МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья
УДК 517.54 MSC: 30C20, 30C30
doi: 10.17223/19988621/77/1

Конформное отображение полуплоскости на счетноугольник типа полуплоскости

Иван Александрович Колесников

Томский государственный университет, Томск, Россия, ia.kolesnikov@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются счетноугольники – односвязные области типа полуплоскости, обладающие симметрией переноса вдоль вещественной оси и границей, состоящей из отрезков прямых. Метод определения параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца распространяется на случай конформного отображения полуплоскости на счетнугольник.
Ключевые слова: конформное отображение, счетноугольник, периодический многоугольник, симметрия переноса, интеграл Кристоффеля–Шварца

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2022-884).

Для цитирования: Колесников И.А. Конформное отображение полуплоскости на счетноугольник типа полуплоскости // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 77. С. 5–16. doi: 10.17223/19988621/77/1

Original article

Conformal mapping of a half-plane onto a periodic polygon of half-plane type

Ivan A. Kolesnikov

Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, ia.kolesnikov@mail.ru

Abstract. The paper solves the problem of constructing conformal mapping from the half-plane onto a periodic polygon. A periodic polygon Δ is a simply connected domain with symmetry of transfer, i.e., it has the property $L(\Delta)=\Delta$, where $L(w)=w+2\pi$. We consider a polygon with boundary consisting of a countable number of straight lines.

Moreover, it contains a half plane, $\{z : \operatorname{Im} z > M\} \subset \Delta$, for some M. We use a Schwarz–Christoffel integral for representation of the mapping. There is a classical problem of determining parameters for equations of this type. They are the preimages of polygon's vertices under the mapping. The required mapping is embedded in a one-parametric family of conformal mappings of the upper half-plane onto a family of periodic polygons obtained by shifting some vertices of initial periodic polygon with preserved angles. We consider the case when the family of periodic polygons and the initial polygon have the same number of vertices. The problem of determining the parameters of a family of mappings is reduced to the problem of integrating a system of ordinary differential equations.

Keywords: conformal mapping, periodic polygon, transfer symmetry, Schwarz–Christoffel integral

Acknowledgments: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (agreement No. 075-02-2022-884).

For citation: Kolesnikov, I.A. (2022) Conformal mapping of a half-plane onto a periodic polygon of half-plane type. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 5–16. doi: 10.17223/19988621/77/1

Пусть односвязная область Δ обладает следующими свойствами:

– при линейном преобразовании $L(w) = w + 2\pi$ область Δ остается неизменной $L(\Delta) = \Delta$;

– существует M такое, что $\{w : \operatorname{Im} w > M\} \subset \Delta$;

– часть границы области от точки w_0 до точки $w_0 + 2\pi$ состоит из конечного числа отрезков прямых.

Такую область называют счетноугольником типа полуплоскости с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π.

Такую область называют также периодическим многоугольником [1], будем использовать термин «счетноугольник», следуя работе [2].

Пусть отображение f (существование такого отображения следует из теоремы Римана) переводит верхнюю полуплоскость $\Pi^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ на счетноугольник Δ и $f(\infty) = \infty$. Для каждого отображения f существует вещественное число h, $h > 0$, такое, что $f(z + kh) = f(z) + 2k\pi$ [2].

Пусть F – некоторое отображение, переводящее верхнюю полуплоскость Π^+ на заданный счетноугольник Δ и удовлетворяющее условию $F(\infty) = \infty$ (переводящее простой конец на бесконечности в простой конец счетноугольника Δ на бесконечности, остающийся неподвижным при преобразовании $L(w) = w + 2\pi$). Множество всех отображений $f : \Pi^+ \to \Delta$, таких что $f(\infty) = \infty$, можно записать в виде $f(z) = F(az + b)$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$. Можно выбрать a и b так, чтобы $f(0) = w_0$ и $f(z + 2k\pi) = f(z) + 2k\pi$. Таким образом, отображение $f : \Pi^+ \to \Delta$, нормированное условиями $f(\infty) = \infty$, $f(z + 2k\pi) = f(z) + 2k\pi$, $f(0) = w_0$ – единственное.

Лемма 1. *Отображение* $f:\Pi^+\to\Delta$*, переводящее простой конец на бесконечности в простой конец счетноугольника* Δ *на бесконечности, остающийся неподвижным при преобразовании* $L(w)=w+2\pi$*, и удовлетворяющее условию* $f(z+2k\pi)=f(z)+2k\pi$*, обладает свойством*

$$\lim_{\operatorname{Im} z\to+\infty}\left(f(z)-z\right)=\gamma, \tag{1}$$

где γ *– константа,* $\gamma\in\mathbb{C}$*, предел здесь равномерный относительно* $\operatorname{Re} z$.

Доказательство. Рассмотрим сужение отображения f на область $Z=\{z:\operatorname{Im} z>0, 0<\operatorname{Re} z<2\pi\}$. Граница области $f(Z)$ состоит из кривых: l_1 (образ луча $\{z:\operatorname{Re} z=0, \operatorname{Im} z>0\}$), $l_2=l_1+2\pi$ (образ луча $\{z:\operatorname{Re} z=2\pi,\ \operatorname{Im} z>0\}$) и части границы счетноугольника Δ от точки w_0 до точки $w_0+2\pi$ (образ отрезка $\{z:\operatorname{Im} z=0,\ 0<\operatorname{Re} z<2\pi\}$). Отображение $\xi(w)=e^{iw}$ однолистно переводит область $f(Z)$ на область *V*, граница области *V* содержит разрез *L*, выходящий из точки $\xi=0$, причем кривые l_1 и l_2 соответствуют различным берегам этого разреза. Отображение $\zeta(z)=e^{iz}$ переводит область *Z* на единичный круг с разрезом по отрезку [0, 1]. Рассмотрим композицию $\chi(\zeta)=\xi\left(f\left(z(\zeta)\right)\right)$, переводящую единичный круг с разрезом на область *V*. Так как

$$\lim_{\substack{\zeta\to\zeta_0\\ \operatorname{Im}\zeta<0}}\chi(\zeta)=\lim_{\substack{\zeta\to\zeta_0\\ \operatorname{Im}\zeta>0}}\chi(\zeta),$$

где $\zeta_0\in(0,1)$, то (по принципу единственности) аналитические продолжения $\chi(\zeta)$ через верхний и нижний берега разреза $(0,1)$ совпадают, и отображение $\chi(\zeta)$ голоморфно в $\{\zeta:|\zeta|<1\}\setminus\{0\}$, причем ноль – устранимая особенность. Таким образом, композиция $\chi(\zeta)=\xi\left(f\left(z(\zeta)\right)\right)$ отображает голоморфно и однолистно единичный круг на область *V* без разреза *L* и раскладывается в нуле в ряд

$$\chi(\zeta)=c_1\zeta+c_2\zeta^2+c_3\zeta^3+\ldots,\quad c_1\neq 0.$$

Тогда отображение *f* в области $\{z:\operatorname{Im} z>M, 0<\operatorname{Re} z<2\pi\}$ при некотором $M>0$ представимо в виде $f(z)=-i\ln\xi\left(\zeta(z)\right)=z-i\ln\left(c_1+c_2e^{iz}+c_3e^{2iz}+\ldots\right)$, и, следовательно, $\lim\limits_{\operatorname{Im} z\to+\infty}\left(f(z)-z\right)=-i\ln c_1=:\gamma$ равномерно относительно $\operatorname{Re} z$. Возвращаясь к отображению $f:\Pi^+\to\Delta$ и учитывая свойство $f(z+2k\pi)=f(z)+2k\pi$, получаем утверждение леммы.

Двигаясь по границе счетноугольника от точки w_0 до точки $w_0+2\pi$ в положительном направлении, обозначим последовательно встречающиеся угловые точки границы через $A_1^{(0)},A_2^{(0)},\ldots A_n^{(0)},A_1^{(1)}$, $A_1^{(1)}=A_1^{(0)}+2\pi$, $n\in\mathbb{Z}$. Остальные вершины $A_k^{(m)}$ определяются сдвигом вершин $A_k^{(0)}$ вдоль вещественной оси $A_k^{(m)}=A_k^{(0)}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$, $k=1,\ldots,n$. Вершины $A_1^{(0)},A_2^{(0)},\ldots A_n^{(0)}$ будем называть вершинами на основном периоде. Угол при вершине $A_k^{(m)}$ счетноугольника обозначим через $\alpha_k \pi$, $k=1,\dots,n$. Если $A_k^{(m)} \in \mathbb{C}$, то $0<\alpha_k \le 2$, если же $A_k^{(m)}=\infty$, то $\alpha_k=0$. Видно, что $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=n$. Обозначим через a_k прообраз вершины $A_k^{(0)}$, $k=1,\dots,n$, при отображении *f*. Для отображения *f*, нормированного условиями

$$f(\infty)=\infty, \quad f(z+2k\pi)=f(z)+2k\pi, \tag{2}$$

не ограничивая общности, можно считать, что $a_k \in [0,2\pi)$, $k=1,\dots,n$.

В работе [2] с помощью принципа симметрии Римана–Шварца получен следующий результат.

Теорема 1. *Отображение f верхней полуплоскости на счетноугольник* Δ, *удовлетворяющее условиям* (2), *представимо в виде:*

$$f(z)=c_1\int_{z_0}^{z} G(\zeta)\prod_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{\zeta-a_k}{2}\right)^{\alpha_k-1} d\zeta+c_2,$$

где a_k, $k=1,\dots,n$, *– прообразы вершин на основном периоде,* $\alpha_k\pi$, $k=1,\dots,n$, *– углы при этих вершинах,* c_1, c_2 *– константы,* $G(z)$ *– целая функция.*

Покажем, что целая функция $G(z)$ – константа. В равенстве

$$\frac{f''(z)}{f'(z)}=\frac{G'(z)}{G(z)}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)\operatorname{ctg}\frac{z-a_k}{2}$$

выполним предельный переход при $\operatorname{Im} z\to+\infty$. В силу (1) левая часть последнего равенства стремится к нулю, получаем

$$0=\lim_{\operatorname{Im} z\to+\infty}\frac{G'(z)}{G(z)}-\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)=\lim_{\operatorname{Im} z\to+\infty}\frac{G'(z)}{G(z)}.$$

Таким образом, по теореме Лиувилля $G(z)=\text{const}$ и отображение *f* можно записать в виде:

$$f(z)=c_1\int_{z_0}^{z}\prod_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{\zeta-a_k}{2}\right)^{\alpha_k-1} d\zeta+c_2. \tag{3}$$

Формула (3) получена в работе [3] с помощью формулы типа формулы Шварца. Интеграл Кристоффеля–Шварца распространен для отображений из верхней полуплоскости на прямолинейные счетноугольники с двойной симметрией [4]. В работе [5] для отображения из полуплоскости на круговой счетноугольник получено дифференциальное уравнение типа уравнения Шварца. Численный метод нахождения конформных отображений на счетноугольники предложен в [6]. С помощью алгебры сверток и теории рядов Фробениуса [7] предложен метод построения конформных отображений на полигональные области, в том числе счетноугольники типа полуплоскости. С помощью параметрического метода Левнера получено дифференциальное уравнение [8] типа дифференциального уравнения Левнера для отображения верхней полуплоскости на области с симметрией переноса на 2π. В работе [9] метод П.П. Куфарева определения акцессорных параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца распространяется на случай конформного отображения верхней полуплоскости на счетноугольник, в работе [10] – на случай круговых счетноугольников.

Конформные отображения полуплоскости на счетноугольники, ограниченные дугами окружностей или отрезками прямых, имеют приложения в различных задачах математической физики [11]–[15].

В настоящей статье метод определения параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца, предложенный в работе [16], распространяется на случай счетноугольника.

Рассмотрим счетноугольник $\Delta(0)$, имеющий *n* вершин $A_1^{(0)}, A_2^{(0)}, \dots A_n^{(0)}$ на основном периоде. Образуем семейство счетноугольников $\Delta(t)$, сдвигая вершины счетноугольника $\Delta(0)$ по закону $A_k^{(m)}(t) := A_k^{(m)} + tB_k$, $B_k \in \mathbb{C}$, $0 \le t \le T$ так, чтобы углы многоугольника оставались неизменными при $0 < t < T$. Таким образом, многоугольник $\Delta(t)$ имеет углы $\alpha_k \pi$ при вершинах $A_k^{(m)}(t)$, $k = 1, \dots, n$, $m \in \mathbb{Z}$.

Пусть отображение $\tilde{f} : \Pi^+ \times [0,T] \to \Delta(t)$, $w = \tilde{f}(\zeta, t)$, при фиксированном *t* переводит верхнюю полуплоскость на счетноугольник $\Delta(t)$. Отображение $\tilde{f}$, согласно лемме 1, обладает свойством

$$\lim_{\operatorname{Im} z \to +\infty} \left(\tilde{f}(\zeta, t) - \zeta \right) = \gamma(t).$$

Будем далее рассматривать семейство отображений $f(z,t) = \tilde{f}\left(z - \operatorname{Re}\gamma(t), t\right)$. Отображение *f* обладает свойством

$$\lim_{\operatorname{Im} z \to +\infty} \left(f(z,t) - z \right) = i\delta(t), \ \delta(t) \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Обозначим прообраз вершины на основном периоде $A_k^{(0)}(t) = A_k^{(0)} + tB_k$ многоугольника $\Delta(t)$ при отображении *f* через $a_k(t)$, $k = 1, \dots, n$, остальные прообразы вершин определяются равенством $a_k^{(m)}(t) = a_k(t) + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Отображение *f* можно представить с помощью формулы Кристоффеля–Шварца:

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = f'(z,t) = c(t) \prod_{k=1}^{n} \left(\sin \frac{z - a_k(t)}{2} \right)^{\alpha_k - 1}. \tag{5}$$

В следующей теореме для семейства отображений *f* получено дифференциальное уравнение по параметру *t*.

Теорема 2. *Семейство отображений $f = f(z,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\ddot{f}(z,t) = \frac{c(t)}{2} \prod_{k=1}^{n} \left(\sin \frac{z - a_k}{2} \right)^{\alpha_k - 1} \sum_{k=1}^{n} \dot{a}_k^2(t) (\alpha_k - 1) \operatorname{ctg} \frac{z - a_k(t)}{2}, \tag{6}$$

точка над функцией означает частную производную по t.

Доказательство. Отображение f продолжим по принципу симметрии через отрезок вещественной оси $\left(a_{k_1}^{(m_1)}(t), a_{k_1+1}^{(m_1)}(t)\right)$ в нижнюю полуплоскость, получим отображение $f_1(z,t) = M_1 \overline{f(\overline{z},t)} + L_1(t)$, $M_1, L_1(t) \in \mathbb{C}$, причем $\dot{M}_1 = 0$ и L_1 зависит от t линейно, т. е. $\ddot{L}_1(t) = 0$. Продолжим еще отображение f в нижнюю полуплоскость через отрезок $\left(a_{k_2}^{(m_2)}(t), a_{k_2+1}^{(m_2)}(t)\right)$, получим отображение $f_2(z,t) = M_2 \overline{f(\overline{z},t)} + L_2(t)$. Ветви f_1 и f_2 связаны между собой следующим образом: $f_2(z,t) = \frac{M_2}{M_1}\left(f_1(z,t) - L_1(t)\right) + L_2(t)$. Получаем $\frac{\ddot{f}_1(z,t)}{f_1'(z,t)} = \frac{\ddot{f}_2(z,t)}{f_2'(z,t)}$, и, следовательно, функция $\frac{\ddot{f}}{f'}$ продолжается из верхней полуплоскости в нижнюю через любой отрезок $\left(a_k^{(m)}(t), a_{k+1}^{(m)}(t)\right)$ однозначным образом.

Функция $\frac{\ddot{f}}{f'}$ однозначна в $\mathbb{C}$ и голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \left\{a_k^{(m)}(t) : k = 1,\ldots,n,\ m \in \mathbb{Z}\right\}$. Изучим ее поведение в окрестностях изолированных особых точек.

Пусть $f\left(a_k^{(m)}(t), t\right) = A_k^{(m)}(t) \neq \infty$. В окрестности точки $a_k^{(m)}(t)$ отображение f раскладывается в ряд

$$f(z,t) = A_k^{(m)}(t) + c_{k1}^{(m)}(t)\left(z - a_k^{(m)}(t)\right)^{\alpha_k} + c_{k2}^{(m)}(t)\left(z - a_k^{(m)}(t)\right)^{\alpha_k+1} + \ldots,$$

тогда

$$f'(z,t) = c_{k1}^{(m)}(t)\alpha_k\left(z - a_k^{(m)}(t)\right)^{\alpha_k-1} + c_{k2}^{(m)}(t)(\alpha_k+1)\left(z - a_k^{(m)}(t)\right)^{\alpha_k} + \ldots,$$

$$\ddot{f}(z,t) = c_{k1}^{(m)}(t)\left(\dot{a}_k^{(m)}(t)\right)^2 \alpha_k(\alpha_k-1)\left(z - a_k^{(m)}(t)\right)^{\alpha_k-2} + \tilde{c}_{k2}^{(m)}(t)\left(z - a_k^{(m)}(t)\right)^{\alpha_k-1} + \ldots,$$

и

$$\frac{\ddot{f}(z,t)}{f'(z,t)} = \frac{\left(\dot{a}_k^{(m)}(t)\right)^2(\alpha_k-1)}{z - a_k^{(m)}(t)} + O(1). \tag{7}$$

Пусть $f\left(a_k^{(m)}(t), t\right) = A_k^{(m)}(t) = \infty$, тогда угол при вершине $A_k^{(m)}(t)$ в бесконечности равен нулю, и в окрестности точки $a_k^{(m)}(t)$ отображение f раскладывается в ряд

$$f(z,t) = \mu\ln\left(z - a_k^{(m)}(t)\right) + c_{k0}^{(m)}(t) + c_{k1}^{(m)}(t)\left(z - a_k^{(m)}(t)\right) + c_{k2}^{(m)}(t)\left(z - a_k^{(m)}(t)\right)^2 + \ldots,$$

где $|\mu\pi|$ – расстояние между лучами, образующими вершину в точке $A_k^{(m)}(t)$, $\arg\mu$ – угол наклона этих лучей к вещественной оси. Получаем, что функция $\frac{\ddot{f}}{f'}$ в окрестности точки $a_k^{(m)}(t)$ имеет разложение (7).

Видим, что

$$g(z,t)=\frac{\ddot f(z,t)}{f'(z,t)}-\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{\left(\dot a_k^{(m)}(t)\right)^2(\alpha_k-1)}{z-a_k^{(m)}(t)}$$

является голоморфной в $\mathbb{C}$ по z функцией.

Найдем сумму ряда

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{z-a_k^{(m)}(t)}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{z-a_k(t)-2\pi m}=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\frac{z-a_k(t)}{2\pi}-m}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\zeta}+\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{\zeta-m}+\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{\zeta+m}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\zeta}+2\zeta\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{\zeta^2-m^2}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\zeta\pi=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{z-a_k(t)}{2},$$

где $\zeta=\dfrac{z-a_k(t)}{2\pi}$. Учитывая, что $\dot a_k^{(m)}(t)=\dot a_k(t)$, получаем

$$g(z,t)=\frac{\ddot f(z,t)}{f'(z,t)}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\dot a_k^2(t)(\alpha_k-1)\operatorname{ctg}\frac{z-a_k(t)}{2}. \tag{8}$$

В последнем равенстве выполним предельный переход при $\operatorname{Im}z\to+\infty$. В силу условия (4) $\lim\limits_{\operatorname{Im}z\to+\infty}\dfrac{\ddot f(z,t)}{f'(z,t)}=i\ddot\delta(t)$. Получаем

$$\lim_{\operatorname{Im}z\to+\infty}g(z,t)=i\ddot\delta(t)+\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n}\dot a_k^2(t)(\alpha_k-1).$$

Из теоремы Лиувилля следует, что $g(z,t)=i\ddot\delta(t)+\dfrac{i}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\dot a_k^2(t)(\alpha_k-1).$ Но из равенства (8) видим, что для вещественных z функция g вещественна, поэтому $g(z,t)=0$ и

$$\ddot\delta(t)=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\dot a_k^2(t)(\alpha_k-1).$$

Теорема 2 доказана.

Лемма 2. *Параметр* $c(t)$ *не зависит от t, кроме того,*

$$\sum_{k=1}^{n}\dot a_k(t)(\alpha_k-1)=0.$$

Доказательство. Рассмотрим равенство

$$A_k(t)-A_{k-1}(t)=c(t)\int_{a_{k-1}(t)}^{a_k(t)}\prod_{j=1}^{n}\left(\sin\frac{\zeta-a_j(t)}{2}\right)^{\alpha_j-1}d\zeta.$$

Аргумент левой части и аргумент подынтегрального выражения не зависят от *t*, следовательно, аргумент $c(t)$ не зависит от *t*.

Прологарифмируем и затем продифференцируем по *t* равенство (5), получим

$$\frac{\dot f'(z,t)}{f'(z,t)}=\frac{\dot c(t)}{c(t)}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)\dot a_k(t)\operatorname{ctg}\frac{z-a_k(t)}{2}.$$

Устремив $\operatorname{Im} z$ к $+\infty$, получим $\dfrac{\dot{c}(t)}{c(t)}+\dfrac{i}{2}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)\dot{a}_k(t)=0$. Так как $\dfrac{\dot{c}(t)}{c(t)}\in\mathbb{R}$, то $\dot{c}(t)=0$, и $\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)\dot{a}_k(t)=0$. Лемма 2 доказана.

Теорема 3. *Параметры* $a_k(t)$, $k=1,\ldots,n$, $t\in[0,T)$, *отображения f удовлетворяют системе дифференциальных уравнений*

$$\ddot{a}_k(t)+\frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(\alpha_j-1)\left(\dot{a}_k(t)-\dot{a}_j(t)\right)^2\operatorname{ctg}\frac{a_k(t)-a_j(t)}{2}=0,\quad k=1,\ldots,n. \tag{9}$$

Доказательство. Введем обозначение $\phi(z,t):=\ln f'(z,t)$, правую часть равенства (6) обозначим через $f'(z,t)\psi(z,t)$. Тогда

$$\ddot{\phi}(z,t)+\dot{\phi}^2(z,t)=\psi(z,t)\phi'(z,t)+\psi'(z,t).$$

Преобразовав это равенство с помощью (5), получим

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)\ddot{a}_k(t)\operatorname{ctg}\frac{z-a_k(t)}{2}-$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)\dot{a}_k^2(t)\sin^{-2}\frac{z-a_k(t)}{2}+\frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)\dot{a}_k(t)\operatorname{ctg}\frac{z-a_k(t)}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)\operatorname{ctg}\frac{z-a_k(t)}{2}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)\dot{a}_k^2(t)\operatorname{ctg}\frac{z-a_k(t)}{2}-$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)\dot{a}_k^2(t)\sin^{-2}\frac{z-a_k(t)}{2}.$$

Раскладывая левую и правую части этого равенства в ряд Лорана в окрестности точки $a_k(t)$ и приравнивая коэффициенты при $\left(z-a_k(t)\right)^{-1}$, получаем (9). Теорема 3 доказана.

Пусть отображение f, $f:\Pi^+\times[0,T]\to\Delta(t)$, при фиксированном *t* переводит Π^+ на счетноугольник $\Delta(t)$. Рассмотрим случай, когда семейство счетноугольников $\Delta(t)$ имеет n вершин $A_k^{(0)}(t)$, $k=1,\ldots,n$, на основном периоде при $t\in[0,T)$, $f^{-1}\left(A_k^{(0)}(t)\right)=a_k(t)\in[0,2\pi)$. В этом случае $a_1(t)<a_2(t)<\ldots<a_n(t)$ при $t\in[0,T)$. Угол при вершине $A_k^{(0)}(t)$ равен $\alpha_k\pi$, $k=1,\ldots,n$, $t\in[0,T)$. Отображение $f=f(z,0)$ известно, соответственно значения $a_k(0)$, $k=1,\ldots,n$, известны.

Параметры $a_k(t)$, $k=1,\ldots,n$, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (9). Запишем ее в нормальной форме:

$$\begin{cases}\dot{b}_k(t)=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(\alpha_j-1)\left(b_k(t)-b_j(t)\right)^2\operatorname{ctg}\dfrac{a_k(t)-a_j(t)}{2},\quad k=1,\ldots,n,\\[2ex] \dot{a}_k(t)=b_k(t),\quad k=1,\ldots,n.\end{cases}$$

Выражения, стоящие в правых частях, имеют непрерывные частные производные по a_k, b_k на отрезке $t \in [0,T)$, следовательно, по теореме существования и единственности решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений решение системы существует и единственно на отрезке $t \in [0,T)$ при заданных начальных значениях $a_k(0) = a_{k,0}$, $b_k(0) = \dot{a}_k(0) = a_{k,1}$, $k = 1,\ldots,n$.

Теорема 4. *Пусть* $A_p^{(0)}(t) \neq A_q^{(0)}(t)$, $p \neq q$, *при* $t \in [0,T)$, *тогда начальные данные* $\dot{a}_k(0) = a_{k,1}$, $k = 1,\ldots,n$, *системы дифференциальных уравнений* (9) *удовлетворяют системе линейных уравнений*

$$\frac{B_k - B_{k-1}}{c\left(a_{k,0} - a_{k-1,0}\right)} = \frac{a_{k,1} - a_{k-1,1}}{a_{k,0} - a_{k-1,0}} \int_0^1 F_k(\xi)\,d\xi + \tag{10}$$

$$\sum_{q=1}^{n} \frac{\alpha_q - 1}{2} \int_0^1 \left(\xi\left(a_{k,1} - a_{k-1,1}\right) + a_{k-1,1} - a_{q,1}\right) \operatorname{ctg} \frac{\xi\left(a_{k,0} - a_{k-1,0}\right) + a_{k-1,0} - a_{q,0}}{2} F_k(\xi)\,d\xi,$$

где

$$F_k(\xi) = \prod_{j=1}^{n} \left(\sin \frac{\xi\left(a_{k,0} - a_{k-1,0}\right) + a_{k-1,0} - a_{j,0}}{2} \right)^{\alpha_j - 1}.$$

Доказательство. Рассмотрим равенства

$$f\left(a_k(t),t\right) - f\left(a_{k-1}(t),t\right) = c \int_{a_{k-1}(t)}^{a_k(t)} \prod_{j=1}^{n} \left(\sin \frac{\zeta - a_j(t)}{2} \right)^{\alpha_j - 1} d\zeta, \quad k = 2,\ldots,n+1,$$

где $a_{n+1}(t) := a_1(t) + 2\pi$, $f\left(a_k(t),t\right) - f\left(a_{k-1}(t),t\right) = t\left(B_k - B_{k-1}\right) + A_k^{(0)} - A_{k-1}^{(0)}$.

Выполнив замену $\zeta = \xi\left(a_k - a_{k-1}\right) + a_{k-1}$, получим

$$t\left(B_k - B_{k-1}\right) + A_k^{(0)} - A_{k-1}^{(0)} = c\left(a_k(t) - a_{k-1}(t)\right) \int_0^1 J_k(\xi,t)\,d\xi, \quad k = 2,\ldots,n+1, \tag{11}$$

где

$$J_k(\xi,t) = \prod_{j=1}^{n} \left(\sin \frac{\xi\left(a_k(t) - a_{k-1}(t)\right) + a_{k-1}(t) - a_j(t)}{2} \right)^{\alpha_j - 1}.$$

Функцию J_k можно записать в виде $J_k(\xi,t) = h_k(\xi)\, g_k(\xi,t)$, где

$$h_k(\xi) = \xi^{\alpha_{k-1} - 1} (\xi - 1)^{\alpha_k - 1}, \quad g_k(\xi,t) = \xi^{1 - \alpha_{k-1}} (\xi - 1)^{1 - \alpha_k} J_k(\xi,t).$$

Функция $g_k(\xi,t)$ непрерывна вместе с частной производной $\dfrac{\partial g_k(\xi,t)}{\partial t}$ в прямоугольнике $\left\{(\xi,t) : 0 \le \xi \le 1, 0 - \varepsilon \le t \le 0 + \varepsilon\right\}$, и интеграл $\int_0^1 h_k(\xi)\,d\xi$ сходится, следовательно, согласно [[16]. Лемма 2],

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 J_k(\xi,t)\,d\xi = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 h_k(\xi)\, g_k(\xi,t)\,d\xi = \int_0^1 h_k(\xi) \frac{\partial g_k(\xi,t)}{\partial t}\,d\xi = \int_0^1 \frac{\partial J_k(\xi,t)}{\partial t}\,d\xi.$$

Тогда, дифференцируя (11) по t, получим

$$\frac{B_k - B_{k-1}}{c\left(a_k(t) - a_{k-1}(t)\right)} = \frac{\dot{a}_k(t) - \dot{a}_{k-1}(t)}{a_k(t) - a_{k-1}(t)} \int_0^1 J_k(\xi, t)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{q=1}^{n} \frac{\alpha_q - 1}{2} \int_0^1 \left(\xi\left(\dot{a}_k(t) - \dot{a}_{k-1}(t)\right) + \dot{a}_{k-1}(t) - \dot{a}_q(t)\right) \times$$

$$\times \operatorname{ctg} \frac{\xi\left(a_k(t) - a_{k-1}(t)\right) + a_{k-1}(t) - a_q(t)}{2} J_k(\xi, t)\, d\xi,$$

$k = 2, \ldots, n+1$. Переходя к пределу при t стремящемся к нулю, получим (10).

Теорема 4 доказана.

Как отмечалось выше, метод П.П. Куфарева определения параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца в работе [9] распространен на случай счетноугольника с границей, состоящей из отрезков прямых. Метод позволяет пошагово построить конформное отображение на произвольный счетноугольник. На n-м шаге рассматривается семейство счетноугольников $\Delta(\tau)$, получаемое проведение разрезов $l^{(m)}(\tau) = l^{(0)}(\tau) + 2m\pi$ вдоль отрезков прямых в некотором начальном счетноугольнике $\Delta(0)$, начало разреза $l^{(0)}(\tau)$ принадлежит границе $\Delta(0)$, параметр τ связан с длиной разреза, $0 \le \tau < T$. Если при τ стремящемся к T подвижный конец разреза достигает некоторой граничной точки области $\Delta(0)$, то ядро семейства счтеноугольников $\Delta(\tau)$ можно выбрать различными способами (в процессе построения отображения на каждом шаге выбирается ядро, являющееся счетноугольником). Комбинируя метод определения параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца для счетноугольника, предложенный в работе [9], и метод, предложенный в данной работе, можно пошагово построить конформное отображение на произвольный счетноугольник так, чтобы на каждом шаге ядро семейства счетноугольников определялось однозначно. Такой подход улучшает точность вычислений.

Список источников

1. *Driscoll T.A., Trefethen L.N.* Schwarz-Christoffel mapping. Cambridge : Cambridge University Press, 2002. (Cambridge Monographs on Applied and Comput. Math. V. 8).
2. *Александров И.А.* Конформные отображения полуплоскости на области с симметрией переноса // Известия вузов. Математика. 1999. № 6 (445). С. 15–18.
3. *Копанев С.А., Копанева Л.С.* Формула типа формулы Кристоффеля–Шварца для счетноугольника // Вестник Томского государственного университета. 2003. № 280. С. 52–54.
4. *Колесников И.А., Копанева Л.С.* Конформное отображение на счетноугольник с двойной симметрией // Известия вузов. Математика. 2014. № 12. С. 37–47.
5. *Колесников И.А.* Отображение на круговой счетноугольник с симметрией переноса // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 2 (22). С. 33–43.
6. *Floryan J.M.* Schwarz–Christoffel methods for conformal mapping of regions with a periodic boundary // J. Comput. and Applied Math. 1993. № 46. P. 77–102. doi: 10.1016/0377-0427(93)90288-M

7. *Hussenpflug W.S.* Elliptic integrals and the Schwarz–Christoffel transformation // Computers Math. Applic. 1997. V. 33, No. 12. P. 15–114. doi: 10.1016/S0898-1221(97)00091-6
8. *Александров И.А., Копанева Л.С.* Левнеровские семейства отображений полуплоскости на области с симметрией переноса // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 284. С. 5–7.
9. *Колесников И.А.* Определение акцессорных параметров для отображения на счетноугольник // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 2 (28). С. 18–28.
10. *Колесников И.А.* Определение акцессорных параметров конформных отображений из верхней полуплоскости на прямолинейные счетноугольники с двойной симметрией и круговые счетноугольники // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 60. С. 42–60. doi: 10.17223/19988621/60/4
11. *Neviere M., Cadilhac M., Petit R.* Applications of conformal mappings to the diffraction of electromagnetic waves by a grating // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1973. V. 21, No. 1. P. 37–46. doi: 10.1109/TAP.1973.1140416
12. *Tsarin Yu.A.* Conformal mapping technique in the theory of periodic structures // Microwave and Optical Technology Letters. 2000. V. 26, No. 1. P. 57–61. doi: 10.1002/(SICI)1098-2760(20000705)26:1<57::AID-MOP18>3.0.CO;2-Q
13. *Gysen B.L.J., Lomonova E.A., Paulides J.J.H., Vandenput A.J.A.* Analytical and Numerical Techniques for Solving Laplace and Poisson Equations in a Tubular Permanent Magnet Actuator: Part II. Schwarz–Christoffel Mapping // IEEE Transactions on Magnetics. 2008. V. 44, No. 7. P. 1761–1767. doi: 10.1109/TMAG.2008.923438
14. *Leontiou T., Kotsonis M., Fyrillas M.M.* Optimum isothermal surfaces that maximize heat transfer // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2013. V. 63. P. 13–19. doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.02.078
15. *Aouiche A., Djellid A., Bouttout F.* Fuzzy neuroconformal analysis of multilayer elliptical cylindrical and asymmetrical coplanar striplines // Int. J. Electron. Commun. (AEÜ). 2015. V. 69. P. 1151–1166. doi: 10.1016/j.aeue.2015.04.004
16. *Колесников И.А.* Однопараметрический метод определения параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца // Сибирский математический журнал. 2021. Т. 62, No. 4. С. 784–802. doi: 10.33048/smzh.2021.62.407

References

1. Driscoll T.A., Trefethen L.N. (2002) *Schwarz–Christoffel mapping*. Vol. 8 of Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press.
2. Aleksandrov I.A. (1999) Conformal Mappings of a Half-Plane onto Domains with Transfer Symmetry. *Russian Mathematics.* 43(6). pp. 13–16.
3. Kopanev S. A., Kopaneva L. S. (2003) Formula tipa formuly Kristoffelya – Shvartsa dlya schetnougol'nika [The Christoffel−Schwarz type formula for a polygon with the countable number of vertices]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal.* 280. pp. 52–54.
4. Kolesnikov I. A., Kopaneva L. S. (2014) Conformal Mapping onto Numerable Polygon with Double Symmetry. *Russian Mathematics*. 58(12). pp. 32–40. DOI: 10.3103/S1066369X14120044.
5. Kolesnikov I. A. (2013) Otobrazheniye na krugovoy schetnougol’nik s simmetriyey perenosa [Mapping onto a circular numerable polygon with the symmetry of translation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 2(22). pp. 33–43.
6. Floryan J.M. (1993) Schwarz–Christoffel Methods for Conformal Mapping of Regions with a Periodic Boundary. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 46. pp. 77–102. DOI: 10.1016/0377-0427(93)90288-M.

7. Hussenpflug W.S. (1997) Elliptic Integrals and the Schwarz–Christoffel Transformation. *Computers & Mathematics with Applications*. 33(12). pp. 15–114. DOI: 10.1016/S0898-1221(97)00091-6.
8. Aleksandrov I.A., Kopaneva L.S. (2004) Levnerovskiye semeystva otobrazheniy poluploskosti na oblasti s simmetriyey perenosa [Loewner's sets of mappings of a half-plane on domains with symmetry of translation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 284. pp. 5–7.
9. Kolesnikov I.A. (2014) Opredeleniye aktsessornykh parametrov dlya otobrazheniya na schetnougol'nik [Determination of accessory parameters for mapping onto a numerable polygon]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2014. 2(28). pp. 18–28.
10. Kolesnikov I.A. (2019) Opredeleniye aktsessornykh parametrov konformnykh otobrazheniy iz verkhney poluploskosti na pryamolineynyye schetnougol'niki s dvoynoy simmetriyey i krugovyye schetnougol'niki [Determining parameters of conformal mappings from the upper half-plane onto straight-line periodic polygons with double symmetry and onto circular periodic polygons]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 60. pp. 42–60. DOI: 10.17223/19988621/60/4.
11. Neviere M., Cadilhac M., Petit R. (1973) Applications of Conformal Mappings to the Diffraction of Electromagnetic Waves by a Grating. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 21(1). pp. 37–46. DOI: 10.1109/TAP.1973.1140416.
12. Tsarin Yu.A. (2000) Conformal mapping technique in the theory of periodic structures. *Microwave and Optical Technology Letters*. 26(1). pp. 57–61. DOI: 10.1002/(SICI)1098-2760(20000705)26:1<57::AID-MOP18>3.0.CO;2-Q
13. Gysen B.L.J., Lomonova E.A., Paulides J.J.H., Vandenput A.J.A. (2008) Analytical and Numerical Techniques for Solving Laplace and Poisson Equations in a Tubular Permanent Magnet Actuator: Part II. Schwarz–Christoffel Mapping. *IEEE Transactions on Magnetics*. 44(7). pp. 1761–1767. DOI: 10.1109/TMAG.2008.923438.
14. Leontiou T, Kotsonis M, Fyrillas M.M. (2013) Optimum Isothermal Surfaces that Maximize Heat Transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 63. pp. 13–19. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.02.078.
15. Aouiche A., Djellid A., Bouttout F. (2015) Fuzzy Neuroconformal Analysis of Multilayer Elliptical Cylindrical and Asymmetrical Coplanar Striplines. *AEÜ – International Journal of Electronics and Communications*. 69. pp. 1151–1166. DOI: 10.1016/j.aeue.2015.04.004.
16. Kolesnikov I.A. (2021) A One-Parametric Method for Determining Parameters in the Schwarz–Christoffel Integral. *Siberian Mathematical Journal*. 62(4). pp. 784–802. DOI: 10.33048/smzh.2021.62.407.

***Сведения об авторе*:**
Колесников Иван Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ia.kolesnikov@mail.ru

***Information about the author*:**
Kolesnikov Ivan A. (Candidate of Physics and Mathematics, Regional Scientific and Educational Mathematical Center, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation) E-mail: ia.kolesnikov@mail.ru

Статья поступила в редакцию 30.12.2021; принята к публикации 19.05.2022

The article was submitted 30.12.2021; accepted for publication 19.05.2022