МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НАДЁЖНОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ И УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

УДК 519.718.7 DOI 10.17223/20710410/56/6

КОРОТКИЕ ПОЛНЫЕ ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ ДЛЯ СХЕМ С ОДНИМ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ВХОДОМ В СТАНДАРТНОМ БАЗИСЕ[1]

К. А. Попков

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия

E-mail: kirill-formulist@mail.ru

Доказано, что любую монотонную (антимонотонную) булеву функцию от n переменных можно смоделировать схемой из функциональных элементов с одним дополнительным входом в базисе «конъюнкция, дизъюнкция, отрицание», допускающей полный диагностический тест длины не более $n+2$ (соответственно не более $n+1$) относительно константных неисправностей типа 1 на выходах элементов.

Ключевые слова: *схема из функциональных элементов, константная неисправность, полный диагностический тест, булева функция.*

SHORT COMPLETE DIAGNOSTIC TESTS FOR CIRCUITS WITH ONE ADDITIONAL INPUT IN THE STANDARD BASIS

K. A. Popkov

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia

We prove that each monotone (antimonotone) Boolean function in n variables can be modeled by a logic circuit with one additional input in the basis “conjunction, disjunction, negation” allowing a complete diagnostic test with length no more than $n+2$ (no more than $n+1$, respectively) relative to constant faults of type 1 at outputs of logic gates.

Keywords: *logic circuit, stuck-at fault, complete diagnostic test, Boolean function.*

Введение

В работе рассматривается задача синтеза легкотестируемых схем из функциональных элементов (СФЭ), реализующих заданные булевы функции [1–3]. Пусть имеется СФЭ S с одним выходом, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, где $n \in \mathbb{N}$ и $\tilde{x}^n = (x_1, \ldots, x_n)$. Предположим, что в схеме S могут происходить *константные неисправности типа a на выходах элементов*, при которых значение на выходе любого

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект № 19-71-30004.

неисправного элемента становится равно заданной булевой константе a; число неисправных элементов в схеме предполагается произвольным. В результате схема S вместо исходной функции $f(\tilde{x}^n)$ будет реализовывать какие-то, вообще говоря, отличные от неё булевы функции, называемые *функциями неисправности* данной схемы.

Полным диагностическим тестом (ПДТ) для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что для любой отличной от $f(\tilde{x}^n)$ функции неисправности $g(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$, а для любых двух различных функций неисправности $g_1(\tilde{x}^n)$ и $g_2(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\pi}$, на котором $g_1(\tilde{\pi}) \neq g_2(\tilde{\pi})$. Число наборов в T называется *длиной* теста. В качестве тривиального ПДТ длины 2^n для схемы S всегда можно взять множество, состоящее из всех 2^n двоичных наборов длины n.

Пусть зафиксирован функционально полный базис B, в котором строятся схемы. Введём следующие обозначения: $D(T)$ — длина теста T; $D(S) = \min D(T)$, где минимум берётся по всем ПДТ T для схемы S; $D(f) = \min D(S)$, где минимум берётся по всем СФЭ S в базисе B, реализующим функцию f; $D(n) = \max D(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных. Функция $D(n)$ называется *функцией Шеннона* длины ПДТ.

Всюду далее будем считать, что n — произвольное натуральное число. В работе [4] для схем в базисе $\{x \,|\, y\}$, где $x \,|\, y = \overline{x \& y}$ — штрих Шеффера, в случае $a = 1$ установлена оценка $D(n) > \dfrac{2^{n/2} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n + (\log n)/2 + 2}}$. Н. П. Редькин в [5] для схем в стандартном (классическом) базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ в каждом из случаев $a = 0$, $a = 1$ получил оценку $D(n) \leqslant 2^{n-1}$, вдвое меньшую тривиальной оценки $D(n) \leqslant 2^n$.

Вместо «вход схемы S, отвечающий переменной x_i» для краткости будем писать «вход “x_i” схемы S».

Будем говорить, что СФЭ *моделирует* булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ *с n' дополнительными входами*, где $n' \in \mathbb{N}$, если данная схема реализует булеву функцию $\hat{f}(\tilde{x}^{n+n'})$, обладающую следующим свойством: существуют такие булевы константы $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n'}$, что $f(\tilde{x}^n) = \hat{f}(x_1, \ldots, x_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n'})$.

Отметим, что моделирование булевых функций СФЭ с дополнительными входами с последующим тестированием этих схем легко осуществимо на практике: на входы «x_{n+1}», ..., «$x_{n+n'}$» произвольной СФЭ, моделирующей булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ с n' дополнительными входами, в штатном режиме нужно подавать константы $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n'}$ соответственно, а в режиме тестирования на каждый такой вход могут последовательно подаваться различные булевы значения.

1. Формулировка и доказательство основного результата

Булева функция $f(\tilde{x}^n)$ называется *монотонной* (*антимонотонной*), если для любых таких $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \pi_1, \ldots, \pi_n \in \{0, 1\}$, что $\sigma_1 \leqslant \pi_1, \ldots, \sigma_n \leqslant \pi_n$, выполняется неравенство $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \leqslant f(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ (соответственно $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \geqslant f(\pi_1, \ldots, \pi_n)$). Очевидно, что если функция f монотонна, то функция $\overline{f}$ антимонотонна, и наоборот.

Рассмотрим стандартный базис $B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$. Любой функциональный элемент, реализующий функцию вида $x \& y$ (вида $x \vee y$, вида $\overline{x}$), будем называть *конъюнктором* (соответственно *дизъюнктором*, *инвертором*).

Сформулируем основной результат данной работы.

Теорема 1. Справедливы следующие утверждения:

1) любую антимонотонную булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно смоделировать СФЭ с одним дополнительным входом в базисе B_0, допускающей ПДТ длины не более $n+1$ относительно константных неисправностей типа 1 на выходах элементов;

2) любую монотонную булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно смоделировать СФЭ с одним дополнительным входом в базисе B_0, допускающей ПДТ длины не более $n+2$ относительно константных неисправностей типа 1 на выходах элементов.

Доказательство.

1) Если $f \equiv \alpha$ для некоторого $\alpha \in \{0,1\}$, то указанную функцию можно смоделировать схемой с одним дополнительным входом «x_{n+1}», не содержащей функциональных элементов, выход которой совпадает с этим её входом (действительно, при подстановке вместо переменной x_{n+1} константы α реализуемая схемой функция становится равна f). Данная схема не имеет ни одной функции неисправности, поэтому допускает ПДТ длины $0 < n+1$, что и требовалось доказать.

Пусть функция $f(\tilde{x}^n)$ отлична от констант. По аналогии с [6, с. 45, лемма 5.2] легко доказать, что эту функцию можно представить в виде тупиковой дизъюнктивной нормальной формы

$$f(\tilde{x}^n) = K_1 \vee \ldots \vee K_m,$$

где $m \in \mathbb{N}$ и $K_1, \ldots, K_m$ — элементарные конъюнкции, в каждую из которых входят только отрицания переменных из множества $x_1, \ldots, x_n$. Домножим обе части последнего равенства на булеву переменную x_{n+1}:

$$\hat{f}(\tilde{x}^{n+1}) = x_{n+1} f(\tilde{x}^n) = K_1 x_{n+1} \vee \ldots \vee K_m x_{n+1}.$$

Пусть $K_i = \overline{x}_{j_1(i)} \ldots \overline{x}_{j_{r_i}(i)}$, где $r_i \in \{1, \ldots, n\}$ и $1 \leqslant j_1(i) < \ldots < j_{r_i}(i) \leqslant n$.

Построим схему S в базисе B_0, реализующую функцию $\hat{f}(\tilde{x}^{n+1})$ (рис. 1); в силу равенства $\hat{f}(x_1, \ldots, x_n, 1) = f(\tilde{x}^n)$ данная схема моделирует функцию $f(\tilde{x}^n)$ с одним дополнительным входом. Сначала для каждого $j = 1, \ldots, n$ подадим переменную x_j на вход инвертора I_j и поставим её в соответствие этому инвертору, а его выход и вход «x_j» схемы соединим со входами «контролирующего» конъюнктора C_j. Очевидно, что на выходе элемента I_j реализуется функция $\overline{x}_j$, а на выходе элемента C_j — константа 0. Далее, для каждого $i = 1, \ldots, m$ имеем $K_i x_{n+1} = \overline{x}_{j_1(i)} \ldots \overline{x}_{j_{r_i}(i)} x_{n+1}$. Реализуем выражение $K_i x_{n+1}$ цепочкой из r_i конъюнкторов $E_{i,1}, \ldots, E_{i,r_i}$, занумерованных «сверху вниз», входы которой последовательно соединим с выходами инверторов $I_{j_1(i)}, \ldots, I_{j_{r_i}(i)}$ и со входом «x_{n+1}» схемы. При этом в случае $r_i = 1$ входы конъюнктора $E_{i,1}$ соединяются с выходом инвертора $I_{j_1(i)}$ и со входом «x_{n+1}» схемы; в случае $r_i \geqslant 2$ — с выходами инверторов $I_{j_1(i)}$ и $I_{j_2(i)}$, а для каждого $t = 2, \ldots, r_i$ один вход конъюнктора $E_{i,t}$ соединяется с выходом конъюнктора $E_{i,t-1}$, а другой — с выходом инвертора $I_{j_{t+1}(i)}$ при $t \leqslant r_i - 1$ либо со входом «x_{n+1}» схемы при $t = r_i$. Затем в случае $r_i \geqslant 2$ для каждого $t = 2, \ldots, r_i$ поставим в соответствие конъюнктору $E_{i,t-1}$ переменные $x_{j_1(i)}, \ldots, x_{j_t(i)}$ и для каждого $p = 1, \ldots, t$ добавим в схему «контролирующий» конъюнктор $C_{i,t-1,p}$, входы которого соединим с выходом конъюнктора $E_{i,t-1}$ и со входом «$x_{j_p(i)}$» схемы. Наконец, выходы всех конъюнкторов E_{i,r_i}, C_j и $C_{i,t-1,p}$, где $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, $t = 2, \ldots, r_i$ (при $r_i \geqslant 2$) и $p = 1, \ldots, t$ (при $r_i \geqslant 2$), соединим со входами цепочки из дизъюнкторов, выход которой будем считать выходом схемы.

Докажем, что схема S реализует функцию $\hat{f}(\tilde{x}_{n+1})$. По построению на выходе каждого конъюнктора E_{i,r_i} реализуется функция $K_i x_{n+1}$, на выходе каждого конъюнктора C_j — константа 0, а входы каждого конъюнктора $C_{i,t-1,p}$ соединены с выходом конъ-

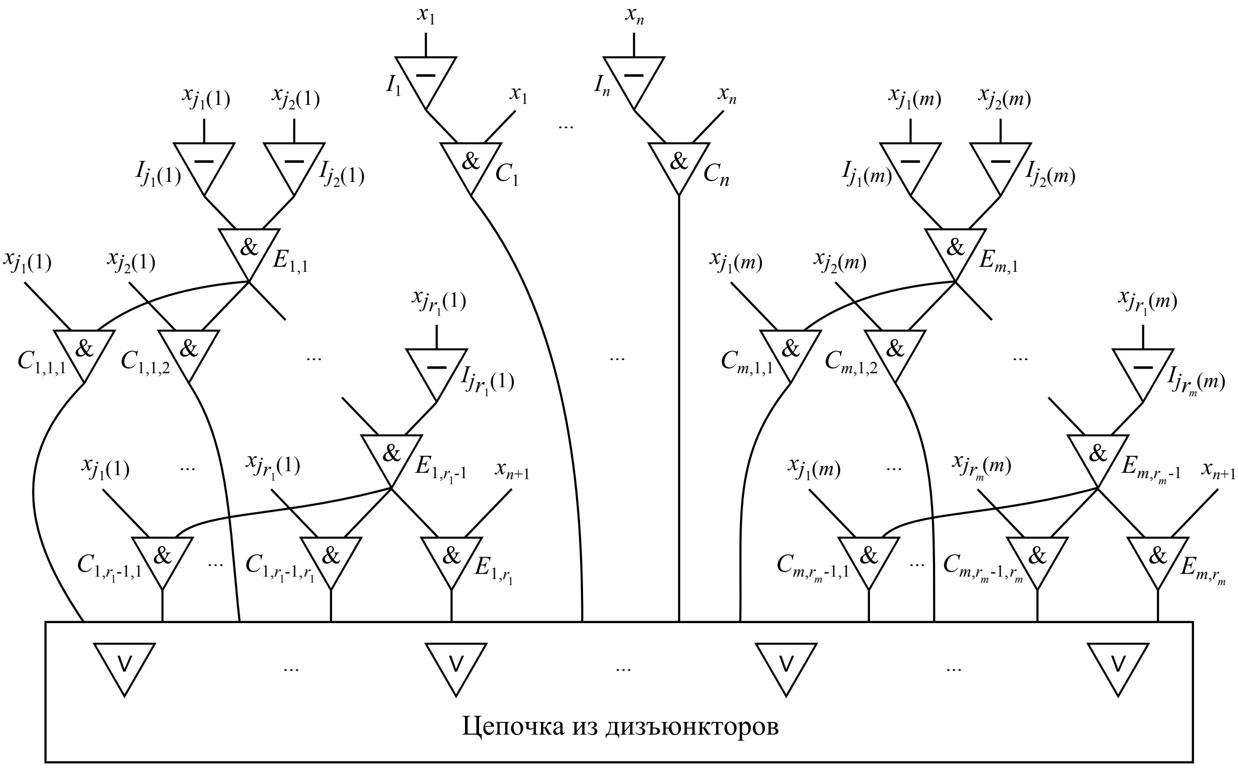

Рис. 1. Схема S

юнктора $E_{i,t-1}$ и со входом «$x_{j_p(i)}$» схемы S. При этом на выходе элемента $E_{i,t-1}$, как нетрудно видеть, реализуется «начало» $\overline{x}_{j_1(i)}\dots\overline{x}_{j_t(i)}$ элементарной конъюнкции K_i, следовательно, на выходе элемента $C_{i,t-1,p}$ реализуется функция $\overline{x}_{j_1(i)}\dots\overline{x}_{j_t(i)}x_{j_p(i)}$, тождественно равная нулю, так как $p\in\{1,\dots,t\}$. Таким образом, схема S реализует функцию

$$K_1x_{n+1}\vee\ldots\vee K_mx_{n+1}\vee 0\vee\ldots\vee 0=\hat f(\tilde x^{n+1}).$$

Найдём все возможные функции неисправности схемы S. Если в ней неисправен хотя бы один дизъюнктор или хотя бы один из конъюнкторов E_{i,r_i}, C_j и $C_{i,t-1,p}$ (при всевозможных значениях индексов), то на входе или выходе какого-то дизъюнктора этой схемы возникнет константное значение 1, которое «пройдёт» по цепочке из дизъюнкторов до выхода схемы S; таким образом, схема будет реализовывать функцию $g_0(\tilde x^{n+1})\equiv 1$. Пусть теперь все дизъюнкторы и конъюнкторы E_{i,r_i}, C_j, $C_{i,t-1,p}$ схемы S исправны, а хотя бы один из оставшихся её элементов неисправен. Тогда все неисправные элементы в схеме содержатся среди инверторов $I_1,\dots,I_n$ и конъюнкторов $E_{i,1},\dots,E_{i,r_i-1}$ для каждого такого $i\in\{1,\dots,m\}$, что $r_i\geqslant 2$. Заметим, что каждому перечисленному в предыдущем предложении инвертору и конъюнктору по построению соответствует хотя бы одна переменная из множества $\{x_1,\dots,x_n\}$. Докажем, что схема S при указанной неисправности реализует функцию $g_{s_1,\dots,s_q}(\tilde x^{n+1})=$ $=\hat f(\tilde x^{n+1})\vee x_{s_1}\vee\ldots\vee x_{s_q}$, где $x_{s_1},\dots,x_{s_q}$ — все такие переменные, каждая из которых соответствует хотя бы одному неисправному элементу. Для этого достаточно доказать, что при подаче на входы схемы произвольного двоичного набора $(\sigma_1,\dots,\sigma_{n+1})$ на её выходе возникнет значение $\hat f(\sigma_1,\dots,\sigma_{n+1})\vee\sigma_{s_1}\vee\ldots\vee\sigma_{s_q}$. Рассмотрим два случая.

С л у ч а й 1. Существует такое $k \in \{1, \ldots, q\}$, что $\sigma_{s_k} = 1$. Тогда $\hat{f}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1}) \vee \vee\, \sigma_{s_1} \vee \ldots \vee \sigma_{s_q} = 1$. Переменная x_{s_k} соответствует хотя бы одному неисправному элементу. Возможны два подслучая.

1.1. Переменная x_{s_k} соответствует некоторому неисправному инвертору. Тогда это, очевидно, инвертор I_{s_k}, на его выходе реализуется константа 1, которая подаётся на один из входов конъюнктора C_{s_k}, а на другой вход этого конъюнктора подаётся переменная x_{s_k} со входа схемы, принимающая значение 1 на наборе $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1})$. Таким образом, на выходе элемента C_{s_k} на указанном наборе возникнет значение 1, которое подаётся на один из входов цепочки из дизъюнкторов и «пройдёт» до выхода схемы S.

1.2. Переменная x_{s_k} соответствует некоторому неисправному конъюнктору $E_{i,t-1}$. Тогда x_{s_k} — это одна из переменных $x_{j_1(i)}, \ldots, x_{j_t(i)}$, например $x_{j_u(i)}$. На выходе элемента $E_{i,t-1}$ реализуется константа 1, которая подаётся на один из входов конъюнктора $C_{i,t-1,u}$, а на другой вход этого конъюнктора подаётся переменная $x_{j_u(i)}$ со входа схемы, т. е. переменная x_{s_k}, принимающая значение 1 на наборе $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1})$. Таким образом, на выходе элемента $C_{i,t-1,u}$ на указанном наборе возникнет значение 1, которое подаётся на один из входов цепочки из дизъюнкторов и «пройдёт» до выхода схемы S.

С л у ч а й 2. Справедливы равенства $\sigma_{s_1} = \ldots = \sigma_{s_q} = 0$. Тогда при отсутствии неисправностей в схеме S на наборе $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1})$ на выходах инверторов $I_{s_1}, \ldots, I_{s_q}$ возникнут единицы, поэтому неисправности указанных инверторов никак не отразятся на значении, выдаваемом схемой на данном наборе. Далее, пусть $E_{i,t-1}$ — произвольный неисправный конъюнктор схемы S, для которого $2 \leqslant t \leqslant r_i$. Как показано выше, при отсутствии неисправностей в схеме S на выходе этого конъюнктора реализуется функция $\overline{x}_{j_1(i)} \ldots \overline{x}_{j_t(i)}$, причём ему соответствуют в точности переменные $x_{j_1(i)}, \ldots, x_{j_t(i)}$. Следовательно, каждая из переменных $x_{j_1(i)}, \ldots, x_{j_t(i)}$ является одной из переменных $x_{s_1}, \ldots, x_{s_q}$ и принимает на наборе $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1})$ значение 0, а тогда значение функции $\overline{x}_{j_1(i)} \ldots \overline{x}_{j_t(i)}$, т. е. значение, возникающее в схеме S на выходе конъюнктора $E_{i,t-1}$, на данном наборе равно $\overline{0} \& \ldots \& \overline{0} = 1$. Таким образом, неисправность элемента $E_{i,t-1}$ никак не отразится на значении, выдаваемом схемой на наборе $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1})$. В итоге получаем, что на выходе схемы S при подаче на её входы указанного набора возникнет «правильное» значение $\hat{f}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1})$, равное $\hat{f}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1}) \vee \sigma_{s_1} \vee \ldots \vee \sigma_{s_q}$. Случай 2 разобран.

Тем самым установлено, что схема S при рассматриваемой неисправности реализует функцию $g_{s_1,\ldots,s_q}(\tilde{x}^{n+1}) = \hat{f}(\tilde{x}^{n+1}) \vee x_{s_1} \vee \ldots \vee x_{s_q}$. Значит, каждая функция неисправности схемы S совпадает либо с функцией g_0, либо с функцией $g_{s_1,\ldots,s_q}$ для некоторых $q \in \{1, \ldots, n\}$ и $1 \leqslant s_1 < \ldots < s_q \leqslant n$. Докажем, что данная схема допускает ПДТ $\{\tilde{\pi}_0, \tilde{\pi}_1, \ldots, \tilde{\pi}_n\}$ (длины $n+1$), где $\tilde{\pi}_0 = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n+1})$, $\tilde{\pi}_j = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{j-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n+1-j})$ для каждого $j = 1, \ldots, n$. Заметим, что $\hat{f}(\tilde{\pi}_0) = \hat{f}(\tilde{\pi}_1) = \ldots = \hat{f}(\tilde{\pi}_n) = 0$, так как $\hat{f}(\tilde{x}^{n+1}) = x_{n+1} f(\tilde{x}^n)$, а $(n+1)$-я компонента каждого из наборов $\tilde{\pi}_0, \tilde{\pi}_1, \ldots, \tilde{\pi}_n$ равна 0. С учётом этого имеем

$$g_{s_1,\ldots,s_q}(\tilde{\pi}_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } j \in \{s_1, \ldots, s_q\}, \\ 0, & \text{если } j \in \{0, 1, \ldots, n\} \setminus \{s_1, \ldots, s_q\}, \end{cases} \tag{1}$$

поскольку $g_{s_1,\ldots,s_q}(\tilde{x}^{n+1}) = \hat{f}(\tilde{x}^{n+1}) \vee x_{s_1} \vee \ldots \vee x_{s_q}$. Следовательно, для любых $q \in \in \{1, \ldots, n\}$ и $1 \leqslant s_1 < \ldots < s_q \leqslant n$ функцию $g_{s_1,\ldots,s_q}$ можно отличить от функции $\hat{f}$ на наборе $\tilde{\pi}_{s_1}$, а от функции $g_0 \equiv 1$ — на наборе $\tilde{\pi}_0$; функцию $\hat{f}$ можно отличить от функции g_0 на наборе $\tilde{\pi}_0$. Осталось отличить функцию $g_{s_1,\ldots,s_q}$ от каждой функции $g_{s'_1,\ldots,s'_{q'}}$, где $q' \in \{1,\ldots,n\}$, $1 \leqslant s'_1 < \ldots < s_{q'} \leqslant n$ и $\{s_1,\ldots,s_q\} \neq \{s'_1,\ldots,s'_{q'}\}$. Из последнего соотношения вытекает, что существует число j от 1 до n, принадлежащее ровно одному из множеств $\{s_1,\ldots,s_q\}$ и $\{s'_1,\ldots,s'_{q'}\}$. Тогда в силу (1) одна из функций $g_{s_1,\ldots,s_q}, g_{s'_1,\ldots,s'_{q'}}$ принимает на наборе $\tilde{\pi}_j$ значение 1, а другая — значение 0.

В итоге получаем, что схема S допускает ПДТ длины $n+1$. Утверждение 1 теоремы 1 доказано.

2) Случай, когда $f \equiv \alpha$ для некоторого $\alpha \in \{0,1\}$, рассматривается аналогично. Пусть функция $f(\tilde{x}^n)$ отлична от констант. Из монотонности этой функции следует антимонотонность функции $\overline{f}(\tilde{x}^n)$, которая при этом также является неконстантной. Из доказательства утверждения 1 вытекает, что функцию $x_{n+1}\overline{f}(\tilde{x}^n)$ можно реализовать схемой S' в базисе B_0, каждая функция неисправности которой совпадает либо с $g_0(\tilde{x}^{n+1}) \equiv 1$, либо с $g_{s_1,\ldots,s_q}(\tilde{x}^{n+1}) = x_{n+1}\overline{f}(\tilde{x}^n) \vee x_{s_1} \vee \ldots \vee x_{s_q}$ для некоторых $q \in \{1,\ldots,n\}$ и $1 \leqslant s_1 < \ldots < s_q \leqslant n$, причём множество $\{\tilde{\pi}_0, \tilde{\pi}_1, \ldots, \tilde{\pi}_n\}$, где $\tilde{\pi}_0 = (\underbrace{0,\ldots,0}_{n+1})$, $\tilde{\pi}_j = (\underbrace{0,\ldots,0}_{j-1}, 1, \underbrace{0,\ldots,0}_{n+1-j})$ для каждого $j = 1,\ldots,n$, является ПДТ для схемы S'.

Соединим выход схемы S' со входом инвертора I. Полученную схему обозначим через S; её выходом будем считать выход элемента I. Очевидно, что на этом выходе реализуется функция $\overline{x_{n+1}\overline{f}(\tilde{x}^n)} = \overline{x}_{n+1} \vee f(\tilde{x}^n)$. Данная функция при подстановке вместо переменной x_{n+1} значения 1 становится равной $f(\tilde{x}^n)$, поэтому схема S моделирует функцию $f(\tilde{x}^n)$ с одним дополнительным входом. При неисправности инвертора I данная схема будет реализовывать функцию $g_0(\tilde{x}^{n+1}) \equiv 1$. Если же инвертор I исправен, то каждая функция неисправности схемы S, очевидно, равна отрицанию некоторой функции неисправности схемы S'. Таким образом, все функции неисправности схемы S принадлежат множеству $\{g_0, \overline{g}_0, \overline{g}_{s_1,\ldots,s_q} : q = 1,\ldots,n;\ 1 \leqslant s_1 < \ldots < s_q \leqslant n\}$.

Пусть $\tilde{\rho}$ — произвольный такой двоичный набор длины n, что $f(\tilde{\rho}) = 0$, а $\tilde{\tau}$ — набор, получающийся из $\tilde{\rho}$ приписыванием справа $(n+1)$-й компоненты, равной единице. Докажем, что схема S допускает ПДТ $\{\tilde{\pi}_0, \tilde{\pi}_1, \ldots, \tilde{\pi}_n, \tilde{\tau}\}$ (длины $n+2$). Заметим, что любые две различные функции из множества $\{x_{n+1}\overline{f}, g_0, g_{s_1,\ldots,s_q} : q = 1, \ldots, n;\ 1 \leqslant s_1 < \ldots < s_q \leqslant n\}$, а значит, и любые две различные функции из множества $\{\overline{x_{n+1}\overline{f}}, \overline{g}_0, \overline{g}_{s_1,\ldots,s_q} : q = 1,\ldots,n;\ 1 \leqslant s_1 < \ldots < s_q \leqslant n\}$ можно отличить друг от друга хотя бы на одном наборе из множества $\{\tilde{\pi}_0, \tilde{\pi}_1, \ldots, \tilde{\pi}_n\}$, поскольку оно является ПДТ для схемы S'. Осталось отличить функцию $g_0 \equiv 1$ от каждой из функций $\overline{x_{n+1}\overline{f}}, \overline{g}_0, \overline{g}_{s_1,\ldots,s_q}$, где $q = 1,\ldots,n$ и $1 \leqslant s_1 < \ldots < s_q \leqslant n$, на наборах из множества $\{\tilde{\pi}_0, \tilde{\pi}_1, \ldots, \tilde{\pi}_n, \tilde{\tau}\}$, т. е. для каждой из функций $x_{n+1}\overline{f}, g_0, g_{s_1,\ldots,s_q}$ предъявить такой набор из этого множества, на котором она принимает значение 1. Из определения набора $\tilde{\tau}$ следует, что функция $x_{n+1}\overline{f}$ принимает на нём значение 1, а отсюда и из определения функции $g_{s_1,\ldots,s_q}$ — что $g_{s_1,\ldots,s_q}(\tilde{\tau}) = 1$ для любых $q \in \{1,\ldots,n\}$ и $1 \leqslant s_1 < \ldots < s_q \leqslant n$; кроме того, $g_0(\tilde{\tau}) = 1$, так как $g_0 \equiv 1$. Утверждение 2, а вместе с ним теорема 1 доказаны. ■

Используя принцип двойственности [7, с. 24], а также те соображения, что функция, двойственная к монотонной (антимонотонной) функции, монотонна (антимонотонна), а базис B_0 является двойственным самому себе, нетрудно установить, что утверждения 1 и 2 теоремы 1 остаются справедливыми при замене в их формулировках словосочетания «типа 1» на «типа 0».

2. Оценка числа функций $f(\tilde{x}^n)$, для которых $D(f) \leqslant n+1$

Из доказательства утверждения 1 теоремы 1 вытекает, что любую булеву функцию $\hat{f}(\tilde{x}^{n+1})$ вида $x_{n+1}f(\tilde{x}^n)$, где $f(\tilde{x}^n)$ — неконстантная антимонотонная булева функция, можно реализовать СФЭ в базисе B_0, допускающей ПДТ длины $n{+}1$ относительно константных неисправностей типа 1 на выходах элементов. Заменяя всюду в предыдущем предложении n на $n-1$ и меняя для удобства обозначения функций, получаем, что при $n \geqslant 2$ любая булева функция $f(\tilde{x}^n)$ вида $x_n f'(\tilde{x}^{n-1})$, где $f'(\tilde{x}^{n-1})$ — неконстантная антимонотонная булева функция, реализуема СФЭ в базисе B_0, допускающей ПДТ длины n (относительно указанных неисправностей), т. е. $D(f) \leqslant n$. Аналогично из доказательства утверждения 2 теоремы 1 можно получить, что при $n \geqslant 2$ любая булева функция $f(\tilde{x}^n)$ вида $\overline{x}_n \vee f''(\tilde{x}^{n-1})$, где $f''(\tilde{x}^{n-1})$ — неконстантная монотонная булева функция, реализуема СФЭ в базисе B_0, допускающей ПДТ длины $n+1$, т. е. $D(f) \leqslant n+1$.

Почти очевидно, что если булева функция $f_2(\tilde{x}^n)$ получается из булевой функции $f_1(\tilde{x}^n)$ перестановкой переменных, то $D(f_2) = D(f_1)$ (формальное доказательство этого факта см. в [8, с. 186, утверждение 8.10]). Рассмотрим множество F_n булевых функций от n переменных, состоящее из всех функций следующих видов:

$(*)$ $x_i f'(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, где $i \in \{1, \ldots, n\}$ и f' — неконстантная антимонотонная булева функция;

$(**)$ $\overline{x}_j \vee f''(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, где $j \in \{1, \ldots, n\}$ и f'' — неконстантная монотонная булева функция.

В силу написанного выше $D(f) \leqslant n$ (соответственно $D(f) \leqslant n+1$) для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ вида $(*)$ (соответственно $(**)$). Таким образом, $D(f) \leqslant n+1$ для любой функции f из множества F_n.

Оценим снизу мощность данного множества. Прежде всего заметим, что никакая функция вида $(*)$ не совпадает ни с какой функцией вида $(**)$. Действительно, если $x_i f'(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \overline{x}_j \vee f''(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, то при подстановке $x_i = 0$ и $x_j = 0$ получаем противоречие $0 = 1$. Докажем, что никакие две функции вида $(*)$ при различных i не совпадают. Предположим противное: $x_{i_1} f'_1(x_1, \ldots, x_{i_1-1}, x_{i_1+1}, \ldots, x_n) = x_{i_2} f'_2(x_1, \ldots, x_{i_2-1}, x_{i_2+1}, \ldots, x_n)$, где $i_1 \neq i_2$. Тогда при подстановке $x_{i_1} = 0$ функция $x_{i_2} f'_2(x_1, \ldots, x_{i_2-1}, x_{i_2+1}, \ldots, x_n)$, а значит, и $f'_2(x_1, \ldots, x_{i_2-1}, x_{i_2+1}, \ldots, x_n)$, должна превратиться в тождественный нуль. Функция $f'_2(x_1, \ldots, x_{i_2-1}, x_{i_2+1}, \ldots, x_n)$ антимонотонна, поэтому при подстановке $x_{i_1} = 1$ она также должна стать тождественно нулевой, а тогда $f'_2 \equiv 0$, что невозможно, так как функция f'_2 отлична от констант. Похожим образом можно доказать, что никакие две функции вида $(**)$ при различных j не совпадают. В итоге имеем $|F_n| = nm'_{n-1} + nm''_{n-1}$, где m'_{n-1} — число неконстантных антимонотонных, а m''_{n-1} — число неконстантных монотонных булевых функций от $n-1$ переменных. Ясно, что $m'_{n-1} = m''_{n-1}$ (каждой монотонной булевой функции можно поставить во взаимно однозначное соответствие антимонотонную булеву функцию, являющуюся её отрицанием), поэтому

$$|F_n| = 2nm''_{n-1}. \tag{2}$$

Пусть $n \geqslant 3$. Любая булева функция от $n-1$ переменных, принимающая значение 0 на всех наборах с менее чем $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ единицами, значение 1 на всех наборах с более чем $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ единицами и произвольные значения на наборах ровно с $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$

единицами, очевидно, является неконстантной и монотонной, откуда $m''_{n-1} \geqslant 2^{C_{n-1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}}$. С учётом (2) имеем

$$|F_n| \geqslant n \cdot 2^{C_{n-1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}+1}.$$

Используя (2) и асимптотику числа m''_n при $n \to \infty$, установленную в [9, теорема 1], можно найти асимптотику мощности множества F_n.

Пусть F_n^* — множество, состоящее из всех булевых функций, двойственных функциям из F_n. Тогда, очевидно, $|F_n^*| = |F_n|$, а из принципа двойственности легко вытекает, что $D(f) \leqslant n+1$ для любой функции f из множества F_n^* в случае $a = 0$, т. е. при рассмотрении константных неисправностей типа 0 на выходах элементов.

Заключение

Для каждого из случаев $a = 0$, $a = 1$ при $n \geqslant 3$ найдено по крайней мере $n \cdot 2^{C_{n-1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}+1}$ булевых функций $f(\tilde{x}^n)$, удовлетворяющих неравенству $D(f) \leqslant n+1$ для схем в базисе $B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$. Последнее неравенство существенно улучшает оценку $D(f) \leqslant 2^{n-1}$, вытекающую из неравенства $D(n) \leqslant 2^{n-1}$, установленного в [5].

Отметим также, что с учётом относительной простоты схемы S, построенной в ходе доказательства теоремы 1, и малой длины ПДТ для этой схемы результаты работы могут иметь практическое применение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Яблонский С. В.* Надёжность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и её приложениям (Москва, 31 января–2 февраля 1984 г.). М.: Изд-во МГУ, 1986. С. 7–12.
2. *Яблонский С. В.* Некоторые вопросы надёжности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 5–25.
3. *Редькин Н. П.* Надёжность и диагностика схем. М.: Изд-во МГУ, 1992. 192 с.
4. *Попков К. А.* Нижние оценки длин полных диагностических тестов для схем и входов схем // Прикладная дискретная математика. 2016. № 4(34). С. 65–73.
5. *Редькин Н. П.* К вопросу о длине диагностических тестов для схем // Математические заметки. 2017. Т. 102. Вып. 4. С. 624–627.
6. *Ложкин С. А.* Лекции по основам кибернетики (учебное пособие для студентов). М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2004. 251 с.
7. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986. 384 с.
8. *Попков К. А.* О возможностях построения легкотестируемых контактных схем и схем из функциональных элементов: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 2021. 377 с.
9. *Коршунов А. Д.* О числе монотонных булевых функций // Проблемы кибернетики. Вып. 38. М.: Наука, 1981. С. 5–108.

REFERENCES

1. *Yablonskiy S. V.* Nadezhnost' i kontrol' upravlyayushchikh sistem [Reliability and verification of control systems]. Materialy Vsesoyuznogo seminara po diskretnoy matematike i ee prilozheniyam (Moscow, 31 Jan.–2 Feb. 1984). Moscow, MSU Publ., 1986, pp. 7–12. (in Russian)
2. *Yablonskiy S. V.* Nekotorye voprosy nadezhnosti i kontrolya upravlyayushchikh sistem [Some questions of reliability and verification of control systems]. Matematicheskie Voprosy Kibernetiki, iss. 1. Moscow, Nauka Publ., 1988, pp. 5–25. (in Russian)
3. *Red'kin N. P.* Nadezhnost' i diagnostika skhem [Circuits Reliability and Diagnostics]. Moscow, MSU Publ., 1992. 192 p. (in Russian)

4. *Popkov K. A.* Nizhnie otsenki dlin polnykh diagnosticheskikh testov dlya skhem i vkhodov skhem [Lower bounds for lengths of complete diagnostic tests for circuits and inputs of circuits]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2016, no. 4(34), pp. 65–73. (in Russian)
5. *Red'kin N. P.* Length of diagnostic tests for Boolean circuits. Math. Notes, 2017, vol. 102, iss. 3–4, pp. 580–582.
6. *Lozhkin S. A.* Lektsii po osnovam kibernetiki (uchebnoe posobie dlya studentov) [Lectures on the Basics of Cybernetics (Tutorial for Students)]. Moscow, MSU Faculty of Comput. Math. and Cybern. Publ., 2004. 251 p. (in Russian)
7. *Yablonskiy S. V.* Vvedenie v diskretnuyu matematiku [Introduction to Discrete Mathematics]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 384 p. (in Russian)
8. *Popkov K. A.* O vozmozhnostyakh postroeniya legkotestiruemykh kontaknykh skhem i skhem iz funktsional'nykh elementov [On the Possibilities of Constructing Easily Testable Contact Circuits and Logic Circuits]: Diss. … Doctor of Phys.-Math. Sci. Moscow, 2021. 377 p. (in Russian)
9. *Korshunov A. D.* O chisle monotonnykh bulevykh funktsiy [On the number of monotone Boolean functions]. Problemy Kibernetiki, iss. 38. Moscow, Nauka Publ., 1981, pp. 5–108. (in Russian)