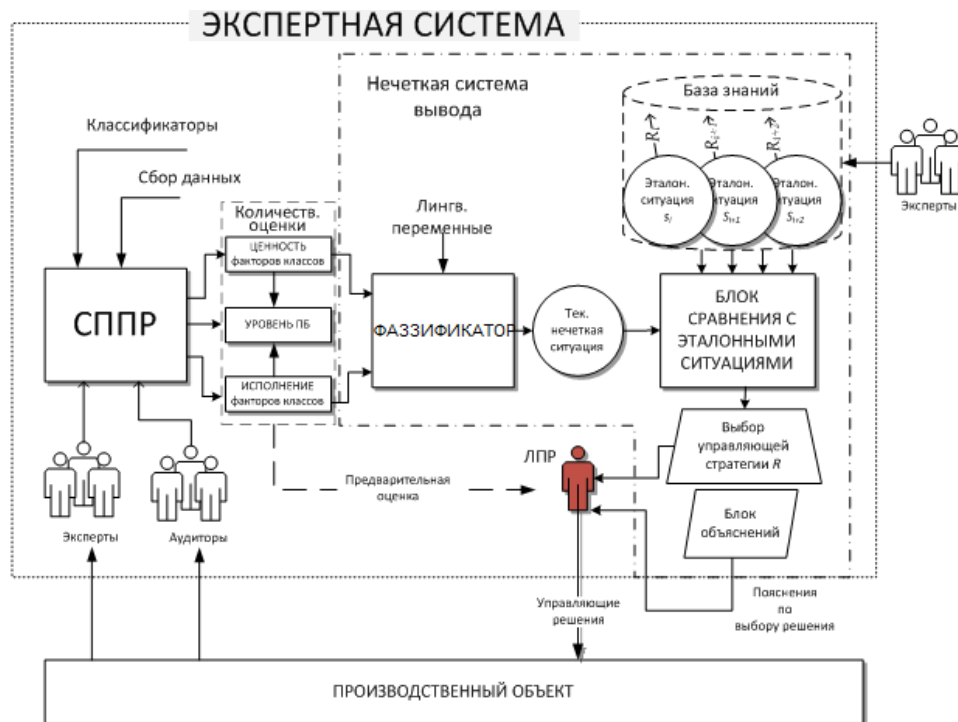


Рис. 1. Структура ЭС AREOI.Expert для управления ПБ
Fig. 1. Structure of ES AREOI.Expert for fire safety management

ЭС предлагает ЛПР стратегию R , соответствующую управляющему решению R_i эталонной ситуации s_i , наиболее близкой к текущей ситуации s^* :

$$R = R_i : s^* \subseteq s_i, s_i \in S, \quad (2)$$

где s^* – некоторая текущая ситуация на производственном объекте, которая характеризуется уровнем «исполнения» класса факторов и «ценностью» для ПБ класса факторов, вычисляемыми в СППР, описанной в [12–14]. Выбор меры близости / равенства / включения $s^* \subseteq s_i$ представляет отдельный вопрос исследования и будет освещен ниже.

Особенность формализации управляющих решений R_i по обеспечению заданного уровня ПБ состоит в том, что они являются директивными («увеличить», «уменьшить» и т.п.) и плохо выражаются через какие-либо числовые оценки. Но, выраженные на естественном языке, управляющие решения наделяются однозначно трактуемым смыслом для ЛПР. Например: «Информационное обеспечение существенно улучшить»; «Организационные меры оставить без изменения» и т.д.

Также отметим, что и признаки, характеризующие ПБ, плохо трактуются ЛПР в количественной форме, но вполне естественно могут быть охарактеризованы с помощью качественных значений. Например, «ценность – низкая», «уровень выполнения – высокий».

При переходе в область качественных значений и нечеткого логического вывода для (1) определим понятие нечеткой ситуации $\tilde{s}_i$:

$$\tilde{s}_i = \left\{ \left\langle \mu_s(p_i) / p_i \right\rangle, p_i \in P, \right\} \quad (3)$$

где функция принадлежности $\mu_s(p_i) = \left\langle \mu_s(T_j^i) / T_j^i \right\rangle$.

В выражении (3) P есть множество признаков, и каждый признак описывается кортежем:

$$P = \langle p_i, T_i, D_i \rangle, \quad (4)$$

где T_i – терм-множество лингвистической переменной (ЛП) p_i , описывающее качественное значение i -го признака, D_i – базовое множество i -го признака.

Для формирования нечеткой системы вывода зададимся лингвистическими переменными ИСПОЛНЕНИЕ (агрегированная оценка степени выполнения класса факторов) и ЦЕННОСТЬ (класса факторов для ПБ). Определим для каждой ЛП терм-множества и базовое множество:

$$P = \left\{ \left\langle \text{ИСПОЛНЕНИЕ}, \langle \text{плохо, ненормально, нормально, хорошо} \rangle, [0...100] \right\rangle, \left\langle \text{ЦЕННОСТЬ}, \langle \text{низкая, средняя, высокая} \rangle, [0...100] \right\rangle \right\}. \quad (5)$$

Для определения границ терм-множеств переменной ИСПОЛНЕНИЕ используются треугольная функция принадлежности, а для переменной ЦЕННОСТЬ – трапецеидальная функция принадлежности.

Задавшись механизмом качественного описания ПБ в соответствии с (3), создадим базу знаний о нечетких ситуациях ПБ и стратегии управления, которые должны формироваться экспертами на этапе синтеза и настройки ЭС (см. таблицу).

Нечеткие ситуации ПБ и ПР и стратегии управления (фрагмент)

№ ситуации	Значение ЛП ИСПОЛНЕНИЕ	Значение ЛП ЦЕННОСТЬ	Управляющая стратегия R
1	хорошо	высокая	оставить без изменения
2	хорошо	средняя	оставить без изменения
3	хорошо	низкая	ослабить контроль
4	нормально	высокая	взять на контроль
5	нормально	средняя	взять на контроль
...	...	...	...
N	ненормально	высокая	усилить контроль

Чтобы облегчить экспертам процесс формирования нечеткой ситуационной сети, предложено описывать ситуацию в форме продукций вида:

ЕСЛИ ИСПОЛНЕНИЕ = <НЕЧЕТКОЕ ЗНАЧЕНИЕ>
И ЦЕННОСТЬ = <НЕЧЕТКОЕ ЗНАЧЕНИЕ>, ТО УПРАВЛЕНИЕ = R.

Степень равенства текущей ситуации $\tilde{A}$ и нечеткой эталонной ситуации $\tilde{B}$ оценивается по выражению

$$\mu(\tilde{A}, \tilde{B}) = \bigcap_{x \in X} (\mu_A \leftrightarrow \mu_B). \quad (6)$$

В соответствии с определением нечеткой эквивалентности раскроем выражение (6):

$$(\mu_A \leftrightarrow \mu_B) = \min(\max(1 - \mu_A, \mu_B), \max(1 - \mu_B, \mu_A)). \quad (7)$$

В ряде источников предлагается считать, что если $\mu(\tilde{A}, \tilde{B}) > 0,5$, то ситуации нечетко равны [9–11]. Если $\mu(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0,5$, то ситуации будут нечетко индифферентными.

В нечеткой ситуационной сети вполне возможна ситуация, когда две или более эталонных ситуации будут иметь степень равенства $\geq 0,5$. В этом случае алгоритмом должна быть выбрана ситуация с наибольшей степенью равенства. Но вероятен и случай, когда текущая ситуация будет нечетко равна двум или более эталонным ситуациям. Чтобы разрешить этот конфликт, дополним каждое правило, описывающее ситуацию, специальным коэффициентом α – степенью предпочтения. Значение $\alpha = 1$, если стратегия используется всегда, часто – $\alpha = 0,9$, иногда – $\alpha \approx 0,7$, как это предлагается в [9]. Степень предпочтения позволяет усилить влияние на выбор той или иной ситуации при сопоставлении текущей ситуации ПБ с эталонными.

Тогда с учетом степени предпочтения выражение (6) принимает вид:

$$\mu(\tilde{A}, \tilde{B}) = \bigcap_{x \in X} (\mu_A \leftrightarrow \alpha \mu_B), \quad (8)$$

где $\tilde{B}$ – нечеткая эталонная ситуация, $\tilde{A}$ – текущая. Тогда выражение (7) примет вид:

$$(\mu_A \leftrightarrow \mu_B) = \min(\max(1 - \mu_A, \alpha \mu_B), \max(1 - \alpha \mu_B, \mu_A)). \quad (9)$$

2. Описание ЭС AREOI.Expert

Разработанная ЭС AREOI.Expert в качестве составной части включает СППР AREOI, чтобы иметь в своем распоряжении БЗ, БД, результаты работы СППР: оценки экспертов и аудиторов, агрегированные степени исполнения и ценность каждого класса факторов и базовых факторов каждого класса. Чтобы ЭС заработала, нужно предварительно ее настроить (рис. 2). Поскольку ЭС осована на системе нечеткого вывода, то требуется определить лингвистические переменные и терм-множества нечетких значений.

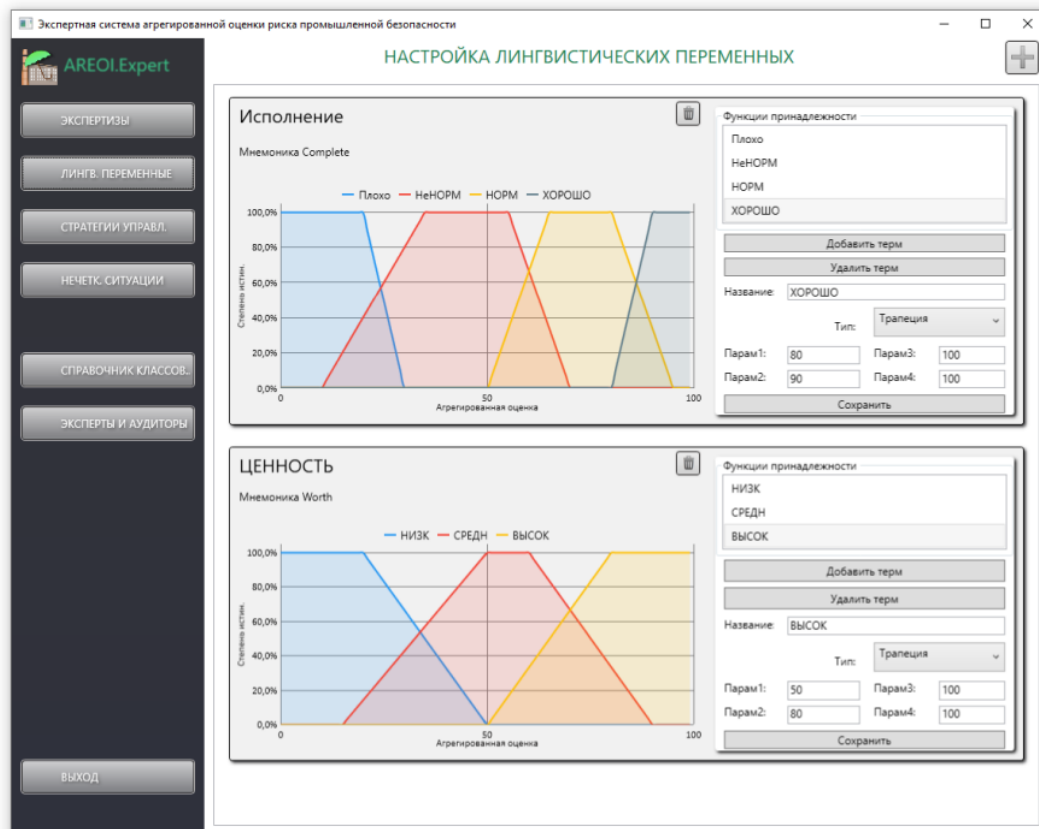


Рис. 2. Настройка лингвистических переменных

Fig. 2. Setting linguistic variables

Лингвистические переменные используются в ЭС в качестве оценочных переменных: это уровень исполнения того или иного фактора ПБ, а также ценность этого фактора. В соответствии с теорией нечетких множеств каждая лингвистическая переменная наделена кортежем (4), где присутствуют также и терм-множества в качественных значениях. Например, для лингвистической переменной ИСПОЛНЕНИЕ определены терм-множества: «плохо», «ненормально», «нормально» и «хорошо». Функции принадлежности нечетких терм-множеств в редакторе лингвистической переменной могут быть заданы треугольной, трапецидальной функцией либо функцией синглтоном. В редакторе нечетких переменных можно выбирать параметры функции принадлежности терм-множеств, например можно сделать тот или иной терм пологим. Можно изменять тип функции принадлежности. Значения параметров функций принадлежности назначаются экспертами.

Каждому набору значений качественных признаков, определяющих нечеткую ситуацию, должна быть сопоставлена стратегия управления. В ЭС стратегия формируется вербальной директивой по управлению ПБ для каждого класса факторов. Словарь стратегий формируется экспертами (рис. 3). Представленный набор стратегий управления не является фиксированным, редактор стратегий позволяет расширять набор стратегий управления.

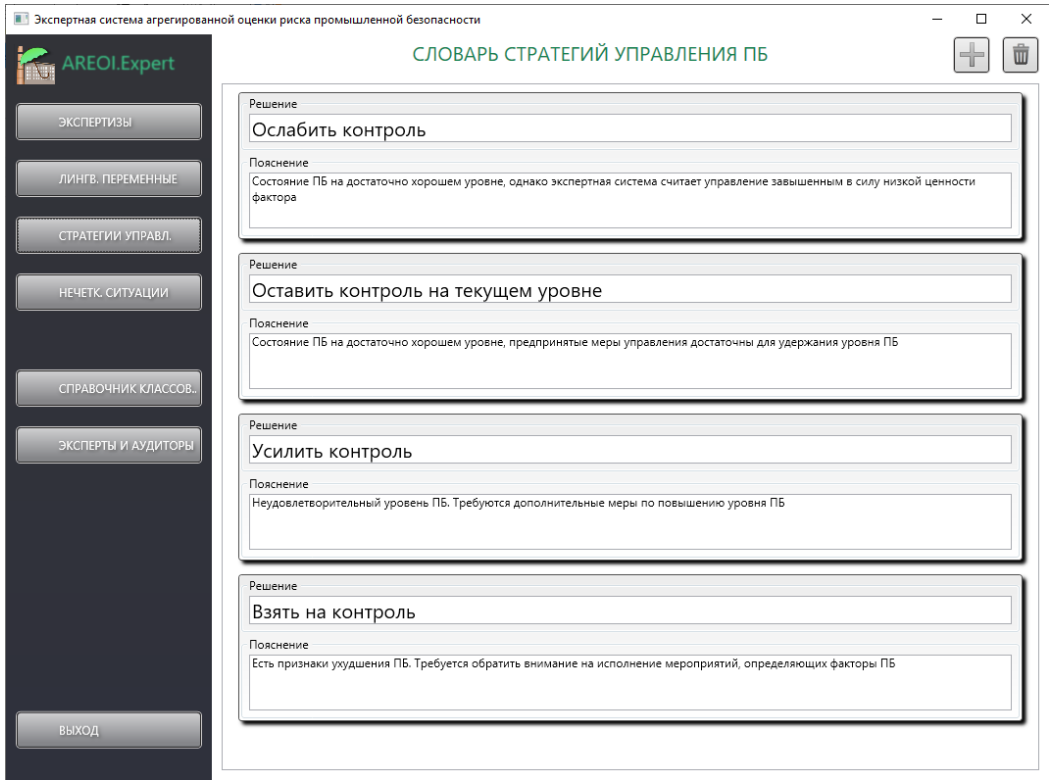


Рис. 3. Словарь стратегий управления
Fig. 3. Vocabulary of control strategies

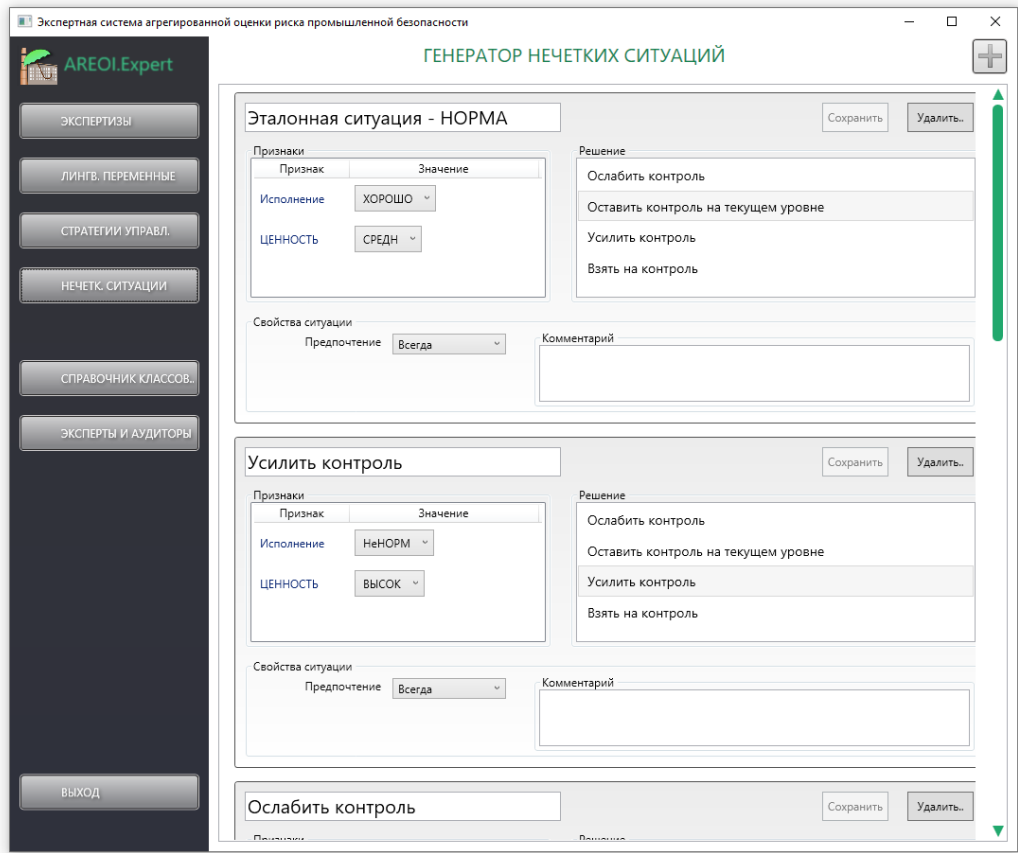


Рис. 4. Генератор нечетких ситуаций
Fig. 4. Fuzzy generator

Далее следует сформировать сеть нечетких ситуаций с использованием модуля «Генератор нечетких ситуаций» (рис. 4). Он позволяет пользователю сопоставить качественные значения признаков и требуемой стратегии управления.

После настройки ЭС готова к эксплуатации. Главный экран программы ЭС содержит рабочую область, навигационное меню, которое позволяет управлять режимами работы программы (см. рис. 2). Если экспертиза не была проведена, то эксперты и аудиторы, выбрав в меню кнопку «Эксперты и аудиторы», могут зарегистрироваться, а затем, выбирая из справочника классов факторов требуемые классы, выставить требуемые оценки (рис. 5). Для каждого фактора выставляют: эксперт – ценность фактора и класса, аудитор – степень исполнения фактора. СППР вычислит агрегированные оценки ценностей классов факторов и агрегированный уровень ПБ. Ее результаты расчета будут записаны в БД и доступны ЭС. Результаты работы СППР представлены в наглядном виде: для ценности классов факторов использован красный цвет, для агрегированной оценки степени исполнения классов факторов – синий.

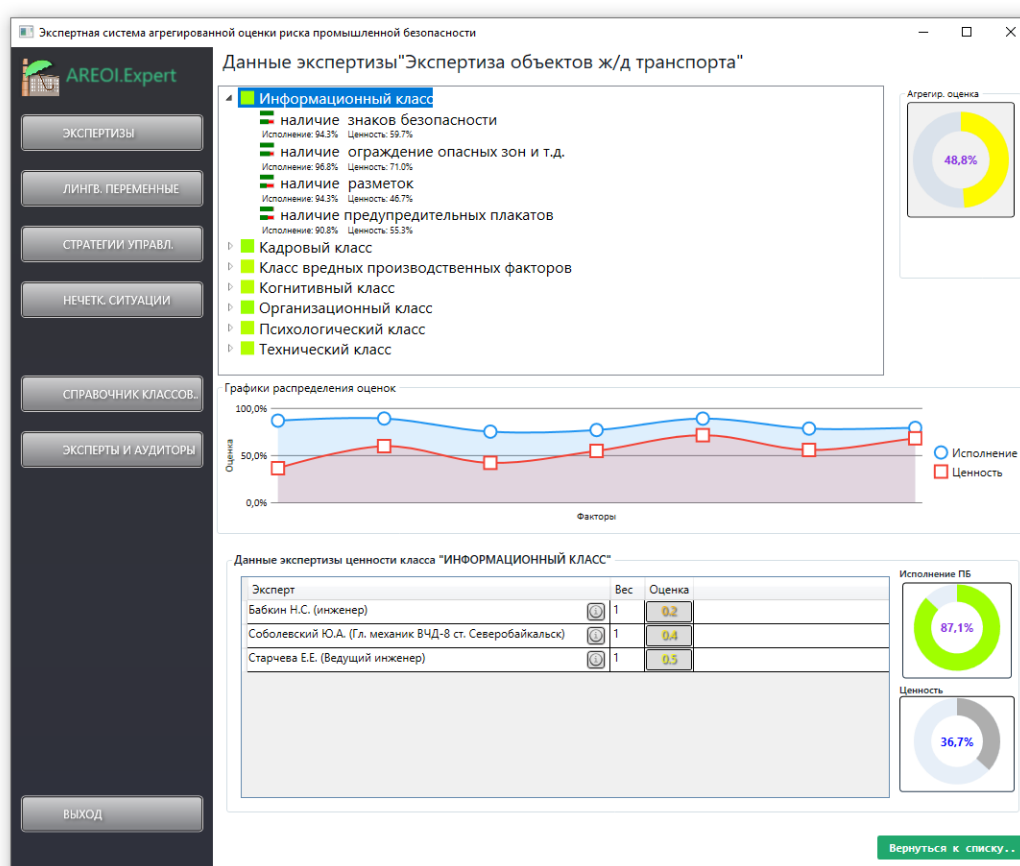


Рис. 5. Запись результатов экспертизы информационного класса факторов
Fig. 5. Recording the results of the examination of the information class of factors

Важным качеством любой ЭС является возможность объяснения ситуации и причины выбора решения. Первый шаг к обеспечению этого свойства – создание системы комментариев, разъясняющих и поясняющих условия формирования стратегии и порядок действий согласно данной стратегии. На рис. 6 показан фрагмент результатов экспертного вывода.

Текущая ситуация ПБ была оценена экспертами ПБ, и их оценки размещены в СППР. По данным оценкам для каждого класса факторов ЭС пытается подобрать схожую эталонную ситуацию, которую предвидели эксперты и предложили стратегию управления. Критерием выбора эталонной ситуации является максимальное значение степени нечеткого равенства ситуации, которая должна быть не менее 0,5 (предпочтительнее выбирать ее более 0,7). Рассмотрим в качестве примера случай,

приведенный на рис. 6. Для текущей ситуации ПБ в информационном классе факторов ПБ ЭС определила наиболее нечетко близкой ситуацию «Обратить внимание». При этом ЭС рекомендует выбрать для этого класса стратегию управления «Взять на контроль». Высокая степень равенства ситуаций (0,67) позволяет ЛПР довериться ЭС в корректности выбранной стратегии. Кроме того, агрегированная оценка уровня исполнения класса (63%) также подтверждает вывод о необходимости предпринимать определенные действия.

Экспертная система "Экспертиза объектов ж/д транспорта"

Консолидированный вывод по классам факторов:

Класс	Стратегия	Значение
Информационный класс	Оставить контроль на текущем уровне	0,62
Кадровый класс	Оставить контроль на текущем уровне	0,94
Класс вредных производственных факторов	Взять на контроль	0,70
Когнитивный класс	Взять на контроль	0,90
Организационный класс	Оставить контроль на текущем уровне	0,61
Психологический класс	Взять на контроль	0,90
Технический класс	Взять на контроль	0,65

Информационный класс

Оценки экспертов: Исполнение: **87.11%** Ценность: **36.67%**

Поиск решения экспертной системы:

Ситуация	ФП1	ФП2	С.Н.Р.	Предпочт.	Стратегия
Эталонная ситуация - НОРМА	ХОРОШО (0,71)	СРЕДН (0,62)	0,62	ВСЕГДА	Оставить контроль на текущем уровне
Усилить контроль	НЕНОРМ (0,00)	ВЫСОК (0,00)	0,00	ВСЕГДА	Усилить контроль
Ослабить контроль	ХОРОШО (0,71)	НИЗК (0,44)	0,44	ВСЕГДА	Оставить контроль на текущем уровне
Чрезвычайная ситуация	Плохо (0,00)	ВЫСОК (0,00)	0,00	ВСЕГДА	Усилить контроль
Немного усилить контроль	НОРМ (0,53)	НИЗК (0,44)	0,44	ВСЕГДА	Взять на контроль
Обратить внимание	НОРМ (0,53)	СРЕДН (0,62)	0,47	ЧАСТО	Взять на контроль

Вывод экспертной системы: **Оставить контроль на текущем уровне** Степень нечеткого равенства: **0,62**

Кадровый класс

Оценки экспертов: Исполнение: **89.37%** Ценность: **60.00%**

Поиск решения экспертной системы:

Ситуация	ФП1	ФП2	С.Н.Р.	Предпочт.	Стратегия
Эталонная ситуация - НОРМА	ХОРОШО (0,94)	СРЕДН (1,00)	0,94	ВСЕГДА	Оставить контроль на текущем уровне
Усилить контроль	НЕНОРМ (0,00)	ВЫСОК (0,33)	0,00	ВСЕГДА	Усилить контроль
Ослабить контроль	ХОРОШО (0,94)	НИЗК (0,00)	0,00	ВСЕГДА	Оставить контроль на текущем уровне
Чрезвычайная ситуация	Плохо (0,00)	ВЫСОК (0,33)	0,00	ВСЕГДА	Усилить контроль
Немного усилить контроль	НОРМ (0,38)	НИЗК (0,00)	0,00	ВСЕГДА	Взять на контроль
Обратить внимание	НОРМ (0,38)	СРЕДН (1,00)	0,34	ЧАСТО	Взять на контроль

Вернуться к списку...

Рис. 6. Логические выводы ЭС по классам факторов
Fig. 6. The logical conclusions of the ES by classes of factors

Интерфейсы ЭС и СППР созданы по технологии WPF (Windows Presentation Foundation) на основе фреймов. Для разделения логики приложения от интерфейса пользователя был применен паттерн проектирования MVVM, обеспечивающий разделение бизнес-логики приложения и реализованный в формате системы отношений классов сущностей. В качестве хранилища данных выступало свободное программное обеспечение СУБД SQLite. С помощью подхода Database-First в Entity Framework 6.0 сгенерировано ORM – объектно-реляционное отображение модели данных.

Заключение

ЭС относится к классу «ситуация → стратегия управления → действие». ЭС используется в случае, когда агрегированная оценка класса мала (т.е., с точки зрения ЛПР, система управления ПБ не в полной мере соответствует целевому назначению), или перед ЛПР стоит задача повысить целевую эффективность системы управления. В качестве советующего решения ЭС выбирает стратегию, характерную для эталонной ситуации с максимальной степенью ее нечеткого равенства с текущей,

т.е. критерий выбора эталонной ситуации – максимальное значение степени нечеткой эквивалентности текущей и эталонной ситуаций, которая должна быть не менее 0,5. Предпочтительно выбирать эталонную ситуацию со степенью эквивалентности более 0,7. Получены рекомендации по использованию ЭС: для настройки признаков ЭС смежные терм-множества нечетких значений должны взаимно пересекаться с ординатой $\geq 0,6$; если для какой-либо входной ситуации нет эталонной ситуации со степенью равенства $> 0,5$, значит сеть нечетких ситуаций неполная и требует расширения.

Список источников

1. Бочков А.В., Пономаренко Д.В. Научно-методические основы мониторинга и прогнозирования состояния промышленной безопасности ПАО «ГАЗПРОМ» // Газовая промышленность. 2017. № 3. С. 20–30.
2. Бочков А.В. Проблемы оценки опасностей и управления рисками объектов критически важной инфраструктуры группы «ГАЗПРОМ»: аналитический обзор // Вести газовой науки. 2018. № 2 (34). С. 51–82.
3. Пономаренко Д.В., Ивенков С.Г., Панова, М.А. Лесных В.В. Проблемы формирования культуры безопасности в нефтегазовой сфере // Безопасность труда в промышленности. 2016. № 10. С. 65–70.
4. Буйко К.В., Пантюхова Ю.В. Подходы к оценке уровня промышленной безопасности в организациях, эксплуатирующих опасные производственные объекты. URL: <http://kalugatechnadzor.ru/analitika/371-podxody-k-ocenke-urovnya-promyshlennoj-bezopasnosti-v-organizacziyax-ekspluatiruyushhix-opasnye-proizvodstvennye-obekty> (дата обращения: 23.11.2017).
5. Берман А.Ф., Николайчук О.А., Павлов А.И., Юрин А.Ю., Кузнецов К.А. Информационная система для проведения экспертизы промышленной безопасности // Безопасность и мониторинг техногенных и природных систем : материалы и доклады VI Всерос. конф., Красноярск, 18–21 сентября 2018 г. Красноярск : Сиб. фед. ун-т, 2018. С. 23–27.
6. Берман А.Ф., Грищенко М.А., Николайчук О.А., Юрин А.Ю. Проблемно-ориентированный редактор продукционных баз знаний // Программные продукты и системы. 2015. № 2 (110). С. 13–19.
7. Коршунов С.А., Павлов А.И., Николайчук О.А. Web-ориентированный компонент продукционной экспертной системы // Программные продукты и системы. 2015. № 2 (110). С. 20–25.
8. Буров А.Н., Калабин А.Л., Козлов А.В., Пакшвер Э.А. Экспертная система мониторинга технологического процесса // Программные продукты и системы. 2015. № 2 (110). С. 39–47.
9. Мелихов А.Н., Бернштейн Л.С., Коровин С.Я. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 272 с.
10. Карелин В.П. Модели и методы представления знаний и выработки решений в интеллектуальных информационных системах с нечеткой логикой // Вестник Таганрогского института управления и экономики. 2014. № 1. С. 75–83.
11. Целых А.Н., Котов Э.М. Методы нечетко-множественного анализа и моделирования социальных графов // Современные проблемы науки и образования. 2013. № 6. URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=11178> (дата обращения: 21.08.2021).
12. Асламова Е.А., Аршинский Л.В. Методика агрегированной оценки защищенности работников от профессионального поражения на основе знаниевых технологий // Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2017. № 4 (8). С. 39–51.
13. Aslamova E.A., Arshinsky L.V., Aslamova V.S., Krivov M.V. Expert system for aggregate industrial safety assessment at enterprises based on knowledge technologies // Published under licence by IOP Publishing Ltd IOP Conference Series : Materials Science and Engineering. 2020. V. 760. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/760/1/012007/meta> (accessed: 21.08.2021).
14. Асламова Е.А., Кривов М.В., Асламова В.С. Экспертная система агрегированной оценки уровня промышленной безопасности // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2018. № 44. С. 84–92.

References

1. Bochkov, A.V. & Ponomarenko, D.V. (2017) Nauchno-metodicheskie osnovy monitoringa i prognozirovaniya sostoyaniya promyshlennoy bezopasnosti PAO "GAZPROM" [Scientific and methodological foundations for monitoring and forecasting the state of industrial safety of PJSC GAZPROM]. *Gazovaya promyshlennost' – Gas Industry Journal*. 3. pp. 20–30.
2. Bochkov, A.V. (2018) Problemy otsenki opasnostey i upravleniya riskami ob'ektov kriticheski vazhnoy infrastruktury gruppy "GAZPROM": analiticheskiy obzor [Problems of Hazard Assessment and Risk Management of Critical Infrastructure Facilities of the GAZPROM Group: An Analytical Review]. *Vesti gazovoy nauki*. 2(34). pp. 51–82.
3. Ponomarenko, D.V., Ivenkov, S.G., Panova, M.A. & Lesnykh, V.V. (2016) Problems of forming a safety culture in the oil and gas sphere. *Bezopasnost' truda v promyshlennosti*. 10. pp. 65–70.
4. Buyko, K.V. & Pantyukhova, Yu.V. (n.d.) *Podkhody k otsenke urovnya promyshlennoy bezopasnosti v organizatsiyakh, ekspluatiruyushchikh opasnye proizvodstvennye ob'ekty* [Approaches to assessing the level of industrial safety in organizations operating hazardous production facilities]. [Online] Available from: <http://kalugatechnadzor.ru/analitika/371-podxody-k-ocenke-urovnya-promyshlennoj-bezopasnosti-v-organizacziyax-ekspluatiruyushhix-opasnye-proizvodstvennye-obekty> (Accessed: 23rd November 2017).

5. Berman, A.F., Nikolaychuk, O.A., Pavlov, A.I., Yurin, A.Yu. & Kuznetsov, K.A. (2018) Information system for the examination of industrial safety. *Bezopasnost' i monitoring tekhnogennykh i prirodnnykh sistem* [Safety and monitoring of technogenic and natural systems materials and reports]. Proc. of the 6th Conference. Krasnoyarsk, September 18–21, 2018. pp. 23–27.
6. Berman, A.F., Grishchenko, M.A., Nikolaychuk, O.A. & Yurin, A.Yu. (2015) A problem-oriented editor for design of rule-based knowledge bases. *Programmnye produkty i sistemy – Software and Systems*. 2(110). pp. 13–19. DOI: 10.15827/0236-235X.110.013-019
7. Korshunov, S.A., Pavlov, A.I. & Nikolaychuk, O.A. (2015) Web-oriented component of an expert system. *Programmnye produkty i sistemy – Software and Systems*. 2(110). pp. 20–25. DOI: 10.15827/0236-235X.110.020-025
8. Burov, A.N., Kalabin, A.L., Kozlov, A.V. & Pakshver, E.A. (2015) Expert system for monitoring technological process. *Programmnye produkty i sistemy – Software and Systems*. 2(110). pp. 39–47. DOI: 10.15827/0236-235X.110.039-043
9. Melikhov, A.N., Bernstein, L.S. & Korovin, S.Ya. (1990) *Situatsionnye sovetuyushchie sistemy s nechetkoy logikoy* [Situational advising systems with fuzzy logic]. Moscow: Nauka.
10. Karelin, V.P. (2014) Modeli i metody predstavleniya znaniy i vyработки resheniy v intellektual'nykh informatsionnykh sistemakh s nechetkoy logikoy [Models and methods of knowledge representation and decision-making in intelligent information systems with fuzzy logic]. *Vestnik Taganrogskego instituta upravleniya i ekonomiki*. 1. pp. 75–83.
11. Tselykh, A.N. & Kotov, E.M. (2013) Methods of fuzzy-multiple analysis and modeling of social graphs. *Sovremennyye problemy nauki i obrazovaniya – Modern Problems of Science and Education*. 6. [Online] Available from: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=11178> (Accessed: 21st August 2021).
12. Aslamova, E.A. & Arshinsky, L.V. (2017) Metody nechetko-mnozhestvennogo analiza i modelirovaniya sotsial'nykh grafov [Methodology for the aggregated assessment of the protection of workers from occupational injury based on knowledge technologies]. *Informatsionnye i matematicheskie tekhnologii v nauche i upravlenii – Information and Mathematical Technologies in Science and Management*. no. 4 (8), pp. 39–51.
13. Aslamova, E.A., Arshinsky, L.V., Aslamova, V.S. & Krivov, M.V. (2020) Expert system for aggregate industrial safety assessment at enterprises based on knowledge technologies. *IOP Conference Series Materials Science and Engineering*. 760(1):012007. DOI: 10.1088/1757-899X/760/1/012007/meta
14. Aslamova, E.A., Krivov, M.V. & Aslamova, V.S. (2018) Expert system of the aggregate assessment of the level of industrial safety. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 44. pp. 84–92. DOI: 10.17223/19988605/44/9

Информация об авторах:

Кривов Максим Викторович – доцент, кандидат технических наук, заведующий кафедрой «Вычислительные машины и комплексы» Ангарского государственного технического университета (Ангарск, Россия). E-mail: vmk@angtu.ru

Асламова Елизавета Александровна – кандидат технических наук, ассистент кафедры «Бизнес-информатика и моделирование процессов» Института управления бизнес-процессами Сибирского федерального университета (Красноярск, Россия). E-mail: liza.ocean@mail.ru

Асламова Вера Сергеевна – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры техносферной безопасности Иркутского государственного университета путей сообщения (Иркутск, Россия). E-mail: aslamovav@yandex.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Krivov Maxim V. (Associate Professor, Candidate of Technical Sciences, Head of the Department of Computing Machines and Complexes, Angarsk State Technical University, Angarsk, Russian Federation). E-mail: vmk@angtu.ru

Aslamova Elizaveta A. (Assistant, Candidate of Technical Sciences, Department of Business Informatics and Process Modeling, Institute of Business Process Management, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation). E-mail: liza.ocean@mail.ru

Aslamova Vera S. (Professor, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Technosphere Safety, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russian Federation). E-mail: aslamovav@yandex.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 12.10.2021; принята к публикации 30.05.2022

Received 12.10.2021; accepted for publication 30.05.2022

Original article

doi: 10.17223/19988605/59/7

The sensitivity coefficients for dynamic systems described by interconnected difference ordinary equations and equations with the distributed memory

Anatoly I. Rouban*Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation, ai-rouban@mail.ru*

Abstract. The variational method of calculation of sensitivity coefficients connecting first variation of quality functional (the Bolts's problem) with variable and constant parameters for multivariate non-linear dynamic systems described by interconnected difference ordinary equations and equations with distributed memory on phase coordinates and variable parameters is developed. Sensitivity coefficients are components of sensitivity functional and they are before variations of variable and constant parameters. The base of calculation of sensitivity coefficients is the decision of object equations in the forward direction of discrete time and corresponding difference conjugate equations for Lagrange's multipliers in the opposite direction of discrete time.

Keywords: variational method; sensitivity coefficient; difference equation; conjugate equation; Lagrange's multiplier

For citation: Rouban, A.I. (2022) The sensitivity coefficients for dynamic systems described by interconnected difference ordinary equations and equations with the distributed memory. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 59. pp. 66–72. doi: 10.17223/19988605/59/7

Научная статья

УДК 519.2

doi: 10.17223/19988605/59/7

Коэффициенты чувствительности для динамических систем, описываемых взаимосвязанными разностными обыкновенными уравнениями и уравнениями с распределенной памятью

Анатолий Иванович Рубан*Сибирский Федеральный университет, Красноярск, Россия, ai-rouban@mail.ru*

Аннотация. Вариационный метод применен для расчета коэффициентов чувствительности, которые связывают первую вариацию функционалов качества работы систем (функционала Больца) с вариациями переменных и постоянных параметров, для многомерных нелинейных динамических систем, описываемых взаимосвязанными разностными обыкновенными уравнениями и уравнениями с распределенной памятью по фазовым координатам и переменным параметрам.

Ключевые слова: вариационный метод; коэффициент чувствительности; разностное уравнение; функционал качества работы системы; сопряженное уравнение; множитель Лагранжа

Для цитирования: Рубан А.И. Коэффициенты чувствительности для динамических систем, описываемых взаимосвязанными разностными обыкновенными уравнениями и уравнениями с распределенной памятью // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 59. С. 66–72. doi: 10.17223/19988605/59/7

The sensitivity coefficients (SC) are components of vector gradient from quality functional according to parameters. The problem of calculation of SC for dynamic systems is principal in the analysis and syntheses of control laws, identification, optimization, stability [1–16]. The first-order sensitivity characteristics are mostly used. Later on we shall examine only SC of the first-order.

Consider two vectorial outputs $x(t)$ and $y(t)$ of dynamic object model: interconnected ordinary difference equations and difference equations with distributed memory on phase coordinates under discrete time $t \in [0, 1, \dots, N+1]$ implicitly depending on vector α parameters and $I(\alpha)$ is functional constructed on $x(t)$, $y(t)$, α under $t \in [0, 1, \dots, N+1]$:

$$I(\alpha) = \sum_{t=0}^{N+1} f_0(x(t), y(t), \alpha, t).$$

SC with respect to constant α parameters are called a gradient from $I(\alpha)$ on α vector: $(dI(\alpha)/d\alpha)^T \equiv \nabla_{\alpha} I(\alpha)$. SC are a coefficients of single-line relationship between the first variation $\delta_{\alpha} I(\alpha)$ of functional $I(\alpha)$ and the variations $\delta\alpha$ of constant α parameters:

$$\delta_{\alpha} I(\alpha) = \frac{dI(\alpha)}{d\alpha} \delta\alpha \equiv \sum_{j=1}^m \frac{\partial I(\alpha)}{\partial \alpha_j} \delta\alpha_j.$$

The direct method of SC calculation (by means of the differentiation of quality functional with respect to constant parameters) inevitably requires a solution of cumbersome sensitivity equations to sensitivity functions: $W_{\alpha}^x(t) = dx(t)/d\alpha$, $W_{\alpha}^y(t) = dy(t)/d\alpha$. For instance, for functional $I(\alpha)$ we have following SC

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \sum_{t=0}^{N+1} \left[\frac{\partial f_0(x(t), y(t), \alpha, t)}{\partial x(t)} W_{\alpha}^x(t) + \frac{\partial f_0(x(t), y(t), \alpha, t)}{\partial y(t)} W_{\alpha}^y(t) + \frac{\partial f_0(x(t), y(t), \alpha, t)}{\partial \alpha} \right].$$

For variable parameters such method essentially becomes complicated and practically is not applicable.

At a choice of good initial approach of parameters at identification of objects and also at consecutive calculation of control actions on object often apply a gradient algorithm. It appears that for calculation of components of a gradient from an optimized functional to required variables and constant parameters, it is convenient to apply the conjugate equations (in relation to the dynamic equations of object).

Variational method [6] makes possible to simplify the process of determination of conjugate equations and formulas of account of SC. On the basis of this method it is an extension of quality functional by means of inclusion into it dynamic equations of object by means of Lagrange's multipliers and obtaining the first variation of extended functional on phase coordinates of object and on interesting parameters. Dynamic equations for Lagrange's multipliers are obtained due to set equal to a zero (in the first variation of extended functional) the functions before the variations of phase coordinates. Given simplification first variation of extended functional brings at presence in the right part only parameter variations, i.e. it is got the sensitivity functional on concerning parameters.

In difference from other papers devoted to calculation of SC in given paper the generalized difference models are used: interconnected ordinary difference equations and difference equations with distributed memory on phase coordinates and variable parameters. Besides variables and constant parameters enter into the right parts of difference equations of dynamic object, in an indicator of quality of system work and initial values of phase coordinates depend on constant parameters. At the right part of the equations of object model there are also phase coordinates and variable parameters during the previous moments of time. Such discrete equations are similar numerical decisions of integro-differential Volterra's equations.

It is proved that both methods to calculation of SC (with use of Lagrange's functions or with use of sensitivity functions) yield the same result, but the first method it is essential more simple in the computing relation.

1. Problem statement

We suppose that the dynamic system is described by non-linear interconnected difference equations

$$x(t+1) = f(x(t), y(t), \tilde{\alpha}(t), \alpha, t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, N, \quad x(0) = x_0(\alpha). \quad (1)$$

$$y(t+1) = \sum_{s=0}^t K(t, x(s), y(s), \tilde{\alpha}(s), \alpha, s), \quad t = 0, 1, 2, \dots, N, \quad y(0) = y_0(\alpha).$$

Here: x, y are a vector-columns of phase coordinates; $\tilde{\alpha}(t), \alpha$ are a vector-columns of interesting variable and constant parameters; $f(), K(\cdot)$ are known continuously differentiated limited vector-functions.

The quality of functioning of system it is characterised of functional

$$I(\tilde{\alpha}, \alpha) = \sum_{t=0}^N f_0(x(t), y(t), \tilde{\alpha}(t), \alpha, t) + f_0(x(N+1), y(N+1), \tilde{\alpha}(N+1), \alpha, N+1), \quad (2)$$

depending on $\tilde{\alpha}(t)$ and α . The conditions for function $f_0(\cdot)$ are the same as for $f(\cdot), K(\cdot)$. With use of a functional (2) the optimization problem (in the theory of optimal control) are named as the Bolts's problem.

With the purpose of simplification of appropriate deductions with preservation of a generality in all transformations (1), (2) there are two vectors of parameters $\tilde{\alpha}(t), \alpha$. If in the equations (1), (2) parameters are different then it is possible formally to unit them in two vectors $\tilde{\alpha}(t), \alpha$, to use obtained outcomes and then to make appropriate simplifications, taking into account a structure of a vectors $\tilde{\alpha}(t), \alpha$.

It is shown also that the variation method allows to receive SC in relation to variable and constant parameters:

$$\delta I(\tilde{\alpha}, \alpha) = \sum_{t=0}^{N+1} \frac{\partial I(\tilde{\alpha}, \alpha)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} \delta \tilde{\alpha}(t) + \frac{\partial I(\tilde{\alpha}, \alpha)}{\partial \alpha} \delta \alpha. \quad (3)$$

$$\nabla_{\tilde{\alpha}(t)} I(\tilde{\alpha}, \alpha) = \left(\frac{\partial I(\tilde{\alpha}, \alpha)}{\partial \tilde{\alpha}_1(t)} \quad \dots \quad \frac{\partial I(\tilde{\alpha}, \alpha)}{\partial \tilde{\alpha}_{m_1}(t)} \right)^T, \quad t = 0, 1, 2, \dots, N, N+1,$$

$$\nabla_{\alpha} I(\tilde{\alpha}, \alpha) = \left(\frac{\partial I(\tilde{\alpha}, \alpha)}{\partial \alpha_1} \quad \dots \quad \frac{\partial I(\tilde{\alpha}, \alpha)}{\partial \alpha_{m_2}} \right)^T.$$

By obtaining of results the obvious designations:

$$\begin{aligned} f(t) &\equiv f(x(t), y(t), \tilde{\alpha}(t), \alpha, t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, N, \\ K(t, s) &\equiv K(t, x(s), y(s), \tilde{\alpha}(s), \alpha, s), \quad t = 0, 1, \dots, N, \quad s = 0, 1, \dots, t, \\ f_0(t) &\equiv f_0(x(t), y(t), \tilde{\alpha}(t), \alpha, t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, N+1. \end{aligned} \quad (4)$$

are used.

The index t in functions $f_0(x(t), y(t), \tilde{\alpha}(t), \alpha, t)$, indexes t, s in functions $K(t, x(s), y(s), \tilde{\alpha}(s), \alpha, s)$ and t in functions $f_0(x(t), y(t), \tilde{\alpha}(t), \alpha, t)$ also reflects not only obvious dependence on step number, but also that the kind of functions from a step to a step can change.

Let's receive the conjugate equations for calculation of Lagrange's multipliers and on the basis of them formulas for SC calculation.

2. Conjugate equations

The dynamic equations (1) (written down in the form of restrictions of equalities type) by means of Lagrange's multipliers $\lambda_x(t), \lambda_y(t)$ are added to an initial indicator of optimality $I(\tilde{\alpha}, \alpha)$. The size of the extended indicator of optimality always coincides with size initial functional on which judge an optimality

of work of system. SC for both functionals coincide also – section 4 of given paper see. Then for the received extended indicator we write down the first variation and the dynamic equations for $\lambda_x(t), \lambda_y(t)$ turn out from an additional conditions of equality to zero of the functions which are before variations of phase coordinates $\delta x(N+1), \dots, \delta x(1), \delta x(0), \delta y(N+1), \dots, \delta y(1), \delta y(0)$. Coefficients before variations of parameters $\delta \tilde{\alpha}(t), \delta \alpha$ in the first variation of the extended indicator I represent required SC (3).

Complement a quality functional (2) by restrictions-equalities (1) by means of Lagrange's multipliers $\lambda_x(t), \lambda_y(t), t = 0, 1, 2, \dots, N+1$ (column vectors) and get the extended functional:

$$\begin{aligned} I = I(\tilde{\alpha}, \alpha) + \sum_{t=0}^N \lambda_x^T(t+1) [-x(t+1) + f(t)] + \lambda_x^T(0) [-x(0) + x_0(\alpha)] + \\ + \sum_{t=0}^N \lambda_y^T(t+1) \left[-y(t+1) + \sum_{s=0}^t K(t, s) \right] + \lambda_y^T(0) [-y(0) + y_0(\alpha)] = \sum_{t=0}^N f_0(t) + f_0(N+1) - \\ - \lambda_x^T(N+1)x(N+1) + \sum_{t=0}^N \left[-\lambda_x^T(t)x(t) + \lambda_x^T(t+1)f_x(t) \right] + \lambda_x^T(0)x_0(\alpha) - \\ - \lambda_y^T(N+1)y(N+1) + \sum_{t=0}^N \left[-\lambda_y^T(t)y(t) \right] + \sum_{t=0}^N \sum_{s=0}^t \lambda_y^T(t+1)K(t, s) + \lambda_y^T(0)y_0(\alpha). \end{aligned} \quad (5)$$

Functional (5) is equal to $I(\tilde{\alpha}, \alpha)$ when (1) is fulfilled.

We consider equality [16]

$$\sum_{t=0}^N \sum_{s=0}^t \lambda_y^T(t+1)K(t, s) = \sum_{t=0}^N \sum_{s=t}^N \lambda_y^T(s+1)K(s, t).$$

The proof of correctness of equality is realized by an mathematical induction method.

Extended functional now becomes:

$$\begin{aligned} I = f_0(N+1) + \sum_{t=0}^N f_0(t) - \\ - \lambda_x^T(N+1)x(N+1) + \sum_{t=0}^N \left[-\lambda_x^T(t)x(t) + \lambda_x^T(t+1)f(t) \right] + \lambda_x^T(0)x_0(\alpha) - \\ - \lambda_y^T(N+1)y(N+1) + \sum_{t=0}^N \left[-\lambda_y^T(t)y(t) + \sum_{s=t}^N \lambda_y^T(s+1)K(s, t) \right] + \lambda_y^T(0)y_0(\alpha). \end{aligned} \quad (6)$$

We calculate the first variation of extended functional, caused by a variation of phase coordinates, and also a variation of variables and constant parameters:

$$\delta I = \sum_{t=0}^{N+1} \frac{\partial I}{\partial x(t)} \delta x(t) + \sum_{t=0}^{N+1} \frac{\partial I}{\partial y(t)} \delta y(t) + \sum_{t=0}^{N+1} \frac{\partial I}{\partial \tilde{\alpha}(t)} \delta \tilde{\alpha}(t) + \frac{\partial I}{\partial \alpha} \delta \alpha. \quad (7)$$

The factors standing in the formula (7) before variations of phase coordinates look like:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial x(N+1)} &= -\lambda_x^T(N+1) + \frac{\partial f_0(N+1)}{\partial x(N+1)}, \\ \frac{\partial I}{\partial x(t)} &= -\lambda_x^T(t) + \lambda_x^T(t+1) \frac{\partial f(t)}{\partial x(t)} + \sum_{s=t}^N \lambda_y^T(s+1) \frac{\partial K(s, t)}{\partial x(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial x(t)}, \quad t = N, N-1, \dots, 1, 0, \\ \frac{\partial I}{\partial y(N+1)} &= -\lambda_y^T(N+1) + \frac{\partial f_0(N+1)}{\partial y(N+1)}, \\ \frac{\partial I}{\partial y(t)} &= -\lambda_y^T(t) + \lambda_x^T(t+1) \frac{\partial f(t)}{\partial y(t)} + \sum_{s=t}^N \lambda_y^T(s+1) \frac{\partial K(s, t)}{\partial y(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial y(t)}, \quad t = N, N-1, \dots, 1, 0. \end{aligned} \quad (8)$$

We equate values (8) to zero and receive the conjugate equations for Lagrange's multipliers:

$$\begin{aligned} \lambda_x^T(N+1) &= \frac{\partial f_0(N+1)}{\partial x(N+1)}, \quad \lambda_y^T(N+1) = \frac{\partial f_0(N+1)}{\partial y(N+1)}, \\ \lambda_x^T(t) &= \lambda_x^T(t+1) \frac{\partial f(t)}{\partial x(t)} + \sum_t^{s=N} \lambda_y^T(s+1) \frac{\partial K(s,t)}{\partial x(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial x(t)}, \quad t = N, N-1, \dots, 1, 0; \\ \lambda_y^T(t) &= \lambda_y^T(t+1) \frac{\partial f(t)}{\partial y(t)} + \sum_t^{s=N} \lambda_y^T(s+1) \frac{\partial K(s,t)}{\partial y(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial y(t)}, \quad t = N, N-1, \dots, 1, 0. \end{aligned} \quad (9)$$

These equations are decided in the opposite direction changes of an independent integer variable t .

3. Sensitivity coefficients

SC in the equation (7) for variables and constant parameters look like:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \tilde{\alpha}(N+1)} &= \frac{\partial f_0(N+1)}{\partial \tilde{\alpha}(N+1)}, \\ \frac{\partial I}{\partial \tilde{\alpha}(t)} &= \frac{\partial f_0(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \lambda_x^T(t+1) \frac{\partial f(t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)} + \sum_t^{s=N} \lambda_y^T(s+1) \frac{\partial K(s,t)}{\partial \tilde{\alpha}(t)}, \quad t = N, N-1, \dots, 1, 0, \\ \frac{\partial I}{\partial \alpha} &= \frac{\partial f_0(N+1)}{\partial \alpha} + \\ &+ \sum_0^{t=N} \left[\frac{\partial f_0(t)}{\partial \alpha} + \lambda_x^T(t+1) \frac{\partial f(t)}{\partial \alpha} + \sum_t^{s=N} \lambda_y^T(s+1) \frac{\partial K(s,t)}{\partial \alpha} \right] + \lambda_x^T(0) \frac{dx_0(\alpha)}{d\alpha} + \lambda_y^T(0) \frac{dy_0(\alpha)}{d\alpha}. \end{aligned} \quad (10)$$

This result is more common in relation to appropriate results of monograph [13] and paper [16].

4. Equivalence of sensitivity coefficient for initial (2) and extended (5) functionals

We take extended functional (5):

$$\begin{aligned} I &= I(\tilde{\alpha}, \alpha) + \sum_{t=0}^N \lambda_x^T(t+1) [-x(t+1) + f(t)] + \lambda_x^T(0) [-x(0) + x_0(\alpha)] + \\ &+ \sum_{t=0}^N \lambda_y^T(t+1) \left[-y(t+1) + \sum_{s=0}^t K(t,s) \right] + \lambda_y^T(0) [-y(0) + y_0(\alpha)]. \end{aligned}$$

In brackets (before $\lambda_x^T(\cdot)$, $\lambda_y^T(\cdot)$) there are the dynamic equations of the object which have been written down in the form of the equality equations. Hence, values of functions in brackets are always equal to zero.

Let's calculate derivatives from both parts of the previous equations in the beginning on constant α parameters:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \alpha} &= \frac{\partial I(\tilde{\alpha}, \alpha)}{\partial \alpha} + \sum_{t=0}^N \lambda_x^T(t+1) \left[-W_\alpha^x(t+1) + \frac{\partial f(t)}{\partial x(t)} W_\alpha^x(t) + \frac{\partial f(t)}{\partial y(t)} W_\alpha^y(t) + \frac{\partial f(t)}{\partial \alpha} \right] + \\ &+ \lambda_x^T(0) \left[-W_\alpha^x(0) + \frac{dx_0(\alpha)}{d\alpha} \right] + \\ &+ \sum_{t=0}^N \lambda_y^T(t+1) \left[-W_\alpha^y(t+1) + \sum_{s=0}^t \left(\frac{\partial K(t,s)}{\partial x(s)} W_\alpha^x(s) + \frac{\partial K(t,s)}{\partial y(s)} W_\alpha^y(s) + \frac{\partial K(t,s)}{\partial \alpha} \right) \right] + \\ &+ \lambda_y^T(0) \left[-W_\alpha^y(0) + \frac{dy_0(\alpha)}{d\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Here $W_\alpha^x(t) = dx(t)/d\alpha$, $W_\alpha^y(t) = dy(t)/d\alpha$ there are the sensitivity functions.

Before $\lambda_x^T(\cdot), \lambda_y^T(\cdot)$ now there are sensitivity equations for a matrix of sensitivity functions. These equations are written down as in the form of the equality equations. Values of functions in brackets also are always equal to zero.

Hence, SC rather on α parameters both for initial functional and for its extended variant have identical values. That the sensitivity equations have the specified appearance, it is necessary for equations (1) to impose a condition of differentiability of $f(t)$ and $K(t,s)$ on phase coordinates and on considered parameters on the right member of equations of movement of dynamic object (1). On α parameters should be differentiated initial functions $x_0(\alpha)$ and $y_0(\alpha)$.

We receive the same result and for SC in relation to variable parameters. The sensitivity equations for each fixed value of argument of variable $\tilde{\alpha}(j)$, $j = 0, 1, \dots, N+1$ parameters have more difficult form. They demand special consideration. Important that these sensitivity equations objectively exist.

5. Example

We assume that the discrete model of object (1) is set in the form of two vector difference models are not connected with each other on phase coordinates:

$$x(t+1) = f(x(t), \tilde{\alpha}(t), \alpha, t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, N, \quad x(0) = x_0(\alpha), \quad (12)$$

$$y(t+1) = \sum_{s=0}^t K(t, y(s), \tilde{\alpha}(s), \alpha, s), \quad t = 0, 1, 2, \dots, N, \quad y(0) = y_0(\alpha).$$

However, both models are connected with each other of functional (2) and they can contain the general variables and constant parameters. The first model is similar to the numerical decision of the vector ordinary differential equation, and the second model has memory on phase coordinates and on variable parameters. This model is similar to the decision of the vector integrated equation of Volterra's type.

The conjugate equations (9) for Lagrange's multipliers become more simple:

$$\lambda_x^T(N+1) = \frac{\partial f_0(N+1)}{\partial x(N+1)}; \quad \lambda_x^T(t) = \lambda_x^T(t+1) \frac{\partial f(t)}{\partial x(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial x(t)}, \quad t = N, N-1, \dots, 1, 0;$$

$$\lambda_y^T(N+1) = \frac{\partial f_0(N+1)}{\partial y(N+1)}; \quad \lambda_y^T(t) = \sum_{s=t}^N \lambda_y^T(s+1) \frac{\partial K(s,t)}{\partial y(t)} + \frac{\partial f_0(t)}{\partial y(t)}, \quad t = N, N-1, \dots, 1, 0.$$

The equations (10) for SC do not change.

Conclusion

Variational method allowed to receive effective algorithms of SC calculation for multivariate nonlinear dynamic systems described by interconnected difference ordinary equations and difference equations with distributed memory on phase coordinates and variable parameters. Variables and constant parameters are present at object model and at a quality functional for systems.

In a basis of calculation of SC is the decision of the difference equations of object model in a forward direction of time and obtained difference equations for Lagrange's multipliers in the opposite direction of time. It is proved that both methods to calculation of SC (with use of Lagrange's functions or with use of sensitivity functions) yield the same result, but the first method it is essential more simple in the computing relation.

Variation method of calculation of SC allows to generalize it on dynamic systems described by more general nonlinear difference equations and characterized more general nonlinear functionals.

Results of present paper are applicable at design of high-precision systems and devices.

This paper continues research in [13, 16].

References

1. Ostrovsky, G.M. & Volin, Yu.M. (1967) *Metody optimizatsii khimicheskikh reaktorov* [Methods of Optimization of Chemical Reactors]. Moscow: Khimiya.
2. Rosenvasser, E.N. & Yusupov, R.M. (1969) *Chuvstvitel'nost' sistem avtomaticheskogo upravleniya* [Sensitivity of Automatic Control Systems]. Leningrad: Energiya.
3. Krutyko, P.D. (1969) Reshenie zadachi identifikatsii metodom teorii chuvstvitel'nosti [The decision of a identification problem by a sensitivity theory method]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 6. pp. 146–153.
4. Petrov, B.N. & Krutyko, P.D. (1970) Primenenie teorii chuvstvitel'nosti v zadachakh avtomaticheskogo upravleniya [Application of the sensitivity theory in automatic control problems]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 2. pp. 202–212.
5. Gorodetskiy, V.I., Zakharin, F.M., Rosenvasser, E.N. & Yusupov, R.M. (1971) *Metody teorii chuvstvitel'nosti v avtomaticheskoy upravlenii* [Methods of Sensitivity Theory in Automatic Control]. Leningrad: Energiya.
6. Bryson, A.E. & Ho, Ju-Chi. (1972) *Applied Theory of Optimal Control*. Moscow: Mir.
7. Speedy, C.B., Brown, R.F. & Goodwin, G.C. (1973) *Control Theory: Identification and Optimal Control*. Oliver & Boyd.
8. Gekher, K. (1973) *Teoriya chuvstvitel'nosti i dopuski elektronnykh skhem* [Theory of Sensitivity and Tolerances of Electronic Circuits]. Moscow: Sovetskoe radio.
9. Rouban, A.I. (1975) *Identifikatsiya nelineynykh dinamicheskikh ob"ektov na osnove algoritma chuvstvitel'nosti* [Nonlinear dynamic objects identification on the base of sensitivity algorithm]. Tomsk: Tomsk State University.
10. Rosenvasser, E.N. & Yusupov, R.M. (1977) *Problemy kibernetiki. Teoriya chuvstvitel'nosti i ee primeneniye* [Cybernetics problems. Sensitivity theory and its application]. Vol. 23. Moscow: Svyaz'.
11. Voronov, A.A. (1979) *Ustoychivost', upravlyaemost', nablyudaemost'* [Stability, Controllability, Observability]. Moscow: Nauka.
12. Rosenvasser, E.N. & Yusupov, R.M. (1981) *Chuvstvitel'nost' sistem upravleniya* [Sensitivity of Control Systems]. Moscow: Nauka.
13. Rouban, A.I. (1982) *Identifikatsiya i chuvstvitel'nost' slozhnykh sistem* [Identification and Sensitivity of Complex Systems]. Tomsk: Tomsk State University.
14. Haug, E.J., Choi, K.K. & Komkov, V. (1988) *Design sensitivity analysis of structural systems*. Moscow: Mir.
15. Afanasiev, V.N., Kolmanovskiy, V.B. & Nosov, V.R. (1998) *Matematicheskaya teoriya proektirovaniya sistem upravleniya* [The Mathematical Theory of Designing Control Systems]. Moscow: Vysshaya shkola.
16. Rouban, A.I. (2021) The sensitivity coefficients for dynamic systems described by difference equations with the distributed memory on phase coordinates and variable parameters. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 57. pp. 95–100. DOI: 10.17223/19988605/57/10

Information about the author:

Rouban Anatoly I. (Doktor of Technical Sciences, Professor of Computer Science Department of Institute of Space and Information Technologies, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation). E-mail: ai-rouban@mail.ru

The author declares no conflicts of interests.

Информация об авторе:

Рубан Анатолий Иванович – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры информатики Института космических и информационных технологий Сибирского федерального университета (Красноярск, Россия). E-mail: ai-rouban@mail.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию 21.11.2021; принята к публикации 30.05.2022

Received 21.11.2021; accepted for publication 30.05.2022

Научная статья

УДК 004.932.2

doi: 10.17223/19988605/59/8

Сравнение алгоритма кратномасштабного анализа изображений в частотной области с алгоритмом Малла

Владимир Ильич Семенов*Чувашский государственный университет, Чебоксары, Россия, syundyukovo@yandex.ru*

Аннотация. Выполнено сравнение алгоритма кратномасштабного анализа (КМА) изображений в частотной области с алгоритмом Малла. В алгоритме Малла используются масштабные коэффициенты, кратные двум, и вычисление производится итеративно с двукратным прореживанием вейвлет-коэффициентов при каждом последующем разложении. Этот алгоритм также называется быстрым дискретным вейвлет-преобразованием (ВП). В алгоритме КМА в частотной области для увеличения скорости вычисления применяется быстрое преобразование Фурье (БПФ). Вейвлет-коэффициенты вычисляются не итеративно: для каждого уровня они получаются из сигнала независимо от предыдущих уровней, и кратность анализа может быть меньше двух. Уменьшение кратности позволяет увеличить глубину декомпозиции. В отличие от алгоритма Малла применяются симметричные или антисимметричные ортогональные вейвлеты, что повышает точность реконструкции. Изображение обрабатывается не по строкам и столбцам, а прогрессивной разверткой в целом. Применение БПФ уменьшает время преобразования изображений на четыре порядка по сравнению прямым численным интегрированием, и за счет этого время декомпозиции и реконструкции не больше по сравнению с временем дискретного ВП и может быть меньше.

Ключевые слова: вейвлет-преобразование; декомпозиция; реконструкция; кратномасштабный анализ; алгоритм Малла; амплитудно-частотная характеристика; фильтр

Для цитирования: Семенов В.И. Сравнение алгоритма кратномасштабного анализа изображений в частотной области с алгоритмом Малла // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 59. С. 73–82. doi: 10.17223/19988605/59/8

Original article

doi: 10.17223/19988605/59/8

Comparison of the algorithm of multiscale image analysis in the frequency domain with the Mall algorithm

Vladimir I. Semenov*Chuvash State University, Cheboksary, Russian Federation, syundyukovo@yandex.ru*

Abstract. This paper compares the algorithm for multiplescale analysis of images in the frequency domain with the Mall algorithm. The Mall algorithm uses scaling factors multiple of 2 and computation is performed iteratively with twofold thinning of the wavelet coefficients at each subsequent decomposition. This algorithm is also called fast discrete wavelet transform. The frequency domain multiplexing algorithm uses the fast Fourier transform (FFT) to increase computational speed. The wavelet coefficients are not calculated iteratively, but for each level they are obtained from the signal independently of the previous levels and the multiplicity of analysis can be less than 2. Reducing the multiplicity allows increasing the decomposition depth. In contrast to Mall's algorithm, symmetric or antisymmetric orthogonal wavelets are used, which increases the accuracy of reconstruction. The image is processed not by rows and columns, but by progressive sweep as a whole. Application of FFT reduces the image transformation

time by four orders of magnitude compared to the direct numerical integration, and due to this the decomposition and reconstruction time is not longer compared to the discrete wavelet transform time and can be less.

Keywords: wavelet transform; decomposition; reconstruction; multiscale analysis; Mall's algorithm; amplitude-frequency response; filter

For citation: Semenov, V.I. (2022) Comparison of the algorithm of multiscale image analysis in the frequency domain with the Mall algorithm. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 59. pp. 73–82. doi: 10.17223/19988605/59/8

Вейвлет-анализ является эффективным инструментом исследования локальных свойств нестационарных сигналов. Базисные функции, называемые вейвлетами, обладают свойством частотно-временной локализации, и сам анализ называется частотно-временным. Аналогом частоты для вейвлет-преобразования является обратная величина масштабного коэффициента. В настоящее время для кратномасштабного анализа (КМА) сигналов используется алгоритм Малла – быстрый способ вычисления дискретного вейвлет-преобразования (ВП) [1]. КМА – это m -шаговое дискретное ВП. Максимальное значение m называется глубиной декомпозиции (разложения). У алгоритма Малла есть недостатки:

1. Необходимо иметь масштабирующую функцию.
2. Амплитудно-частотная характеристика вейвлетов неравномерна.
3. Вейвлеты несимметричны или антисимметричны.
4. Коэффициент изменения масштаба меняется только с кратностью 2.
5. Точность вычисления уменьшается с увеличением уровня разложения, так как при каждом уровне декомпозиции длина выборки уменьшается в 2 раза.
6. Не используется прогрессивная развертка изображения при кратномасштабном анализе.
7. Необходимо решать много уравнений для конструирования вейвлетов больших порядков.

Для устранения этих недостатков актуально использование КМА в частотной области. Преимуществом алгоритма в частотной области является еще и способ вычисления. Если для определения вейвлет-коэффициентов последующего уровня в алгоритме Малла необходимо вычислить предыдущие вейвлет-коэффициенты, то в частотной области можно параллельно вычислять все вейвлет-коэффициенты. На аппаратном уровне это можно сделать, используя много устройств быстрого преобразования Фурье (БПФ), соединенных параллельно, тем самым уменьшив во много раз время КМА. Исходя из таких предположений, сравниваются алгоритм Малла и алгоритм КМА в частотной области.

Для исследования нестационарных сигналов кроме ВП применяются и другие преобразования. Самое известное из них – оконное преобразование Фурье (ОПФ), когда сигнал разлагается в спектр с использованием БПФ на участках (окнах), намного меньших длительности самого сигнала [2]. Таким образом добиваются улучшения временного разрешения, т.е. того момента, когда произошло изменение частоты сигнала. При использовании ОПФ узкое окно обладает лучшим временным разрешением, широкое окно – лучшим частотным разрешением. Проблема состоит в том, что приходится выбирать фиксированное окно для всего сигнала, тогда как разные участки сигнала могут требовать применения разных окон. ОПФ покрывает плоскость время–частота прямоугольниками с неизменным разрешением по времени и частоте на всех участках, а для исследования реальных сигналов необходимо разбить плоскость время–частота прямоугольниками с разным разрешением по времени и частоте на разных участках. Около резких изменений сигнала окна должны быть узкими, а в остальной области можно использовать более широкие окна. Как раз ВП имеет хорошее разрешение по времени и плохое разрешение по частоте на высоких частотах, а на низких частотах – хорошее разрешение по частоте и плохое разрешение по времени. Когда сигнал имеет высокочастотные компоненты короткой длительности и низкочастотные компоненты протяженной длительности, использование ВП наиболее эффективно. ВП анализирует сигнал на различных частотах и с различным разрешением одновременно.

Разновидностями ОПФ также являются преобразование (метод) Прони [3], когда применяется разложение сигнала на экспоненциально затухающие синусы или косинусы, и другие методы, использующие полиномы Чебышева, Кравчука, Шарлье и гибриды Кравчука–Чебышева [4, 5]. Затухающие экспоненциально синусы имеют перекрывающиеся широкие частотные характеристики, и разложение является неортогональным. Другие методы также основаны на вычислениях во временной области, используют рекуррентные соотношения и требуют много времени для полиномов большого порядка. Из-за того, что свойство локализации хуже, чем для ВП, равно как для ОПФ и других преобразований, эти преобразования в данной работе не сравниваются с алгоритмом КМА в частотной области.

Целью работы является сравнение алгоритма кратномасштабного анализа сигналов в частотной области с алгоритмом Малла с точки зрения применяемых вейвлетов, глубины декомпозиции, скорости и точности вычисления. В ходе исследования сконструированы симметричные и антисимметричные вейвлеты, которые позволили увеличить точность реконструкции изображений, уменьшить время преобразования.

1. Алгоритм Малла

С. Малла в своем алгоритме использовал идеи субполосного (пирамидального) кодирования речевого сигнала. При таком кодировании сигнал пропускается через древовидное соединение высокочастотных и низкочастотных фильтров (ВЧ- и НЧ-фильтры; квадратурно-зеркальные фильтры (КЗФ)). Самый простой способ ВП – это использование простейшей масштабирующей (скейлинг) функции и вейвлета Хаара, когда КЗФ получаются за счет суммирования и разности соседних отсчетов сигнала. Суммирование эквивалентно пропусканию через НЧ-фильтр, а разность – через ВЧ-фильтр. Используя более сложные вейвлеты, такие как вейвлеты Добеши n -го порядка, вычисляют взвешенные суммы и взвешенные разности, т.е. свертку сигнала с импульсной характеристикой (ИХ) ВЧ- и НЧ-фильтров, и получаются детализирующие коэффициенты и коэффициенты аппроксимации после децимации каждого 2-го отсчета. На рис. 1 представлена схема разложения сигнала. Данное разложение можно повторить несколько раз для дальнейшего увеличения частотного разрешения с дальнейшим прореживанием коэффициентов после НЧ- и ВЧ-фильтрации. Такое разложение можно представить в виде двоичного дерева, где листья и узлы соответствуют пространствам с различной частотно-временной локализацией. На рис. 2 представлено это дерево. После первого разложения все вычисления производятся с детализирующими коэффициентами и коэффициентами аппроксимации итеративно. Обратное ВП вычисляется в обратном порядке с интерполяцией коэффициентов.

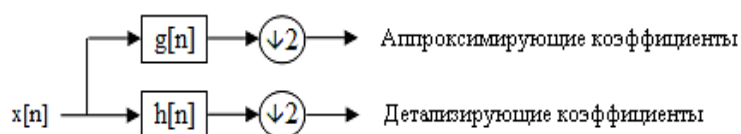


Рис. 1. Схема разложения сигнала при дискретном вейвлет-преобразовании
Fig. 1. Signal decomposition scheme for discrete wavelet transform

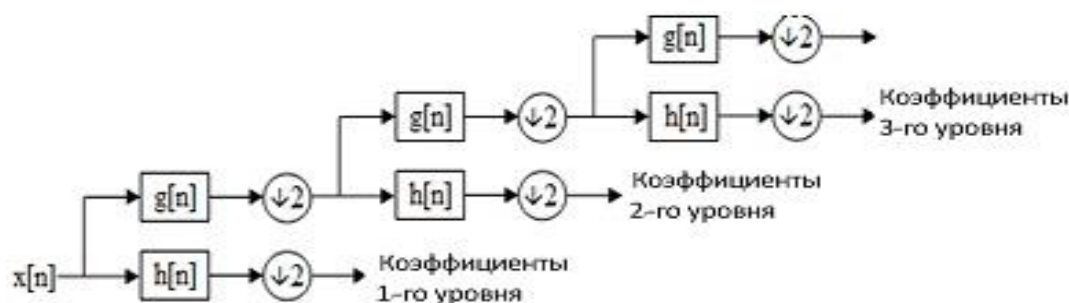


Рис. 2. Трехуровневый банк фильтров
Fig. 2. Three-level filter bank

Разложение функций на вейвлетные ряды на заданном уровне разрешения для дискретного ВП выполняется по формуле

$$x(t) = \sum_k C_{m,k} \varphi_{m,k}(t) + \sum_{m,k} D_{m,k} \psi_{m,k}(t),$$

где $\psi_{m,k}(t)$ – вейвлет, $\varphi_{m,k}(t)$ – скейлинг-функция, $D_{m,k}$, $C_{m,k}$ – детализирующие и аппроксимирующие коэффициенты.

В результате преобразования сигнал декомпозируется на разные частотные области, которые представлены на рис. 3. Каждая область в два раза шире предыдущей частотной области с увеличением масштабного коэффициента. Так как амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) фильтров неидеальные, происходит наложение спектров.

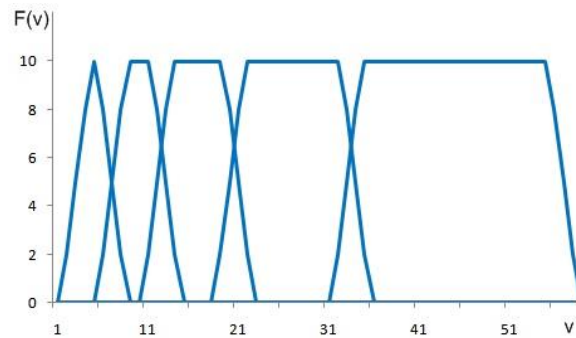


Рис. 3. Спектры разного масштабного коэффициента

Fig. 3. Spectra of different scale coefficients

Для того чтобы преобразовать изображение, каждая его строка по схеме, представленной на рис. 1, декомпозируется, потом полученные коэффициенты по такой же схеме вычисляются по столбцам (сепарабельное преобразование), и процесс повторяется до максимальной глубины разложения [1, 6–8].

2. Алгоритм прямого и обратного ВП в частотной области

Для вычисления вейвлет-спектра сигнала на основе производных функции Гаусса и вейвлетов, сконструированных в частотной области, используется формула непрерывного ВП:

$$W(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad (1)$$

где a – масштабный коэффициент вейвлета, b – параметр сдвига. С разными масштабными коэффициентами скейлинг-функция не используется. Такое преобразование эквивалентно прохождению сигнала через полосовые фильтры в разном диапазоне частот. Для вычисления ВП прямым численным интегрированием необходимо много времени, поэтому вейвлет-спектр вычисляется в частотной области с применением БПФ. Чтобы вычислить ВП сигнала в частотной области, необходимо получить Фурье-спектры сигнала и вейвлета для разных масштабных коэффициентов a , найти комплексно сопряженный спектр и обратным преобразованием Фурье комплексно сопряженных спектров получить вейвлет-спектр сигнала. Алгоритм численного вычисления прямого непрерывного быстрого ВП сигнала $S(t)$ по формуле (1) в частотной области представлен в работе [9].

Подобно обратному ПФ существует обратное непрерывное ВП:

$$S(t) = C_{\psi}^{-1} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) W(a,b) \frac{dad b}{a^{3+k}}, \quad (2)$$

где C_{ψ} – нормализующий коэффициент:

$$C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} |F_{\psi}(\omega)|^2 \cdot \omega^{-1} d\omega < \infty,$$

$F_{\psi}(\omega)$ – Фурье-спектр базисной функции, параметр k – показатель степени масштабного множителя (параметр k может быть отрицательным).

Алгоритм численного вычисления обратного непрерывного быстрого ВП сигнала $S(t)$ по формуле (2) в частотной области представлен в работе [10]. Для декомпозиции изображения прогрессивной разверткой в целом по горизонтали вертикали считаются пиксели и вычисляются вейвлет-коэффициенты в частотной области. Также вычисляются вейвлет-коэффициенты в частотной области для вертикальной прогрессивной развертки. Реконструкция происходит в обратном направлении. КМА изображения получается суммированием разных уровней. В зависимости от количества учитываемых уровней одномерный или двумерный сигнал можно представить в виде последовательных приближений от грубого до наилучшего приближения. Можно сигнал исследовать и в обратном порядке: суммировать от самых мелких деталей до самых больших, а также можно суммировать разные уровни в разной комбинации.

3. Конструирование вейвлетов в частотной области

В работе [11] отмечено: «Для практики желательно было бы иметь ортогональные симметричные и асимметричные вейвлеты, но таких идеальных вейвлетов не существует». Действительно, для дискретного ВП нет ортогональных симметричных и антисимметричных вейвлетов. Про непрерывное ВП пишут: «Грубые вейвлеты обладают минимумом свойств, которыми должны обладать вейвлеты, обеспечивающие полноценные возможности в технике преобразования сигналов: анализ не является ортогональным, возможность реконструкции не гарантирована, быстрые алгоритмы преобразований и точная реконструкция невозможны».

С использованием алгоритмов непрерывного ВП в частотной области ортогональные симметричные и антисимметричные вейвлеты сконструировать можно, быстрые алгоритмы возможны, можно точно реконструировать сигнал.

Вейвлеты и ИХ фильтров тесно взаимосвязаны. Вейвлеты с самым большим масштабным коэффициентом являются фильтрами нижних частот, со средним значением масштабного коэффициента – полосовыми фильтрами, а с самым меньшим значением масштабного коэффициента – фильтрами верхних частот. Можно заметить, что конструирование ортогональных симметричных и антисимметричных вейвлетов – это синтез цифровых фильтров с прямоугольной амплитудно-частотной характеристикой и линейной фазочастотной характеристикой (ФЧХ). В научной литературе по цифровым фильтрам на основе критерия Пэли–Винера (Пели–Виннера) доказывалось, что фильтры с прямоугольной АЧХ физически нереализуемы. Также отмечается, что прямоугольные АЧХ приводят к пульсациям слева и справа от частоты среза и появлению переходной полосы (явление Гиббса). Объясняется это усечением ряда Фурье. Объясняют явление Гиббса, используя свойство свертки.

В теории обобщенного преобразования Фурье (ПФ) доказывалось, что вейвлеты ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю. Исследования показывают: чем меньше наложение спектров вейвлетов для разных масштабных коэффициентов, тем меньше их скалярное произведение. В частотной области это утверждение соответствует тому, что произведение спектров этих вейвлетов равно нулю, т.е. спектры не должны накладываться друг на друга, как показано на рис. 3. Спектры должны быть расположены так, как на рис. 4. При декомпозиции и последующей реконструкции сигнал можно точно восстановить лишь тогда, когда АЧХ вейвлетов будут прямоугольными, имеющими одинаковый коэффициент усиления, но разный диапазон частот в полосе пропускания, чтобы была постоянная добротность. Все другие АЧХ, другой формы, образуют в наборе неравномерную АЧХ блока фильтров. Вейвлеты на основе производных функции Гаусса (грубые вейвлеты) имеют меньшее значение скалярного произведения, если порядок производной больше. Спектры этих вейвлетов уже, наложения меньше, и реконструкция сигнала точнее. Хотя про дискретные вейвлеты пишут, что они ортогональны, на самом деле это не совсем так, потому что спектры всех таких вейвлетов перекрываются, как представлено на рис. 3. Это и нелинейные ФЧХ приводят к искажению реконструированного сигнала. Алгоритм позволяют производить КМА изображений в частотной области не

только с коэффициентом изменения масштаба, равным 2, но и с кратностью меньше 2. Переход в частотную область позволяет конструировать вейвлеты с заданными свойствами, которые невозможно получить во временной области.

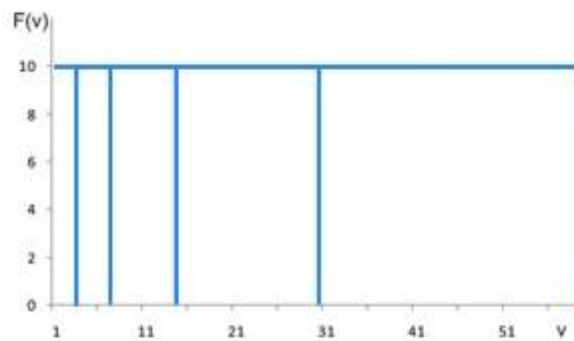


Рис. 4. Спектры разного масштабного коэффициента
Fig. 4. Spectra of different scale coefficients

В ходе исследований были сконструированы ортогональные симметричные и антисимметричные вейвлеты. На рис. 5 представлен один из подобных вейвлетов. Скалярное произведение таких вейвлетов равно нулю. Только для вейвлетов с одинаковыми масштабными коэффициентами скалярное произведение не равно нулю. На рис. 6 представлена АЧХ вейвлета в децибелах. Видно, что в полосе задерживания ослабление около 300 дБ, что сравнимо с погрешностью вычисления. На АЧХ нет никаких пульсаций в полосе пропускания.

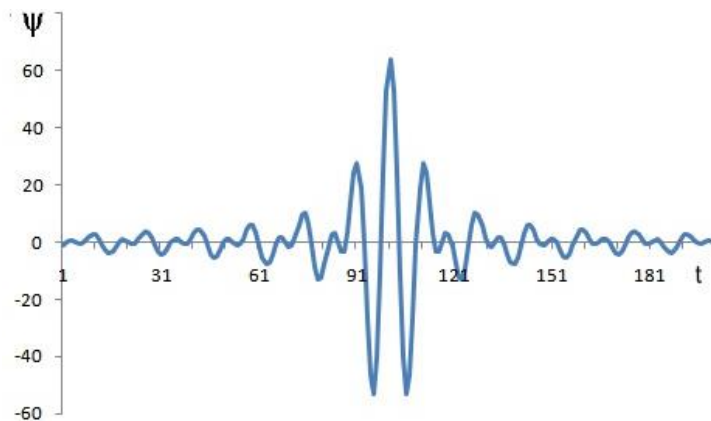


Рис. 5. Ортогональный симметричный вейвлет
Fig. 5. Orthogonal symmetric wavelet

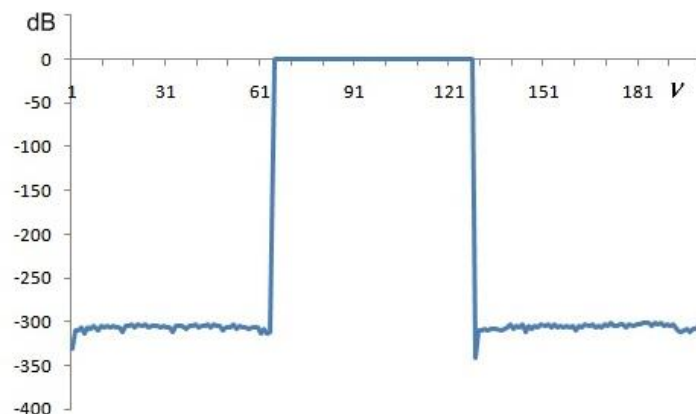


Рис. 6. АЧХ симметричного ортогонального вейвлета в децибелах
Fig. 6. Frequency response of symmetric orthogonal wavelet in decibels

На рис. 7 представлена АЧХ вейвлета. Видно, что нет переходной полосы. Ковариационная матрица для такого вейвлет-преобразования диагональная. Ковариационная матрица для вейвлетов на основе производных функции Гаусса недиагональная, так как АЧХ непрямоугольная. Если ковариационная матрица имеет диагональный вид, то вейвлеты разных уровней декомпозиции ортогональны. Это подобно ортогональному преобразованию Карунена–Лоэва, приводящему ковариационную матрицу к диагональному виду. Использование преобразования Карунена–Лоэва для больших последовательностей нецелесообразно, так как нет быстрых алгоритмов его вычисления.

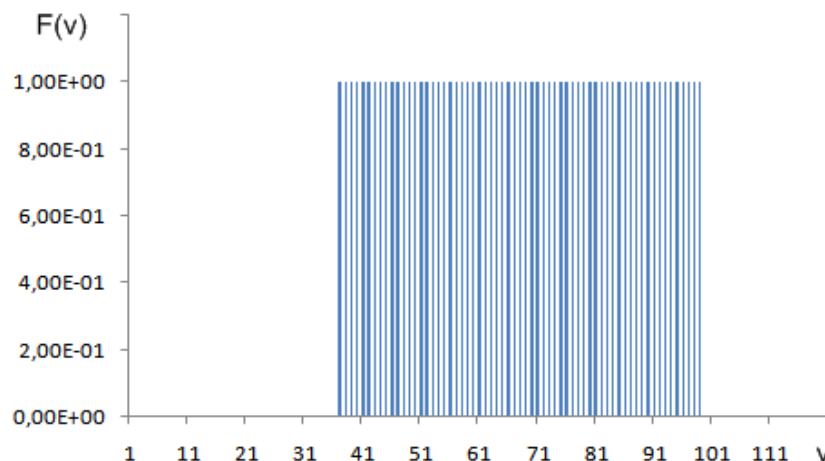


Рис. 7. АЧХ симметричного ортогонального вейвлета
Fig. 7. Frequency response of a symmetric orthogonal wavelet

На рис. 8 представлена АЧХ фильтров верхних частот (см. пример 4.17 из [12. С. 142].), синтезированных во временной и частотной областях в децибелах (логарифмический масштаб). Коэффициенты ИХ фильтра, синтезированного во временной области, вычислены по формуле

$$b_{N+k} = \frac{1}{N+1} \sum_{j=\frac{N+1}{2}}^N \cos\left(\frac{\pi k(j+0,5)}{N+1}\right).$$

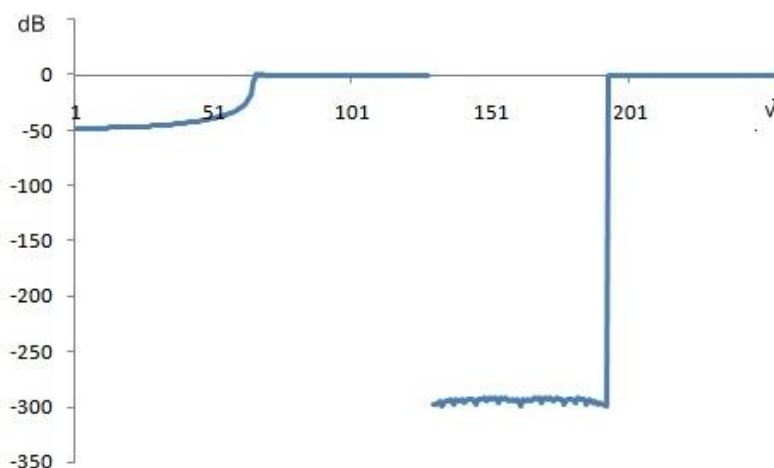


Рис. 8. АЧХ фильтра верхних частот, синтезированного во временной и частотной областях в децибелах
Fig. 8. Frequency response of the high-pass filter synthesized in the time and frequency domains in decibels

До частоты 128 единиц представлена частотная характеристика фильтра, синтезированного во временной области, а от 129 до 256 единиц – фильтра, синтезированного в частотной области методом конструирования ортогональных вейвлетов. На рис. 8 отчетливо видно, как сильно отличаются частотные характеристики этих фильтров при сопоставлении их в одинаковом масштабе. Для фильтра, синтезированного во временной области, также наблюдается явление Гиббса. Можно сказать,

что вейвлеты, или цифровые фильтры, полученные в частотной области, имеют идеальную АЧХ в пределах погрешности вычисления. Если в критерии Пэли–Винера модуль частотной передаточной функции не равен нулю, но меньше погрешности вычисления, то интеграл не расходится. В связи с выполнением условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|K(i\omega)||}{1+\omega^2} d\omega < \infty$$

можно сказать, что сконструированные вейвлеты не противоречат критерию Пэли–Винера, а явление Гиббса не наблюдается.

4. Результаты сравнения кратномасштабного анализа изображений с использованием алгоритма Малла и алгоритма в частотной области

Сконструированные вейвлеты применялись для декомпозиции и реконструкции изображений. Реконструированные изображения ничем не отличаются от оригинальных изображений и лучше, чем для алгоритма Малла. Вейвлеты с прямоугольной АЧХ позволили уменьшить время вычисления прямого ВП в частотной области в 2 раза по сравнению с использованием вейвлетов на основе производных функции Гаусса. Такие вейвлеты дали возможность уменьшить время вычисления обратного ВП сигнала с размером выборки 32 768 и 262 144 отсчетов в 260 и 5 000 раз соответственно по сравнению с алгоритмом с использованием БПФ. Конструирование симметричных и антисимметричных вейвлетов с прямоугольной АЧХ позволило обратное ВП вычислять не менее чем в 10 млн раз быстрее по сравнению с прямым численным интегрированием. Профилировка проводилась для процессора Celeron® с частотой 2,54 ГГц, ОЗУ 1 Гб.

Для сравнения с традиционным преобразованием Малла для обработки изображений масштабный коэффициент a также был выбран равным 2. На рис. 9, a представлено цветное изображение размером 512×512 пикселей (оригинал). На рис. 9, b представлено изображение, реконструированное с применением алгоритма КМА в частотной области. На рис. 9, c представлено это же изображение, реконструированное с применением алгоритма Малла. Для данного изображения вычисление проведено при помощи пакета прикладных программ MatLab. Уровней декомпозиции для алгоритма Малла – 9. Видно, что при реконструкции изображения с использованием алгоритма в частотной области все цвета сохраняются, и реконструированное изображение не отличается на глаз. При использовании алгоритма, вычисляющего ВП в частотной области, мозаичность при аппроксимации изображения не проявляется.



Рис. 9. Реконструкция изображения
Fig. 9. Image reconstruction (Synthesized Image)

На рис. 10, a представлено то же изображение, реконструированное с аппроксимирующими коэффициентами четвертого уровня для алгоритма в частотной области. Использован вейвлет на основе производной функции Гаусса 2-го порядка (МНАТ-вейвлет). Глубина разложения равна 18.



Рис. 10. Реконструкция изображения с аппроксимирующими коэффициентами четвертого уровня

Fig. 10. Reconstruction of the image with approximating coefficients of the fourth level

На рис. 10, *b* представлено реконструированное изображение с аппроксимирующими коэффициентами четвертого уровня для алгоритма Малла. Использован вейвлет Добеши db2. При этом хорошо видна мозаичность. Реконструкция изображения с детализирующими коэффициентами при использовании алгоритма в частотной области также дает более четкое изображение, чем в системе компьютерной математики MatLab.

Заключение

Качество реконструированного изображения в случае реализации алгоритма Малла намного хуже. При увеличении порядка вейвлета (dbN) мозаичность уменьшается, однако качество изображения при этом остается существенно худшим по сравнению с результатами при применении вейвлетов на основе производных функции Гаусса и вейвлетов, сконструированных в частотной области. При реконструкции изображения с использованием всех уровней в MatLab многие цвета теряются, при применении же алгоритма в частотной области цветовая гамма сохраняется, реконструированное изображение не отличается от оригинала.

Конструирование вейвлетов в частотной области позволяет получать максимально возможное число начальных нулевых моментов для данной выборки. Для их получения во временной области необходимо решение системы с таким же числом уравнений, более нескольких сотен. Вейвлеты с большим числом начальных нулевых моментов являются основой концентрации информации о сигнале в немногих значимых вейвлет-коэффициентах и служат, таким образом, основой повышения коэффициента сжатия сигналов.

КМА в частотной области является более предпочтительным по сравнению с дискретным ВП, так как вейвлеты на основе производных функции Гаусса и вейвлеты, сконструированные в частотной области, имеют линейную ФЧХ. Кроме того, вейвлеты, сконструированные в частотной области, имеют прямоугольную АЧХ. В связи с этим точность реконструкции сигналов повышается, т.е. преобразование при этом является строго ортогональным. Метод конструирования вейвлетов в частотной области можно использовать для синтеза цифровых фильтров, в том числе и многополосных. Оптимальные (по Чебышеву) фильтры с конечной импульсной характеристикой в настоящее время синтезируются методами, требующими больших вычислительных затрат.

Разработанные алгоритмы прямого и обратного ВП в частотной области с использованием БПФ позволили уменьшить время преобразования изображений на 4 порядка по сравнению прямым численным интегрированием с применением вейвлетов на основе производных функции Гаусса. А использование вейвлетов, сконструированных в частотной области, позволило уменьшить время обратного ВП на 6 порядков по сравнению прямым численным интегрированием. Разработанные алгоритмы прямого и обратного ВП позволяют производить КМА изображений с кратностью, меньшей 2, тем самым разрешающая способность вейвлетов увеличивается, так как увеличивается добротность.

Список источников

1. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов : пер. с англ. М. : Мир, 2005. 671 с.
2. Новиков Л.В. Основы вейвлет-анализа сигналов. М. : ИАН РАН, 1999. 152 с.
3. Митрофанов Г., Прийменко В. Основы и приложения метода Прони-фильтрации // Технологии сейсморазведки. 2011. № 3. С. 93–108.
4. Mahmmoud B.M., Abdul-Hadi A.M., Abdhussain S.H., Hussien A. On computational aspects of Krawtchouk polynomials for high orders // J. Imag. 2020. V. 6, № 8. P. 81.
5. Abdhussain S.H., Ramli A.R., Mahmmoud B.M., Saripan M.I., Al-Haddad S.A.R., Jassim W.A. A new hybrid form of Krawtchouk and Tchebichef polynomials: Design and application // J. Math. Imag. Vis. 2019. V. 61, № 4. P. 555–570.
6. Дремин И.Л., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их использование // УФН. 2001. Т. 171, № 5. С. 465–501.
7. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.–Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 464 с.
8. Столниц Э., Де Роуз Е., Салезин Д. Вейвлеты в компьютерной графике. М.–Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2002. 271 с.
9. Семенов В.И., Михеев К.Г., Шурбин А.К., Михеев Г.М. Фильтрация изображений, полученных с помощью оптического микроскопа, с применением кратномасштабного анализа // Химическая физика и мезоскопия. 2014. Т. 16, № 3. С. 399–404.
10. Семенов В.И., Шурбин А.К., Михеев К.Г., Михеев Г.М. Конструирование ортогональных вейвлетов в частотной области для кратномасштабного анализа сигналов // Химическая физика и мезоскопия. 2018. Т. 20, № 2. С. 230–238.
11. Шумарова О.С., Игнатьев С.А. Оптимальный выбор вида вейвлета при обработке сигнала с вихретокового датчика // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2013. № 4 (73). С. 128–132.
12. Умняшкин С.В. Теоретические основы цифровой обработки и представления сигналов. М. : ФОРУМ–ИНФРА-М, 2009. 302 с.

References

1. Malla, S. (2005) *Veyvlety v obrabotke signalov* [Wavelets in signal processing]. Translated from English. Moscow: Mir.
2. Novikov, L.V. (1999) *Osnovy veyvlet-analiza signalov* [Fundamentals of Wavelet Analysis of Signals]. Moscow: RAS.
3. Mitrofanov, G. & Priymenko, V. (2011) Basics and applications of the prony filtration method. *Tekhnologii seysmorazvedki – Technologies of Seismic Exploration*. 3. pp. 93–108.
4. Mahmmoud, B.M., Abdul-Hadi, A.M., Abdhussain, S.H. & Hussien, A. (2020) On computational aspects of Krawtchouk polynomials for high orders. *Journal of Imaging*. 6(8). p. 81.
5. Abdhussain, S.H., Ramli, A.R., Mahmmoud, B.M., Saripan, M.I., Al-Haddad, S.A.R. & Jassim, W.A. (2019) A new hybrid form of Krawtchouk and Tchebichef polynomials: Design and application. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. 61(4). pp. 555–570.
6. Dremmin, I.L., Ivanov, O.V. & Nechitaylo, V.A. (2001) *Veyvlety i ikh ispol'zovanie* [Wavelets and their use]. *Uspekhi fizicheskikh nauk – Advances in Physical Sciences*. 171(5). pp. 465–501.
7. Dobeshi, I. (2001) *Desyat' lektiy po veyvletam* [Ten Lectures on Wavelets]. Moscow; Izhevsk: Regul'yarnaya i khaoticheskaya dinamika.
8. Stolnits, E., De Rose, E. & Salezin, D. (2002) *Veyvlety v komp'yuternoy grafike* [Wavelets in Computer Graphics]. Moscow; Izhevsk: Regul'yarnaya i khaoticheskaya dinamika.
9. Semenov, V.I., Mikheev, K.G., Shurbin, A.K. & Mikheev, G.M. (2014) Filtration of images obtained using an optical microscope using multiple-scale analysis. *Khimicheskaya fizika i mezoskopiya – Chemical Physics and Mesoscopy*. 16(3). pp. 399–404.
10. Semenov, V.I., Shurbin, A.K., Mikheev, K.G. & Mikheev, G.M. (2018) Designing orthogonal wavelets in the frequency domain for multiscale signal analysis. *Khimicheskaya fizika i mezoskopiya – Chemical Physics and Mesoscopy*. 20(2). pp. 230–238.
11. Shumarova, O.S. & Ignatiev, S.A. (2013) Optimum choice of a wavelet when processing signals of eddy current sensors. *Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Bulletin of SSTU*. 4(73). pp. 128–132.
12. Umnyashkin, S.V. (2009) *Teoreticheskie osnovy tsifrovoy obrabotki i predstavleniya signalov* [Theoretical Foundations of Digital Signal Processing and Representation]. Moscow: FORUM–INFRA-M.

Информация об авторе:

Семенов Владимир Ильич – кандидат технических наук, доцент кафедры общей физики факультета прикладной математики, физики и информационных технологий Чувашского государственного университета (Чебоксары, Россия). E-mail: syundyukovo@yandex.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Information about the author:

Semenov Vladimir I. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of General Physics, Chuvash State University, Cheboksary, Russian Federation). E-mail: syundyukovo@yandex.ru

The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 06.11.2021; принята к публикации 30.05.2022

Received 06.11.2021; accepted for publication 30.05.2022

Original article

doi: 10.17223/19988605/59/9

Non-asymptotic Confidence Estimation of the Autoregressive Parameter in AR(1) Process by Noisy Observations

Sergey E. Vorobeychikov¹, Andrey V. Pupkov²

^{1,2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ sev@mail.tsu.ru

² andrewpupkov@gmail.com

Abstract. For parameter in an AR(1) process corrupted by noise, the paper proposes the construction of confidence interval for unknown parameter with a prescribed coverage probability. The noises both in observable and in unobservable processes are assumed to be Gaussian with unknown variance. The estimation procedure is non-asymptotic and uses a special stopping rule. The results of numerical simulation by Monte-Carlo method are presented.

Keywords: autoregressive process; non-asymptotic estimation; confidence interval

For citation: Vorobeychikov, S.E., Pupkov, A.V. (2022) Non-asymptotic confidence estimation of the autoregressive parameter in AR(1) process by noisy observations. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 59. pp. 83–90. doi: 10.17223/19988605/59/9

Научная статья

УДК 519.246.2

doi: 10.17223/19988605/59/9

Доверительное неасимптотическое оценивание параметра авторегрессии AR(1) по зашумленным данным

Сергей Эрикович Воробейчиков¹, Андрей Викторович Пупков²

^{1,2} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ sev@mail.tsu.ru

² andrewpupkov@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача построения доверительного интервала неизвестного параметра процесса авторегрессии первого порядка, зашумленного аддитивным шумом. Предполагается, что управляющий шум процесса и шум в канале наблюдений – гауссовские с неизвестными дисперсиями. Построенная процедура является неасимптотической и опирается на специальное правило остановки наблюдений. В статье приводятся результаты численного моделирования, реализованного методом Монте-Карло.

Ключевые слова: процесс авторегрессии; неасимптотическое оценивание; доверительный интервал

Для цитирования: Воробейчиков С.Э., Пупков А.В. Доверительное неасимптотическое оценивание параметра авторегрессии AR(1) по зашумленным данным // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 59. С. 83–90. doi: 10.17223/19988605/59/9

In many applications related to signal processing the linear models specified by stochastic difference equations are widely used. To identify unknown parameters in such models the methods of least squares

(LSE), maximum likelihood and other have been developed. The properties of the estimators are studied usually in asymptotic when the number of observations tends to infinity. For an autoregressive process the asymptotic properties of the LSE have been studied in [1]. To overcome the problems of investigation the properties of the estimators obtained by a fixed number of observations the sequential methods were developed. Sequential procedures use the sampling schemes with random stopping times. It allows one to study the properties of the estimators. The sequential sampling scheme was proposed in works [2] and [3] to estimate the parameter of a first order autoregressive process

$$x_k = \theta x_{k-1} + \varepsilon_k, \quad k=1, 2, \dots$$

The estimator in [2] has the guaranteed mean square deviation.

The problem of estimation of parameters in ARMA processes and in AR processes with noise was studied in [4–7]. A sequential procedure of identification parameters of autoregressive processes by noisy observations was proposed in [8]. This procedure uses the Yule-Walker estimators with guaranteed mean square deviation.

A problem of confidence estimation of the mean in a sequence of independent identically distributed Gaussian variables with unknown variance was studied in [9]. A sequential procedure was proposed because no procedure with fixed sample size can guarantee the prescribed coverage probability.

Recently a procedure for constructing a fixed-size confidence interval with any prescribed coverage probability for parameter in AR(1) process was proposed in [10]. The interval estimation for a first-order autoregressive process was constructed in [11].

The paper is organized as follows. In Section 1 we construct a sequential point estimator of unknown parameter in AR(1) process with noises. In section 2 we construct a confidence interval with any prescribed coverage probability for the parameter in AR(1) model with unknown noise variances. In section 3 the results of numerical simulation are presented.

1. Sequential point estimator

Consider an unobservable AR(1) process described by equations

$$x_k = \theta x_{k-1} + \varepsilon_k, \quad k=1, 2, \dots, \quad (1)$$

which is observed with noises

$$y_k = x_k + \eta_k, \quad k=1, 2, \dots \quad (2)$$

Here θ is unknown parameter, $|\theta| \leq 1$, $\{\varepsilon_k\}$ and $\{\eta_k\}$ are the sequences of Gaussian independent random variables with zero means $E\varepsilon_k = E\eta_k = 0$ and variances $E\varepsilon_k^2 = \sigma^2$; $E\eta_k^2 = \Delta^2$ respectively, initial value x_0 and processes $\{\varepsilon_k\}$, $\{\eta_k\}$ are independent. It's assumed that σ^2 and Δ^2 are unknown. The problem is to construct the non-asymptotic confidence interval for the parameter θ using observations $\{y_k\}$.

Note that from (1) and (2), we obtain the equation for the observed process

$$y_k = \theta y_{k-1} + \xi_k, \quad (3)$$

where $\xi_k = \varepsilon_k + \eta_k - \theta\eta_{k-1}$, $E\xi_k = 0$ and $E\xi_k^2 = \Delta^2(1 + \theta^2) + \sigma^2$.

First we obtain a point estimator of an unknown parameter of AR(1) process. The estimator is used later to construct the confidence interval. The scheme of estimating the parameter θ follows the approach proposed in [10] and includes three stages.

First we obtain the pilot Yule-Walker estimator of θ by a fixed number of observations. On the second stage we construct an estimator of the variance of the random variable ξ_k . On the third stage we construct a sequential modification of the Yule-Walker estimator of the parameter θ .

For an integer $n_1 \geq 3$ define the Yule-Walker estimator of the parameter θ as

$$\tilde{\theta}(n_1) = \left(\sum_{k=3}^{n_1} y_{k-2} y_{k-1} \right)^{-1} \sum_{k=3}^{n_1} y_{k-2} y_k. \quad (4)$$

To compensate an unstable behavior of estimator (4) for small sample size we use the projection of the estimator into the interval $[-1, 1]$:

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(n_1) = \begin{cases} \tilde{\theta}(n_1), & \text{if } |\tilde{\theta}(n_1)| < 1, \\ 1, & \text{if } \tilde{\theta}(n_1) \geq 1, \\ -1, & \text{if } \tilde{\theta}(n_1) \leq -1. \end{cases}$$

Using the estimator $\hat{\theta}(n_1)$ define the estimator of the variance ξ_k as

$$\Gamma_{n_1, n_2} = C(n_2) S_{n_1, n_2}, \quad (5)$$

where

$$S_{n_1, n_2} = \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} (y_k - \hat{\theta} y_{k-1})^2, \quad C(n_2) = \mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^{n_2} v_k^2 \right)^{-1}, \quad v_k = \frac{\varepsilon_k + \eta_k}{\sqrt{\Delta^2 + \sigma^2}}. \quad (6)$$

Note that v_k are standard Gaussian random variables. Hence $\sum_{k=1}^{n_2} v_k^2$ is Chi-square random variable with n_2 degrees of freedom and $C(n_2) = (n_2 - 2)^{-1}$. Denote

$$V_{n_1}^l = \sum_{k=n_1+1}^{n_1+l} (\varepsilon_k + \eta_k)^2, \quad l > 0. \quad (7)$$

The properties of the variables $V_{n_1}^l$ establishes the following theorem

Theorem 1. Let the random processes $\{S_{n_1, l}\}$ and $\{V_{n_1}^l\}$ are defined by (5) and (7) respectively. Then the following inequality holds true

$$P_{\theta} (S_{n_1, l} \leq z) \leq P_{\theta} (V_{n_1}^l \leq z). \quad (8)$$

The proof of Theorem actually proceeds along the lines of the proof of Theorem 1 in [10].

Using Theorem 3 in [10] one has

Theorem 2. The following inequality holds true

$$\mathbf{E} \frac{1}{\Gamma_{n_1, n_2}} \leq \frac{1}{\Delta^2 + \sigma^2}.$$

This inequality allows one to obtain the upper bound of the variance ξ_k .

Now we construct a sequential point estimator of the parameter θ . The estimator is based on the estimator proposed in [12] when the variances σ^2 and Δ^2 in (1) and (2) are known.

To construct sequential point estimator of the parameter θ , we divide the set of indexes $T(n) = \{1, 2, \dots, n\}$ into two subsets

$$T_1(n) = \{2j-1: j=1, 2, \dots; 2j-1 \leq n\}, \quad T_2(n) = \{2j: j=1, 2, \dots; 2j \leq n\}.$$

Note that $T(n) = T_1(n) + T_2(n)$. Next we introduce stopping times

$$\tau_i(h) = \inf \left\{ n \geq n_1 + n_2 + 1: \sum_{k=n_1+n_2+1}^n \frac{y_{k-2}^2}{\Gamma_{n_1, n_2}} \chi_{\{k \in T_i(n)\}} \geq h \right\}, \quad i=1, 2. \quad (9)$$

and $\chi_{\{A\}}$ is indicator of event A . The value h is a parameter of the identification procedure and defines the quality of the estimator.

Define sequential estimators of the parameter θ from odd and even observations by formulas

$$\hat{\theta}_i(h) = \left(\sum_{k=n_1+n_2+1}^{\tau_i(h)} \sqrt{\beta_{i,k}} \frac{y_{k-2} y_{k-1}}{\sqrt{\Gamma_{n_1, n_2}}} \right)^{-1} \sum_{k=n_1+n_2+1}^{\tau_i(h)} \sqrt{\beta_{i,k}} \frac{y_{k-2} y_k}{\sqrt{\Gamma_{n_1, n_2}}}, \quad i=1, 2, \quad (10)$$

where the coefficients $\beta_{i,k}, i=1,2$, are defined as

$$\beta_{i,k} = \begin{cases} 1, & \text{if } k \in T_i(\tau_i(h)) \text{ and } k < \tau_i(h); \\ \alpha_i(h), & \text{if } k = \tau_i(h); \\ 0, & \text{if } k \notin T_i(\tau_i(h)). \end{cases} \quad (11)$$

Correction factors $0 < \alpha_i(h) \leq 1, i=1,2$ are determined by the equalities

$$\sum_{k=n_1+n_2+1}^{\tau_i(h)-1} \frac{y_{k-2}^2}{\Gamma_{n_1, n_2}} \chi_{\{k \in T_i(n)\}} + \alpha_i(h) \frac{y_{\tau_i(h)-2}^2}{\Gamma_{n_1, n_2}} = h.$$

Consider the deviation of the estimators (10). Substituting y_k from (3) into (10) we have

$$\hat{\theta}_i(h) - \theta = \frac{1}{s_i(h)} \sum_{k=n_1+n_2+1}^{\tau_i(h)} \sqrt{\beta_{i,k}} \frac{y_{k-2}(\theta y_{k-1} + \xi_k)}{\sqrt{\Gamma_{n_1, n_2}}} - \theta = \frac{\zeta_i(h)}{s_i(h)}, \quad i=1,2,$$

where

$$\zeta_i(h) = \sum_{k=n_1+n_2+1}^{\tau_i(h)} \sqrt{\beta_{i,k}} \frac{y_{k-2} \xi_k}{\sqrt{\Gamma_{n_1, n_2}}}, \quad s_i(h) = \sum_{k=n_1+n_2+1}^{\tau_i(h)} \sqrt{\beta_{i,k}} \frac{y_{k-2} y_{k-1}}{\sqrt{\Gamma_{n_1, n_2}}}. \quad (12)$$

Denote

$$\tilde{\zeta}_i(h) = \sum_{k=n_1+n_2+1}^{\tau_i(h)} \sqrt{\beta_{i,k}} \frac{y_{k-2} \tilde{\xi}_k}{\sqrt{\Gamma_{n_1, n_2}}}, \quad \tilde{\xi}_k = \kappa_\theta^{-1} \xi_k, \quad \kappa_\theta = \sqrt{\Delta^2(1+\theta^2) + \sigma^2}. \quad (13)$$

Hence, the deviation $\hat{\theta}_i(h) - \theta$ takes the form

$$\hat{\theta}_i(h) - \theta = \kappa_\theta \frac{\tilde{\zeta}_i(h)}{s_i(h)}, \quad i=1,2.$$

According to Lemma 2 in [12] the following result holds.

Lemma 1. Let $\{\varepsilon_k\}$ and $\{\eta_k\}$ in (3) be the sequences of Gaussian random variables with zero means and variances $E\varepsilon_k^2 = \sigma^2$, $E\eta_k^2 = \Delta^2$, and random variables $\tilde{\zeta}_i(h)$, $i=1,2$ are described by the equations (13). Then for each $h > 0$ the random variables $h^{-1/2} \tilde{\zeta}_1(h)$ and $h^{-1/2} \tilde{\zeta}_2(h)$ are standard Gaussian.

In the next section we construct a non-asymptotic confidence interval for parameter θ .

2. Non-asymptotic confidence interval

The main result of the paper gives the following Theorem.

Theorem 3. Let $\{\varepsilon_k\}$ and $\{\eta_k\}$ in (3) be the sequences of Gaussian random variables with zero means and variances $E\varepsilon_k^2 = \sigma^2$, $E\eta_k^2 = \Delta^2$, and the sequential point estimators $\hat{\theta}_i(h), i=1,2$ are defined by formulas (9), (10), (11). Then for all $h > 0$ and $z > 0$

$$P_\theta \left(\frac{|s_*(h)|}{h \sqrt{\Gamma_{n_1, n_2}}} \left| \frac{\hat{\theta}_1(h) + \hat{\theta}_2(h)}{2} - \theta \right| < z \right) \geq 1 - \alpha(h, z), \quad (14)$$

where Γ_{n_1, n_2} is defined by (5) and $s_*(h) = \min(s_1(h), s_2(h))$ and

$$\alpha(h, z) = 4 \int_0^\infty \left[1 - \Phi \left(z \sqrt{y h C(n_2)} \right) \right] \frac{y^{n_2/2-1}}{\Gamma(n_2/2)} \exp(-y) dy.$$

Here $C(n_2)$ is defined by (6), $\Gamma(n_2/2)$ is the Gamma-function and

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \left(-\frac{y^2}{2} \right) dy. \quad (15)$$

Proof: Using estimators (5) and (10) we obtain the inequality

$$\begin{aligned} \frac{|s_*(h)|}{h\sqrt{\Gamma_{n_1, n_2}}} \left| \frac{\hat{\theta}_1(h) + \hat{\theta}_2(h)}{2} - \theta \right| &= \frac{\kappa_\theta |s_*(h)|}{2h\sqrt{\Gamma_{n_1, n_2}}} \left| \frac{\tilde{\zeta}_1(h)}{s_1(h)} + \frac{\zeta_2(h)}{s_2(h)} \right| \leq \\ &\leq \frac{\kappa_\theta |s_*(h)|}{2h\sqrt{\Gamma_{n_1, n_2}}} \left[\left| \frac{\tilde{\zeta}_1(h)}{s_1(h)} \right| + \left| \frac{\zeta_2(h)}{s_2(h)} \right| \right] \leq \frac{\kappa_\theta}{2h\sqrt{\Gamma_{n_1, n_2}}} [|\tilde{\zeta}_1(h)| + |\zeta_2(h)|]. \end{aligned} \quad (16)$$

Introduce the filtration

$$\mathcal{F}_0 = \sigma\{y_0\}, \quad \mathcal{F}_n = \sigma\{y_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \eta_1, \dots, \eta_n\}.$$

To construct the confidence interval, we obtain the upper bound for probability

$$\begin{aligned} P_\theta \left(\frac{|s_*(h)|}{h\sqrt{\Gamma_{n_1, n_2}}} \left| \frac{\hat{\theta}_1(h) + \hat{\theta}_2(h)}{2} - \theta \right| \geq z \right) &\leq P_\theta \left(\frac{\kappa_\theta}{2h\sqrt{\Gamma_{n_1, n_2}}} [|\tilde{\zeta}_1(h)| + |\zeta_2(h)|] \geq z \right) = \\ &= \mathbf{E} P_\theta \left(\frac{1}{\sqrt{h}} [|\tilde{\zeta}_1(h)| + |\zeta_2(h)|] \geq \frac{2z\sqrt{h\Gamma_{n_1, n_2}}}{\kappa_\theta} \mid \mathcal{F}_{n_1+n_2} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Then

$$\begin{aligned} P_\theta \left(\frac{1}{\sqrt{h}} [|\tilde{\zeta}_1(h)| + |\zeta_2(h)|] \geq \frac{2z\sqrt{h\Gamma_{n_1, n_2}}}{\kappa_\theta} \mid \mathcal{F}_{n_1+n_2} \right) &\leq P_\theta \left(\frac{|\tilde{\zeta}_1(h)|}{\sqrt{h}} \geq \frac{z\sqrt{h\Gamma_{n_1, n_2}}}{\kappa_\theta} \mid \mathcal{F}_{n_1+n_2} \right) + \\ &+ P_\theta \left(\frac{|\zeta_2(h)|}{\sqrt{h}} \geq \frac{z\sqrt{h\Gamma_{n_1, n_2}}}{\kappa_\theta} \mid \mathcal{F}_{n_1+n_2} \right) = 2P_\theta \left(\frac{|\tilde{\zeta}_1(h)|}{\sqrt{h}} \geq \frac{z\sqrt{h\Gamma_{n_1, n_2}}}{\kappa_\theta} \mid \mathcal{F}_{n_1+n_2} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

As a result from (17) and (18) we obtain

$$\begin{aligned} \mathbf{E} P_\theta \left(\frac{1}{\sqrt{h}} (|\tilde{\zeta}_1(h)| + |\zeta_2(h)|) < \frac{2z\sqrt{h\Gamma_{n_1, n_2}}}{\kappa_\theta} \mid \mathcal{F}_{n_1+n_2} \right) &\geq 1 - 2\mathbf{E} P_\theta \left(\frac{|\tilde{\zeta}_1(h)|}{\sqrt{h}} \geq \frac{z\sqrt{h\Gamma_{n_1, n_2}}}{\kappa_\theta} \mid \mathcal{F}_{n_1+n_2} \right) = \\ &= 2 \left[1 - \mathbf{E} P_\theta \left(\frac{|\tilde{\zeta}_1(h)|}{\sqrt{h}} \geq \frac{z\sqrt{h\Gamma_{n_1, n_2}}}{\kappa_\theta} \right) \right] - 1 = 2\mathbf{E} P_\theta \left(\frac{|\tilde{\zeta}_1(h)|}{\sqrt{h}} < \frac{z\sqrt{h\Gamma_{n_1, n_2}}}{\kappa_\theta} \mid \mathcal{F}_{n_1+n_2} \right) - 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Let $G(y)$ be the distribution function of random variable $\Gamma_{n_1, n_2} / \kappa_\theta^2$. Taking into account that $|\theta| \leq 1$ we come to inequality $\kappa_\theta^2 = \Delta^2(1 + \theta^2) + \sigma^2 \leq 2(\Delta^2 + \sigma^2)$. Using expression (5) for Γ_{n_1, n_2} and inequality (8) we obtain the upper bound for the distribution function $G(y)$

$$\begin{aligned} P_\theta \left(\frac{\Gamma_{n_1, n_2}}{\kappa_\theta^2} < z \right) &= P_\theta \left(\sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} (y_k - \hat{\theta} y_{k-1})^2 < \frac{z\kappa_\theta^2}{C(n_2)} \right) \leq P_\theta \left(\sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} (\varepsilon_k + \eta_k)^2 < \frac{z\kappa_\theta^2}{C(n_2)} \right) \leq \\ &\leq P_\theta \left((\sigma^2 + \Delta^2) \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} v_k^2 < \frac{2z(\sigma^2 + \Delta^2)}{C(n_2)} \right) = P_\theta \left(\sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} v_k^2 < \frac{2z}{C(n_2)} \right), \end{aligned} \quad (20)$$

where $v_k = (\sigma^2 + \Delta^2)^{-1/2} (\varepsilon_k + \eta_k)$.

Analogously to [10] using integration by parts and (20) we have

$$\begin{aligned} \mathbf{E} P_\theta \left(\frac{|\tilde{\zeta}_1(h)|}{\sqrt{h}} < \frac{z\sqrt{h\Gamma_{n_1, n_2}}}{\kappa_\theta} \mid \mathcal{F}_{n_1+n_2} \right) &= \int_0^\infty P_\theta \left(\frac{|\tilde{\zeta}_1(h)|}{\sqrt{h}} < z\sqrt{hy} \mid \mathcal{F}_{n_1+n_2} \right) dG(y) = \\ &= 1 - \int_0^\infty G(y) dP_\theta \left(\frac{|\tilde{\zeta}_1(h)|}{\sqrt{h}} < z\sqrt{hy} \mid \mathcal{F}_{n_1+n_2} \right) \geq \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &\geq 1 - \int_0^\infty P_\theta \left(\sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} v_k^2 < \frac{2y}{C(n_2)} \right) dP_\theta \left(\frac{|\tilde{\zeta}_1(h)|}{\sqrt{h}} < z\sqrt{hy} \mid \mathcal{F}_{n_1+n_2} \right) = \\ &= \int_0^\infty P_\theta \left(\frac{|\tilde{\zeta}_1(h)|}{\sqrt{h}} < z\sqrt{hy} \mid \mathcal{F}_{n_1+n_2} \right) dP_\theta \left(\sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} v_k^2 < \frac{2y}{C(n_2)} \right). \end{aligned}$$

Taking into account that $\sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} v_k^2$ has Chi-square distribution with n_2 degrees of freedom, inequalities (17), (19), (21) and Lemma 1 we can construct a non-asymptotic confidence interval for the parameter θ in the form

$$\begin{aligned} &P_\theta \left(\frac{|s_*(h)|}{h\sqrt{\Gamma_{n_1, n_2}}} \mid \frac{\hat{\theta}_1(h) + \hat{\theta}_2(h)}{2} - \theta < z \right) \geq \\ &\geq 2 \int_0^\infty P_\theta \left(\frac{|\tilde{\zeta}_1(h)|}{\sqrt{h}} < z\sqrt{hy} \mid \mathcal{F}_{n_1+n_2} \right) dP_\theta \left(\sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} v_k^2 < \frac{2y}{C(n_2)} \right) - 1 = \\ &= 2 \int_0^\infty \left[2\Phi(z\sqrt{hy}) - 1 \right] \frac{(1/2)^{n_2/2}}{\Gamma(n_2/2)} \left(\frac{2y}{C(n_2)} \right)^{n_2/2-1} \exp \left\{ -\frac{y}{C(n_2)} \right\} \frac{2dy}{C(n_2)} - 1 = \\ &= 2 \int_0^\infty \left[2\Phi(z\sqrt{yhC(n_2)}) - 1 \right] \frac{y^{n_2/2-1}}{\Gamma(n_2/2)} \exp(-y) dy - 1, \end{aligned} \quad (22)$$

where $\Phi(x)$ is determined by the formula (15).

From (22) one has the equality to defining the value h of the form

$$\alpha(h, z) = 4 \int_0^\infty \left[1 - \Phi(z\sqrt{yhC(n_2)}) \right] \frac{y^{n_2/2-1}}{\Gamma(n_2/2)} \exp(-y) dy.$$

We come to the result of Theorem 3.

Remark 1. Note that the random coefficient $s_*(h)/h$ in the confidence interval converges to constant almost surely due to Proposition 1 in [12].

3. Simulation results

In this section, we report and discuss the results of Monte Carlo experiments. Table 1 presents selected data obtained by the simulations.

Represent the interval for parameter θ

$$\frac{|s_*(h)|}{h\sqrt{\Gamma_{n_1, n_2}}} \left| \frac{\hat{\theta}_1(h) + \hat{\theta}_2(h)}{2} - \theta \right| < z \quad (23)$$

in the form

$$\bar{\theta}(h) - \delta < \theta < \bar{\theta}(h) + \delta, \quad \bar{\theta}(h) = \frac{\hat{\theta}_1(h) + \hat{\theta}_2(h)}{2}, \quad (24)$$

where $\delta = zh\sqrt{\Gamma_{n_1, n_2}}/|s_*(h)|$ is the confidence semi-interval.

The results of Monte Carlo simulation are reported in Table. All the results were obtained by 1000 replications by making use of the programming language *R*. The values n_1 and n_2 were chosen equal to 30. The averaged values of sequential estimators $\bar{\theta}(h)$ as well as mean length of semi-interval δ have been calculated for every value of the parameter θ . The confidence probability $1 - \alpha(h, z)$ was equal to 0,9 for different values of h and z . The quantity $\bar{\tau}$ denotes the observed averages of the stopping time $(\tau_1(h) + \tau_2(h))/2$. The quantity $\hat{p}$ denotes the frequency count of the number of times when the confidence interval contains the true values θ .

Averaged confidence estimates of parameter AR(1)

θ	σ^2	Δ^2	$h = 779, z = 0,1$				$h = 3\,115, z = 0,05$			
			$\bar{\theta}(h)$	δ	$\bar{\tau}$	$\hat{p}$	$\bar{\theta}(h)$	δ	$\bar{\tau}$	$\hat{p}$
-0,99	1	0,25	-0,990	0,098	156,5	1	-0,991	0,05	359,6	1
-0,8	1	0,25	-0,802	0,133	954,3	1	-0,800	0,067	3504,4	0,999
-0,6	1	0,25	-0,598	0,187	1545,9	1	-0,600	0,095	6079,5	1
-0,4	1	0,25	-0,401	0,290	2171,2	0,999	-0,402	0,147	8315,1	1
-0,3	1	0,25	-0,300	0,387	2447,0	0,999	-0,300	0,198	9445,0	1
0,3	1	0,25	0,302	0,448	2420,0	1	0,303	0,212	9627,7	1
0,4	1	0,25	0,400	0,323	2202,5	1	0,402	0,156	8446,0	1
0,6	1	0,25	0,599	0,202	1611,1	1	0,600	0,098	6113,8	1
0,8	1	0,25	0,799	0,140	913,3	1	0,800	0,069	3572,4	1
0,99	1	0,25	0,991	0,103	158,4	1	0,990	0,051	340,0	1
0,99	4	0,25	0,990	0,102	144,9	1	0,990	0,051	293,0	1
0,99	4	1	0,990	0,103	159,4	1	0,990	0,051	347,0	1
0,99	1	4	0,991	0,114	426,0	1	0,990	0,056	1286,3	1

Note that as the variance σ^2 of the process increases, the sample size $\bar{\tau}$ decreases. Increasing the variance Δ^2 of additive noise leads to increasing the sample size $\bar{\tau}$. This fact follows from Proposition 1 in [12].

Conclusions

The proposed sequential procedure allows one to construct the confidence non-asymptotic interval for autoregressive parameter θ in the presence of additive noise in observations. The procedure is independent of variances of noises in unobservable and observable processes. It is based on a special rule of determining the needed sample size. The results can be used in identification and control problems.

References

- Lai, T.L. & Wei, C.Z. (1983) Asymptotic properties of general autoregressive models and strong consistency of least-squares estimates of their parameters. *Journal of Multivariate Analysis*. 13. pp. 1–23. DOI: 10.1016/0047-259X(83)90002-7
- Borisov, V.Z. & Konev, V.V. (1977) On sequential parameter estimation in discrete time processes. *Automation and Remote Control*. 38. pp. 1475–1480.
- Lai, T.L. & Siegmund, D. (1983) Fixed accuracy estimation of an autoregressive parameter. *Annals of Statistics*. 11. pp. 478–485. DOI: 10.1214/aos/1176346154
- Anderson, T.W. (1971) *The Statistical Analysis of Time Series*. New York: Wiley.
- Hasan, Md.K., Chowdhury, A.K.M.Z.R. & Khan, M.R. (2003) Identification of autoregressive signals in colored noise using damped sinusoidal model. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*. 50. pp. 966–969.
- Mahmoudi, A., Karimi, M. & Amindavar, H. (2012) Parameter estimation of autoregressive signals in presence of colored AR(1) noise as a quadratic eigenvalue problem. *Signal Processing*. 92. pp. 1151–1156. DOI: 10.1016/j.sigpro.2011.11.015
- Xia, Y. & Zheng, W.X. (2015) Novel parameter estimation of autoregressive signals in the presence of noise. *Automatica*. 62. pp. 98–105. DOI: 10.1016/j.automatica.2015.09.008
- Vasiliev, V.A. & Konev, V.V. (1985) Sequential identification of parameters in dynamical systems in presence of multiplicative and additive noises. *Automation and Remote Control*. 46. pp. 706–716.
- Stein, C. (1945) A Two-Sample test for a linear hypothesis' whose power is independent of the variance. *Annals of Mathematical Statistics*. 16. pp. 253–258. DOI: 10.1214/aoms/1177731088
- Vorobeychikov, S. & Burkatovskaya, Yu. (2020) Non-asymptotic confidence estimation of the autoregressive parameter in AR(1) Process with an Unknown Noise Variance. *Austrian Journal of Statistics*. 49. pp. 19–26. DOI: 10.17713/ajs.v49i4.1121
- Wei, C., Hao, Y. & Ching, K. (2018) Interval estimation for a first-order positive autoregressive process. *Journal of Time Series Analysis*. 39. pp. 1475–1480. DOI: 10.1111/jtsa.12297
- Konev, V. & Pupkov, A. (2021) Confidence estimation of autoregressive parameters based on noisy data. *Automation and Remote Control*. 82. pp. 1030–1048. DOI: 10.1134/S0005117921060059

Information about the authors:

Vorobeychikov Sergey E. (Doctor of Physics and Mathematics, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: sev@mail.tsu.ru

Pupkov Andrey V. (Post-graduate Student, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: andrewpupkov@gmail.com

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Информация об авторах:

Воробейчиков Сергей Эрикович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры системного анализа и математического моделирования Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: sev@mail.tsu.ru

Пупков Андрей Викторович – аспирант кафедры системного анализа и математического моделирования Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: andrewpupkov@gmail.com

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Received 24.03.2022; accepted for publication 30.05.2022

Поступила в редакцию 24.03.2022; принята к публикации 30.05.2022

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

INFORMATICS AND PROGRAMMING

Научная статья

УДК 519.718:004.722

doi: 10.17223/19988605/59/10

**Анализ вероятности связности телекоммуникационной сети
на основе инверсий ее состояний****Александр Александрович Батенков¹, Кирилл Александрович Батенков²,
Александр Борисович Фокин³**¹ Орловский государственный университет, Орел, Россия^{2,3} Академия Федеральной службы охраны, Орел, Россия¹ batenkov1957@mail.ru² pustur@yandex.ru³ tatarin57ru@mail.ru

Аннотация. Представлен вариант устранения основного недостатка наиболее совершенных модификаций метода, использующих многопеременную инверсию. Он предполагает рассмотрение не объединения событий связности (несвязности), вырождающегося в сумму несовместных произведений, а пересечения противоположных событий. Подобная сумма не требует использования многопеременной инверсии для каждого из составляемых. В итоге данные преобразования позволяют анализировать вероятность связности произвольного графа с несколько меньшей вычислительной сложностью по сравнению с классическими методами многопеременной инверсии.

Ключевые слова: сеть связи; граф; вероятность связности; многопеременная инверсия

Для цитирования: Батенков А.А., Батенков К.А., Фокин А.Б. Анализ вероятности связности телекоммуникационной сети на основе инверсий ее состояний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 59. С. 91–98. doi: 10.17223/19988605/59/10

Original article

doi: 10.17223/19988605/59/10

Network connectivity probability analysis based on its states inversion**Aleksandr A. Batenkov¹, Kirill A. Batenkov², Aleksandr B. Fokin³**¹ Orel State University, Orel, Russian Federation^{2,3} Academy of Federal Guard Service, Orel, Russian Federation¹ batenkov1957@mail.ru² pustur@yandex.ru³ tatarin57ru@mail.ru

Abstract. The paper shows that since for large and complex telecommunications networks the calculation of the connectivity probability turns out to be a very cumbersome and time-consuming process due to the huge number of elements in the resulting expression, the most appropriate way out of this situation is an approach based on the representation of the network connectivity event in the form of sums of products of incompatible events, which represent a form of transition to substitution, allowing a direct transition to a probability function by replacing logical variables (sets) with probabilities, and logical operations (operations on sets) by corresponding arithmetic operations. This rep-

resentation leads to a fairly compact form of writing the resulting connectivity equation and, as a result, to a decrease in computational complexity and a decrease in the resulting rounding error. It is indicated that this approach is recommended by the domestic GOST for calculating the stability of the functioning of networks and in the scientific literature has been called the method of combining taking into account the absorption effect.

It is explained that there are several interpretations of the concept of connectivity, a generalization of which is multi-pole connectivity, including both two-pole and all-pole. In this case, it is advisable to consider the connectivity event as the existence of a certain subgraph in a specific implementation of the graph containing the given vertices, the original random graph and uniquely being a tree whose leaves can only be these specified vertices. For the general case of a multi-pole network, these subgraphs are trees that have a given set of vertices, for a two-pole network – trees containing a given pair of vertices, in fact, they are paths, for an all-pole network – spanning trees that include all the vertices of a random graph.

The paper presents a variant of eliminating the main drawback of the most advanced modifications of the method using multi-variable inversion – the need for a comparative analysis of each term with all previously considered for the uniqueness of the contained edges, as well as in some cases additional operations on sets. According to this variant, it is advisable to consider not the union of connectivity events (incoherence), which degenerates into the sum of incompatible events, but the intersection of opposite events, which also leads to a similar sum, but to obtain which there is no need to perform a multi-variable inversion for each of the terms over all previously analyzed ones.

The procedures for bringing two incoherent events to the union of independent events, as well as three incoherent events to the union of independent events, which will allow us to obtain a recurrent method for calculating the probability of connectivity in the future, are described.

Keywords: communication network; graph; connectivity probability; multi-variable inversion

For citation: Batenkov, A.A., Batenkov, K.A., Fokin, A.B. (2022) Network connectivity probability analysis based on its states inversion. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 59. pp. 91–98. doi: 10.17223/19988605/59/10

Известно, что для больших и сложных по структуре телекоммуникационных сетей расчет вероятности связности оказывается весьма громоздким и трудоемким процессом вследствие огромного числа элементов в результирующем выражении. Наиболее целесообразным выходом из подобной ситуации является подход, основанный на представлении события связности сети в виде сумм произведений несовместных событий (SDP – Sum of Disjoint Product) [11], представляющих собой форму перехода к замещению [2–6], допускающую непосредственный переход к вероятностной функции заменой логических переменных (множеств) вероятностями, а логических операций (операций над множествами) соответствующими арифметическими операциями [7–9]. Данное представление приводит к достаточно компактной форме записи результирующего уравнения связности и, как следствие, к снижению вычислительной сложности и уменьшению результирующей ошибки округления [10, 11]. Отметим, то данный подход рекомендован отечественным ГОСТом для расчета устойчивости функционирования сетей [12] и в научной литературе получил название метода объединения с учетом эффекта поглощения [13].

Само представление события связности сети в виде сумм произведений несовместных событий [11] базируется на методе многопеременных инверсий, являющемся расширением алгоритма однопеременной инверсии (SVI – Single Variable Inversion). На основе наборов типовых подграфов (простая цепь, остовое дерево) данный алгоритм рекурсивно генерирует непересекающиеся подмножества для каждого из наборов. Алгоритм построен по принципу цикл в цикле. Во внутреннем цикле произведения инвертируются целиком, а не последовательно по каждой из переменных в отдельности. В результате формируется значительно меньше составляющих относительно SVI вследствие рассмотрения большего количества переменных за один такт. Внешний цикл перебирает последовательно все отдельные типовые подграфы и рекурсивно перебирает инверсии с ранее выполненными преобразованиями.

В подобном алгоритме требуется на каждом шаге внешнего цикла проводить сравнение текущего выражения связности типового подграфа с ранее полученными соотношениями, причем необходимо проанализировать обязательно их все. В настоящей работе предлагается снизить сложность данной рутинной процедуры за счет рассмотрения не события связности исходного графа, а события несвязности. В результате каждый шаг внешнего цикла в ряде случаев будет анализировать меньшее количество слагаемых в ранее полученном выражении, что сократит вычислительную сложность расчета вероятности связности.

1. Общий подход к расчету вероятности связности на основе инверсий состояний сети

Известно несколько трактовок понятия связности, обобщением которого является многополюсная связность, включающая и двухполюсную, и всеполюсную. При этом целесообразно рассматривать событие связности как существование некоторого подграфа S_i в конкретной реализации графа G , содержащего заданные вершины, исходного случайного графа G и однозначно являющегося деревом, листьями которого могут быть только эти заданные вершины [14]. Для общего случая многополюсной сети этими подграфами S_i оказываются деревья, имеющие заданный набор вершин, для двухполюсной сети – деревья, содержащие заданную пару вершин, по сути, являющиеся путями, для всеполюсной сети – остовые деревья, включающие все вершины случайного графа G [15].

Таким образом, множество S графов, для которого выполняется свойство связности, имеет следующий вид:

$$S = \{G : \exists S_i \subseteq G\}, \quad (1)$$

т.е. множество S состоит из всех графов G , для которых существует хотя бы один подграф S_i , содержащийся в графе G [16].

Следует отметить, что даже наиболее совершенным модификациям метода, использующим многопеременную инверсию (MVI – Multiple Variable Inversion), свойствен существенный недостаток, связанный с необходимостью сравнительного анализа каждого слагаемого со всеми ранее рассмотренными на предмет уникальности содержащихся ребер, а также выполнения в ряде случаев дополнительных операций над множествами [1, 17, 18]. Для устранения подобных повторяющихся рутинных процедур целесообразно рассматривать не объединение событий связности (несвязности), вырождающееся в сумму несовместных произведений, а пересечение противоположных событий, также приводящее к подобной сумме, но для получения которой нет необходимости выполнять многопеременную инверсию для каждого из слагаемых над всеми ранее проанализированными.

Так, согласно формуле (1) событие S связности графа G следует трактовать как объединение событий связности всех его подграфов, что приводит к справедливости следующего выражения для события S связности сети:

$$S = \bigcup_{i=1}^s S_i,$$

где S_i , $i=1, \dots, s$, – событие связности i -го типового подграфа (пути, остового, а в общем случае многополюсного дерева) случайного графа G .

Каждое событие S_i связности типового подграфа является сложным и происходит только при условии связности (работоспособности) содержащихся в этом подграфе ребер, т.е.

$$S_i = \bigcap_{l_j \in S_i} l_j,$$

где l_j , $j=1, \dots, l$, – событие связности (работоспособности) j -го ребра графа G .

По условию формулировки обобщенной модели Эрдеша–Реньи все данные события независимы, следовательно, вероятность связности подграфа [19, 20]

$$P(S_i) = \prod_{l_j \in S_i} P(l_j).$$

Отметим, что для события S связности графа G данная мультипликативная формула в общем случае несправедлива, поскольку события S_i связности типовых подграфов могут быть зависимы вследствие присутствия одинаковых ребер в данных подграфах. Именно в этом и заключается основная проблема расчета вероятности связности, так как отдельные подграфы оказываются взаимозависимыми, а получаемые выражения не являются формами перехода к замещению.

Хорошо известный принцип двойственности [22] позволяет записать событие $\bar{S}$ несвязности графа G как пересечение событий $\bar{S}_i$ несвязности типовых подграфов

$$\bar{S} = \bigcap_{i=1}^s \bar{S}_i.$$

В результате на основе формулы полной вероятности вероятность $P(S)$ связности графа выражается на основе вероятностей событий несвязности:

$$P(S) = 1 - P(\bar{S}) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^s \bar{S}_i\right).$$

Главным достоинством данного выражения является то, что дальнейший переход к вероятностной форме не потребует рассмотрения во всех суммах инверсии всех ранее учтенных подграфов [16, 21].

Достаточно просто на основе принципа двойственности формализуется выражение для события $\bar{S}$ несвязности графа на основе событий l_j работоспособности ребер:

$$\bar{S}_i = \bigcap_{l_j \in S_i} l_j = \bigcup_{l_j \in S_i} \bar{l}_j.$$

2. Процедура приведения двух событий несвязности к объединению независимых событий

Для наглядности дальнейших упрощений целесообразно первоначально рассмотреть процедуру упрощения для двух произвольных подграфов. Пересечение событий связности этих двух подграфов (рис. 11)

$$S_i S_k = \bigcap_{l_j \in S_i} l_j \bigcap_{l_j \in S_k} l_j = \bigcap_{\substack{l_j \in S_i \\ l_j \in S_k}} l_j \bigcap_{\substack{l_j \in S_i \\ l_j \notin S_k}} l_j \bigcap_{\substack{l_j \notin S_i \\ l_j \in S_k}} l_j = a_{i,k} a_{i/k} a_{k/i},$$

где $a_{i,k} = \bigcap_{\substack{l_j \in S_i \\ l_j \in S_k}} l_j$ – событие связности ребер, входящих одновременно в i -й и k -й подграфы; $a_{i/k} = \bigcap_{\substack{l_j \in S_i \\ l_j \notin S_k}} l_j$ –

событие связности ребер, входящих в i -й и не входящих в k -й подграфы; $a_{k/i} = \bigcap_{\substack{l_j \notin S_i \\ l_j \in S_k}} l_j$ – событие связ-

ности ребер, входящих в k -й и не входящих в i -й подграфы.

Отметим, что с целью устранения громоздкости используемых обозначений операция $\bigcap$ пересечения событий пропускается, если не возникает неоднозначности толкований [11, 22].

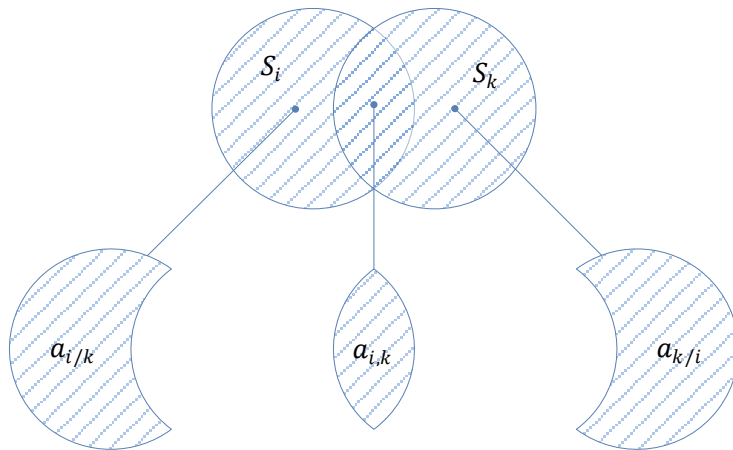


Рис. 1. Разбиение двух событий связности подграфов на независимые
Fig. 1. Splitting of two subgraph connectivity events into independent

Поскольку все полученные события независимы, то

$$P(S_i S_k) = P(a_{i,k}) P(a_{i/k}) P(a_{k/i}).$$

В результате события связности

$$S_i = a_{i,k} a_{i/k}, S_k = a_{i,k} a_{k/i}.$$

Тогда пересечение событий несвязности этих двух подграфов представимо в форме объединения двух независимых событий:

$$\overline{S_i} \overline{S_k} = \overline{a_{i,k} a_{i/k} a_{i,k} a_{k/i}} = \overline{a_{i,k}} \cup (a_{i,k} \overline{a_{i/k}} \overline{a_{k/i}}).$$

Полученное выражение является, по сути, классической формой перехода к замещению, т.е.

$$P(\overline{S_i} \overline{S_k}) = P(\overline{a_{i,k}}) + P(a_{i,k}) P(\overline{a_{i/k}}) P(\overline{a_{k/i}}).$$

3. Процедура приведения трех событий несвязности к объединению независимых событий

Для трех произвольных подграфов пересечение событий несвязности представимо в форме объединения тоже двух, но зависимых событий:

$$\overline{S_i} \overline{S_k} \overline{S_j} = \overline{a_{i,k}} \overline{S_j} \cup (a_{i,k} \overline{a_{i/k}} \overline{a_{k/i}} \overline{S_j}).$$

События $a_{i,k}$ и S_j связности возможно зависеть как пересечение двух событий (рис. 22):

$$a_{i,k} = a_{i,k,j} a_{i,k/j},$$

$$S_j = a_{i,k,j} a_{j/i,k},$$

где $a_{i,k,j}$ – событие связности ребер, входящих одновременно в i -й, k -й и j -й подграфы; $a_{i,k/j}$ – событие связности ребер, входящих в i -й и k -й и не входящих в j -й подграфы; $a_{j/i,k}$ – событие связности ребер, входящих в j -й и не входящих в i -й и k -й подграфы.

Тогда

$$\overline{a_{i,k}} \overline{S_j} = \overline{a_{i,k,j} a_{i,k/j} a_{i,k,j} a_{j/i,k}} = \overline{a_{i,k,j}} \cup (a_{i,k,j} \overline{a_{i,k/j}} \overline{a_{j/i,k}}),$$

$$a_{i,k} \overline{S_j} = a_{i,k,j} a_{i,k/j} \overline{a_{i,k,j} a_{j/i,k}} = a_{i,k} \overline{a_{j/i,k}}.$$

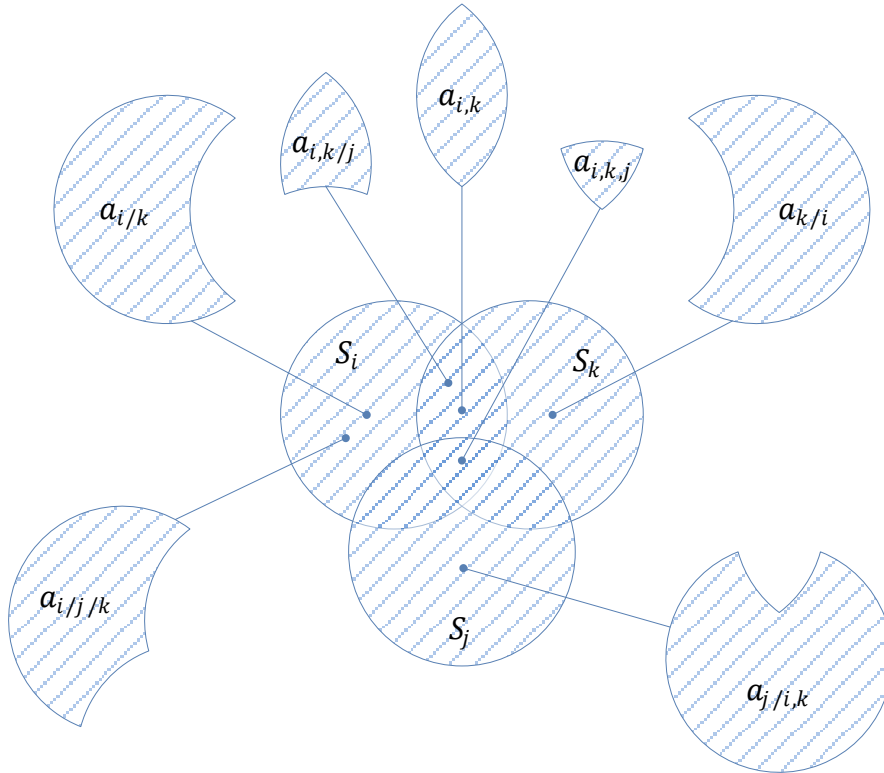


Рис. 2. Разбиение трех событий связности подграфов на независимые
Fig. 2. Splitting the three connectivity events of subgraphs into independent

В результате пересечение событий несвязности имеет вид двух независимых объединений и одного зависимого:

$$\overline{S_i} \overline{S_k} \overline{S_j} = \overline{a_{i,k,j}} \cup (a_{i,k,j} \overline{a_{i,k/j}} \overline{a_{j/i,k}}) \cup (a_{i,k} \overline{a_{j/i,k}} \overline{a_{i/k}} \overline{a_{k/i}}).$$

При этом в третьем объединении первые два события $a_{i,k}$ и $a_{j/i,k}$, а также события $a_{i,k}$, $a_{i/k}$ и $a_{k/i}$ являются независимыми, в то время как события $a_{j/i,k}$ и $a_{i/k}$, а также $a_{j/i,k}$ и $a_{k/i}$ – нет. Последующее упрощение аналогично ранее описанному и заключается в последовательной процедуре разложения пересечения обратных событий в виде объединений [14]. Поскольку

$$a_{j/i,k} = a_{i,j/k} a_{j/i},$$

$$a_{i/k} = a_{i,j/k} a_{i/j/k},$$

то

$$\overline{a_{j/i,k}} \overline{a_{i/k}} = \overline{a_{i,j/k} a_{j/i} a_{i,j/k} a_{i/j/k}} = \overline{a_{i,j/k}} \cup (a_{i,j/k} \overline{a_{j/i}} \overline{a_{i/j/k}}),$$

$$\overline{S_i} \overline{S_k} \overline{S_j} = \overline{a_{i,k,j}} \cup (a_{i,k,j} \overline{a_{i,k/j}} \overline{a_{j/i,k}}) \cup (a_{i,k} \overline{a_{i,j/k}} \overline{a_{k/i}}) \cup (a_{i,k} a_{i,j/k} \overline{a_{j/i}} \overline{a_{i/j/k}} \overline{a_{k/i}}).$$

Оставшиеся зависимые события $a_{j/i}$ и $a_{k/i}$ раскладываются подобным образом:

$$a_{j/i} = a_{j,k/i} a_{j/i/k},$$

$$a_{k/i} = a_{j,k/i} a_{k/i/j},$$

$$\overline{a_{j/i}} \overline{a_{k/i}} = \overline{a_{j,k/i} a_{j/i/k} a_{j,k/i} a_{k/i/j}} = \overline{a_{j,k/i}} \cup (a_{j,k/i} \overline{a_{j/i/k}} \overline{a_{k/i/j}}).$$

В результате образуется совокупность объединений независимых событий

$$\overline{S_i} \overline{S_k} \overline{S_j} = \overline{a_{i,k,j}} \cup (a_{i,k,j} \overline{a_{i,k/j}} \overline{a_{j/i,k}}) \cup (a_{i,k} \overline{a_{i,j/k}} \overline{a_{k/i}}) \cup (a_{i,k} a_{i,j/k} \overline{a_{j/i/k}} \overline{a_{j,k/i}}) \cup (a_{i,k} a_{i,j/k} a_{j,k/i} \overline{a_{i/j/k}} \overline{a_{j/i/k}} \overline{a_{k/i/j}}),$$

которая является формой перехода к замещению, т.е.

$$P(\overline{S_i} \overline{S_k} \overline{S_j}) = P(\overline{a_{i,k,j}}) + P(a_{i,k,j}) P(\overline{a_{i,k/j}}) P(\overline{a_{j/i,k}}) + P(a_{i,k}) P(\overline{a_{i,j/k}}) P(\overline{a_{k/i}}) +$$

$$+ P(a_{i,k}) P(a_{i,j/k}) P(\overline{a_{i/j/k}}) P(\overline{a_{j,k/i}}) + P(a_{i,k}) P(a_{i,j/k}) P(a_{j,k/i}) P(\overline{a_{i/j/k}}) P(\overline{a_{j/i/k}}) P(\overline{a_{k/i/j}}).$$

Заключение

В работе представлен вариант устранения основного недостатка наиболее совершенных модификаций метода, использующих многопеременную инверсию, – необходимости проведения сравнительного анализа каждого слагаемого со всеми ранее рассмотренными на предмет уникальности содержащихся ребер, а также в ряде случаев дополнительных операций над множествами [1, 23, 24]. Согласно данному варианту целесообразно рассматривать не объединение событий связности (несвязности), вырождающееся в сумму несовместных произведений, а пересечение противоположных событий, также приводящее к подобной сумме, но для получения которой нет необходимости выполнять многопеременную инверсию для каждого из слагаемых над всеми ранее проверенными. В итоге результирующее выражение для вероятности исходного графа, получающееся на основе стандартной формы перехода к замещению, задается путем рекурсивной процедуры, анализирующей на каждом шаге не все ранее полученные соотношения, а лишь часть из них.

Список источников

1. Chaturvedi S.K. Network Reliability Measures and Evaluation. Scrivener Publishing LLC, 2016. 237 p.
2. Рябинин И.А., Черкесов Г.Н. Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем. М. : Радио и связь, 1981. 264 с.
3. Батенков К.А. Числовые характеристики структур сетей связи // Труды СПИИРАН. 2017. № 4 (53). С. 5–28.
4. Батенков К.А., Батенков А.А. Анализ и синтез структур сетей связи по детерминированным показателям устойчивости // Труды СПИИРАН. 2018. № 3 (58). С. 128–159.

5. Shengjie Xu, Yi Qian, Rose Qingyang Hu. Reliable and resilient access network design for advanced metering infrastructures in smart grid // IET Smart Grid. 2018. V. 1 (1). P. 24–30.
6. Xu S., Qian Y., Hu R.Q. A data-driven preprocessing scheme on anomaly detection in big data applications // Proc. in 2017 IEEE Conf. on Computer Communications Workshops (INFOCOM WKSHPS), Atlanta, GA, USA, May, 2017. doi: 10.1109/INFCOMW.2017.8116481
7. Ye F., Qian Y., Hu R.Q., et al. Reliable energy-efficient uplink transmission for neighborhood area networks in smart grid // IEEE Trans. Smart Grid. 2015. V. 6 (5). P. 2179–2188.
8. Ye F., Qian Y., Hu R.Q. Energy efficient self-sustaining wireless neighborhood area network design for smart grid // IEEE Trans. Smart Grid. 2015. V. 6 (1). P. 220–229.
9. Ye F., Liang Y., Zhang H. et al. Design and analysis of a wireless sensor based monitoring network for transmission lines in smart grid // Wirel. Commun. Mob. Comput. 2016. V. 16 (10). P. 1209–1220.
10. Xu S., Qian Y. Quantitative study of reliable communication infrastructure in smart grid NAN // Proceedings in Design of Reliable Communication Networks. Kansas City, MO, USA, 2015. doi: 10.1109/DRCN.2015.7148994
11. Zuev K.M., Wu S., Beck J.L. Network reliability problem and its efficient solution by Subset Simulation // Probabilistic Engineering Mechanics. 2015. V. 40. P. 25–35.
12. ГОСТ Р 53111–2008. Устойчивость функционирования сети связи общего пользования. Требования и методы проверки. Введ. 2008-12-18. М. : Стандартинформ, 2009. 16 с.
13. Филин Б.П. Методы анализа структурной надежности сетей связи. М. : Радио и связь, 1988. 208 с.
14. Zhang H.C., Xu D.L., Lu C., Qi E.R., Tian C., Wu Y.S. Connection effect on amplitude death stability of multi-module floating airport // Ocean Eng. 2017. V. 129. P. 46–56.
15. Pino W., Gomes T., Kooij R. A Comparison between Two All-Terminal Reliability Algorithms // Journal of Advances in Computer Networks. 2015. V. 3 (4). P. 284–290.
16. Paredes R., Duenas-Orsorio L., Meel K.S., Vardi M.Y. Network Reliability Estimation in Theory and Practice : Preprint submitted to Reliability Engineering & System Safety. 2018. 26 p.
17. Батенков А.А., Батенков К.А., Фокин А.Б. Методы формирования множеств состояний телекоммуникационных сетей для различных мер связности // Труды СПИИРАН. 2020. № 3 (19). С. 644–673.
18. Батенков К.А. Точные и граничные оценки вероятностей связности сетей связи на основе метода полного перебора типовых состояний // Труды СПИИРАН. 2019. Т. 18, № 5. С. 1093–1118.
19. Райгородский А.М. Модели случайных графов и их применения // Труды МФТИ. 2010. Т. 2, № 4. С. 130–140.
20. Lin M., Ting C. A polynomial-time algorithm for computing K-terminal residual reliability of d-trapezoid graphs // Inf. Process. Lett. 2015. V. 115 (2). P. 371–376.
21. Housni K. An Efficient Algorithm for Enumerating all Minimal Paths of a Graph // International Journal of Advanced Computer Science and Applications, 2019. V. 10. P. 450–460. doi: 10.14569/IJACSA.2019.0100159
22. Bai G.H., Tian Z.G., Zuo M.J. An improved algorithm for finding all minimal paths in a network // Reliability Engineering and System Safety. 2016. V. 150. P. 1–10.
23. Pino W., Gomes T., Kooij R. A Comparison between Two All-Terminal Reliability Algorithms // Journal of Advances in Computer Networks. 2015. V. 3 (4). P. 284–290.
24. Silva J., Gomes T., Tipper D. et al. An effective algorithm for computing all-terminal reliability bounds // Networks, 2015. V. 66 (4). P. 282–295.

References

1. Chaturvedi, S.K. (2016) *Network Reliability Measures and Evaluation*. Scrivener Publishing LLC.
2. Ryabinin, I.A. & Cherkosov, G.N. (1981) *Logiko-veroyatnostnye metody issledovaniya nadezhnosti strukturno-slozhnykh sistem* [Logical-probabilistic methods for studying the reliability of structurally complex systems]. Moscow: Radio i svyaz'.
3. Batenkov, K.A., Batenkov, A.A. & Fokin, A.B. (2020) Methods for generating sets of telecommunication network States for various connectivity measures. *Trudy SPIIRAN – Proceedings of SPIIRAS*. 3(19). pp. 644–673. DOI: 10.15622/sp.2020.19.3.7
4. Batenkov, K.A. (2019) Accurate and boundary estimates of the connectivity probabilities of communication networks based on the method of full iteration of typical States. *Trudy SPIIRAN – Proceedings of SPIIRAS*. 18(5). pp. 1093–1118
5. Shengjie Xu, Yi Qian & Rose Qingyang Hu. (2018) Reliable and resilient access network design for advanced metering infrastructures in smart grid. *IET Smart Grid*. 1(1). pp. 24–30.
6. Xu, S., Qian, Y. & Hu, R.Q. (2017) A data-driven preprocessing scheme on anomaly detection in big data applications. *Proc. in 2017 IEEE Conf. on Computer Communications Workshops (INFOCOM WKSHPS)*. Atlanta, GA, USA. DOI: 10.1109/INFCOMW.2017.8116481
7. Ye, F., Qian, Y., Hu, R.Q., et al. (2015) Reliable energy-efficient uplink transmission for neighborhood area networks in smart grid. *IEEE Trans. Smart Grid*. 6(5). pp. 2179–2188.
8. Ye, F., Qian, Y. & Hu, R.Q. (2015) Energy efficient self-sustaining wireless neighborhood area network design for smart grid. *IEEE Trans. Smart Grid*. 6(1). pp. 220–229.
9. Ye, F., Liang, Y., Zhang, H., et al. (2016) Design and analysis of a wireless sensor based monitoring network for transmission lines in smart grid. *Wirel. Commun. Mob. Comput*. 16(10). pp. 1209–1220.

10. Xu, S. & Qian, Y. (2015) Quantitative study of reliable communication infrastructure in smart grid NAN'. *Proc. in Design of Reliable Communication Networks*. Kansas City, MO, USA. DOI: 10.1109/DRCN.2015.7148994
11. Zuev, K. M., Wu, S. & Beck, J. L. (2015) Network reliability problem and its efficient solution by Subset Simulation. *Probabilistic Engineering Mechanics*. 40. pp. 25–35.
12. GOST R 53111–2008. (2009) *Ustoychivost' funktsionirovaniya seti svyazi obshchego pol'zovaniya. Trebovaniya i metody proverki. Vved. 2008-12-18* [Stability of the public communication network. Requirements and verification methods. Introduced December 18, 2008]. Moscow: Standardinform.
13. Filin, B.P. (1988) *Metody analiza strukturnoy nadezhnosti setey svyazi* [Methods for Analyzing the Structural Reliability of Communication Networks]. Moscow: Radio i svyaz'.
14. Zhang, H.C., Xu, D.L., Lu, C., Qi, E. R., Tian, C. & Wu, Y.S. (2017) Connection effect on amplitude death stability of multi-module floating airport. *Ocean Eng.* 129. pp. 46–56.
15. Pino, W., Gomes, T. & Kooij, R. (2015) A Comparison between Two All-Terminal Reliability Algorithms. *Journal of Advances in Computer Networks*. 3(4). pp. 284–290.
16. Paredes, R., Duenas–Osorio, L., Meel, K.S. & Vardi, M.Y. (2018) Network Reliability Estimation in Theory and Practice. *Reliability Engineering & System Safety*. [Preprint].
17. Batenkov, A.A., Batenkov, K.A. & Fokin, A.B. (2017) Numerical characteristics of the structures of communication networks. *Trudy SPIIRAN – Proceedings of SPIIRAS*. 4(53). pp. 5–28.
18. Batenkov, K.A. (2018) Analysis and synthesis of communication network structures based on deterministic stability indicators. *Trudy SPIIRAN – Proceedings of SPIIRAS*. 3(58). pp. 128–159.
19. Raygorodskiy, A.M. (2010) Modeli sluchaynykh grafov i ikh primeneniya [Random graph models and their applications]. *Trudy MFTI*. 2(4). pp. 130–140.
20. Lin, M. & Ting, C. (2015) A polynomial-time algorithm for computing K-terminal residual reliability of d-trapezoid graphs. *Inf. Process. Lett.* 115(2). pp. 371–376. DOI: 10.1016/j.ipl.2014.10.013
21. Housni, K. (2019) An Efficient Algorithm for Enumerating all Minimal Paths of a Graph. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*. 10. pp. 450–460. DOI: 10.14569/IJACSA.2019.0100159
22. Bai, G.H., Tian, Z.G. & Zuo, M.J. (2016) An improved algorithm for finding all minimal paths in a network. *Reliability Engineering and System Safety*. 150. pp. 1–10. DOI: 10.1016/j.res.2016.01.011
23. Pino, W., Gomes, T. & Kooij, R. (2015) A Comparison between Two All-Terminal Reliability Algorithms. *Journal of Advances in Computer Networks*. 3(4). pp. 284–290. DOI: 10.18178/JACN.2015.3.4.183
24. Silva, J., Gomes, T., Tipper, D., et al. (2015) An effective algorithm for computing all-terminal reliability bounds. *Networks*. 66(4). pp. 282–295. DOI: 10.1002/net.21634

Информация об авторах:

Батенков Александр Александрович – профессор, доктор технических наук, профессор Орловского государственного университета им. И.С. Тургенева (Орел, Россия). E-mail: batenkov1957@mail.ru

Батенков Кирилл Александрович – доцент, доктор технических наук, сотрудник Академии Федеральной службы охраны Российской Федерации (Орел, Россия). E-mail: pustur@yandex.ru

Фокин Александр Борисович – сотрудник Академии Федеральной службы охраны Российской Федерации (Орел, Россия). E-mail: tatarin57ru@mail.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Batenkov Aleksandr A. (Doctor of Technical Sciences, Professor, Oryol State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russian Federation). E-mail: batenkov1957@mail.ru

Batenkov Kirill A. (Doctor of Technical Sciences, Accosiative Professor, Academy of Federal Guard Service, Orel, Russian Federation). E-mail: pustur@yandex.ru

Fokin Aleksandr B. (Academy of Federal Guard Service, Orel, Russian Federation). E-mail: tatarin57ru@mail.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 03.09.2021; принята к публикации 30.05.2022

Received 03.09.2021; accepted for publication 30.05.2022

Научная статья

УДК 81'322.2

doi: 10.17223/19988605/59/11

Подход к преобразованию обучающей выборки для повышения качества генерации заголовков научных текстов

Анна Валерьевна Глазкова

Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия, a.v.glazkova@utmn.ru

Аннотация. Предлагается подход к улучшению качества генерации заголовков, основанный на ранжировании примеров обучающей выборки в соответствии со значениями метрики ROUGE-1, вычисленных для текстов и заголовков, фильтрации данных и генерации искусственных обучающих примеров. Предложенный подход, протестированный на примере нейросетевой модели BART, показал улучшение качества генерации заголовков на материале двух англоязычных корпусов.

Ключевые слова: обработка естественного языка; автоматическое реферирование; анализ научных текстов, генерация заголовков; BART

Благодарности: Работа выполнена в рамках программы «Михаил Ломоносов» Германской службы академических обменов (DAAD) и Минобрнауки (№ 121040100251-1).

Для цитирования: Глазкова А.В. Подход к преобразованию обучающей выборки для повышения качества генерации заголовков научных текстов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 59. С. 99–107. doi: 10.17223/19988605/59/11

Original article

doi: 10.17223/19988605/59/11

Approach to transforming training data for improving the title generation performance for scientific texts

Anna V. Glazkova

University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation, a.v.glazkova@utmn.ru

Abstract. Due to the significant increase in the availability of scientific resources and their expansion, the analysis and systematization of scientific documents become an important task of natural language processing. Scientific articles contain much significant diverse information. Besides, their amount is constantly increasing, and tracking actual scientific publications takes a lot of time. Reducing the number of viewed documents and their generalization is possible using special tools for automatic text processing, including text classification, information extraction, and text summarization.

As regards the summarization of scientific documents, one of the particular problems is the generation of the title for the scientific paper. Taking into account the large volumes of scientific resources, the title is especially significant. The title accuracy affects the visibility of the paper by the scientific community and therefore the number of prospective readers. Moreover, some recent studies showed that the quality of the paper title influences the number of citations. Despite this, the authors often spend not enough time creating a good title, which makes it non-informative and non-reflecting the content of the article. To overcome this weakness, the methods of automatic title generation for scientific texts can be developed and used.

In this work, we propose an approach to improving the quality of title generation for scientific texts. The proposed approach uses training data filtering and generates new training examples. We consider the following steps: 1) determining recall-oriented ROUGE-1 scores between titles and source texts from the training set. These scores show how many words from the title came from the text. Thus, we can conclude the content correspondence between the title and the source text; 2) ranking examples of the training sample by the recall-oriented scores; 3) filtering examples having scores less than the threshold value k ($k \in [0; 1)$); 4) training model for title generation on the filtered training sample; 5) enriching the filtered training sample to the original size with the pseudo examples generated from the trained model. These examples are generated only for examples removed in the previous step.

The approach was tested on two English corpora of scientific texts (SciTLDR and arXiv). We used scientific abstracts as a source for text summarization. We evaluated the values of k in the range from 0,3 to 0,9 in increments of 0,1. In most cases, the results showed that the use of a training sample consisting of filtered and pseudo examples increases the performance of the title generation in comparison with the generation using the original training sample. In our experiments, the most preferred values of the threshold k were 0,7 and 0,8. Experiments were conducted using the BART-base model.

Keywords: natural language processing; automatic text summarization; analysis of scientific texts; title generation; BART

Acknowledgments: The research was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (no. 121040100251-1).

For citation: Glazkova, A.V. (2022) Approach to transforming training data for improving the title generation performance for scientific texts. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 59. pp. 99–107. doi: 10.17223/19988605/59/11

Целью автоматического реферирования является создание (генерация) более краткой версии исходного текста [1]. Методы автоматического реферирования в целом подразделяются на извлекающие (extractive) и генерирующие (abstractive). Первые строят реферат на основании алгоритмов отбора наиболее важных частей исходного текста [2–3], в то время как вторые обобщают содержание оригинального текста, создавая совершенно новый документ [4–5]. Ввиду сложности создания качественного текста на естественном языке при помощи компьютерных средств, извлекающие методы в настоящее время имеют более широкое практическое применение. Однако в последние годы наблюдается рост интереса к генерирующим методам, потенциально имеющим более широкий круг возможностей и вариантов использования [6].

Оценка качества алгоритмов автоматического реферирования выполняется с помощью специально разработанных метрик схожести текстов. Одной из распространенных метрик является ROUGE- N (Recall-Oriented Understudy for Gisting Evaluation), которая оценивает схожесть как долю пересекающихся n -грамм двух текстов [7]. Соответственно, ROUGE-1 измеряет соответствие униграмм (отдельных слов или токенов), ROUGE-2 – биграмм (пар слов или токенов) и т.д. Другими распространенными метриками качества автоматического реферирования являются BERTScore [8], выражающая сходство текстов на основе их контекстуализированных представлений, BLEU [9], определяющая меру качества реферирования одновременно для нескольких размеров n -грамм и др. Лучшие результаты в области генерирующего автоматического реферирования в последние годы демонстрируют модели, основанные на применении нейросетевой архитектуры Transformer. В частности, к ним относятся BART [10], Pegasus [11], T5 [12], BertSumAbs [13].

Генерация заголовков является важной задачей автоматического реферирования. Автоматическая генерация заголовков позволяет сократить временные затраты на написание текстов и обеспечить создание заголовков, объективно отражающих содержание текста [14]. К настоящему моменту предложен ряд подходов к автоматическому созданию заголовков, эти работы выполнены в основном на материале новостных текстов [15–17]. Тем не менее исследование методологии генерации заголовков для других жанров также представляется актуальной задачей. В частности, инструменты генерации заголовков научных текстов, широко представленных в многочисленных электронных библиотеках, способны значительно ускорить систематизацию материалов научных электронных ресурсов. Кроме того, исследования подтвердили, что качество заголовка научного текста влияет на видимость работы научному сообществу и количество цитирований [18–19].

Заголовок не всегда точно отражает содержание текста. Так, в работе [20] отмечено, что новостные заголовки зачастую не соответствуют исходным текстам с точки зрения пересечения n -грамм. Это затрудняет применение алгоритмов машинного обучения, которым для создания качественной модели необходима репрезентативная обучающая выборка. Авторы предложили использовать нейросетевые модели, обученные для автоматического определения логической связи между текстами (Natural Language Inference; NLI), чтобы очистить обучающую выборку от новостных заголовков, не являющихся логическими следствиями исходного текста, и тем самым повысить качество моделей автоматического реферирования. В отличие от заголовков текстов новостных порталов, заголовки научных статей являются более абстрактными и реже представляют собой пересказ содержания текста в рамках одного предложения [21–22]. Авторы работ [23–24] подчеркивают, что многие заголовки научных статей информируют о смысле научного текста, увиденном в подтекст, и понимаются ретроспективно, после прочтения текстов. Таким образом, применение моделей NLI для аналогичной операции над научными текстами видится менее перспективным.

В данной работе предлагается подход к повышению качества генерации заголовков для научных текстов, основанный на преобразованиях обучающих данных. Автор оценивает качество заголовков из обучающей выборки с помощью показателей полноты (*recall*) метрики ROUGE-1, рассчитанной для текстов заголовков и аннотаций научных статей. Полученные результаты показывают, какая доля слов заголовка получена из текста аннотации, т.е. насколько заголовок соответствует ее содержанию. Заголовки, имеющие низкий уровень соответствия, могут быть отсеяны (отфильтрованы) при обучении модели генерации заголовка. Так, «шумные» данные исключаются из процесса обучения. Также автор экспериментирует с генерацией искусственных обучающих примеров для отсеянных текстов. Результаты сравниваются с результатами модели, обученной на полном корпусе текстов (без фильтрации), и модели, обученной на заголовках, отобранных с помощью модели NLI. Эксперименты проведены на материале англоязычных корпусов с помощью модели BART для генерирующего реферирования текстов.

1. Текстовые корпуса

Исследование проводилось на материале двух текстовых корпусов, содержащих заголовки научных статей и их аннотации. Корпус SciTLDR [25] включает в себя фрагменты англоязычных научных статей компьютерной и информационной тематики, собранные на открытой платформе OpenReview.org. Корпус arXiv представляет собой фрагмент датасета arXiv¹, размещенного на платформе Kaggle. Он включает в себя фрагменты англоязычных препринтов, опубликованных в электронной библиотеке arXiv.org, относящиеся к следующим тематикам: статистика, биология, физика, экономика, компьютерные науки, математика. В качестве источника для генерации заголовков использованы тексты аннотаций научных статей. Основные статистические характеристики корпусов представлены в табл. 1.

Таблица 1

Характеристики текстовых корпусов

Характеристика	SciTLDR	arXiv
Общий объем (количество пар заголовок–аннотация)	3 229	20 000
Объем обучающей выборки	1 992	16 000
Объем валидационной выборки	619	2 000
Объем тестовой выборки	618	2 000
Средняя длина аннотации (в словах)	172,38	130,69
Средняя длина заголовка (в словах)	8,74	10,14
Количество уникальных слов (в аннотациях)	6 997	15 200
Количество уникальных слов (в заголовках)	1 597	4 529
Доля новых слов (*)	20,34	22,01

¹ <https://www.kaggle.com/Cornell-University/arxiv>

Для расчета доли новых слов (*) использовалась следующая формула:

$$New_words = \frac{|W_t \setminus W_a|}{|W_t|}, \quad (1)$$

где W_t и W_a – множества уникальных слов для заголовков и аннотаций соответственно. В (1) $|\cdot|$ обозначает мощность множества, знак $\setminus$ обозначает разность множеств.

2. Подход к преобразованию обучающей выборки

Предлагаемый подход к фильтрации и генерации обучающих примеров состоит в применении следующих шагов.

1. Определить значения показателей полноты метрики ROUGE-1, вычисленной для пар заголовков и аннотаций из обучающей выборки D .

Значение метрики ROUGE-1 относительно задачи автоматического реферирования характеризует степень сходства униграмм сгенерированного текста (в данном случае заголовка) и исходного текста (аннотации) и вычисляется по принципу нахождения F -меры:

$$ROUGE-1 = \frac{2 \times ROUGE-1(recall) \times ROUGE-1(precision)}{ROUGE-1(recall) + ROUGE-1(precision)}. \quad (2)$$

При этом значение показателей полноты ($recall$) метрики показывает, какая доля слов, присутствующих в заголовке, присутствует в тексте аннотации.

$$ROUGE-1(recall) = \frac{\text{количество совпадающих униграмм для заголовка и текста}}{\text{количество униграмм заголовка}}. \quad (3)$$

Значение показателей точности ($precision$) метрики характеризует долю слов текста, присутствующих в заголовке.

$$ROUGE-1(precision) = \frac{\text{количество совпадающих униграмм для заголовка и текста}}{\text{количество униграмм текста}}. \quad (4)$$

2. Ранжировать примеры обучающей выборки в соответствии с попарными значениями ROUGE-1 ($recall$).

3. Отсеять примеры, имеющие значения ROUGE-1 ($recall$), меньшие порогового коэффициента k , т.е. такие пары аннотаций и заголовков, в которых заголовок характеризуется наименьшим содержанием слов, присутствующих в аннотации. Значение k находится в диапазоне $[0; 1]$.

4. Обучить модель на фильтрованной обучающей выборке $D_{filtered}$.

С помощью обученной модели сгенерировать новые заголовки для примеров, которые были отфильтрованы, получив выборку $D_{generated}$ размера, соответствующего размеру выборки D .

3. Эксперименты и результаты

3.1. Модель

В качестве модели генерации заголовков использовалась BART-base, вариация модели BART для автоматического реферирования, комбинирующей в себе энкодер BERT (Bidirectional Encoder Representations from Transformers) [26] и декодер GPT-2 [27]. Модель имеет следующие характеристики: количество слоев – 12 (6 слоев энкодера и 6 слоев декодера), размер скрытого слоя – 768, количество параметров – 139 млн, стратегия декодирования – лучевой поиск (количество шагов – 5), кросс-энтропийная функция потерь.

В рамках экспериментов каждая модель была обучена (fine-tuned) на обучающей выборке в течение 3 эпох с размером батча, равным 4, и максимальной длиной входной последовательности, равной 256 токенам. После каждой итерации обучения проводилась проверка модели на валидационной

выборке. Лучшая модель оценивалась на тестовой выборке. Для реализации использовались библиотеки PyTorch [28] и Transformers [29].

3.2. Преобразования обучающей выборки

На начальном этапе проведения экспериментов для текстов обучающих выборок обоих корпусов были вычислены значения ROUGE-1 (*recall*) (п. 2, шаг 1). Как видно из данных, проиллюстрированных рис. 1, большая часть примеров в обучающих выборках обоих корпусов имеет значение метрики, большее либо равное 0,8 (более 64% примеров из корпуса SciTLDR и более 70% из arXiv). Преобладающей категорией при этом являются пары аннотаций и заголовков, для которых значение метрики равно или превышает 0,9 (40,4% и 47,7% соответственно). Это значит, что в большинстве случаев заголовок научного текста преимущественно состоит из слов, входящих в состав аннотации. Однако в случае обоих корпусов существует значительное количество примеров, значение ROUGE-1 (*recall*) для которых не превышает 0,5 (4,7% для SciTLDR и 5,2% для arXiv). Примеры с низким значением метрики можно рассматривать как «шумные» и попытаться улучшить качество модели автоматического реферирования, исключив их из процесса обучения.

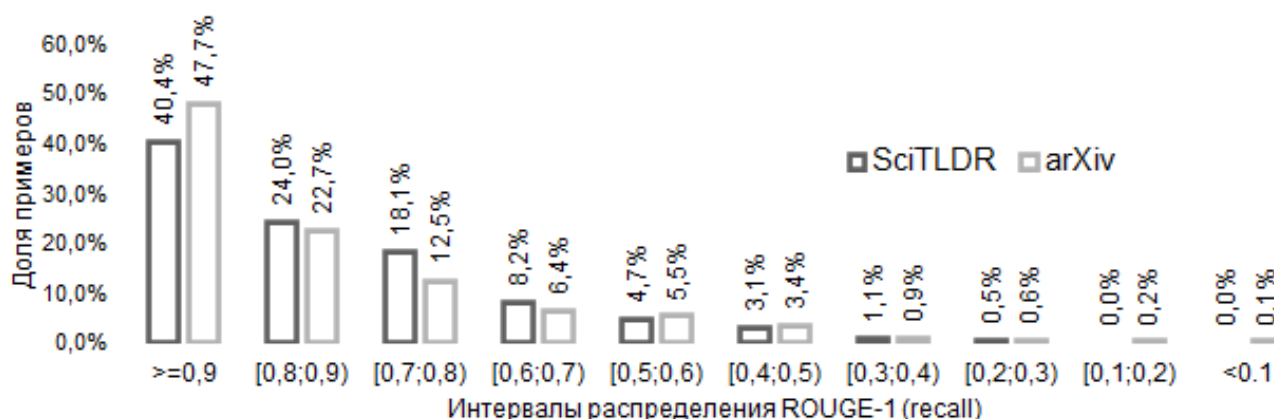


Рис. 1. Распределение значений показателей полноты ROUGE-1 для примеров обучающей выборки.

Fig. 1. Distribution of recall-oriented ROUGE-1 values for the training set

После ранжирования примеров обучающей выборки в соответствии со значениями ROUGE-1 (*recall*) (п. 2, шаг 2) для отсеивания обучающих примеров были выбраны значения $k \in [0,5; 1)$ с шагом 0,1 (п. 2, шаг 3). Меньшие значения k не оценивались, поскольку для используемых корпусов количество примеров, отсеиваемых при $k \leq 0,4$ достаточно мало (менее 3% от размера D). Размеры фильтрованной выборки $D_{filtered}$ для двух корпусов и различных значений k представлены в табл. 2.

Таблица 2

Размеры фильтрованной выборки $D_{filtered}$ (в скобках указана доля от размера исходной выборки)

k	SciTLDR	arXiv
0,5	1 901 (95,4%)	15 164 (94,8%)
0,6	1 808 (90,8%)	14 292 (89,3%)
0,7	1 644 (82,5%)	13 267 (82,9%)
0,8	1 284 (64,5%)	11 261 (70,4%)
0,9	805 (40,4%)	7 636 (47,7%)

Фильтрованная выборка $D_{filtered}$ использовалась для обучения модели генерации заголовков (п. 2, шаг 4). Далее с помощью обученной модели были сгенерированы искусственные заголовки для отсеянных примеров (п. 2, шаг 5). Была сформирована обучающая выборка $D_{generated}$, состоящая из примеров, входящих в выборку $D_{filtered}$, и искусственных примеров.

3.4. Результаты

В табл. 3 сравниваются результаты моделей, обученных на разных типах обучающих выборок:

- 1) обучение на исходной выборке (D), базовая модель;
- 2) обучение на фильтрованной обучающей выборке ($D_{filtered}$) при различных значениях k ;
- 3) обучение на выборке, состоящей из отфильтрованных и искусственных примеров ($D_{generated}$)

при различных значениях k .

Полученные результаты сравнены с результатами моделей, обученных на выборках, фильтрованных с помощью модели NLI. По аналогии с [20] в данной работе использовалась модель RoBERTa-large-mnli [30] для определения логической связи между двумя текстами, обученная на корпусе MultiNLI [31]. Для формирования фильтрованной выборки $D_{NLI-filtered}$ были отсеяны примеры, в которых тексты заголовков не являются логически связанными с текстами аннотаций. Размер выборки $D_{NLI-filtered}$ составил 1 047 текстов для SciTLDR и 8 705 текстов для arXiv. Далее по аналогии с $D_{generated}$ была сформирована выборка $D_{NLI-generated}$, включающая в себя фильтрованные и искусственные примеры. Сравнение качества генерации заголовков проводится с помощью четырех метрик: ROUGE-1, ROUGE-2, ROUGE-L (ROUGE- N , рассчитанная для наибольшей общей последовательности), BERTScore. Лучшие значения с точки зрения каждой метрики выделены полужирным шрифтом.

Таблица 3

Результаты, %

Корпус	Обучающая выборка	ROUGE-1	ROUGE-2	ROUGE-L	BERTScore
SciTLDR	D	45,3	26,81	41,81	88,94
	$D_{filtered}$ ($k = 0,5$)	45,33	26,7	41,8	88,93
	$D_{filtered}$ ($k = 0,6$)	45,18	26,56	41,66	88,87
	$D_{filtered}$ ($k = 0,7$)	44,6	26,23	41,05	88,85
	$D_{filtered}$ ($k = 0,8$)	44,53	26,27	41,15	88,95
	$D_{filtered}$ ($k = 0,9$)	43,7	24,41	39,49	88,72
	$D_{NLI-filtered}$	43,27	24,56	39,51	88,75
	$D_{generated}$ ($k = 0,5$)	45,25	26,8	41,78	88,92
	$D_{generated}$ ($k = 0,6$)	45,14	26,8	41,08	88,8
	$D_{generated}$ ($k = 0,7$)	45,36	26,79	42,2	88,97
	$D_{generated}$ ($k = 0,8$)	45,32	26,87	42,11	88,96
	$D_{generated}$ ($k = 0,9$)	44,01	25,17	39,56	88,83
	$D_{NLI-generated}$	44,05	25,44	40,87	88,77
arXiv	D	42,35	23,4	38,3	87,83
	$D_{filtered}$ ($k = 0,5$)	42,3	23,42	38,3	87,82
	$D_{filtered}$ ($k = 0,6$)	42,85	24,13	38,41	87,88
	$D_{filtered}$ ($k = 0,7$)	43,1	24,25	39,19	87,91
	$D_{filtered}$ ($k = 0,8$)	43,14	24,22	39,24	87,94
	$D_{filtered}$ ($k = 0,9$)	42,14	22,88	37,99	87,78
	$D_{NLI-filtered}$	42,25	23,08	38,03	87,81
	$D_{generated}$ ($k = 0,5$)	42,44	23,7	38,56	87,84
	$D_{generated}$ ($k = 0,6$)	42,57	23,88	39	87,84
	$D_{generated}$ ($k = 0,7$)	43,4	24,32	39,22	87,88
	$D_{generated}$ ($k = 0,8$)	43,44	24,31	39,25	87,95
	$D_{generated}$ ($k = 0,9$)	42,11	22,93	38,01	87,77
	$D_{NLI-generated}$	42,3	22,9	38,03	87,79

Обучение на выборке $D_{filtered}$ для корпуса arXiv показало улучшение результатов в сравнении с базовой моделью при значениях k от 0,6 до 0,8. В остальных случаях качество сопоставимо с качеством базовой модели. Для SciTLDR качество постепенно снижается с уменьшением размера $D_{filtered}$.

Обучение на выборке $D_{generated}$ в большинстве случаев улучшило результаты на корпусе arXiv (лучшие результаты получены при $k = 0,7$ и $k = 0,8$). Для SciTLDR улучшение заметно также при $k = 0,7$ и $k = 0,8$. При этом при $k = 0,9$ качество всех моделей резко ухудшается. Модели, использующие фильтрацию данных с помощью NLI, не демонстрируют улучшения качества в сравнении с базовой моделью. Это подтверждает гипотезу о неэффективности такого подхода для научных текстов. Выявленные различия в результатах на двух корпусах обусловлены, вероятно, меньшим размером корпуса SciTLDR.

Заключение

В работе предложен подход к повышению качества генерации заголовков для научных текстов, использующий фильтрацию обучающей выборки на основе оценки показателей полноты метрики ROUGE-1 и генерации искусственных примеров. Тестирование подхода на материале двух текстовых корпусов показало его результативность и позволило выявить наиболее предпочтительные значения порогового коэффициента. Полученные результаты могут быть применены в системах автоматического реферирования и электронных научных библиотеках. Пути дальнейшего развития данного исследования являются, с одной стороны, автоматизация определения порогового коэффициента и, с другой стороны, тестирование предложенного подхода с помощью других моделей автоматического реферирования и на других корпусах (в том числе русскоязычных).

Список источников

1. El-Kassas W. S. et al. Automatic text summarization: a comprehensive survey // *Expert Systems with Applications*. 2021. V. 165. Art. 113679.
2. Nallapati R., Zhai F., Zhou B. Summarunner: A recurrent neural network based sequence model for extractive summarization of documents // *Thirty-First AAAI Conference on Artificial Intelligence*. 2017. P. 2101–2110.
3. Chen J., Zhuge H. Extractive summarization of documents with images based on multi-modal RNN // *Future Generation Computer Systems*. 2019. V. 99. P. 186–196.
4. Song S., Huang H., Ruan T. Abstractive text summarization using LSTM-CNN based deep learning // *Multimedia Tools and Applications*. 2019. V. 78 (1). P. 857–875.
5. Hanunggul P.M., Suyanto S. The impact of local attention in LSTM for abstractive text summarization // *International Seminar on Research of Information Technology and Intelligent Systems (ISRITI)*. 2019. P. 54–57.
6. Allahyari M. et al. Text Summarization Techniques: a Brief Survey // *International Journal of Advanced Computer Science and Applications (IJACSA)*. 2017. V. 8 (10). P. 397–405.
7. Lin C.Y. Rouge: A package for automatic evaluation of summaries // *Text summarization branches out*. Barcelona, 2004. P. 74–81.
8. Zhang T. et al. BERTScore: Evaluating Text Generation with BERT // *International Conference on Learning Representations*. 2020. URL: <https://arxiv.org/pdf/1904.09675v1.pdf>
9. Papineni K. et al. BLEU: a method for automatic evaluation of machine translation // *Proc. of the 40th annual meeting of the Association for Computational Linguistics*. 2002. P. 311–318.
10. Lewis M. et al. BART: Denoising Sequence-to-Sequence Pre-training for Natural Language Generation, Translation, and Comprehension // *Proc. of the 58th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics*. 2020. P. 7871–7880.
11. Zhang J. et al. Pegasus: Pre-training with extracted gap-sentences for abstractive summarization // *International Conference on Machine Learning*. 2020. P. 11328–11339.
12. Raffel C. et al. Exploring the Limits of Transfer Learning with a Unified Text-to-Text Transformer // *Journal of Machine Learning Research*. 2020. V. 21. P. 1–67.
13. Liu Y., Lapata M. Text Summarization with Pretrained Encoders // *Proc. of the 2019 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing and the 9th International Joint Conference on Natural Language Processing (EMNLP-IJCNLP)*. 2019. P. 3730–3740.
14. Shen S.Q. et al. Recent advances on neural headline generation // *Journal of Computer Science and Technology*. 2017. V. 32 (4). P. 768–784.
15. Zhang R. et al. Question headline generation for news articles // *Proc. of the 27th ACM international conference on information and knowledge management*. 2018. P. 617–626.
16. Gavrilov D., Kalaidin P., Malykh V. Self-attentive model for headline generation // *European Conference on Information Retrieval*. 2019. P. 87–93.
17. Bukhtiyarov A., Gusev I. Advances of Transformer-Based Models for News Headline Generation // *Conference on Artificial Intelligence and Natural Language*. 2020. P. 54–61.
18. Putra J.W.G., Khodra M.L. Automatic title generation in scientific articles for authorship assistance: a summarization approach // *Journal of ICT Research and Applications*. 2017. № 11 (3). P. 253–267.

19. Fox C.W., Burns C.S. The relationship between manuscript title structure and success: editorial decisions and citation performance for an ecological journal // *Ecology and Evolution*. 2015. № 5 (10). P. 1970–1980.
20. Matsumaru K., Takase S., Okazaki N. Improving Truthfulness of Headline Generation // *Proc. of the 58th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics*. 2020. P. 1335–1346.
21. Harmon J.E., Gross A.G. The structure of scientific titles // *Journal of Technical Writing and Communication*. 2009. V. 39 (4). P. 455–465.
22. Soler V. Writing titles in science: An exploratory study // *English for specific purposes*. 2007. V. 26 (1). P. 90–102.
23. Суворова С.А. Лексическая детерминированность заголовков научных статей // *Ученые записки Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. Филологические науки*. 2011. Т. 24, № 1-1. С. 163–166.
24. Филоненко Т.А. Аппривные заголовки в научной речи // *Известия Самарского научного центра Российской академии наук. Социальные, гуманитарные, медико-биологические науки*. 2008. Т. 10, № 6-2. С. 290–296.
25. Cachola I. et al. TLDR: Extreme Summarization of Scientific Documents // *Proc. of the 2020 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing: Findings*. 2020. P. 4766–4777.
26. Devlin J. et al. BERT: Pre-training of Deep Bidirectional Transformers for Language Understanding // *Proc. of NAACL-HLT*. 2019. P. 4171–4186.
27. Radford A. et al. Language models are unsupervised multitask learners // *OpenAI blog*. 2019. V. 1 (8). P. 9.
28. Paszke A. et al. Pytorch: An imperative style, high-performance deep learning library // *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2019. V. 32. P. 8026–8037.
29. Wolf T. et al. Transformers: State-of-the-art natural language processing // *Proc. of the 2020 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing: System Demonstrations*. 2020. P. 38–45.
30. Liu Y. et al. Roberta: a robustly optimized bert pretraining approach // *arXiv preprint arXiv:1907.11692*. 2019.
31. Williams A., Nangia N., Bowman S. A Broad-Coverage Challenge Corpus for Sentence Understanding through Inference // *Proc. of the 2018 Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies*. 2018. V. 1: Long Papers. P. 1112–1122.

References

1. El-Kassas, W.S. et al. (2021) Automatic text summarization: A comprehensive survey. *Expert Systems with Applications*. 165. pp. 113679.
2. Nallapati, R., Zhai, F. & Zhou, B. (2017) Summarunner: A recurrent neural network based sequence model for extractive summarization of documents. *Thirty-First AAAI Conference on Artificial Intelligence*. pp. 2101–2110.
3. Chen, J. & Zhuge, H. (2019) Extractive summarization of documents with images based on multi-modal RNN. *Future Generation Computer Systems*. 99. pp. 186–196. DOI: 10.1016/j.future.2019.04.045
4. Song, S., Huang, H. & Ruan, T. (2019) Abstractive text summarization using LSTM-CNN based deep learning. *Multimedia Tools and Applications*. 78(1). pp. 857–875. DOI: 10.1007/s11042-018-5749-3
5. Hanunggul, P.M. & Suyanto, S. (2019) The impact of local attention in LSTM for abstractive text summarization. *International Seminar on Research of Information Technology and Intelligent Systems (ISRITI)*. pp. 54–57.
6. Allahyari, M. et al. (2017) Text Summarization Techniques: A Brief Survey. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications (IJACSA)*. 8(10). pp. 397–405.
7. Lin, C.Y. (2004) *Rouge: A package for automatic evaluation of summaries*. Association for Computational Linguistics. pp. 74–81.
8. Zhang, T. et al. (2020) BERTScore: Evaluating Text Generation with BERT. *International Conference on Learning Representations*.
9. Papineni, K. et al. (2002) BLEU: a method for automatic evaluation of machine translation. *Proceedings of the 40th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics*. July. pp. 311–318.
10. Lewis, M. et al. (2020) BART: Denoising Sequence-to-Sequence Pre-training for Natural Language Generation, Translation, and Comprehension. *Proceedings of the 58th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics*. pp. 7871–7880.
11. Zhang, J. et al. (2020) Pegasus: Pre-training with extracted gap-sentences for abstractive summarization. *International Conference on Machine Learning*. pp. 11328–11339.
12. Raffel, C. et al. (2020) Exploring the Limits of Transfer Learning with a Unified Text-to-Text Transformer. *Journal of Machine Learning Research*. 21. pp. 1–67.
13. Liu, Y. & Lapata, M. (2019) Text Summarization with Pretrained Encoders. *Proceedings of the 2019 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing and the 9th International Joint Conference on Natural Language Processing (EMNLP-IJCNLP)*. pp. 3730–3740.
14. Shen, S. Q. et al. (2017) Recent advances on neural headline generation. *Journal of Computer Science and Technology*. 32(4). pp. 768–784.
15. Zhang, R. et al. (2018) Question headline generation for news articles. *Proceedings of the 27th ACM International Conference on Information and Knowledge Management*. pp. 617–626.
16. Gavrilov, D., Kalaidin, P. & Malykh, V. (2017) Self-attentive model for headline generation. *European Conference on Information Retrieval*. pp. 87–93.
17. Bukhtiyarov, A. & Gusev, I. (2020) Advances of Transformer-Based Models for News Headline Generation. *Conference on Artificial Intelligence and Natural Language*. pp. 54–61.

18. Putra, J.W.G. & Khodra, M.L. (2017) Automatic title generation in scientific articles for authorship assistance: a summarization approach. *Journal of ICT Research and Applications*. 11(3). pp. 253–267. DOI: 10.5614/itbj.ict.res.appl.2017.11.3.3
19. Fox, C.W., & Burns, C.S. (2015) The relationship between manuscript title structure and success: editorial decisions and citation performance for an ecological journal. *Ecology and Evolution*. 5(10). pp. 1970–1980. DOI: 10.5614/itbj.ict.res.appl.2017.11.3.3
20. Matsumaru, K., Takase, S. & Okazaki, N. (2020) Improving Truthfulness of Headline Generation. *Proceedings of the 58th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics*. pp. 1335–1346.
21. Harmon, J.E. & Gross, A.G. (2009) The structure of scientific titles. *Journal of Technical Writing and Communication*. 39(4). pp. 455–465.
22. Soler, V. (2007) Writing titles in science: An exploratory study. *English for Specific Purposes*. 26(1). pp. 90–102. DOI: 10.1016/j.esp.2006.08.001
23. Suvorova, S.A. (2011) Leksicheskaya determinirovannost' zagolovkov nauchnykh statey [Lexical Determination of Scientific Article Headlines]. *Uchenye zapiski Krymskogo federal'nogo universiteta im. V.I. Vernadskogo. Filologicheskie nauki*. 24(1-1). pp. 163–166.
24. Filonenko, T.A. (2008) Attractive Scientific Discourse Headings. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra Rossiyskoy akademii nauk. Sotsial'nye, gumanitarnye, mediko-biologicheskie nauki – Izvestiya of Samara Science Centre of the Russian Academy of Sciences. Social, Humanitarian, Medicobiological sciences*. 10(6-2). pp. 290–296.
25. Cachola, I. et al. (2020) TLDR: Extreme Summarization of Scientific Documents. *Proceedings of the 2020 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing: Findings*. pp. 4766–4777.
26. Devlin, J. et al. (2019) BERT: Pre-training of Deep Bidirectional Transformers for Language Understanding. *Proceedings of NAACL-HLT*. pp. 4171–4186.
27. Radford, A. et al. (2019) Language models are unsupervised multitask learners. *OpenAI blog*. 1(8). p. 9.
28. Paszke, A. et al. (2019) Pytorch: An imperative style, high-performance deep learning library. *Advances in Neural Information Processing Systems*. 32. pp. 8026–8037. DOI: 10.48550/arXiv.1912.01703
29. Wolf, T. et al. (2020) Transformers: State-of-the-art natural language processing. *Proceedings of the 2020 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing: System Demonstrations*. pp. 38–45.
30. Liu, Y. et al. (2019) Roberta: A robustly optimized bert pretraining approach. arXiv preprint arXiv:1907.11692.
31. Williams, A., Nangia, N. & Bowman, S. (2018) A Broad-Coverage Challenge Corpus for Sentence Understanding through Inference. *Proceedings of the 2018 Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies*. Vol. 1. pp. 1112–1122.

Информация об авторе:

Глазкова Анна Валерьевна – кандидат технических наук, доцент кафедры программного обеспечения Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета (Тюмень, Россия). E-mail: a.v.glazkova@utmn.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Information about the author:

Glazkova Anna V. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation). E-mail: a.v.glazkova@utmn.ru

The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 20.11.2021; принята к публикации 30.05.2022

Received 20.11.2021; accepted for publication 30.05.2022

Научная статья

УДК 621.382

doi: 10.17223/19988605/59/12

Использование синтеза высокого уровня для реализации на ПЛИС адаптивных LMS-фильтров, работающих в формате с плавающей запятой

Инна Владимировна Ушенина

Пензенский государственный технологический университет, Пенза, Россия, ivl23@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрена возможность использования синтеза высокого уровня для реализации на ПЛИС адаптивных фильтров наименьших квадратов (LMS-фильтров), работающих в формате с плавающей запятой. Разработка адаптивных фильтров не автоматизирована в средах проектирования устройств на ПЛИС и является трудоемким и длительным процессом, а синтез высокого уровня позволяет сэкономить время – и за счет описания фильтра на высоком уровне абстракции, и за счет возможности быстрой смены настроек, влияющих на архитектуру фильтра. В статье представлены исходный код, описывающий алгоритм LMS, настройки и результаты синтеза высокого уровня – два варианта описания LMS-фильтра, готовые к реализации на ПЛИС. Показано, что эффективной мерой сокращения времени выполнения LMS-алгоритма является конвейеризация цикла вычислений.

Ключевые слова: синтез высокого уровня; ПЛИС; LMS-фильтр; формат с плавающей запятой; директивы синтеза

Для цитирования: Ушенина И.В. Использование синтеза высокого уровня для реализации на ПЛИС адаптивных LMS-фильтров, работающих в формате с плавающей запятой // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 59. С. 108–116. doi: 10.17223/19988605/59/12

Original article

doi: 10.17223/19988605/59/12

FPGA implementation of floating-point LMS adaptive filters using high-level synthesis

Inna V. Ushenina

Penza State Technological University, Penza, Russian Federation, ivl23@yandex.ru

Abstract. This paper considers how to use high-level synthesis (HLS) tools for FPGA implementation of floating-point least mean square (LMS) adaptive filters. The essence of high-level synthesis is to transform a source code written in a programming language like C or C++ to an RTL code which is later used for creating an IP module. High-level synthesis provides a possibility to concentrate on the algorithm and architecture of a scheme being developed, while FPGA resources and their connectivity are determined automatically. This is especially important when developing adaptive filters on FPGAs because the automated FPGA design of adaptive filters is not supported in IDEs just as it is done for FIR filters.

In this paper, the source code of the LMS adaptive algorithm is written in C++ language. In the main function of the source code, input, output, and internal variables are presented as single-precision, floating-point numbers in line with IEEE 754 standard. Samples of the input signal and desired signal are the input variables, while samples of the output signal and error signal are the output variables. During a high-level synthesis procedure, input and output variables of the main function are transformed into input and output ports of the IP module being synthesized.

HLS is carried out under the control of synthesis settings and directives formed separately from the source code. A combination of the source code with different synthesis settings and (or) directives leads to different results, each of which is called a project solution. In this paper, the same source code of the LMS adaptive algorithm is used

to create two solutions of the LMS adaptive filter under the control of two different sets of synthesis settings and directives. Within each solution, the LMS filters were synthesized of the order ranging from 32 to 512 coefficients. For each set of synthesis settings, the minimum clock frequency was set equal to 100 MHz. The other synthesis settings and directives were left default for the first solution, while for the second one, the loop of operations contained in the source code was pipelined. That is, in the first LMS filter solution, the next loop iteration starts after the previous one has ended. In the second solution, the next iteration starts five cycles after the previous one, whereas in both solutions the whole iteration needs twenty clock cycles. In the LMS algorithm, the loop contains the major part of calculations, including filter coefficients updating and convolution between the input signal and the current impulse response of the filter. Therefore, pipelining of the loop has enabled the latency of the LMS algorithm to be significantly reduced, namely by more than 70%.

It has been shown that for both solutions, operations are scheduled into clock cycles similarly, and the basic operations such as multiplication, addition, and RAM reading and writing are performed in the same number of cycles. The order of operations is, in general, the same for both solutions.

Besides timing characteristics, resource utilization has been assessed for both solutions. It has been shown that the loop pipelining affects the resource utilization insignificantly: the FF and LUT utilization increases by not more than 31% and 10%, respectively. The increased utilization of FFs and LUTs in the second solution is caused by the more complicated control logic and by the storage of more intermediate results of calculations. The utilization of DSP blocks and block RAMs is the same for both solutions.

It has also been shown that when increasing the filter order, the utilization of memory grows up in proportion to it, but the utilization of DSP blocks remains unchanged, and the utilization of FFs and LUTs increases very little.

High-level synthesis was carried out in Vivado HLS 2018.3. The LMS filter IP modules are intended to be implemented on Xilinx XC7A200tfg-1 FPGA.

Keywords: high-level synthesis; FPGA; LMS filter; floating point format; synthesis directives

For citation: Ushenina, I.V. (2022) FPGA implementation of floating-point LMS adaptive filters using high-level synthesis. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 59. pp. 108–116. doi: 10.17223/19988605/59/12

Адаптивные фильтры с алгоритмом наименьших квадратов (LMS) применяются для идентификации систем, эхокомпенсации в телефонных сетях, выравнивания характеристик электрических каналов связи, адаптивного формирования диаграмм направленности в антенных решетках, подавления шумов, отслеживания объектов и др. Алгоритм LMS надежен, сравнительно прост в технической реализации и имеет большое количество модификаций, учитывающих специфику решаемых задач [1–4]. Для эффективной работы LMS-фильтра предпочтителен формат с плавающей запятой из-за более высокой скорости сходимости и значительно меньшей мощности остаточного сигнала ошибки [5, 6].

Для аппаратной реализации адаптивных фильтров, работающих в формате с плавающей запятой, в целом более приспособлены сигнальные процессоры. ПЛИС представляют интерес, когда сигнальные процессоры не могут обеспечить достаточную производительность. Высокая производительность требуется, например, в устройствах отслеживания источника звука в условиях реверберации [7–10], слепой идентификации каналов [11], улучшения качества звукозаписи и звуковоспроизведения [12], где адаптивные фильтры должны быть многоканальными.

Возможности современных ПЛИС (FPGA) позволяют использовать их для решения широкого круга задач: цифровой обработки сигналов [6, 13–18], высокопроизводительных вычислений [19, 20], машинного обучения и реализации нейронных сетей [21] и др. Тем не менее выбор ПЛИС для реализации LMS-фильтра, работающего в формате с плавающей запятой, сопряжен с рядом проблем. Так, встроенными аппаратными блоками для вычислений в формате с плавающей запятой располагают очень немногие ПЛИС. В остальных случаях арифметические устройства нужно собирать из блоков цифровой обработки сигналов, ориентированных на формат с фиксированной запятой, и (или) программируемой логики общего назначения. При этом разработка адаптивных фильтров в средах проектирования устройств на ПЛИС не автоматизирована, т.е. не предусмотрены соответствующие модули интеллектуальной собственности (IP-модули), графический пользовательский интерфейс и т.п.

В литературе в основном описаны варианты реализации на ПЛИС LMS-фильтров, работающих в формате с фиксированной запятой (см. напр.: [6, 13–17]). Описания LMS-фильтров в этих работах выполнены на языке VHDL или Verilog – как вручную [17], так и автоматически, при использовании IP-модулей сумматоров и умножителей [6, 13] или инструмента System Generator, встраиваемого в MATLAB [14–16]. Реализация LMS-фильтров, выполняющих вычисления над числами в формате

с плавающей запятой, описывается в литературе реже. В [6] сравниваются результаты реализации 32-разрядного LMS-фильтра в форматах с фиксированной и плавающей запятой. Для описания фильтра, работающего в формате с фиксированной запятой, в [6] использован VHDL-пакет *fixed-point package*; для реализации фильтра, работающего в формате с плавающей запятой, – IP-модули сумматора и умножителя. В [18] описан на языке Verilog и реализован на ПЛИС вычислительный модуль, работающий в формате с плавающей запятой и включающий в себя LMS-фильтр.

В настоящей работе рассмотрена возможность использования синтеза высокого уровня для реализации на ПЛИС LMS-фильтров, работающих в формате с плавающей запятой. Суть синтеза высокого уровня (High-Level Synthesis; HLS) заключается в преобразовании исходного кода, написанного на языке программирования (например, C или C++), в описание устройства на уровне регистровых передач, т.е. на языке VHDL или Verilog. На языке программирования описывается только алгоритм, без уточнения деталей его реализации. Один и тот же исходный код можно реализовать с различным набором настроек и директив и получить различные результаты, называемые решениями HLS-проекта [22]. То есть можно в короткий срок получить описания устройств, работающих по одному и тому же алгоритму, но имеющих различную архитектуру, производительность и т.д. Для встраивания того или иного решения в проект, реализуемый на ПЛИС, требуется преобразовать это решение в IP-модуль.

В данной работе из исходного кода на языке C++ получены и проанализированы два решения LMS-фильтра: с последовательным выполнением всех операций, предусмотренных алгоритмом LMS, и с конвейеризацией цикла операций, содержащегося в алгоритме LMS. В цикле выполняется основная часть операций алгоритма LMS, поэтому конвейеризация позволила существенно сократить время его выполнения (латентность). В рамках каждого решения получены результаты синтеза описаний фильтров с порядком от 32 до 512 при заданной тактовой частоте 100 МГц. Полученные решения оценены по критериям ресурсоемкости, латентности и распределения операций алгоритма во времени. Для синтеза высокого уровня использован синтезатор Vivado HLS 2018.3 от фирмы Xilinx [22]. Полученные IP-модули LMS-фильтра предназначены для ПЛИС XC7A200tfg-1 от Xilinx.

1. LMS-фильтр и описание его работы на языке C++

1.1. LMS-фильтр

На каждом шаге дискретизации LMS-фильтр принимает по одному отсчету входного сигнала – $x[n]$, и требуемого сигнала – $d[n]$, и формирует отсчеты выходного сигнала и сигнала ошибки – $y[n]$ и $e[n]$ соответственно [1].

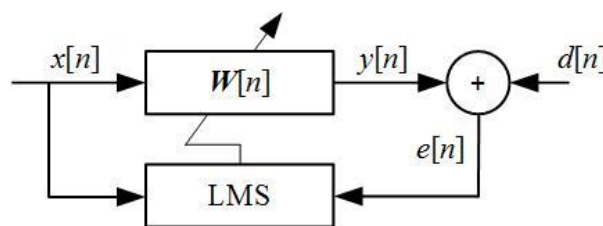


Рис. 1. Структурная схема LMS-фильтра
Fig. 1. LMS filter block diagram

Как показано на рис. 1, LMS-фильтр содержит КИХ-фильтр с коэффициентами $W[n]$, обрабатывающий отсчеты входного сигнала согласно формуле (1), и блок адаптации LMS, где происходит перерасчет коэффициентов КИХ-фильтра по формуле (2):

$$y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} w[i] \cdot x[n-i], \quad (1)$$

$$W[n+1] = W[n] + \mu e[n] X[n]. \quad (2)$$

В (1) n – номер шага дискретизации, N – порядок фильтра, $w[i]$ – коэффициенты фильтра, образующие вектор $W[n]$, $x[n-i]$ – отсчеты входного сигнала, образующие вектор $X[n]$. В (2) $W[n+1]$ и $W[n]$ – векторы коэффициентов фильтра, действующие на $[n+1]$ -м и n -м шагах дискретизации, $e[n]$ – сигнал ошибки, т.е. разность $d[n]$ и $y[n]$, $X[n]$ – вектор отсчетов входного сигнала, μ – параметр, определяющий скорость сходимости алгоритма и выбираемый с учетом максимального собственного значения корреляционной матрицы входного сигнала $\lambda_{\max}$ (3):

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\max}}. \quad (3)$$

1.2. Исходный код

Для выполнения синтеза высокого уровня одна из функций исходного кода должна быть объявлена главной, чтобы ее входные и выходные переменные были преобразованы во входные и выходные порты устройства. Разработанный здесь исходный код содержит всего одну функцию, входными переменными которой являются отсчет входного сигнала x и отсчет требуемого сигнала d , а выходными переменными – отсчет выходного сигнала y и отсчет сигнала ошибки e .

Внутри функции также объявлены:

- 1) целочисленная переменная i , служащая счетчиком в цикле операций;
- 2) массив отсчетов входного сигнала x_array ;
- 3) массив коэффициентов фильтра w_array ;
- 4) переменная $curr_w$ для временного хранения коэффициента, с которым функция работает на i -й итерации цикла, обновляя этот коэффициент и умножая его на отсчет входного сигнала;
- 5) переменная $curr_x$ для временного хранения отсчета входного сигнала, с которым функция работает на i -й итерации цикла, умножая его на коэффициент фильтра;
- 6) переменная mue для хранения произведения отсчета сигнала ошибки и шага сходимости;
- 7) переменная acc для временного хранения суммы произведений отсчетов входного сигнала на коэффициенты фильтра, накопленной за уже выполненные итерации цикла.

За исключением i , все перечисленные выше переменные и элементы массивов имеют тип `float`, что соответствует стандарту IEEE 754 для чисел одинарной точности.

После объявления массивов и переменных функция переходит к выполнению цикла с количеством итераций, равным порядку фильтра N (рис. 2). С каждой итерацией переменная i меняется от $N-1$ до 0.

```

1  loop: for (i=N-1; i>=0; i--)
2  {if (i == 0)
3    {curr_x = x; x_array[0] = x;}
4    else {curr_x = x_array[i-1];
5      if (i != (N-1))
6        {x_array[i] = x_array[i-1];}}
7    curr_w = w_array[i];
8    curr_w += mue*curr_x;
9    w_array[i]=curr_w;
10   acc += curr_w*curr_x; }
```

Рис. 2. Цикл в составе исходного кода
Fig.2 Loop in the source code

На каждой итерации цикла сначала выполняется перемещение одного из отсчетов входного сигнала в массиве x_array . После выполнения N итераций самый старый отсчет отбрасывается, остальные отсчеты сдвигаются в массиве с приращением индекса на единицу, а на освободившееся место $x_array[0]$ помещается новый отсчет входного сигнала. Переменной $curr_x$ на каждой итерации приравнивается один из отсчетов входного сигнала.

Затем из массива w_array в переменную $curr_w$ считывается коэффициент с индексом i , и выполняется его перерасчет с использованием переменных $curr_x$ и mie . После перерасчета коэффициент $w_array[i]$ обновляется.

Последней операцией в цикле является вычисление текущей суммы произведений acc , т.е. добавление к текущему значению acc произведения переменных $curr_x$ и $curr_w$. Таким образом, на каждом шаге дискретизации коэффициенты фильтров будут использоваться сразу после обновления.

После выхода из цикла отсчет выходного сигнала y приравнивается к переменной acc ; вычисляются отсчет сигнала ошибки e и его произведение с шагом сходимости mie .

2. Методы исследования

Разработка исходного кода, указание настроек и директив, а также собственно синтез высокого уровня выполнены в среде Vivado HLS 2018.3. В рамках каждого из решений синтез высокого уровня был проведен при варьировании порядка фильтра N от 32 до 512 коэффициентов. Значение N указывалось в исходном коде. В настройках синтеза для обоих решений были указаны минимально допустимая тактовая частота 100 МГц и целевой кристалл – XC7A200tfbg-1.

Во втором решении для конвейеризации цикла (см. рис. 2) на него была наложена директива “pipeline” с указанием интервала инициации (ii), т.е. количества тактов с момента начала итерации цикла, спустя которое запускается следующая итерация [22]. Был указан минимально возможный для данного исходного кода интервал инициации – 5 тактов.

После выполнения синтеза высокого уровня средой Vivado HLS 2018.3 формировались отчеты, из которых для каждого решения и каждого значения N получены:

- 1) максимальная тактовая частота фильтра ($Fmax$);
- 2) латентность функции, т.е. количество тактов, требуемое на ее выполнение (FL);
- 3) латентность одной итерации цикла, т.е. количество тактов, требуемое на ее выполнение (IL);
- 4) график распределения операций функции по тактам;
- 5) ресурсоемкость по таким видам ресурсов, как D-триггеры (FF), табличные преобразователи (LUT), блоки цифровой обработки сигналов (DSP) и блоки ОЗУ (BRAM).

3. Результаты синтеза высокого уровня и их обсуждение

3.1. Оценка ресурсоемкости LMS-фильтров

В табл. 1 и 2 приведены результаты оценки максимальной тактовой частоты, ресурсоемкости и латентности для двух решений LMS-фильтра. Требование к минимальной тактовой частоте выполнено для обоих решений при всех значениях N .

Ресурсоемкость фильтров с увеличением N меняется незначительно как при конвейеризации цикла, так и при ее отсутствии. Так, в обоих случаях увеличение N не приводит к увеличению расхода блоков DSP. Из отчетов о синтезе высокого уровня следует, что два из пяти блоков DSP используются для реализации сумматора, еще три – для реализации умножителя. Повышение N , разумеется, приводит к увеличению объема памяти, требуемого для хранения массивов x_array и w_array . При $N = 32$ для хранения каждого из массивов требуется по 1 024 бита, при $N = 64$ – по 2 048 бит, и т.д. Тем не менее при $N \leq 512$ для хранения массивов требуется не более двух блоков ОЗУ. Незначительное увеличение расхода табличных преобразователей с повышением N для обоих решений связано с декрементом счетчика цикла i и сравнением i с нулем и величиной $N - 1$, поскольку с увеличением N эти операции требуют большей разрядности сумматора и компараторов. Увеличение расхода D-триггеров для обоих решений связано с увеличением разрядности шины адреса блока памяти коэффициентов фильтра, а также с увеличением разрядности i . В остальном структура и ресурсоемкость фильтров, полученных в рамках обоих решений, не зависят от N .

Таблица 1

Результаты синтеза LMS-фильтра при отсутствии директив (решение 1)

N	F_{max} , МГц	LUT	FF	DSP	BRAM	FL/IL
32	121	693	683	5	2	649/20
64	121	693	686	5	2	1 289/20
128	121	693	689	5	2	2 569/20
256	121	698	692	5	2	5 129/20
512	121	699	695	5	2	10 249/20

Таблица 2

Результаты синтеза LMS-фильтра при конвейеризации цикла (решение 2)

N	F_{max} , МГц	LUT	FF	DSP	BRAM	FL/IL
32	121	764	898	5	2	184/20
64	121	764	901	5	2	344/20
128	121	764	904	5	2	664/20
256	121	769	907	5	2	1 304/20
512	121	770	910	5	2	2 584/20

Конвейеризация цикла приводит к повышению расхода триггеров не более чем на 31%, а табличных преобразователей – не более чем на 10%. Повышение ресурсоемкости связано с тем, что конвейеризация требует более сложного управляющего автомата и большего количества ресурсов для формирования входных сигналов сумматора, умножителя и блоков памяти, а также для сохранения промежуточных результатов фильтрации.

3.2. Распределение операций по тактам

На рис. 3 и 4 приведены графики распределения операций по тактам, сгенерированные средой Vivado HLS 2018.3 при отсутствии (см. рис. 3) и наличии (см. рис. 4) конвейеризации цикла. Номера тактов, начиная с нуля, приведены в верхней части рисунков. Такты с 1-го по 20-й, приходящиеся на циклы (loop), сгруппированы по выполняемым операциям. Операции, выполняемые в каждой группе тактов, обозначены цифрами, которые соответствуют номерам строк во фрагменте исходного кода на рис. 2. При конвейеризации цикла очередная итерация запускается спустя 5 тактов предыдущей итерации; каждый старт новой итерации обозначен на рис. 4 вертикальной жирной чертой. Тактам, следующим после выхода из цикла, условно присвоены номера, начиная с 21.

Распределение операций по тактам выполнено для обоих решений похожим образом. До вхождения в цикл на такте 0 осуществляются прием x и d и их размещение в памяти, а также считывание переменной mue , вычисленной на предыдущем шаге дискретизации.

В цикле в течение тактов 1 и 2 происходят перемещение одного из отсчетов входного сигнала в массиве x_array и перезапись переменной $curr_x$. При этом выполняются вспомогательные операции с переменной i : сравнение с 0 и $N - 1$, а в первом решении – также и декремент. При конвейеризованном цикле в тактах 1 и 2 выполняется также считывание i -го коэффициента фильтра из массива w_array в переменную $curr_w$.

С 3-го по 6-й такты выполняется умножение переменной $curr_x$ на переменную mue . В первом решении на 5-м и 6-м тактах происходит считывание i -го коэффициента фильтра из массива w_array в переменную $curr_w$. Во втором решении на 5-м такте выполняется декремент счетчика i .

С 7-го по 11-й такты выполняется сложение переменной $curr_w$ и полученного на 6-м такте произведения $curr_x * mue$; результат сохраняется в переменную $curr_w$. На 12-м такте i -й элемент массива w_array приравнивается к переменной $curr_w$. С 12-го по 15-й такт вычисляется произведение переменных $curr_x$ и $curr_w$.

С 16-го по 20-й такт выполняется сложение только что вычисленного произведения $curr_x$ и $curr_w$ и накопленной к данному моменту суммы произведений коэффициентов фильтра на отсчеты входного сигнала, хранящейся в переменной acc .

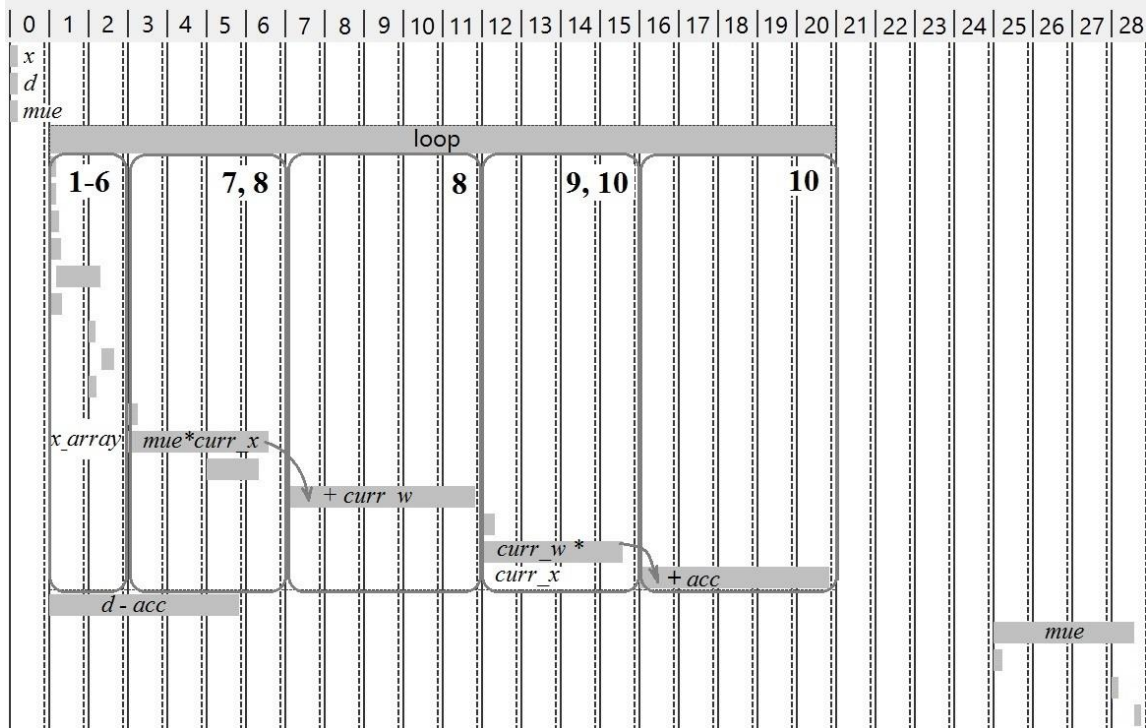


Рис. 3. Распределение операций по тактам при последовательном выполнении итераций цикла (решение 1)

Fig. 3. Scheduling the operations into clock cycles under condition of the loop iterations are performed sequentially (solution 1)

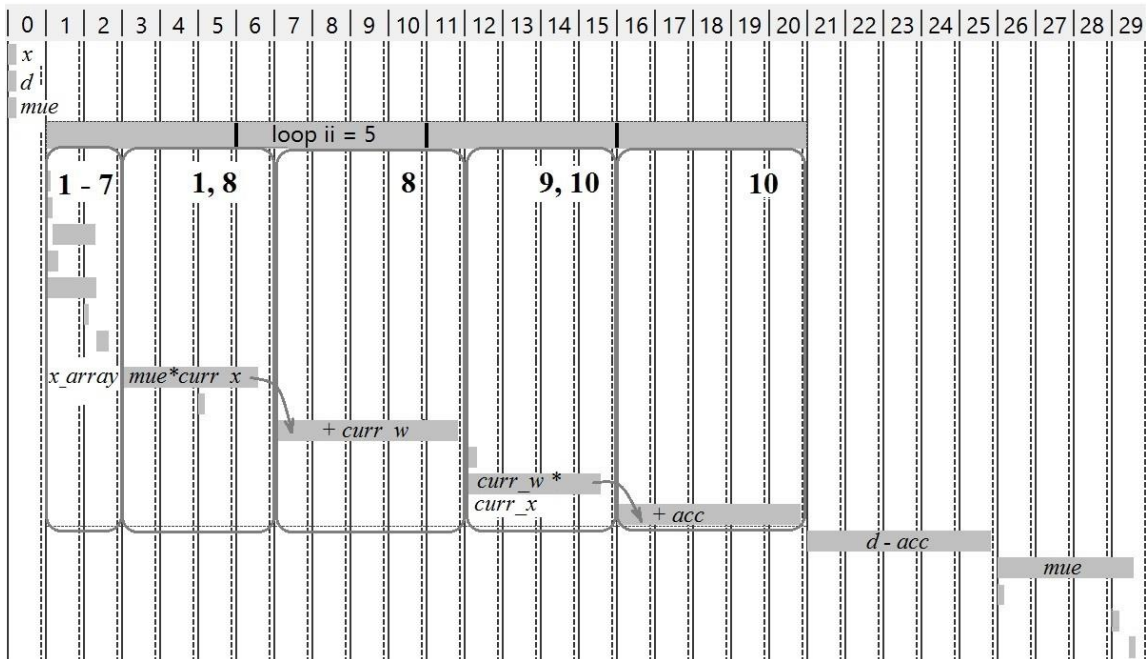


Рис. 4. Распределение операций по тактам при конвейеризации цикла (решение 2)

Fig. 4. Scheduling the operations into clock cycles under condition of the loop is pipelined (solution 2)

После выхода из цикла выходной переменной y присваивается значение переменной acc . В течение пяти тактов рассчитывается e как разность между d и acc . Заметим, что на рис. 3 такты 21–24 не заполнены. Это связано с работой управляющего автомата в решении 1: после каждой итерации цикла автомат переходит к проверке i , что соответствует такту 1. Если $i < 0$, т.е. все итерации выполнены, автомат переходит к состояниям, соответствующим расчету e . Этим состояниям на рис. 3 фактически соответствуют такты 21–24, хотя они показаны под тактами 2–5.

Еще четыре такта требуется на расчет переменной *tie*, которая будет использоваться на следующем шаге дискретизации. Одновременно с расчетом *tie* выходные переменные *e* и *y* выдаются на одноименные порты фильтра.

Из табл. 1 и 2, рис. 3 и 4 следует, что при *N* от 32 до 512 за счет конвейеризации цикла удается сократить латентность функции более чем на 70%.

Заключение

С помощью инструментов синтеза высокого уровня удалось сформировать и оценить два решения LMS-фильтра с порядком от 32 до 512, отличающихся организацией предусмотренного алгоритмом LMS цикла операций. Конвейеризация цикла оказалась эффективной мерой сокращения времени выполнения LMS-алгоритма. На ресурсоемкость фильтра конвейеризация цикла влияет незначительно.

Список источников

1. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов : пер. с англ. М. : Радио и связь, 1989. 440 с.
2. Farhang-Boroujeny B. Adaptive Filters: Theory and Applications. New York : John Wiley & Sons, 2013. 802 p.
3. Elliott S. Signal Processing for Active Control. London : Academic Press, 2001. 517 p.
4. Glentis G.O., Berberidis K., Theodoridis S. Efficient least squares adaptive algorithms for FIR transversal filtering // IEEE Signal Processing Magazine. 1999. V. 16 (4). P. 13–41.
5. Caraiscos C., Liu B. A roundoff error analysis of the LMS adaptive algorithm // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1984. V. 32 (1). P. 34–41.
6. Shashikala P., Renjith Kumar T.G., Subramani H. An FPGA implementation of the LMS adaptive filter for active vibration control // International Journal of Research in Engineering and Technology. 2013. V. 2 (10). P. 1–10.
7. Wang L., Zhang Z., Kai A. Hands-free speaker identification based on spectral subtraction using a multi-channel least mean square approach // Acoustics, Speech and Signal Processing : Proc. of the IEEE International Conference. 2013. P. 7224–7228.
8. Wang L., Kitaoka N., Nakagawa S. Distant-talking speech recognition based on spectral subtraction by multi-channel LMS algorithm // IEICE Transactions on Information and Systems. 2011. V. 94 (3). P. 659–667.
9. Antonacci F., Lonoce D., Motta M., Sarti A., Tubaro S. Efficient source localization and tracking in reverberant environments using microphone arrays // Acoustics, Speech, and Signal Processing : Proc. of the IEEE International Conference. 2005. V. 4. P. iv/1061–iv/1064.
10. Benesty J., Huang Y. Adaptive Signal Processing: Applications to Real-World Problems. Springer Science & Business Media, 2013. 365 p.
11. Huang Y.A., Benesty J. Adaptive multi-channel least mean square and Newton algorithms for blind channel identification // Signal Processing. 2002. V. 82 (8). P. 1127–1138.
12. Nelson P.A., Orduna-Bustamante F., Hamada H. Multi-channel signal processing techniques in the reproduction of sound // Journal of the Audio Engineering Society. 1992. V. 44 (11). P. 973–989.
13. Yaqin W., Xuebin L., Bingliang H. Implementation of a LMS filter on FPGA employing extremeDSP and smart IP-core design // Electronic Measurement & Instruments : Proc. of the 10th International Conference. 2011. P. 341–345.
14. Bahoura M., Ezzaidi H. FPGA-implementation of parallel and sequential architectures for adaptive noise cancelation // Circuits, Systems, and Signal Processing. 2011. V. 30 (6). P. 1521–1548.
15. Liu Y., Ge S., Xing J., Cui Z., Meng J. FPGA implementation of high-throughput, low-latency complex LMS algorithm // Signal, Information and Data Processing : Proc. of the IEEE International Conference. 2019. P. 1–4.
16. Liwei C., Zhiliang T., Lidong C. LMS algorithm fixed-point modeling designated based on System Generator modules // Environmental Electromagnetics : Proc. of the 7th Asia-Pacific Conference. 2015. P. 152–156.
17. Ушенина И.В. Реализация алгоритмов цифровой адаптивной фильтрации на ПЛИС // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. 2012. № 5 (09). С. 134–138.
18. Vasudeva B., Deora P., Pradhan P.M., Dasgupta S. Efficient implementation of LMS adaptive filter-based FECG extraction on an FPGA // Healthcare Technology Letters. 2020. V. 7 (5). P. 125–131.
19. Martyshevskiy A.I., Salnikov I.I. Hardware memory buffer module for multiprocessor system // Ad Alta: Journal of Interdisciplinary Research. 2018. V. 8 (1). P. 304–308.
20. Martyshevskiy A.I., Salnikov I.I., Pashchenko D.V., Trokoz D.A. Associative co-processor on the basis of programmable logical integrated circuits for special purpose computer systems // Proc. of the 2018 Global Smart Industry Conference. 2018. P. 1–5.
21. Mittal S. A survey of FPGA-based accelerators for convolutional neural networks // Neural computing and applications. 2020. V. 32 (4). P. 1109–1139.
22. Vivado Design Suite User Guide. High-Level Synthesis. URL: https://www.xilinx.com/support/documentation/sw_manuals/xilinx2020_1/ug902-vivado-high-level-synthesis.pdf (accessed: 20.12.2021).

References

1. Widrow, B. & Stearns, S.D. (1985) *Adaptivnaya obrabotka signalov* [Adaptive Signal Processing]. Translated from English. Moscow: Radio i svyaz'.
2. Farhang-Boroujeny, B. (2013) *Adaptive Filters: Theory and Applications*. New York: John Wiley & Sons.
3. Elliott, S. (2000) *Signal Processing for Active Control*. London: Academic Press.
4. Glentis, G.O., Berberidis, K. & Theodoridis, S. (1999) Efficient least squares adaptive algorithms for FIR transversal filtering. *IEEE Signal Processing Magazine*. 16(4). pp. 13–41. DOI: 10.1109/79.774932
5. Carascos, C. & Liu, B. (1984) A roundoff error analysis of the LMS adaptive algorithm. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. 32(1). pp. 34–41. DOI: 10.1109/TASSP.1984.1164286
6. Shashikala, P., Renjith Kumar, T. & Subramani, H. (2013) An FPGA implementation of the LMS adaptive filter for active vibration control. *International Journal of Research in Engineering and Technology*. 2(10). pp. 1–10.
7. Wang, L., Zhang, Z. & Kai, A. (2013) Hands-free speaker identification based on spectral subtraction using a multi-channel least mean square approach. *Acoustics, Speech and Signal Processing: Proceedings of the IEEE International Conference*. pp. 7224–7228.
8. Wang, L., Kitaoka, N. & Nakagawa, S. (2011) Distant-talking speech recognition based on spectral subtraction by multi-channel LMS algorithm. *IEICE Transactions on Information and Systems*. 94(3). pp. 659–667. DOI: 10.1587/transinf.E94.D.659
9. Antonacci, F., Lonoce, D., Motta, M., Sarti, A. & Tubaro, S. (2005) Efficient source localization and tracking in reverberant environments using microphone arrays. *Acoustics, Speech, and Signal Processing: Proceedings of the IEEE International Conference*. 4. pp. iv/1061-iv/1064.
10. Benesty, J. & Huang, Y. (2013) *Adaptive Signal Processing: Applications to Real-World Problems*. Springer Science & Business Media.
11. Huang, Y.A. & Benesty, J. (2002) Adaptive multi-channel least mean square and Newton algorithms for blind channel identification. *Signal Processing*. 82(8). pp. 1127–1138. DOI: 10.1016/S0165-1684(02)00247-5
12. Nelson, P.A., Orduna-Bustamante, F. & Hamada, H. (1992) Multi-channel signal processing techniques in the reproduction of sound. *Journal of the Audio Engineering Society*. 44(11). pp. 973–989.
13. Yaqin, W., Xuebin, L. & Bingliang, H. (2011) Implementation of a LMS filter on FPGA employing extremeDSP and smart IP-core design. *Electronic Measurement & Instruments: Proceedings of the 10th International Conference*. pp. 341–345.
14. Bahoura, M. & Ezzaidi, H. (2011) FPGA-implementation of parallel and sequential architectures for adaptive noise cancelation. *Circuits, Systems, and Signal Processing*. 30(6). pp. 1521–1548. DOI: 10.1007/s00034-011-9310-0
15. Liu, Y., Ge, S., Xing, J., Cui, Z. & Meng, J. (2019) FPGA implementation of high-throughput, low-latency complex LMS algorithm. *Signal, Information and Data Processing: Proceedings of the IEEE International Conference*. pp. 1–4.
16. Liwei, C., Zhiliang, T. & Lidong, C. (2015) LMS algorithm fixed-point modeling designated based on System Generator modules. *Environmental Electromagnetics: Proc. of the 7th Asia-Pacific Conference*. pp. 152–156.
17. Ushenina, I.V. (2012) Realizatsiya algoritmov tsifrovoy adaptivnoy fil'tratsii na PLIS [FPGA-based implementation of digital adaptive filtering algorithms]. *XXI vek: itogi proshlogo i problemye nastoyashchego plyus*. 9(5). pp. 134–138.
18. Vasudeva, B., Deora, P., Pradhan, P.M. & Dasgupta, S. (2020) Efficient implementation of LMS adaptive filter-based FECG extraction on an FPGA. *Healthcare Technology Letters*. 7(5). pp. 125–131. DOI: 10.48550/arXiv.1910.07496
19. Martyshkin, A.I. & Salnikov, I.I. (2018) Hardware memory buffer module for multiprocessor system. *Ad Alta: Journal of Interdisciplinary Research*. 8(1). pp. 304–308.
20. Martyshkin, A.I., Salnikov, I.I., Pashchenko, D.V. & Trokoz, D.A. (2018) Associative co-processor on the basis of programmable logical integrated circuits for special purpose computer systems. *Proceedings of the 2018 Global Smart Industry Conference*. pp. 1–5.
21. Mittal, S. (2020) A survey of FPGA-based accelerators for convolutional neural networks. *Neural Computing and Applications*. 32(4). pp. 1109–1139. DOI: 10.1007/s00521-018-3761-1
22. AMD Xilinx. (2020) *Vivado Design Suite User Guide. High-Level Synthesis*. [Online] Available from: https://www.xilinx.com/support/documentation/sw_manuals/xilinx2020_1/ug902-vivado-high-level-synthesis.pdf. (Accessed: 20th December 2021).

Информация об авторе:

Ушенина Инна Владимировна – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры программирования Пензенского государственного технологического университета (Пенза, Россия). E-mail: ivl23@yandex.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Information about the author:

Ushenina Inna V. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Penza State Technological University, Penza, Russian Federation). E-mail: ivl23@yandex.ru

The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 23.12.2021; принята к публикации 30.05.2022

Received 23.12.2021; accepted for publication 30.05.2022

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

2022. № 59

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Редакторы-переводчики: Г.М. Кошкин; В.Н. Горенинцева
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 30.06.2022 г. Формат 60х84^{1/8}.
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 13,7.
Тираж 250 экз. Заказ № 5054. Цена свободная.

Дата выхода в свет 08.07.2022 г.

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru