

**В Е С Т Н И К
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2022

№ 78

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.С. Рогаев (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, Е.Л. Лобода, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, М.А. Шеремет, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Konstantin S. Rogayev (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenchikov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Egor L. Loboda, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Mikhail A. Sheremet, Gennadiy R. Shragier, Ernst R. Shragier.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесён в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Афанасьева А.А., Старченко А.В. Численное решение прямой задачи электроимпедансной томографии в полной электродной постановке	5
Имомов А.А., Бозоров И.Н., Хуррамов А.М. О числе собственных значений модельного оператора на одномерной решетке	22
Смоленцев Н.К. Левоинвариантные пара-кэлеровы структуры на шестимерных нильпотентных группах Ли	38

МЕХАНИКА

Аскеров А.А., Червакова А.В., Костюшин К.В. Исследование акустических характеристик одиночной сверхзвуковой струи, истекающей в затопленное пространство	49
Афонин А.Г., Бутов В.Г., Солоненко В.А., Яшук А.А., Якушев А.А. Исследование процессов в генераторе плазмы импульсного МГД-генератора на комбинированном пиротехническом топливе	60
Бабук В.А., Будный Н.Л. К вопросу о моделировании разрушения оксидной пленки при воспламенении частиц алюминия	74
Гладков С.О., Богданова С.Б. О форме брахистохроны, вращающейся в вертикальной плоскости	86
Зуев Д.М., Макаров Д.Д., Охоткин К.Г. Экспериментальное и аналитическое исследование геометрически-нелинейного изгиба консоли под действием распределенной нагрузки гравитационного типа	99
Исмаилов К.К. Определение аэродинамических характеристик беспилотного летательного аппарата самолетного типа аналитическими методами	112
Маликов З.М., Назаров Ф.Х., Мадалиев М.Э. Сравнение современных моделей турбулентности для течения Тейлора–Куэтта	125
Павлов В.Д. Формальное порождение величин механического движения	143
Юй Ч. Волновые движения жидкого топлива в тороидальных сосудах с учетом капиллярного эффекта	151

CONTENTS

MATHEMATICS

Afanas'eva A.A., Starchenko A.V. Numerical solution of the direct problem of electroimpedance tomography in a complete electrode formulation	5
Imomov A.A., Bozorov I.N., Khurramov A.M. On the number of eigenvalues of a model operator on a one-dimensional lattice	22
Smolentsev N.K. Left-invariant para-Kähler structures on six-dimensional nilpotent Lie groups	38

MECHANICS

Askerov A.A., Chervakova A.V., Kostyushin K.V. Investigation of acoustic characteristics of a single supersonic jet flowing into a flooded space	49
Afonin A.G., Butov V.G., Solonenko V.A., Yashchuk A.A., Yakushev A.A. A Study of processes in a plasma generator of the pulsed MHD generator running on a combined pyrotechnic fuel	60
Babuk V.A., Budnyi N.L. To the issue of the modeling of oxide film fracture during aluminum particle ignition	74
Gladkov S.O., Bogdanova S.B. On the shape of the brachistichrone rotating in a vertical plane	86
Zuev D.M., Makarov D.D., Okhotkin K.G. The experimental and analytical study of geometrically nonlinear bending of a cantilever beam under a distributed gravity load	99
Ismailov K.K. Determination of aerodynamic characteristics of fixed-wing unmanned aerial vehicle by analytical techniques	112
Malikov Z.M., Nazarov F.Kh., Madaliev M.E. Comparison of advanced turbulence models for the Taylor-Couette flow	125
Pavlov V.D. Formal derivation of mechanical motion magnitudes	143
Yu Z. Sloshing of a liquid fuel in toroidal tanks with account for capillary effect	151

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 519.6, 517.95

MSC: 35J25, 65N06

doi: 10.17223/19988621/78/1

Численное решение прямой задачи электроимпедансной томографии в полной электродной постановке**Анна Александровна Афанасьева¹,
Александр Васильевич Старченко²**^{1, 2} *Томский государственный университет, Томск, Россия*¹ *afanaseva_anyutka@inbox.ru*² *starch@math.tsu.ru*

Аннотация. Данная работа связана с одним из методов медицинской визуализации – электроимпедансной томографией (ЭИТ). Особенностью рассматриваемой двумерной математической постановки для прямой задачи ЭИТ является использование уравнения эллиптического типа с кусочно-постоянными коэффициентами и специального интегро-дифференциального граничного условия на контактной границе электродов. Для приближенного решения рассматриваемой задачи был разработан численный метод с использованием неструктурированных сеток, метода конечных объемов для барицентрических ячеек и метода исключения Гаусса с выбором главного элемента. Валидация метода выполнена на известном аналитическом решении.

Ключевые слова: уравнение эллиптического типа с кусочно-постоянными коэффициентами, метод конечного объема, неструктурированные сетки, полная электродная модель

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2022-884).

Для цитирования: Афанасьева А.А., Старченко А.В. Численное решение прямой задачи электроимпедансной томографии в полной электродной постановке // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 78. С. 5–21. doi: 10.17223/19988621/78/1

Numerical solution of the direct problem of electroimpedance tomography in a complete electrode formulation

Anna A. Afanas'eva¹, Alexander V. Starchenko²

^{1, 2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ afanaseva_anyutka@inbox.ru

² starch@math.tsu.ru

Abstract. In this article, we consider the two-dimensional mathematical statement for the direct problem of electroimpedance tomography (EIT). The peculiarity of this formulation is the use of an elliptic equation with piecewise constant coefficients and a special integro-differential boundary condition at the contact boundary of the electrodes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 0, (x, y) \in D; \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial n} &= 0, (x, y) \notin \bigcup_{l=1}^L E_l; \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial n} &= \frac{1}{z_l E_l} \left(\int_{E_l} u ds + z_l I_l \right) - \frac{u}{z_l}, (x, y) \in E_l, l = 1, 2, \dots, L. \end{aligned} \quad (7)$$

In [10], it is proved that for the considered mathematical setting, the solution exists and is

unique if the following conditions are met: $\sum_{l=1}^L U_l = 0, \sum_{l=1}^L I_l = 0$.

To solve problem (7), due to the complexity of the geometric shape of the area of the object under study, we use the finite volume method (FVM) [6] on unstructured grids. The solution of the finite-difference problem yields an approximate solution of the differential problem in the nodes of an unstructured grid. In the numerical solution of differential equations of the FVM, an important element is the computational grid. A well-constructed computational grid significantly simplifies the solution of differential equations and makes it closer to the exact solution. The accuracy and efficiency of the numerical study of the problem depend on properties of the computational grid used. In this paper, the grid was built using the Gambit program, which is a part of the ANSYS Fluent software package.

The numerical calculations carried out for the test problem - a round disk with two electrodes inhomogeneous in electrical conductivity - are compared with an approximate analytical solution in the form of Fourier series [14]. The numerical solution of the difference scheme was performed by the Gauss method with partial selection of the main element.

To obtain estimates of the comparison of numerical and analytical solutions, the value of the root mean square error (RMSE) was used. Table 1 shows the calculated RMSE values for various values of the electrical conductivity ratio σ_2/σ_1 , various grids: with nodes thickening only on the electrodes, to the entire boundary of the region, with special placement of nodes on the border of the circular insert, and without it. As a result, a good agreement has been obtained for various ratios of electrical conductivity coefficients. In addition, with a fourfold increase in the number of triangles in the grid, a decrease in RMSE is observed, which indicates the convergence of the resulting difference scheme.

Keywords: elliptic equation with piecewise constant coefficients, finite volume method, unstructured grids, complete electrode model

Acknowledgments: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement no. 075-02-2022-884).

For citation: Afanas'eva, A.A., Starchenko, A.V. (2022) Numerical solution of the direct problem of electroimpedance tomography in a complete electrode formulation. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 78. pp. 5–21. doi: 10.17223/19988621/78/1

Введение

На сегодняшний день существует несколько томографических методов: рентгеновские, ультразвуковые, магнитно-резонансные. Наиболее многообещающим методом является электроимпедансная томография (ЭИТ). Этот метод имеет несколько преимуществ. Во-первых, в отличие от рентгеновского метода, пациент не подвергается облучению. Во-вторых, этот метод можно использовать для длительного наблюдения за деятельностью внутренних органов человека. В-третьих, он очень экономичен и подходит для использования в портативных устройствах [1–3]. Для повышения точности и достоверности медицинских исследований можно комбинировать ЭИТ и другие методы диагностики.

Существует два типа задач ЭИТ [4]:

- поиск значений электрических потенциалов на поверхности биологического объекта при заданном распределении удельной проводимости σ и подаваемого тока I (прямая задача);

- восстановление неизвестного распределения проводимости σ при заданном токе и значениях потенциалов на поверхности биологического объекта (обратная задача).

Математические задачи, возникающие в области ЭИТ, относятся к классу нелинейных некорректно поставленных обратных задач. Численное решение таких задач представляют большую сложность и требует разработки специальных методов.

При численном решении дифференциальные задачи обычно приводят к дискретному аналогу с помощью сеточных методов. Выделяют следующие группы этих методов: конечно-разностные (МКР), конечно-элементные (МКЭ), гранично-элементные (МГЭ), конечно-объемные (МКО) и др. Большинство дифференциальных задач решается с помощью МКЭ, преимуществом которого является гибкость, когда нужно быстро улучшить качество аппроксимации без сложных изменений алгоритма. Однако в работе [5] подчеркивалось, что в некоторых вариантах МКЭ не выполняются условия непрерывности электрического тока, а значит, не соблюдается закон сохранения на элементе сетки и поверхности в целом. Результат сравнения МКЭ и МКО в работе [5] показывает, что численное решение, полученное методом МКО, близко к точным результатам даже на очень грубой сетке, и особенно в граничных узлах. Это очень полезно для проблемы ЭИТ.

В работе [6] построены конечно-объемные аппроксимации для численного решения прямой задачи ЭИТ на неструктурированных сетках. В качестве конечных объемов были выбраны барицентрические ячейки, ячейки Дирихле–Вороного и

треугольные конечные объемы. На основе сравнительного анализа полученных численных решений для построенных разностных схем с точным решением и с численным решением на основе МКЭ установлено, что разностные схемы обеспечивают высокую точность расчетов на барицентрических ячейках, ячейках Дирихле–Вороного. Результаты, полученные с использованием треугольных разностных схем конечного объема, оказались хуже, чем в указанных видах конечных объемов, но стоит отметить, что они позволяют использовать граничные условия Неймана без погрешности аппроксимации.

В статье [7] авторы используют метод конечных объемов с барицентрическими ячейками для решения прямых и обратных задач ЭИТ. Результаты численных экспериментов показывают, что численные решения могут хорошо приближаться к точным решениям при уменьшении размера сетки, а точность численных решений обратных задач ЭИТ зависит от выбора начальных значений для итерационного процесса. По сравнению с МКЭ МКО требует меньше времени для достижения требуемой точности. Хотя обратная задача ЭИТ некорректна, полученный в [7] алгоритм сходится, и его устойчивость при граничных условиях Неймана лучше, чем при условиях Дирихле. Однако требуется дополнительный теоретический анализ сходимости и устойчивости.

В публикации [8] предлагаются результаты анализа чувствительности внутреннего распределения электрического потенциала в зависимости от небольших изменений электрической проводимости в объекте и / или контактных сопротивлений поверхностных электродов. При дискретизации дифференциальных постановок задач ЭИТ используется МКЭ. Авторы статьи указывают, что полезная информация для решения обратных задач ЭИТ содержится в основном в небольшой приповерхностной области объекта вблизи электродов. Поэтому использование полной электродной модели способствует лучшему пониманию, как решение обратной задачи ЭИТ обнаруживает изменения в неоднородных средах с аномалиями и без них.

Целью данной работы является построение математической постановки и численного метода для решения прямой задачи ЭИТ с учетом сопротивления электродов. Математическая постановка представляет собой смешанную граничную задачу для эллиптического уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами, причем при задании граничных условий используется специальное интегродифференциальное условие на искомую функцию.

Физическая постановка задачи

Физически прямую задачу ЭИТ можно описать следующим образом [4]. Предполагается, что исследуемый объект (рис. 1, область D) находится в воздухе, имеет достаточно гладкую границу Γ и характеризуется кусочно-постоянными значениями коэффициента электропроводности σ . $E_1, \dots, E_L$ отмечают места крепления на поверхности объекта электродов, к которым подается электрический ток относительно низкой [1–4] частоты $I_1, \dots, I_L$. Из-за отсутствия источников тока внутри объекта сумма входящего и выходящего токов должна быть равна нулю по закону сохранения заряда. Электроды имеют одинаковые размеры, но могут обладать различными значениями электрического сопротивления $z_1, \dots, z_L$ из-за различного качества крепления электродов к поверхности объекта. Требу-

ется найти распределение электрического потенциала внутри объекта и напряжение тока $U_1, U_2, \dots, U_L$ на электродах.

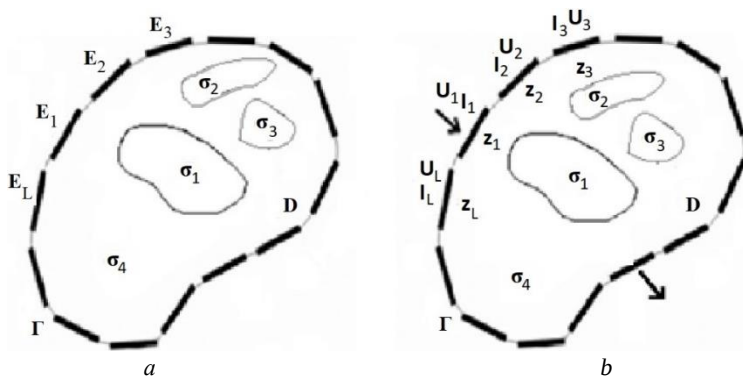


Рис. 1. Геометрия объекта с электродами (а); объект с указанием заданных и измеряемых величин (b)

Fig. 1. Geometry of an object with electrodes (a); an object with indication of the set and measured values (b)

Математическая постановка задачи

Математическая постановка рассматриваемой задачи может быть получена с использованием уравнений Максвелла в проводниках [4, 8, 9]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \text{rot} \bar{E} &= 0, & \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} &= \text{rot} \bar{H} - \frac{4\pi}{c} \bar{j}, \\ \text{div} \bar{E} &= \rho, & \text{div} \bar{H} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

и закона Ома для стационарных проводников [4]: $\bar{j} = \sigma \bar{E}$. Здесь $\bar{E}$ и $\bar{H}$ – интенсивность электрического и магнитного поля соответственно, c – скорость света, t – время, $\bar{j}$ – плотность электрического тока, ρ – объемная плотность заряда электрического тока, σ – коэффициент электрической проводимости.

В соответствии с физической постановкой задачи можно считать [4, 8], что процесс стационарен $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0 \right)$, интенсивность магнитного поля невелика $(\bar{H} \approx 0)$

и интенсивность источников заряженных частиц внутри ткани биологического объекта равна нулю $(\rho = 0)$. Тогда имеем $\text{rot} \bar{E} = 0$, или $\bar{E} = \text{grad}(u)$, где u – потенциал электрического поля. Из второго и третьего уравнений (1) можно записать уравнение, описывающее распределение электрического потенциала внутри исследуемой области:

$$\text{div}(\sigma \text{grad} u) = 0. \quad (2)$$

Или с учетом допущения о двумерности изучаемого процесса

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0. \quad (3)$$

На границе области $\bar{D}$, где нет электродов (см. рис. 1), плотность электрического тока $\vec{j} = \sigma \text{grad}(u)$ равняется 0 в силу отсутствия тока, здесь используются простые условия Неймана:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \quad (4)$$

где n – внешняя нормаль к границе области $\bar{D}$.

На электродах рассматриваются граничные условия, соответствующие так называемой полной электродной модели [1–4, 8], в которой учитывается сопротивление электродов:

$$u + z_l \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = U_l, \quad l = 1, \dots, L. \quad (5)$$

Здесь U_l – напряжение на l -м электроде, которое наряду с электрическим потенциалом $u(x, y)$ является искомой величиной. Также на электроде известна сила подаваемого или отводимого тока I_l , $l = 1, \dots, L$, причем по закону сохранения заряда $\sum_{l=1}^L I_l = 0$ (при принятом выше предположении об отсутствии внутренних источников заряда внутри области). Величина силы тока l -м электроде определяется как интеграл от плотности электрического тока по контактной поверхности электрода E_l :

$$I_l = \int_{E_l} j_n ds = \int_{E_l} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} ds. \quad (6)$$

Комбинируя граничные условия (5) и (6) и исключая пока неизвестные величины U_l , можно получить интегро-дифференциальные граничные условия для уравнения (3) на электродах

$$u + z_l \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{E_l} \left(\int_{E_l} u ds + z_l I_l \right), \quad l = 1, \dots, L.$$

Таким образом, с учетом принятых предположений и допущений математическая постановка прямой задачи ЭИТ в полной электродной модели имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 0, (x, y) \in D; \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial n} &= 0, (x, y) \notin \bigcup_{l=1}^L E_l; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{z_l E_l} \left(\int_{E_l} u ds + z_l I_l \right) - \frac{u}{z_l}, \quad (x, y) \in E_l, \quad l = 1, \dots, L; \quad \sum_{l=1}^L I_l = 0.$$

Как было доказано в работе [10], решение рассматриваемой математической постановки единственно, если $\sum_{l=1}^L U_l = 0$. Также в [10] указывалось, что полная электродная модель в (7) предсказывает экспериментальные данные с ошибкой менее 1%.

Численный метод решения

Для решения задачи (7) в силу сложности геометрической формы области исследуемого объекта будем использовать метод конечного объема [6] на неструктурированных сетках, в результате применения которого дифференциальная задача заменяется конечно-разностной (системой линейных уравнений). Решение конечно-разностной задачи даст приближенное решение дифференциальной задачи в узлах неструктурированной сетки.

На первом этапе применения метода конечного объема область $\bar{D} = D \cup \Gamma$ триангулируется, т.е. покрывается конечным числом непересекающихся треугольных элементов, соседние из которых имеют общие вершины. Граница области исследования аппроксимируется ломаной, представляющей собой совокупность сторон треугольников, последовательно размещенных вдоль границы. Количество вершин треугольников обозначим за N , а количество треугольников – M . Внутри каждого треугольника $\sigma(x, y)$ имеет постоянное значение. В качестве внутреннего конечного объема, не имеющего общих границ с границей области, будем рассматривать барицентрическую ячейку (рис. 2), ограниченную ломаной линией, составленной из отрезков медиан треугольников с общей вершиной P_0 , которая является центром этой ячейки. Таким образом, множество всех вершин треугольников представляют узлы сетки $\bar{\omega}_h = \{P_i\}_{i=1}^N$, вокруг которых строятся барицентрические конечные объемы. Введем сеточную функцию v_h , являющуюся приближенным решением дифференциальной задачи в узлах сетки, т.е.

$$v_i \approx u(P_i) = u(x_{P_i}, y_{P_i}), i = 1, \dots, N.$$

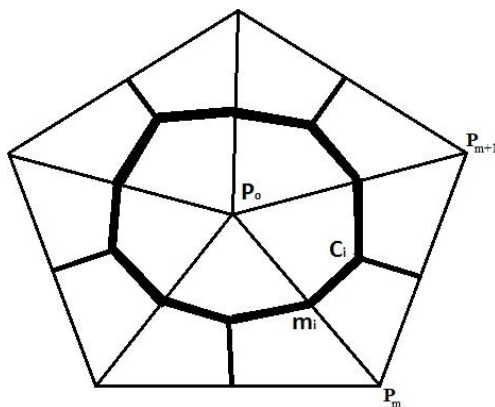


Рис. 2. Барицентрическая ячейка внутри триангулированной области
Fig. 2. Barycentric cell inside a triangulated area

Для получения разностной схемы, связывающей искомые значения сеточной функции v_h , предположим, что распределение приближенного решения внутри каждого m -го треугольника с вершинами P_0, P_m, P_{m+1} (отсчет против часовой стрелки; см. рис. 2) можно представить в следующем виде:

$$v^{(m)}(x, y) = v_{P_0} \Psi_{P_0}^{(m)}(x, y) + v_{P_m} \Psi_{P_m}^{(m)}(x, y) + v_{P_{m+1}} \Psi_{P_{m+1}}^{(m)}(x, y), \quad (8)$$

где $\Psi_{P_0}^{(m)}(x, y), \Psi_{P_m}^{(m)}(x, y), \Psi_{P_{m+1}}^{(m)}(x, y)$ – линейные базисные функции, причем они равны 1 только для своей вершины m -го треугольника, для остальных двух они равны 0. В связи с этим имеем

$$\Psi_{P_0}^{(m)}(x, y) = \frac{1}{2S_m} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{P_m} & y_{P_m} \\ 1 & x_{P_{m+1}} & y_{P_{m+1}} \end{vmatrix}, \quad \Psi_{P_m}^{(m)}(x, y) = \frac{1}{2S_m} \begin{vmatrix} 1 & x_{P_0} & y_{P_0} \\ 1 & x & y \\ 1 & x_{P_{m+1}} & y_{P_{m+1}} \end{vmatrix},$$

$$\Psi_{P_{m+1}}^{(m)}(x, y) = \frac{1}{2S_m} \begin{vmatrix} 1 & x_{P_0} & y_{P_0} \\ 1 & x_{P_m} & y_{P_m} \\ 1 & x & y \end{vmatrix}, \quad S_m = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_{P_0} & y_{P_0} \\ 1 & x_{P_m} & y_{P_m} \\ 1 & x_{P_{m+1}} & y_{P_{m+1}} \end{vmatrix},$$

где S_m – площадь треугольника $\Delta P_0 P_m P_{m+1}$. Заметим, что для одного треугольника базисные функции в сумме дают 1.

Проинтегрируем уравнение (3) по одному внутреннему конечному объему V_0 с границей L_0 и, воспользовавшись формулой Грина [11], получим

$$\oint_{L_0} \left[-\sigma \frac{\partial u}{\partial y} dx + \sigma \frac{\partial u}{\partial x} dy \right] = 0. \quad (9)$$

При замене производных в (9) для каждого m -го треугольника будем использовать $\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{\partial v^{(m)}}{\partial y}$ и с учетом (8) получим для производных постоянные значения, которые легко интегрируются [6] на участках границы L_0 . В итоге для внутренних узлов неструктурированной сетки разностная схема для нахождения сеточных значений будет выглядеть следующим образом:

$$\sum_{m=1}^{M_0} \frac{\sigma_m}{4S_m} \left[v_{P_0} \left((y_{P_m} - y_{P_{m+1}})^2 + (x_{P_{m+1}} - x_{P_m})^2 \right) + \right. \\ \left. + v_{P_m} \left((y_{P_{m+1}} - y_{P_0})(y_{P_m} - y_{P_{m+1}}) + (x_{P_0} - x_{P_{m+1}})(x_{P_{m+1}} - x_{P_m}) \right) + \right. \\ \left. + v_{P_{m+1}} \left((y_{P_0} - y_{P_m})(y_{P_m} - y_{P_{m+1}}) + (x_{P_m} - x_{P_0})(x_{P_{m+1}} - x_{P_m}) \right) \right] = 0, \quad P_0 \in \omega_h. \quad (10)$$

M_0 – количество треугольников в барицентрической ячейке с общей вершиной P_0 . Суммирование выполняется по всем треугольным элементам сетки с общей вершиной P_0 , находящейся внутри области D , причем когда значение индекса $m + 1$ становится больше M_0 , нужно его взять равным 1.

Получим разностную схему для значений сеточной функции в узлах, лежащих на границе области D . Пусть P_0 – такой узел, M_1 и M_2 – соседние узлы сетки, лежащие на границе слева и справа от узла P_0 соответственно (рис. 3). Рассмотрим конечный объем V_0 , границу которого L_0 составляют отрезки медиан треугольников $\Delta P_0 M_2 M_3$ и $\Delta P_0 M_3 M_1$: $C_2 m_2, m_2 C_3, C_3 m_1, m_1 C_1$, и участки границы области $C_1 P_0$ и $P_0 C_2$ (см. рис. 3).

Интегрируя уравнение (3) по этому конечному объему и переходя к формуле Грина [11] с заменой производных, получим

$$\oint_{L_0} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_{C_2}^{C_3} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} ds + \int_{C_3}^{C_1} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} ds + \int_{C_1}^{P_0} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} ds + \int_{P_0}^{C_2} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0, P_0 \in \gamma_h. \quad (11)$$

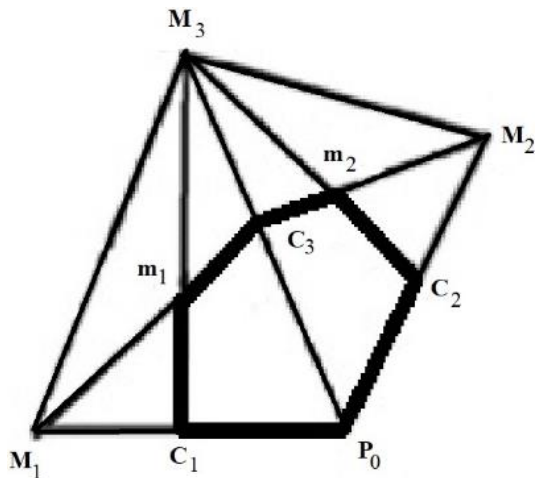


Рис. 3. Граничный конечный объем (M_1P_0 и P_0M_2 – часть границы области D)
Fig. 3. Boundary finite volume (M_1P_0 and P_0M_2 are part of the boundary of area D)

Первые два интеграла приближенно представляем, как и для внутренних конечных объемов, пользуясь линейным видом функции $v^{(m)}(x, y)$ (8). Для двух последних интегралов, которые рассматриваются вдоль границы, будем использовать принятые граничные условия (7). В случае, если отрезки M_1P_0 и / или P_0M_2 являются границей контакта с воздухом, то соответствующие интегралы равны 0. Если же эти отрезки представляют границу контакта с l -м электродом, то

$$\int_{C_1}^{P_0} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} ds = \frac{|P_0C_1|}{z_l E_l} \left(\int_{E_l} u ds + z_l I_l \right) - \frac{1}{z_l} \int_{C_1}^{P_0} u ds,$$

$$\int_{P_0}^{C_2} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} ds = \frac{|C_2P_0|}{z_l E_l} \left(\int_{E_l} u ds + z_l I_l \right) - \frac{1}{z_l} \int_{P_0}^{C_2} u ds.$$

Здесь для вычисления интегралов воспользуемся заменой подынтегральной функции сеточной $v^{(m_2)}(x, y)$ или $v^{(m_1)}(x, y)$, которые имеют линейную зависимость от x и y . Поэтому

$$\int_{C_1}^{P_0} u ds \approx \int_{C_1}^{P_0} v^{(m_1)}(s) ds = \int_{C_1}^{P_0} \left(v_{M_1} + \frac{v_{P_0} - v_{M_1}}{s_{P_0} - s_{M_1}} (s - s_{M_1}) \right) ds = |C_1P_0| \frac{v_{M_1} + 3v_{P_0}}{4}.$$

Аналогично $\int_{P_0}^{C_2} u ds \approx |P_0C_2| \left(\frac{3}{4} v_{P_0} + \frac{1}{4} v_{M_2} \right).$

Для вычисления интеграла $\int_{E_l} u ds$ по контактной поверхности всего электрода, которая образуется несколькими сторонами граничных треугольников, вос-

пользуемся формулой трапеций. В итоге получим разностную схему для граничных узлов сетки:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{M_0} \frac{\sigma_m}{4S_m} \left[v_{P_0} \left((y_{P_m} - y_{P_{m+1}})^2 + (x_{P_{m+1}} - x_{P_m})^2 \right) + \right. \\ & + v_{P_m} \left((y_{P_{m+1}} - y_{P_0})(y_{P_m} - y_{P_{m+1}}) + (x_{P_0} - x_{P_{m+1}})(x_{P_{m+1}} - x_{P_m}) \right) \\ & + v_{P_{m+1}} \left((y_{P_0} - y_{P_m})(y_{P_m} - y_{P_{m+1}}) + (x_{P_m} - x_{P_0})(x_{P_{m+1}} - x_{P_m}) \right) \left. \right] + \\ & + \frac{j_1 |C_1 P_0|}{z_l} \left(\frac{1}{2E_l} \sum_{k=1}^{K-1} (v_{N_k} + v_{N_{k+1}}) |N_k N_{k+1}| + \frac{z_l I_l}{E_l} - \frac{v_{M_1} + 3v_{P_0}}{4} \right) + \\ & + \frac{j_2 |P_0 C_2|}{z_l} \left(\frac{1}{2E_l} \sum_{k=1}^{K-1} (v_{N_k} + v_{N_{k+1}}) |N_k N_{k+1}| + \frac{z_l I_l}{E_l} - \frac{3v_{P_0} + v_{M_2}}{4} \right) = 0, \quad P_0 \in \gamma_h. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $j_1 = 1$, если $M_1 P_0 \in E_l$, иначе $j_1 = 0$; $j_2 = 1$, если $P_0 M_2 \in E_l$, иначе $j_2 = 0$; K – количество узлов сетки на электроде с номером l .

Исследование аппроксимационных свойств полученной разностной схемы (11)–(12) с помощью формулы Тейлора затруднено из-за нерегулярной структуры расчетной сетки. Устойчивость (11)–(12) может быть исследована с помощью мажоранты Гершгорина [12].

Построение расчетной сетки

В настоящее время существует ряд программ, разработанных для создания секток. Они позволяют строить вычислительные сетки для произвольно сложных геометрических объектов. В качестве примера можно указать следующие генераторы сеток: Gambit, Tgrid, GMSH и т.д.

В данной работе расчетные сетки построены с помощью программы Gambit. Идея работы в Gambit заключается в том, что моделирование объекта происходит постепенно: сначала определяются точки, затем строятся линии, после чего строится сетка и определяются граничные условия. А в дальнейшем получившуюся сетку можно будет экспортировать в текстовый файл и продолжить работу с данными.

В качестве тестовой задачи ЭИТ рассмотрим смешанную граничную задачу для уравнения эллиптического типа с кусочно-постоянными коэффициентами (7) в круге единичного радиуса. Electroды полуширины $w = 0.25$ расположены при $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = 3\pi/2$.

Построим для рассматриваемой области неструктурированную треугольную расчетную сетку со сгущением на электродах с помощью сеточного генератора Gambit (рис. 4). В статье [13] проведен анализ выбора расчетной сетки. В результате сравнения четырех сеток: без сгущения, со сгущением на электродах, со сгущением на границе с воздухом, со сгущением по всей границе, – был сделан вывод, что лучше использовать сетки со сгущением на электродах или, что еще лучше, со сгущением узлов ко всей границе.

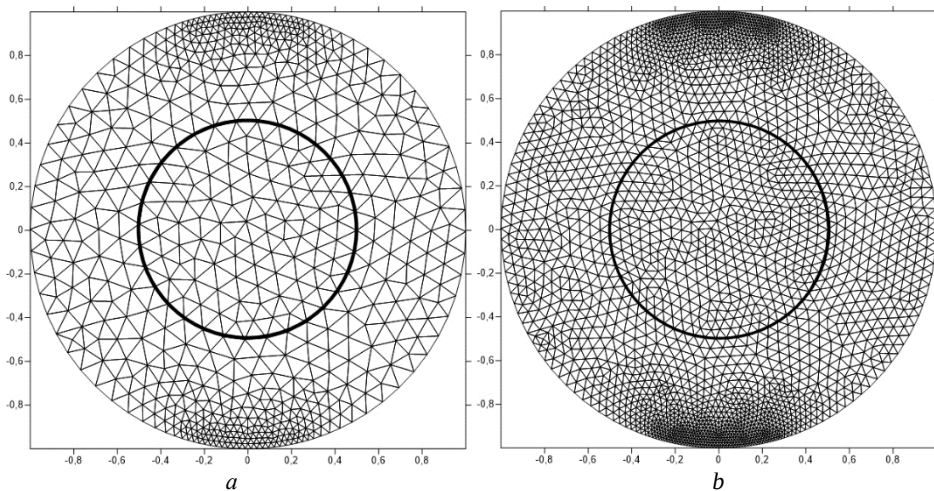


Рис. 4. Расчетная сетка: *a* – сгущение на электродах (1 256 ячеек);
b – сгущение ко всей границе области (2 804 ячейки)
Fig. 4. Calculation grid: (*a*) thickening on the electrodes (1256 cells);
(*b*) thickening to the entire boundary of the region (2804 cells)

Заметим, что граница круглой вставки радиуса $\rho < 1$ с другим значением электрической проводимости проходит через узлы сетки. Также в данной работе с целью оценки влияния на конечный результат были рассмотрены сетки, специально не подстраиваемые под границу вставки. Информация о влиянии такого способа задания электрической проводимости будет полезна при решении обратных задач ЭИТ.

Решение задачи в постановке полной электродной модели

Для решения тестовой задачи для двух электродов в постановке (7) воспользуемся разностной схемой (11)–(12). Сила тока на верхнем электроде ($\varphi = \pi/2$) равна 1 мА, на нижнем ($\varphi = 3\pi/2$) –1 мА. Сопротивление на электродах имели одинаковые значения $z_1 = z_2 = 1$. Круглая вставка радиуса $\rho = 0.5$ имеет электрическую проводимость σ_1 , а окружающее ее кольцо – σ_2 . В расчетах рассматривались следующие значения $\sigma_2/\sigma_1 = 0.01; 0.1; 1; 10; 100$. Полуширина электродов во всех случаях была неизменной $w = 0.25$, и форма электрода совпадала с частью границы круга. Для данной тестовой задачи известно приближенное аналитическое решение в виде рядов Фурье [14], поэтому выполнялось сравнение численного решения с приближенным аналитическим, в котором учитывалось 700 парных членов ряда. Численное решение разностной схемы (11)–(12) выполнялось методом Гаусса с частичным выбором главного элемента.

На рис. 5 представлены графики изменения электрического потенциала по границе круга, рассчитанные для различных отношений σ_2/σ_1 . Из рисунка видно, что наибольшее по модулю значение потенциала имеет место на электродах, причем с ростом значения отношения σ_2/σ_1 абсолютная величина потенциала

увеличивается, т.е. при уменьшении проводимости внутри области σ_1 для обеспечения одной и той же величины тока нужно увеличение значений напряжения на электродах. Визуально наибольшее абсолютное отклонение численного решения от аналитического наблюдается на электродах при $\sigma_2/\sigma_1 > 1$.

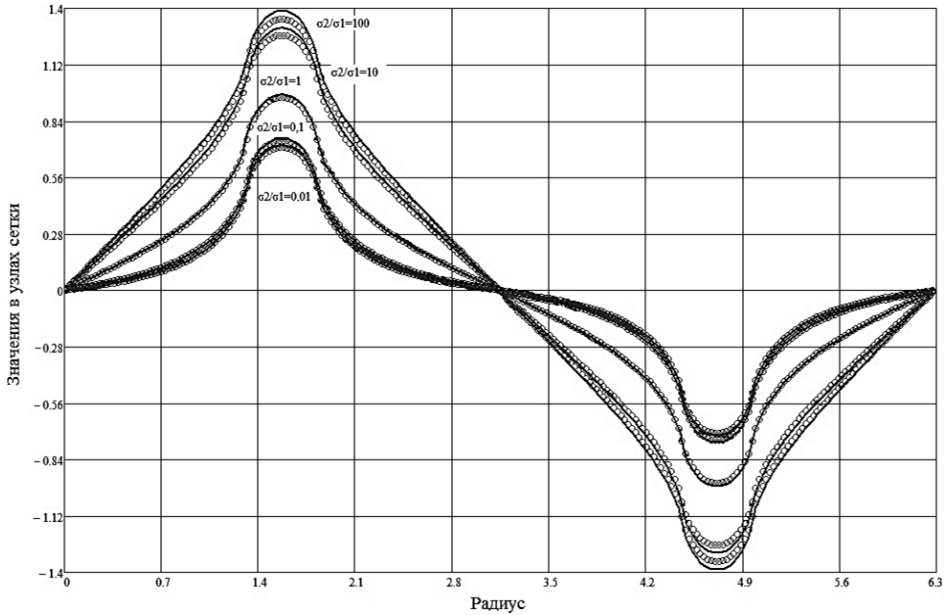


Рис. 5. Сравнение значений электрического потенциала по окружности для различных отношений σ_2/σ_1 . Значки – численный расчет в узлах сетки, сплошные линии – приближенное аналитическое решение

Fig. 5. Comparison of values of the electric potential along the circle for different ratios σ_2/σ_1 . The icons are the numerical calculation in grid nodes; the solid lines show the approximate analytical solution

Для получения объективных оценок воспользуемся величиной среднеквадратичного отклонения (RMSE), которая вычисляется по следующей формуле:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_1} (v_i - u_{an}(x_i, y_i))^2}{N_1}},$$

где N_1 – количество узлов сетки вдоль границы области.

В таблице представлены рассчитанные значения RMSE для различных значений отношения электрических проводимостей σ_2/σ_1 и различных сеток: со сгущением узлов только на электродах, ко всей границе области, со специальным размещением узлов на границе круглой вставки и без (в этом случае принималось соглашение, что если центры треугольников находятся в круге радиусом ρ , то их проводимость равнялась σ_1). Кроме того, для анализа численной сходимости разностной схемы (11)–(12) использовались сетки, в которых каждый треугольник сеток рис. 4 разбивался по серединам сторон на четыре треугольника.

**Среднеквадратическое отклонение численного решения
от аналитического для разных случаев**

σ_2/σ_1	1	0.1	0.01	10	100
С выделением круглой вставки					
Сетка со сгущением на электродах	0.0093	0.0051	0.0048	0.0225	0.0273
Сетка со сгущением на электродах, с разбиением каждого треугольника на 4	0.0025	0.0022	0.0023	0.0078	0.01
Сетка со сгущением на всей границе	0.0065	0.0032	0.003	0.0173	0.0213
Сетка со сгущением на всей границе, с разбиением каждого треугольника на 4	<u>0.0017</u>	<u>0.0017</u>	<u>0.0017</u>	<u>0.0063</u>	<u>0.0082</u>
Без выделения круглой вставки					
Сетка со сгущением на электродах	0.0085	0.0151	0.0191	0.0136	0.0121
Сетка со сгущением на электродах, с разбиением каждого треугольника на 4	0.0025	0.0059	0.0087	<u>0.0034</u>	<u>0.004</u>
Сетка со сгущением на всей границе	0.0059	0.0088	0.0106	0.0167	0.0215
Сетка со сгущением на всей границе, с разбиением каждого треугольника на 4	<u>0.0017</u>	<u>0.0039</u>	<u>0.0057</u>	0.0057	0.0068

Анализируя представленные значения RMSE, можно заметить, что численные расчеты лучше согласуются с приближенным аналитическим решением при $\sigma_2/\sigma_1 \leq 1$, причем предпочтительнее использовать неструктурированную сетку со сгущением узлов ко всей границе, чем только к электродам. Кроме того, специальное построение сетки под имеющиеся включения с другими значениями электрической проводимости уменьшают ошибку численных расчетов. Заметим однако, что при решении обратной задачи ЭИТ границы неоднородностей по распределению $\sigma(x, y)$, как правило, неизвестны, и это, безусловно, будет вносить дополнительный шум в искомые значения электрической проводимости. Также значения RMSE из таблицы показывают, что при уменьшении размера сетки в два раза для всех рассматриваемых сеток и значений σ_2/σ_1 ошибки разностной схемы (11)–(12) уменьшаются, что свидетельствует о ее сходимости к точному решению. Быстрее всего RMSE уменьшается для однородного диска – почти в 4 раза. Это указывает, что порядок точности построенного численного метода близок ко второму.

На рис. 6 в качестве иллюстрации согласования численного и приближенного аналитического решений [14] приведены графики изменения электрического потенциала по радиусу круга при $\varphi = \pi/4$ и $\varphi = \pi/2$. Рассматривалась сетка, представленная на рис. 4, b. Из рисунка видно, что величина электрической проводимости вставки оказывает существенное влияние на распределение потенциала. Если в круглой вставке оно практически линейно изменяется по радиусу, то в кольце зависимость потенциала от радиуса приобретает нелинейный характер, подчеркивая влияние проводимости вставки на эту величину. Также нужно заметить, что при низких значениях электрической проводимости включений потребуются специальные усилия по измельчению сетки для повышения качества численного решения задачи.

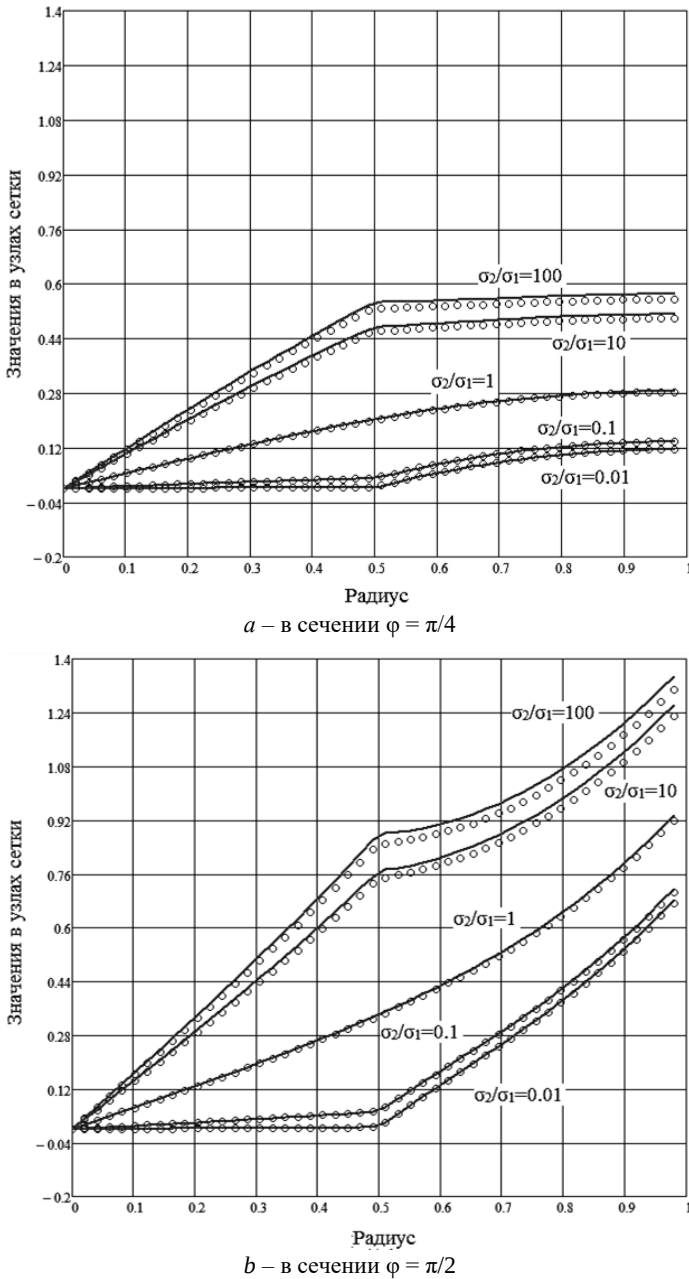


Рис. 6. Сравнение значений электрического потенциала по радиусу для различных отношений σ_2/σ_1 . Значки – численный расчет в узлах сетки, сплошные линии – приближенное аналитическое решение

Fig. 6. Comparison of the values of the electric potential along the radius for different ratios σ_2/σ_1 . The icons are the numerical calculation in grid nodes; the solid lines show the approximate analytical solution

Заключение

В данной работе представлена двумерная математическая постановка для прямой задачи ЭИТ в биологическом неоднородном токопроводящем объекте с учетом сопротивления приложенных к нему электродов, используемых для подачи и съема тока и измерения напряжения. Особенностью этой математической постановки для двумерного уравнения эллиптического типа с кусочно-постоянными коэффициентами является применение интегро-дифференциального граничного условия на контактной границе электродов. Для численного решения рассматриваемой задачи разработан эффективный численный метод, опирающийся на использование неструктурированных сеток, сгущающихся к границе области исследования, метод конечных объемов для барицентрических ячеек и метод исключения Гаусса с частичным выбором главного элемента для решения сеточных уравнений. Проведенные численные расчеты для тестовой задачи – неоднородного по электрической проводимости круглого диска с двумя электродами – сравнивались с приближенным аналитическим решением. Для различных отношений коэффициентов электрической проводимости (круглой вставки и кольца) получено хорошее согласование, причем при кратном по площади уменьшении размеров конечных объемов неструктурированной сетки расхождение между численным и приближенным аналитическим решениями уменьшалось, что свидетельствует о сходимости построенной конечно-разностной схемы.

Список источников

1. Cheney M., Isaacson D., Newell J.C. Electrical Impedance Tomography // Society for Industrial and Applied Mathematics. 1999. V. 41, No. 1. P. 85–101
2. Saulnier G.J., Blue R.S., Newell J.C., Isaacson D., Edic P.M. Electrical impedance tomography // IEEE Signal Processing Magazine. 2001. V. 18, No. 6. P. 31–43 doi: 10.1109/79.962276
3. Пеккер Я.С., Бразовский К.С., Усов В.Ю. и др. Электроимпедансная томография. Томск : Изд-во НТЛ, 2004. 192 с.
4. Borcea L. Electric Impedance Tomography. Topical Review // Inverse Problems. 2002. V. 18. P. R99–R136.
5. Dong G., Zou J., Bayford R.H., Xinshan M., Shangkai G., Weili Y., Manling G. The comparison between FVM and FEM for EIT forward problem // IEEE Trans. Magnetics. 2005. V. 41, No. 5. P. 1468–1471. doi: 10.1109/tmag.2005.844558
6. Шерина Е.С., Старченко А.В. Разностные схемы на основе метода конечных объемов для задачи электроимпедансной томографии // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 3 (29). С. 25–38.
7. Li J., Yuan Y. Numerical simulation and analysis of generalized difference method on triangular networks for electrical impedance tomography // Applied Mathematical Modelling. 2009. № 33. P. 2175–2186. doi: 10.1016/j.apm.2008.05.025
8. Darbas M., Heleine J., Mendoza R., Velasco A.C. Sensitivity analysis of the complete electrode model for electrical impedance tomography // AIMS Mathematics. 2021. № 6 (7). P. 7333–7366. doi: 10.3934/math.2021431
9. Седов Л.И. Механика сплошной среды. 5-е изд., испр. М. : Наука, 1994. Т. 1. 528 с.
10. Somersalo E., Cheney M., Isaacson D. Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography // SIAM J. Appl. Math. 1992. V. 52. P. 1023–1040. doi: 10.1137/0152060
11. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Методы математической физики : учеб. пособие для вузов. 5-е изд., стереотип. М. : Наука, 1977. 735 с.

12. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы / ред. Е.Ю. Ходан, Е.В. Шикин. М. : Наука, 1977. Т. 2. 400 с.
13. Афанасьева А.А., Старченко А.В. Численное решение задачи электроимпедансной томографии // Все грани математики и механики / под ред. Л.В. Гензе. Томск, 2021. С. 17–29.
14. Старченко А.В., Седнев М.А., Панько С.В. Приближенное аналитическое решение прямой задачи электроимпедансной томографии в неоднородном круге с учетом сопротивления электродов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 74. С. 19–29. doi: 10.17223/19988621/74/3

References

1. Cheney M., Isaacson D., Newell J.C. (1999) Electrical impedance tomography. *Society for Industrial and Applied Mathematics*. 41(1). pp. 85–101.
2. Saulnier G.J., Blue R.S., Newell J.C., Isaacson D., Edic P.M. (2001) Electrical impedance tomography. *IEEE Signal Processing Magazine*. 18(6). pp. 31–43. doi: 10.1109/79.962276
3. Pekker Ya.S., Brazovsky K.S., Usov V.Yu., et al. (2004) *Elektroimpedansnaya tomografiya* [Electroimpedance Tomography]. Tomsk: NTL.
4. Borcea L. (2002) Electric impedance tomography. Topical review. *Inverse Problems*. 18. pp. R99–R136.
5. Dong G., Zou J., Bayford R.H., Xinshan M., Shangkai G., Weili Y., Manling G. (2005) The comparison between FVM and FEM for EIT forward problem. *IEEE Transactions on Magnetics*. 41(5). pp. 1468–1471. doi: 10.1109/tmag.2005.844558
6. Sherina E.S., Starchenko A.V. (2014) Difference schemes based on the finite volume method for the problem of electrical impedance tomography. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 29(3). pp. 25–38.
7. Li J., Yuan Y. (2009) Numerical simulation and analysis of generalized difference method on triangular networks for electrical impedance tomography. *Applied Mathematical Modelling*. 33. pp. 2175–2186. doi: 10.1016/j.apm.2008.05.025
8. Darbas M., Heleine J., Mendoza R., Velasco A.C. (2021) Sensitivity analysis of the complete electrode model for electrical impedance tomography. *AIMS Mathematics*. 6(7). pp. 7333–7366. doi: 10.3934/math.2021431
9. Sedov L.I. (1971) *A Course in Continuum Mechanics*. Vol. 1. Groningen: Wolters-Noordhoff.
10. Somersalo E, Cheney M., Isaacson D. (1992) Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 52. pp. 1023–1040. doi: 10.1137/0152060
11. Tikhonov A.N., Samarsky A.A. (1963) *Equations of Mathematical Physics*. Oxford: Pergamon Press.
12. Krylov V.I., Bobkov V.V., Monastyrnyy P.I. (1977) *Vychislitel'nyye metody* [Computational methods]. Ed. by E. Yu. Khodan and E.V. Shikin. Moscow: Nauka.
13. Afanasyeva A.A., Starchenko A.V. (2021) Chislennoye resheniye zadachi elektroimpedansnoy tomografii [Numerical solution of the problem of electroimpedance tomography]. *Vse Grani Matematiki i Mekhaniki*. Ed. by L.V. Genze. pp. 17–29.
14. Starchenko A.V., Sednev M.A., Pan'ko S.V. // *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. (2021) Approximate analytical solution of the direct problem of electroimpedance tomography in an inhomogeneous circle taking into account the resistance of the electrodes. 74. pp. 19–29. doi: 10.17223/19988621/74/3

Сведения об авторах:

Афанасьева Анна Александровна – аспирант кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: afanaseva_anjutka@inbox.ru

Старченко Александр Васильевич – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой вычислительной математики и компьютерного моделирования Томского государственного университета, научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: starch@math.tsu.ru

Information about the authors:

Afanas'eva Anna A. (Graduate Student of Department of Computational Mathematics and Computer Modelling of National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: afanaseva_anjutka@inbox.ru

Starchenko Alexander V. (Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department of Computational Mathematics and Computer Modelling of National Research Tomsk State University, Scientific Researcher, Regional Scientific Educational Mathematical Center of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: starch@math.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 24.03.2022; принята к публикации 12.07.2022

The article was submitted 24.03.2022; accepted for publication 12.07.2022

Научная статья

УДК 517.984

MSC: 47A15, 47A75, 81Q10

doi: 10.17223/19988621/78/2

О числе собственных значений модельного оператора на одномерной решетке

Аъзам Абдурахимович Имомов¹, Ислон Намозович Бозоров²,
Абдимажид Моликович Хуррамов³

¹ *Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан*

^{2,3} *Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан*

¹ *imomov_azam@mail.ru*

² *islomnb@mail.ru*

³ *xurramov@mail.ru*

Аннотация. Рассматривается модельный оператор $h_{\mu}(k)$, $k \in (-\pi, \pi]$, соответствующий гамильтониану системы двух произвольных квантовых частиц на одномерной решетке со специальными дисперсионными соотношениями, описывающими перенос частицы с узла на узлы, взаимодействующих с помощью некоторого короткодействующего потенциала притяжения v_{μ} , $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}_+^4$. Приводятся детальные описания изменений числа собственных значений оператора энергии $h_{\mu}(k)$ относительно значений вектора $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}_+^4$ и параметра $k \in \mathbb{T}$.

Ключевые слова: оператор Шредингера, гамильтониан системы двух частиц, дисперсионные соотношения, одномерная решетка, инвариантные подпространства, собственное значение, существенный спектр, унитарно эквивалентный оператор, асимптотика определителя Фредгольма

Благодарности: Работа поддержана грантом Республики Узбекистан, проект № ФЗ–20200929224.

Для цитирования: Имомов А.А., Бозоров И.Н., Хуррамов А.М. О числе собственных значений модельного оператора на одномерной решетке // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 78. С. 22–37. doi: 10.17223/19988621/78/2

On the number of eigenvalues of a model operator on a one-dimensional lattice

Azam A. Imomov¹, Islom N. Bozorov², Abdimazhid M. Khurramov³

¹ Karshi state University, Karshi, Uzbekistan

^{2,3} Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan

¹ imomov_azam@mail.ru

² islomnb@mail.ru

³ xurramov@mail.ru

Abstract. A model operator $h_\mu(k)$ $k \in (-\pi, \pi]$, corresponding to the Hamiltonian of a system of two arbitrary quantum particles on a one-dimensional lattice with a special dispersion function is considered. The function describes the transfer of a particle from site to sites interacting using a short-range attraction potential v_μ , $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}_+^4$. The detailed descriptions of changes in the number of eigenvalues of the energy operator $h_\mu(k)$ $k \in (-\pi, \pi]$, relative to values of the particle interaction vector $\mu \in \mathbb{R}_+^4$ and the total quasi-momentum $k \in \mathbb{T}$ of the system of two particles is presented.

Keywords: Schrödinger operator, Hamiltonian of a system of two particles, dispersion relations, one-dimensional lattice, invariant subspaces, eigenvalue, essential spectrum, unitarily equivalent operator, asymptotics for the Fredholm determinant

Acknowledgments: This work was supported by the Republic of Uzbekistan, project no. FZ-20200929224.

For citation: Imomov, A.A., Bozorov, I.N., Khurramov, A.M. (2022) On the number of eigenvalues of a model operator on a one-dimensional lattice. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 78. pp. 22–37. doi: 10.17223/19988621/78/2

Введение

В моделях физики твердого тела [1, 2], а также в решетчатой квантовой теории поля [3] рассматриваются дискретные операторы, являющиеся решетчатыми аналогами оператора Шредингера на евклидовом пространстве. Кинематика квантовых частиц на решетке довольно экзотическая [4].

В непрерывном случае изучение спектральных свойств полного гамильтониана системы двух частиц сводится к изучению двухчастичного оператора Шредингера с помощью выделения энергии движения центра масс так, что двухчастичные *связанные состояния* суть собственные векторы оператора энергии с отделенным полным импульсом (при этом такой оператор фактически не зависит от значений полного импульса) [5]. Дискретный лапласиан, в отличие от непрерывного случая, не является трансляционно-инвариантным, и поэтому гамильтониан системы не разделяется на две части. На решетке *выделению центра масс*

системы отвечает реализация гамильтониана как *расслоенного оператора*, т.е. *прямого интеграла* семейства операторов (операторов Шредингера) $h(k)$ энергии двух частиц, зависящих от значений полного квазиимпульса системы двух частиц k на d -мерном торе $\mathbb{T}^d$ [6].

В общем случае оператор Шредингера $h(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, определяется в $L_2(\mathbb{T}^d)$ с некоторым дисперсионным соотношением и короткодействующим потенциалом притяжения.

В работе [7] рассматривается двухчастичный оператор Шредингера $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$, ассоциированный с гамильтонианом системы двух одинаковых частиц (бозонов), взаимодействующих с помощью парного контактного потенциала притяжения с энергией взаимодействия $\mu > 0$. Показано, что оператор либо имеет единственное собственное значение, либо не имеет собственных значений в зависимости от значений энергии взаимодействия $\mu > 0$ и полного квазиимпульса системы двух частиц $k \in \mathbb{T}^3$.

В случаях двух бозонов или двух фермионов, движущихся на решетке и взаимодействующих только на ближайших соседних узлах, найдено точное число собственных значений соответствующего двухчастичного оператора Шредингера $h_\mu(k)$, $\mu > 0$, $k \in \mathbb{T}^d$, $d = 1, 2 \dots$ [8, 9]. Кроме того, в работах [10, 11] были изучены спектральные свойства одночастичного гамильтониана, описывающего движение одной квантовой частицы на решетке во внешнем поле. Исследованы число собственных значений и их расположение в зависимости от значений энергии взаимодействия $\mu \geq 0$ и $\lambda \geq 0$ ($\mu^2 + \lambda^2 > 0$).

В работах [12, 13] рассматриваются системы двух произвольных квантовых частиц на трехмерной решетке, где свободный гамильтониан задается со специально выбранными дисперсионными соотношениями и частицы взаимодействуют с помощью некоторых (выбранных) парных потенциалов притяжения. Изучена зависимость числа собственных значений семейства операторов $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N) \in \mathbb{R}_+^N$, от энергии взаимодействия частиц $\mu \in \mathbb{R}_+^N$ и полного квазиимпульса $k \in \mathbb{T}^3$.

В работе [14] рассматривается система двух произвольных квантовых частиц на одномерной решетке со специально выбранными дисперсионными соотношениями, описывающими перенос частицы с узла $s = 0$ на узлы $s = \pm 2n$, $n \in \mathbb{N}$, взаимодействующих с помощью парного потенциала притяжения. При этом в соответствии с дисперсионными соотношениями потенциал взаимодействия v_μ , $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_N) \in \mathbb{R}_+^{N+1}$ выбирается таким образом, что определитель Фредгольма, соответствующий оператору $h_\mu(k)$, сводится к произведению определителей Фредгольма операторов $h_{\mu_l}(k)$ и $l \in \{0, 1, \dots, N\}$. Изучено число собственных значений оператора $h_\mu(k)$ в зависимости от энергии взаимодействия частиц и полного квазиимпульса $k \in \mathbb{T}$, а также найдены условия существования много-

кратного собственного значения оператора $h_\mu(k)$, лежащего левее существенно-го спектра.

В настоящей работе рассмотрим модельный оператор $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}$, соответствующий гамильтониану системы двух произвольных квантовых частиц на одномерной решетке со специальными четными дисперсионными соотношениями, описывающими перенос частицы с узла $s = 0$ на узлы $s = \pm 2$, взаимодействующих с помощью некоторого парного короткодействующего потенциала притяжения. При этом энергия парных взаимодействий частиц является четной функцией и принимает не более четырех значений: μ_0 , μ_1 , μ_2 и μ_3 .

Целью настоящей работы является изучение числа собственных значений оператора энергии $h_\mu(k)$ в зависимости от вектора энергии парных взаимодействий частиц $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}_+^4$ и полного квазиимпульса системы двух частиц $k \in \mathbb{T}$.

Отметим, что данная работа в определенном смысле уточняет и обобщает результаты работ [10, 11], а также показывает сложную зависимость числа собственных значений от параметров операторов.

1. Формулировка основных результатов

Пусть $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $\ell_2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ – гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

В координатном представлении модельный оператор $\hat{h}_\mu$, соответствующий гамильтониану системы двух произвольных квантовых частиц на одномерной решетке, определяется как ограниченный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\ell_2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$, по формуле

$$\hat{h}_\mu = \hat{h}_0 - \hat{v}_\mu,$$

где

$$(\hat{h}_0 \hat{\psi})(n_1, n_2) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} [\hat{\varepsilon}_1(s) \hat{\psi}(n_1 + s, n_2) + \hat{\varepsilon}_2(s) \hat{\psi}(n_1, n_2 + s)],$$

$$(\hat{v}_\mu \hat{\psi})(n_1, n_2) = \hat{v}_\mu(n_1 - n_2) \hat{\psi}(n_1, n_2).$$

Здесь $\hat{\varepsilon}_1(\cdot)$, $\hat{\varepsilon}_2(\cdot)$ – некоторые дисперсионные функции, описывающие перенос частиц с узла на соседние узлы, и $\hat{v}_\mu(\cdot)$ – парный потенциал взаимодействия частиц, определенные на $\mathbb{Z}$ по формулам

$$\hat{\varepsilon}_i(s) = \begin{cases} \frac{1}{m_i}, & \text{при } s = 0, \\ -\frac{1}{2m_i}, & \text{при } s = \pm 2, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \text{и } \hat{v}_\mu(s) = \begin{cases} 2\pi\mu_0, & \text{при } s = 0, \\ \pi\mu_l, & \text{при } s = \pm l, l = 1, 2, 3, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $m_i > 0$ – масса i -й частицы, $i = 1, 2$, и $\mu_n \geq 0$, $n = 0, 1, 2, 3$.

Пусть $\mathbb{T} = (-\pi; \pi]$ – одномерный тор, $L_2(\mathbb{T} \times \mathbb{T})$ – гильбертово пространство всех квадратично-интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$. Переход от координатного представления оператора $\hat{h}_\mu$ к импульсному осуществляется с помощью преобразования Фурье (см. [6]):

$$\mathcal{F} : \ell_2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \rightarrow L_2(\mathbb{T} \times \mathbb{T}), \quad (\mathcal{F}\hat{\psi})(p) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s \in \mathbb{Z}^2} \hat{\psi}(s) e^{i(p,s)}.$$

Поэтому в импульсном представлении модельный оператор h_μ , соответствующий гамильтониану системы двух произвольных квантовых частиц на одномерной решетке имеет вид:

$$h_\mu := \mathcal{F}\hat{h}_\mu\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}\hat{h}_0\mathcal{F}^{-1} + \mathcal{F}\hat{V}_\mu\mathcal{F}^{-1}.$$

Двухчастичная проблема на решетке с дисперсионными соотношениями $\varepsilon_1(k_1)$ и $\varepsilon_2(k_2)$ и квазиимпульсами k_1 и k_2 в импульсном представлении с помощью отделения полного квазиимпульса системы двух частиц $k = k_1 + k_2$ и разложения фон Неймана сводится к изучению эффективной одночастичной проблемы: гильбертово пространство $L_2(\mathbb{T} \times \mathbb{T})$ разлагается в прямой (непрерывный) интеграл фон Неймана, ассоциированный представлением абелевой (дискретной) группы $\mathbb{Z}$, образованной с помощью перестановочных операторов на решетке

$$L_2(\mathbb{T} \times \mathbb{T}) = \int \oplus_{k \in \mathbb{T}} L_2(\mathbb{T}) dk.$$

Тогда для оператора h_μ , соответствующего гамильтониану системы двух частиц, имеет место разложение фон Неймана [15]:

$$h_\mu = \int \oplus_{\mathbb{T}} \tilde{h}_\mu(k) dk,$$

где квазиимпульс системы двух частиц k пробегает первую зону Бриллюэна $\mathbb{T} = \mathbb{R} / (2\pi\mathbb{Z})$. Соответствующий слойный оператор $\tilde{h}_\mu(k)$ непрерывно зависит от квазиимпульса $k \in \mathbb{T} = \mathbb{R} / (2\pi\mathbb{Z})$. В результате, благодаря потере сферической симметрии проблемы, спектр оператора $\tilde{h}_\mu(k)$ оказывается довольно чувствительным к изменениям квазиимпульса $k \in \mathbb{T}$.

Связанное состояние $\psi_{e,k}$ оператора $\tilde{h}_\mu(k)$ является решением уравнения Шредингера

$$\tilde{h}_\mu(k)\psi_{e,k} = e(k)\psi_{e,k}, \quad \psi_{e,k} \in L_2(\mathbb{T}),$$

и оно непрерывно зависит от квазиимпульса k . Тогда спектр $\sigma(h_\mu)$ оператора h_μ выражается с помощью спектра слойных операторов Шредингера $\tilde{h}_\mu(k)$ с фиксированным квазиимпульсом, т.е.

$$\sigma(h_\mu) = \cup_{k \in \mathbb{T}} \sigma(\tilde{h}_\mu(k)) = \cup_{j=1} \cup_{k \in \mathbb{T}} \{e_j(k)\} \cup \sigma(\tilde{h}_0(k)),$$

где $e_j(k)$, $j = 1, 2, \dots$ – собственные значения слойного оператора $\tilde{h}_\mu(k)$.

Воспользовавшись унитарным оператором $U : L_2(\mathbb{T}) \rightarrow L_2(\mathbb{T})$, определенным по формуле (см. [14])

$$(Uf)(p) = f\left(p - \frac{\theta(k)}{2}\right), \quad \theta(k) = \arccos \frac{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \cos 2k}{\sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2} \cos 2k + \frac{1}{m_2^2}}},$$

изучение спектральных свойств оператора $\tilde{h}_\mu(k)$ сведем к изучению спектральных свойств семейства операторов $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}$, действующих в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T})$ по формуле

$$h_\mu(k) = h_0(k) - \mathbf{v}_\mu,$$

где $h_0(k)$ – оператор умножения на функцию $\mathcal{E}_k(\cdot)$:

$$\mathcal{E}_k(p) = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - a(k) \cos 2p, \quad a(k) = \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2} \cos 2k + \frac{1}{m_2^2}},$$

и $\mathbf{v}_\mu$ – интегральный оператор с ядром $v_\mu(p-s) = \sum_{n=0}^3 \mu_n \cos n(p-s)$, т.е.

$$(\mathbf{v}_\mu f)(p) = \sum_{n=0}^3 \int_{\mathbb{T}} \mu_n \cos n(p-s) f(s) ds, \quad f \in L_2(\mathbb{T}).$$

Заметим, что из теоремы Вейля о существенном спектре [17] следует, что существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(h_\mu(k))$ оператора $h_\mu(k)$ не меняется при компактном возмущении $\mathbf{v}_\mu$ и совпадает со спектром невозмущенного оператора $h_0(k)$. Следовательно,

$$\sigma_{\text{ess}}(h_\mu(k)) = \sigma(h_0(k)) = [m(k), M(k)],$$

где

$$m(k) = \min_{p \in \mathbb{T}} \mathcal{E}_k(p) = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - a(k), \quad M(k) = \max_{p \in \mathbb{T}} \mathcal{E}_k(p) = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + a(k).$$

Поскольку $\mathbf{v}_\mu \geq 0$, то

$$\sup(h_\mu(k)f, f) \leq \sup(h_0(k)f, f) = M(k)(f, f), \quad f \in L_2(\mathbb{T}).$$

Поэтому оператор $h_\mu(k)$ не имеет собственных значений, лежащих правее существенного спектра, т.е.

$$\sigma(h_\mu(k)) \cap (M(k), \infty) = \emptyset.$$

Замечание 1. Пусть $L_{2,e}(\mathbb{T}) \subset L_2(\mathbb{T})$ – подпространство четных, а $L_{2,o}(\mathbb{T}) \subset L_2(\mathbb{T})$ – подпространство нечетных функций. Известно, что имеет место равенство $L_2(\mathbb{T}) = L_{2,e}(\mathbb{T}) \oplus L_{2,o}(\mathbb{T})$. Гильбертовы пространства $L_{2,e}(\mathbb{T})$ и $L_{2,o}(\mathbb{T})$ являются инвариантными относительно самосопряженного оператора $h_\mu(k)$. Обозначим через $h_{\mu,e}(k)$ и $h_{\mu,o}(k)$ сужения $h_\mu(k)|_{L_{2,e}(\mathbb{T})}$ и $h_\mu(k)|_{L_{2,o}(\mathbb{T})}$

оператора $h_\mu(k)$ на $L_{2,e}(\mathbb{T})$ и $L_{2,o}(\mathbb{T})$ соответственно. Операторы $h_{\mu,e}(k)$ и $h_{\mu,o}(k)$ действуют в $L_{2,e}(\mathbb{T})$ и $L_{2,o}(\mathbb{T})$ соответственно по формулам

$$h_{\mu,e}(k) = h_0(k) - \mathbf{v}_{\mu,e} \text{ и } h_{\mu,o}(k) = h_0(k) - \mathbf{v}_{\mu,o},$$

где $\mathbf{v}_{\mu,e}$ и $\mathbf{v}_{\mu,o}$ – интегральные операторы, действующие по формулам

$$\mathbf{v}_{\mu,e} f(p) = \sum_{n=0}^3 \int_{\mathbb{T}} \mu_n \cos np \cos ns f(s) ds, \quad f \in L_{2,e}(\mathbb{T}),$$

$$\mathbf{v}_{\mu,o} f(p) = \sum_{n=0}^3 \int_{\mathbb{T}} \mu_n \sin np \sin ns f(s) ds, \quad f \in L_{2,o}(\mathbb{T}).$$

Заметим, что

$$\sigma(h_\mu(k)) = \sigma(h_{\mu,e}(k)) \cup \sigma(h_{\mu,o}(k)) \text{ и } \sigma_d(h_\mu(k)) = \sigma_d(h_{\mu,e}(k)) \cup \sigma_d(h_{\mu,o}(k)).$$

Положим

$$c_{nm}(k; z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\cos nq \cos mq dq}{\mathcal{E}_k(q) - z}, \quad c_n(k; z) = c_{nn}(k; z), \quad n, m = 0, 1, 2, 3 \quad (1)$$

и

$$s_{lr}(k; z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin lq \sin rq dq}{\mathcal{E}_k(q) - z}, \quad s_l(k; z) = s_{ll}(k; z), \quad l, r = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Из представления $\mathcal{E}_k(p)$ следует, что $\min_{p \in \mathbb{T}} \mathcal{E}_k(p)$ достигается только в нуле.

Поэтому интеграл

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 lq dq}{\mathcal{E}_k(q) - m(k)}, \quad l = 1, 2, 3$$

сходится и принимает положительное значение.

Положим

$$\mu_l(k) = (s_l(k; m(k)))^{-1} = \frac{a(k)}{l\pi}, \quad l = 1, 2, 3.$$

Для того чтобы сформулировать точные результаты о числе собственных значений операторов $h_{\mu,e}(k)$ и $h_{\mu,o}(k)$, а также их расположении, введем следующие разбиения: $\mathbb{E}_\alpha^{(1)}$ и $\mathbb{E}_\alpha^{(2)}$, $\alpha = 1, 2$, или же $\mathbb{O}_\alpha^{(1)}$, $\alpha = 0, 1$ и $\mathbb{O}_\beta^{(2)}$, $\beta = 0, 1, 2$ (рис. 1, 2), плоскостей $\mathcal{O}_{\mu_0\mu_2}$ и $\mathcal{O}_{\mu_1\mu_3}$ параметров $\mu_0, \mu_2 \in \mathbb{R}_+$ и $\mu_1, \mu_3 \in \mathbb{R}_+$:

$$\mathbb{R}_+^2 = \mathbb{E}_1^{(1)} \cup \mathbb{E}_2^{(1)} = \mathbb{O}_0^{(1)} \cup \mathbb{O}_1^{(1)} \text{ и } \mathbb{R}_+^2 = \mathbb{E}_1^{(2)} \cup \mathbb{E}_2^{(2)} = \mathbb{O}_0^{(2)} \cup \mathbb{O}_1^{(2)} \cup \mathbb{O}_2^{(2)},$$

где

$$\mathbb{E}_1^{(\gamma)} = \left\{ (\mu_{\gamma-1}, \mu_{\gamma+1}) \in \mathbb{R}_+^2 : \mu_{\gamma+1} \leq \mu_2(k) + \frac{\mu_2^2(k)}{\mu_{\gamma-1} - \mu_2(k)} \right\},$$

$$\mathbb{E}_2^{(\gamma)} = \left\{ (\mu_{\gamma-1}, \mu_{\gamma+1}) \in \mathbb{R}_+^2 : \mu_{\gamma+1} > \mu_2(k) + \frac{\mu_2^2(k)}{\mu_{\gamma-1} - \mu_2(k)} \right\},$$

$$\begin{aligned}\mathbb{O}_0^{(1)} &= \{(\mu_0, \mu_2) \in \mathbb{R}_+^2 : \mu_2 \leq \mu_2(k)\}, \quad \mathbb{O}_1^{(1)} = \{(\mu_0, \mu_2) \in \mathbb{R}_+^2 : \mu_2 > \mu_2(k)\}, \\ \mathbb{O}_0^{(2)} &= \left\{(\mu_1, \mu_3) \in \mathbb{R}_+^2 : \mu_1 < 3\mu_2(k), \quad \mu_3 \leq \mu_2(k) + \frac{\mu_2^2(k)}{\mu_1 - 3\mu_2(k)}\right\}, \\ \mathbb{O}_1^{(2)} &= \left\{(\mu_1, \mu_3) \in \mathbb{R}_+^2 : \mu_1 < 3\mu_2(k), \quad \mu_3 > \mu_2(k) + \frac{\mu_2^2(k)}{\mu_1 - 3\mu_2(k)}\right. \\ &\quad \left. \text{или } \mu_1 > 3\mu_2(k), \quad \mu_3 \leq \mu_2(k) + \frac{\mu_2^2(k)}{\mu_1 - 3\mu_2(k)}\right\}, \\ \mathbb{O}_2^{(2)} &= \left\{(\mu_1, \mu_3) \in \mathbb{R}_+^2 : \mu_1 > 3\mu_2(k), \quad \mu_3 > \mu_2(k) + \frac{\mu_2^2(k)}{\mu_1 - 3\mu_2(k)}\right\}.\end{aligned}$$

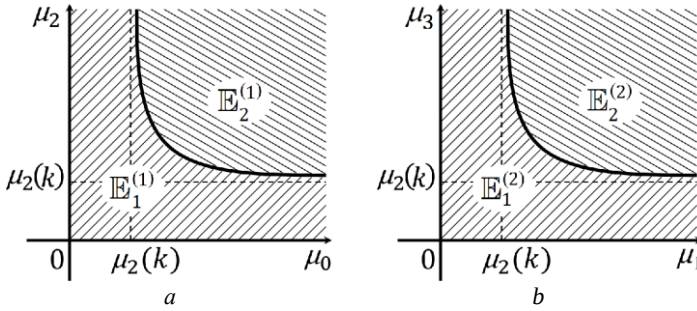


Рис. 1. Схема расположения множеств $\mathbb{E}_i^{(1)}$ и $\mathbb{E}_i^{(2)}$, $i = 1, 2$

Fig. 1. The layout of the sets $\mathbb{E}_i^{(1)}$ and $\mathbb{E}_i^{(2)}$, $i = 1, 2$

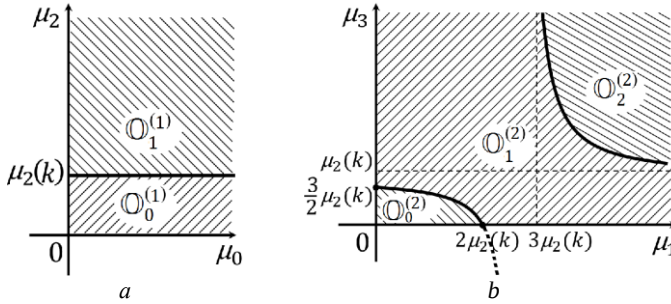


Рис. 2. Схема расположения множеств $\mathbb{O}_i^{(1)}$, $i = 0, 1$ и $\mathbb{O}_j^{(2)}$, $j = 0, 1, 2$

Fig. 2. The layout of the sets $\mathbb{O}_i^{(1)}$, $i = 0, 1$ and $\mathbb{O}_j^{(2)}$, $j = 0, 1, 2$

Следующие теоремы описывают число и расположение собственных значений операторов $h_{\mu,e}(k)$ и $h_{\mu,o}(k)$.

Теорема 1. Пусть либо $m_1 \neq m_2$ и $k \in \mathbb{T}$, либо $m = m_1 = m_2$ и $k \neq \pm \frac{\pi}{2}$. Тогда для каждого $k \in \mathbb{T}$ справедливы следующие утверждения:

1. Если $(\mu_0, \mu_2) \in \mathbb{E}_\alpha^{(1)}$, $(\mu_1, \mu_3) \in \mathbb{E}_\beta^{(2)}$, $\alpha, \beta = 1, 2$, то оператор $h_{\mu,e}(k)$ имеет ровно $\alpha + \beta$ собственных значений с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра.

2. Если $(\mu_0, \mu_2) \in \mathbb{O}_\alpha^{(1)}$, $(\mu_1, \mu_3) \in \mathbb{O}_\beta^{(2)}$, $\alpha = 0, 1$, $\beta = 0, 1, 2$, то оператор $h_{\mu,o}(k)$ имеет ровно $\alpha + \beta$ собственных значений с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра.

Теорема 2. Пусть $m = m_1 = m_2$ и $k = \pm \frac{\pi}{2}$. Тогда оператор $h_{\mu,e}(k)$ (соответственно $h_{\mu,o}(k)$) имеет ровно четыре (соответственно три) собственных значения с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра.

Следующая теорема устанавливает нижнюю и верхнюю границы для числа собственных значений оператора $h_\mu(k)$.

Теорема 3. 1. Пусть либо $m_1 \neq m_2$ и $k \in \mathbb{T}$, либо $m = m_1 = m_2$ и $k \neq \pm \frac{\pi}{2}$. Тогда для каждого $k \in \mathbb{T}$ оператор $h_\mu(k)$ имеет не менее двух и не более семи собственных значений с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра.

2. Пусть $m = m_1 = m_2$ и $k = \pm \frac{\pi}{2}$. Тогда оператор $h_\mu(k)$ имеет ровно семь собственных значений с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра.

Замечание 2. Пусть выполняется условие 1 теоремы 3. Если $(\mu_0, \mu_2) \in \mathbb{P}_\alpha$, $\alpha = \overline{1, 3}$, $(\mu_1, \mu_3) \in \mathbb{Q}_\beta$, $\beta = \overline{1, 4}$, то для каждого $k \in \mathbb{T}$ оператор $h_\mu(k)$ имеет ровно $\alpha + \beta$ собственных значений с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра, где

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_1 &= \mathbb{E}_1^{(1)} \cap \mathbb{O}_0^{(1)}, & \mathbb{P}_2 &= \mathbb{E}_1^{(1)} \cap \mathbb{O}_1^{(1)}, & \mathbb{P}_3 &= \mathbb{E}_2^{(1)} \cap \mathbb{O}_1^{(1)}, \\ \mathbb{Q}_1 &= \mathbb{E}_1^{(2)} \cap \mathbb{O}_0^{(2)}, & \mathbb{Q}_2 &= \mathbb{E}_1^{(2)} \cap \mathbb{O}_1^{(2)}, & \mathbb{Q}_3 &= \mathbb{E}_2^{(2)} \cap \mathbb{O}_1^{(2)}, & \mathbb{Q}_4 &= \mathbb{E}_2^{(2)} \cap \mathbb{O}_2^{(2)}. \end{aligned}$$

2. Эскиз доказательства основных результатов

Введем функцию $\Delta_\mu(k; \cdot) := \Delta(k; \cdot)$ определенную в $\mathbb{C} \setminus [m(k), M(k)]$:

$$\Delta(k; z) = \Delta_e(k; z) \Delta_o(k; z), \quad (3)$$

где

$$\Delta_e(k; z) = \Delta_e^{(1)}(k; z) \Delta_e^{(2)}(k; z), \quad \Delta_o(k; z) = \Delta_o^{(1)}(k; z) \Delta_o^{(2)}(k; z), \quad (4)$$

$$\Delta_e^{(\gamma)}(k; z) = (1 - \mu_\alpha c_\alpha(k; z))(1 - \mu_\beta c_\beta(k; z)) - \mu_\alpha \mu_\beta c_{\alpha\beta}^2(k; z), \quad (5)$$

$$\Delta_o^{(\gamma)}(k; z) = (1 - \alpha \mu_\alpha s_\alpha(k; z))(1 - \mu_\beta s_\beta(k; z)) - \alpha \mu_\alpha \mu_\beta s_{\alpha\beta}^2(k; z), \quad (6)$$

$$\alpha = \gamma - 1, \quad \beta = \gamma + 1, \quad \gamma = 1, 2.$$

Связь между нулями функции $\Delta(k; z)$ и собственными значениями оператора $h_\mu(k)$ устанавливается следующей леммой:

Лемма 1. Для любого $k \in \mathbb{T}$ число $z < m(k)$ является m -кратным собственным значением оператора $h_\mu(k)$ тогда и только тогда, когда оно является m -кратным нулем функции $\Delta(k; \cdot)$, т.е. $\Delta(k; z) = 0$.

Аналогичная лемма доказана в работе [14].

Следствие 1. Для любых $(\mu_{\gamma-1}, \mu_{\gamma+1}) \in \mathbb{R}_+^2$, $\gamma = 1, 2$, и $k \in \mathbb{T}$ число $z < m(k)$ является собственным значением оператора $h_{\mu,e}^{(\gamma)}(k)$ (соответственно $h_{\mu,o}^{(\gamma)}(k)$) тогда и только тогда, когда оно является нулем функции $\Delta_e^{(\gamma)}(k; \cdot)$ (соответственно $\Delta_o^{(\gamma)}(k; \cdot)$), $\gamma = 1, 2$. Причем каждое собственное значение оператора $h_{\mu,e}^{(\gamma)}(k)$ (соответственно $h_{\mu,o}^{(\gamma)}(k)$) является простым (см. ниже предложение 3), где операторы $h_{\mu,e}^{(\gamma)}(k)$ и $h_{\mu,o}^{(\gamma)}(k)$ зависят только от пар значений $(\mu_{\gamma-1}, \mu_{\gamma+1}) \in \mathbb{R}_+^2$, $\gamma = 1, 2$, т.е.

$$h_{\mu,e}^{(\gamma)}(k) = h_0(k) - \mathbf{v}_{\mu,e}^{(\gamma)}, \quad h_{\mu,o}^{(\gamma)}(k) = h_0(k) - \mathbf{v}_{\mu,o}^{(\gamma)}, \quad \gamma = 1, 2,$$

$\mathbf{v}_{\mu,e}^{(\gamma)}$ и $\mathbf{v}_{\mu,o}^{(\gamma)}$ есть интегральные операторы

$$(\mathbf{v}_{\mu,e}^{(\gamma)} f)(p) = \int_{\mathbb{T}} (\mu_{\gamma-1} \cos(\gamma-1)p \cos(\gamma-1)s + \mu_{\gamma+1} \cos(\gamma+1)p \cos(\gamma+1)s) f(s) ds,$$

$$(\mathbf{v}_{\mu,o}^{(\gamma)} f)(p) = \int_{\mathbb{T}} (\mu_{\gamma-1} \sin(\gamma-1)p \sin(\gamma-1)s + \mu_{\gamma+1} \sin(\gamma+1)p \sin(\gamma+1)s) f(s) ds.$$

Следующие предложения 1 и 2 доказываются аналогично предложениям 1 и 2 в работах [10, 11].

Предложение 1. I. Для любого $k \in \mathbb{T}$ функции $c_{nm}(k; \cdot)$, $n + m = 0, 2, 4, 6$, $n, m = 0, 1, 2, 3$ и $s_{lr}(k; \cdot)$, $l + r = 2, 4, 6$, $l, r = 1, 2, 3$, аналитичны в $\mathbb{C} \setminus [m(k), M(k)]$, положительны и монотонно возрастают на $(-\infty, m(k))$.

II. Пусть либо $m_1 \neq m_2$ и $k \in \mathbb{T}$, либо $m = m_1 = m_2$ и $k \neq \pm \frac{\pi}{2}$. Тогда для любых $\mu_{\gamma-1} \geq 0$, $\mu_{\gamma+1} \geq 0$, $\gamma = 1, 2$, и $k \in \mathbb{T}$ имеют место равенства (асимптотические разложения)

$$\Delta_e^{(\gamma)}(k; z) = \mathbf{E}_{-\frac{1}{2}}^{(\gamma)}(k)(m(k) - z)^{-\frac{1}{2}} + \mathbf{E}_0^{(\gamma)}(k) + O((m(k) - z)^{\frac{1}{2}}), z \rightarrow m(k) - 0, \quad (7)$$

$$\Delta_o^{(\gamma)}(k; z) = \mathbf{O}_0^{(\gamma)}(k) + O((m(k) - z)^{\frac{1}{2}}), z \rightarrow m(k) - 0, \quad (8)$$

где

$$\mathbf{E}_{-\frac{1}{2}}^{(\gamma)}(k) = \frac{\sqrt{\pi}[\mu_{\gamma-1}\mu_{\gamma+1} - (\mu_{\gamma-1} + \mu_{\gamma+1})\mu_2(k)]}{\sqrt{\mu_2^3(k)}},$$

$$\mathbf{E}_0^{(\gamma)}(k) = \frac{2\mu_2^2(k) + [(\gamma-1)\mu_{\gamma-1} + (\gamma+1)\mu_{\gamma+1}]\mu_2(k) - (\gamma+1)\mu_{\gamma-1}\mu_{\gamma+1}}{2\mu_2^2(k)},$$

$$\mathbf{O}_0^{(\gamma)}(k) = \frac{2\mu_2^2(k) - [(\gamma-1)\mu_{\gamma-1} + (\gamma+1)\mu_{\gamma+1}]\mu_2(k) + (\gamma-1)\mu_{\gamma-1}\mu_{\gamma+1}}{2\mu_2^2(k)}.$$

Предложение 2. I. Для любых $\mu_n \geq 0$, $n = 0, 1, 2, 3$ и $k \in \mathbb{T}$ функция $1 - \mu_n c_n(k; \cdot)$ имеет единственный нуль $\zeta_n(k) \in (-\infty, m(k))$, т.е.

$$1 - \mu_n c_n(k; \zeta_n(k)) = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3. \quad (9)$$

II. Пусть либо $t_1 \neq t_2$ и $k \in \mathbb{T}$, либо $t = t_1 = t_2$ и $k \neq \pm \frac{\pi}{2}$. Тогда для любых $\mu_l \geq 0$, $l = 1, 2, 3$, и $k \in \mathbb{T}$ справедливы следующие утверждения:

II.1. Если $\mu_l \leq \mu_l(k)$, то функция $1 - \mu_l s_l(k; \cdot)$, $l = 1, 2, 3$, не имеет нулей на интервале $(-\infty, m(k))$.

II.2. Если $\mu_l > \mu_l(k)$, то функция $1 - \mu_l s_l(k; \cdot)$, $l = 1, 2, 3$, имеет единственный нуль $\xi_l(k) < m(k)$.

Заметим, что в силу следствия 1 и представления (3) исследование нулей функции $\Delta(k; \cdot)$ сводится к изучению нулей функций $\Delta_e^{(\gamma)}(k; \cdot)$ и $\Delta_o^{(\gamma)}(k; \cdot)$, $\gamma = 1, 2$, определяемых через (5) и (6), соответственно.

Отметим, что $\text{rank}(\mathbf{v}_{\mu, e}^{(\gamma)}) = 2$ (соответственно $\text{rank}(\mathbf{v}_{\mu, o}^{(\gamma)}) \leq 2$), $\gamma = 1, 2$. Поэтому имеет место следующая

Лемма 2. Оператор $h_{\mu, e}^{(\gamma)}(k)$ (соответственно $h_{\mu, o}^{(\gamma)}(k)$), $\gamma = 1, 2$, имеет не более двух собственных значений (с учетом кратности), которые лежат левее точки $z = m(k)$.

Положим

$$\eta_{\min}^{(\gamma)}(k) = \min\{\eta_{\gamma-1}(k), \eta_{\gamma+1}(k)\}, \quad \eta_{\max}^{(\gamma)}(k) = \max\{\eta_{\gamma-1}(k), \eta_{\gamma+1}(k)\}, \quad \gamma = 1, 2,$$

и

$$\xi_{\min}(k) = \min\{\xi_1(k), \xi_3(k)\}, \quad \xi_{\max}(k) = \max\{\xi_1(k), \xi_3(k)\}.$$

Предложение 3. Пусть либо $t_1 \neq t_2$ и $k \in \mathbb{T}$, либо $t = t_1 = t_2$ и $k \neq \pm \frac{\pi}{2}$. Тогда для любых $(\mu_{\gamma-1}, \mu_{\gamma+1}) \in \mathbb{R}_+^2$, $\gamma = 1, 2$, и $k \in \mathbb{T}$ справедливы следующие утверждения:

I. Если $(\mu_{\gamma-1}, \mu_{\gamma+1}) \in \mathbb{E}_1^{(\gamma)}$, то функция $\Delta_e^{(\gamma)}(k; \cdot)$ имеет единственный нуль $z_e^{(\gamma 1)}(k) < m(k)$. При этом $z_e^{(\gamma 1)}(k) < \eta_{\min}^{(\gamma)}(k)$.

II. Если $(\mu_{\gamma-1}, \mu_{\gamma+1}) \in \mathbb{E}_2^{(\gamma)}$, то функция $\Delta_e^{(\gamma)}(k; \cdot)$ имеет только два нуля $z_e^{(\gamma 1)}(k) < m(k)$ и $z_e^{(\gamma 2)}(k) < m(k)$. При этом выполняются соотношения

$$z_e^{(\gamma 1)}(k) < \eta_{\min}^{(\gamma)}(k) \leq \eta_{\max}^{(\gamma)}(k) < z_e^{(\gamma 2)}(k).$$

III. Если $(\mu_0, \mu_2) \in \mathbb{O}_0^{(1)}$ (соответственно $(\mu_1, \mu_3) \in \mathbb{O}_0^{(2)}$), то функция $\Delta_o^{(1)}(k; \cdot)$ (соответственно $\Delta_o^{(2)}(k; \cdot)$) не имеет нулей на интервале $(-\infty, m(k))$.

IV. Если $(\mu_0, \mu_2) \in \mathbb{O}_1^{(1)}$ (соответственно $(\mu_1, \mu_3) \in \mathbb{O}_1^{(2)}$), то функция $\Delta_o^{(1)}(k; \cdot)$ (соответственно $\Delta_o^{(2)}(k; \cdot)$) имеет единственный нуль $z_o^{(1)}(k) < m(k)$ (соответственно $z_o^{(21)}(k) < m(k)$). При этом $z_o^{(21)}(k) < \xi_{\min}(k)$.

V. Если $(\mu_1, \mu_3) \in \mathbb{O}_2^{(2)}$, то функция $\Delta_o^{(2)}(k; \cdot)$ имеет только два нуля – $z_o^{(21)}(k) < m(k)$ и $z_o^{(22)}(k) < m(k)$. При этом выполняются соотношения

$$z_o^{(21)}(k) < \xi_{\min}(k) \leq \xi_{\max}(k) < z_o^{(22)}(k).$$

Доказательство. I. В силу утверждения I предложения 2 функции $1 - \mu_{\gamma-1}c_{\gamma-1}(k; \cdot)$ и $1 - \mu_{\gamma+1}c_{\gamma+1}(k; \cdot)$, $\gamma = 1, 2$, монотонно убывают и имеют единственные нули $\eta_{\gamma-1}(k)$ и $\eta_{\gamma+1}(k)$ на интервале $(-\infty, m(k))$, поэтому для любого $z < \eta_{\min}^{(\gamma)}(k)$, имеем

$$1 - \mu_{\gamma-1}c_{\gamma-1}(k; z) > 1 - \mu_{\gamma-1}c_{\gamma-1}(k; \eta_{\gamma-1}(k)) = 0,$$

$$1 - \mu_{\gamma+1}c_{\gamma+1}(k; z) > 1 - \mu_{\gamma+1}c_{\gamma+1}(k; \eta_{\gamma+1}(k)) = 0.$$

Отсюда и из утверждения I предложения 1 следует, что неравенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_e^{(\gamma)}(k; z)}{\partial z} &= -\mu_\alpha \frac{\partial c_\alpha(k; z)}{\partial z} (1 - \mu_\beta c_\beta(k; z)) - \mu_\beta \frac{\partial c_\beta(k; z)}{\partial z} (1 - \mu_\alpha c_\alpha(k; z)) - \\ &- 2\mu_\alpha \mu_\beta c_{\alpha\beta}(k; z) \frac{\partial c_{\alpha\beta}(k; z)}{\partial z} < 0, \quad \alpha = \gamma-1, \quad \beta = \gamma+1, \quad \gamma = 1, 2, \end{aligned}$$

выполняется при всех $z < \eta_{\min}^{(\gamma)}(k)$, т.е. функция $\Delta_e^{(\gamma)}(k; \cdot)$ монотонно убывает на интервале $(-\infty, \eta_{\min}^{(\gamma)}(k))$. Из равенств (1), (5) и (9) следуют соотношения

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \Delta_e^{(\gamma)}(k; z) = 1,$$

$$\Delta_e^{(\gamma)}(k; \eta_{\min}^{(\gamma)}(k)) = -\mu_\alpha \mu_\beta c_{\alpha\beta}^2(k; \eta_{\min}^{(\gamma)}(k)) < 0, \quad (10)$$

при $\alpha = \gamma-1$, $\beta = \gamma+1$, $\gamma = 1, 2$.

Поэтому существует единственное число $z_e^{(\gamma 1)}(k) < \eta_{\min}^{(\gamma)}(k)$ такое, что

$$\Delta_e^{(\gamma)}(k; z_e^{(\gamma 1)}(k)) = 0.$$

Покажем, что функция $\Delta_e^{(\gamma)}(k; \cdot)$ не имеет нулей на интервале $(\eta_{\min}^{(\gamma)}(k), m(k))$, а именно

$$\Delta_e^{(\gamma)}(k; z) < 0 \quad \text{при } z \in (\eta_{\min}^{(\gamma)}(k), m(k)). \quad (11)$$

Если предположить противное, т.е. $(\mu_{\gamma-1}, \mu_{\gamma+1}) \in \mathbb{E}_1^{(\gamma)}$, $\gamma = 1, 2$, и выполняется неравенство $\Delta_e^{(\gamma)}(k; \eta) \geq 0$ для некоторого $\eta \in (\eta_{\min}^{(\gamma)}(k), m(k))$, то в силу неравенств (10) и $\lim_{z \rightarrow m(k)-0} \Delta_e^{(\gamma)}(k; z) < 0$, а также непрерывности функции $\Delta_e^{(\gamma)}(k; \cdot)$ она имела бы не менее двух нулей (с учетом кратности) на интервале $(\eta_{\min}^{(\gamma)}(k), m(k))$, а в силу (5) функция $\Delta_e^{(\gamma)}(k; \cdot)$ имела бы не менее трех нулей на интервале $(-\infty, m(k))$, что противоречит утверждению леммы 2.

В силу леммы 2 из неравенства (11) вытекает, что функция $\Delta_e^{(\gamma)}(k; \cdot)$ не имеет нулей на интервале $(\eta_{\min}^{(\gamma)}(k), m(k))$, что доказывает утверждение I предложения.

II. Выше мы уже доказали, что функция $\Delta_e^{(\gamma)}(k; \cdot)$ (см. доказательство пункта I) имеет единственный нуль на интервале $(-\infty, \eta_{\min}^{(\gamma)}(k))$. Из условия пункта II имеем

$$\lim_{z \rightarrow m(k)-0} \Delta_e^{(\gamma)}(k; z) = +\infty.$$

Отсюда и из (9), рассуждая как выше, приходим к заключению, что функция $\Delta_e^{(\gamma)}(k; \cdot)$ на $(\eta_{\max}^{(\gamma)}(k), m(k))$ имеет единственный нуль $z_e^{(\gamma 2)}(k)$ (если бы она имела больше одного нуля, это противоречило бы лемме 2).

Таким образом, $z_e^{(\gamma 1)}(k)$ и $z_e^{(\gamma 2)}(k)$ являются нулями функции $\Delta_e^{(\gamma)}(k; \cdot)$ на $(-\infty, m(k))$, что доказывает утверждение II.

III. Пусть $z < m(k)$. В силу утверждения I предложения 1 функции $s_n(k; \cdot)$, $n = 1, 2, 3$, и $s_{13}(k; \cdot)$ монотонно возрастают на интервале $(-\infty, m(k))$ и в силу утверждения II.1 предложения 2 при всех $z < m(k)$ имеют место неравенства

$$s_{13}(k; z) < s_{13}(k; m(k))$$

и

$$1 - \mu_n s_n(k; z) > 1 - \mu_n s_n(k; m(k)) \geq 0.$$

Отсюда, из (6) и в силу условия III предложения 3 имеем

$$\Delta_o^{(1)}(k; z) > \Delta_o^{(1)}(k; m(k)) \geq 0,$$

$$\Delta_o^{(2)}(k; z) > (1 - \mu_1 s_1(k; m(k)))(1 - \mu_3 s_3(k; m(k))) - \mu_1 \mu_3 s_{13}^2(k; m(k)) \geq 0.$$

Следовательно, функция $\Delta_o^{(1)}(k; \cdot)$ (соответственно $\Delta_o^{(2)}(k; \cdot)$) не имеет нулей на интервале $(-\infty, m(k))$.

Утверждения IV и V предложения 3 доказываются аналогично доказательству утверждений I и II.

Доказательство теоремы 1. 1. Пусть $z < m(k)$. Согласно утверждениям I, II предложения 3 имеем

$$\Delta_e^{(1)}(k; \cdot) = \begin{cases} \text{имеет единственный нуль} & \text{при } (\mu_0, \mu_2) \in \mathbb{E}_1^{(1)}, \\ \text{имеет только два нуля} & \text{при } (\mu_0, \mu_2) \in \mathbb{E}_2^{(1)}, \end{cases}$$

$$\Delta_e^{(2)}(k; \cdot) = \begin{cases} \text{имеет единственный нуль} & \text{при } (\mu_1, \mu_3) \in \mathbb{E}_1^{(2)}, \\ \text{имеет только два нуля} & \text{при } (\mu_1, \mu_3) \in \mathbb{E}_2^{(2)}. \end{cases}$$

В силу леммы 1, учитывая представления (3)–(6) и условие 1 теоремы 1, получим, что оператор $h_{\mu, e}(k)$ имеет $\alpha + \beta$, $\alpha, \beta = 1, 2$, собственных значений при $(\mu_0, \mu_2) \in \mathbb{E}_\alpha^{(1)}$, $(\mu_1, \mu_3) \in \mathbb{E}_\beta^{(2)}$.

2. Пусть $z < m(k)$. В силу утверждений III–V предложения 3 имеем

$$\Delta_o^{(1)}(k; \cdot) = \begin{cases} \text{не имеет нулей} & \text{при } (\mu_0, \mu_2) \in \mathbb{O}_0^{(1)}, \\ \text{имеет единственный нуль} & \text{при } (\mu_0, \mu_2) \in \mathbb{O}_1^{(1)}, \end{cases}$$

$$\Delta_o^{(2)}(k; \cdot) = \begin{cases} \text{не имеет нулей} & \text{при } (\mu_1, \mu_3) \in \mathbb{O}_0^{(2)}, \\ \text{имеет единственный нуль} & \text{при } (\mu_1, \mu_3) \in \mathbb{O}_1^{(2)}, \\ \text{имеет только два нуля} & \text{при } (\mu_1, \mu_3) \in \mathbb{O}_2^{(2)}. \end{cases}$$

С учетом леммы 1 получаем утверждение 2 теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Пусть $m = m_1 = m_2$ и $k = \pm \frac{\pi}{2}$. В этом случае

функция $\mathcal{E}_k(\cdot)$ не зависит от $p \in \mathbb{T}$, т.е. $\mathcal{E}_k(p) = m(k) = \frac{2}{m}$. Отсюда следует $c_{02}(k; z) = c_{13}(k; z) = s_{13}(k; z) = 0$, и после элементарных вычислений находим, что функции $\Delta_e(k; \cdot)$ и $\Delta_o(k; \cdot)$, определяемые по формуле (4), имеют вид:

$$\Delta_e(k; z) = \prod_{n=0}^3 \phi_n(k; z), \quad \Delta_o(k; z) = \prod_{l=1}^3 \psi_l(k; z),$$

где

$$\phi_0(k; z) = 1 - \mu_0 \frac{2\pi m}{2 - zm}, \quad \phi_n(k; z) = \psi_n(k; z) = 1 - \mu_n \frac{\pi m}{2 - zm}, \quad n = 1, 2, 3.$$

В силу непрерывности и монотонности функции $\phi_n(k; \cdot)$ (соответственно $\psi_l(k; \cdot)$), учитывая равенства

$$\lim_{z \rightarrow \frac{2}{m} - 0} \phi_n(k; z) = -\infty, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \phi_n(k; z) = 1$$

$$\left(\begin{array}{cc} \text{соответственно} & \lim_{z \rightarrow \frac{2}{m} - 0} \psi_l(k; z) = -\infty, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \psi_l(k; z) = 1 \end{array} \right),$$

приходим к выводу, что функция $\phi_n(k; \cdot)$ ($\psi_l(k; \cdot)$) имеет единственный нуль на интервале $(-\infty, m(k))$. Следовательно, функция $\Delta_e(k; \cdot)$ (соответственно $\Delta_o(k; \cdot)$)

имеет четыре $z_e^{(0)}(\mu_0) = \frac{2}{m} - 2\pi\mu_0$, $z_e^{(n)}(\mu_n) = \frac{2}{m} - \pi\mu_n$, $n = 1, 2, 3$ (три

$z_o^{(l)}(\mu_l) = \frac{2}{m} - \pi\mu_l$, $l = 1, 2, 3$) нуля на интервале $(-\infty, m(k))$.

Согласно лемме 1, получаем доказательство утверждения теоремы 2.

Доказательство теоремы 3 следует из леммы 1, предложения 3 и теорем 1, 2.

Список источников

1. Mattis D.C. The few-body problem on a lattice // Rev. Mod. Phys. 1986. V. 58, No. 2. P. 361–379.
2. Mogilner A.I. Hamiltonians of solid state physics at few-particle discrete Schrodinger operators: problems and results // Advances in Sov. Math. 1991. V. 5. P. 139–194.
3. Malishev V.A., Minlos R.A. Linear infinite-particle operators / trl. by A. Mason. Providence, RI : American Mathematical Society, 1995. VIII, 298 p. (Translations of Mathematical Monographs; v. 143).

4. Minlos R.A., Mogilner A.I. Some problems concerning spectra of lattice models // *Schrödinger Operators, Standard and Nonstandard* : Proc. Conf. in Dubna, USSR, 6–10 September 1989 / P. Exner, P. Seba (eds.). Singapore : World Scientific, 1989. P. 243–257.
5. Фаддеев Л.Д. Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц. М. ; Л. : Изд-во Акад. наук СССР, Ленингр. отд-ние, 1963. 122 с. (Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР; 69).
6. Albeverio S., Lakaev S.N., Makarov K.A., Muminov Z.I. The threshold effects for the two-particle Hamiltonians // *Commun. Math. Phys.* 2006. V. 262. P. 91–115.
7. Лакаев С.Н. Об эффекте Ефимова в системе трех одинаковых квантовых частиц // *Функциональный анализ и его приложения*. 1993. Т. 27, № 3. С. 15–28.
8. Халхужаев А.М. О числе собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке с взаимодействием на соседних узлах // *Узбекский математический журнал*. 2000. № 3. С. 32–39.
9. Лакаев С.Н., Халхужаев А.М. О числе собственных значений двухчастичного дискретного оператора Шредингера // *Теоретическая и математическая физика*. 2009. Т. 158, № 2. С. 263–276.
10. Лакаев С.Н., Бозоров И.Н. О числе и местонахождении собственных значений одночастичного гамильтониана на одномерной решетке // *Узбекский математический журнал*. 2007. № 2. С. 70–80.
11. Лакаев С.Н., Бозоров И.Н. Число связанных состояний одночастичного гамильтониана на трехмерной решетке // *Теоретическая и математическая физика*. 2009. Т. 158, № 3. С. 425–443.
12. Муминов М.Э., Хуррамов А.М. Спектральные свойства двухчастичного гамильтониана на решетке // *Теоретическая и математическая физика*. 2013. Т. 177, № 3. С. 480–493.
13. Муминов М.Э., Хуррамов А.М. О кратности виртуального уровня нижнего края непрерывного спектра одного двухчастичного гамильтониана на решетке // *Теоретическая и математическая физика*. 2014. Т. 180, № 3. С. 329–341.
14. Муминов М.Э., Хуррамов А.М. Спектральные свойства двухчастичного гамильтониана на одномерной решетке // *Уфимский математический журнал*. 2014. Т. 177, № 4. С. 102–110.
15. Lakaev S.N., Lakaev Sh.S. The existence of bound states in a system of three particles in an optical lattice // *J.Phys. A: Math.Theor.* 2017. V. 50. Art. 335202. 17 p.
16. Муминов М.Э. О положительности двухчастичного гамильтониана на решетке // *Теоретическая и математическая физика*. 2007. Т. 153, № 3. С. 381–387.
17. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М. : Мир, 1982. Т. 4. Анализ операторов. 428 с.

References

1. Mattis D.C. (1986) The few-body problem on a lattice. *Reviews of Modern Physics*. 58(2). pp. 361–379.
2. Mogilner A.I. (1991) Hamiltonians of solid state physics at few-particle discrete Schrodinger operators: problems and results. *Advances in Soviet Mathematics*. 5. pp. 139–194.
3. Malishev V.A., Minlos R.A. (1995) *Linear Infinite-Particle Operators*. Translations of Mathematical Monographs 143. American Mathematical Society, Providence, RI.
4. Minlos R.A., Mogilner A.I. (1989) Some problems concerning spectra of lattice models. *Schrödinger Operators, Standard and Nonstandard. Proceedings of the Conference in Dubna, USSR, 6–10 September*. Ed. by P. Exner and P. Seba. World Scientific, Singapore. pp. 243–257.
5. Faddeev L.D. (1963) Matematicheskiye voprosy kvantovoy teorii rasseyaniya dlya sistemy trekh chastits [Mathematical problems in the quantum theory of scattering for a system of three particles]. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova*. 69. pp. 3–122.
6. Albeverio S., Lakaev S.N., Makarov K.A., Muminov Z.I. (2006) The threshold effects for the two-particle Hamiltonians. *Communications in Mathematical Physics*. 262. pp. 91–115.

7. Lakaev S.N. (1993) On Efimov's effect in a system of three identical quantum particles. *Functional Analysis and Its Applications*. 27(3). pp. 166–175.
8. Khalkhuzhaev A.M. (2000) O chisle sobstvennykh znacheniy dvukhchastichnogo operatora Shredingera na reshetke s vzaimodeystviyem na sosednikh uzlakh [On the number of eigenvalues of the two-particle Schrödinger operator on a lattice with interaction at neighboring sites]. *Uzbek Mathematical Journal*. 3. pp. 32–39.
9. Lakaev S.N., Khalkhuzhaev A.M. (2009) The number of eigenvalues of the two-particle discrete Schrödinger operator. *Theoretical and Mathematical Physics*. 158(2). pp. 221–232.
10. Lakaev S.N., Bozorov I.N. (2007) O chisle i mestonakhozhdenii sobstvennykh znacheniy odnochastichnogo gamil'toniana na odnomernoy reshetke [On the number and location of eigenvalues of the one-particle Hamiltonian on a one-dimensional lattice]. *Uzbek Mathematical Journal*. 2. pp. 70–80.
11. Lakaev S.N., Bozorov I.N. (2009) The number of bound states of a one-particle Hamiltonian on a three-dimensional lattice. *Theoretical and Mathematical Physics*. 158(3). pp. 360–376.
12. Muminov M.I., Khurramov A.M. (2013) Spectral properties of a two-particle Hamiltonian on a lattice. *Theoretical and Mathematical Physics*. 177(3). pp. 1693–1705.
13. Muminov M.I., Khurramov A.M. (2014) Multiplicity of virtual levels at the lower edge of the continuous spectrum of a two-particle Hamiltonian on a lattice. *Theoretical and Mathematical Physics*. 180(3). pp. 1040–1050.
14. Muminov M.I., Khurramov A.M. (2014) Spektral'nyye svoystva dvukhchastichnogo gamil'toniana na odnomernyy reshetke [Spectral properties of two particle Hamiltonian on one-dimensional lattice]. *Ufa Mathematical Journal*. 6(4), pp. 99–107.
15. Lakaev S.N., Lakaev Sh.S. (2017) The existence of bound states in a system of three particles in an optical lattice. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 50. 335202.
16. Muminov M.I. (2007) Positivity of the two-particle Hamiltonian on a lattice. *Theoretical and Mathematical Physics*. 153(3). pp. 1671–1676.
17. Reed M., Simon B. (1978) *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 4: Analysis of Operators*. New York: Academic Press.

Сведения об авторах:

Имомов Аъзам Абдурахимович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры и геометрии физико-математического факультета Каршинского государственного университета, Карши, Узбекистан. E-mail: imomov_azam@mail.ru

Бозоров Ислон Намозович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики и функционального анализа Самаркандского государственного университета, Самарканд, Узбекистан. E-mail: islomnb@mail.ru

Хуррамов Абдимажид Моликович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики и функционального анализа Самаркандского государственного университета, Самарканд, Узбекистан. E-mail: xurramov@mail.ru

Information about the authors:

Imomov Azam A. (Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Karshi State University, Karshi, Uzbekistan). E-mail: imomov_azam@mail.ru

Bozorov Islom N. (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent of Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan). E-mail: islomnb@mail.ru

Khurramov Abdimazhid M. (Doctor of Philosophy on Mathematics, Docent of Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan). E-mail: xurramov@mail.ru

Статья поступила в редакцию 24.06.2021; принята к публикации 12.07.2022

The article was submitted 24.06.2021; accepted for publication 12.07.2022

Научная статья

УДК 514.76

MSC: 53C15, 53D10, 53C25, 53C50

doi: 10.17223/19988621/78/3

Левинвариантные пара-кэлеровы структуры на шестимерных нильпотентных группах Ли

Николай Константинович Смоленцев

Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия, smolennk@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются левинвариантные пара-комплексные структуры на шестимерных нильпотентных группах Ли. Получен полный перечень шестимерных нильпотентных групп Ли, которые допускают пара-кэлеровы структуры, найдены явные выражения пара-комплексных структур и исследованы свойства кривизны ассоциированных пара-кэлеровых метрик. Показано, что паракompлексные структуры являются нильпотентными, а соответствующие пара-кэлеровы метрики являются Риччи-плоскими.

Ключевые слова: шестимерные нильпотентные группы Ли, симплектические группы Ли, пара-комплексные структуры, левинвариантные паракэлеровы структуры

Для цитирования: Смоленцев Н.К. Левинвариантные пара-кэлеровы структуры на шестимерных нильпотентных группах Ли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 78. С. 38–48. doi: 10.17223/19988621/78/3

Original article

Left-invariant para-Kähler structures on six-dimensional nilpotent Lie groups

Nikolay K. Smolentsev

Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation, smolennk@mail.ru

Abstract. As is known, nilpotent Lie groups, except for the Abelian case, do not admit left-invariant positive definite Kähler metrics. However, pseudo-Kähler structures can exist. In the six-dimensional case, it is known that 13 classes of noncommutative nilpotent Lie groups admit pseudo-Kähler structures. Recently, para-complex and para-Kähler structures are of great interest. Therefore, the question of invariant para-Kähler structures on six-dimensional nilpotent Lie groups is natural. Since a left-invariant tensor is determined by its value on the Lie algebra $\mathfrak{g}$, a left-invariant para-Kähler structure on a Lie group is a triple (ω, J, g) consisting of a symplectic form ω , an integrable almost para-complex structure J , and a pseudo-Riemannian metric g on the Lie algebra $\mathfrak{g}$. In this case, the consistency conditions are satisfied: $\omega(JX, JY) = -\omega(X, Y)$ and $g(X, Y) = \omega(X, JY)$. Note also that $g(JX, JY) = -g(X, Y)$. The integrability condition for J at the level of Lie

algebras has the form: $N_J(X, Y) = [X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] = 0$ for any $X, Y \in \mathfrak{g}$. It follows from the integrability condition for J that the ± 1 -eigensubspaces $\mathfrak{g}^+$ and $\mathfrak{g}^-$ of the operator J are subalgebras. Then the para-Kähler Lie algebra $\mathfrak{g}$ can be represented as the direct sum of two isotropic subalgebras: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^+ \oplus \mathfrak{g}^-$.

In this paper, we consider para-Kähler structures on six-dimensional nilpotent Lie algebras. A complete list of 15 classes of non-commutative six-dimensional nilpotent Lie algebras that admit para-Kähler structures is obtained. Explicit expressions for the para-complex structures J are found, and the curvature properties of the associated para-Kähler metrics are investigated. It is shown that para-complex structures are nilpotent, and the corresponding para-Kähler metrics are Ricci-flat.

Keywords: six-dimensional nilpotent Lie groups, symplectic Lie groups, para-complex structures, left-invariant para-Kähler structures

For citation: Smolentsev, N.K. (2022) Left-invariant para-Kähler structures on six-dimensional nilpotent Lie groups. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 78. pp. 38–48. doi: 10.17223/19988621/78/3

Введение

Как известно [1], нильпотентные группы Ли, за исключением абелевого случая, не допускают левоинвариантных положительно определенных кэлеровых метрик. Однако псевдокэлеровы структуры могут существовать. В работе [2] получен полный список из 13 классов некоммутативных шестимерных нильпотентных групп Ли, допускающих псевдокэлеровы структуры. В работе [3] проведено более полное исследование указанных выше классов шестимерных псевдокэлеровых нильпотентных групп Ли. В последнее время большой интерес вызывают пара-комплексные и пара-кэлеровы структуры. Поэтому естественным является вопрос об инвариантных пара-кэлеровых структурах на шестимерных нильпотентных группах Ли. В данной статье будет показано, что 15 классов некоммутативных шестимерных нильпотентных групп Ли допускают пара-кэлеровы структуры.

Напомним основные понятия и факты, которые будут использованы в работе.

Почти пара-комплексной структурой на $2n$ -мерном многообразии M называется поле J эндоморфизмов $J: TM \rightarrow TM$, такое, что $J^2 = Id$, причем ранги собственных распределений $T^\pm M := \ker(Id \mp J)$ равны. Почти пара-комплексная структура J называется *интегрируемой*, если распределения $T^\pm M$ инволютивны. В этом случае J называется *пара-комплексной структурой*. Тензор Нийенхейса N почти пара-комплексной структуры J определяется равенством $N_J(X, Y) = [X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY]$ для любых векторных полей X, Y на M . Как и в комплексном случае, пара-комплексная структура J интегрируема тогда и только тогда, когда $N_J = 0$.

Пара-кэлерово многообразие можно определить как симплектическое многообразие (M, ω) с согласованной пара-комплексной структурой J , т.е. такой, что $\omega(JX, JY) = -\omega(X, Y)$. В этом случае на M определена метрика $g(X, Y) = \omega(X, JY)$, которая является псевдоримановой нейтральной сигнатуры. Отметим, что $g(JX, JY) = -g(X, Y)$. В работе [4] представлен обзор теории пара-комплексных структур и рассмотрены инвариантные пара-комплексные и пара-кэлеровы структуры на однородных пространствах.

Отметим, что термин «пара-кэлерово» многообразие употребляется также в другом смысле. А. Грей в работе [5] заметил, что замечательные геометрические и топологические свойства кэлеровых многообразий в большой степени объясняются тем, что тензор кривизны R удовлетворяет специальному тождеству Кэлера: $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(X, Y)JZ, JW)$ для любых векторных полей X, Y, Z, W , где J – тензор комплексной структуры, согласованный с римановой метрикой g . Однако класс многообразий, обладающих указанным свойством, несколько шире. В работе Рицы [6] 1974 г. почти эрмитовы многообразия, удовлетворяющие тождеству Кэлера, названы паракэлеровыми многообразиями. Имеется множество работ, посвященных изучению таких паракэлеровых многообразий (см. напр.; [7, 8]), где можно найти также ссылки на классические и более современные публикации.

В данной работе паракэлеровы многообразия рассматриваются с точки зрения паракомплексной геометрии, которая была введена Либерманом [9] в 1952 г. по аналогии с комплексной геометрией. Более подробно о такой паракэлеровой геометрии см. в обзоре [4]. Отметим для сравнения, что такие пара-кэлеровы многообразия удовлетворяют следующему тождеству: $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)JZ, JW)$, где J – тензор пара-комплексной структуры, согласованный с псевдо-римановой метрикой g [4].

Мы будем рассматривать левоинвариантные (почти) пара-комплексные структуры на группе Ли G , которые задаются левоинвариантным полем эндоморфизмов $J: TG \rightarrow TG$ касательного расслоения TG . Поскольку такой тензор J определяется линейным оператором на алгебре Ли $\mathfrak{g} = T_e G$, то мы будем говорить, что J – это инвариантная почти пара-комплексная структура на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. В этом случае условие интегрируемости J также формулируется на уровне алгебры Ли: $N_J(X, Y) = [X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] = 0$, для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$. Из условия интегрируемости J следует, что собственные подпространства $\mathfrak{g}^+$ и $\mathfrak{g}^-$ оператора J являются подалгебрами. Поэтому пара-комплексная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ может быть представлена в виде прямой суммы двух подалгебр:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^+ \oplus \mathfrak{g}^-.$$

Если на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ задана пара-комплексная структура J , то для элемента Z центра $Z(\mathfrak{g})$ вектор JZ может не быть центральным, но из условия интегрируемости сразу следует, что ad_{JZ} коммутирует с J :

$$[JZ, JX] = J[JZ, X], \quad ad_{JZ} \cdot J = J \cdot ad_{JZ}.$$

Левоинвариантная симплектическая структура ω на группе Ли G задается 2-формой максимального ранга на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Замкнутость формы ω эквивалентна условию $\omega([X, Y], Z) - \omega([X, Z], Y) + \omega([Y, Z], X) = 0$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. В этом случае алгебру Ли $\mathfrak{g}$ будем называть симплектической.

Напомним, что подпространство $W \subset \mathfrak{g}$ называется ω -изотропным если и только если $\omega(W, W) = 0$, и W называется ω -лагранжевым, если оно ω -изотропно и из $\omega(W, u) = 0$ следует, что $u \in W$. Подпространства $U, V \subset W$ симплектического пространства (W, ω) будем называть ω -дуальными, если для любого вектора $u \in U$ существует вектор $v \in V$ такой, что $\omega(u, v) \neq 0$, и наоборот, $\forall v \in V, \exists u \in U, \omega(u, v) \neq 0$.

Левоинвариантная пара-кэлерова структура на группе Ли задается парой (ω, J) , состоящей из симплектической формы ω на $\mathfrak{g}$ и согласованной с ω пара-комплексной структуры J на $\mathfrak{g}$, т.е. такой, что $\omega(JX, JY) = -\omega(X, Y)$. Согласованная пара (ω, J) определяет на $\mathfrak{g}$ пара-кэлерову псевдориманову метрику $g(X, Y) = \omega(X, JY)$.

При этом подалгебры $\mathfrak{g}^+$ и $\mathfrak{g}^-$ являются изотропными для метрики g и ω -лагранжевыми.

Нижний центральный ряд алгебры Ли $\mathfrak{g}$ есть убывающая последовательность идеалов $C^0\mathfrak{g}, C^1\mathfrak{g}, \dots$, определенная индуктивно: $C^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$, $C^{k+1}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, C^k\mathfrak{g}]$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется нильпотентной, если $C^k\mathfrak{g} = 0$ для некоторого k . Для нильпотентной алгебры Ли определена также возрастающая центральная последовательность идеалов $\{\mathfrak{g}_k\}$, $\mathfrak{g}_0 = \{0\} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{g}_{s-1} \subset \mathfrak{g}_s = \mathfrak{g}$, где идеалы $\mathfrak{g}_k$ определены индуктивно по правилу

$$\mathfrak{g}_k = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}_{k-1}\}, k \geq 1.$$

В частности, $\mathfrak{g}_1 = Z(\mathfrak{g})$ – это центр алгебры Ли. Кроме того, первый производный идеал $C^1\mathfrak{g}$ входит в идеал $\mathfrak{g}_{s-1}$.

Для заданной почти пара-комплексной структуры J определенные выше идеалы $\{\mathfrak{g}_k\}$, вообще говоря, не являются J -инвариантными. Можно определить возрастающую последовательность J -инвариантных идеалов $\mathfrak{a}_k(J)$ следующим образом:

$$\mathfrak{a}_0(J) = \{0\}, \mathfrak{a}_k(J) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{a}_{k-1}(J) \text{ и } [JX, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{a}_{k-1}(J)\}, k \geq 1.$$

Ясно, что $\mathfrak{a}_k(J) \subseteq \mathfrak{g}_k$ для $k \geq 1$. Очевидно, что идеал $\mathfrak{a}_1(J)$ лежит в центре $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}_1$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Определение 1. Левоинвариантная почти пара-комплексная структура J называется нильпотентной, если для последовательности идеалов $\{\mathfrak{a}_k(J)\}$ существует номер p такой, что $\mathfrak{a}_p(J) = \mathfrak{g}$.

Пусть ∇ – связность Леви-Чивита, соответствующая псевдоримановой метрике g . Она определяется из шестичленной формулы [10], которая для левоинвариантных векторных полей X, Y, Z на группе Ли принимает вид:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X).$$

Напомним, что тензор кривизны $R(X, Y)$ определяются формулой

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]},$$

а тензор Риччи Ric – это свертка тензора кривизны по первому нижнему и верхнему индексам, $Ric_{jk} = R_{ijk}^i$. Метрика g называется Риччи-плоской, если $Ric \equiv 0$.

1 Левоинвариантные симплектические и пара-кэлеровы структуры на алгебрах Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли, на которой заданы симплектическая форма ω , почти пара-комплексная структура J , согласованная с ω , и псевдориманова метрика $g(X, Y) = \omega(X, JY)$. Приведем несколько простых фактов относительно первого производного идеала $C^1(\mathfrak{g})$, центра $Z(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и идеалов $\{\mathfrak{g}_k\}$ и $\{\mathfrak{a}_k(J)\}$.

Предложение 1. Для любой симплектической формы ω на $\mathfrak{g}$ выполняется равенство $\omega(C^1(\mathfrak{g}), Z(\mathfrak{g})) = 0$.

Доказательство. Сразу следует из формулы $d\omega(X, Y, Z) = \omega([X, Y], Z) - \omega([X, Z], Y) + \omega([Y, Z], X) = \omega([X, Y], Z) = 0, \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Предложение 2. Для любой симплектической формы ω на $\mathfrak{g}$ и согласованной с ней почти пара-комплексной структуры J выполняется равенство $\omega(C^1\mathfrak{g} \oplus J(C^1\mathfrak{g}), \mathfrak{a}_1(J)) = 0$.

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{a}_1(J)$ лежит в центре $Z(\mathfrak{g})$, то $\omega(C^1(\mathfrak{g}), \mathfrak{a}_1(J)) = 0$. Равенство $\omega(J(C^1\mathfrak{g}), \mathfrak{a}_1(J)) = 0$ следует из J -инвариантности $\mathfrak{a}_1(J)$ и формулы $\omega(JX, JY) = -\omega(X, Y)$.

Следствие 1. Для любой почти пара-кэлеровой структуры $(\mathbf{g}, \omega, g, J)$ идеал $\mathbf{a}_1(J) \subset \mathbf{g}_1$ ортогонален подпространству $C^1\mathbf{g} \oplus J(C^1\mathbf{g})$: $g(C^1\mathbf{g} \oplus J(C^1\mathbf{g}), \mathbf{a}_1(J)) = 0$.

Предложение 3. Для любой нильпотентной почти пара-кэлеровой структуры J идеал $\mathbf{a}_{p-1}(J)$ содержит $C^1\mathbf{g} \oplus J(C^1\mathbf{g})$.

Доказательство. Поскольку $\mathbf{g}_p = \{X \in \mathbf{g} \mid [X, \mathbf{g}] \subseteq \mathbf{a}_{p-1}(J) \text{ и } [JX, \mathbf{g}] \subseteq \mathbf{a}_{p-1}(J)\} = \mathbf{g}$, то $C^1\mathbf{g} \subset \mathbf{a}_{p-1}(J)$. Поэтому $J(C^1\mathbf{g}) \subset J(\mathbf{a}_{p-1}(J)) = \mathbf{a}_{p-1}(J)$.

Предложение 4. Для любой левоинвариантной (псевдо)римановой структуры g на алгебре Ли $\mathbf{g}$ имеют место следующие свойства:

1. Если вектор X лежит в центре алгебры Ли, то $\nabla_X Y = \nabla_Y X$, $\forall Y \in \mathbf{g}$.
2. Если векторы X и Y лежат в центре алгебры Ли, то $\nabla_X Y = 0$.

Доказательство. Следует из формулы $2g(\nabla_X Y, Z) = g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g(X, [Z, Y])$ для ковариантной производной ∇ на группе Ли. Действительно, если вектор X лежит в центре алгебры Ли, то $2g(\nabla_X Y, Z) = g(X, [Z, Y])$ и $2g(\nabla_Y X, Z) = g([Y, X], Z) + g([Z, Y], X) + g(Y, [Z, X]) = g([Z, Y], X)$, $\forall Z \in \mathbf{g}$.

Следствие 2. Если векторы X, Y и Z лежат в центре алгебры Ли, то $R(X, Y)Z = 0$.

Пусть J – нильпотентная почти пара-комплексная структура на нильпотентной алгебре Ли $\mathbf{g}$, и $\mathbf{a}_0 = \{0\} \subset \mathbf{a}_1(J) \subset \dots \subset \mathbf{a}_{p-1}(J) \subset \mathbf{a}_p(J) = \mathbf{g}$ – соответствующая последовательность идеалов. Заметим, что хотя идеалы $\mathbf{a}_k(J)$ являются J -инвариантными, они не обязаны быть четномерными.

Предложение 5. Если вектор X лежит в идеале $\mathbf{a}_1(J) \subset Z(\mathbf{g})$ алгебры Ли, то $\nabla_X Y = \nabla_Y X = 0$, $\forall Y \in \mathbf{g}$.

Доказательство. Пусть $X \in \mathbf{a}_1(J) \subset \mathbf{g}_1 = Z(\mathbf{g})$ и $Z, Y \in \mathbf{g}$. Тогда из формулы ковариантной производной и из следствия 1 вытекает, что $2g(\nabla_X Y, Z) = g(X, [Z, Y]) = 0$.

Следствие 3. Если вектор X лежит в идеале $\mathbf{a}_1(J) \subset \mathbf{g}_1$ алгебры Ли, то $R(X, Y)Z = R(Z, Y)X = 0$, $\forall Y, Z \in \mathbf{g}$.

Доказательство. Следует из $\nabla_X Y = \nabla_Y X = 0$, $\forall Y \in \mathbf{g}$ и формул $R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z$ и $R(Z, Y)X = \nabla_Z(\nabla_Y X) - \nabla_Y(\nabla_Z X) - \nabla_{[Z, Y]}X$.

2. Левоинвариантные пара-кэлеровы структуры на шестимерных нильпотентных алгебрах Ли

Классификационный список шестимерных симплектических нильпотентных алгебр Ли представлен в работе [11]. Многие алгебры Ли данного списка имеют возрастающую последовательность идеалов $Z(\mathbf{g}) = \mathbf{g}_1 \subset \mathbf{g}_2 \subset \mathbf{g}_3 = \mathbf{g}$ размерностей 2, 4 и 6 (будем говорить, что такая алгебра Ли имеет тип (2, 4, 6)). Выберем дополнение A к $\mathbf{g}_2$ и дополнение B к $Z(\mathbf{g})$ в $\mathbf{g}_2$. Тогда такую алгебру Ли можно представить в виде прямой суммы двумерных подпространств:

$$\mathbf{g} = A \oplus B \oplus Z(\mathbf{g}).$$

Из определения идеалов $\mathbf{g}_3 = \{X \in \mathbf{g} \mid [X, \mathbf{g}] \subseteq \mathbf{g}_2\} = \mathbf{g}$ и $\mathbf{g}_2 = \{X \in \mathbf{g} \mid [X, \mathbf{g}] \subseteq Z(\mathbf{g})\}$ сразу следует, что дополнительные подпространства A и B обладают свойствами:

$$[A, A] \subset \mathbf{g}_2 = B \oplus Z(\mathbf{g}), \quad [A, B] \subset Z(\mathbf{g}).$$

Например, для алгебры $\mathbf{G}_{21}$ списка работы [11] со скобками Ли $[e_1, e_2] = e_4$, $[e_1, e_4] = e_6$, $[e_2, e_3] = e_6$ мы имеем: $Z(\mathbf{g}) = \mathbf{R}\{e_5, e_6\}$, $\mathbf{g}_2 = \mathbf{R}\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$, $\mathbf{g}_3 = \mathbf{g}$. Тогда в качестве подпространств A и B можно выбрать: $B = \mathbf{R}\{e_3, e_4\}$ и $A = \mathbf{R}\{e_1, e_2\}$.

Симплектические структуры классификационного списка работы [11] показывают, что для алгебр типа (2, 4, 6) дополнительные подпространства A и B можно выбрать так, что на подпространстве B симплектическая форма ω невырождена.

на, а подпространства A и $Z(\mathfrak{g})$ являются ω -изотропными и ω -дуальными. Для алгебр Ли других типов вместо $Z(\mathfrak{g})$ необходимо выбрать двумерное подпространство $C \subset Z(\mathfrak{g})$.

Теорема 1. Пусть шестимерная симплектическая алгебра Ли $(\mathfrak{g}, \omega)$ имеет разложение в виде прямой суммы двумерных подпространств

$$\mathfrak{g} = A \oplus B \oplus C,$$

где $C \subset Z(\mathfrak{g})$, $[A, A] \subset B \oplus C$ и $[A, B] \subset C$. Предположим, что $B \oplus C$ является абелевой подалгеброй, подпространства A и C – ω -изотропны и ω -дуальны, на подпространстве B форма ω невырождена и $\omega(B \oplus C, C) = 0$. Тогда для любой согласованной с ω нильпотентной почти пара-комплексной структуры J , для которой подпространства B и C инвариантны, для связности Леви–Чивита ∇ соответствующей псевдоримановой метрики g_J имеют место свойства:

1. $\nabla_X Y \in B \oplus C, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g},$
2. $\nabla_X Y, \nabla_Y X \in C, \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall Y \in B \oplus C,$
3. $\nabla_X Y = 0, \quad \forall X, Y \in B \oplus C.$

Доказательство. Свойство 1. Пусть $X, Y \in \mathfrak{g}$. Тогда $[X, Y] \in B \oplus C$. Предположим, что $\nabla_X Y$ не лежит в $B \oplus C$, т.е. имеет ненулевую компоненту из A . Тогда существует вектор $Z \in C \subset Z(\mathfrak{g})$, такой что $\omega(\nabla_X Y, JZ) \neq 0$. В то же время $2\omega(\nabla_X Y, JZ) = 2g(\nabla_X Y, Z) = g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X) = g([X, Y], Z) = \omega([X, Y], JZ) = 0$. Последнее равенство следует из свойства $\omega(B \oplus C, C) = 0$.

Свойство 2. Пусть теперь $X \in \mathfrak{g}$ и $Y \in B \oplus C$. Тогда $\nabla_X Y$ лежит в $B \oplus C$. Предположим, что $\nabla_X Y$ не лежит в C , т.е. имеет ненулевую компоненту из B . Тогда из условия невырожденности формы ω на B и равенства $\omega(B \oplus C, C) = 0$ следует, что существует вектор $Z \in B$, такой что $JZ \in B$ и $\omega(\nabla_X Y, JZ) \neq 0$. В то же время, учитывая коммутативность $B \oplus C$ и включение $[A, B] \subset C \subset \mathfrak{a}_1(J) \subset Z(\mathfrak{g})$, имеем: $2\omega(\nabla_X Y, JZ) = 2g(\nabla_X Y, Z) = g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X) = g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) = \omega([X, Y], JZ) + \omega([Z, X], JY) = 0$. Последнее равенство следует из того, что $JY, JZ \in B \oplus C, [X, Y], [Z, X] \in C$ и $\omega(B \oplus C, C) = 0$. Таким образом, $\nabla_X Y \in C$. Включение $\nabla_Y X \in C$ следует из формулы $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

Свойство 3. Пусть $X, Y \in B \oplus C$. Тогда для любого $Z \in \mathfrak{g}$ совершенно аналогично выполняется: $2g(\nabla_X Y, Z) = g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X) = \omega([Z, X], JY) + \omega([Z, Y], JX) = 0$.

Следствие 4. В предположениях теоремы 1 если вектор X лежит в подпространстве $B \oplus C$, то имеют место следующие равенства: $R(X, Y)Z = R(Y, X)Z = R(Z, Y)X = 0$ для любых $Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Доказательство. Пусть $X \in B \oplus C$ и пусть $Y, Z \in \mathfrak{g}$. В формуле $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$ мы имеем $[X, Y] \in C \subset \mathfrak{a}_1(J)$, поэтому по предложению 5 $\nabla_{[X, Y]} Z = 0$. Далее, $\nabla_Y Z \in B \oplus C$, поэтому $\nabla_X \nabla_Y Z = 0$ – по свойству 3 теоремы. По свойству 2 теоремы имеем: $\nabla_X Z \in C \subset \mathfrak{a}_1(J) \subset Z(\mathfrak{g})$. Тогда $\nabla_Y \nabla_X Z = 0$ по предложению 5.

Пусть $X \in B \oplus C$ и $R(Z, Y)X = \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_{[Z, Y]} X$. Мы имеем $[Z, Y] \in B \oplus C$, поэтому $\nabla_{[Z, Y]} X = 0$. Поскольку $\nabla_Y X \in C \subset \mathfrak{a}_1(J) \subset Z(\mathfrak{g})$, то $\nabla_Z \nabla_Y X = 0$ по предложению 5. Аналогично $\nabla_Y \nabla_Z X = 0$. Поэтому $R(Z, Y)X = 0$.

Выберем базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, адаптированные к разложению $\mathfrak{g} = A \oplus B \oplus C$, т.е. такой, что $A = \mathbf{R}\{e_1, e_2\}$, $B = \mathbf{R}\{e_3, e_4\}$ и $C = \mathbf{R}\{e_5, e_6\}$.

Следствие 5. В предположениях теоремы 1 для любых $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ выполняется включение $R(X, Y)Z \in C \subset Z(\mathfrak{g})$. В адаптированном к разложению $\mathfrak{g} = A \oplus B \oplus C$ базисе тензор кривизны может иметь с точностью до симметрий только четыре ненулевые компоненты: $R_{1,2,1}^5, R_{1,2,1}^6, R_{1,2,2}^5, R_{1,2,2}^6$. В частности, тензор Риччи равен нулю.

Доказательство. Пусть $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. В формуле $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$ мы имеем $[X, Y] \in B \oplus C$, поэтому $\nabla_{[X,Y]}Z \in C$. Далее, $\nabla_Y Z \in B \oplus C$, поэтому $\nabla_X \nabla_Y Z \in C$. Аналогично $\nabla_Y \nabla_Z X \in C$. Таким образом, $R(X, Y)Z \in C$. Утверждение о ненулевых компонентах вытекает из следствия 4.

Рассмотрим вопрос о том, какие из алгебр Ли классификационного списка работы [11] допускают согласованные пара-комплексные структуры (ω, J) . Результаты представлены в таблице приведенной ниже теоремы 2. У каждой алгебры Ли таблицы указан ее номер из списка симплектических алгебр Ли работы [11]. Для каждой симплектической алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \omega)$ этой таблицы существуют многопараметрические семейства пара-комплексных структур J , согласованных с ω . В таблице теоремы 2 приведена одна из них, наиболее простая J , которая представлена в блочном виде в базисе $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ алгебры Ли и в соответствии с разложением $\mathfrak{g} = \mathbf{R}\{e_1, e_2\} \oplus \mathbf{R}\{e_3, e_4\} \oplus \mathbf{R}\{e_5, e_6\}$. Символом R обозначен тензор Римана. Дуальный базис обозначен символами $\{e^1, \dots, e^6\}$.

Теорема 2. Шестимерная нильпотентная некоммутативная алгебра Ли допускает пара-кэлерову структуру (J, ω) тогда и только тогда, когда она симплекто-изоморфна одной из алгебр представленной ниже таблицы. Допустимые пара-комплексные структуры J являются нильпотентными, а соответствующие псевдоримановы метрики Риччи – плоскими.

Пара-кэлеровы шестимерные нильпотентные алгебры Ли

	Алгебра Ли	Симплектическая форма	Пара-комплексная структура
G₆	$[e_1, e_2] = e_3,$ $[e_1, e_3] = e_4,$ $[e_1, e_4] = e_5,$ $[e_2, e_3] = e_6$	$e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^4 +$ $+ e^2 \wedge e^5 - e^3 \wedge e^4$	$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, R \neq 0$
G₁₀	$[e_1, e_2] = e_4,$ $[e_1, e_4] = e_5,$ $[e_1, e_3] = e_6,$ $[e_2, e_4] = e_6$	$e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 -$ $- e^3 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^6$	$J = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{a(a+2)}{2(a+1)} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -a-2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, R \neq 0$ при $a \neq 0$
G₁₁	$[e_1, e_2] = e_4,$ $[e_1, e_4] = e_5,$ $[e_2, e_3] = e_6,$ $[e_2, e_4] = e_6$	$e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 -$ $- e^3 \wedge e^4 + \lambda e^2 \wedge e^6$	$J = \begin{pmatrix} -1 & -2\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R \neq 0$ при $a \neq 1$
G₁₂	$[e_1, e_2] = e_4,$ $[e_1, e_4] = e_5,$ $[e_2, e_3] = -e_5$ $[e_1, e_3] = e_6,$ $[e_2, e_4] = e_6$	$-e^1 \wedge e^5 + \lambda e^2 \wedge e^6 +$ $+ (\lambda - 1)e^3 \wedge e^4$	$J = \begin{pmatrix} 0 & \lambda a \\ \frac{1}{\lambda a} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda a^2 - 1}{a(\lambda + 1)} \\ \frac{a(\lambda + 1)}{\lambda a^2 - 1} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} \\ a & 0 \end{pmatrix}, R$ $\neq 0$

Продолжение таблицы

	Алгебра Ли	Симплектическая форма	Пара-комплексная структура
G₁₃	$[e_1, e_2] = e_4,$ $[e_1, e_3] = e_5,$ $[e_1, e_4] = e_6,$ $[e_2, e_3] = e_6$	$e^1 \wedge e^6 + \lambda e^2 \wedge e^5 +$ $+(\lambda - 1) e^3 \wedge e^4,$ $\lambda \neq 0 \text{ и } 1$ $e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^4 +$ $+ \frac{1}{2} e^2 \wedge e^5 - \frac{1}{2} e^3 \wedge e^4$	$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a(\lambda+1) & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda a & -1 \end{pmatrix},$ $R_1 = 0,$ $J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, R_2 \neq 0$
G₁₄	$[e_1, e_2] = e_4,$ $[e_1, e_3] = e_5,$ $[e_1, e_4] = e_6$	$e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^4$	$J = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2-1}{b} & -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & -b \\ \frac{a^2-1}{b} & -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & -b \\ \frac{a^2-1}{b} & -a \end{pmatrix},$ $R = 0$
G₁₅	$[e_1, e_2] = e_4,$ $[e_2, e_3] = e_5,$ $[e_1, e_4] = e_6$	$-e^1 \wedge e^5 + e^1 \wedge e^6 +$ $+ e^2 \wedge e^5 +$	$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a(a-2)}{2} & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2-a & -1 \end{pmatrix}, R \neq 0$
G₁₆	$[e_1, e_2] = e_5,$ $[e_3, e_4] = -e_5,$ $[e_1, e_3] = e_6,$ $[e_2, e_4] = e_6$	$e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^3 - e^4 \wedge e^5$	$J = e_1 \otimes e^1 - e_2 \otimes e^2 + e_3 \otimes e^3 - e_4 \otimes e^4 + e_5 \otimes e^5 -$ $- e_6 \otimes e^6 + \frac{4-a^2}{2a} e_2 \otimes e^3 + a e_4 \otimes e^1 + a e_6 \otimes e^5,$ $R \neq 0$
G₁₇	$[e_1, e_3] = e_5,$ $[e_1, e_4] = e_6,$ $[e_2, e_3] = e_6$	$e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^4$	$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a-1}{b} & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 0 \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a-1}{b} & -1 \end{pmatrix},$ $R = 0$
G₁₈	$[e_1, e_2] = e_4,$ $[e_1, e_3] = e_5,$ $[e_2, e_3] = e_6$	$\omega_1 = e^1 \wedge e^6 + \lambda e^2 \wedge e^5 +$ $+(\lambda-1) e^3 \wedge e^4,$ $\lambda \neq 0 \text{ и } 1$ $\omega_2 = e^1 \wedge e^5 + \lambda e^1 \wedge e^6 -$ $-\lambda e^2 \wedge e^5 + e^2 \wedge e^6 -$ $-2\lambda e^3 \wedge e^4, \lambda \neq 0$ $\omega_3 = -e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 +$ $+ 2e^3 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^5$	$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, J_2 = J_1,$ $J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, R = 0$
G₁₉	$[e_1, e_2] = e_4,$ $[e_1, e_4] = e_5,$ $[e_1, e_5] = e_6$	$e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^6 - e^4 \wedge e^5$	$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R \neq 0$
G₂₁	$[e_1, e_2] = e_4,$ $[e_1, e_4] = e_6,$ $[e_2, e_3] = e_6$	$e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 - e^3 \wedge e^4$	$J = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2-1}{b} & -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & -b \\ \frac{a^2-1}{b} & -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & -b \\ \frac{a^2-1}{b} & -a \end{pmatrix},$ $R \neq 0$

	Алгебра Ли	Симплектическая форма	Пара-комплексная структура
G₂₃	$[e_1, e_2] = e_5,$ $[e_1, e_3] = e_6,$	$\omega_1 = e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^4$ $\omega_2 = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^6 + e^3 \wedge e^5$ $\omega_3 = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^5 - e^3 \wedge e^6$	$J_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix},$ $J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$ $J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R = 0$
G₂₄	$[e_2, e_3] = e_5,$ $[e_1, e_4] = e_6$	$e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^4$	$J = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a^2/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, R \neq 0$
G₂₅	$[e_1, e_2] = e_6$	$e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^4$	$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & -1 \end{pmatrix}, R = 0$

Доказательство. Левоинвариантная пара-кэлерова структура – это пара (ω, J) , состоящая из симплектической формы ω и согласованной с ω интегрируемой почти пара-комплексной структуры J на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Поскольку симплектическая форма является заданной, то оператор J должен обладать следующими свойствами: $J^2 = Id$, $\omega(JX, JY) = -\omega(X, Y)$ и $[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] = 0$. Условие согласованности $\omega(JX, JY) = -\omega(X, Y)$ запишем в виде $\omega(JX, Y) + \omega(X, JY) = 0$. Пусть в базисе $\{e_1, \dots, e_6\}$ алгебры Ли симплектическая форма ω и оператор J имеют матрицы ω_{ij} и J_j^i , $J = J_j^i e_i \otimes e^j$. Тогда система уравнений для нахождения пара-кэлеровой структуры (ω, J) состоит из следующих уравнений на переменные J_j^i :

$$\begin{cases} J_k^i J_j^k = \delta_j^i, \\ \omega_{kj} J_i^k + \omega_{ik} J_j^k = 0, \\ J_i^l J_j^m C_{lm}^k - J_i^l J_m^k C_{lj}^m - J_j^l J_m^k C_{il}^m + C_{ij}^k = 0, \end{cases}$$

где δ_j^i – единичная матрица, C_{ij}^k – структурные константы алгебры Ли и индексы меняются от 1 до 6. Эта система решается при помощи СКМ Maple. Для всех алгебр Ли списка работы [11], которые не вошли в таблицу теоремы 2, указанная система уравнений не имеет действительных решений. Для алгебр Ли из таблицы теоремы 2 легко видеть, что приведенные почти пара-комплексные структуры J согласованы с симплектическими формами ω . Интегрируемость J сразу следует из того, что собственные подпространства $\mathfrak{g}^+$ и $\mathfrak{g}^-$ являются подалгебрами. Для всех алгебр Ли данного списка, за исключением **G₆**, выполняются условия теоремы 1. Поэтому соответствующие пара-кэлеровы метрики для них являются Риччи-плоскими.

Рассмотрим более подробно алгебру Ли **G₆** с симплектической формой $\omega = e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^5 - e^3 \wedge e^4$. Для почти пара-комплексной структуры

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

имеем такую последовательность идеалов: $\mathbf{a}_1(J) = Z(\mathbf{g}) = \{e_5, e_6\}$, $\mathbf{a}_2(J) = \{e_4, e_5, e_6\}$, $\mathbf{a}_3(J) = \{e_3, e_4, e_5, e_6\}$, $\mathbf{a}_4(J) = \mathbf{g}$. Поэтому J является нильпотентной. Собственные подпространства $\mathbf{g}^+$ и $\mathbf{g}^-$ образованы векторами $\{e_1, e_4, e_5\}$ и $\{e_2, e_3, e_6\}$. Легко видеть, что они являются подалгебрами. Следовательно, почти пара-комплексная структура J интегрируема. Условие согласованности $\omega(JX, JY) = -\omega(X, Y)$ очевидно выполняется. В системе Maple легко вычисляется тензор кривизны. Он имеет следующие ненулевые компоненты: $R_{1,2,1}^4 = 1$, $R_{1,2,2}^6 = 1$, $R_{1,2,3}^6 = -1$, $R_{1,3,1}^5 = -1$, $R_{1,3,2}^6 = -1$. Поэтому пара-кэлерова метрика также является Риччи-плоской.

Отметим, что наиболее общая пара-кэлерова структура для данной алгебры Ли $\mathbf{G}_6$ зависит от пяти параметров J_i^j и имеет вид:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_1^3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{J_1^3 J_3^4}{2} & J_2^4 & J_3^4 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{J_1^3 (J_2^4 + J_3^4)}{2} & J_2^5 & -J_2^4 - J_3^4 & 0 & 1 & 0 \\ J_1^6 & \frac{J_1^3 J_2^4}{2} & \frac{J_1^3 J_3^4}{2} & J_1^3 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$g_J = \begin{pmatrix} J_1^6 & \frac{J_1^3 J_2^4}{2} & \frac{J_1^3 J_3^4}{2} & J_1^3 & 0 & -1 \\ \frac{J_1^3 J_2^4}{2} & J_2^4 + J_2^5 & -J_2^4 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{J_1^3 J_3^4}{2} & -J_2^4 & -J_3^4 & -1 & 0 & 0 \\ J_1^3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Список источников

1. Benson C., Gordon C.S. Kähler and symplectic structures on nilmanifold // Topology. 1988. V. 27. P. 513–518. doi: 10.1016/0040-9383(88)90029-8
2. Cordero L.A., Fernandez M., Ugarte L. Pseudo-Kähler metrics on six-dimensional nilpotent Lie algebras // J. of Geom. and Phys. 2004. V. 50. P. 115–137. doi: 10.1016/j.geomphys.2003.12.003
3. Смоленцев Н.К. Канонические псевдо-кэлеровы метрики на шестимерных нильпотентных группах Ли // Вестник Кемеровского государственного университета. 2011. Т. 3/1, № 47: Геометрия и анализ. С. 155–168.
4. Алексеевский Д.В., Медори К., Томассини А. Однородные пара-кэлеровы многообразия Эйнштейна // Успехи математических наук. 2009. Т. 64, вып. 1 (385). С. 3–50. doi: 10.4213/im9262

5. Gray A. Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds // *Tohoku Math. J.* 1976. V. 28, No. 4. P. 601–612. doi: 10.2748/TMJ/1178240746
6. Rizza G.B. Varietà parakähleriane // *Ann. Mat. Pura Appl.* 1974. V. 98. P. 47–61.
7. Schäfer L. Conical Ricci-flat nearly Parakählerian Manifolds // *Ann. Global Anal. Geom.* 2014. V. 45, No. 1. P. 11–24.
8. Banaru M. A note on parakählerian manifolds // *Kyungpook Math. J.* 2003. V. 43, No. 1. P. 49–61.
9. Libermann P. Sur les structures presque paracomplexes // *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.* 1952. V. 234. P. 2517–2519.
10. Кобаяси Ш., Намидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М. : Наука, 1981. Т. 2. 416 с.
11. Goze M., Khakimjanov Y., Medina A. Symplectic or contact structures on Lie groups // *Differential Geom. Appl.* 2004. V. 21, No. 1. P. 41–54. doi: 10.1016/j.difgeo.2003.12.006

References

1. Benson C., Gordon C.S. (1998) Kähler and symplectic structures on nilmanifolds. *Topology.* 27(4). pp. 513–518. doi: 10.1016/0040-9383(88)90029-8.
2. Cordero L.A., Fernandez M., Ugarte L. (2004) Pseudo-Kähler metrics on six-dimensional nilpotent Lie algebras. *Journal of Geometry and Physics.* 50(1–4). pp. 115–137. doi: 10.1016/j.geomphys.2003.12.003.
3. Smolentsev N.K. (2011) Canonical pseudo-Kähler metrics on six-dimensional nilpotent Lie groups. *Vestnik Kemerovskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika – Kemerovo State University Journal of Mathematics.* 3/1(47). pp. 155–168. (arXiv:1310.5395 [math.DG])
4. Alekseevsky D.V., Medori C., Tomassini A. (2009) Homogeneous para-Kähler Einstein manifolds. *Russian Mathematical Surveys.* 64(1). pp. 1–43. doi: 10.1070/RM2009v064n01ABEH004591.
5. Gray A. (1976) Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds. *Tohoku Mathematical Journal.* 28(4). pp. 601–612. doi: 10.2748/TMJ/1178240746.
6. Rizza G.B. (1974) Varietà parakähleriane. *Annali di Matematica Pura ed Applicata.* 98. pp. 47–61.
7. Schäfer L. (2014) Conical Ricci-flat nearly para-Kähler manifolds. *Annals of Global Analysis and Geometry.* 45(1). pp. 11–24.
8. Banaru M. (2003) A note on parakählerian manifolds. *Kyungpook Mathematical Journal.* 43(1). pp. 49–61.
9. Libermann P. (1952) Sur les structures presque paracomplexes. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.* 234. pp. 2517–2519.
10. Kobayashi S. and Nomizu, K. (1963) *Foundations of Differential Geometry. Vol. 1 and 2.* New York: Interscience Publishers.
11. Goze M., Khakimjanov Y., Medina A. (2004) Symplectic or contact structures on Lie groups. *Differential Geometry and its Applications.* 21(1). pp. 41–54. doi: 10.1016/j.difgeo.2003.12.006.

Сведения об авторе:

Смоленцев Николай Константинович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики Кемеровского государственного университета, Кемерово, Россия. E-mail: smolennk@mail.ru

Information about the author:

Smolentsev Nikolay K. (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Fundamental Mathematics Department, Kemerovo State University, Kemerovo, Russia). E-mail: smolennk@mail.ru

Статья поступила в редакцию 02.12.2021; принята к публикации 12.07.2022

The article was submitted 02.12.2021; accepted for publication 12.07.2022

МЕХАНИКА

MECHANICS

Научная статья

УДК 533.697.4

doi: 10.17223/19988621/78/4

**Исследование акустических характеристик
одионой сверхзвуковой струи, истекающей
в затопленное пространство****Адилъ Арманович Аскеров¹, Анастасия Владимировна Червакова²,
Кирилл Владимирович Костюшин³**^{1, 2, 3} *Томский государственный университет, Томск, Россия*¹ *askerov121099@mail.ru*² *ch-nastya1997@mail.ru*³ *kostushink@niipmm.tsu.ru*

Аннотация. Проведены численные исследования одионой сверхзвуковой струи, истекающей в затопленное пространство. Выполнено сравнение распределения параметров в поперечном сечении струй с экспериментальными данными. Для различных степеней нерасчетности истекающей сверхзвуковой струи получены амплитудно-частотные спектры акустического излучения в точке, находящейся на удалении от среза сопла. Установлено, что максимальная амплитуда колебаний для исследуемых конфигураций струи достигается при степени нерасчетности $n = 1$ на частоте 787 Гц. Уровень максимального звукового давления составляет 150 дБ.

Ключевые слова: газовая динамика, математическое моделирование, сверхзвуковая струя, звуковое давление

Благодарности: Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России, проект № 0721-2020-0032.

Для цитирования: Аскеров А.А., Червакова А.В., Костюшин К.В. Исследование акустических характеристик одионой сверхзвуковой струи, истекающей в затопленное пространство // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 78. С. 49–59. doi: 10.17223/19988621/78/4

Investigation of acoustic characteristics of a single supersonic jet flowing into a flooded space

Adil A. Askerov¹, Anastasiya V. Chervakova², Kirill V. Kostyushin³

^{1, 2, 3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ askerov121099@mail.ru

² ch-nastya1997@mail.ru

³ kostushink@niipmm.tsu.ru

Abstract. In this paper, the acoustic characteristics of a single supersonic jet flowing from a nozzle of a rocket engine into a flooded space at different pressure ratios are studied. A system of the Favre-averaged Navier-Stokes equations is used to describe the unsteady flow of a viscous compressible heat-conducting gas in a supersonic Laval nozzle and an outflowing jet. The system is enclosed by the ideal gas law. The implementation of the physical and mathematical model and the numerical studies are carried out using the OpenFOAM Extended open platform based on the modified dbnsTurbFoam solver. A conical nozzle with an opening angle of 45° at the Mach number of 3 at the nozzle exit is considered in this study. Air is used as the working gas. Amplitude-frequency spectra of acoustic radiation at the point located at a distance from the nozzle outlet are obtained at different pressure ratios of the outflowing supersonic jet. Analysis of the amplitude-frequency characteristics of the jet under study shows that the maxima occur mainly at low frequencies. The maximum oscillation amplitude for the considered jet configurations is revealed at a pressure ratio of 1 on a frequency of 787 Hz. The maximum sound pressure level is 149 dB.

Keywords: gas dynamics, mathematical modeling, supersonic jet, sound pressure

Acknowledgments: This research was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. 0721-2020-0032).

For citation: Askerov, A.A., Chervakova, A.V., Kostyushin, K.V. (2022) Investigation of acoustic characteristics of a single supersonic jet flowing into a flooded space. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 78. pp. 49–59. doi: 10.17223/19988621/78/4

В авиационной, ракетно-космической, металлургической, химической и других отраслях промышленности возникают задачи, связанные с течением газа в сверхзвуковых струях. Для ракетно-космической техники высокий практический интерес представляет решение задач о распространении сверхзвуковых струй в атмосфере и их взаимодействии с преградами. Исследованию сверхзвуковых течений посвящен ряд экспериментальных и расчетно-теоретических работ [1, 2]. Задача о ламинарном течении вязкого газа в сверхзвуковом осесимметричном сопле и истекающей из него в полубесконечное затопленное пространство струе подробно рассмотрена в работе [3]. В работах [4, 5] проведено исследование течений в проточных трактах ракетных двигателей в зависимости от геометрии профилированного соплового блока, изучено влияние степени нерасчетности на картину

течения. Расчетно-экспериментальная работа [6] посвящена исследованию ударно-волновой структуры одиночной сверхзвуковой струи, истекающей в затопленное пространство. Результаты исследования конфигурации струи, реализуемой на режиме перерасширения со степенью нерасчетности $n = 0.57$ и числом Маха $M = 3$, представлены в виде теневых фотографий истекающей струи и профилей полного давления в продольном и поперечных сечениях струи.

Истечение сверхзвуковых струй из сопел сопровождается излучением акустических шумов с высоким уровнем звукового давления. Эти шумы насыщают окружающую среду колебаниями высокой интенсивности, что создает дополнительную нагрузку на стартовые сооружения, негативно влияет на энерго-тяговые характеристики и компоненты корпуса установки, отрицательно воздействует на персонал космодромов. Исследование механизма возникновения шума в сверхзвуковых струях представлено в работах [7–9]. В работе [10] проведено математическое моделирование акустических излучений при взаимодействии сверхзвуковой струи с преградой. В настоящее время высокий практический интерес представляет изучение взаимосвязи между режимами истечения газа и акустическими характеристиками струи.

Целью данной работы является исследование акустических характеристик одиночной сверхзвуковой струи, истекающей из сопла ракетного двигателя в затопленное пространство при различных степенях нерасчетности.

Методика расчета

Рассматривается задача течения вязкого, сжимаемого, теплопроводного газа в сверхзвуковом сопле Лавала и истекающей струе в затопленное пространство. Для описания нестационарного течения газа используется система уравнений Навье–Стокса, осредненная по Фавру [11].

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho u_j] = 0, \quad (1)$$

где ρ – плотность, кг/м^3 ; t – время, с; x_j – декартова координата, м; u_j – проекция вектора скорости потока, м/с.

Уравнение движения:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho u_i u_j + p \delta_{ij} - \tau_{ij}] = 0, \quad (2)$$

где p – давление, Па; δ_{ij} – оператор Кронекера; τ_{ij} – тензор вязких напряжений:

$$\tau_{ij} = 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right],$$

μ – коэффициент динамической вязкости, Па·с.

Уравнение сохранения энергии:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho u_j E + u_j p + q_j - u_i \tau_{ij}] = 0, \quad (3)$$

где $E = C_v T + \rho u_j^2 / 2$ – полная энергия, Дж; C_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме, Дж/К; T – температура, К; q_j – тепловой поток, Дж/(м²·с):

$$q_j = -C_p \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_j} - C_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial x_j},$$

C_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, Дж/К; μ_t – коэффициент турбулентной вязкости, Па·с.

Система уравнений (1)–(4) замыкается уравнением состояния идеального газа:

$$p = \rho RT, \quad (4)$$

где R – удельная газовая постоянная, Дж/(кг·К).

Для решения системы уравнений (1)–(4) использовалась гибридная модель турбулентности SST (во внешнем потоке используется k - ϵ модель, в пристеночной области – k - ω модель [12]).

Схема расчетной области показана на рис. 1. В качестве начальных условий задаются параметры окружающей среды. Для случая невозмущенной среды скорость, кинетическая энергия турбулентности и удельная диссипация кинетической энергии турбулентности равны нулю. В качестве граничного условия на входе в сопло ($\Gamma 1$) задаются скорость, давление, температура, кинетическая энергия турбулентности и удельная диссипация кинетической энергии турбулентности. На стенках сопла ($\Gamma 2$) используются условия прилипания, стенки полагаются теплоизолированными. Для кинетической энергии турбулентности и удельной диссипации кинетической энергии турбулентности используются пристеночные функции. На внешних границах расчетной области ($\Gamma 3$, $\Gamma 4$, $\Gamma 5$) задаются параметры окружающей среды, при достижении возмущений внешних границ используются мягкие граничные условия. На границе $\Gamma 6$ используются условия симметрии.

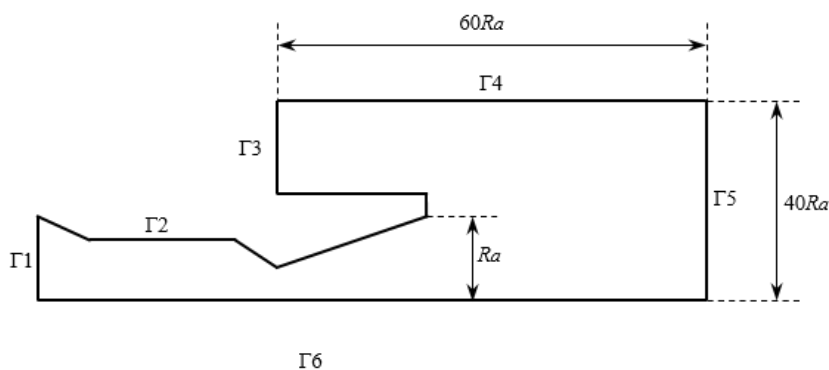


Рис. 1. Схема расчетной области:

$\Gamma 1$ – входное сечение; $\Gamma 2$ – стенка сопла; $\Gamma 3$, $\Gamma 4$, $\Gamma 5$ – внешние границы расчетной области; $\Gamma 6$ – ось симметрии; Ra – радиус среза сопла

Fig. 1. Computational domain scheme:

$\Gamma 1$ is the inlet section; $\Gamma 2$ is the nozzle wall; $\Gamma 3$, $\Gamma 4$, and $\Gamma 5$ are the external boundaries of the domain; $\Gamma 6$ is the symmetry axis; and Ra is the nozzle exit radius

Реализация физико-математической модели и численные исследования проведены с помощью открытой платформы OpenFOAM Extended на основе модифицированного решателя dbnsTurbFoam. Для определения параметров на гранях расчетных ячеек использовалось точное решение задачи Римана о распаде произ-

вольного разрыва [13]. Для повышения порядка точности по пространству использовался метод кусочно-линейной реконструкции решения с TVD ограничителем Barth and Jespersen [14]. Для повышения порядка точности по времени использовалась схема Рунге–Кутты четвертого порядка [15]. Для определения амплитудно-частотных характеристик использовался следующий алгоритм расчета:

1. Предварительный расчет до установления расхода через сверхзвуковое сопло и установления процесса истечения рабочего тела в затопленное пространство (в качестве критерия установления использовалось отношение между массовым расходом через выходное сечение сверхзвукового сопла и границами расчетной области).

2. Запись уровня давлений в фиксированных точках в расчетной области на каждом шаге интегрирования.

3. Расчет амплитудно-частотных характеристик пульсаций давления и уровня звукового давления с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье (Fast Fourier transform – FFT) [16].

Уровень звукового давления определялся как

$$L = 20 \cdot \lg \frac{p}{p_0},$$

где p – звуковое давление в рассматриваемой точке, p_0 – пороговое звуковое давление [17].

Результаты численных исследований

Для изучения взаимосвязи между режимами истечения газа и акустическими характеристиками сверхзвуковых струй проведены численные исследования струи, истекающей из сверхзвукового сопла в затопленное пространство. В расчетах использовалось коническое сопло, приведенное в экспериментальной работе [6]. Угол раствора сопла составлял $\alpha = 45^\circ$, число Маха на срезе – $M = 3$. Рабочий газ – воздух, температура на входе в сопло составляла 300 К. В качестве начальных условий во всей расчетной области были заданы параметры окружающей среды: давление $p_0 = 1$ атм, температура $T_0 = 300$ К, скорость $u_{i0} = 0$ м/с. Изменением давления на входе в сопло варьировалась степень нерасчетности. Параметрические исследования проведены для следующих значений степени нерасчетности струи: $n = 0.57; 0.7; 1.0; 1.5$. Внешняя расчетная область – цилиндр длиной 60 калибров (радиус среза сопла) и радиусом 40 калибров. Для проведения расчетов использовалась блочно-структурированная расчетная сетка. Шаг по времени составлял $1e-7$, что обеспечивает регистрацию сигнала в существующем диапазоне частот (согласно теореме Котельникова [18]).

Использовалась расчетная сетка с общим числом ячеек 101 835 (45 ячеек по радиусу сопла).

Проведена верификация разработанной методики путем сравнения численных результатов с результатами экспериментальной работы [6] для режима перерасширения со степенью нерасчетности $n = 0.57$. Результаты сравнения для градиента плотности показаны на рис. 2. Видно, что получено хорошее качественное совпадение в положении основных элементов струи. Сравнение расчетного распределения давления в поперечных сечениях струи на расстояниях от среза сопла

$x/R_a = 0.02, 1.33, 6$ с осредненным по времени давлением, полученным в эксперименте [6], представлено на рис. 3. Получено хорошее совпадение по локальным параметрам течения.

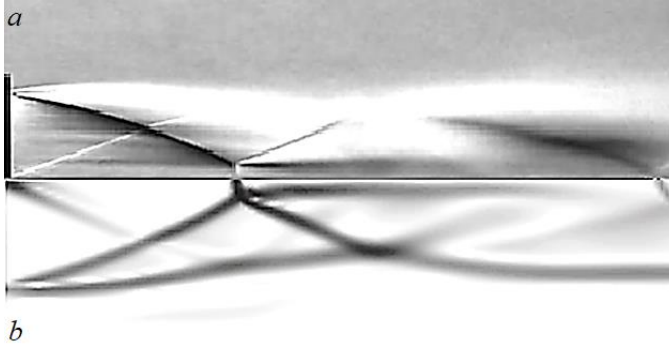


Рис. 2. Сравнение градиента плотности с экспериментальными данными [6]:
 а – Шлирен-изображения исследуемой струи; б – модуль градиента плотности

Fig. 2. Comparison of a density gradient with experimental data in [6]:
 (a) experimental data and (b) calculated results

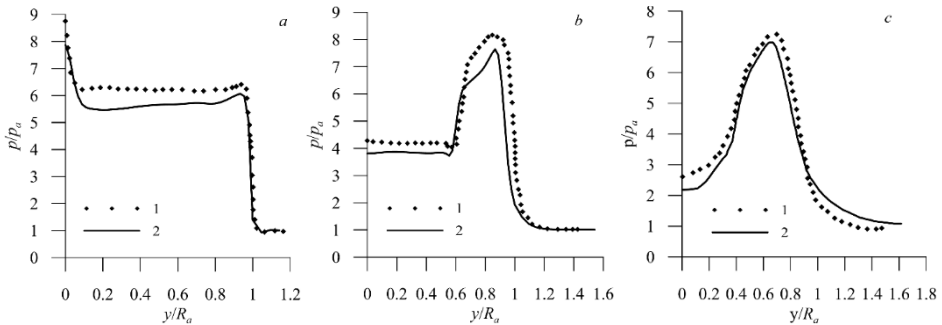


Рис. 3. Сравнение распределения давления в поперечных сечениях струи
 на расстоянии x/R_a от среза сопла:

а – $x/R_a = 0.02$; б – $x/R_a = 1.33$; в – $x/R_a = 6$

1 – эксперимент; 2 – расчет

Fig. 3. Comparison of pressure distributions in the jet cross-sections
 at a distance x/R_a from the outlet section:

$x/R_a = (a) 0.02; (b) 1.33; \text{ and } (c) 6$

Проведено исследование акустических характеристик одиночной сверхзвуковой струи, истекающей из сопла ракетного двигателя в затопленное пространство для различных степеней нерасчетности. На рис. 4–7 показаны амплитудно-частотные спектры акустического излучения струи в точке, находящейся на расстоянии 13 калибров от среза сопла и 5 калибров от оси (а) и градиент плотности истекающей струи (б) для степеней нерасчетности $n = 0.57; 0.7; 1.0; 1.5$. В таблице представлены значения амплитудно-частотных характеристик и уровней звукового давления исследуемой струи для различных степеней нерасчетности.

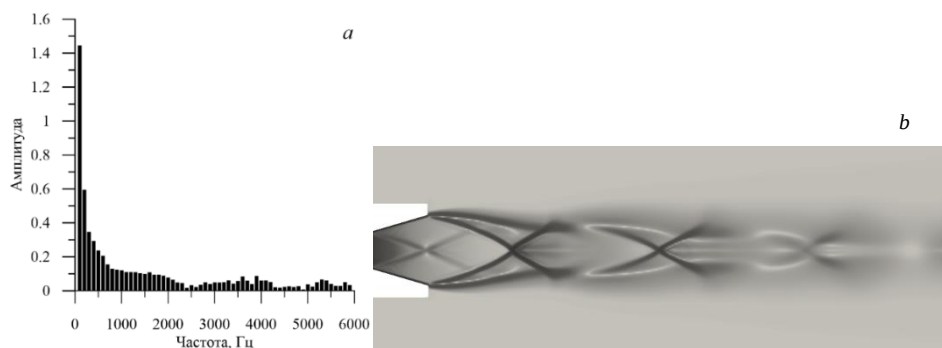


Рис. 4. Амплитудно-частотные спектры акустического излучения (a) и градиент плотности (b) истекающей струи для $n = 0.57$

Fig. 4. (a) Amplitude-frequency spectra of the acoustic radiation and (b) a density gradient of the outflowing jet at $n = 0.57$

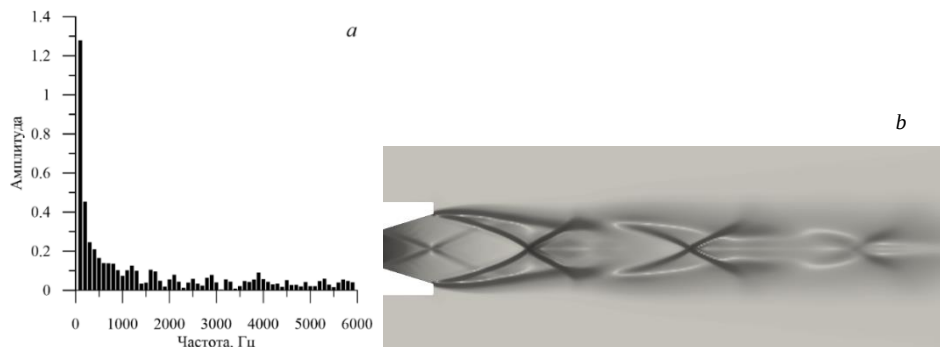


Рис. 5. Амплитудно-частотные спектры акустического излучения (a) и градиент плотности (b) истекающей струи для $n = 0.7$

Fig. 5. (a) Amplitude-frequency spectra of the acoustic radiation and (b) a density gradient of the outflowing jet at $n = 0.7$

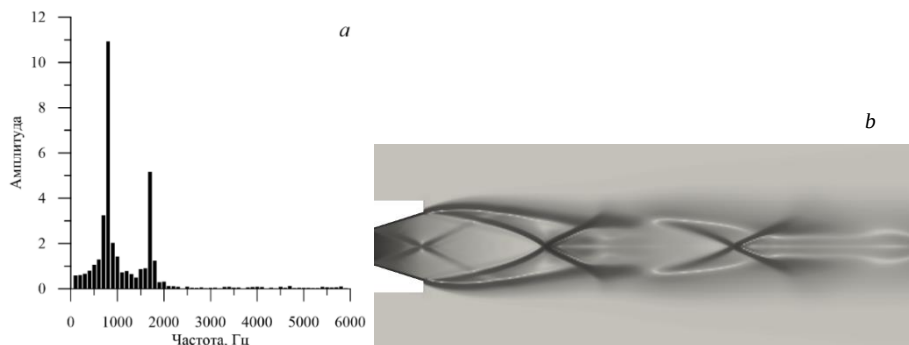


Рис. 6. Амплитудно-частотные спектры акустического излучения (a) и градиент плотности (b) истекающей струи для $n = 1$

Fig. 6. (a) Amplitude-frequency spectra of the acoustic radiation and (b) a density gradient of the outflowing jet at $n = 1$

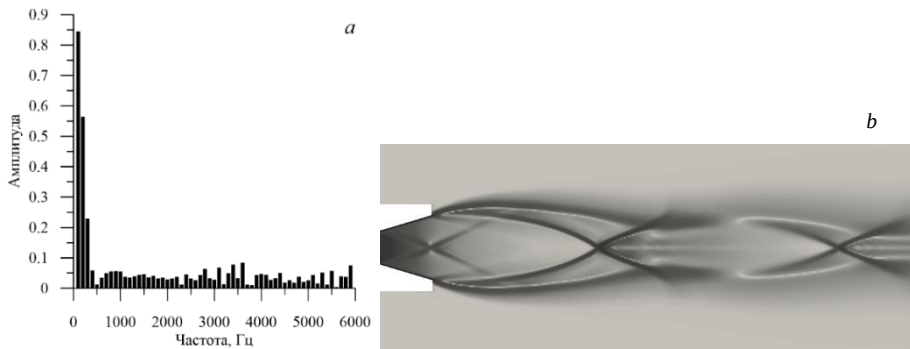


Рис. 7. Амплитудно-частотные спектры акустического излучения (а) и градиент плотности (b) истекающей струи для $n = 1.5$

Fig. 7. (a) Amplitude-frequency spectra of the acoustic radiation and (b) a density gradient of the outflowing jet at $n = 1.5$

Амплитудно-частотные характеристики исследуемой струи

n	Частота колебаний с максимальной амплитудой, Гц	Максимальная амплитуда давления, Па	Уровень звукового давления, дБ
0.57	71	1.534	111
0.7	61	2.064	110
1	787	8.978	132
1.5	108	0.944	115

Из анализа амплитудно-частотных характеристик исследуемой струи получено, что ярко выраженные пики преимущественно реализуются на низких частотах (см. рис. 4, а–7, а). С ростом степени нерасчетности от $n = 0.57$ до $n = 1$ увеличивается значение максимальной амплитуды колебаний, что в общем случае связано с повышением уровня давления на срезе сопла. Максимальная амплитуда колебаний достигается для конфигурации струи, реализуемой на расчетном режиме ($n = 1$), на частоте 787 Гц, уровень звукового давления при этом составляет 132 дБ. Для расчетного режима (в сравнении с конфигурациями струи, реализуемыми на нерасчетных режимах истечения) пики амплитуды колебаний смещаются в область более высоких частот. Для данного режима на частоте 1 930 Гц наблюдается второй максимум амплитуды, уровень звукового давления здесь составляет 140 дБ. Анализ акустических спектров для всех исследуемых степеней нерасчетности показывает, что уровень звукового давления лежит в пределах от 74 до 150 дБ.

Заключение

Выполнены численные исследования характеристик одиночной сверхзвуковой струи, истекающей в затопленное пространство для различных степеней нерасчетности. Проведено сравнение распределения параметров в поперечном сечении струи с экспериментальными данными. Для различных степеней нерасчетности истекающей сверхзвуковой струи получены амплитудно-частотные спектры акустического излучения в точке, находящейся на удалении от среза сопла. Установ-

лено, что максимальная амплитуда колебаний для исследуемых конфигураций струй достигается при степени нерасчетности $n = 1$ на частоте 787 Гц. Уровень максимального звукового давления составляет 150 дБ. Полученные данные позволяют учесть акустическое излучение при разработке методик для численных и экспериментальных исследований акустических нагрузок на этапе пуска ракет. Знание характерных частот колебаний позволяет облегчить их выделение при натурных испытаниях ракетных двигателей.

Список источников

1. Кагенов А.М., Костюшин К.В., Алигасанова К.Л., Котоногов В.А. Математическое моделирование взаимодействия составной сверхзвуковой струи с преградой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 68. С. 72–79. doi: 10.17223/19988621/68/7
2. Кагенов А.М. Численное исследование влияния струй двигательной установки космического аппарата «ЭкзоМарс» на эрозию поверхности Марса // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 2 (40). С. 71–81. doi: 10.17223/19988621/40/8
3. Ветлуцкий В.Н., Ганимедов В.Л., Мучная М.И. Исследование течения в вязкой струе, истекающей через сверхзвуковое сопло в полубесконечное затопленное пространство // Прикладная механика и техническая физика. 2009. Т. 50, № 6. С. 6–15.
4. Gross A., Weiland C. Numerical simulation of separated cold gas nozzle flows // J. Propulsion Power. 2004. V. 20, No. 3. P. 509–519. doi: 10.2514/1.2714
5. Xiao Q., Tsai H.M., Papamoschou D. Numerical investigation of supersonic nozzle flow separation // AIAA J. 2007. V. 45, No. 3. P. 532–541. doi: 10.2514/1.20073
6. Запругаев В.И., Кавун И.Н., Кундасев С.Г. Расчетно-экспериментальное исследование газодинамической структуры сверхзвуковой перерасширенной струи // Прикладная механика и техническая физика. 2010. № 4. С. 58–64.
7. Powell A. First Noise Research Interim Report: a “Schlieren” Study of Small Scale Air Jets and Some Noise Measurements on Two-inch Diameter Air Jets. Southampton : University College, 1951.
8. Powell A. On the mechanism of choked jets noise // Pros. Phys. Soc. 1953. V. 1366. P. 1039–1057. doi: 10.1088/0370-1301/66/12/306
9. Powell A. On the edgetone // J. Acoustical Society of America. 1961. V. 33, No. 4. P. 395–409. doi: 10.1121/1.1908677
10. Николин С.А., Сокол Г.И. Математическое моделирование акустических излучений при взаимодействии сверхзвуковой струи с плоской преградой // Вестник Днепровского национального университета. 2018. Т. 26, № 4. С. 73–80.
11. Глазунов А.А., Кагенов А.М., Костюшин К.В., Еремин И.В., Алигасанова К.Л., Котоногов В.А. Математическое моделирование взаимодействия одиночной сверхзвуковой струи с преградами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 63. С. 87–101. doi: 10.17223/19988621/63/8
12. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten years of industrial experience with the SST Turbulence model // Proceedings of the 4th International Symposium on Turbulence. Heat and Mass Transfer. Begell House Inc., West Redding. 2003. P. 625–632.
13. Toro E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2009. 442 p. doi: 10.1007/b79761_10
14. Barth T.J., Jespersen T.J. The Design and application of upwind schemes on unstructured meshes // AIAA Paper. 1989. No. 89. Art. 366. doi: 10.2514/6.1989-366
15. Пинчуков В.И. О неявных абсолютно устойчивых схемах Рунге–Кутты четвертого порядка // Вычислительные технологии. 2002. Т. 7, №1. С. 96–105.

16. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. М. : Радио и связь, 1985. 248 с.
17. Основы исследований и изобретательства в машиностроении : практикум : учеб. пособие / под ред. М.М. Кане. – Минск : Вышэйшая школа, 2020. 312 с.
18. Ястребов И.П. Дискретизация непрерывных сигналов во времени. Теорема Котельникова. Н. Новгород : Нижегород. гос. ун-т им. Н.И. Лобачевского, 2012. 31 с.

References

1. Kagenov A.M., Kostyushin K.V., Aligasanova K.L., Kotonogov V.A. (2020) Matematicheskoe modelirovanie vzaimodeystviya sostavnoy sverkhzvukovoy strui s pregradoy [Mathematical modeling of a supersonic twin jet interaction with an obstacle]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 68(1). pp. 72–79. doi: 10.17223/19988621/68/7.
2. Kagenov A.M. Chislennoe issledovanie vliyaniya struy dvigatel'noy ustanovki kosmicheskogo apparata «EkzoMars» na eroziyu poverkhnosti Marsa [Numerical investigation of the influence of the “Exomars” spacecraft propulsion system jets on erosion of the Mars surface]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(40). pp. 71–81. doi: 10.17223/19988621/40/8.
3. Velutskiy V.N., Ganimedov V.L., Muchnaya M.I. (2009) Issledovanie techeniya v vyazkoy strue, istekayushchey cherez sverkhzvukovoe soplo v polubeskonechnoe zatoplennoe prostranstvo [Investigation of the flow in a viscous jet flowing through a supersonic nozzle into a semi-infinite flooded space]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 50(6). pp. 6–15.
4. Gross A., Weiland C. (2004) Numerical simulation of separated cold gas nozzle flows. *Journal of Propulsion and Power*. 20(3). pp. 509–519. doi: 10.2514/1.2714.
5. Xiao Q., Tsai H. M., Papamoschou D. (2007) Numerical investigation of supersonic nozzle flow separation. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*. 45(3). pp. 532–541. doi: 10.2514/1.20073.
6. Zapryagaev V.I., Kavun I.N., Kundasev S.G. (2010) Raschetno-eksperimental'noe issledovanie gazodinamicheskoy struktury sverkhzvukovoy pererasshirennoy strui [Computational and experimental study of a gas-dynamic structure of a supersonic overexpanded jet]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*. 4(1). pp. 58–64.
7. Powell A. (1951) *First Noise Research Interim Report: A "Schlieren" Study of Small Scale Air Jets and Some Noise Measurements on Two-inch Diameter Air Jets*. Southampton: University College.
8. Powell A. (1953) On the mechanism of choked jets noise. *Proceedings of the Physical Society. Section B*. 66(12). pp. 1039–1057. doi: 10.1088/0370-1301/66/12/306.
9. Powell A. (1961) On the edgetone. *Journal of the Acoustical Society of America*. 33(4). pp. 395–409. doi: 10.1121/1.1908677.
10. Nikolin S.A., Sokol G.I. (2018) Matematicheskoe modelirovanie akusticheskikh izlucheni pri vzaimodeystvii sverkhzvukovoy strui s ploskoy pregradoy [Mathematical modeling of acoustic radiation during the interaction of a supersonic jet with a flat barrier]. *Vestnik Dneprovskogo natsional'nogo universiteta – The Bulletin of the Dneprovsk University*. 26(4). pp. 73–80.
11. Glazunov A.A., Kagenov A.M., Kostyushin K.V., Eremin I.V., Kotonogov V.A., Aligasanova K.L. (2020) Matematicheskoe modelirovanie vzaimodeystviya odinochnoy sverkhzvukovoy strui s pregradami [Mathematical modeling of the interaction of a single supersonic jet with obstacles]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 63(1). pp. 87–101. doi: 10.17223/19988621/63/8.

12. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. (2003) Ten years of industrial experience with the SST Turbulence model. *Proceedings of the 4th International Symposium on Turbulence. Heat and Mass Transfer, West Redding*. pp. 625–632.
13. Toro E.F. (2009) *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag. doi: 10.1007/b79761_10.
14. Barth T.J., Jespersen T.J. (1989) The design and application of upwind schemes on unstructured meshes. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*. 89. Article 366. doi: 10.2514/6.1989-366.
15. Pinchukov V.I. (2002) O neyavnykh absolyutno ustoychivyykh skhemakh Runge-Kutty chetvertogo poryadka [On the implicit absolutely stable fourth-order Runge–Kutta schemes]. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 7(1). pp. 96–105.
16. Nussbaumer G. (1985) *Bystroe preobrazovanie Fur'e i algoritmy vychisleniya sverto*k [Fast Fourier transform and computational algorithms for convolutions]. Moscow: Radio i svyaz'.
17. Kane M.M. (2020) *Osnovy issledovaniy i izobretatel'stva v mashinostroenii* [Fundamentals of research and invention in mechanical engineering]. Minsk: Vysheyschaya shkola.
18. Yastrebov I.P. (2012) *Diskretizatsiya nepreryvnykh signalov vo vremeni. Teorema Kotelnikova* [Discretization of continuous signals in time. The Kotelnikov theorem]. Nizhny Novgorod: Nizhegorodskiy gosudarstvennyy universitet im. N.I. Lobachevskogo.

Сведения об авторах:

Аскеров Адиль Арманович – студент кафедры прикладной аэромеханики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: askerov121099@mail.ru

Червакова Анастасия Владимировна – инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: ch-nastya1997@mail.ru

Костюшин Кирилл Владимирович – младший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: kostushink@niipmm.tsu.ru

Information about the authors:

Askerov Adil A. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: askerov121099@mail.ru

Chervakova Anastasiya V. (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ch-nastya1997@mail.ru

Kostyushin Kirill V. (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kostushink@niipmm.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 11.02.2022; принята к публикации 12.07.2022

The article was submitted 11.02.2022; accepted for publication 12.07.2022

Научная статья

УДК 531.352

doi: 10.17223/19988621/78/5

Исследование процессов в генераторе плазмы импульсного МГД-генератора на комбинированном пиротехническом топливе

Антон Геннадьевич Афонин¹, Владимир Григорьевич Бутов²,
Виктор Александрович Солоненко³, Алексей Александрович Ящук⁴,
Андрей Андреевич Якушев⁵

^{1, 2, 3, 4} Томский государственный университет, Томск, Россия

⁵ АО «ГНЦ РФ ТРИНИТИ», Троицк, Московская область, Россия

¹ aag@niipmm.tsu.ru

² bvg@niipmm.tsu.ru

³ vik@niipmm.tsu.ru

⁴ rainbow@niipmm.tsu.ru

Аннотация. Представлены результаты численного моделирования процессов в двухкамерном генераторе плазмы импульсного МГД-генератора. Генератор плазмы МГДГ состоит из газогенератора и камеры дожигания, куда подаются газогенераторный газ и сжатый воздух, в кислороде которого происходит дожигание Mg с образованием жидких частиц MgO.

Построенная математическая модель позволяет исследовать процессы в камере дожигания и получить необходимые данные для дальнейшего определения формы разгонного сопла и параметров МГД-канала.

Ключевые слова: МГД-генератор, генератор плазмы, комбинированное топливо, камера дожигания, многокомпонентное течение, течение с частицами, математическое моделирование, параметрический анализ

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности ТГУ.

Для цитирования: Афонин А.Г., Бутов В.Г., Солоненко В.А., Ящук А.А., Якушев А.А. Исследование процессов в генераторе плазмы импульсного МГД-генератора на комбинированном пиротехническом топливе // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 78. С. 60–73. doi: 10.17223/19988621/78/5

A Study of processes in a plasma generator of the pulsed MHD generator running on a combined pyrotechnic fuel

Anton G. Afonin¹, Vladimir G. Butov², Victor A. Solonenko³,
Aleksey A. Yashchuk⁴, Andrey A. Yakushev⁵

^{1, 2, 3, 4} Tomsk State University, Tomsk, Russian

⁵ Troitsk Institute for Innovation and Fusion Research, Troitsk, Russian Federation

¹ aag@niipmm.tsu.ru

² bvg@niipmm.tsu.ru

³ vik@niipmm.tsu.ru

⁴ rainbow@niipmm.tsu.ru

Abstract. This paper presents the results of numerical simulation of the processes in a two-chamber plasma generator of the pulsed MHD generator running on combustion products of a combined pyrotechnic fuel with afterburning in air oxygen. A mixture of Mg powder (a fuel) and KNO_3 powder (an oxidizer and a source of the easily ionized additive) is chosen as a pyrotechnic fuel. The considered plasma generator includes a gas generator and an afterburner. Multicomponent combustion products of the selected pyrotechnic fuel contain solid particles of MgO and gaseous Mg . Within the afterburner, the unburnt Mg is burned up in the presence of air oxygen, forming MgO liquid particles. The proposed mathematical model allows one to numerically investigate all the processes occurring in a plasma generator of an MHD generator with an afterburner and to obtain the required data for determining the shape of the accelerating nozzle and the relevant parameters for calculations in the MHD channel.

Keywords: pulsed MHD generator, plasma generator, combined fuel, afterburner, multi-component flow, multiphase flow, mathematical modeling, parametric analysis

Acknowledgments: This work was supported by the Tomsk State University Competitiveness Improvement Program.

For citation: Afonin, A.G., Butov, V.G., Solonenko, V.A., Yashchuk, A.A., Yakushev, A.A. (2022) A study of processes in a plasma generator of the pulsed MHD generator running on a combined pyrotechnic fuel. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 78. pp. 60–73. doi: 10.17223/19988621/78/5

Введение

В работе [1] показана возможность использования для импульсных МГД-генераторов экологически безопасных плазмообразующих топлив на основе горючего из металлов Mg , Al и их смесей. Эти топлива, называемые пиротехническими, применяются в виде прессованных составов (блоков), содержащих твердый окислитель, например селитру KNO_3 , являющуюся, кроме этого, источником легкоионизируемой присадки. Такие составы способны к самостоятельному горению, а для непрореагировавшего металла можно организовать дожигание его

в воздухе в двухкамерном генераторе плазмы (ГП), состоящем из газогенератора (ГГ) и камеры дожигания (КД). Топливо, предполагающее дожигание, называется комбинированным топливом (КТ) [1, 2].

В данной работе для проектирования двухкамерного генератора плазмы выбрано КТ рецептуры $(0.64 \cdot \text{Mg} + 0.35 \cdot \text{KNO}_3) + 1\%$ добавки + воздух. Добавки содержат $0.6\% \cdot \text{KF}$ и 0.4% индустриального масла с формулой $\text{C}_{71.9008}\text{H}_{195.8845}\text{O}_{1.225}$ и энтальпией образования $\Delta H = 51.045$ кДж/кг. Продукты сгорания выбранного КТ содержат свободный Mg только в газовой фазе, а конденсированная фаза представлена только твердыми частицами MgO.

Данный состав, как показано экспериментально в [1, 2], является лучшим из трех рассмотренных составов по устойчивости процесса горения КТ, истечению продуктов сгорания из газогенератора и по минимальному времени пребывания продуктов сгорания в камере дожигания до полного сгорания свободного Mg даже при коэффициенте избытка воздуха < 1 .

Конструкция генератора плазмы

При определении облика конструкции ГП и его параметров использовались данные по конструктивной схеме двухкамерного ГП модельного МГД-генератора Памир-0-КТ [1, 2], которые по подобию переносились на проектируемый ГП. Рассматриваемый ГП состоит из газогенератора, узла подачи газогенераторного газа и сжатого воздуха в камеру дожигания и самой камеры дожигания (рис. 1). В газогенераторе используется гильзованный заряд КТ указанного выше состава с плотностью ≈ 1700 кг/м³. Авторы [1, 2] экспериментально определили, что скорость горения этого КТ составляет 50 мм/с при давлении 5 МПа, что можно использовать для оценки времени горения заряда КТ в проектируемом ГП.

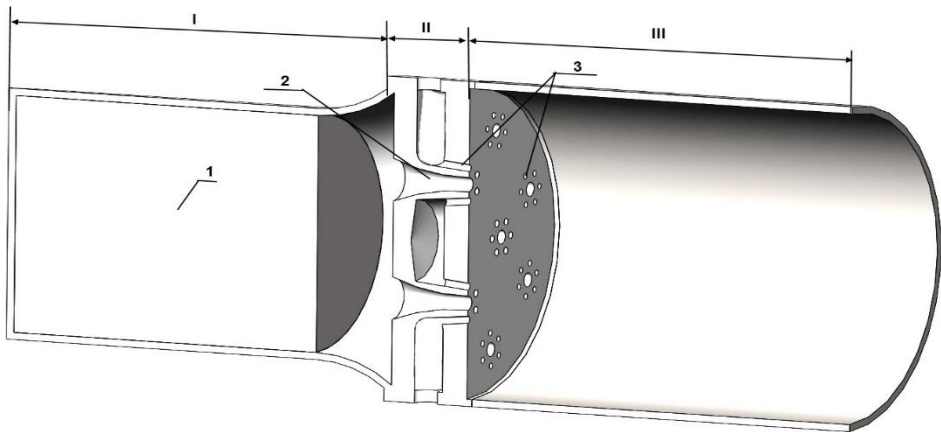


Рис. 1. Конструктивная схема генератора плазмы: I – газогенератор; II – узел подачи в КД газогенераторного газа и сжатого воздуха; III – камера дожигания; 1 – заряд КТ;

2 – сопла подачи продуктов сгорания КТ; 3 – сопла подачи сжатого воздуха
Fig. 1. Structural design of a plasma generator: I – gas generator; II – unit for gas and air supply to the afterburner; III – afterburner; (1) combined fuel charge; (2) injectors of combined fuel combustion products; and (3) compressed air injectors

Узел подачи в камеру дожигания газогенераторного газа (оставшийся газообразный Mg, твердые частицы MgO и другие компоненты), а также сжатого воздуха должен обеспечивать однородность поля скоростей и концентраций в камере дожигания при ее минимальной длине. Сам узел подачи представляет собой плоскую головку (по аналогии с ЖРД) с сотовым расположением сопел для истечения продуктов сгорания КТ и сжатого воздуха (окислителя): двенадцать сопел для подачи газогенераторного газа, вокруг каждого из них расположены шесть сопел для подачи сжатого воздуха (см. рис. 1). Размеры сопел и другие конструктивные размеры ГП были определены расчетным путем для заданных основных параметров МГД-канала.

Расчет параметров газогенератора и камеры дожигания

Значения параметров генератора плазмы определяются по выходным характеристикам МГД-канала, облик и параметры которого, в свою очередь, определяются по параметрам на выходе камеры дожигания. Таким образом, расчет ГП проводится следующим образом.

1. Для рассматриваемого состава КТ проводится расчет основных характеристик МГД-канала в соответствии с методикой [3, 4]. Задается осредненное по площади сечения на входе в МГД-канал число Маха M_1 . Для предварительно выбранных давления и температуры продуктов сгорания КТ на выходе КД и числа M_1 проводится расчет термодинамических и газодинамических параметров на входе в МГД-канал с использованием пакета прикладных программ «Плазма» [5]. После задания значений двух опорных параметров (например, электрической мощности МГД-генератора и полной силы тока) определяются габаритные характеристики МГД-канала и магнитной системы, а также определяется массовый расход продуктов сгорания $\dot{m}$ на его входе.

2. Подбираются давление и температура в газогенераторе для осуществления послыйного горения и образования газогенераторного газа с расходом, согласованным со значением полного расхода $\dot{m}$ в МГД-генераторе и расходом воздуха, поступающего в камеру дожигания, величина которого определяется заданием коэффициента избытка окислителя α .

3. После выбора конструктивных параметров ГП, разгонного сопла и МГД-канала возможно проведение расчетов характеристик с использованием полных моделей процессов в МГД-генераторе.

В камере дожигания рассматривается многокомпонентное двухфазное турбулентное течение газа и полидисперсных твердых и жидких частиц MgO. Параметрические расчеты проведены с использованием конечно-объемной модели в программном комплексе ANSYS CFX. Предлагаемая модель течения позволяет проводить комплексные расчеты течения двухфазной многокомпонентной смеси в полной постановке с учетом пространственного турбулентного характера течения, протекания равновесных химических реакций между компонентами газовой смеси, процесса перехода частиц MgO из твердого в жидкое состояние, тепловых процессов в камере дожигания.

Термодинамические параметры газогенераторного газа на входе КД определялись в приближении термодинамического равновесия с помощью программы «Плазма» [5]. Сравнение полученных результатов с аналогичными расчетами в программах «Терра» [6, 7] и CEA [8, 9] показало удовлетворительное совпадение. В отличие от программ «Терра» и CEA, «Плазма» позволяет рассчитать электро-

проводность и подвижность электронов продуктов сгорания плазменных топлив, причем точность расчетов подтверждена экспериментальными испытаниями на созданных к настоящему времени импульсных МГД-генераторах.

На входе в КД (см. рис. 1, II) задавались расходы газовой смеси определенного состава с частицами, поступающей из сопел 2 (с температурой 2 176 К), и воздуха (с температурой 300 К), подаваемого через сопла 3 (см. рис. 1). Массовые доли основных компонентов газогенераторного газа, поступающего из ГГ в камеру дожигания, представлены в табл. 1.

Таблица 1

Состав основных компонентов газогенераторного газа

Вещества	MgO(тв)	Mg(r)	K	N ₂	KCN	K ₂	Mg ₂	Mg ₃ N ₂	KF	MgF
Массовые доли	0.419	0.378	0.122	0.044	0.017	0.005	0.005	0.004	0.003	0.002

Температура на внутренней стенке цилиндрической камеры дожигания, покрытой кварцевой керамикой, принималась равной 1 600°C.

В модели для совместного описания течения газовой смеси с частицами выбран дискретно-траекторный подход Эйлера–Лагранжа [10–15], в котором для частиц дисперсной фазы используется подход Лагранжа, а для газовой фазы – подход Эйлера.

Для описания турбулентного течения газовой фазы используются эйлеровы переменные, $i = 1, 2, 3$. Течение в данной точке пространства во времени характеризуется вектором скорости $\mathbf{U}$ с компонентами u_i , а также термодинамическими параметрами: давлением p , плотностью газовой смеси ρ , температурой T .

Полидисперсный ансамбль твердых или жидких частиц дисперсной фазы характеризуется скоростями $\mathbf{V}_j$ с компонентами v_{ij} , температурой T_j , распределенной плотностью $\rho_{sj} = n_{sj}(\mathbf{x}, t) \cdot m_j$, массой m_j и концентрацией n_{sj} частиц j -й фракции, $j = 1, \dots, N$.

Двухфазное течение газа с частицами в камере дожигания описывается на основе законов сохранения массы, импульса, энергии и числа атомов. Уравнение неразрывности для осредненных по времени величин (здесь и далее подразумевается, что по повторяющимся индексам проводится суммирование):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) = Q, \quad (1)$$

где Q – общая массовая скорость расходования и появления газовых компонент в процессе химических превращений.

Уравнения сохранения импульса:

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^N C_{Rj} \rho_{sj} (v_{ij} - u_i) + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k}, \quad (2)$$

где C_{Rj} – коэффициент силового взаимодействия между газовой фазой и частицами.

Тензор вязких напряжений без учёта влияния градиентов давления имеет вид:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k},$$

где μ – динамическая вязкость, δ_{ij} – символ Кронекера.

Уравнение сохранения энергии:

$$\frac{\partial(\rho h_0 - p)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k h_0) = \frac{\partial}{\partial x_k}(u_i \tau_{ik}) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) + \sum_{j=1}^N C_{Lj} \rho_j (T_j - T), \quad (3)$$

где $h_0 = h + 0.5 U^2$ – полная энтальпия смеси, λ – коэффициент теплопроводности газовой смеси, C_{Li} – коэффициент теплового взаимодействия между газовой фазой и частицами.

Уравнения движения и энергии для частиц j -й фракции, записанные вдоль траектории частиц, имеют вид:

$$m_j \frac{dv_{ij}}{dt} = C_{Rj} \rho_{sj} (v_{ij} - u_i)^2, \quad m_j c_s \frac{dT_j}{dt} = C_{Lj} (T_j - T) + l_m \frac{dm_j}{dt} + \varepsilon \pi d_j^2 (\pi I - \sigma n^2 T_j^4), \quad (4)$$

где c_s – теплоемкость, l_m – удельная теплота образования частиц.

Коэффициенты, C_{Rj} и C_{Lj} , имеющие вид $C_{Rj} = 0.5 C_d A_{pj}$ и $C_{Lj} = \pi d_j \lambda Nu$, определяются из решений модельных задач или из результатов экспериментов на специально созданных стендах [10, 12–15]. C_d – коэффициент сопротивления частицы, d_j и A_{pj} – диаметр и площадь поперечного сечения частиц j -й фракции соответственно, Nu – число Нуссельта, ε – коэффициент черноты частиц, I – интенсивность излучения, σ – постоянная Стефана–Больцмана, n – показатель преломления среды (в расчетах брался равным 1).

Уравнение неразрывности для частиц j -й фракции имеет вид [10, 12–15]:

$$\frac{\partial \rho_{sj}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho_{sj} v_{jk}) = \sum_{l=1}^N J_{lj}, \quad (5)$$

где J_{lj} – интенсивность обмена массой между l -й и j -й фракциями за счет столкновений частиц.

Энтальпия h газовой смеси выражается через удельные энтальпии компонентов h_k , $k = 1, 2, \dots, K$, зависящие от температуры, следующим образом:

$$h = \sum_{k=1}^K Y_k h_k(T), \quad h_k(T) = h_k^0 + \int_0^T c_{pk}(T) dT,$$

где Y_k – массовая доля; c_{pk} – удельная теплоемкость; h_k^0 – стандартная теплота образования k -го компонента смеси.

Уравнение состояния смеси газов:

$$p = \rho R T \sum_{k=1}^K \frac{Y_k}{M_k}, \quad (6)$$

где M_k – молярная масса k -той компоненты смеси, R – универсальная газовая постоянная.

Для описания турбулентного течения использована хорошо известная SST-модель Ментера [16, 17].

Уравнения сохранения массы компонентов газовой смеси имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Y_k) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho u_i Y_k - \rho D \frac{\partial Y_k}{\partial x_i} \right) = \omega_k. \quad (7)$$

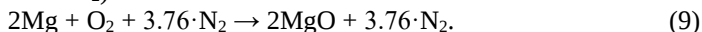
где D – коэффициент диффузии; ω_k – массовая скорость образования (расходования) в ходе химической реакции. Диффузионный поток компонентов смеси опи-

сывается законом Фика. Считая, что коэффициент диффузии D одинаков для всех компонентов смеси (бинарная модель), закон Фика имеет вид:

$$\rho_k \eta_{ki} = -\rho D \frac{\partial Y_k}{\partial x_i}, \quad (8)$$

где η_{ki} – скорость диффузии k -го компонента смеси в направлении оси координат i .

В камере дожигания протекает химическая реакция сгорания магния в кислороде воздуха ($0.21\text{O}_2 + 0.79\text{N}_2$):



Для моделирования химической реакции (9) в КД использовался подход, основанный на EDM-методе [18]. Допустимость такого подхода объясняется следующими факторами: высокой реакционной способностью магния в реакции с кислородом, высокой температурой процесса горения в КД (от 2 100 К на входе до 3 700 К на выходе), небольшой скоростью потока в КД (< 100 м/с), пренебрежимо малой по сравнению со скоростью горения газообразного магния. При расчете считалось, что порция магния и воздуха (в стехиометрическом отношении) мгновенно превращается в парообразный оксид магния, который в зависимости от параметров газовой смеси в окрестности появляющихся частиц заменялся либо жидкими, либо твердыми частицами.

В [1, 2] в ГП модельного МГД-генератора Памир-0-КТ экспериментально определено распределение массовых долей частиц MgO по размерам, которое имеет одномодальный вид (рис. 2). Масса порции оксида магния, появившаяся в результате реакции (9), делится на добавки к массам фракций так, чтобы их массовые доли были такими же, как и в распределении на рис. 2. Справедливость такого допущения опирается на сотовое расположение подачи газогенераторного газа и воздуха в камеру дожигания, т.е., можно считать, приближенно выполняется правило аддитивности, и проектируемая камера дожигания есть сумма камер дожигания МГД-генератора Памир-0-КТ. Поэтому распределение мольных долей, представленных на рис. 2, задавалось в процессе расчетов.

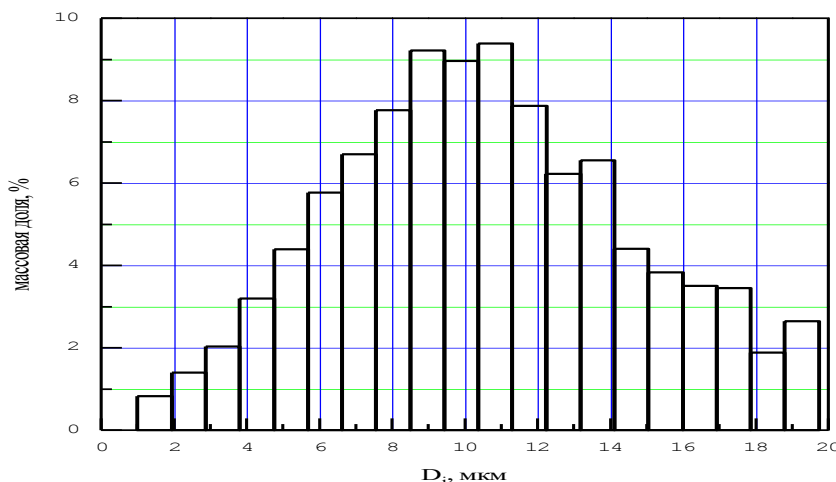


Рис. 2. Распределение массовых долей частиц MgO по диаметру [1, 2]

Fig. 2. Diameter distribution of mass fractions of MgO particles [1, 2]

Для расчета сгорания в КД поступающего из газогенератора газообразного Mg необходимо определить потребное количество воздуха. Согласно таб. 1 в КД на 1 кг газогенераторного газа поступает $m_{Mg} = 0.378$ кг газообразного Mg. Для его сгорания по реакции (9) требуется 0.126 кг O_2 . По определению коэффициент избытка окислителя (воздуха) [19]

$$\alpha = \frac{\dot{m}_f}{v_o \dot{m}_o}, \quad (10)$$

где $\dot{m}_f, \dot{m}_o$ – массовые расходы газогенераторного газа и окислителя соответственно. Стехиометрический коэффициент v_o в нашем случае определяется количеством окислителя, необходимого при стехиометрическом сжигании газообразного Mg в 1 кг газогенераторного газа. Таким образом, для реакции (9) имеем

$$v_o = \frac{\mu_{O_2}}{2 \cdot \mu_{Mg}} \cdot \frac{m_{Mg}}{0.21}, \quad (11)$$

где μ_{O_2} и μ_{Mg} – молярные массы кислорода и магния, 0.21 – массовая доля кислорода в воздухе. Общий расход продуктов сгорания комбинированного топлива из ГП $\dot{m} = \dot{m}_f + \dot{m}_o$ определяется для заданной мощности МГД генератора. После задания величины коэффициента избытка окислителя α из (10) и (11) и $\dot{m}$ определяются расходы $\dot{m}_f$ и $\dot{m}_o$, диаметр и длина КД, диаметры сопел для газогенераторного газа и воздуха.

Особенностью течения в КД является смешение поступающих в нее (см. рис. 1) воздуха и газогенераторного газа и протекание реакции (9) с образованием твердых или жидких частиц в зависимости от условий. Твердые частицы MgO , втекающие в КД из ГТ, за счет поступления теплоты от реакции (9) могут расплавляться и покидать КД в жидком состоянии. Для учета всех этих эффектов в расчетах использовалась зависимость теплоемкости частиц от температуры, учитывающая фазовый переход [20].

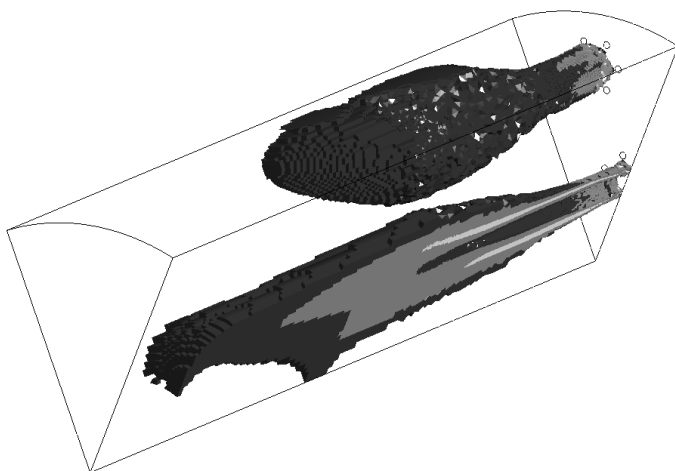


Рис. 3. Области с различной удельной скоростью химической реакции (9)
Fig. 3. Zones with different specific rates of chemical reaction (9)

На рис. 3 показаны области, где происходит реакция (9), и, соответственно, зоны, где появляются частицы MgO . Различным цветом показаны зоны с разной удельной скоростью химической реакции: темным – до $100 \text{ кг/м}^3/\text{с}$, серым – до $1000 \text{ кг/м}^3/\text{с}$, светлым – до $10000 \text{ кг/м}^3/\text{с}$.

Таблица 2

Характеристики МГД-канала с электрической мощностью 17 МВт

M_1	γ	P_0 , МПа	T_0 , К	μ_{e1} , Тл ⁻¹	σ_{01} , См/м	K_y	B , Тл	L_k , м	a_1 , м	h_1 , м	a_2, h_2 , м	v_o	$\dot{m}$, кг/с	$\dot{m}_o$, кг/с	$\dot{m}_f$, кг/с
2.7	1.064	7.0	3 700	0.17	67.74	0.75	2.1	2.28	0.166	0.21	0.263	1.07	27.58	13.3	14.28

В табл. 2 представлены характеристики МГД-канала с электрической мощностью 17 МВт на продуктах сгорания КТ, построенного по методике [3]. Здесь γ – показатель адиабаты, P_0 , T_0 – давление и температура на выходе КД, μ_{e1} , σ_{01} – подвижность электронов и электропроводность продуктов сгорания на входе в МГД-канал, K_y – коэффициент нагрузки МГД-канала, B – магнитная индукция, L_k – длина МГД-канала, a_1 , h_1 – расстояние между плоскими изоляторными и электродными стенками на входе МГД-канала; a_2 , h_2 – то же на выходе МГД-канала. В табл. 2 приведены значения $\dot{m}$, $\dot{m}_f$ и $\dot{m}_o$, рассчитанные по формулам (10) и (11) для $\alpha = 1$.

Результаты расчетов

Результаты расчетов процессов в камере дожигания показаны на рис. 4–8. Область течения визуализируется в сегменте 1/12 объема камеры.

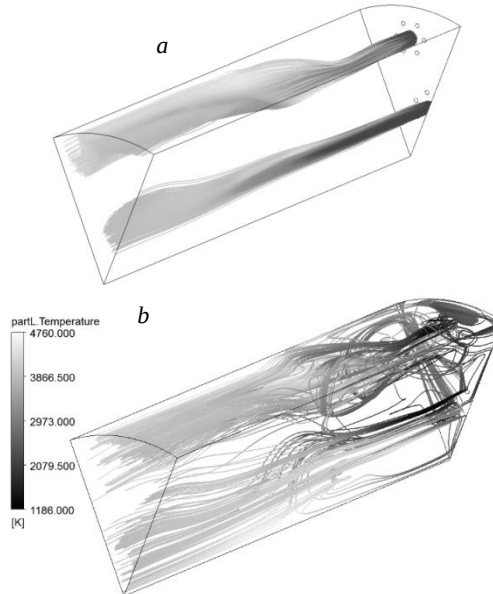


Рис. 4. Траектории движения частиц и их температура: (а) – частицы диаметром $\geq 10 \text{ мкм}$, поступающие из ГГ, (б) – частицы диаметром $< 10 \text{ мкм}$, появляющиеся в КД

Fig. 4. Trajectories and temperature: (a) particles with a diameter $\geq 10 \text{ }\mu\text{m}$ leaving the gas generator, (b) particles with a diameter $< 10 \text{ }\mu\text{m}$ occurring in the afterburner

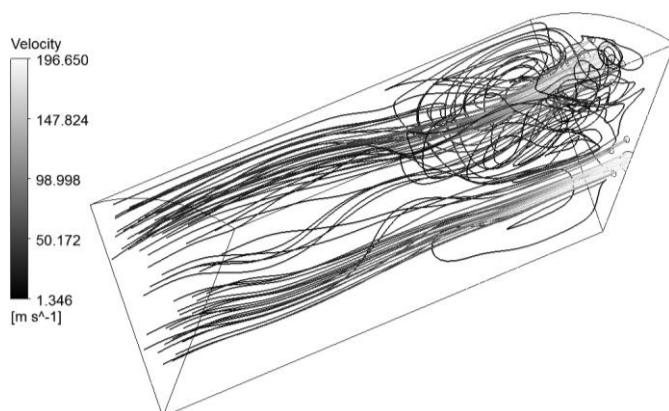


Рис. 5. Линии тока газа и его скорость
Fig. 5. Streamlines and velocity of the gas

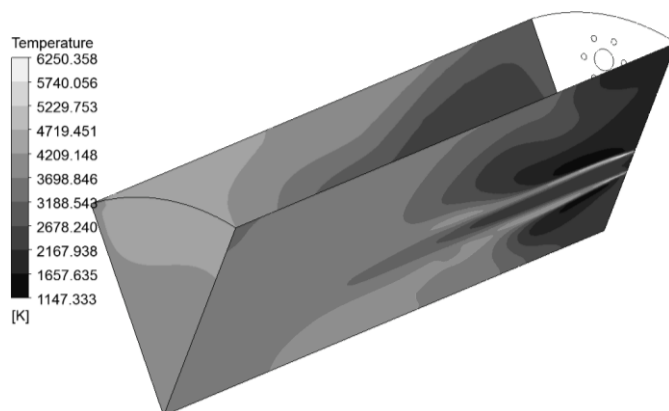


Рис. 6. Распределение температуры газа в плоскостях симметрии КД
Fig. 6. Gas temperature distribution along the afterburner symmetry planes

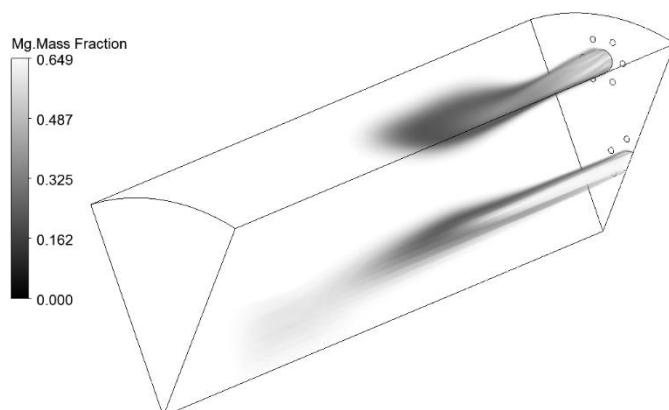


Рис. 7. Массовая доля газообразного Mg в КД
Fig. 7. Mass fraction of gaseous Mg in the afterburner



Рис. 8. Область присутствия газообразного Mg

Fig. 8. Area with gaseous Mg

На рис. 8 темным цветом показана область, где массовая доля газообразного Mg меньше 0.1%, что говорит о законченности реакции (9) в КД заданной длины.

Выводы

Построена физико-математическая модель процессов в двухкамерном генераторе плазмы импульсного МГД-генератора, работающего на продуктах сгорания комбинированного топлива на основе Mg и окислителя KNO_3 с дожиганием свободного магния в кислороде воздуха. В камере дожигания для описания течения газовой смеси с частицами выбран дискретно-траекторный подход Эйлера–Лагранжа, в котором для частиц используется подход Лагранжа, а для газовой фазы – подход Эйлера. Анализ процессов в камере дожигания проводится на основе законов сохранения массы, импульса, энергии и числа атомов. Для описания турбулентного течения используется известная SST-модель Ментера.

На основе построенной физико-математической модели разработана методика расчета габаритных и режимных параметров двухкамерного генератора плазмы, работающего на продуктах сгорания комбинированного топлива. Реализованная физико-математическая модель позволяет проводить:

- комплексные расчеты течения двухфазной многокомпонентной смеси с учетом пространственного турбулентного характера протекания равновесных химических реакций между компонентами газовой смеси и реакции сгорания газообразного Mg в кислороде воздуха;
- расчеты процесса перехода частиц MgO из твердого в жидкое состояние и тепловых процессов в камере дожигания.

Параметрические расчеты генератора плазмы импульсного МГД-генератора с электрической мощностью 17 МВт проводились с использованием конечно-объемной модели в программном комплексе ANSYS CFX и с использованием экспериментальных данных, полученных при испытаниях МГД-генератора Памир-0-КТ.

Список источников

1. Дегтев Ю.Г., Догадаев Р.В., Клычков В.И. и др. Исследование свойств плазмы продуктов сгорания пиротехнических (металлических) горючих в воздухе // Доклады РАН. 1995. Т. 340, № 6. С. 768–771.
2. Дегтев Ю.Г., Догадаев Р.В., Иваненко А.А. и др. Экспериментальные и численные исследования плазмы продуктов сгорания пиротехнического горючего в воздухе // Теплофизика высоких температур. 2006. Т. 44, № 4. С. 494–502. doi: 10.1007/s10740-006-0061-8

3. Афонин А.Г., Бутов В.Г., Панченко В.П. и др. Импульсный магнетогидродинамический генератор большой мощности на твердом (пороховом) топливе нового поколения // Прикладная механика и техническая физика. 2018. № 6. С. 75–87. doi: 10.15372/PMTF20180608
4. Велихов Е.П., Афонин А.Г., Бутов В.Г. и др. Импульсный МГД-генератор нового поколения // Доклады РАН. 2019. Т. 486, № 2. С. 178–183. doi: 10.31857/S0869-56524862178-183
5. Чернов Ю.Г., Сахаров Б.Б., Веретенков В.Ю. Пакет прикладных программ «Плазма» : препринт № 3522. М. : ИАЭ, 1981.
6. Трусов Б.Г. Программная система «Терра» для моделирования фазовых и химических равновесий в плазмохимических процессах // Труды III международного симпозиума по теоретической и прикладной плазмохимии. Иваново, 2002. С. 217–220.
7. Ватолин Н.А., Моисеев Г.К., Трусов Б.Г. Термодинамическое моделирование в высокотемпературных неорганических системах. М. : Металлургия, 1994. 352 с.
8. Gordon S., McBride B.J. Computer program for calculation of complex chemical equilibrium compositions and applications. I. Analysis. NASA Reference Publication 1311. 1994.
9. Gordon S., McBride B.J. Computer program for calculation of complex chemical equilibrium compositions and applications. II. Users manual and program description. NASA Reference Publication 1311. 1996.
10. Нигматуллин Р.И. Динамика многофазных сред. М. : Наука, 1987. Ч. 1. 464 с.
11. Турбулентные течения реагирующих газов : пер. с англ. / под ред. П. Либби, Ф. Вильямса. М. : Мир, 1983. 328 с.
12. Стернин Л.Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М. : Машиностроение, 1974. 212 с.
13. Стернин Л.Е., Маслов Б.Н., Шрайбер А.А., Подвысоцкий А.М. Двухфазные моно и полидисперсные течения газа с частицами. М. : Машиностроение, 1980. 172 с.
14. Стернин Л.Е., Шрайбер А.А. Многофазные течения газа с частицами. М. : Машиностроение, 1994. 320 с.
15. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Течения газа с частицами. М. : Физматлит, 2008. 600 с.
16. Menter F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA-Journal. 1994. V. 32, No. 8. P. 1598–1605. doi: 10.2514/3.12149
17. Vieser W., Esch T., Menter F. Heat transfer predictions using advanced two-equation turbulence models // CFX Validation Report 10/0602. AEA Technology, 2002. P. 1–69.
18. Vasquez E.R., Eldredge T. Process modeling for hydrocarbon fuel conversion // Advances in Clean Hydrocarbon Fuel Processing Science and Technology. 2011. P. 509–545. (Woodhead Publishing Series in Energy). doi: 10.1533/9780857093783.5.509
19. Щетинков Е.С. Физика горения газов. М. : Наука, 1965. 740 с.
20. Burcat A., Ruscic B. Third millennium ideal gas and condensed phase thermochemical database for combustion (with update from active thermochemical tables). Technical Report ANL-05/20. Argonne : Argonne National Lab, 2005. doi: 10.2172/925269

References

1. Degtev Yu.G., Dogadaev R.V., Klychkov V.I., Panchenko V.P., Yakushev A.A. (1995) Issledovanie svoystv plazmy produktov sgoraniya pirotekhnicheskikh (metallicheskikh) goryuchikh v vozdukh [Investigation of plasma properties in combustion products of pyrotechnic (metal) fuels in the air]. *Doklady RAN*. 340(6). pp. 768–771.
2. Degtev Yu.G., Dogadaev R.V., Ivanenko A.A., Panchenko V.P., Yakushev A.A. (2006) Experimental and numerical investigations of plasma of products of combustion of pyrotechnic fuel in air. *High Temperature*. 44(4). pp. 487–496. doi: 10.1007/s10740-006-0061-8.
3. Afonin A.G., Butov V.G., Panchenko V.P., Sinyayev S.V., Solonenko V., Shvetsov G.A., Yakushev A.A. (2018) Powerful pulsed magnetohydrodynamic generator fueled by a solid

- (powder) propellant of a new generation. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 59(6). pp. 1024–1035. doi: 10.1134/S0021894418060081.
4. Velikhov E.P., Afonin A.G., Butov V.G., Sinyayev S.V., Solonenko V.A., Panchenko V.P., Yakushev A.A., Shvetsov G.A. (2019) A new generation pulsed MHD generator. *Doklady Physics*. 64(5). pp. 238–243. doi: 10.1134/S1028335819050082.
 5. Chernov Yu.G., Sakharov B.B., Veretenov V.Yu. (1981) *Paket prikladnykh programm «Plazma»* ["Plasma" application package]. Preprint № 3522. Moscow: IAE.
 6. Trusov B.G. (2002) Programmnaya sistema «Terra» dlya modelirovaniya fazovykh i khimicheskikh ravnovesiy v plazmokhimicheskikh protsessakh ["Terra" software system for modeling phase and chemical equilibria in plasma-chemical processes]. *Proceedings of the 3^d International Symposium on Theoretical and Applied Plasma Chemistry*. Ivanovo. pp. 217–220.
 7. Vatolin N.A., Moiseev G.K., Trusov B.G. (1994) *Termodinamicheskoe modelirovanie v vysokotemperaturnykh neorganicheskikh sistemakh* [Thermodynamic modeling in high-temperature inorganic systems]. Moscow: Metallurgiya.
 8. Gordon S., McBride B.J. (1994) *Computer Program for Calculation of Complex Chemical Equilibrium Compositions and Applications. I. Analysis*. NASA Reference Publication 1311.
 9. Gordon S., McBride B.J. (1996) *Computer Program for Calculation of Complex Chemical Equilibrium Compositions and Applications. II. Users Manual and Program Description*. NASA Reference Publication 1311.
 10. Nigmatulin R.I. (1987) *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of multiphase media]. Moscow: Nauka.
 11. Libby P.A., Williams F.A. (1980) *Turbulent Reacting Flows*. New York: Topics in Applied Physics.
 12. Sternin L. E. (1974) *Osnovy gazodinamiki dvukhfaznykh techeniy v soplakh* [Fundamentals of gas dynamics in two-phase nozzle flows]. Moscow: Mashinostroenie.
 13. Sternin L.E., Maslov B.P., Shrayber A.A., Podvysotskiy A.M. (1980) *Dvukhfaznye mono i polidispersnye techeniya gaza s chastitsami* [Two-phase mono- and polydispersed flows of gas with particles]. Moscow: Mashinostroenie.
 14. Sternin L.E., Shrayber A.A. (1994) *Mnogofaznye techeniya gaza s chastitsami* [Multiphase flows of gas with particles]. Moscow: Mashinostroenie.
 15. Volkov K.N., Emel'yanov V.N. (2008) *Techeniya gaza s chastitsami* [Flows of gas with particles]. Moscow: Fizmatlit.
 16. Menter F.R. (1994) Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA-Journal*. 32(8). pp. 1598–1605. doi: 10.2514/3.12149.
 17. Vieser W., Esch T., Menter F. (2002) *Heat Transfer Predictions Using Advanced Two-Equation Turbulence Models*. CFX Validation Report 10/0602. AEA Technology. pp. 1–69.
 18. Vasquez E.R., Eldredge T. (2011). Process modeling for hydrocarbon fuel conversion. *Advances in Clean Hydrocarbon Fuel Processing Science and Technology*. pp. 509–545. doi: 10.1533/9780857093783.5.509.
 19. Shchetnikov E.S. (1965) *Fizika goreniya gazov* [Gas combustion physics]. Moscow: Nauka.
 20. Burcat A., Ruscic B. (2005) *Third Millennium Ideal Gas and Condensed Phase Thermochemical Database for Combustion (with Update from Active Thermochemical Tables)*. Technical Report ANL-05/20. Argonne: Argonne National Lab. doi: 10.2172/925269.

Сведения об авторах:

Афонин Антон Геннадьевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории оптимизации Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: aag@niipmm.tsu.ru

Бутов Владимир Григорьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом математической физики Научно-исследовательского института при-

кладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия.
E-mail: bvg@niipmm.tsu.ru

Солоненко Виктор Александрович – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией оптимизации Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, г. Томск, Россия. E-mail: vik@niipmm.tsu.ru

Ящук Алексей Александрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории оптимизации Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: rainbow@niipmm.tsu.ru

Якушев Андрей Андреевич – старший научный сотрудник АО «ГНЦ РФ ТРИНИТИ», Троицк, Московская область, Россия.

Information about the authors:

Afonin Anton G. (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: aag@niipmm.tsu.ru

Butov Vladimir G. (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bvg@niipmm.tsu.ru

Solonenko Victor A. (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vik@niipmm.tsu.ru

Yashchuk Aleksey A. (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: rainbow@niipmm.tsu.ru

Yakushev Andrey A. (Troitsk Institute for Innovation and Fusion Research, Troitsk, Russian Federation).

Статья поступила в редакцию 14.03.2022; принята к публикации 12.07.2022

The article was submitted 14.03.2022; accepted for publication 12.07.2022

Научная статья

УДК 531, 544.452

doi: 10.17223/19988621/78/6

К вопросу о моделировании разрушения оксидной пленки при воспламенении частиц алюминия

Валерий Александрович Бабук¹, Никита Леонидович Будный²

^{1,2} Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ»
им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург, Россия

¹ babuk_va@mail.ru

² budnyi_nl@voenmeh.ru

Аннотация. Состояние защитной оксидной пленки существенно влияет на кинетику окисления алюминия, в связи с чем вопрос нарушения защитных свойств пленки при ее разрушении оказывается принципиально важным для моделирования воспламенения частиц алюминия. В работе рассматриваются предпосылки и проблематика моделирования разрушения оксидной пленки при воспламенении частиц алюминия. Исследуются разработанные авторами подходы к моделированию. Выполнен анализ разработанных моделей. Показано качественное соответствие результатов моделирования и экспериментальных данных.

Ключевые слова: воспламенение, алюминий, оксид алюминия, разрушение, кинетика, окисление

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-19-00044.

Для цитирования: Бабук В.А., Будный Н.Л. К вопросу о моделировании разрушения оксидной пленки при воспламенении частиц алюминия // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 78. С. 74–85. doi: 10.17223/19988621/78/6

Original article

To the issue of the modeling of oxide film fracture during aluminum particle ignition

Valeriy A. Babuk¹, Nikita L. Budnyi²

^{1,2} Baltic State Technical University «VOENMEH», Saint Petersburg, Russian Federation

¹ babuk_va@mail.ru

² budnyi_nl@voenmeh.ru

Abstract. Aluminum particles are coated with a protective oxide film. It is known that the oxide film condition controls the aluminum oxidation kinetics. The fracture of the

film induces the intensification of oxidation. This feature encourages authors to simulate the film condition after fraction caused by thermomechanical stress. The static strength of the film is a well-studied issue, while the fracture dynamics is still a relevant problem. In this paper, two coefficients describing the film condition after fraction are proposed. The first is based on the ratio of activation rates of critical flaws at the fracture initiation and in a hypothetical case without oxide film relaxation. The second represents the ratio of total times of the activated flaw growth during fracture and under specific reference conditions. Both coefficients are shown to produce adequate results with regard to predicting of more sufficient fractures at higher stress rates. It is assumed that the aluminum particle surface, which is exposed to an oxidizer after film fracture, is proportional to the proposed coefficients. With this assumption, the particle ignition is simulated. It is shown that higher rates of particle heating during ignition induce considerable fractures of the oxide film and the following intense oxidation.

Keywords: ignition, aluminum, alumina, fracture, kinetics, oxidation

Acknowledgments: The research was funded by the Russian Science Foundation (project No. 21-19-00044).

For citation: Babuk, V.A., Budnyi, N.L. (2022) To the issue of the modeling of oxide film fracture during aluminum particle ignition. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 78. pp. 74–85. doi: 10.17223/19988621/78/6

Введение

Алюминий в форме микро- и нанодисперсного порошка используется в качестве горючего в целом ряде различных тепловых установок. Особенностью воспламенения и горения частиц алюминия является наличие на поверхности металла твердой оксидной пленки, существенно увеличивающей диффузионное сопротивление и препятствующей интенсивному окислению. Критерий Пиллинга–Бэджворса для пленки на поверхности алюминия превышает единицу, для γ -модификации достигает значения 1.54, что свидетельствует о высоких защитных свойствах пленки.

В процессе нагрева и медленного окисления целостность оксидной пленки может нарушаться. Этому способствует два фактора: во-первых, разница коэффициентов линейного температурного расширения алюминия и его оксида, во-вторых – разница объемов вырабатываемого металла и образующегося оксида. При нагреве в окисляющей атмосфере под действием этих факторов происходит нарастание механических напряжений в объеме оксидной пленки, вызывающее ее разрушение. Разрушение пленки приводит к образованию трещин, следствием чего являются значительное падение диффузионного сопротивления и интенсивное окисление металлического ядра. При нарастании оксидной пленки определенной толщины быстрое окисление вновь прекращается. Такие циклы разрушения-восстановления оксидной пленки могут, предположительно, повторяться многократно в процессе воспламенения [1, 2].

Экспериментально выявлено, что состояние оксидной пленки на поверхности частицы после разрушения очень сильно зависит от темпа термомеханического нагружения [3–5]. Более высокая скорость нагрева приводит к существенному, «катастрофическому» характеру разрушения поверхности. В [5] было высказано предположение, что подобное поведение оксидной пленки может являться при-

чиной уменьшения температуры воспламенения частиц алюминия в составе конденсированных систем при увеличении скорости их термомеханического нагружения. В [1] предложено математическое описание данного явления.

Несмотря на длительную историю изучения воспламенения и горения и большой опыт математического моделирования данных процессов, нельзя говорить об окончательном решении задачи. В работе [6] выполнены обзор и систематизация существующих концепций и воззрений по рассматриваемому вопросу. Там же указывается на важность процесса разрушения оксидной пленки с точки зрения воспламенения алюминия, говорится о решающей роли данного процесса при воспламенении алюминия в некоторых ситуациях.

Однако к настоящему времени в литературе вопросу математического моделирования влияния скорости нагрева на разрушение оксидной пленки и, как следствие, на динамику воспламенения уделено недостаточное внимание, хотя экспериментально значимость этого явления была определена достаточно давно [3–5]. Указанные обстоятельства обуславливают актуальность дальнейших исследований в обозначенной области.

Целью настоящей работы является анализ природы влияния скорости термомеханического нагружения на разрушение оксидной пленки и воспламенение частицы алюминия. Рассматриваются существующие подходы к моделированию разрушения оксидной пленки при воспламенении и разрабатывается альтернативное описание, более детально учитывающее природу разрушения оксидной пленки.

1. Физическая природа влияния скорости нагружения на динамику воспламенения частицы алюминия

Рассмотрим природу влияния скорости термомеханического нагружения частицы окисления на динамику ее воспламенения.

Кинетика окисления алюминия до плавления оксидной пленки описывается с использованием широко известного уравнения [7] вида:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{KC_{ox}^m}{h^n} \exp\left(-\frac{E}{RT_p}\right) \quad (1)$$

где h – толщина оксидной пленки, K – предэкспоненциальный множитель, C_{ox} – концентрация окислителя у поверхности частицы, m – порядок реакции по окислителю, n – коэффициент, определяющий вид закона окисления (0 – «линейный», 1 – «параболический» и т.д.), E – энергия активации, R – универсальная газовая постоянная, T_p – температура частицы.

Предполагается, что сразу после разрушения пленки действует линейный закон, а после ее залечивания, т.е. нарастания некоторой критической толщины оксидной пленки, окисление переходит в параболический режим. С учетом того, что реакция протекает только по местам растрескивания оксидной пленки, тепловыделение от химической реакции может быть вычислено по формуле:

$$Q_{chem} = \chi S_{Al} \rho_{Al_2O_3} q \frac{dh}{dt}, \quad (2)$$

где χ – доля поверхности частицы, открытая для доступа окислителя после разрушения, S_{Al} – площадь поверхности металлического ядра, $\rho_{Al_2O_3}$ – плотность оксида, q – удельный тепловой эффект реакции окисления.

Величина χ имеет принципиальное значение и сильно влияет на интенсивность тепловыделения, а следовательно, и на динамику воспламенения (продолжительность индукционного периода и температуру воспламенения). Представляется правомерным предположение о том, что χ зависит от состояния поверхности частицы после ее разрушения – чем сильнее растрескивание поверхности, тем большая часть металлического ядра становится доступной для газообразного окислителя. С учетом того, что состояние поверхности при разрушении зависит от интенсивности нагружения, становится очевидной связь интенсивности нагружения и динамики воспламенения: чем выше скорость термомеханического нагружения, тем сильнее разрушение оксидной пленки, а значит, и выше значение χ , что приводит к более интенсивному тепловыделению при окислении.

Вопросы моделирования динамики воспламенения были ранее детально рассмотрены в [1, 8], поэтому основное внимание сосредоточим именно на вопросе разрушения оксидной пленки.

В соответствии с представлениями о разрушении хрупких твердых тел механизм образования трещин в оболочке следующий. Изначально в оболочке содержатся дефекты (микротрещины). Под действием нагрузки происходит накопление потенциальной энергии деформации. После достижения определенного критического напряжения начинается рост трещины. Критическим значением напряжения является такое, при котором высвобождающейся потенциальной энергии деформации достаточно для создания новой поверхности разрыва, т.е. для обеспечения роста и продвижения трещины. При этом происходит разгрузка прилегающих к трещине областей.

В случае переменной скорости нагружения картина разрушения, вероятно, будет зависеть и от скорости нарастания напряжений. Согласно современным представлениям [9–12], ход динамического разрушения и фрагментации хрупкого материала будет определяться конкуренцией двух процессов: нарастания напряжений, ведущего к инициированию роста трещин на новых дефектах, и разгрузки прилегающих к растущим трещинам областей. В разгруженных областях напряжения становятся меньше критических, что предотвращает инициирование и развитие в них новых трещин. В случае быстрого роста напряжений происходит инициирование новых трещин до того, как соответствующие участки поверхности успеют разгрузиться, в результате чего образуется большее количество трещин. При медленном нагружении значительная часть поверхности может успеть разгрузиться до достижения напряжений, достаточных для активации новых дефектов.

В этой связи становится важной задача моделирования разрушения оксидной пленки и прогнозирования ее состояния после разрушения.

2. Моделирование разрушения оксидной пленки

Перейдем к вопросу непосредственно моделирования разрушения оксидной пленки. При моделировании необходимо решить две задачи: вычисление механических напряжений в оксидной пленке для определения момента ее разрушения и прогнозирование состояния пленки после разрушения, т.е. степень существенности ее повреждений, что позволяет определить значение χ .

Первая задача может быть решена в относительно простом приближении линейной теории упругости в одномерной сферической постановке. Используемое математическое описание [1, 8] в целом идеологически соответствует известным работам по данному вопросу, например [13].

Решение второй задачи – прогнозирования состояния пленки после разрушения – вызывает серьезные сложности. Во-первых, отсутствует точная информация о механических свойствах оксидной пленки на микродисперсных частицах алюминия. Во-вторых, крайне затруднительно определить точное значение доли освобождающейся от оксида поверхности в зависимости от количества и протяженности образовавшихся трещин – экспериментальная визуализация [3] показывает, что форма поверхности в результате разрушения получается сложной, расплавленный металл может вытекать через трещины и т.д. В этой связи представляется справедливым использовать математическое описание, которое позволяет прогнозировать склонность к образованию большого или малого количества трещин на поверхности. При этом полагается, что величина χ является пропорциональной коэффициенту, количественно выражающему склонность к образованию большого количества трещин.

Предложены следующие подходы к решению данной задачи.

Считается, что критические напряжения в образцах материала являются случайной величиной, распределенной в соответствии с законом Вэйбулла. Можно записать, что плотность критических дефектов на единицу объема определяется следующим соотношением [14]:

$$\lambda_v = \frac{1}{V_0} \left[\frac{\sigma}{\sigma_0} \right]^m \quad (3)$$

где σ – действующее напряжение, m , σ_0 – параметры распределения Вэйбулла, V_0 – «эталонный» объем. Для Al_2O_3 параметры распределения принимают следующие значения [15]: $m = 8 \dots 20$, $\sigma_0 = 100 \dots 600$ МПа, $V_0 = 1$ мм³.

Рассматривается плоская задача, в связи с чем удобно перейти к плотности критических дефектов на единицу площади:

$$\lambda_s = \frac{h}{V_0} \left[\frac{\sigma}{\sigma_0} \right]^m. \quad (4)$$

В [1] был предложен коэффициент (далее будем обозначать его K_{D1}), который равен отношению приращения количества активированных дефектов в оболочке в единицу времени в начальный момент разрушения к приращению активированных дефектов в оболочке в единицу времени в гипотетическом случае отсутствия разгрузки. Для его вычисления в [1] предложена следующая формула:

$$K_{D1} = \max \left\{ 0; 1 - \frac{2\pi akC\lambda_s}{Sm \frac{h}{V_0 \sigma_0^m} \sigma^{m-1} \dot{\sigma}} \right\}, \quad (5)$$

где C – скорость распространения продольных упругих волн в твердом теле, k – коэффициент, значения которого для некоторых хрупких керамик составляют 0.4 ... 0.6 [11], a – характерный размер разгруженной области вокруг дефекта, S – площадь поверхности частицы.

Скорость распространения упругих продольных волн рассчитывается как

$$C = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}}, \quad (6)$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность.

Формула (5) была использована при расчете динамики воспламенения частицы совместно с дифференциальными уравнениями, выражающими законы сохранения вещества, энергии и количества движения, а также с моделью напряженно-деформированного состояния для вычисления момента разрушения [1]. При этом считалось, что χ линейно зависит от K_{D1} . Разработанное описание позволяет получить адекватный и практически значимый результат – согласно расчетам, динамика воспламенения будет существенно зависеть от скорости термомеханического нагружения частицы.

Однако полученное выражение (5) использует скорость формирования дефектов лишь в начальный момент разрушения и не учитывает дальнейшую динамику взаимодействия областей разгрузки и новых появляющихся дефектов. Рассмотрим альтернативное математическое описание, призванное учесть полную историю разрушения поверхности до полной ее разгрузки.

За основу примем подход к описанию трещинообразования, разработанный в [9–12].

Запишем выражение для скорости приращения плотности критических дефектов на единицу площади как функции времени с учетом того, что $\sigma = \dot{\sigma}t$:

$$\dot{\lambda}_s(t) = m \frac{h}{V_0 \sigma_0^m} t^{m-1} \dot{\sigma}^m. \quad (7)$$

Скорость роста плотности активированных дефектов на единицу площади определяется следующим выражением:

$$\dot{\lambda}_a(t) = \dot{\lambda}_s(t) P_a(t), \quad (8)$$

где $P_a(t)$ – вероятность того, что дефект, способный активироваться в момент времени t , не попадет в область разгрузки вокруг одного из дефектов, активированных в промежуток времени $[0, t]$. В [9] для вычисления данной вероятности предлагается использовать следующее выражение:

$$P_a(t) = \exp \left[- \int_0^t \dot{\lambda}_s(\tau) S_r(t-\tau) d\tau \right], \quad (9)$$

где $S_r(t-\tau)$ – площадь разгруженной поверхности вокруг дефекта, с момента активации которого прошло $(t-\tau)$ секунд. Для плоской задачи, считая, что разгруженная область имеет форму круга, можно записать

$$S_r(t-\tau) = \pi [kC(t-\tau)]^2. \quad (10)$$

Степень поврежденности поверхности после разрушения, а значит и степень ее освобождения от защитных свойств оксидной пленки, предлагается характеризовать суммарной протяженностью образовавшихся трещин на единичной площади за некоторый характерный промежуток времени. Если считать скорость роста трещин в пленке на поверхности частицы, то для данной оценки можно использовать суммарное время роста всех активированных трещин на единичной площади за характерный промежуток времени t_c . Значение данной характеристики можно вычислить следующим образом:

$$D_{\Sigma}(\dot{\sigma}) = \int_0^{t_c} \dot{\lambda}_a(\tau) [t - \tau] d\tau. \quad (11)$$

В качестве характерного времени стоит рассматривать такой промежуток времени, по истечении которого образование новых трещин становится маловероятным, т.е. можно записать, что $P_d(t_c) \approx 0$. Для практического удобства имеет смысл принять вероятность, соответствующую моменту времени t_c , равной какой-то малой величине, т.е. уровню значимости. Примем значение данной величины равным 0.05.

В связи со значительной неопределенностью истинных механических свойств оксидной пленки и практической невозможностью установления подлинной связи между долей освободившейся от защитной пленки поверхности и D_{Σ} представляется разумным ввести безразмерный коэффициент, характеризующий степень разрушения поверхности, и в дальнейшем считать, что доля освободившейся от оксида поверхности пропорциональна данному коэффициенту. В качестве такого коэффициента предлагается ввести отношение D_{Σ} в расчетном случае к значению данной величины в некотором характерном случае $D_{\Sigma c}$.

В качестве характерного случая, по результатам предварительного анализа случаев нагружения и зависимости предложенного ранее коэффициента K_{D1} от скорости нагружения, в первом приближении можно рассматривать случай разрушения при скорости нарастания напряжений 10^{16} Па/с, т.е. $D_{\Sigma c} = D_{\Sigma}(10^{16})$. Подобный темп нарастания напряжений для рассматриваемых процессов является близким к максимальному, значение предложенного ранее коэффициента K_{D1} практически равно 1 для данной скорости нарастания напряжений.

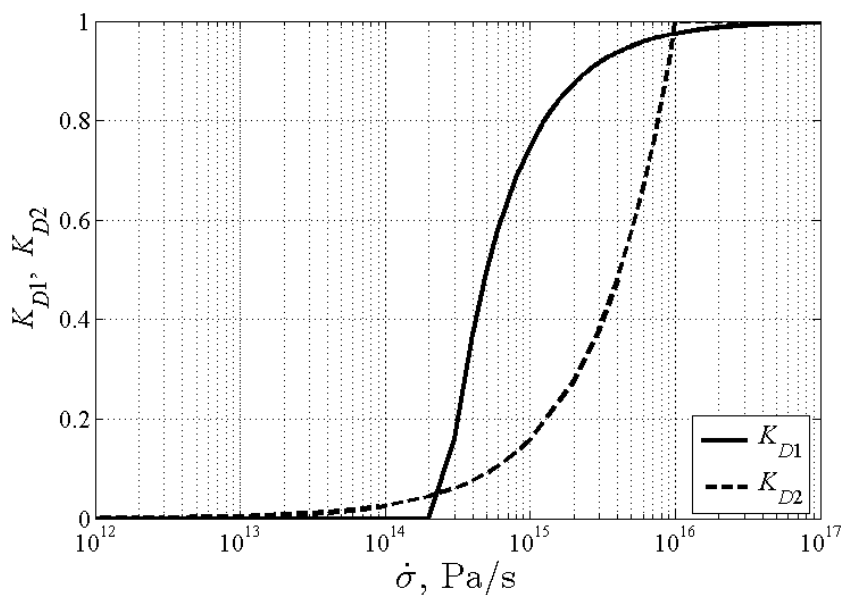


Рис. 1. Зависимости предложенных коэффициентов K_{D1} и K_{D2} от скорости роста механических напряжений $\dot{\sigma}$

Fig. 1. Proposed coefficients K_{D1} and K_{D2} as functions of stress rate $\dot{\sigma}$

В таком случае можно сформулировать выражение для модифицированного коэффициента, характеризующего влияние динамики нагружения:

$$K_{D2} = \min \left\{ \frac{D_{\Sigma}}{D_{\Sigma c}}, 1 \right\}. \quad (12)$$

На рис. 1 представлен результат сравнения зависимостей K_{D1} и K_{D2} от скорости роста напряжений $\dot{\sigma}$.

Видно, что значения обоих коэффициентов растут с увеличением скорости нагружения, но характер зависимостей различный. Отметим, что оба коэффициента являются в известном смысле условными – они характеризуют лишь склонность к образованию большого или малого количества трещин и, следовательно, к очищению большей или меньшей доли поверхности частицы от защитной пленки. Однако вывод этих коэффициентов осуществлен исходя из общих физических представлений, сделанных на основе анализа трещинообразования в хрупких материалах.

3. Анализ моделей

Выполним численный анализ модели воспламенения [1, 8] с использованием описанных математических моделей для определения состояния поверхности оксидной пленки. Рассмотрим воспламенение одиночной частицы алюминия диаметром 5 мкм в пламени условной конденсированной системы при давлении 60 атм. Температуру газа в надповерхностной зоне для простоты примем линейно меняющейся от температуры поверхности T_s до температуры пламени T_b , которая достигается на высоте пламени l_b . Для всех координат выше l_b температура пламени считается постоянной и равной T_b . С использованием модели воспламенения оценим значения коэффициентов K_{D1} и K_{D2} в момент плавления металлического ядра, когда происходит гарантированное разрушение оксидной пленки. В зависимости от температуры и высоты пламени интенсивность теплового нагружения будет различной, что позволит на качественном уровне оценить поведение K_{D1} и K_{D2} в зависимости от температуры.

Определены значения K_{D1} и K_{D2} для моментов плавления металлического ядра при варьировании высоты пламени l_b с поддержанием постоянного значения T_b . Результаты моделирования представлены на рис. 2, а. Введено обозначение $\bar{l}_b$ – отношение высоты пламени к некоторому базовому значению (порядка 10 мкм). Также вычислены значения K_{D1} и K_{D2} для моментов плавления металлического ядра при варьировании высоты пламени l_b с поддержанием постоянного значения T_b . Результаты моделирования представлены на рис. 2, б, где $\bar{T}_b$ – отношение температуры пламени к некоторому базовому значению (порядка 2 800 К).

Детальное экспериментальное исследование влияния скорости нагружения на характер растрескивания представляется крайне затруднительным. Существующие экспериментальные исследования, посвященные экспериментальному изучению влияния скорости нагрева на поведение воспламеняющихся частиц [3–5] позволяют установить лишь на качественном уровне некоторые тенденции. Основная из них: более интенсивное разрушение поверхности частиц и окисление металлического ядра происходит при увеличении скорости нагрева.

Оба коэффициента как минимум на качественном уровне адекватно отображают экспериментально наблюдаемую зависимость – рост интенсивности термомеханического нагружения приводит к росту соответствующих коэффициентов. В данном случае повышение температуры пламени и уменьшение его высоты (оба фактора вызывают рост скорости нагружения) приводят к росту коэффициентов. Однако можно видеть, что характер зависимостей различный.

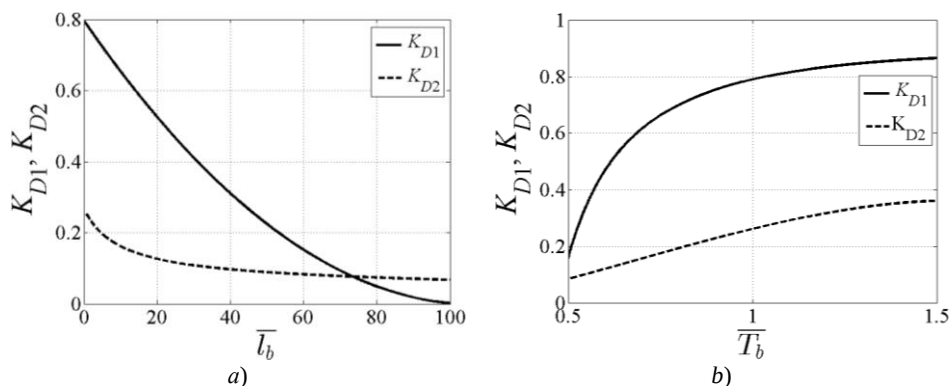


Рис. 2. Вычисленные значения K_{D1} и K_{D2} в момент плавления металлического ядра при воспламенении одиночной частицы алюминия в пламени условного монотоплива: при разной высоте пламени в газовой фазе (a); при разной температуре пламени в газовой фазе (b)

Fig. 2. Calculated K_{D1} and K_{D2} at the moment of metal core melting during the single aluminum particle ignition in a conditional monopropellant flame as functions of: (a) flame height in a gas phase and (b) flame temperature in a gas phase

Полученные результаты свидетельствуют об адекватности моделирования на качественном уровне. Конкретный уровень численных значений коэффициента K_{D2} может быть уточнен путем согласования с экспериментальными данными с помощью выбора $D_{\Sigma c}$, обеспечивающего наилучшее соответствие.

Заключение

В результате выполненной работы определена природа влияния скорости термомеханического нагружения на динамику воспламенения. Предложено два коэффициента, описывающих состояния пленки после разрушения. Первый коэффициент представляет собой отношение скорости приращения критических дефектов в момент начала разрушения к скорости приращения критических дефектов в гипотетической ситуации отсутствия разгрузки пленки. Второй – отношение суммарного времени роста активированных дефектов при разрушении к суммарному времени роста активированных дефектов в определенных эталонных условиях. Показано, что оба коэффициента позволяют получить адекватный результат: прогнозируемое более существенное разрушение при высоких скоростях нагружения. Полученные математические модели использованы совместно с существующими моделями воспламенения. На качественном уровне показано, что модели отражают влияние скорости нагружения на состояния поверхности частиц после разрушения и скорость окисления.

Выполненное исследование является вкладом в совершенствование моделирования процесса воспламенения частиц металла в конденсированных системах, а также в других средах. Его результаты способствуют созданию новых, более точных моделей воспламенения и горения частиц алюминия.

Список источников

1. Babuk V.A., Budnyi N.L., Nizyaev A.A. Simulation of Condensed Products Formation at the Surface of a Metalized Solid Propellant // *Innovative Energetic Materials: Properties, Combustion Performance and Application* / W. Pang, L. DeLuca, A. Gromov, A. Cumming (eds). Singapore : Springer, 2020. P. 523–547. doi: 10.1007/978-981-15-4831-4_17
2. Rosenband V., Gany A., Timnat Y.M. Effect of mechanical stresses on heterogeneous oxidation of metals // *Oxidation of Metals*. 1995. V. 43, No. 1. P. 141–156. doi: 10.1007/BF01046751
3. Crump J.E., Prentice J.L., Kraeutle K.J. Role of scanning electron microscope in the study of propellant combustion. I. Behavior of metal additives // *Combustion Science and Technology*. 1969. V. 1, No. 3. P. 205–223. doi: 10.1080/00102206908952201
4. Локенбах А.К., Запорова Н.А., Книпеле А.З., Строд В.В., Лепинь Л.К. Влияние условий нагрева на агломерацию порошкообразного алюминия в атмосфере воздуха // *Физика горения и взрыва*. 1985. Т. 21, № 1. С. 73–82. doi: 10.1007/BF01471142
5. Похил П.М., Беляев А.Ф., Фролов Ю.В. и др. Горение порошкообразных металлов в активных средах. М. : Наука, 1972. 294 с.
6. Sundaram D.S., Puri P., Yang V. A general theory of ignition and combustion of nano- and micron-sized aluminum particles // *Combustion and Flame*. 2016. V. 169. P. 94–109. doi: 10.1016/j.combustflame.2016.04.005
7. Федоров А.В., Харламова Ю.В. Воспламенение частицы алюминия // *Физика горения и взрыва*. 2003. Т. 39, № 5. С. 65–68. doi: 10.1023/A:1026109801863
8. Babuk V.A., Budnyi N.L. Smoke oxide particles formation at the burning surface of condensed systems // *Acta Astronautica*. 2019. V. 158. P. 264–271. doi: 10.1016/j.actaastro.2019.03.031
9. Denoual C., Barbier G., Hild F. A Probabilistic Approach for Fragmentation of Brittle Materials under Dynamic Loading // *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série IIb, Mécanique*. 1997. V. 325 (12). p. 685–691. doi: 10.1016/S1251-8069(97)82333-0
10. Hild F., Denoual C., Forquin P., Brajer X. On the probabilistic–deterministic transition involved in a fragmentation process of brittle materials // *Computers and Structures*. 2003. V. 81, № 12. P. 1241–1253. doi: 10.1016/S0045-7949(03)00039-7
11. Forquin P., Hild F. A Probabilistic Damage Model of the Dynamic Fragmentation Process in Brittle Materials // *Advances in Applied Mechanics*. 2010. V. 44. P. 1–72. doi: 10.1016/S0065-2156(10)44001-6
12. Forquin P. Brittle materials at high-loading rates: an open area of research // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2017. V. 375, No. 2085. Art. 20160436. doi: 10.1098/rsta.2016.0436
13. Rosenband V., Gany A. A Microscopic and Analytic Study of Aluminum Particles Agglomeration // *Combustion Science and Technology*. 2001. V. 166, No. 1. P. 91–108. doi: 10.1080/00102200108907821
14. Danzer R., Supancic P., Pascual J., Lube T. Fracture statistics of ceramics – Weibull statistics and deviations from Weibull statistics // *Engineering Fracture Mechanics*. 2007. V. 74, No. 18. P. 2919–2932. doi: 10.1016/j.engfracmech.2006.05.028
15. Rösler J., Harders H., Bäker M. Mechanical Behaviour of Engineering Materials. Metals, Ceramics, Polymers, and Composites. Berlin: Springer-Verlag, 2007. XV, 534 p. doi: 10.1016/C2013-0-01916-0

References

1. Babuk V.A., Budnyi N.L., Nizyaev A.A. (2020) Simulation of condensed products formation at the surface of a metalized solid propellant. *Innovative Energetic Materials: Properties, Combustion Performance and Application*. Singapore: Springer. pp. 523–547. doi: 10.1007/978-981-15-4831-4_17.
2. Rosenband V., Gany A., Timnat Y.M. (1995) Effect of mechanical stresses on heterogeneous oxidation of metals. *Oxidation of Metals*. 43(1). pp. 141–156. doi: 10.1007/BF01046751.
3. Crump J.E., Prentice J.L., Kraeutle K.J. (1969) Role of scanning electron microscope in the study of propellant combustion. I. Behavior of metal additives. *Combustion Science and Technology*. 1(3). pp. 205–223. doi: 10.1080/00102206908952201.
4. Lokenbakh A.K., Zaporina N.A., Knipele A.Z., Strod V.V., Lepin' L.K. (1985) Effects of heating conditions on the agglomeration of aluminum powder in air. *Combustion, Explosion and Shock Waves*. 21(1). pp. 69–77. doi: 10.1007/BF01471142.
5. Pokhil P.F., Belyaev A.F., Frolov Yu.V., Logachiov V.S., Korotkov A.I. (1972) *Gorenie poroshkoobraznykh metallov v aktivnykh sredakh* [Combustion of powdered metals in active media]. Moscow: Nauka.
6. Sundaram D.P., Puri P., Yang V. (2016) A general theory of ignition and combustion of nano- and micron-sized aluminum particles. *Combustion and Flame*. 169. pp. 94–109. doi: 10.1016/j.combustflame.2016.04.005.
7. Fedorov A.V., Kharlamova Y.V. (2003) Ignition of an aluminum particle. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 39(5). pp. 544–547. doi: 10.1023/A:1026109801863.
8. Babuk V.A., Budnyi N.L. (2019) Smoke oxide particles formation at the burning surface of condensed systems. *Acta Astronautica*. 158. pp. 264–271. doi: 10.1016/j.actaastro.2019.03.031.
9. Denoual C., Barbier G., Hild F. (1997) A probabilistic approach for fragmentation of brittle materials under dynamic loading. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série IIb, Mécanique*. 325(12). pp. 685–691. doi: 10.1016/S1251-8069(97)82333-0.
10. Hild F., Denoual C., Forquin P., Brajer X. (2003) On the probabilistic–deterministic transition involved in a fragmentation process of brittle materials. *Computers and Structures*. 81(12). pp. 1241–1253. doi: 10.1016/S0045-7949(03)00039-7.
11. Forquin P., Hild F. (2010) A probabilistic damage model of the dynamic fragmentation process in brittle materials. *Advances in Applied Mechanics*. 44. pp. 1–72. doi: 10.1016/S0065-2156(10)44001-6.
12. Forquin P. (2017) Brittle materials at high-loading rates: an open area of research. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 375(2085). doi: 10.1098/rsta.2016.0436.
13. Rosenband V., Gany A.A. (2001) Microscopic and analytic study of aluminum particles agglomeration. *Combustion Science and Technology*. 166(1). pp. 91–108. doi: 10.1080/00102200108907821.
14. Danzer R., Supancic P., Pascual J., Lube T. (2007) Fracture statistics of ceramics – Weibull statistics and deviations from Weibull statistics. *Engineering Fracture Mechanics*. 74(18). pp. 2919–2932. doi: 10.1016/j.engfracmech.2006.05.028.
15. Rösler J., Harders H., Bäker M. (2007) *Mechanical Behaviour of Engineering Materials. Metals, Ceramics, Polymers, and Composites*. Berlin: Springer-Verlag. doi: 10.1016/C2013-0-01916-0.

Сведения об авторах:

Бабук Валерий Александрович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой Балтийского государственного технического университета «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: babuk_va@mail.ru

Будный Никита Леонидович – кандидат технических наук, доцент, Балтийского государственного технического университета «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: budnyi_nl@voenmeh.ru

Information about the authors:

Babuk Valeriy A. (Doctor of Technical Sciences, Baltic State Technical University «VOENMEH», Saint Petersburg, Russian Federation). E-mail: babuk_va@mail.ru

Budnyi Nikita L. (Candidate of Technical Sciences, Baltic State Technical University «VOENMEH», Saint Petersburg, Russian Federation). E-mail: budnyi_nl@voenmeh.ru

Статья поступила в редакцию 04.10.2021; принята к публикации 12.07.2022

The article was submitted 04.10.2021; accepted for publication 12.07.2022

Научная статья

УДК 531. 332. 3

doi: 10.17223/19988621/78/7

О форме брахистохроны, вращающейся в вертикальной плоскости

Сергей Октябринович Гладков¹, Софья Борисовна Богданова²

^{1,2} *Московский авиационный институт, Москва, Россия*

¹ *sglad51@mail.ru*

² *sonjaf@list.ru*

Аннотация. Исходя из общего представления о криволинейном движении, получена система динамических уравнений, позволяющая описать форму стационарно вращающейся в своей плоскости брахистохроны. Найдено параметрическое решение приведенных уравнений при отсутствии трения, с помощью методов численного интегрирования дана графическая иллюстрация полученной аналитически зависимости.

Ключевые слова: частота вращения, брахистохрона, динамические уравнения движения

Для цитирования: Гладков С.О., Богданова С.Б. О форме брахистохроны, вращающейся в вертикальной плоскости // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 78. С. 86–98. doi: 10.17223/19988621/78/7

Original article

On the shape of the brachistichrone rotating in a vertical plane

Sergey O. Gladkov¹, Sofiya B. Bogdanova²

^{1,2} *Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation*

¹ *sglad51@mail.ru*

² *sonjaf@list.ru*

Abstract. The paper aims to study the influence of the brachistochrone rotating in its own plane on the gutter shape along which a body moves. The problem is solved with a moving basis, which allows one to account for all forces exerted on the body. Introduction of the moving basis yields a compact system of dynamical equations, whose validity was proven in previous author's papers. In limiting cases, such an approach is used to solve analytically the obtained equations of motion and to determine the shape of curves depending on the parameters in the equations by tabular integration. The latter is illustrated in the figures presented. According to the energy conservation law, which accounts for the rotation of the entire system as a whole, the resulting equations also include the angular frequency of rotation as an additional parameter. In this paper, the case of steady

rotation is studied. Such conditions have a significant impact on the brachistochrone. In the limiting case of low rotational speeds, the curve, as it should be, degenerates smoothly into a classical brachistochrone, which is justified by the numerical methods used.

Keywords: rotational speed, brachistochrone, dynamical equations of motion

For citation: Gladkov, S.O., Bogdanova, S.B. (2022) On the shape of the brachistochrone rotating in a vertical plane. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 78. pp. 86–98. doi: 10.17223/19988621/78/7

Введение

Как было уже неоднократно проверено в предыдущих авторских работах (см., напр.: [1–10]), решение задачи о брахистохроне чрезвычайно удобно проводить в мгновенном ортогональном базисе, выбранным в произвольной точке подвижной кривой, который характеризуется двумя проведенными к ней единичными векторами касательной $\mathbf{t}$ и нормали $\mathbf{n}$.

Удобство подобного подхода продиктовано последующей рациональностью получаемых уравнений и их аналитическим решением, которое оказывается при этом весьма компактным и негромоздким.

В настоящем сообщении мы приведем подробное изложение задачи о движении тела по брахистохроне с учетом ее вращения с постоянной угловой скоростью ω , направленной перпендикулярно плоскости x – y (рис. 1).

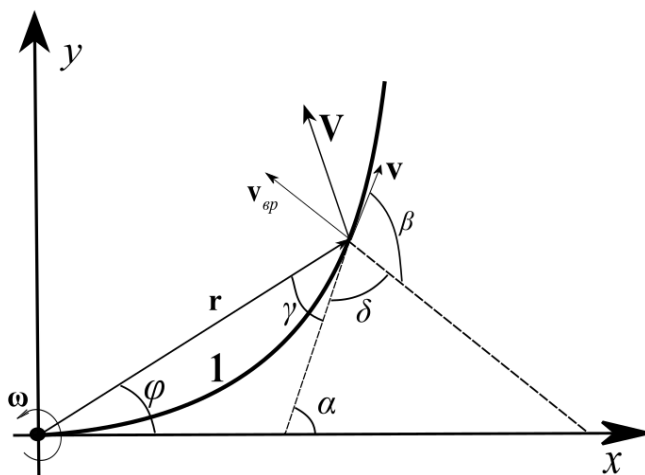


Рис. 1. Схематическое изображение задачи. $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{v}_{\text{вр}}$, угловая скорость направлена перпендикулярно плоскости рисунка. Линия 1 – траектория тела при отсутствии вращения
Fig. 1. Schematic representation of the problem. $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{v}_{\text{rot}}$, angular velocity is perpendicular to the plane of the figure. Line 1 is the trajectory of the body without rotation

При этом в общих уравнениях движения будут учтены все основные механические силы, действующие на материальное тело массы m . Однако подобный анализ этих уравнений мы проведем с учетом одной только силы тяжести, опустив для простоты силы сухого и влажного сопротивления.

Ниже речь будет идти о нерелятивистском случае, когда частота вращения не слишком велика и время может считаться абсолютным. Главной нашей задачей при этом будет выяснение формы брахистохроны в условиях ее плоского вращения.

1. Общие уравнения движения

Решение намеченной задачи мы начнем с самого основного принципа динамики и, в отличие от всех предыдущих работ (см.: [1–10]), воспользуемся хорошо всем знакомым законом сохранения энергии по тому же принципу, который был применен нами в работах [11, 12].

Действительно, в условиях вращения мы имеем право записать следующий закон сохранения энергии (см.: [13]):

$$E = T + U = \text{const}, \quad (1)$$

где кинетическая энергия складывается из двух частей: поступательной и вращательной, а именно

$$T = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \quad (2)$$

где m – масса точечного тела, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{пост}} + \mathbf{v}_{\text{вр}}$ – результирующая скорость движения, $\mathbf{v}_{\text{пост}}$ – скорость поступательного движения при отсутствии вращения, а $\mathbf{v}_{\text{вр}}$ – чисто вращательная составляющая, определяемая, как обычно, формулой $\mathbf{v}_{\text{вр}} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$ (рис. 2), момент инерции тела

$$J = m\mathbf{r}^2, \quad (3)$$

ω – частота вращения, которая в нашей задаче считается постоянной.

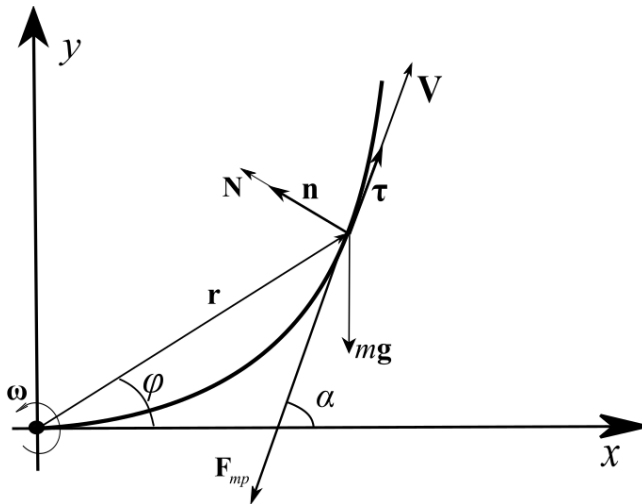


Рис. 2. Подвижный базис $\mathbf{n}-\boldsymbol{\tau}$ к результирующей траектории движения $\mathbf{r}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t)dt$ и все силы, действующие на тело массы m

Fig. 2. A moving basis $\mathbf{n}-\boldsymbol{\tau}$ to a resultant trajectory of the motion $\mathbf{r}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t)dt$ and all the forces exerted on the body of mass m

Что касается потенциальной энергии U , то для нее мы имеем право записать следующее выражение

$$-U = A = m \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_{fr} \cdot d\mathbf{r} = m(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_{fr} \cdot d\mathbf{r}, \quad (4)$$

где $\mathbf{r}_0$ – некоторое начальное положение, $\mathbf{g}$ – ускорение силы тяжести, а $\mathbf{F}_{fr} = \hat{\mu} \mathbf{N} - F_c(\mathbf{v}) \frac{\mathbf{v}}{v}$, где $\hat{\mu}$ – тензорный коэффициент сухого трения, $F_c(\mathbf{v})$ – сила вязкого сопротивления (например, Стокса [14]).

Поэтому, подставляя формулы (2)–(4) в общее выражение (1), имеем

$$E = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} + \frac{m\mathbf{r}^2\omega^2}{2} - m(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_{fr} \cdot d\mathbf{r} = const. \quad (5)$$

Поскольку $\mathbf{r}(t)$ представляет собой искомую результирующую траекторию, то так же как и, например, в работах [1, 5], мы воспользуемся методом мгновенного подвижного базиса $\boldsymbol{\tau}$ – $\mathbf{n}$ (см. рис. 1).

Разложение сил тяжести и сопротивления по этому базису можно представить в виде:

$$\mathbf{g} = g(\boldsymbol{\tau} \sin \alpha - \mathbf{n} \cos \alpha), \quad (6)$$

$$\mathbf{F}_{fr} = N\hat{\mu}\mathbf{n} - F_c(\mathbf{v})\boldsymbol{\tau} = (\mu N - F_c(\mathbf{v}))\boldsymbol{\tau}, \quad (7)$$

где μ – общепринятый коэффициент трения, который определяется как $\mu\boldsymbol{\tau}' = \hat{\mu}\mathbf{n}'$, поскольку $\mathbf{N} = N\mathbf{n}'$, а угол α введен на рис. 1 (напомним, что $y' = \tan \alpha$).

Продифференцируем уравнение (5) по времени. Имеем в результате

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{m\mathbf{v}^2}{2} + \frac{m\mathbf{r}^2\omega^2}{2} - m(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_{fr} \cdot d\mathbf{r} \right] = \\ = m(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) + m\omega^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) - m(\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{F}_{fr} \cdot \mathbf{v}) = 0 \end{aligned}$$

Откуда сразу же следует, что

$$\mathbf{v}(m\dot{\mathbf{v}} + m\omega^2\mathbf{r} - m\mathbf{g} - \mathbf{F}_{fr}) = 0,$$

или в силу произвольного направления векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$ получаем искомое уравнение

$$\dot{\mathbf{v}} + \omega^2 r \mathbf{e}_r = \mathbf{g} + \frac{\mathbf{F}_{fr}}{m}, \quad (8)$$

где $\mathbf{e}_r$ – единичный вектор, направленный вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}$.

Поскольку связь единичного базиса $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ полярной системы координат с подвижным базисом $\boldsymbol{\tau}$ – $\mathbf{n}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \mathbf{n} \sin(\alpha - \varphi) + \boldsymbol{\tau} \cos(\alpha - \varphi), \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{n} \cos(\alpha - \varphi) + \boldsymbol{\tau} \sin(\alpha - \varphi), \end{aligned} \quad (9)$$

то уравнение (8) с учетом (6), (7) и (9) запишется как

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}\boldsymbol{\tau}) + r\omega^2[\mathbf{n} \sin(\alpha - \varphi) + \boldsymbol{\tau} \cos(\alpha - \varphi)] = g(\boldsymbol{\tau} \sin \alpha - \mathbf{n} \cos \alpha) + \frac{(\mu N - F_c(\mathbf{v}))}{m}\boldsymbol{\tau}.$$

Или после дифференцирования

$$\begin{aligned} \dot{v} \tau + \frac{v^2}{R} \mathbf{n} + r \omega^2 [\mathbf{n} \sin(\alpha - \varphi) + \tau \cos(\alpha - \varphi)] = \\ = g (\tau \sin \alpha - \mathbf{n} \cos \alpha) + \frac{(\mu N - F_c(v))}{m} \tau. \end{aligned} \quad (10)$$

Приравнивая соответствующие проекции в уравнении (10) слева и справа, мы приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{v} = -r \omega^2 \cos(\alpha - \varphi) + g \sin \alpha + \frac{(\mu N - F_c(v))}{m}, \\ v \dot{\alpha} = -r \omega^2 \sin(\alpha - \varphi) - g \cos \alpha, \end{cases} \quad (11)$$

где было учтено, что $v = R \dot{\alpha}$.

2. Анализ уравнений (11)

Рассмотрим подробно случай, когда силы сопротивления несущественны и ими можно пренебречь. В результате уравнения (11) сильно упрощаются, и, подчеркнем, в случае, когда $v = R \dot{\alpha}$, мы приходим к следующей весьма компактной системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{v} = -r \omega^2 \cos(\alpha - \varphi) + g \sin \alpha, \\ v \dot{\alpha} = -r \omega^2 \sin(\alpha - \varphi) - g \cos \alpha. \end{cases} \quad (12)$$

Если в равенствах (12) положить $\omega = 0$, мы приходим, как и должно быть, к уравнению брахистохроны (см.: [1, 2]).

Если же в рамках неподвижного случая ($\omega = 0$) положить $v = -R \dot{\alpha}$ (при $\dot{\alpha} < 0$), то уравнения (12) примут вид:

$$\begin{cases} v \dot{\alpha} = g \cos \alpha, \\ \dot{v} = g \sin \alpha, \end{cases} \quad (13)$$

и мы приходим к уравнению параболы.

Эти два чрезвычайно важных вывода свидетельствуют об очень важном и во все неочевидном факте, что в условиях свободного движения в поле силы тяжести траектория может быть только либо параболой, либо брахистохроной. Других траекторий в природе не существует. И вот здесь стоит подчеркнуть, что система уравнений (12) не опирается на обязательное для брахистохроны требование, что время скатывания наименьшее. Это требование уже автоматически заложено в самих уравнениях (12).

Раскрывая их и вводя декартовы координаты согласно преобразованиям

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

получаем

$$\begin{cases} \dot{v} = -\omega^2 (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + g \sin \alpha, \\ v \dot{\alpha} = -\omega^2 (x \sin \alpha - y \cos \alpha) - g \cos \alpha. \end{cases}$$

Решая эти линейные уравнения относительно x, y , найдем

$$\begin{cases} \omega^2 x = -\dot{v} \cos \alpha - v \dot{\alpha} \sin \alpha, \\ \omega^2 y = -\dot{v} \sin \alpha + v \dot{\alpha} \cos \alpha + g. \end{cases} \quad (14)$$

Дифференцируя оба уравнения по времени и учитывая, что

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x = v \cos \alpha, \\ \dot{y} &= v_y = -v \sin \alpha, \end{aligned}$$

приходим к следующему промежуточному результату:

$$\begin{cases} (\ddot{v} + v \omega^2 + v \dot{\alpha}^2) \cos \alpha + v \ddot{\alpha} \sin \alpha = 0, \\ (\ddot{v} - v \omega^2 + v \dot{\alpha}^2) \sin \alpha - v \ddot{\alpha} \cos \alpha = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Если теперь верхнее уравнение в системе (15) умножить на $\cos \alpha$, а нижнее – на $\sin \alpha$, а затем их сложить, то получим

$$\ddot{v} + v(\dot{\alpha}^2 + \omega^2 \cos 2\alpha) = 0. \quad (16)$$

Если же теперь верхнее уравнение в (15) умножить на $\sin \alpha$, а нижнее – на $\cos \alpha$ и вычесть их друг из друга, то найдем

$$\ddot{\alpha} + \omega^2 \sin 2\alpha = 0. \quad (17)$$

В предельном случае неподвижного желоба, положив в уравнениях (16) и (17) $\omega = 0$, мы приходим к простой системе

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} = 0, \\ \ddot{v} + v \dot{\alpha}^2 = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Откуда следует, что

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = C_1, \\ \ddot{v} + C_1^2 v = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Таким образом, у нас получается обычное параметрическое уравнение брахистохроны. Действительно, из нижнего уравнения (19) следует, что $v = A \cos C_1 t + B \sin C_1 t$, где A, B – константы интегрирования. Положив $B = 0$, имеем $\alpha = C_1 t + C_2$, $v = A \cos C_1 t$, где C_2 – еще одна константа интегрирования. А такое решение, как известно (см.: [1–9]), характерно только для брахистохроны.

Введя в уравнениях (16) и (17) безразмерный аргумент $\tau = \omega t$, мы приходим к следующей системе нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} v'' + v(\alpha'^2 + \cos 2\alpha) = 0, \\ \alpha'' + \sin 2\alpha = 0, \end{cases} \quad (20)$$

где «штрих» указывает на дифференцирование по τ .

Для полноты картины система уравнений (20) должна быть дополнена еще двумя уравнениями:

$$\begin{cases} x = \int v \cos \alpha d\tau, \\ y = -\int v \sin \alpha d\tau. \end{cases} \quad (21)$$

Из нижнего уравнения системы (20) после нахождения его первого интеграла получаем

$$\alpha'^2 - \cos 2\alpha = \frac{C_1^2}{\omega^2}, \quad (22)$$

где константа интегрирования C_1 имеет размерность частоты. Квадрат частоты в знаменателе правой части введен с целью возможности предельного перехода к случаю $\omega = 0$.

Отсюда сразу же следует решение в квадратурах:

$$\tau + C_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{C_1^2}{\omega^2} + \cos 2\alpha}}. \quad (23)$$

Если, к примеру, считать, что в начальный момент времени $t = 0$ движение начинается от значения угла $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то следует положить $C_2 = 0$. В результате решение (23) можно тогда представить в более компактном виде:

$$\tau(\alpha) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{C_1^2}{\omega^2} + \cos 2\alpha}}. \quad (24)$$

Выражая из решения (22) α'^2 и подставляя в верхнее уравнение системы (20), находим

$$v'' + v \left(2 \cos 2\alpha + \frac{C_1^2}{\omega^2} \right) = 0. \quad (25)$$

Окончательно нашу полную систему уравнений, которую мы будем решать численно, согласно (21), (24), (25) следует представить, как

$$\begin{cases} \alpha' = \sqrt{\gamma + \cos 2\alpha}, \\ v'' + v(2 \cos 2\alpha + \gamma) = 0, \\ x = \frac{1}{\omega} \int_0^{\tau} v \cos \alpha d\tau, \\ y = h - \frac{1}{\omega} \int_0^{\tau} v \sin \alpha d\tau. \end{cases} \quad (26)$$

где $\gamma = \frac{C_1^2}{\omega^2}$. При этом подчеркнем, что $C_1 \neq \omega$, поскольку C_1 – это не зависящая ни от чего константа.

С целью численного исследования решения уравнений (26) их удобно записать в безразмерном виде, введя параметр $u = \frac{v}{\sqrt{2gh}}$. Тогда вместо (26) получим следующую систему:

$$\begin{cases} \alpha' = \sqrt{\gamma + \cos 2\alpha}, \\ u'' + u(2 \cos 2\alpha + \gamma) = 0, \\ \xi = \frac{x}{h} = \lambda \int_0^\tau u \cos \alpha d\tau, \\ \eta = \frac{y}{h} = 1 - \lambda \int_0^\tau u \sin \alpha d\tau. \end{cases} \quad (27)$$

где параметр $\lambda = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2g}{h}}$.

Уравнения (27) позволяют нам найти интересующую нас зависимость траектории в виде функции $\eta = \eta(\xi, \lambda, \gamma)$ от параметров λ и γ . Начальные условия можно задать следующими:

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = A \neq 0. \quad (28)$$

Численное интегрирование уравнения (27) с начальными условиями (28) для разных значений параметров λ и γ иллюстрируют рис. 3–6. Как видно из рис. 5, 6, в предельном случае, когда частота $\omega \rightarrow 0$, кривая вырождается в обычную брахистохрону.

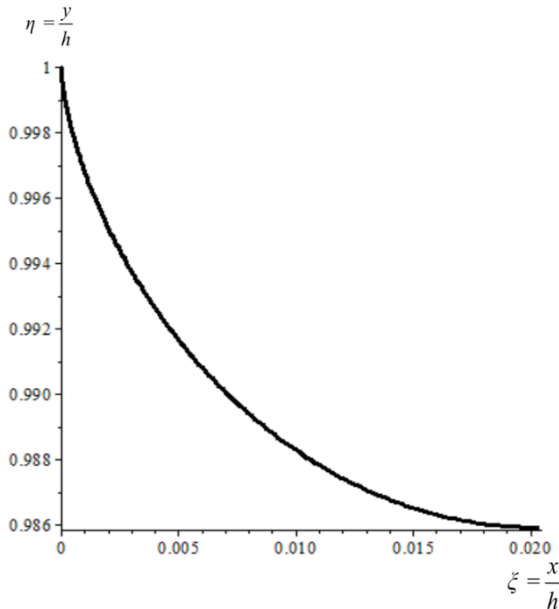


Рис. 3. Зависимость $\eta(\xi)$ для параметров $\lambda = 0.1$ и $\gamma = 4$

при начальных условиях $\alpha(0) = \frac{\pi}{2}$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$

Fig. 3. Dependence $\eta(\xi)$ for parameters $\lambda = 0.1$ and $\gamma = 4$
under initial conditions $\alpha(0) = \frac{\pi}{2}$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$

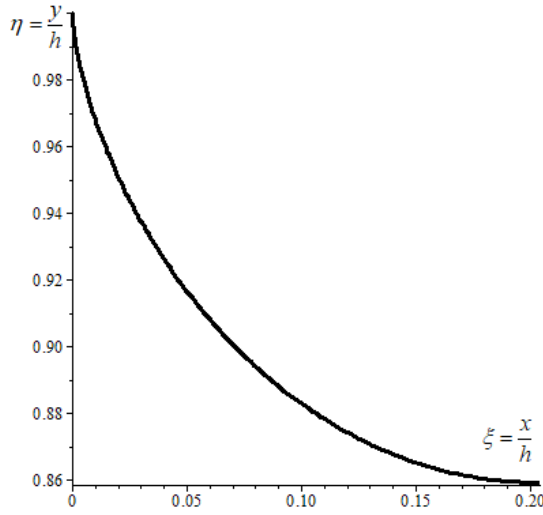


Рис. 4. Зависимость $\eta(\xi)$ для параметров $\lambda = 1$ и $\gamma = 4$ при начальных условиях $\alpha(0) = \frac{\pi}{2}$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$

Fig. 4. Dependence $\eta(\xi)$ for parameters $\lambda = 1$ and $\gamma = 4$ under initial conditions $\alpha(0) = \frac{\pi}{2}$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$

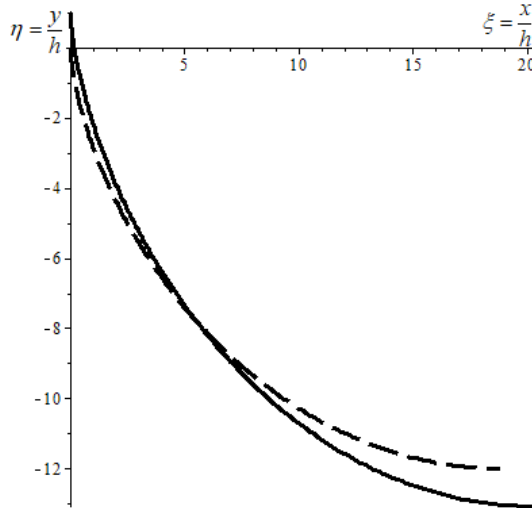


Рис. 5. Для малых частот вращения, $\lambda = 100$, кривая (сплошная линия), переходит в брахистохрону (пунктирная линия). Начальные условия $\alpha(0) = \frac{\pi}{2}$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$

Fig. 5. At low rotational speeds, $\lambda = 100$, the curve (the solid line) turns into a brachistochrone (the dashed line). Initial conditions are as follows: $\alpha(0) = \frac{\pi}{2}$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$

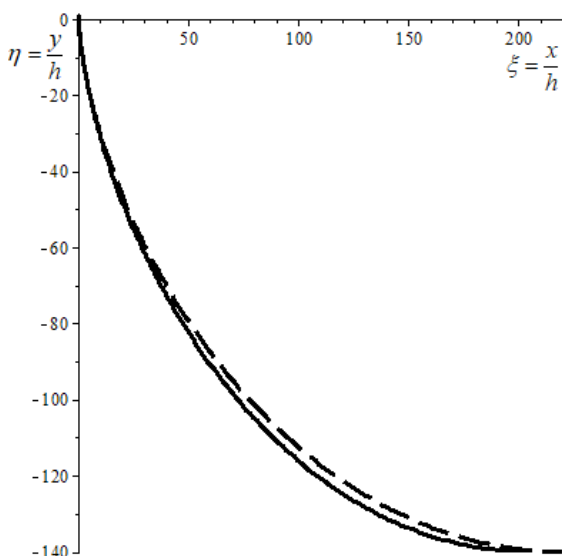


Рис. 6. Сравнение почти неподвижной брахистохроны (сплошная линия), $\lambda = 1\,000$, и обычной брахистохроны (пунктирная линия). Начальные условия

$$\alpha(0) = \frac{\pi}{2}, u(0) = 0, u'(0) = 1$$

Fig. 6. Comparison of an almost immobile brachistochrone (the solid line), $\lambda = 1\,000$, with an ordinary brachistochrone (the dashed line). Initial conditions are as follows:

$$\alpha(0) = \frac{\pi}{2}, u(0) = 0, u'(0) = 1$$

Заключение

В заключение кратко формулируем основные полученные выше результаты.

1. Приведена наиболее общая система динамических уравнений, описывающая вращающуюся с постоянной угловой частотой в поле силы тяжести брахистохрону с учетом сил сопротивления.

2. Приведен подробный анализ полученных уравнений в отсутствии сил сопротивления.

3. Строго аналитически доказано, что в поле силы тяжести криволинейное движение может происходить только либо по параболе, либо по брахистохроне. Других траекторий в природе не существует.

4. Найдено численное решение уравнений (27) с начальными условиями (28) и с их помощью согласно неявной зависимости $\eta = \eta(\xi, \lambda, \gamma)$ дана графическая иллюстрация возможных форм желоба в условиях его вращения.

Список источников

1. Гладков С.О., Богданова С.Б. Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 1. Ст. 161101-1-5.

2. Гладков С.О., Богданова С.Б. О траектории движения тела, входящего в жидкость под произвольным углом // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 4. Ст. 164002-1-5.
3. Гладков С.О., Богданова С.Б. Обобщенные динамические уравнения плоского криволинейного движения материального тела по желобу с учетом сил трения (их численный анализ в некоторых частных случаях) // Ученые записки физического факультета МГУ. 2017. № 1. Ст. 171101-1-5.
4. Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории движения шарика по вращающейся брахистохроне с учетом сил трения // Ученые записки физического факультета МГУ. 2017. Ст. 172101-1-6.
5. Гладков С.О., Богданова С.Б. О классе двумерных геодезических кривых в поле силы тяжести // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 58. С. 5–13. doi: 10.17223/19988621/58/1
6. Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории движения тел с переменной массой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 65. С. 83–91. doi: 10.17223/19988621/65/6
7. Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории пространственной брахистохроны // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 68. С. 53–60. doi: 10.17223/19988621/68/5
8. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Analytical and numerical solution of the problem on brachistochrones in some general cases // Journal of Mathematical Sciences. 2020. V. 245, No. 4. P. 528–537. doi: 10.1007/s10958-020-04709-0
9. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. On a class of planar geometrical curves with constant reaction forces acting on particles moving along them // Journal of Mathematical Sciences. 2021. V. 257, No. 1. P. 27–30. doi: 10.1007/s10958-021-05466-4
10. Гладков С.О., Богданова С.Б. К вопросу учета силы сопротивления в шарнирной точке крепления физического маятника и ее влияние на динамику движения // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2019. Т. 27, № 1. С. 54–62. doi: 10.18500/0869-6632-2019-27-1-53-62
11. Гладков С.О. Об одном методическом подходе при выводе основных физических уравнений // Физическое образование в вузах. 2021. Т. 27, вып. 2. С. 5–12.
12. Гладков С.О. К вопросу о вычислении времени остановки вращающегося в вязком континууме цилиндрического тела и времени увлечения соосного с ним внешнего цилиндра // Журнал технической физики. 2018. Т. 88, вып. 3. С. 337–341. doi: 10.21883/JTF.2018.03.45587.2349
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М. : Наука, 1973. 207 с.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М. : Наука, 1988. 733 с.

References

1. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2016) Geometricheskii fazovyy perekhod v zadache o brakhistokhrone [Geometrical phase transition in a problem on brachistochrone]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 1. Article 161101. pp. 1–5.
2. Gladkov S.O. (2016) O traektorii dvizheniya tela, vkhodyashchego v zhidkost' pod proizvol'nym uglom [On the trajectory of the body entering the fluid at an arbitrary angle]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 4. Article 164002. pp. 1–5.
3. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2017) Obobshchennye dinamicheskie uravneniya ploskogo krivolineynogo dvizheniya material'nogo tela po zhelobu s uchetom sil treniya (ikh chislennyy

- analiz v nekotorykh chastnykh sluchayakh) [Generalized dynamical equations of plane curvilinear motion of a material body on a trench with account of friction forces (their numerical analysis in some special cases)]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 1. Article 171101. pp. 1–5.
4. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2017) K teorii dvizheniya sharika po vrashchayushcheyssa brakhistokhrone s uchedom sil treniya [To the question of analysis equations for moving due to the rotating of the plane brachistohron]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoirs of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 2. Article 172101. pp. 1–6.
 5. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2019) O klasse dvukhmernykh geodezicheskikh krivyykh v pole sily tyazhesti [On the class of two-dimensional geodesic curves in the field of the gravity force]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 58. pp. 5–13. doi: 10.17223/19988621/58/1.
 6. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2020) K teorii dvizheniya tel s peremennoy massoy [To the theory of motion of bodies with variable mass]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 65. pp. 83–91. doi: 10.17223/19988621/65/6.
 7. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2020) K teorii prostranstvennoy brakhistokhrony [To the theory of n-dimensional brachistochrone]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 68. pp. 53–60. doi: 10.17223/19988621/68/5.
 8. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2020) Analytical and numerical solution of the problem on brachistochrones in some general cases. *Journal of Mathematical Sciences*. 245(4). pp. 528–537. doi: 10.1007/s10958-020-04709-0.
 9. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2021) On a class of planar geometrical curves with constant reaction forces acting on particles moving along them. *Journal of Mathematical Sciences*. 257(1). pp. 27–30. doi: 10.1007/s10958-021-05466-4.
 10. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2019) K voprosu ucheta sily soprotivleniya v sharnirnoy toчке krep leniya fizicheskogo mayatnika i eyo vliyanie na dinamiku dvizheniya [On the question accounting of the resistance force at the hinge point of setting physical pendulum and its influence on the dynamics of movement]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Prikladnaya nelineynaya dinamika – Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 27(1). pp. 53–62. doi: 10.18500/0869-6632-2019-27-1-53-62.
 11. Gladkov S.O. (2021) Ob odnom metodicheskoy podkhode pri vyvode osnovnykh fizicheskikh uravneniy [About one method for deducing basic physical equations]. *Fizicheskoe Obrazovanie v VUZakh*. 27(2). pp. 5–12.
 12. Gladkov S.O. (2018) On calculating the stopping time of a cylindrical body rotating in a viscous continuum and the time of entrainment of a coaxial external. *Technical Physics*. 63(3). pp. 325–330. doi: 10.1134/S1063784218030088.
 13. Landau L., Lifshitz E. (1976) *Mechanics*. Oxford: Butterworth-Heinemann.
 14. Landau L.D., Lifshitz E.M. (1987) *Fluid Mechanics*. Oxford: Butterworth-Heinemann.

Сведения об авторах:

Гладков Сергей Октябринович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладных программных средств и математических методов Московского авиационного института, Москва, Россия. E-mail: sglad51@mail.ru

Богданова Софья Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладных программных средств и математических методов Московского авиационного института, Москва, Россия. E-mail: sonjaf@list.ru

Information about the authors:

Gladkov Sergey O. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation). E-mail: sglad51@mail.ru

Bogdanova Sofiya B. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation). E-mail: sonjaf@list.ru

Статья поступила в редакцию 26.09.2021; принята к публикации 12.07.2022

The article was submitted 26.09.2021; accepted for publication 12.07.2022

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/78/8

Экспериментальное и аналитическое исследование геометрически-нелинейного изгиба консоли под действием распределенной нагрузки гравитационного типа

Дмитрий Михайлович Зуев¹, Дмитрий Дмитриевич Макаров²,
Кирилл Германович Охоткин³

¹ Сибирский государственный университет науки и технологий
им. акад. М.Ф. Решетнева, Красноярск, Россия

² АО «Информационные спутниковые системы им. акад. М.Ф. Решетнева»,
Железногорск, Красноярский край, Россия

¹ ZuevDmitriy93@yandex.ru

² dima-makarov-98@mail.ru

³ okg2000@mail.ru

Аннотация. Представлено приближенное аналитическое решение для случая геометрически-нелинейного изгиба тонкой упругой консоли под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки гравитационного типа. Решение основано на модификации линеаризованного уравнения Эйлера–Бернулли условием сохранения криволинейной длины. Для верификации решения проведено экспериментальное исследование геометрически-нелинейного изгиба консоли, получены стрела прогиба, осевое смещение и формы изгиба. Сравнение показало качественное и количественное соответствие между экспериментальными и теоретическими данными.

Ключевые слова: консоль, геометрически-нелинейный изгиб, большие деформации, распределенная нагрузка, эксперимент

Для цитирования: Зуев Д.М., Макаров Д.Д., Охоткин К.Г. Экспериментальное и аналитическое исследование геометрически-нелинейного изгиба консоли под действием распределенной нагрузки гравитационного типа // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 78. С. 99–111. doi: 10.17223/19988621/78/8

Original article

The experimental and analytical study of geometrically nonlinear bending of a cantilever beam under a distributed gravity load

Dmitriy M. Zuev¹, Dmitriy D. Makarov², Kirill G. Okhotkin³

¹ Reshetnev Siberian State University, Krasnoyarsk, Russian Federation

² JSC Information Satellite Systems Reshetnev, Zheleznogorsk, Russian Federation

¹ ZuevDmitriy93@yandex.ru

² dima-makarov-98@mail.ru

³ okg2000@mail.ru

Abstract. This paper describes an approximate analytical solution for the geometrically nonlinear bending of a thin elastic cantilever beam under a uniformly distributed gravity load. The solution is based on the linearized Euler-Bernoulli equation of mechanics of materials. Traditionally, such a linear approach is used for small (geometrically linear) deflections. The authors have modified the original equation with an arc-length preservation condition. The modified solution allows one to obtain bending shapes, deflection, and axial displacement in the range of loads corresponding to geometrically nonlinear bending of a beam (large deflections).

An experimental study is conducted to verify the proposed solution. A thin steel band bent by gravity is used as a sample. Changes in the length of the bent sample part allow one to obtain various dimensionless load parameters. The deflections and axial displacements averaged on experimental statistics are determined. Bending shapes are obtained by the least square method of 5th order.

Experimental and theoretical data are shown to be in good agreement. This fact confirms that the approximate analytical solution can be applied to solve large deflection problems in a wider range of loads than normally considered in the original linear theory.

Keywords: cantilever, geometrically nonlinear bending, large deflections, distributed load, experiment

For citation: Zuev, D.M., Makarov, D.D., Okhotkin, K.G. (2022) The experimental and analytical study of geometrically nonlinear bending of a cantilever beam under a distributed gravity load. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 78. pp. 99–111. doi: 10.17223/19988621/78/8

Задачи геометрически-нелинейного изгиба тонких гибких стержней под действием различных видов нагружения важны для различных приложений в науке и технике, в которых стержень может быть подвержен большим деформациям, величина которых может быть сопоставима с длиной самого стержня. К таким практическим приложениям относятся разработка трансформируемых антенн с гибкими элементами [1], разработка перспективных микро- и нано- электромеханических систем (MEMS и NEMS) [2, 3], разработка «податливых» механизмов [4] и др.

Подобные задачи при различных способах распределенного нагружения стержней решаются численными и аналитическими методами многими отечественными и зарубежными исследователями. В работе [5] F. Rohde (1952) представлено аналитическое приближенное решение для стержня под действием равномерно-распределенной нагрузки путем представления угла наклона касательной к точке стержня в степенной ряд по криволинейной длине стержня. R. Frisch-Fay (1961) [6] представил аналитическое приближенное решение для изгиба консоли и выпучивания вертикального стержня равномерно-распределенной нагрузкой. Решение представлено в виде степенного ряда по синусоидальным функциям. R. Shmide и D. DaDeppo (1970) [7] получили точное решение для изгиба консольных стержней и колон под собственным весом. Решение представлено в виде бесконечного степенного ряда. C.Y. Wang (1986) [8] провел критический обзор работ по теме изгиба стержней под собственным весом в различных

случаях. В работе G. Scarpello и D. Ritelli (2011) [9] представлено точное решение для различных случаев нагружения консоли, включая случай консоли при поперечной гравитационной нагрузке. Решение получено в эллиптических интегралах и гипергеометрических функциях. В работе L. Chen (2010) [10] предложена достаточно простая численная техника для определения больших деформаций тонкого упругого стержня. Рассмотрено несколько случаев, в том числе изгиб равномерно распределенной нагрузкой гравитационного типа. Также в этой работе приведено сравнение с экспериментальными данными из статьи T. Belendez и соавт. (2003) [11] для случая комбинированной нагрузки (поперечная сосредоточенная на конце и собственный вес консоли). В работе [12] E. Barbieri (2020) получено решение для изгиба стержня равномерно-распределенной следящей нагрузкой, решение получено с применением гипергеометрических функций.

В литературе также представлены экспериментальные исследования изгиба консоли поперечной равномерно-распределенной нагрузкой [11, 13–16]. В работе [14] авторства H. Lee и соавт. (1964) проведен эксперимент по изгибу тонких упругих консолей поперечной гравитационной нагрузкой. Использовались образцы разной длины, изготовленные из эпоксидной смолы. Авторы привели некоторые формы изгиба, стрелу прогиба и осевое смещение. Также методами фотоупругости были получены распределения напряжений в консоли при изгибе. Однако авторы не привели данных о модуле Юнга образцов. В остальных работах [11, 13, 15, 16] были рассмотрены случаи комбинированной нагрузки – сочетания собственного веса консоли с поперечной сосредоточенной нагрузкой на свободном конце консоли. В этих работах не проводились исследования поведения консоли при различных значениях нагрузки гравитационного типа. В работе Z. Gosar (2014) [13] проведен эксперимент с пластиковой полосой под действием комбинированной нагрузки. Модуль Юнга был измерен экспериментально с помощью соответствующего оборудования, затем уточнен таким образом, чтобы разница между экспериментальными и теоретическими данными была минимальной. Приведены формы изгиба, построенные по пяти экспериментальным точкам. При этом в работе приведены неполные данные об образце, что не дает возможности оценить диапазон безразмерных нагрузок.

В исследовании A.R. Bahari и соавт. [15] проведен численный анализ геометрически-линейного и геометрически-нелинейного изгиба консоли комбинированной нагрузкой, который был сравнен с полученными экспериментальными данными изгиба тонкой стальной полосы. В эксперименте была получена только стрела прогиба консоли. Безразмерная гравитационная нагрузка составила $\mu = 0.01$, где безразмерный параметр нагрузки $\mu = WL^2/2EJ$, W – вес консоли, L – длина консоли, E – модуль Юнга, J – момент инерции поперечного сечения стержня.

В публикации T. Belendez и соавт. (2003) [11] проведен эксперимент с тонкой стальной консолью по действием комбинированной нагрузки. В работе приведены стрела прогиба и осевое смещение при значении гравитационной безразмерной нагрузки $\mu = 0.91$, показаны формы изгиба для трех значений поперечной нагрузки.

Таким образом, в литературе экспериментальные исследования изгиба консоли исключительно равномерно-распределенной поперечной нагрузкой практически не представлены.

Постановка задачи

В данной работе будет рассмотрен геометрически-нелинейный изгиб тонкой упругой консоли под действием поперечной равномерно-распределенной нагрузки гравитационного типа (рис. 1). В процессе изгиба консоль длины L постоянного поперечного сечения и постоянной жесткости EJ подвергается действию равномерно-распределенной нагрузки интенсивностью w . В процессе изгиба консоли направление нагрузки w не изменяется. В результате изгиба консоль получает прогиб f и осевое смещение δx .

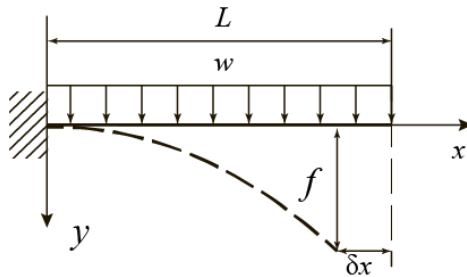


Рис. 1. Схема изгиба консоли поперечной равномерно-распределенной нагрузкой
Fig. 1. Scheme of bending for a cantilever beam under transversal uniformly distributed load

Согласно классической теории изгиба балок в нашем случае приняты следующие допущения:

- не учитываются деформация сдвига;
- материал консоли изотропный и линейно-упругий;
- консоль является нерастяжимой;
- сечение консоли является постоянным.

Цель работы – обобщение ранее предложенного авторами в [17] метода модификации линейных формул на случай поперечной равномерно-распределенной нагрузки гравитационного типа и его валидация путем сравнения с полученными экспериментальными данными.

Приближенное решение. Модифицированные выражения

Для получения аналитического решения при решении задачи изгиба тонкого упругого стержня под действием различных нагрузок традиционно используется нелинейное уравнение Эйлера–Бернулли:

$$\frac{M(x)}{EJ} = \frac{d^2 y}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2}, \quad (1)$$

где $M(x)$ – действующий момент, x и y – координаты точек формы изгиба стержня. Решение уравнения (1) в точной геометрически-нелинейной формулировке является нетривиальной задачей, приводящей к решениям в эллиптических интегралах, гипергеометрических функциях и бесконечных рядах, как, например, в [9].

В классической теории сопротивления материалов изгиб стержня под нагрузкой рассматривается в приближенной линейной формулировке. Для этого при-

нимается допущение, что прогибы являются малыми, и это даст основание линеаризовать правую часть уравнения (1):

$$\frac{M(x)}{EJ} = \frac{d^2 y}{dx^2}. \quad (2)$$

В случае консоли, заделка которой находится в начале координат, начальные условия $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. При гравитационной нагрузке w действующий момент будет выглядеть как

$$M = -\frac{w(L-x)^2}{2}, \quad (3)$$

где w – интенсивность распределенной нагрузки.

Учитывая начальные условия и выражение для действующего момента (3), проинтегрируем (2) и получим выражение для формы изгиба [18]:

$$y = \frac{w}{24EJ} (6L^2 x^2 - 4Lx^3 + x^4). \quad (4)$$

Далее для удобства будем использовать безразмерные координаты (ξ , η) и безразмерный параметр нагрузки μ :

$$\xi = x/L; \quad \eta = y/L; \quad \mu = wL^3/2EJ. \quad (5)$$

В таком случае выражение для формы изгиба (5) примет в безразмерных параметрах вид:

$$\eta(\mu, \xi) = \frac{1}{12} \mu (\xi^4 - 4\xi^3 + 6\xi^2). \quad (6)$$

В теории сопротивления материалов [18] стрела прогиба определяется согласно следующему упрощенному выражению:

$$f = \eta(\mu, 1) = \frac{1}{12} \mu. \quad (7)$$

Такое выражение справедливо, если считать деформации малыми и можно пренебречь смещением конца стержня в горизонтальном направлении (осевым смещением). Таким образом, математический смысл выражения (7) в сохранении проекции длины изогнутой консоли на горизонтальную ось. Считается, что данный подход справедлив для величин прогибов, не превышающих 3–5% от длины стержня [18, 19], что соответствует интервалу безразмерной нагрузки $0 < \mu < 0.6$.

Авторами ранее был предложен оригинальный метод модификации линейных выражений для стрелы прогиба [17], что позволяет получать с помощью линейных выражений усовершенствованные формулы для геометрически-нелинейных изгибов стержня. В работе [17] показано, что результат, полученный с помощью модифицированных линейных выражений, имеет высокую степень приближения к точным аналитическим решениям в эллиптических функциях.

Рассмотрим приложение авторского метода к случаю изгиба тонкой упругой консоли равномерно-распределенной нагрузкой гравитационного типа. Данный метод предлагает использовать условие сохранения криволинейной длины консоли для получения стрелы прогиба, осевого смещения и форм изгиба. Условие сохранения криволинейной длины выглядит следующим образом:

$$\int_0^{1-\delta\xi} \left\{ 1 + \left[\frac{d\eta(\xi, \mu)}{d\xi} \right]^2 \right\}^{1/2} d\xi = 1, \quad (8)$$

где $\delta\zeta = \delta x/L$ – безразмерное осевое смещение конца стержня. Подставляя (6) в (8), получим явный вид условия сохранения длины:

$$\int_0^{1-\delta\zeta} \left\{ 1 + \left[\mu \left(\frac{\xi^3}{3} - \xi^3 + \xi \right) \right]^2 \right\}^{1/2} d\xi = 1. \quad (9)$$

Из уравнения (9) требуется найти безразмерное осевое смещение $\delta\zeta$. Это можно сделать любым численным методом (методом бисекции, к примеру). Далее для получения стрелы прогиба требуется определить прогиб конца стержня в точке $1 - \delta\zeta$:

$$f = \eta(\mu, 1 - \delta\zeta). \quad (10)$$

Для получения форм изгиба нужно воспользоваться выражением (6) и при этом учитывать, что следует проводить построение формы изгиба в интервале $0 < \zeta < (1 - \delta\zeta)$.

Экспериментальная установка и методика эксперимента

Эксперимент для валидации приближенного аналитического решения проводился на установке, представляющей собой штатив, на котором с помощью каретки 1 закреплен образец 2 (рис. 2). Регистрация параметров изогнутой консоли производилась на зеркальную фотокамеру Canon 600D с объективом EF-S 18–55 мм.

Полученный фотоматериал был обработан с помощью программного обеспечения Graph2Digit, которое предназначено для оцифровки графиков с отсканированных бумажных носителей. Для этого согласно метке-этalonу 3 выставлялась координатная сетка, затем согласно положению консоли на фото выставлялся набор точек вдоль изогнутой консоли для оцифровки.

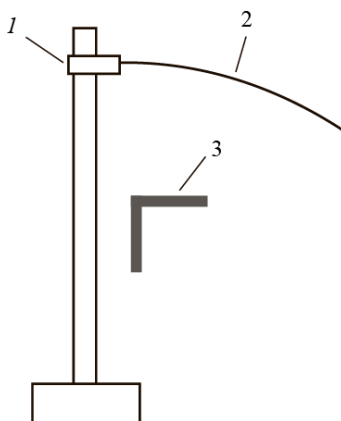


Рис. 2. Схема экспериментальной установки
Fig. 2. Design of the experimental setup

В эксперименте использовалась стальная полоса, параметры которой представлены в табл. 1. Для изменения безразмерной нагрузки μ в процессе эксперимента изменялась эффективная длина консоли (длина образца, которая участвует в изгибе). Изменение эффективной длины происходило с шагом 5 см (эффективная длина консоли в эксперименте составила от 30 до 100 см).

Таблица 1

Параметры образца

Полная длина, см	104
Масса, г	297.3
Линейная масса, г/см	2.86
Ширина, мм	39.2
Толщина, мм	0.95
Модуль упругости, ГПа	210

Полученный набор точек для форм изгиба был выгружен в формате электронных таблиц, где данные были приведены к безразмерным координатам (ξ , η) и безразмерной нагрузке по следующим формулам:

$$\xi = x / L ; \eta = y / L ; \mu = WL^2 / 2EJ .$$

Из полученного набора точек для форм изгиба были извлечены данные для стрелы прогиба f и безразмерного осевого смещения $\delta\zeta$. Эксперимент был проведен семь раз для минимизации погрешности. Данные для стрелы прогиба и осевого смещения были усреднены. Для форм изгиба методом наименьших квадратов были получены полиномы пятой степени.

Полученные экспериментальные результаты

В процессе выполнения эксперимента были получены стрела прогиба и осевое смещение конца стержня на интервале безразмерных нагрузок $0 < \mu < 2.4$ (рис. 3, *a*), формы изгиба для ряда безразмерных нагрузок μ (рис. 3, *b*). В табл. 2 приведены экспериментальные данные для стрелы прогиба и осевого смещения.

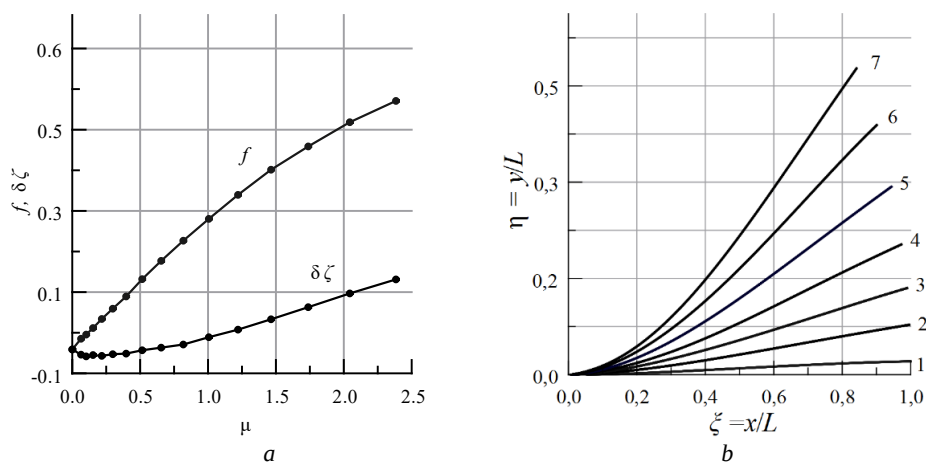


Рис. 3. Полученные экспериментальные данные: *a* – безразмерные стрела прогиба f и осевое смещение образца $\delta\zeta$ в зависимости от безразмерной нагрузки μ ; *b* – формы изгиба.

Цифрами обозначены формы, соответствующие следующим безразмерным нагрузкам: $\mu = 0.064$ (1); $\mu = 0.298$ (2); $\mu = 0.515$ (3); $\mu = 0.818$ (4); $\mu = 1.221$ (5); $\mu = 1.738$ (6); $\mu = 2.384$ (7)

Fig. 3. The obtained experimental data: (a) dimensionless deflection f and axial displacement $\delta\zeta$ as functions of dimensionless load μ and (b) bending shapes.

Numbers indicate bending shapes for the following dimensionless loads:

$\mu =$ (1) 0.064, (2) 0.298, (3) 0.515, (4) 0.818, (5) 1.221, (6) 1.738, and (7) 2.384

Полученные экспериментальные данные для безразмерных стрелы прогиба f и осевого смещения $\delta\zeta$

Безразмерная нагрузка μ	Безразмерный прогиб, f	Безразмерное осевое смещение, $\delta\zeta$
0.064	0.022	-0.011
0.102	0.031	-0.014
0.153	0.045	-0.012
0.217	0.064	-0.013
0.298	0.085	-0.010
0.397	0.111	-0.009
0.515	0.147	-0.002
0.655	0.185	0.004
0.818	0.228	0.010
1.006	0.273	0.026
1.221	0.324	0.041
1.464	0.376	0.063
1.738	0.425	0.088
2.044	0.476	0.117
2.384	0.520	0.147

Анализ полученных результатов

На рис. 4 приведены теоретические и экспериментальные величины стрел прогиба и осевого смещения. Как видно, теоретические и экспериментальные данные согласуются на достаточно хорошем уровне.

На рис. 5 показаны теоретические и экспериментальные формы изгиба для некоторых нагрузок. Как можно увидеть, формы изгиба качественно соответствуют, однако наблюдается небольшое расхождение, которое составляет в среднем около 11%.

Для дальнейшего анализа построим графики отклонения теоретического решения от экспериментальных данных в зависимости от безразмерной нагрузки μ (см. рис. 5) для стрелы прогиба и осевого смещения (для осевого смещения будем строить график отклонения величины $L - \delta\zeta$). Как видно из рис. 6, расхождение для стрелы прогиба между теоретическими и экспериментальными значениями составляет в среднем около 10%, а для осевого смещения менее 2%. Повышение отклонения при малых нагрузках объясняется тем, что прогибы и осевые смещения имеют малое абсолютное значение, что дает вклад в погрешность обработки фотоматериала.

Интересным является тот факт, что описание геометрически-нелинейного изгиба с помощью метода, основанного на линеаризованном уравнении (3), позволяет достичь достаточно высокой точности на интервале сил, которые многократно превосходят традиционно принятые для линейных методов теории сопротивления материалов. Исходя из критерия применимости линейной теории для прогибов величиной не более 3–5% от длины стержня и формулы (7), интервал безразмерных нагрузок применимости линейной теории составляет $\mu < 0.6$. Предлагаемый метод модификации линейных формул был экспериментально проверен на участке сил $\mu < 2.4$.

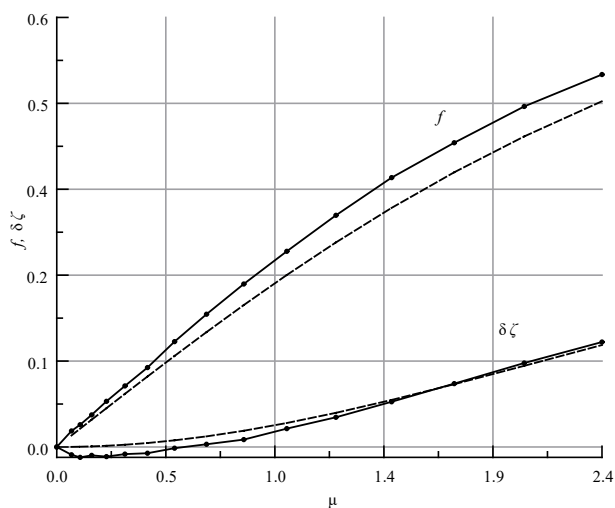


Рис. 4. Сравнение теоретических и экспериментальных стрел прогиба f и осевого смещения $\delta\zeta$. Сплошные линии соответствуют экспериментальным данным, пунктирные линии теоретическим данным (9), (10)

Fig. 4. Comparison of theoretical and experimental data on deflection f and axial displacement $\delta\zeta$. Solid lines indicate experimental data, and dashed lines, theoretical data (9), (10)

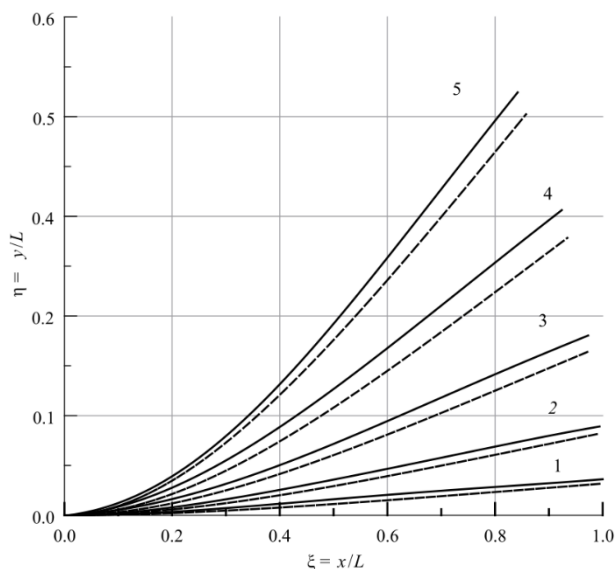


Рис. 5. Сравнение теоретических и экспериментальных форм изгиба. Сплошные линии соответствуют экспериментальным данным, пунктирные теоретическим (6), (9). Цифрами обозначены группы кривых, соответствующих следующим безразмерным нагрузкам: $\mu = 0.153$ (1); $\mu = 0.397$ (2); $\mu = 0.818$ (3); $\mu = 1.464$ (4); $\mu = 2.384$ (5)

Fig. 5. Comparison of theoretical and experimental data on bending shapes. Solid lines indicate experimental data, and dashed lines, theoretical data (6), (9). Numbers denote groups of bending shapes for the following dimensionless loads: $\mu = (1) 0.153$, (2) 0.397, (3) 0.818, (4) 1.464, and (5) 2.384

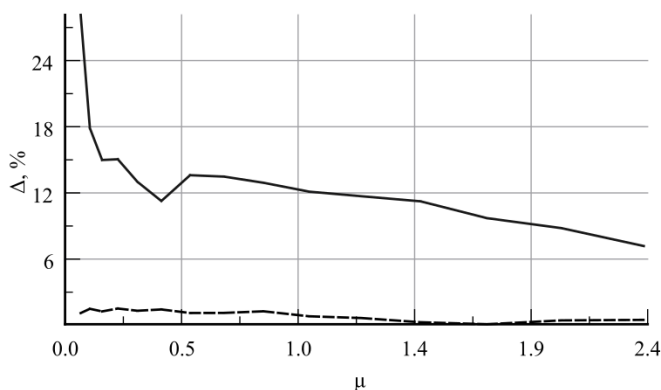


Рис. 6. Отклонение теоретических данных от экспериментальных для стрелы прогиба и осевого смещения. Сплошная линия – отклонение данных для стрелы прогиба f , пунктирная линия – отклонение данных для осевого смещения $\delta\zeta$

Fig. 6. Deviation between theoretical and experimental data on deflection and axial displacement. The solid line indicates deviation for deflection f , and the dashed line, deviation for axial displacement $\delta\zeta$

Предложенный метод модификации линейных формул достаточно прост в применении, что позволяет использовать его для инженерных применений, например на этапе эскизного проектирования трансформируемых антенных спутниковых конструкций.

Выводы

В работе был аналитически и экспериментально исследован геометрически-нелинейный изгиб тонкой упругой консоли под действием поперечной равномерно-распределенной нагрузки гравитационного типа. При этом использован авторский метод для определения форм изгиба, стрелы прогиба и осевого смещения, основанный на модификации линейных выражений классической теории сопротивления материалов. Рассмотрено линеаризованное уравнение Эйлера–Бернулли, которое было дополнено условием сохранения криволинейной длины.

Проведено экспериментальное исследование рассматриваемого случая изгиба консоли на участке сил, соответствующем геометрически-нелинейному изгибу консоли. Были получены формы изгиба, стрела прогиба и осевое смещение.

Сравнение приближенных аналитических решений, полученных с помощью предложенного метода, с экспериментальными данными показало качественное и количественное совпадение (расхождение около 10% для стрелы прогиба и менее 2% для осевого смещения). Этот факт вместе с относительной простотой применения метода дает основание считать полученное приближенное аналитическое решение применимым на практике, например на этапах эскизного проектирования стержневых элементов трансформируемых механических конструкций космических аппаратов.

Стоит отметить, что интервал нагрузок применимости данного метода многократно превосходит интервал применимости классической линейной теории сопротивления материалов. Модифицированное решение, основанное на линеари-

зованном уравнении Эйлера–Бернулли, дает достаточно точные результаты на интервале сил, соответствующем геометрически-нелинейному изгибу. Дальнейшее развитие работы предполагает обобщение метода на другие виды нагрузок и закреплений с экспериментальным подтверждением. Также возможно изучение геометрически-нелинейных колебаний.

Список источников

1. Лопатин А.В. и др. Геометрически нелинейная модель трансформируемого обода большой космической антенны с гибкими композитными элементами // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М.Ф. Решетнева. 2012. № 5 (45). С. 75–80.
2. Li M., Tang H.X., Roukes M.L. Ultra-sensitive NEMS-based cantilevers for sensing, scanned probe and very high-frequency applications // Nat. Nanotechnol. 2007. V. 2, No. 2. P. 114–120. doi: 10.1038/nnano.2006.208
3. Li X., Bhushan B., Takashime K., Baek C., Kim Y. Mechanical characterization of micro / nanoscale structures for MEMS / NEMS applications using nanoindentation techniques // Ultramicroscopy. 2003. V. 97, No. 1-4. P. 481–494. doi: 10.1016/S0304-3991(03)00077-9
4. Zhang A., Chen G. A comprehensive elliptic integral solution to the large deflection problems of thin beams in compliant mechanisms // J. Mech. Robot. 2013. V. 5, No. 2. P. 1–10. doi: 10.1115/1.4023558
5. Rohde F.V. Large deflections of a cantilever beam with uniformly distributed load // Q. Appl. Math. 1952. No. 2. P. 337–338.
6. Frisch-Fay R. The analysis of a vertical and a horizontal cantilever under a uniformly distributed load // J. Franklin Inst. 1961. V. 271, No. 3. P. 192–199. doi: 10.1016/0016-0032(61)90148-X
7. Schmidt R., DaDeppo D.A. Large deflections of heavy cantilever beams and columns // Q. Appl. Math. 1970. V. 28, No. 3. P. 441–444. doi: 10.1090/qam/99779
8. Wang C.Y. A critical review of the heavy elastica // Int. J. Mech. Sci. 1986. V. 28, No. 8. P. 549–559. doi: 10.1016/0020-7403(86)90052-4
9. Scarpello G.M., Ritelli D. Exact Solutions of Nonlinear Equation of Rod Deflections Involving the Lauricella Hypergeometric Functions // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2011. V. 2011. Art. 838924, 22 pages. doi: 10.1155/2011/838924
10. Chen L. An integral approach for large deflection cantilever beams // Int. J. Non. Linear. Mech. Elsevier. 2010. V. 45, No. 3. P. 301–305. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2009.12.004
11. Beléndez T., Neipp C., Beléndez A. Numerical and Experimental Analysis of a Cantilever Beam: a Laboratory Project to Introduce Geometric Nonlinearity in Mechanics of Materials // Int. J. Eng. Educ. 2003. V. 19, No. 6. P. 885–892.
12. Barbieri E. Analytical solution of the cantilevered elastica subjected to a normal uniformly distributed follower load // Int. J. Solids Struct. 2020. V. 202. P. 486–494. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2020.06.031
13. Gosar Z., Kosel F. Large deflection states of euler-bernoulli slender cantilever beam subjected to combined loading // SYLWAN. 2014. V. 158, No. 5. P. 489–499.
14. Lee H.C., Durelli A.J., Parks V.J. Stresses in largely deflected cantilever beams subjected to gravity // J. Appl. Mech. Trans. ASME. 1964. V. 36, No. 2. P. 323–325. doi: 10.1115/1.3564633
15. Bahari A.R., Yunus M.A., Abdul Rani M.N., Ayub M.A., Nalisa A. Numerical and Experimental Investigations of Nonlinearity Behaviour in A Slender Cantilever Beam // MATEC Web Conf. 2018. V. 217. P. 1–6. doi: 10.1051/mateconf/201821702008
16. Brojan M., Cebon M., Kosel F. Large deflections of non-prismatic nonlinearly elastic cantilever beams subjected to non-uniform continuous load and a concentrated load at the free end // Acta Mech. Sin. Xuebao. 2012. V. 28, No. 3. P. 863–869. doi: 10.1007/s10409-012-0053-3

17. Зуев Д.М., Охоткин К.Г. Модифицированные выражения для стрелы прогиба консоли в случае поперечной нагрузки // Космические аппараты и технологии. 2020. Т. 4, № 1. С. 28–35. doi: 10.26732/j.st.2020.1.04
18. Тимошенко С.П., Gere Д. Механика материалов : учебник для вузов. 2-е, стер. изд. СПб. : Лань, 2002. 672 с.
19. Варданян Г.С., Андреев В.И., Амаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов с основами теории упругости теории и пластичности. М. : ACB, 1995. 572 с.

References

1. Lopatin A.V., Zakharov Yu.V., Okhotkin K.G., Vil'yanen V.V., Pashkovskiy A.V. (2012) Geometricheski nelineynaya model' transformiruemogo oboda bol'shoy kosmicheskoy antennoy s gibkimi kompozitnymi elementami [Geometrically nonlinear model of a transformable rim of the large space antenna with flexible composite elements]. *Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta imeni akademika M.F. Reshetneva – Siberian Aerospace Journal*. 5(45). pp. 75–80.
2. Li M., Tang H.X., Roukes M.L. (2007) Ultra-sensitive NEMS-based cantilevers for sensing, scanned probe and very high-frequency applications. *Nature Nanotechnology*. 2(2). pp. 114–120. doi: 10.1038/nnano.2006.208.
3. Li X., Bhushan B., Takashime K., Baek C., Kim Y. (2003) Mechanical characterization of micro/nanoscale structures for MEMS/NEMS applications using nanoindentation techniques. *Ultramicroscopy*. 97. pp. 481–494. doi: 10.1016/S0304-3991(03)00077-9.
4. Zhang A., Chen G. A. (2013) Comprehensive elliptic integral solution to the large deflection problems of thin beams in compliant mechanisms. *Journal of Mechanisms and Robotics*. 5(2). pp. 1–10. doi: 10.1115/1.4023558.
5. Rohde F.V. (1952) Large deflections of a cantilever beam with uniformly distributed load. *Quarterly of Applied Mathematics*. 2. pp. 337–338.
6. Frisch-Fay R. (1961) The analysis of a vertical and a horizontal cantilever under a uniformly distributed load. *Journal of the Franklin Institute*. 271(3). pp. 192–199. doi: 10.1016/0016-0032(61)90148-X.
7. Schmidt R., DaDeppo D.A. (1970) Large deflections of heavy cantilever beams and columns. *Quarterly of Applied Mathematics*. 28(3). pp. 441–444. doi: 10.1090/qam/99779.
8. Wang C.Y. (1986) A critical review of the heavy elastic. *International Journal of Mechanical Sciences*. 28(8). pp. 549–559. doi: 10.1016/0020-7403(86)90052-4.
9. Scarpello G.M., Ritelli D. (2011) Exact solutions of nonlinear equation of rod deflections involving the lauricella hypergeometric functions. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. Article 838924. doi: 10.1155/2011/838924.
10. Chen L. (2010) An integral approach for large deflection cantilever beams. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 45(3). pp. 301–305. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2009.12.004.
11. Beléndez T., Neipp C., Beléndez A. (2003) Numerical and experimental analysis of a cantilever beam: a laboratory project to introduce geometric nonlinearity in mechanics of materials. *International Journal of Engineering Education*. 19(6). pp. 885–892.
12. Barbieri E. (2020) Analytical solution of the cantilevered elastica subjected to a normal uniformly distributed follower load. *International Journal of Solids and Structures*. 202. pp. 486–494. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2020.06.031.
13. Gosar Z., Kosel F. (2014) Large deflection states of Euler-Bernoulli slender cantilever beam subjected to combined loading. *SYLWAN*. 158(5). pp. 489–499.
14. Lee H.C., Durelli A.J., Parks V.J. (1964) Stresses in largely deflected cantilever beams subjected to gravity. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME*. 36(2). pp. 323–325. doi: 10.1115/1.3564633.
15. Bahari A.R., Yunus M.A., Abdul Rani M.N., Ayub M.A., Nalisa A. (2018) Numerical and experimental investigations of nonlinearity behaviour in a slender cantilever beam. *MATEC Web Conferences*. 217. pp. 1–6. doi: 10.1051/mateconf/201821702008.

16. Brojan M., Cebon M., Kosel F (2012) Large deflections of non-prismatic nonlinearly elastic cantilever beams subjected to non-uniform continuous load and a concentrated load at the free end. *Acta Mechanica Sinica/Lixue Xuebao*. 28(3). pp. 863–869. doi: 10.1007/s10409-012-0053-3.
17. Zuev D.M., Okhotkin K.G. (2020) Modified formulas for maximum deflection of a cantilever under transverse loading. *Spacecrafts & Technologies*. 4(1). pp. 28–35. doi: 10.26732/j.st.2020.1.04.
18. Timoshenko S.P., Gere J.M. (1996) *Mechanics of Materials*. 4th ed. CL Engineering.
19. Vardanyan G.S., Andreev V.I., Atarov N.M., Gorshkov A.A. (1995) *Soprotivlenie materialov s osnovami teorii uprugosti teorii i plastichnosti* [Strength of materials with fundamentals of elasticity and plasticity theory]. Moscow: ASV.

Сведения об авторах:

Зуев Дмитрий Михайлович – аспирант, ассистент кафедры технической физики Сибирского государственного университета науки и технологии им. акад. М.Ф. Решетнева, Красноярск, Россия. E-mail: ZuevDmitriy93@yandex.ru

Макаров Дмитрий Дмитриевич – студент-бакалавр по направлению «физика» Сибирского государственного университета науки и технологии им. акад. М.Ф. Решетнева, Красноярск, Россия. E-mail: dima-makarov-98@mail.ru

Охоткин Кирилл Германович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры технической физики Сибирского государственного университета науки и технологии им. акад. М.Ф. Решетнева, Красноярск, Россия; заместитель генерального директора по науке АО «Информационные спутниковые системы им. акад. М.Ф. Решетнева», Железнодорожный, Красноярский край, Россия. E-mail: okg2000@mail.ru

Information about the authors:

Zuev Dmitriy M. (Assistant of the Applied Physics Department, Reshetnev Siberian State University, Krasnoyarsk, Russian Federation). E-mail: ZuevDmitriy93@yandex.ru

Makarov Dmitriy D. (Reshetnev Siberian State University, Krasnoyarsk, Russian Federation). E-mail: dima-makarov-98@mail.ru

Okhotkin Kirill G. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Applied Physics Department, Reshetnev Siberian State University, Krasnoyarsk, Deputy Director-General for Science, JSC Information Satellite Systems Reshetnev, Zheleznogorsk, Russian Federation). E-mail: okg2000@mail.ru

Статья поступила в редакцию 24.10.2021; принята к публикации 12.07.2022

The article was submitted 24.10.2021; accepted for publication 12.07.2022

Научная статья

УДК 533.6; 629.7

doi: 10.17223/19988621/78/9

Определение аэродинамических характеристик беспилотного летательного аппарата самолетного типа аналитическими методами

Куат Кайратович Исмаилов

*Томский государственный университет, Томск, Россия,
kuat@ftf.tsu.ru; mendikjan@gmail.com*

Аннотация. Приводится методика расчета аэродинамических характеристик беспилотного летательного аппарата (БПЛА) самолетного типа с помощью аналитических методов. Методика позволяет определять зависимости аэродинамических характеристик на рабочих углах атаки по известным моделям, а также экстраполировать результаты численных расчетов или экспериментов на весь диапазон рабочих углов атаки. Использование данной методики позволит форсировать этапы концептуального и предварительного проектирования БПЛА, определить режимы полета с максимальными значениями аэродинамических критериев эффективности. С использованием данной методики спроектированы БПЛА и проведено сравнение результатов расчета с результатами трехмерного моделирования аэродинамики планеров БПЛА в программных пакетах OpenFOAM и ANSYS Fluent на ресурсах суперкомпьютера Томского государственного университета СКИФ Cyberia.

Ключевые слова: беспилотный летательный аппарат, проектирование БПЛА, расчет первого приближения, аэродинамические критерии эффективности

Благодарности: Исследование выполнено при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет-2030).

Для цитирования: Исмаилов К.К. Определение аэродинамических характеристик беспилотного летательного аппарата самолетного типа аналитическими методами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 78. С. 112–124. doi: 10.17223/19988621/78/9

Original article

Determination of aerodynamic characteristics of fixed-wing unmanned aerial vehicle by analytical techniques

Kuat K. Ismailov

Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, kuat@ftf.tsu.ru; mendikjan@gmail.com

Abstract. This paper presents a theoretical study of quick methods for determining the aerodynamic characteristics of fixed-wing unmanned aerial vehicles (UAVs). The purpose

of the research is to create tools for aircraft shape optimization problems. The developed analytical techniques allow one to determine aerodynamic lift and drag coefficients as well as the efficiency characteristics based on the aircraft general characteristics. Other properties that can be derived are the wing shape parameters, the take-off mass, the structural mass, and the required characteristics of the propulsion and power supply system according to the specified flight performance characteristics. The use of these techniques for discrete points with aerodynamic characteristics obtained numerically or experimentally allows one to extrapolate the results to the entire range of operating angles of attack. As a result, the stages of conceptual and preliminary design of UAVs can be passed in a shorter span of time.

Two UAVs have been designed in Tomsk State University with the use of the proposed techniques. The first is the preliminary designed UAV Prototype-2E; the second is the Prototype-2T UAV, which has been fully designed and then manufactured. The data calculated with these techniques on a SKIF Cyberia supercomputer in Tomsk State University are compared with the results of numerical simulations implemented in OpenFOAM and ANSYS Fluent. Good agreement of the results is revealed.

Keywords: unmanned aerial vehicle, UAV design, preliminary design, aerodynamic efficiency

Acknowledgments: This study was supported by the Tomsk State University Development Programme (Priority-2030).

For citation: Ismailov, K.K. (2022) Determination of aerodynamic characteristics of fixed-wing unmanned aerial vehicle by analytical techniques. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 78. pp. 112–124. doi: 10.17223/19988621/78/9

В данной работе рассматривается методика расчета аэродинамических характеристик летательного аппарата самолетного типа, применяемая к беспилотным летательным аппаратам (БПЛА). Аэродинамические характеристики планера БПЛА в совокупности с его взлетной массой и характеристиками его силовой установки задают оптимальные режимы полета, при которых достигаются наибольшие или наименьшие значения целевых функций: дальности, продолжительности полета, вертикальной скорости, набора высоты и других величин, определяющих экономическую целесообразность эксплуатации. В частности, общими критериями целевых функций являются аэродинамическое качество K и критерий $K\sqrt{c_y}$, на основе которых в работе [1] показано определение оптимальных режимов крейсерского полета летательного аппарата. Поэтому задача определения аэродинамических характеристик БПЛА еще на этапе предэскизного и эскизного проектирования имеет важное значение для выбора наиболее эффективных конфигураций летательного аппарата. Для решения такой задачи широко применяются методы оценок, численные исследования аэродинамики взамен дорогостоящих экспериментальных методов исследования. Инженерные методы оценок аэродинамических характеристик основаны на классической теории крыла, общих моделях аэродинамики некоторых тел, автомодельных решениях и наиболее подробно описываются в работах [2–4]. Численные решения задачи основываются на известных подходах панельных методов, методов вычислительной гидромеханики и положениях аэродинамики летательных аппаратов. На основе методов вычислительной гидромеханики реализованы методы оптимального аэродинамического проекти-

рования, использующие генетические алгоритмы [5, 6]. Для всех этих методов требуется геометрическая модель планера, параметры которого на этапе предварительного проектирования неизвестны. Ввиду трудоемкости прямого решения, а иногда и невозможности определения геометрических параметров при требуемой аэродинамике, определение этих параметров планера производится методом последовательных приближений, при котором количество циклов эскизного проектирования от начального приближения до получения приближения летательного аппарата, удовлетворяющего эксплуатационным требованиям, может быть велико. Существующие и доступные методы расчета первого приближения БПЛА основаны на методах проектирования пилотируемых летательных аппаратов и не учитывают различий конструкции, энергетических и силовых установок, оборудования, характерных чисел Рейнольдса и других коэффициентов.

Поэтому целью данной работы является разработка методов для определения аэродинамических характеристик, оптимальных режимов полета без привязки к геометрическим моделям планера БПЛА, а лишь к наиболее общим геометрическим характеристикам. Геометрическое моделирование должно быть следующим за предварительным расчетом этапом проектирования, и его параметры должны определяться на основе требуемых аэродинамических характеристик.

Постановка и метод решения задачи

Рассматривается задача полета БПЛА, включающего основные фазы: взлет, набор высоты, горизонтальный полет, снижение, посадку. При проведении расчетов предполагалось, что фазы полета независимы друг от друга и представляют собой процессы равномерного установившегося движения, за исключением фазы взлета. Поэтому переходными процессами в рамках одной фазы полета пренебрегается. Между различными фазами полета переходные процессы учитываются при расчете энергии бортового источника. Основные силы, воздействующие на БПЛА в полете, приведены на рис. 1. Будем рассматривать рабочий диапазон углов атаки, при которых угол атаки α считается малым. Динамика бокового движения не рассматривается в силу малости аэродинамических боковых сил по сравнению с продольными и поперечными силами. Также исключается из рассмотрения динамика вращательного движения, так как моменты, воздействующие на планер БПЛА, в равновесном состоянии взаимно сбалансированы.

Для удобства представим аэродинамические силы через продольную и нормальную силы связанной системы координат, X и Y соответственно:

$$X = Y_a \alpha - X_a ; \quad (1)$$

$$Y = Y_a + X_a \alpha . \quad (2)$$

Тогда уравнения баланса сил в проекциях на связанную систему координат имеют вид:

$$P + X - G \sin \nu = 0 ; \quad (3)$$

$$Y - G \cos \nu = 0 . \quad (4)$$

В фазе взлета силовая установка БПЛА совершает работу, направленную на увеличение скорости до $V_{\min}$ и набор до минимальной безопасной высоты $H_{\min}$. С учетом КПД во взлетном режиме $\eta_{с.у.взл.}$ энергию для взлета приближенно можно записать:

$$W_{\text{с.у.взл.}} = \frac{1}{\eta_{\text{с.у.взл.}}} m \left(gH_{\min} + \frac{V_{\min}^2}{2} \right). \quad (5)$$

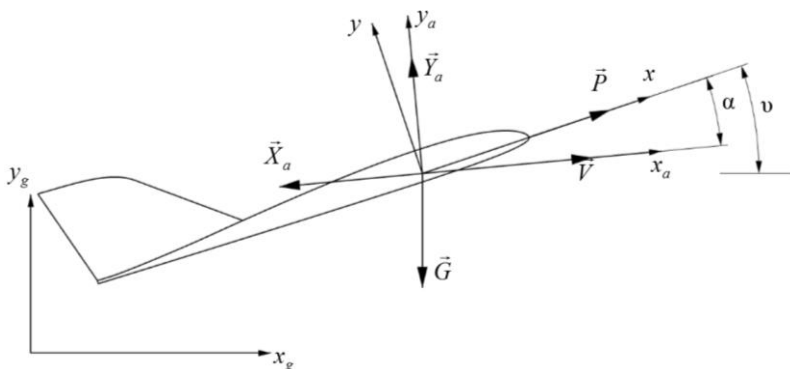


Рис. 1. Системы координат и силы, действующие на БПЛА.

$Ox_g y_g$ – земная система координат, $Ox_a y_a$ – скоростная система координат, Oxy – связанная система координат, α – угол атаки, ν – угол тангажа, $\vec{V}$ – воздушная скорость, $\vec{X}_a$ – сила аэродинамического сопротивления, $\vec{Y}_a$ – аэродинамическая подъемная сила, $\vec{G}$ – вес БПЛА,

$\vec{P}$ – сила тяги силовой установки

Fig. 1. Coordinate systems and the forces acting on a UAV.

$Ox_g y_g$ is the Earth fixed coordinate system, $Ox_a y_a$ is the wind-axes coordinate system, Oxy is the aircraft body fixed coordinate system, α is the angle of attack, ν is the pitch angle, $\vec{V}$ is the airspeed, $\vec{X}_a$ is the aerodynamic drag force, $\vec{Y}_a$ is the aerodynamic lift force, $\vec{G}$ is the UAV weight, and

$\vec{P}$ is the force of propulsion

Длительность фазы набора $t_{\text{наб.}}$ определяется заданной высотой H , углом набора $\nu - \alpha$ и скоростью $V_{\text{наб.}}$:

$$t_{\text{наб.}} = \frac{\Delta H}{V_{\text{наб.}} (\sin \nu - \alpha \cos \nu)};$$

$$\Delta H = H - H_{\min} - H_1,$$

где H_1 – высота точки взлета БПЛА над уровнем моря. Тогда работа силовой установки с учетом КПД в режиме набора $\eta_{\text{с.у.наб.}}$

$$W_{\text{с.у.наб.}} = \frac{1}{\eta_{\text{с.у.наб.}}} \left(1 - \frac{c_x}{c_y} \frac{\cos \nu}{\sin \nu} \right) \left(1 - \frac{\alpha \cos \nu}{\sin \nu} \right)^{-1} G \Delta H, \quad (6)$$

где c_x, c_y – коэффициенты сил X, Y .

Работа силовой установки в фазе горизонтального полета, продолжительностью $t_{\text{кр.}}$ при скорости $V_{\text{кр.}}$, с учетом КПД силовой установки $\eta_{\text{с.у.кр.}}$

$$W_{\text{с.у.кр.}} = - \frac{1}{\eta_{\text{с.у.кр.}}} \frac{c_x}{c_y} G V_{\text{кр.}} t_{\text{кр.}}. \quad (7)$$

С учетом (1)–(2) и вводя аэродинамическое качество как $K = c_{ya} / c_{xa}$ выражения (6)–(7) примут вид:

$$W_{с.у.наб.} = \frac{1}{\eta_{с.у.наб.}} \left(1 + \frac{1}{K} \frac{\cos v + \alpha \sin v}{\sin v - \alpha \cos v} \right) G \Delta H ; \quad (8)$$

$$W_{с.у.кр.} = \frac{1}{\eta_{с.у.кр.}} \left(\frac{1}{K} + \alpha \left(1 - \frac{1}{K^2} \right) \right) G V_{кр.} t_{кр.} . \quad (9)$$

Из выражений (8)–(9) видно, что при фиксированных v , V и $t_{кр.}$ минимум достигается при условии максимума аэродинамического качества K . Выражая $V_{кр.}$ через Y , равный G в горизонтальном полете, перепишем выражение (7):

$$W_{с.у.кр.} = - \frac{1}{\eta_{с.у.кр.}} \frac{c_{ха}}{c_{ya}^{1.5}} (1 - K\alpha) \frac{G^{1.5}}{\sqrt{\rho S_0}} t_{кр.} ,$$

где ρ – плотность воздуха, S_0 – базовая площадь крыла. В последнем выражении достигается минимальное значение мощности горизонтального полета $W_{с.у.кр.}$ при условии максимума критерия $K \sqrt{c_y} = c_{ya}^{1.5} / c_{ха}$.

Предполагается, что при снижении БПЛА переходит в режим планирования, поэтому работа силовой установки равна нулю. Однако при проведении расчетов необходимо выполнить учет потребления целевой нагрузки и бортового оборудования. Считая их мощность потребления постоянной, для расчета потребной энергии достаточно вычислить продолжительность снижения:

$$t_{снж.} = \frac{\Delta H_1}{V_{план.} (\sin v - \alpha \cos v)} ;$$

$$\Delta H_1 = H_2 - H ,$$

где $V_{план.}$ – скорость планирования, H_2 – высота точки приземления над уровнем моря. Из выражений (1)–(4) для фазы снижения с учетом коэффициентов сил получим

$$\frac{1}{K} - \alpha = \operatorname{tg}(-v) .$$

Суммарное энергопотребление силовой установки БПЛА в полете (5), (8) и (9) минимально при максимуме параметра K , требуемая мощность минимальна при максимуме критерия $K \sqrt{c_y}$, что при фиксированном запасе энергии соответствует наибольшей дальности в первом случае и максимальной продолжительности полета во втором. Эти критерии определяют совершенство аэродинамической компоновки планера БПЛА и являются показателями его эффективности. В работе [7] отмечается, что индуктивное сопротивление крыла конечного размаха минимально при эллиптическом распределении циркуляции по размаху. Для такого крыла справедливы выражения, определяющие коэффициент подъемной силы c_{ya} и коэффициент сопротивления $c_{ха}$:

$$c_{ya} = c_y^a (\alpha - \alpha_0) ; \quad (10)$$

$$c_{ха} = c_{xp} + \frac{c_{ya}^2}{\pi e \lambda} . \quad (11)$$

Далее в тексте при обозначении аэродинамических сил и их коэффициентов индекс a будем опускать, т.е. символами X , Y , c_x , c_y будем обозначать аэродина-

мические силы и их коэффициенты вместо сил связанной системы координат. В (10) c_y^a определялось в соответствии с рекомендациями работ [3, 4]:

$$c_y^a = 2\pi \left(1 + \frac{2}{\lambda}\right)^{-1}.$$

Угол атаки α_0 – угол, при котором подъемная сила равна нулю (нулевая подъемная сила):

$$\begin{aligned}\alpha_0|_{3D} &= \alpha_0|_{2D}; \\ \alpha_0|_{2D} &= -1.04 f,\end{aligned}$$

где $\alpha_0|_{3D}$ – угол атаки нулевой подъемной силы крыла конечного размаха, $\alpha_0|_{2D}$ – угол атаки нулевой подъемной силы в плоской задаче обтекания профиля крыла при характерных для крыла БПЛА числах Рейнольдса ($Re = 10^5 \div 2 \cdot 10^6$), f – относительная кривизна профиля в процентах.

В выражении (13) c_{xp} – коэффициент профильного сопротивления планера БПЛА, λ – удлинение крыла, e – коэффициент Освальда, отражающий интерференцию крыла с фюзеляжем, мотогондолами и другими элементами на крыле. Коэффициент профильного сопротивления в первом приближении можно представить в виде суммы сопротивлений отдельных элементов планера:

$$c_{xp} = \sum c_{xp, \text{элемент}}. \quad (12)$$

Коэффициент профильного сопротивления для крыла $c_{xp, \text{крыло}}$ и оперения $c_{xp, \text{опер}}$ берется из поляр аэродинамических профилей. Для фюзеляжа, мотогондол и других выступающих элементов коэффициент профильного сопротивления берется из табличных данных. В общем случае коэффициент состоит из сопротивления давления и сопротивления трения:

$$c_{xp, \text{фюз.}} = c_{xp, \text{фюз.п}} \frac{S_a}{S_0} + c_{xp, \text{фюз.т}} \frac{S_{\Pi}}{S_0}.$$

Коэффициент сопротивления давления $c_{xp, \text{фюз.п}}$ зависит от формы атакующих поверхностей с относительной площадью S_a , коэффициент сопротивления трения $c_{xp, \text{фюз.т}}$ более консервативен и зависит от степени шероховатости контактируемой (омываемой) поверхности S_{Π} и локальных чисел Рейнольдса Re_l . Форма и размеры фюзеляжа и мотогондол задаются формой, расположением и габаритами целевой нагрузки, двигателей, бортового источника питания и другого оборудования. Тем не менее в хорошо спроектированном планере с развитым аэродинамически эффективным корпусом сопротивление давления невелико и в первом приближении может быть учтено только для выступающих элементов целевой нагрузки, антенн и т.д. Сопротивление трения может быть найдено на основе сопротивления плоской пластины с использованием номограмм (рис. 2) или известных зависимостей для гладких и шероховатых пластин [8]:

$$c_f = 0.074 Re_l^{-0.2} \quad (5 \cdot 10^5 < Re_l < 10^7); \quad (13)$$

$$c_{xp, \text{фюз.т}} = c_f \frac{\Delta l b}{S_{\Pi}};$$

$$Re_l = \frac{Vb}{\nu},$$

где характерная ширина фюзеляжа Δl и его длина b , ν – вязкость воздуха. Для корпусов БПЛА, изготовленных из композиционных материалов методом формования в матрицах, относительная шероховатость равна $b/k_s \sim 10^4 \div 10^6$.

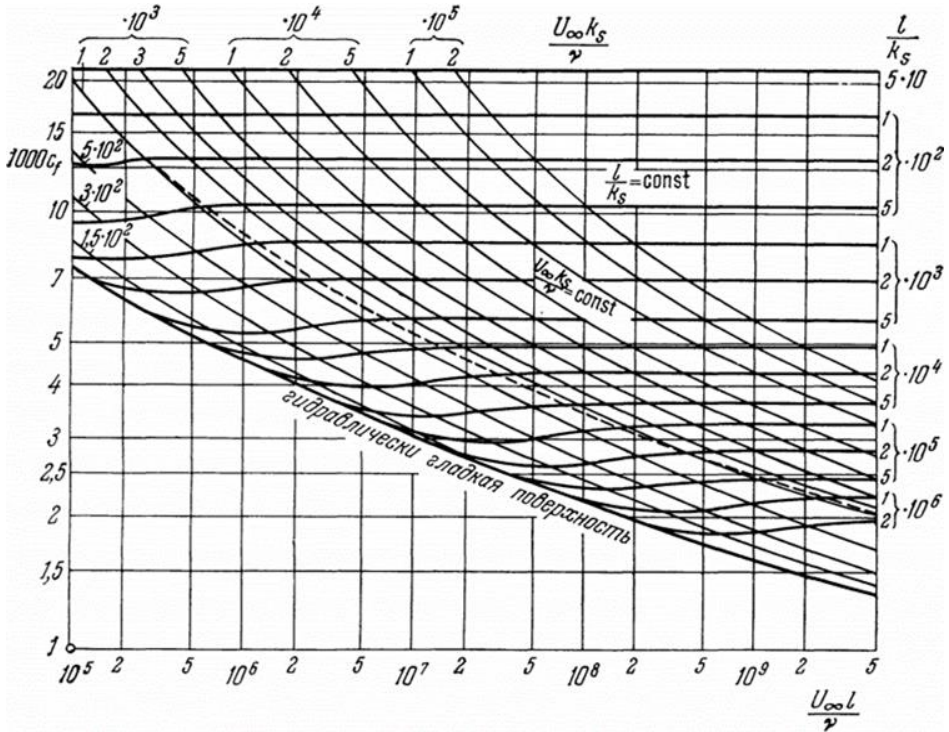


Рис. 2. Закон сопротивления плоской пластины с песочной шероховатостью; полный коэффициент трения ($l \equiv b$, $U_\infty \equiv V$, для поверхностей БПЛА $l/k_s \sim 10^4 \div 10^6$) [8. С. 587]

Fig. 2. Resistance law for a sand-roughened plate; a coefficient of total skin friction ($l \equiv b$, $U_\infty \equiv V$, for UAVs' surfaces $l/k_s \sim 10^4 \div 10^6$) [8. P. 653]

Интерференция крыла с элементами, расположенными или занимающими часть площади крыла, приводит к неравномерности скоса потока за крылом, следовательно, к увеличению индуктивного сопротивления. Данный эффект учитывается в коэффициенте Освальда, который определяется следующим образом:

$$e = \frac{S_0}{S_0 + \sum k_{bi} \Delta l_i \sqrt{\frac{S_0}{\lambda}}}, \quad (14)$$

где дополнительные слагаемые рядом с базовой площадью крыла S_0 отражают площадь частей крыла, занятых выступающими на поверхности крыла элементами, и площадь поверхности крыла ниже по потоку от этих элементов. Коэффици-

ент расположения элементов относительно длины местной хорды k_{bi} и участок размаха крыла Δl_i в первом приближении считаются консервативными по отношению к площади и удлинению крыла.

Тогда аэродинамическое качество планера с учетом (11) будет иметь вид:

$$K = \frac{c_y}{c_{xp} + \frac{c_y^2}{\pi e \lambda}}. \quad (15)$$

Фиксируя величину подъемной силы Y и дифференцируя выражение (15) по воздушной скорости V , получим, что при некотором значении коэффициента подъемной силы c_y^* достигается максимум $K^* = K_{\max}$, которому соответствует воздушная скорость V^* :

$$c_y^* = \sqrt{c_{xp} \pi e \lambda}; \quad (16)$$

$$K^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi e \lambda}{c_{xp}}}; \quad (17)$$

$$(K \sqrt{c_y})^* = \frac{1}{2} \sqrt{c_{xp}} (\pi e \lambda)^{3/2}; \quad (18)$$

$$V^* = \sqrt{\frac{2Y}{c_y^* \rho S_0}}. \quad (19)$$

Выражения (16)–(19) соответствуют режиму полета с наибольшим аэродинамическим качеством $K = K_{\max}$. Аналогичным образом, выполняя оценку критерия эффективности $K \sqrt{c_y}$, получим:

$$c_y^{**} = \sqrt{3 c_{xp} \pi e \lambda}; \quad (20)$$

$$K^{**} = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{\pi e \lambda}{c_{xp}}}; \quad (21)$$

$$(K \sqrt{c_y})^{**} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sqrt{c_{xp}} (\pi e \lambda)^{3/2}; \quad (22)$$

$$V^{**} = \sqrt{\frac{2Y}{c_y^{**} \rho S_0}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} V^* \approx 0.76 V^*. \quad (23)$$

Выражения (20)–(23) соответствуют режиму полета с наибольшим значением критерия $K \sqrt{c_y} = (K \sqrt{c_y})_{\max}$.

Верификация метода и результаты расчетов

С использованием приведенной методики спроектированы модели БПЛА Прототип-2Э и Прототип-2Т. Обе модели БПЛА выполнены в виде аэродинамической компоновки «летающее крыло» и должны выполнять полет в течение 120 мин и нести полезную нагрузку массой 2 кг с потребляемой мощностью 60 Вт.

Геометрические характеристики БПЛА определены в соответствии с [9] и приведены в табл. 1.

Таблица 1

Характеристики БПЛА Прототип-2Э и Прототип-2Т

БПЛА	Пр-2Э	Пр-2Т
Масса взлетная, кг	7.3	7.2
Площадь крыла, м ²	0.663	0.693
Размах крыла, м	2	2
САХ, м	0.33	0.35
Удлинение крыла	5.91	5.94
Коэффициент Освальда	0.86	0.76
Положение ЦТ, % САХ	15	15
Минимальная скорость теоретическая, м/с	14	14
Скорость наибольшего качества (оценка), м/с	22	20
Аэродинамическое качество K (оценка)	16.7	16.0
Критерий эффективности $K\sqrt{c_y}$ (оценка)	12.6	13.6

Результаты эскизного проектирования БПЛА Прототип-2Э представлены в работе [10]. Крыло летательного аппарата обладало неустойчивостью в срыве и требовало пересмотра конструкции. При дальнейшей работе над эскизной моделью БПЛА Прототип-2Э из соображений безопасности полетов были внесены изменения в конструкцию крыла: сменились контур крыла, расположение оперения. По результатам работы была спроектирована рабочая модель БПЛА Прототип-2Т.

Для проверки спроектированных моделей БПЛА проводилось трехмерное исследование аэродинамики. Скорости полета БПЛА соответствуют числам Рейнольдса $2 \cdot 10^5 \div 9 \cdot 10^5$. Рассматриваемое течение описывается уравнениями Рейнольдса [11], для замыкания которых использовалась модель турбулентности SST $k-\omega$ [12]. Для получения единственного решения на границах расчетной области ставились граничные условия в соответствии с рекомендациями [12]. Решение задачи проводилось на вычислительных узлах суперкомпьютера СКИФ Cyberia в программных пакетах ANSYS Fluent и OpenFOAM [13]. Для уравнений переноса субстанции в обоих решателях использовались алгоритм SIMPLE, описанный в работе [14], и численные схемы второго порядка аппроксимации для производных. В решателе ANSYS Fluent использовалась тетраэдральная расчетная сетка, полученная с помощью модуля ANSYS Meshing, в OpenFOAM – гексаэдральная расчетная сетка, полученная с помощью утилиты SnappyHexMesh. На рис. 3, 4 приведены зависимости коэффициентов подъемной силы и силы сопротивления, аэродинамического качества и критерия $K\sqrt{c_y}$.

В рабочем диапазоне углов атаки планера БПЛА наблюдается хорошее совпадение результатов расчетов. С ростом углов атаки наблюдается отклонение расчета коэффициента сопротивления от результатов моделирования. Вероятно, это связано с тем, что распределение подъемной силы на больших углах атаки отличается от эллиптического закона, и индуктивное сопротивление крыльев БПЛА возрастает быстрее, чем у крыла с эллиптическим распределением. Также наблюдается ошибка определения положения угла атаки наибольшего аэродинамического качества K в $1-2^\circ$ и максимума критерия $K\sqrt{c_y}$ – в $3-4^\circ$. Ошибки результатов расчетов приведены табл. 2, 3.

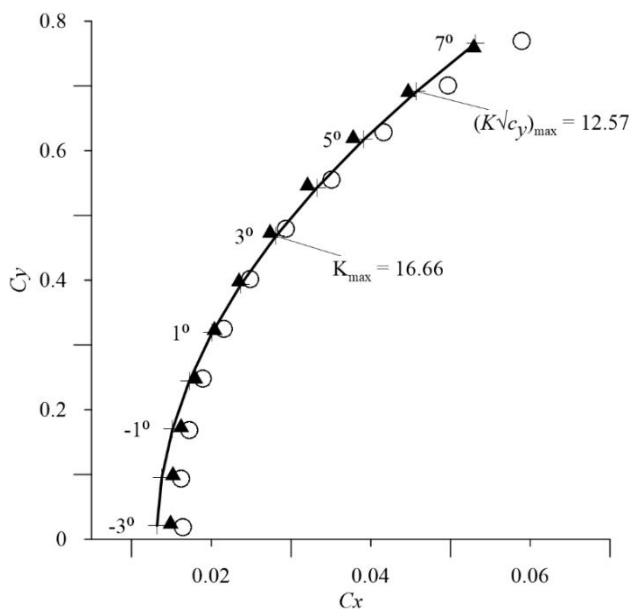


Рис. 3. Поляра и точки максимальных значений целевых функций для БПЛА Прототип-2Э
 + + + – данная методика, ▲▲▲ – Fluent, ○ ○ ○ – OpenFOAM

Fig. 3. Polar and maximum of efficiency criteria for UAV Prototype-2E
 + + + – the proposed approach, ▲▲▲ – Fluent, and ○ ○ ○ – OpenFOAM

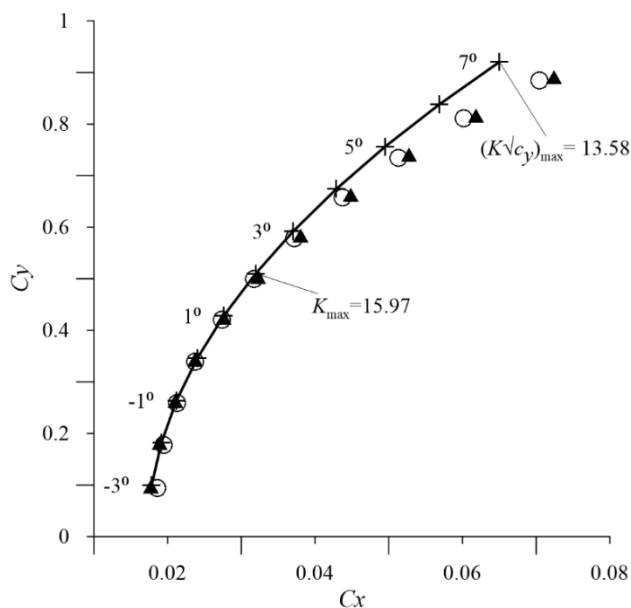


Рис. 4. Поляра и точки максимальных значений целевых функций для БПЛА Прототип-2Т
 + + + – данная методика, ▲▲▲ – Fluent, ○ ○ ○ – OpenFOAM

Fig. 4. Polar and maximum of efficiency criteria for UAV Prototype-2T
 + + + – the proposed approach, ▲▲▲ – Fluent, and ○ ○ ○ – OpenFOAM

Таблица 2

Характеристики БПЛА Прототип-2Э

Параметр	c_x	c_y	K	$K\sqrt{c_y}$
Среднеквадратичное отклонение	0.001	0.003	0.369	0.242
Ошибка при $V_{\min}$, %	5.0	0.3	5.2	5.4
Ошибка при V^* , %	1.9	1.6	0.3	0.5
Ошибка при V^{**} , %	1.5	1.1	0.2	0.3

Таблица 3

Характеристики БПЛА Прототип-2Т

Параметр	c_x	c_y	K	$K\sqrt{c_y}$
Среднеквадратичное отклонение	0.002	0.009	0.526	0.588
Ошибка при $V_{\min}$, %	8.9	3.9	14.1	16.3
Ошибка при V^* , %	0.2	2.1	2.2	3.3
Ошибка при V^{**} , %	4.9	2.8	8.1	9.6

Заключение

Приведено теоретическое исследование метода расчета аэродинамических характеристик беспилотного летательного аппарата. Методика позволяет установить основные аэродинамические характеристики БПЛА и при решении уравнения существования самолета определить геометрические параметры крыла, взлетную массу, массу конструкции, потребные характеристики силовой и энергоустановки.

С помощью данной методики спроектирована эскизная модель БПЛА Прототип-2Э, спроектирована рабочая модель и изготовлен БПЛА Прототип-2Т. Проведено сравнение результатов расчетов аэродинамических характеристик БПЛА с результатами расчетов в пакетах OpenFOAM и ANSYS Fluent. Наблюдается хорошее соответствие результатов расчетов. Расчеты проводились на ресурсах суперкомпьютера Томского государственного университета СКИФ Cyberia

Приведенная методика расчета первого приближения БПЛА может быть использована для расчета и экстраполяции кривых аэродинамических характеристик, летно-технических характеристик на область рабочего диапазона углов атаки и скоростей с поправками по результатам численного моделирования одной, двух или более точек. Также метод может быть использован для расчета начального приближения в задачах оптимального поиска с целью сокращения времени расчета.

Список источников

1. Федоров Л.П., Михайлов Ю.С. Определение оптимальных режимов крейсерского полета высотного беспилотного летательного аппарата // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. 2013. № 2 (188), С. 72–76.
2. Егер С.М., Мишин В.Ф., Лисейцев Н.К., Бадягин А.А., Ротин В.Е., Склянский Ф.И., Кондрашов Н.А., Киселев В.А., Фомин Н.А. Проектирование самолетов : учебник для вузов. М. : Машиностроение, 1983. 616 с.

3. Мизес Р. Теория полета / пер. с англ. А.Н. Рубашова. М.: Иностран. лит., 1949. 696 с.
4. Торенбик Э. Проектирование дозвуковых самолетов / пер. с англ. Е.П. Голубков. М.: Машиностроение, 1983. 648 с.
5. Пейгин С.В., Орлов С.А. Оптимальное аэродинамическое проектирование конфигурации «крыло-фюзеляж» широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 63. С. 115–124. doi: 10.17223/19988621/63/10
6. Степанов К.А., Тимченко С.В. Аэродинамическое проектирование изолированного трехмерного крыла беспилотного летательного аппарата // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 54. С. 118–130. doi: 10.17223/19988621/54/10
7. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., 2012. 210 с.
8. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / пер. с нем. Г.А. Вольперт с 5-го нем. изд., исправленный по 6-му (амер.) изд., под ред. Л.Г. Лойцянского. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. 711 с.
9. ГОСТ 22833–77 Характеристики самолета геометрические. Термины, определения и буквенные обозначения. М.: Изд-во стандартов, 1987. 24 с.
10. Исмаилов К.К., Кагенов А.М., Костюшин К.В., Орлов С.А. Разработка цифровой модели БПЛА самолетного типа // 19-я Международная конференция «Авиация и космонавтика», 23–27 ноября 2020 г., Москва: тез. М.: ПеРо, 2020. С. 59–60.
11. Wilcox D.C. Turbulence Modeling for CFD. La Canada, CA: DCW Industries, 1993. 460 p.
12. Menter F.R. Zonal two-equation $k-\omega$ turbulence model for aerodynamic flows // AIAA. 1993. V. 93. Art. 2906. doi: 10.2514/6.1993-2906
13. Kagenov A.M., Kostyushin K.V., Ismailov K.K., Kostyushina N.O., Orlov S.A., Prokhanov S.A. The development of a cloud system for investigation of UAVs aerodynamic characteristics // J. Phys.: Conf. Ser. 2020. V. 1488. P. 1–5. doi: 10.1088/1742-6596/1488/1/012017
14. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.

References

1. Fedorov L.P., Mikhaylov Yu.S. (2013) Opredelenie optimal'nykh rezhimov kreyserskogo polyota vysotnogo bespilotnogo letatel'nogo apparata [Determination of optimal cruise flight regimes for a high-altitude unmanned aerial vehicle]. *Nauchnyy vestnik MGTU GA – Civil Aviation High Technologies*. 2(188). pp. 72–76.
2. Eger S.M., Mishin V.F., Liseyev N.K., Badyagin A.A., Rotin V.E., Sklyanskiy F.I., Kondrashov N.A., Kisilev V.A., Fomin N.A. (1983) *Proektirovanie samoletov: uchebnik dlya vuzov* [Aircraft design: textbook for higher education]. Moscow: Mashinostroyeniye.
3. Von Mises R. (1959) *Theory of Flight*. New York: Dover.
4. Torenvik E. (1983) *Proektirovanie dozvukovykh samoletov* [Subsonic airplane design]. Moscow: Mashinostroyeniye.
5. Peygin S.V., Orlov S.A. (2020) Optimal'noe aerodinamicheskoe proektirovanie konfiguratsii «krylo-fyuzelyazh» shirokofyuzelyazhnogo dal'nemagistral'nogo samoleta [Optimal aerodynamic design of a wing-body configuration for a wide-body long-range aircraft]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 63. pp. 115–124. doi: 10.17223/19988621/63/10.
6. Stepanov K.A., Timchenko S.V. (2018) Aerodinamicheskoe proektirovanie izolirovannogo trekhmernogo kryla bespilotnogo letatel'nogo apparata [Aerodynamic design for an isolated three-dimensional wing of an unmanned aerial vehicle]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 54. pp. 118–130. doi: 10.17223/19988621/54/10.
7. Loytsyanskiy L.G. (2012) *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid and gas mechanics]. Moscow.

8. Schlichting H., Kestin J. (1979) *Boundary-layer Theory*. New York: McGraw-Hill.
9. GOST 22833–77 *Kharakteristiki samoleta geometricheskie. Terminy, opredeleniya i bukvennye oboznacheniya* [Aircraft geometrical characteristics. Terms, definitions, and letter designations]. Moscow: Izdatel'stvo standartov.
10. Ismailov K.K., Kagenov A.M., Kostyushin K.V., Orlov S.A. (2020) Razrabotka tsifrovoy modeli BPLA samoletnogo tipa [Development of a digital model for a plane-type UAV]. *Abstracts of the 19th International Conference "Aviation and Cosmonautics" (AviaSpace-2020)*. Moscow. pp. 59–60.
11. Wilcox D.C. (1993) *Turbulence Modeling for CFD*. La Canada, CA: DCW Industries.
12. Menter F.R. (1993) Zonal two-equation $k-\omega$ turbulence model for aerodynamic flows. *AIAA*. 93. Article 2906. pp. 1–21. doi: 10.2514/6.1993-2906.
13. Kagenov A.M., Kostyushin K.V., Ismailov K.K., Kostyushina N.O., Orlov S.A., Prokhanov S.A. (2020) The development of a cloud system for investigation of UAVs aerodynamic characteristics. *Journal of Physics: Conference Series*. 1488. pp. 1–5. doi: 10.1088/1742-6596/1488/1/012017.
14. Patankar S.V. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Washington DC: Hemisphere Publishing Corporation.

Сведения об авторе:

Исмаилов Куат Кайратович – младший научный сотрудник суперкомпьютерного центра Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: kuat@ftf.tsu.ru; mendikjan@gmail.com

Information about the author:

Ismailov Kuat K. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kuat@ftf.tsu.ru; mendikjan@gmail.com

Статья поступила в редакцию 09.02.2022; принята к публикации 12.07.2022

The article was submitted 09.02.2022; accepted for publication 12.07.2022

Научная статья

УДК 532.5

doi: 10.17223/19988621/78/10

Сравнение современных моделей турбулентности для течения Тейлора–Куэтта

**Зафар Маматкулович Маликов¹, Фаррух Холиёрович Назаров²,
Муродил Эркинжанович Мадалиев³**

^{1,3} *Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз,
Ташкент, Узбекистан*

² *Ташкентский государственный технический университет им. Ислама Каримова,
Ташкент, Узбекистан*

¹ *malikov.z62@mail.ru*

² *farruxnazar@mail.ru*

³ *madaliev.me2019@mail.ru*

Аннотация. Проводится сравнительный анализ современных моделей турбулентности для течения Тейлора–Куэтта. Для этой цели использованы линейные модели турбулентности SARC и SST-RC, метод Рейнольдсовых напряжений SSG/LRR-RSM-w2012 и двухжидкостная модель. Результаты этих моделей сопоставлены между собой, а также с известными экспериментальными данными и данными прямого моделирования DNS.

Ключевые слова: вращающийся поток, осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса, модель SSG/LRR-RSM-w2012, модель SARC, модель SST, двухжидкостная модель

Для цитирования: Маликов З.М., Назаров Ф.Х., Мадалиев М.Э. Сравнение современных моделей турбулентности для течения Тейлора–Куэтта // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 78. С. 125–142. doi: 10.17223/19988621/78/10

Original article

Comparison of advanced turbulence models for the Taylor-Couette flow

Zafar M. Malikov¹, Farrukh Kh. Nazarov², Murodil E. Madaliev³

^{1,3} *Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures Named after M.T. Urazbayev,
Tashkent, Republic of Uzbekistan*

² *Tashkent State Technical University Named after Islam Karimov, Tashkent,
Republic of Uzbekistan*

¹ *malikov.z62@mail.ru*

² farruxnazar@mail.ru³ madaliev.me2019@mail.ru

Abstract. Swirling flows of fluids and gases are an integral part of many complex flows which are widely encountered in nature and technology. The working process of numerous technical devices (cyclones, vortex combustion chambers, air separators, gas and steam turbines, electric machines and generators, etc.) is generally determined by the laws of hydrodynamics and heat exchange of rotating flows. The problem of deriving general laws for a turbulent flow in the field of centrifugal forces provokes considerable scientific interest since it belongs to an underdeveloped field of hydromechanics. Therefore, mathematical modeling of swirling turbulent flows is still an urgent problem.

In this paper, a comparative analysis of the advanced turbulence models for the Taylor – Couette flow is carried out. For this purpose, the linear turbulence models (SARC and SST-RC), the Reynolds stress method SSG/LRR-RSM-w2012, and a two-fluid model are used. The results obtained using these models are compared with each other and with known experimental data and direct numerical simulation results.

The numerical results calculated with the use of turbulence models for the Taylor-Couette flow confirm that almost all the models adequately describe velocity profiles. However, they yield different turbulent viscosity values and, as a result, different friction coefficients. A comparison of the numerical results shows that the friction coefficient calculated using a two-fluid turbulence model is the closest to that obtained experimentally.

Keywords: rotating flow, Reynolds-averaged Navier-Stokes equations, SSG/LRR-RSM-w2012 model, SARC model, SST model, two-fluid model

For citation: Malikov, Z.M., Nazarov, F.Kh., Madaliev, M.E. (2022) Comparison of advanced turbulence models for the Taylor-Couette flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 78. pp. 125–142. doi: 10.17223/19988621/78/10

Введение

В настоящее время для решения задач турбулентности используются метод прямого численного моделирования (Direct Numerical Simulation – DNS) [1, 2], метод моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation – LES) [3] и методы, направленные на замыкание осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations, RANS). Метод прямого моделирования DNS является сложным и требует больших вычислительных ресурсов, потому что реализация уравнений Навье–Стокса проводится в трехмерной постановке с расчетными ячейками, размеры которых меньше Колмогоровского масштаба. В последнее время в этом направлении в связи с развитием суперкомпьютеров достигнут большой прогресс: для некоторых классов турбулентности методом DNS получены результаты для числа Рейнольдса вплоть до 10^6 . Однако для многих инженерных задач по турбулентности метод прямого моделирования все еще остается недоступным. Метод LES по сравнению с DNS может применяться для расчетов течений с существенно большими числами Рейнольдса. Однако при использовании метода LES для расчета течений вблизи стенок требуются расчетные ячейки, приближающиеся по своим характеристикам к ячейкам метода DNS [4]. Поэтому для технических приложений более применимыми до сих пор являются модели, базирующиеся на замыкании уравнений Навье–Стокса, осредненных по Рейнольдсу.

Таким образом, для инженерных расчетов требуются несложные модели турбулентности, достаточно точно описывающие усредненные поля и флуктуирующие параметры закрученных или вращающихся течений. Получившие широкое распространение в инженерных расчетах многие модели турбулентности RANS плохо описывают такие течения. Чтобы улучшить адекватность моделирования турбулентных закрученных течений, проводится модифицирование существующих RANS-моделей турбулентности. Например, в моделях SARC [5] и $k-\omega$ SST-RC [6] введены специальные поправки на вращение потока в ранее известных моделях SA [7] и $k-\omega$ SST [8] соответственно. Однако в работе [9] отмечается, что в определенных случаях при сильном вращении потока эти модели также могут дать не совсем адекватные результаты. Объяснением этого явления является то, что данные модели основаны на гипотезе Буссинеска, которая справедлива для изотропных турбулентных течений, а в течениях с сильной закруткой наблюдается анизотропная турбулентность. Поэтому для расчета течений с анизотропной турбулентностью рекомендуется использовать модели без привлечения гипотезы Буссинеска. К таким моделям RANS можно отнести модели Рейнольдсовых напряжений, однако они очень громоздки и требуют много вычислительных ресурсов. Помимо этого, в данных моделях необходимо использовать специальные методики для обеспечения устойчивости и сходимости, а также очень много эмпирических констант и функций, которые сложно калибровать.

Еще одним подходом к решению проблемы турбулентности является двухжидкостный подход Сполдинга [10]. Суть данного подхода заключается в том, что турбулентный поток делится на две жидкости по некоторым отличительным признакам потока. Например, для описания перемежаемости поток делится на ламинарный и турбулентный, в задачах горения – на сгоревший и не сгоревший газ и т.д. Сложнее обстоит дело с простым турбулентным потоком, где отсутствуют явные отличительные черты, по которым можно было бы разделить поток на две жидкости. Поэтому в следующей работе Сполдинга [11] предложено умозрительно разделить поток на «быструю» и «медленную» жидкости. С помощью этой модели были получены результаты, довольно точно предсказавшие турбулентные характеристики потока. Однако двухжидкостный подход Сполдинга не получил дальнейшего развития. Причина этого, по всей видимости, заключается в том, что для поиска некоторых параметров турбулентности в этой модели, как и в моделях RANS, привлекались дополнительные уравнения на основе различных гипотез. В результате число решаемых уравнений удваивалось по сравнению с RANS-моделями, что увеличивало вычислительное время.

Развитие двухжидкостного подхода после достаточно долгого перерыва получено в работах [12–13]. В работе [12] дается методика построения математической модели турбулентности на основе двухжидкостного подхода. В этой работе проведена верификация новой модели на примерах уже изученных экспериментально задач турбулентности. Показано, что модель хорошо описывает начальный, переходной и автомодельный участки турбулентной затопленной струи, турбулентное обтекание плоской пластины, а также сильно закрученные потоки в канале с внезапным расширением. В работе [13] двухжидкостная модель успешно использована для расчета двухфазного потока внутри воздушного сепаратора. В этой работе показано преимущество новой модели по сравнению с линейными и нелинейными моделями RANS как по точности, так и по затратам вычисли-

тельных ресурсов. В упомянутых работах продемонстрировано, что модифицированная двухжидкостная модель является низкорейнольдсовой моделью и способна с высокой достоверностью описывать анизотропные турбулентные течения.

Физическая и математическая постановка задачи

В настоящей работе проводится сравнение современных популярных моделей турбулентности для потока в зазоре между вращающимися цилиндрами (течение Тейлора–Куэтта). Для этой цели использованы модели турбулентности SARC, $k-\omega$ SST, метод Рейнольдсовых напряжений SSG/LRR-RSM-w2012 и двухжидкостная модель. Полученные результаты сопоставлены с известными экспериментальными данными, а также с результатами DNS. Модели SARC, $k-\omega$ SST и метод Рейнольдсовых напряжений SSG/LRR-RSM-w2012 на сегодняшний день являются широко известными и изложены во многих научных работах и учебниках. А двухжидкостная модель турбулентности описана подробно в работе [12] и в общих чертах в работах [13–15]. Поэтому ниже приводится окончательный вид систем уравнений турбулентности на основе двухжидкостного подхода:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\rho \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - \vartheta_j \vartheta_i \right], \\ \frac{\partial \vartheta_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial \vartheta_i}{\partial x_j} = -\vartheta_j \frac{\partial V_i}{\rho \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu_{ji} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{F_{si}}{\rho} + \frac{F_{fi}}{\rho}, \\ \nu_{ji} = 3\nu + 2 \left| \frac{\vartheta_i \vartheta_j}{\text{def}(\vec{V})} \right| \quad \text{при } i \neq j, \quad \nu_{ii} = 3\nu + \frac{1}{\text{div} \vec{\vartheta}} \left| \frac{\vartheta_k \vartheta_k}{\text{def}(\vec{V})} \right| \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_k}, \\ \frac{\partial \rho V_j}{\partial x_j} = 0, \quad \vec{F}_f = -\rho K_f \vec{\vartheta}, \quad \vec{F}_s = \rho C_s \text{rot} \vec{V} \times \vec{\vartheta}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь K_f – коэффициент трения:

$$K_f = C_1 \lambda_{\max} + C_2 \frac{|\vec{d} \cdot \vec{\vartheta}|}{d^2}. \quad (2)$$

В данном выражении d – ближайшее расстояние до твердой стенки, $\lambda_{\max}$ – наибольший корень характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad (3)$$

где A – матрица

$$A = \begin{vmatrix} -\frac{\partial V_1}{\partial x_1} & -\frac{\partial V_1}{\partial x_2} - C_s \zeta_3 & -\frac{\partial V_1}{\partial x_3} + C_s \zeta_2 \\ -\frac{\partial V_2}{\partial x_1} + C_s \zeta_3 & -\frac{\partial V_2}{\partial x_2} & -\frac{\partial V_2}{\partial x_3} - C_s \zeta_1 \\ -\frac{\partial V_3}{\partial x_1} - C_s \zeta_2 & -\frac{\partial V_3}{\partial x_2} + C_s \zeta_1 & -\frac{\partial V_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

и $\vec{\zeta} = \text{rot} \vec{V}$.

В тестовых задачах показано, что хорошие результаты получаются при $C_1 = 0.7825$, $C_2 = 0.306$, $C_s = 0.2$.

Моделирование турбулентного течения Тейлора–Куэтта

Выше было сказано, что течением Тейлора–Куэтта называется течение жидкости в зазоре между вращающимися цилиндрами. Несмотря на кажущуюся простоту, течение Тейлора–Куэтта на самом деле является довольно сложным для многих моделей турбулентности. Эта задача – типичный пример анизотропной турбулентности. Такого типа движения рассматривали еще Рэлей [16] и Тейлор [17–18]. Ими показано, что при вращении только внутреннего цилиндра возникает анизотропный турбулентный поток [19–25]. Поэтому, как было сказано выше, для расчета таких течений используются трудоемкие модели турбулентности, которые учитывают анизотропию. Более сложное течение возникает, когда вращается и внешний цилиндр, потому что, с одной стороны, с увеличением скорости вращения увеличивается число Рейнольдса, что приводит к увеличению турбулентности потока, а с другой стороны, вращение внешнего цилиндра, как отмечается исследователями, может приводить к подавлению турбулентности. Поэтому в таком течении могут возникать ламинарная и турбулентная зоны. По этой причине многие модели турбулентности не способны адекватно описывать такие течения.

Из соображений симметрии ясно, что для исследования рассматриваемой задачи удобной системой координат является цилиндрическая [26–27]. Чтобы расписать систему уравнений (1) в цилиндрических координатах, введем следующие обозначения $x_1 = r$; $x_2 = \varphi$; $V_1 = V_r$; $V_2 = V_\varphi$; $\vartheta_1 = \vartheta_r$; $\vartheta_2 = \vartheta_\varphi$.

Уравнение неразрывности будет иметь вид:

$$\frac{\partial V_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{\partial r V_r}{r \partial r} = 0. \quad (4)$$

В силу симметрии должно быть $\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = 0$, следовательно, из (4) получим

$V_r = 0$. Тогда система уравнений (1) примет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial V_\varphi}{\partial t} &= v \left(\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial V_\varphi}{r \partial r} - \frac{V_\varphi}{r^2} \right) - \frac{\partial}{r^2 \partial r} (r^2 \vartheta_r \vartheta_\varphi), \\ \frac{\partial \vartheta_\varphi}{\partial t} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 v_{\varphi r} \left(\frac{\partial \vartheta_\varphi}{\partial r} - \frac{\vartheta_\varphi}{r} \right) \right] - (1 - C_s) \frac{\vartheta_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\varphi) - K_f \vartheta_\varphi, \\ \frac{\partial \vartheta_r}{\partial t} &= \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r v_{rr} \frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} \right] - \frac{2 v_{rr} \vartheta_r}{r^2} - C_s \frac{\vartheta_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\varphi) + \frac{2 V_\varphi \vartheta_\varphi}{r} - K_f \vartheta_r, \\ v_{\varphi r} &= 3v + 2 \frac{|\vartheta_\varphi \vartheta_r|}{|\partial V_\varphi / \partial r - V_\varphi / r|}, \quad v_{rr} = 3v + 2 \frac{|\vartheta_r \vartheta_r|}{|\partial V_\varphi / \partial r - V_\varphi / r|}, \quad K_f = C_1 \lambda_{\max} + C_2 \frac{|\vartheta_r|}{d}. \end{aligned} \right. \quad (5)$$

В данной системе уравнений штрих означает производную по r , t – время, V_φ – осредненная тангенциальная скорость, $\vartheta_\varphi, \vartheta_r$ – относительные тангенциальная и

радиальная скорости молей, ν – молекулярная кинематическая вязкость, $\nu_{\varphi r}$, ν_{rr} – эффективные молярные вязкости.

Известно, что турбулентность имеет трехмерный характер. Это означает, что в рассматриваемой задаче хоть и отсутствует движение в целом в осевом направлении, но присутствует флуктуирующая скорость. Однако в двухжидкостной модели влиянием их на тангенциальное движение пренебрегается.

Для поиска $\lambda_{\max}$ составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda & -(1-C_s) \frac{rV_\varphi}{r} \\ -C_s \frac{rV_\varphi}{r} + \frac{2V_\varphi}{r} & \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Корни данного уравнения равны

$$\lambda = \pm \sqrt{D}. \quad (7)$$

При $D > 0$, $\lambda_{\max} = \sqrt{D}$, при $D < 0$, $\lambda_{\max} = 0$. Здесь

$$D = C_s (1 - C_s) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_\varphi) \right]^2 - (1 - C_s) \frac{2V_\varphi}{r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_\varphi). \quad (8)$$

Необходимо отметить, что режим течения определяется знаком выражения D . Если $D < 0$, относительные скорости молей со временем затухают и поток стремится к ламинарному режиму, а при $D > 0$ бесконечно малые возмущения относительных скоростей могут расти, и в этом случае поток переходит в турбулентный режим. Из выражения (8) видно, что в нашей задаче $D < 0$ может быть, если

$V_\varphi \frac{\partial}{\partial r} (rV_\varphi) > 0$, что наблюдается вблизи вращающегося внешнего цилиндра.

Данное утверждение согласуется с классической теорией [13].

В нашей задаче присутствует две стенки. Поэтому для определения неизвестного d предлагается следующее выражение:

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}. \quad (9)$$

В этих выражениях d_1 – ближайшее расстояние до первой стенки, d_2 – ближайшее расстояние до второй стенки.

Для исследования течения Тейлора–Куэтта рассмотрим по отдельности три задачи: 1) плоское течение Куэтта, которое является частным случаем рассматриваемой задачи при $r_1 \rightarrow \infty$; 2) течение, вызванное вращением внутреннего цилиндра с фиксированным внешним цилиндром; 3) течение, вызванное контрвращением цилиндров, т.е. цилиндры вращаются в противоположных направлениях с одинаковой скоростью.

Уравнения приведены к безразмерному виду соотношением всех скоростей к скорости вращающегося цилиндра $V_{0\varphi}$, радиуса – к ширине канала $h = r_2 - r_1$. Здесь r_1 – радиус внутреннего, r_2 – радиус внешнего цилиндра. Поэтому число Рейнольдса определялось выражением $Re = hV_{0\varphi} / \nu$. Для численной реализации системы (5) использована абсолютно устойчивая неявная схема второго порядка

точности по пространству и первого порядка точности по времени. Исследования показали, что для получения корректных численных результатов вплоть до $Re = 10^6$ достаточное количество расчетных точек в радиальном направлении должно быть не менее 10 000. Интегрирование велось безразмерным шагом по времени 0.05. Увеличение числа расчетных точек до 20 000 дало изменения результатов не более 0.1%. Стационарное решение получено, когда изменения результатов становилось менее 0.0001% для одного цикла интегрирования по времени. Аналогичная методика использована и для численных реализаций моделей SARC, $k-\omega$ SST и Рейнольдсовых напряжений SSG/LRR-RSM-w2012. Однако для обеспечения устойчивости в этих моделях интегрирование проводилось более мелкими шагами по времени, менее чем 0.001.

Плоское течение Куэтта

Рассмотрим задачу, когда нижняя пластина покоится, а верхняя движется со скоростью U_0 . Пусть y – переменная в поперечном направлении, h – расстояние между пластинами. Данная задача называется плоским течением Куэтта и является классическим примером для тестирования моделей турбулентности. Для численного исследования этой задачи на основе двухжидкостной модели турбулентности можно воспользоваться системой уравнений (5) устремляя $r_1 \rightarrow \infty$. Численные результаты различных моделей турбулентности для плоского течения Куэтта продемонстрированы на рис. 1–3. На рис. 1 показаны безразмерные профили скорости. Результаты получены для числа Рейнольдса $Re = U_0 h / \nu = 32\,800$. На этом рисунке также показаны экспериментальные данные для скорости (точки) по работе [28]. Очевидно, что результаты всех моделей довольно хорошо соответствуют с опытными данными.

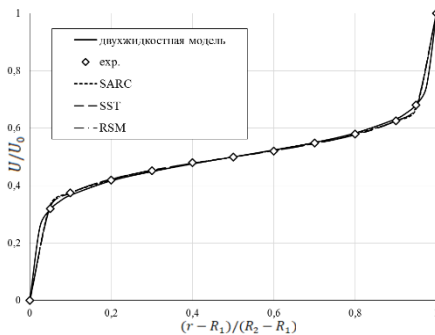


Рис. 1. Профиль скорости для плоского течения Куэтта
Fig. 1. Velocity profile for the plane Couette flow

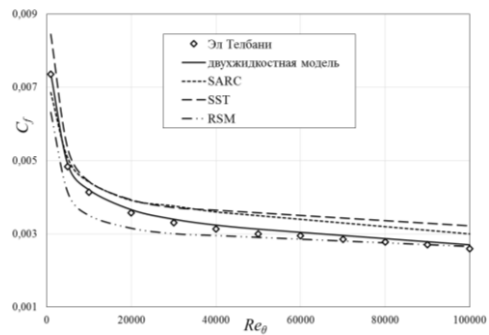


Рис. 2. Зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса
Fig. 2. Friction coefficient as a function of the Reynolds number

На рис. 2 представлены результаты расчетов моделей для коэффициента трения, а также для сравнения – результаты расчетов по эмпирической формуле, представленной в работе [29]. Данная эмпирическая формула получена на основе обработки опытных данных и имеет вид:

$$\left(c_f / 2\right)^2 = 0.182 / \log_{10} \operatorname{Re}_0 . \quad (10)$$

Здесь $\operatorname{Re}_0 = U_0 \frac{h}{2\nu} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}$.

Необходимо отметить, что результаты моделей SARC и $k-\omega$ SST дополнительно были проверены с использованием лицензионного кода ANSYS Fluent. Сопоставление показало, что полученные результаты для упомянутых двух моделей соответствуют результатам кода ANSYS Fluent. Из рис. 2 видно, что результаты двухжидкостной модели более близки к опытным данным.

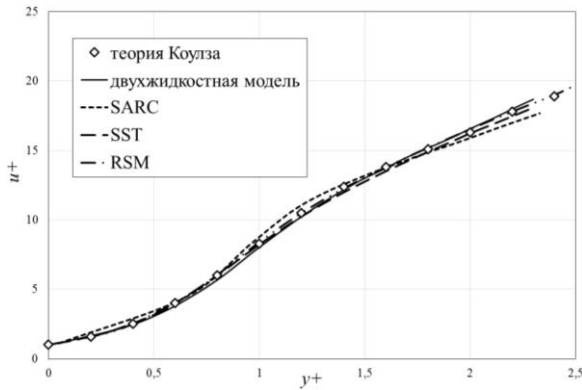


Рис. 3. Профили продольной безразмерной скорости
Fig. 3. Dimensionless longitudinal velocity profiles

На рис. 3 представлены профили безразмерной продольной скорости потока вблизи неподвижной пластины, рассчитанные на основе различных моделей. Здесь можно отметить, что все модели удовлетворительно описывают закон «стенки».

Течение Тейлора–Куэтта, вызванное вращением внутреннего цилиндра с фиксированным внешним цилиндром

Течение Тейлора–Куэтта, обусловленное вращением только внутреннего цилиндра, имеет большое практическое значение в теплотехнических устройствах, поскольку в таком течении значительно усиливается обмен тепла в силу деструктивного действия центробежной силы на ламинарное течение. Поэтому исследованию течения Тейлора–Куэтта с вращением внутреннего цилиндра посвящено большое количество научных работ. Ниже приводятся численные результаты системы уравнений (6). Для этой системы поставлены следующие условия: $V_\varphi = V_{1\varphi}$ при $r = r_1$ и $V_\varphi = 0$ при $r = r_2$. Число Рейнольдса определялось выражением

$$\operatorname{Re} = V_{1\varphi} (r_2 - r_1) / \nu . \quad (11)$$

На рис. 4 представлены профили тангенциальной скорости, рассчитанные по различным моделям. Численные результаты получены для $\eta = r_1 / r_2 = 0.8$ и числа Рейнольдса $\operatorname{Re} = 40\,000$.

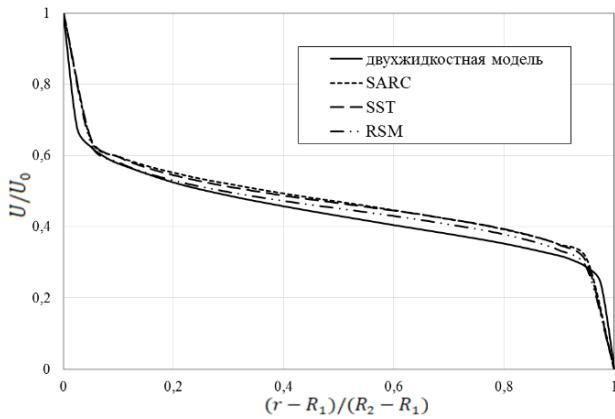


Рис. 4. Профили скорости в течении Тейлора–Куэтта с вращением только внутреннего цилиндра

Fig. 4. Velocity profiles in the Taylor-Couette flow with only inner cylinder rotating

Видно, что и в этом случае результаты довольно близки друг другу, однако профиль скорости, полученный с использованием новой двухжидкостной модели, проходит чуть ниже, чем для других моделей.

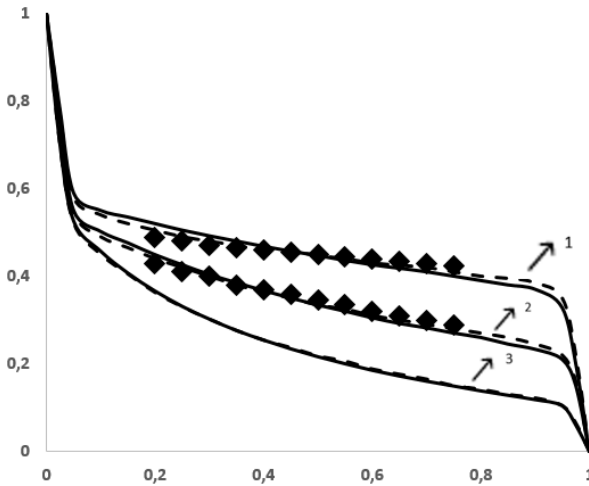


Рис. 5. Профили тангенциальной скорости при различных соотношениях радиусов: 1 – результаты двухжидкостной модели и DNS получены при $\eta = 0.9$, $Ta = 10^{10}$, результаты экспериментальные при $\eta = 0.9$, $Ta = 1.1 \cdot 10^{11}$, 2 – результаты двухжидкостной модели и DNS получены при $\eta = 0.7$, $Ta = 10^{10}$, результаты экспериментальные при $\eta = 0.7$, $Ta = 1.5 \cdot 10^{12}$, 3 – результаты двухжидкостной модели и DNS получены при $\eta = 0.5$, $Ta = 10^{10}$

Fig. 5. Tangential velocity profiles at different ratios of the radii: results for a two-fluid model and DNS obtained at (1) $\eta = 0.9$, $Ta = 10^{10}$, experimental results at $\eta = 0.9$, $Ta = 1.1 \cdot 10^{11}$; (2) $\eta = 0.7$, $Ta = 10^{10}$, experimental results at $\eta = 0.7$, $Ta = 1.5 \cdot 10^{12}$; and (3) $\eta = 0.5$, $Ta = 10^{10}$

Выше было сказано, что в последнее время получены результаты DNS для достаточно больших чисел Рейнольдса [30]. Поэтому на рис. 5 представлены результаты двухжидкостной модели и DNS, а также опытные данные [30]. Сопоставление результатов показывает, что двухжидкостная модель хорошо описывает течение при различных соотношениях радиусов цилиндров.

Влияние ключевых факторов (угловая скорость и размеры цилиндров) в задаче Куэтта–Тейлора учитывается через числа Рейнольдса Re и Тейлора Ta :

$$Ta = \frac{V_{1\varphi}^2 (r_2 - r_1)^3}{\nu^2 r_1} = Re^2 \frac{r_2 - r_1}{r_1}. \quad (12)$$

Для проверки достоверности полученных результатов различных моделей на рис. 6 демонстрируется зависимость изменения коэффициента трения для вращающегося внутреннего цилиндра от числа Тейлора при $\eta = 0.8$:

$$c_f = \frac{\tau|_{r=r_1}}{\frac{1}{2}\rho V_{1\varphi}^2} = \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial \bar{V}_\varphi}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{V}_\varphi}{\bar{r}} \right) \Big|_{r=r_1}. \quad (13)$$

Здесь $\bar{V}_\varphi$, $\bar{r}$ – безразмерные скорость и радиус.

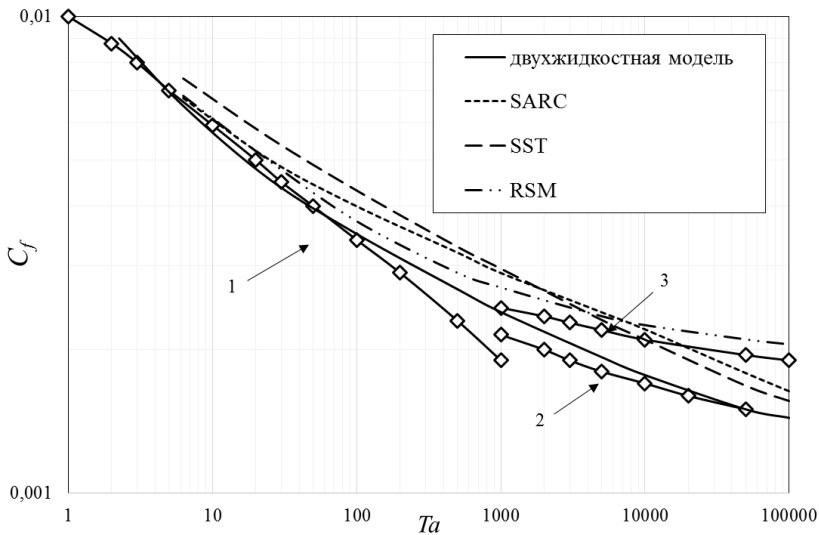


Рис. 6. Зависимости коэффициента трения от числа Тейлора:

1 – опытные данные работы [30], 2 – работы [31], 3 – работы [32]

Fig. 6. Friction coefficient as a function of the Taylor number: experimental data in (1) [30], (2) [31], and (3) [32]

На рис. 6 кроме численных результатов моделей также представлены экспериментальные результаты [31, 32]. Результаты различных моделей показывают, что наибольшее соответствие с опытными данными наблюдается у двухжидкостной модели, в то время как остальные модели дают несколько завышенные значения для коэффициента трения.

Течение Тейлора–Куэтта, обусловленное контрвращением цилиндров

Выше было отмечено, что течение, обусловленное контрвращением цилиндров, вызывает сильно анизотропную турбулентность. Еще классиками математически показано, что при выполнении условия

$$\frac{\partial(V_\varphi r)^2}{\partial r} > 0 \quad (14)$$

происходит подавление турбулентности. С другой стороны, с увеличением числа Рейнольдса турбулентность должна усиливаться. Поэтому, как было отмечено выше, при таком течении Тейлора–Куэтта происходит подавление турбулентности, если $D < 0$. Условие (14) является необходимым для подавления турбулентности, но не достаточным, поскольку в классических работах учитывается только роль центробежной силы, действующей на объем жидкости, а в двухжидкостном подходе учитывается еще и сила Сеффмена. В работе [12] показано, что именно сила Сеффмена играет решающую роль в возникновении турбулентности при плоскопараллельном течении.

В рассматриваемой задаче цилиндры вращаются в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями. Следовательно, для решения поставленной задачи к системе (5) ставятся условия: $V_\varphi = -V_0$ при $r = r_1$ и $V_\varphi = -V_0$ при $r = r_2$. Ниже представлены численные результаты поставленной задачи для $\eta = r_1 / r_2 = 0.917$.

На рис. 7, 8 показаны результаты численного расчета для профиля тангенциальных скоростей при $Re = 3\,800$ и $Re = 47\,000$ соответственно. На этих графиках нанесены также результаты экспериментальных данных [33]. Из рисунков видно, что все модели дают адекватную картину для профиля тангенциальной скорости.

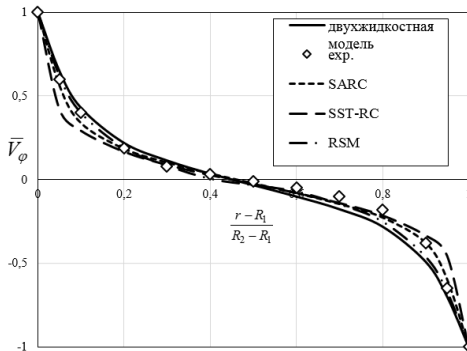


Рис. 7. Безразмерные профили тангенциальной скорости при $Re = 3\,800$

Fig. 7. Dimensionless tangential velocity profiles at $Re = 3800$

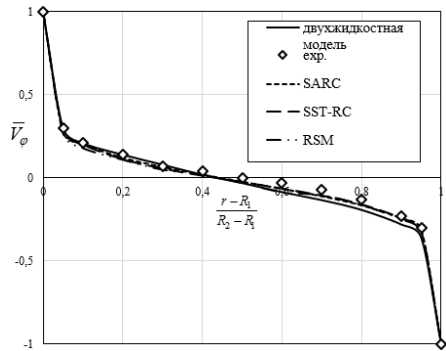


Рис. 8. Безразмерные профили тангенциальной скорости при $Re = 47\,000$

Fig. 8. Dimensionless tangential velocity profiles at $Re = 47000$

Для рассматриваемого течения большой интерес представляет турбулентная вязкость потока. Поэтому на рис. 9, 10 представлены профили безразмерных турбулентных вязкостей при числах Рейнольдса $Re = 3\,800$ и $Re = 47\,000$. Здесь

турбулентная вязкость соотнесена к молекулярной вязкости. Для определения турбулентной вязкости по двух-жидкостной модели использовано соотношение

$$v_t = \left| \frac{\vartheta_\varphi \vartheta_r}{\partial V_\varphi / \partial r - V_\varphi / r} \right|. \quad (15)$$

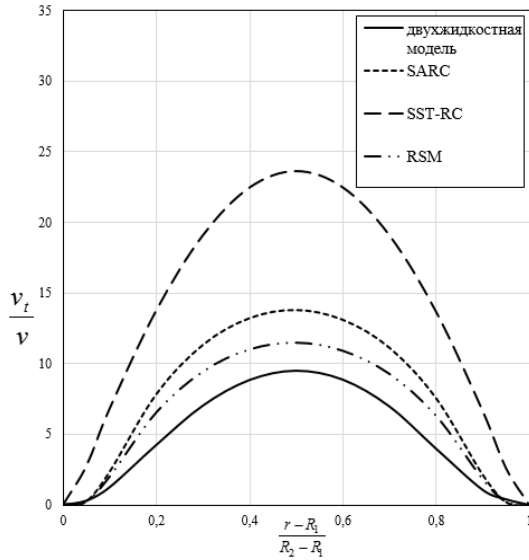


Рис. 9. Профили безразмерной турбулентной вязкости при $Re = 3\,800$
Fig. 9. Dimensionless turbulent viscosity profiles at $Re = 3800$

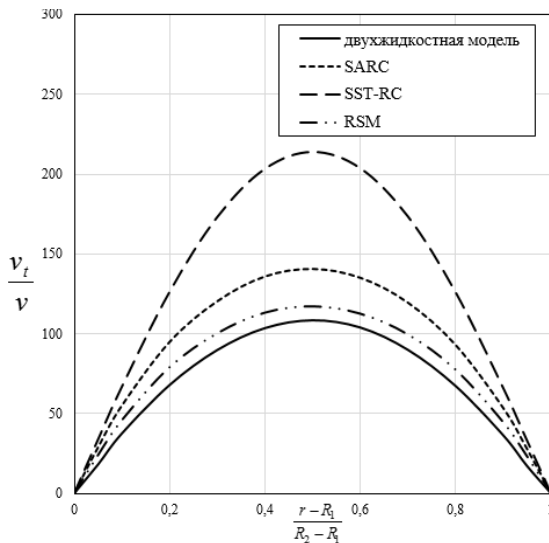


Рис. 10. Профили безразмерной турбулентной вязкости при $Re = 47\,000$
Fig. 10. Dimensionless turbulent viscosity profiles at $Re = 47000$

Из рис. 9, 10 видно, что профили безразмерной турбулентной вязкости имеют почти симметричный вид и довольно сильно отличаются друг от друга. При этом минимальное значение вязкости у двухжидкостной модели, а вязкость по модели $k-\omega$ SST почти в два раза больше.

В работе [34] для определения характеристик потока в течении Тейлора–Куэтта предложены параметры

$$Re_s = \frac{2|\eta Re_2 - Re_1|}{1 + \eta}, \quad c_f = \frac{M}{2\pi r_1^2 L U^2} = \frac{2\pi r_1^2 L \tau_{r\phi} \big|_{r=r_1}}{2\pi r_1^2 L U^2} = \frac{\nu}{U^2} \left(\frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{V_\phi}{r} \right)_{r=r_1},$$

$$U = \frac{2|\eta V_{2\phi} - V_{1\phi}|}{1 + \eta}.$$

Здесь L – длина цилиндра, $\tau_{r\phi}$ – напряжение трения. Для рассматриваемой задачи несложно получить $Re_s = 2 Re$, $U = 2V_0$.

Для верификации моделей на рис. 11 представлено сравнение численных результатов для коэффициента трения с экспериментальными данными. Здесь же приведены опытные данные работы [23].

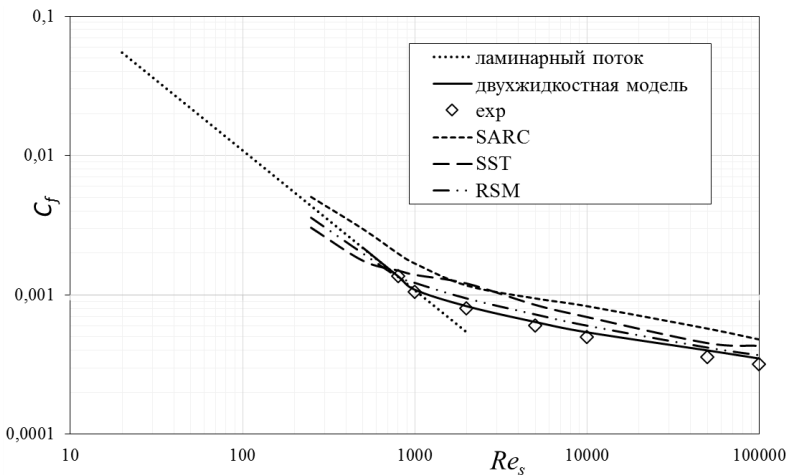


Рис. 11. Зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса Re_s

Fig. 11. Friction coefficient as a function of the Reynolds number Re_s

Из рис. 11 очевидно, что и в этом случае, кроме двухжидкостной модели, остальные модели дают завышенные значения для коэффициента трения. Однако довольно близкие к экспериментальным данным результаты получены и по методу Рейнольдсовых напряжений. Это можно объяснить тем, что данная модель более адекватно описывает анизотропную турбулентность, чем линейные модели RANS, где используется гипотеза Буссинеска. Отметим, что двухжидкостная модель хорошо описывает и зону перехода от ламинарного режима к турбулентному.

Заключение

По численным результатам моделей турбулентности для течения Тейлора–Куэтта можно заключить, что практически все модели адекватно описывают

профили скоростей. Однако они дают различные значения для турбулентной вязкости, следовательно, и для коэффициента трения. Сравнение численных результатов показало, что для коэффициента трения в течении Тейлора–Куэтта наиболее близкие к экспериментальным результаты получены при использовании двухжидкостной модели. Еще одним преимуществом двухжидкостной модели по сравнению с другими является ее устойчивость: если в моделях SARC, $k-\omega$ SST и методе Рейнольдсовых напряжений SSG/LRR-RSM-w2012 для устойчивости требовались шаги интегрирования по безразмерному времени менее 0.001, то в двухжидкостной модели можно было проводить интегрирование шагом более 0.05.

Список источников

1. *Versteegh T.A., Nieuwstadt F.T.M.* Turbulent Budgets of Natural Convection in an Infinite, Differentially Heated, Vertical Channel // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 1998. V. 19 (2). P. 135–149. doi: 10.1016/S0142-727X(97)10018-2
2. *Boudjemadi R., Maupu V., Laurence D., Le Quere P.* Direct Numerical Simulation of Natural Convection in a Vertical Channel: a Tool for Second-Moment Closure Modelling // *Proc. Engineering Turbulence Modelling and Experiments 3*. Amsterdam : Elsevier, 1996. P. 39.
3. *Peng S.H., Davidson L.* Large Eddy Simulation of Turbulent Buoyant Flow in a Confined Cavity // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2001. V. 22 (3). P. 323–331. doi: 10.1016/S0142-727X(01)00095-9
4. *Cabot W., Moin P.* Approximate Wall Boundary Conditions in the Large-Eddy Simulation of High Reynolds Number Flow // *Flow, Turbulence and Combustion*. 1999. V. 63. P. 269–291. doi: 10.1023/A:1009958917113
5. *Spalart P.R., Shur M.L.* On the sensitization of turbulence models to rotational and curvature // *Aerospace Science and Technology*. 1997. V. 1 (5). P. 297–302.
6. *Smirnov P., Menter F.* Sensitization of the SST turbulence model to rotation and curvature by applying the Spalart-Shur correction term // *Proceedings of the American Society of Mechanical Engineers Turbo Expo 2008: Power for Land, Sea and Air*. Germany. 2008. P. 10.
7. *Spalart P.R., Allmaras S.R.* A one-equation turbulence model for aerodynamic flow // *American Institute of Aeronautics and Astronautics Paper*. 1992. V. 12 (1). P. 439–478.
8. *Menter F.R.* Zonal two-equation $k-\omega$ turbulence models for aerodynamic flows // *American Institute of Aeronautics and Astronautics Paper*. 1993. Art. 2906.
9. *Sentyabov A.V., Gavrilov A.A., Dekterev A.A.* Issledovaniye modeley turbulentnosti dlya rascheta zakruchennykh techeniy [Study of turbulence models for calculating swirling flows] // *Teplofizika i aeromekhanika – Thermophysics and Aeromechanics*. 2011. V. 18 (1). P. 81–94.
10. *Spalding D.B.* Chemical reaction in turbulent fluids // *Journal physicochemical hydrodynamics*. 1983. V. 4. P. 323–336. doi: 10.1007/978-981-15-2670-1_12
11. *Spalding D.B.* A turbulence model for buoyant and combusting flows // *4th Int. Conf. on Numerical methods in Thermal Problems*. 1984. Swansea, 15–18 July.
12. *Malikov Z.* Mathematical Model of Turbulence Based on the Dynamics of Two Fluids // *Applied Mathematic Modeling*. 2020. V. 82 (202). P. 409–436. doi: 10.1016/j.apm.2020.09.029
13. *Malikov Z.M., Madaliev M.E.* Numerical Simulation of Two-Phase Flow in a Centrifugal Separator // *Fluid Dynamics*. 2020. V. 55 (8). P. 1012–1028. doi: 10.1134/S0015462820080066
14. *Malikov Z.M., Madaliev M.E.* Numerical study of a swirling turbulent flow through a channel with an abrupt expansion // *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]*. 2021. No. 72. P. 93–101. doi: 10.17223/19988621/72/8
15. *Malikov Z.M., Madaliev M.E.* New two-fluid turbulence model-based numerical simulation of flow in a flat suddenly expanding channel // *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*. 2021. No. 4 (97). P. 24–39. doi: 10.18698/1812-3368-2021-4-24-39

16. Rayleigh L. On the dynamics of revolving fluids // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. 1916. No. 93 (648). P. 148–154.
17. Taylor G.I. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders // Philosophical Transactions of the Royal Society. 1923. V. 233. P. 298–343. doi: 10.1098/RSTA.1923.0008
18. Taylor G.I. Fluid friction between rotating cylinders I - Torque measurements // Proceedings of the Royal Society of London. 1933. V. 157. P. 546–564. doi: 10.1098/rspa.1936.0215
19. Von Lavante E., Yao, J. Numerical investigation of turbulent swirling flows in axisymmetric internal flow configurations // Flow Measurement and Instrumentation. 2012. V. 25. P. 63–68.
20. Panahandehgar S. CFD Study of Taylor-Like Vortices in Swirling Flows // Dissertations and Theses. 2019. 452. URL: <https://commons.erau.edu/edt/452>
21. Mulligan S., De Cesare G., Casserly J., Sherlock R. Understanding turbulent free surface vortex flows using a Taylor-Couette flow analogy // Scientific Reports. 2018. doi: 10.1038/s41598-017-16950-w
22. Tuckerman L.S. Taylor vortices versus Taylor columns // J. Fluid Mech. 2014. V. 750. P. 1–4.
23. Bai Y. Study of viscoelastic instability in Taylor-Couette system as an analog of the magneto-rotational instability : PhD dissertation. Université du Havre, 2015.
24. Mahloul M., Mahamdia A., Kristiawan M. The spherical Taylor–Couette flow // European J. Mech B/Fluids. 2016. V. 59. P. 1–6. URL: <https://doi.org/10.1016/j.euromechfu.2016.04.002>
25. Burin M.J., Czarnocki C.J. Subcritical transition and spiral turbulence in circular Couette flow // Journal of Fluid Mechanics. 2012. V. 709. P. 106–122.
26. Shvab A.V., Popp M.Yu. Modeling of the laminar swirling flow in a vortex chamber // Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 2014. No. 2 (28). P. 90–97.
27. Тулубаев Р.Р., Шваб А.В. Численное исследование аэродинамики закрученного потока в вихревой камере комбинированного пневматического аппарата // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 47. С. 87–98. doi: 10.17223/19988621/47/9
28. Robertson J.M. On turbulent plane Couette flow // Proc. 6th Midwestern Conf. Fluid Mech. Univ. Texas. Austin. 1959. P. 169–182.
29. El Telbany M.M., Reynolds A.J. The structure of turbulent plane Couette flow // Journal of Fluids Engineering. 1982. V. 104. P. 367–372. doi: 10.1115/1.3241853
30. Ostilla-Mónico R., Huisman S.G., Jannink T.J.G., Van Gils D.P.M., Verzicco R., Grossmann S., Sun C., Lohse D. Optimal Taylor–Couette flow: radius ratio dependence // Journal of Fluid Mechanics. 2014. V. 747. P. 1–29. doi: 10.1017/jfm.2014.134
31. Устименко Б.П. Процессы турбулентного переноса во вращающихся течениях. Алма-Ата : Наука, 1977. 228 с.
32. Bjorlund I.S. Heat transfer between concentric rotating cylinders // Journal of Heat Transfer. 1959. V. 81. P. 175–186.
33. Greidanus A.J., Delfos R., Tokgoz S., Westerweel J. Turbulent Taylor–Couette flow over riblets: drag reduction and the effect of bulk fluid rotation // Experiments in Fluids. 2015. V. 56. Art. 107. doi: 10.1007/s00348-015-1978-7
34. Ravelet F., Delfos R., Westerweel J. Influence of global rotation and Reynolds number on the large-scale features of a turbulent Taylor–Couette flow // Physics of fluids. 2010. V. 22. Art. 055103. doi: 10.1063/1.3392773

References

1. Versteegh T.A., Nieuwstadt F.T.M. (1998) Turbulent budgets of natural convection in an infinite, differentially heated, vertical channel. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 19(2). pp. 135–149. doi: 10.1016/S0142-727X(97)10018-2.

2. Boudjemadi R., Maupu V., Laurence D., Le Quere P. (1996) Direct numerical simulation of natural convection in a vertical channel: a tool for second-moment closure modelling. *Engineering Turbulence Modelling and Experiments*. 3.
3. Peng S.H., Davidson L. (2001) Large eddy simulation of turbulent buoyant flow in a confined cavity. *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 22(3). pp. 323–331. doi: 10.1016/S0142-727X(01)00095-9.
4. Cabot W., Moin P. (1999) Approximate wall boundary conditions in the large-eddy simulation of high Reynolds number flow. *Flow Turbulence and Combustion*. 63. pp. 269–291. doi: 10.1023/A:1009958917113.
5. Spalart P.R., Shur M.L. (1997) On the sensitization of turbulence models to rotational and curvature. *Aerospace Science and Technology*. 1(5).pp. 297–302.
6. Smirnov P., Menter F. (2008) Sensitization of the SST turbulence model to rotation and curvature by applying the Spalart-Shur correction term. *Proceedings of the American Society of Mechanical Engineers Turbo Expo 2008: Power for Land, Sea and Air. Germany*. P. 10.
7. Spalart P.R., Allmaras S.R. (1992) A one-equation turbulence model for aerodynamic flow. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*. 12(1). pp. 439–478.
8. Menter F.R. (1993) Zonal two-equation $k-\omega$ turbulence models for aerodynamic flows. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*. pp. 1993–2906.
9. Sentyabov A.V., Gavrilov A.A., Dekterev A.A. (2011) Issledovanie modeley turbulentnosti dlya rascheta zakruchennykh techeniy [Study of turbulence models for calculating swirling flows]. *Teplofizika i aeromekhanika – Thermophysics and Aeromechanics*. 18(1). pp. 81–94.
10. Spalding D.B. (1983) Chemical reaction in turbulent fluids. *Physicochemical Hydrodynamics*. 4. pp. 323–336. doi: 10.1007/978-981-15-2670-1_12.
11. Spalding D.B. (1984) A turbulence model for buoyant and combusting flows. *Proceedings of the 4th International Conference on Numerical methods in Thermal Problems, Swansea. Imperial College Report CFD/86/4*.
12. Malikov Z. Mathematical model of turbulence based on the dynamics of two fluids. *Applied Mathematical Modelling*. 82(202). pp. 409–436. doi: 10.1016/j.apm.2020.09.029.
13. Malikov Z.M., Madaliev M.E. (2020) Numerical simulation of two-phase flow in a centrifugal separator. *Fluid Dynamics*. 55(8). pp. 1012–1028. doi: 10.1134/S0015462820080066.
14. Malikov Z.M., Madaliev M.E. (2021) Chislennoe issledovanie zakruchennogo turbulentnogo techeniya v kanale s vnezapnym rashirenim [Numerical study of a swirling turbulent flow through a channel with an abrupt expansion]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 72. pp. 93–101. doi: 10.17223/19988621/72/8.
15. Malikov Z.M., Madaliev M.E. (2021) Chislennoe modelirovanie techeniya v ploskom vnezapno rasshiryayushchemsya kanale na osnove novoy dvuzhidkostnoy modeli turbulentnosti [New two-fluid turbulence model-based numerical simulation of flow in a flat suddenly expanding channel]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*. 4(97). pp. 24–39. doi: 10.18698/1812-3368-2021-4-24-39.
16. Rayleigh L. (1916) On the dynamics of revolving fluids. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*. 93(648). pp. 148–154.
17. Taylor G.I. (1923) Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Philosophical Transactions of the Royal Society*. 233. pp. 298–343. doi: 10.1098/RSTA.1923.0008.
18. Taylor G.I. (1933) Fluid friction between rotating cylinders I - Torque measurements. *Proceedings of the Royal Society of London*. 157. pp. 546–564. doi: 10.1098/rspa.1936.0215.
19. Von Lavante E., Yao J. (2012) Numerical investigation of turbulent swirling flows in axisymmetric internal flow configurations. *Flow Measurement and Instrumentation*. 25. pp. 63–68.

20. Panahandehgar S. (2019) CFD Study of Taylor-like Vortices in Swirling Flows. *Dissertations and Theses*. 452. Access mode: <https://commons.erau.edu/edt/452>
21. Mulligan S., De Cesare G., Casserly J., Sherlock R. (2018) Understanding turbulent free surface vortex flows using a Taylor-Couette flow analogy. *Scientific Reports*. doi: 10.1038/s41598-017-16950-w.
22. Tuckerman L.S. (2014) Taylor vortices versus Taylor columns. *Journal of Fluid Mechanics*. 750. pp. 1–4.
23. Bai Y. (2015) *Study of Viscoelastic Instability in Taylor-Couette System as an Analog of the Magnetorotational Instability*. Ph.D. Dissertation, Université du Havre.
24. Mahloul M., Mahamdia A., Kristiawan M. (2016) The spherical Taylor–Couette flow. *European Journal of Mechanics - B/Fluids* 59. pp. 1–6. doi: 10.1016/j.euromechfu.2016.04.002.
25. Burin M.J., Czarnocki C.J. (2012) Subcritical transition and spiral turbulence in circular Couette flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 709. pp. 106–122.
26. Shvab A.V., Popp M.Yu. (2014) Modelirovanie laminarnogo zakruchennogo techeniya v vikhreвой kamere [Modeling of the laminar swirling flow in a vortex chamber]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(28). pp. 90–97.
27. Turubaev R.R., Shvab A.V. (2017) Chislennoe issledovanie aerodinamiki zakruchennogo potoka v vikhreвой kamere kombinirovannogo pnevmaticheskogo apparata [Numerical study of swirled flow aerodynamics in the vortex chamber of the combined pneumatic machine]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 47. pp. 87–98. doi: 10.17223/19988621/47/9.
28. Robertson J.M. (1959) On turbulent plane Couette flow. *Proceedings of 6th Midwestern Conference on Fluid Mechanics*. Univ. Texas. Austin. pp. 169–182.
29. El Telbany M.M., Reynolds A.J. (1982) The structure of turbulent plane Couette flow. *Journal of Fluids Engineering*. 104. pp. 367–372. doi: 10.1115/1.3241853.
30. Ostilla-Mónico R., Huisman S.G., Jannink T.J.G., Van Gils D.P.M., Verzicco R., Grossmann S., Sun C., Lohse D. (2014) Optimal Taylor–Couette flow: radius ratio dependence. *Journal of Fluid Mechanics*. 747. pp. 1–29. doi: 10.1017/jfm.2014.134.
31. Ustimenko B.P. (1977) *Protsessy turbulentnogo perenosa vo vrashchayushchikhsya techeniyakh* [Processes of turbulent transfer in rotating flows]. Alma-Ata: Nauka.
32. Bjorclund I.S. (1959) Heat transfer between concentric rotating cylinders. *Journal of Heat Transfer*. 81. pp. 175–186.
33. Greidanus A.J., Delfos R., Tokgoz S., Westerweel J. (2015) Turbulent Taylor–Couette flow over riblets: drag reduction and the effect of bulk fluid rotation. *Experiments in Fluids*. 56. pp. 1–13. doi: 10.1007/s00348-015-1978-7.
34. Ravelet F., Delfos R., Westerweel J. (2010) Influence of global rotation and Reynolds number on the large-scale features of a turbulent Taylor–Couette flow. *Physics of Fluids*. 22(5). Article 055103. pp. 1–8. doi: 10.1063/1.3392773.

Сведения об авторах:

Маликов Зафар Маматкулович – доктор технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории жидкости и газа Института механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан. E-mail: malikov.z62@mail.ru

Назаров Фаррух Холиёрович – кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой механики Ташкентского государственного технического университета им. Ислама Каримова, Ташкент, Узбекистан. E-mail: farruxnazar@mail.ru

Мадалиев Муродил Эркинжанович – научный сотрудник лаборатории жидкости и газа Института механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан. E-mail: madaliev.me2019@mail.ru

Information about the authors:

Malikov Zafar M. (Doctor of Technical Sciences, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures Named after M.T. Urazbayev, Tashkent, Republic of Uzbekistan). E-mail: malikov.z62@mail.ru

Nazarov Farrukh Kh. (Tashkent State Technical University Named after Islam Karimov, Tashkent, Republic of Uzbekistan). E-mail: farruxnazar@mail.ru

Madaliev Murodil E. (Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures Named after M.T. Urazbayev, Tashkent, Republic of Uzbekistan). E-mail: madaliev.me2019@mail.ru

Статья поступила в редакцию 13.07.2021; принята к публикации 12.07.2022

The article was submitted 13.07.2021; accepted for publication 12.07.2022

Научная статья

УДК 531.011

doi: 10.17223/19988621/78/11

Формальное порождение величин механического движения

Валентин Дмитриевич Павлов

*ЗАО «Владимирский электромеханический завод», Владимир, Россия,
pavlov.val.75@mail.ru*

Аннотация. Рассматриваются квантово-механические дифференциальные уравнения, являющиеся формальными аналогами уравнения Шредингера. Их отличия друг от друга и от уравнения Шредингера заключаются в порядках частных производных. Характерной особенностью этих уравнений является наличие размерных коэффициентов, представляющих собой произведение целых степеней массы и скорости, что позволяет рассматривать их в качестве величин механического движения. Установлена логическая закономерность формирования этих величин. Рассмотрен прикладной характер двух из них – интегрального вектора Умова для кинетической энергии и обратного импульса.

Ключевые слова: интегральный вектор Умова, обратный импульс, движение, величина, порядок

Для цитирования: Павлов В.Д. Формальное порождение величин механического движения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 78. С. 143–150. doi: 10.17223/19988621/78/11

Original article

Formal derivation of mechanical motion magnitudes

Valentin D. Pavlov

Vladimir Electromechanical Plant, Vladimir, Russian Federation, pavlov.val.75@mail.ru

Abstract. Formally, a zero-order magnitude of the mechanical motion ${}^0p = mv^0$ can be derived from the Schrödinger equation. The first-order magnitude of the mechanical motion ${}^1p = mv^1$ is provided by a formal analog of the Schrödinger equation obtained when comparing the wave function Ψ and its gradient, while the second-order magnitude of the mechanical motion ${}^2p = mv^2/2!$ is obtained when comparing the wave function and its time derivative. Thus, the zero-, first-, and second-order magnitudes of the mechanical motion are derived. Apparently, other formal analogs of the Schrödinger equation can provide magnitudes of the mechanical motion of other orders. The third-order magnitude of the mechanical motion ${}^3p = mv^3/3!$ is the Umov integral vector for the kinetic energy. The negative first-order magnitude of the mechanical motion ${}^{-1}p = mv^{-1}$ represents a reverse impulse. Almost all the results are obtained using the quantum mechanical dif-

ferential equations, while the results themselves are predominantly macromechanical. In all formal analogs of the Schrödinger equation, the order of partial derivatives differs by one. For motion magnitudes with a positive degree of velocity, the order of time derivatives is higher than that of the spatial ones. For magnitudes with a negative degree, the order of spatial derivatives is higher.

Keywords: Umov vector, backward impulse, motion, magnitude, order

For citation: Pavlov, V.D. (2022) Formal derivation of mechanical motion magnitudes. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 78. pp. 143–150. doi: 10.17223/19988621/78/11

Введение

Волновая функция

$$\Psi = Ce^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{mv^2}{2}t - m\mathbf{v}\mathbf{r})}$$

удовлетворяет уравнению Шредингера (УШ) [1, 2] для свободной частицы

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi,$$

$$\Delta \Psi = -\frac{2i}{\hbar} \left(\frac{mv^0}{0!} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Формально УШ порождает величину механического движения нулевого порядка (в том смысле, что она в УШ содержится) [3–5]

$${}^0p = \frac{mv^0}{0!}. \quad (1)$$

Примечательно, что квантово-механическая конструкция порождает макромеханическую величину. В дальнейшем используется преимущественно этот же принцип.

Цель работы заключается в демонстрации того факта, что изменение порядка частных производных в уравнении Шредингера порождает также волновое уравнение, но уже для иной механической субстанции, составленной целыми степенями массы и скорости.

Аналоги УШ и порождаемые ими величины движения

Градиент волновой функции равен

$$\nabla \Psi = \frac{i}{\hbar} m \mathbf{v} C e^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{mv^2}{2}t - m\mathbf{v}\mathbf{r})}.$$

Обе части волновой функции можно умножить на одну и ту же величину

$$\Psi = C e^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{mv^2}{2}t - m\mathbf{v}\mathbf{r})} \left| \times \frac{i}{\hbar} m \mathbf{v} \right|.$$

Из сопоставления этих двух уравнений вытекает следующий формальный аналог УШ (ФАУШ):

$$\nabla\Psi = \frac{i}{\hbar} m\mathbf{v}\Psi ,$$

$$\nabla\Psi = \frac{i}{\hbar} \left(\frac{mv^1}{1!} \right) \Psi ,$$

который порождает величину механического движения первого порядка [6–8]

$${}^1\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{1!}, \quad {}^1p = \frac{mv^1}{1!}. \quad (2)$$

Производная волновой функции равна

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \frac{mv^2}{2} Ce^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{mv^2}{2}t - m\mathbf{v}\mathbf{r})} ,$$

$$\Psi = Ce^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{mv^2}{2}t - m\mathbf{v}\mathbf{r})} \left| \times -\frac{i}{\hbar} \frac{mv^2}{2} . \right.$$

Из сопоставления этих двух уравнений вытекает следующий ФАУШ:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \frac{mv^2}{2} \Psi ,$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{mv^2}{2!} \right) \Psi ,$$

который порождает величину механического движения второго порядка

$${}^2p = \frac{mv^2}{2!}. \quad (3)$$

Величины механического движения (1), (2), (3) известны.

Очевидно, что другие ФАУШ могут порождать величины механического движения других порядков.

Интегральный вектор Умова для кинетической энергии

Далее система координат выбирается таким образом, чтобы одна из осей совпадала с направлением движения. Тогда пространственные производные будут одномерными.

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\hbar^2} \frac{m^2v^4}{4} Ce^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{mv^2}{2}t - m\mathbf{v}\mathbf{r})} \left| \times i\hbar , \right. \quad (4)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r} = \frac{i}{\hbar} m\mathbf{v} Ce^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{mv^2}{2}t - m\mathbf{v}\mathbf{r})} \left| \times \left(-\frac{mv^2}{4} \mathbf{v} \right) . \right.$$

ФАУШ

$$4i\hbar \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -mv^2 \mathbf{v} \frac{\partial\Psi}{\partial r} ,$$

$$4i\hbar \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -3! \left(\frac{mv^2 \mathbf{v}}{3!} \right) \frac{\partial\Psi}{\partial r} .$$

Он порождает величину механического движения третьего порядка

$${}^3\mathbf{p} = \frac{mv^2 \mathbf{v}}{3!}, \quad {}^3p = \frac{mv^3}{3!}. \quad (5)$$

Коэффициент $1/3!$ выбран для сохранения преемственности выражений (1), (2), (3).

Для установления смысла величины (5) можно обратиться к дифференциальному вектору Умова

$$d\mathbf{U} = w d\mathbf{v},$$

здесь w – плотность энергии.

Для кинетической энергии

$$d\mathbf{U} = \frac{mv^2}{2V} d\mathbf{v},$$

$$\mathbf{U}\mathbf{V} = \frac{mv^2}{3!} \mathbf{v}.$$

V – объем.

Таким образом, величина (5) – это интегральный вектор Умова для кинетической энергии.

Обратный импульс

Сравнение выражения

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial r^3} = -\frac{i}{\hbar^3} m^3 v^2 \mathbf{v} C e^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{mv^2}{2}t - m\mathbf{v}\mathbf{r})}$$

с формулой (4) приводит следующему ФАУШ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial r^3} &= 4 \frac{i}{\hbar} \frac{m}{v} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^3 \Psi}{\partial r^3} &= 4 \frac{i}{\hbar} \left(0! \frac{m}{v} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

который порождает величину механического движения минус первого порядка (обратный импульс)

$${}^{-1}\mathbf{p} = 0! \frac{m\mathbf{v}}{v^2}, \quad {}^{-1}p = 0! \frac{m}{v}.$$

Смысл этой величины и ее актуальность устанавливает

Теорема. В водородоподобном атоме величина $m_e v^{-1}$ квантуется. Фиксированным (неизменным) квантом является величина $m_e v_0^{-1}$, соответствующая основному энергетическому уровню.

Доказательство. В водородоподобном атоме полная, потенциальная и кинетическая энергии электрона связаны следующим образом [9]:

$$U_n = 2E_n, \quad E_{Kn} = -E_n. \quad (6)$$

При этом

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{Z^2 m_e e^4}{8\hbar^2 \epsilon_0^2}.$$

Для основного энергетического уровня по аналогии с боровским радиусом a_0 скорость электрона можно обозначить v_0 .

Из (6) следует

$$E_{K1} = \frac{m_e v_0^2}{2} = -E_1 = \frac{Z^2 m_e e^4}{8h^2 \varepsilon_0^2},$$

$$\frac{m_e}{v_0} = \pm \frac{2h\varepsilon_0 m_e}{Ze^2},$$

$$E_{Kn} = \frac{m_e v_n^2}{2} = -E_n = \frac{1}{n^2} \frac{Z^2 m_e e^4}{8h^2 \varepsilon_0^2},$$

$$\frac{m_e}{v_n} = \pm n \frac{2h\varepsilon_0 m_e}{Ze^2} = n \frac{m_e}{v_0}.$$

Теорема доказана.

Следствие:

$$\frac{m_e}{v_{n+1}} = \frac{m_e}{v_n} + \frac{m_e}{v_0}.$$

Порядки величин движения

Определение. Величина движения порядка n – это

$${}^n p = k_n m v^n, k_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}, n \geq 0 \\ (-1)^{n+1} (n+1)!, n < 0 \end{cases}.$$

Величина движения любого порядка порождается соответствующим ФАУШ. Нетрудно заметить, что

$${}^{n-1} p = \frac{d}{dv} {}^n p, n \neq 0.$$

Порядки величин движения и соответствующие им ФАУШ сведены в таблицу.

Порядки величин движения и соответствующие им ФАУШ

Величины движения	ФАУШ
${}^n p = \frac{mv^n}{n!}$	$(-1)^n i\hbar \frac{\partial^{n-1}\Psi}{\partial t^{n-1}} = 2^{-n+1} m v^n \frac{\partial^{n-2}\Psi}{\partial x^{n-2}}$ при $n \geq 2$
${}^3 p = \frac{mv^2 \mathbf{v}}{3!}, {}^3 p = \frac{mv^3}{3!}$	$-i\hbar \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{mv^2 \mathbf{v}}{2^2} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$
${}^2 p = \frac{mv^2}{2!}$	$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{mv^2}{2^1} \Psi$
${}^1 p = \frac{mv}{1!}, {}^1 p = \frac{mv^1}{1!}$	$-i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{mv}{2^0} \Psi$
${}^0 p = \frac{mv^0}{0!}$	$i\hbar \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} = 2^1 m \frac{\partial \Psi}{\partial t}$

Окончание таблицы

Величины движения	ФАУШ
$^{-1}\mathbf{p} = 0! \frac{m\mathbf{v}}{v^2}, \quad ^{-1}p = 0!mv^{-1}$	$-i\hbar \frac{\partial^3\Psi}{\partial r^3} = \frac{2^2 m\mathbf{v}}{v^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$
$^{-2}p = -1!mv^{-2}$	$i\hbar \frac{\partial^4\Psi}{\partial x^4} = 2^3 mv^{-2} \frac{\partial^3\Psi}{\partial t^3}$
$^{-3}\mathbf{p} = 2! \frac{m\mathbf{v}}{v^4}, \quad ^{-3}p = 2!mv^{-3}$	$-i\hbar \frac{\partial^5\Psi}{\partial x^5} = \frac{2^4 m\mathbf{v}}{v^4} \frac{\partial^4\Psi}{\partial t^4}$
$^{-n}p = (-1)^{n-1}(n-1)!mv^{-n}$	$(-1)^n i\hbar \frac{\partial^{n+2}\Psi}{\partial x^{n+2}} = 2^{n+1}mv^{-n} \frac{\partial^{n+1}\Psi}{\partial t^{n+1}} \text{ при } n \geq -1$

Заключение

Почти все полученные результаты явились следствием использования квантово-механических дифференциальных уравнений, однако сами по себе результаты являются преимущественно макромеханическими.

Величины механического движения различных порядков порождаются формальными аналогами уравнения Шредингера. К таким величинам относятся как известные (масса, импульс, кинетическая энергия), так и неизвестные (интегральный вектор Умова для кинетической энергии, обратный импульс и др.).

Во всех ФАУШ порядки частных производных отличаются на единицу. Для величин движения с положительной степенью скорости порядок временных производных выше, чем пространственных. Для величин с отрицательной степенью выше порядок пространственных производных.

Величины с нечетными степенями скорости допускают векторное представление.

Интегральный вектор Умова характеризует движение энергии тела.

Обратный импульс квантуется в водородоподобном атоме.

Список источников

1. Алиев А.Р., Раджабов Ш.Ш. Разложение по собственным функциям магнитного оператора Шредингера в ограниченных областях // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 69. С. 5–14. doi: 10.17223/19988621/69/1
2. Мицарина Е.Ю., Либин Э.Е., Бубенчиков М. О решении нестационарного уравнения Шредингера // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 5 (43). С. 28–34. doi: 10.17223/19988621/43/3
3. Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории движения тел с переменной массой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 65. С. 83–91. doi: 10.17223/19988621/65/6
4. Ковалевский А.П., Шаталин Е.В. Выбор регрессионной модели зависимости массы тела от роста с помощью эмпирического моста // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 5(37). С. 35–47. doi: 10.17223/19988621/37/3
5. Павлов В.Д. Математические модели резонансных и антирезонансных процессов // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. 2021. № 1 (49). С. 17–27. doi: 10.20291/2079-0392-2021-1-17-27
6. Белов Н.Н., Югов Н.Т., Саммель А.Ю., Степанов Е.Ю. Исследование прочности прозрачной брони на высокоскоростной удар цилиндрическим ударником методом

- компьютерного моделирования // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 67. С. 69–77. doi: 10.17223/19988621/67/7
7. Герасимов А.В., Пашков С.В. Численное моделирование группового удара высокоскоростных элементов по космическому аппарату // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 3 (29). С. 57–64.
8. Афанасьева С.А., Бирюков Ю.А., Белов Н.Н., Буркин В.В., Ищенко А.Н., Карташов Ю.И., Касимов В.З., Фоменко В.В., Югов Н.Т. Повышение эффективности высокоскоростного метания ударников с применением высокоэнергетических топлив с нанодисперсными наполнителями // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 2 (18). С. 67–79.
9. Павлов В.Д. Магнитный поток и его квантование // Известия Уфимского научного центра РАН. 2020. № 4. С. 25–28. doi: 10.31040/2222-8349-2020-0-4-25-28

References

1. Aliev A.R., Rajabov Sh.Sh. (2021) Razlozhenie po sobstvennym funktsiyam magnitnogo operatora Shredingera v ogranichennykh oblastiakh [Eigenfunction expansions of the magnetic Schrödinger operator in bounded domains]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 69. pp. 5–14. doi: 10.17223/19988621/69/1.
2. Mishcharina E.Yu., Libin E.E., Bubenchikov M.A. (2016) O reshenii nestatsionarnogo uravneniya Shredingera [On the solution of the nonstationary Schrödinger equation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 43. pp. 28–34. doi: 10.17223/19988621/43/3.
3. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2020) K teorii dvizheniya tel s peremennoy massoy [To the theory of motion of bodies with variable mass]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 65. pp. 83–91. doi: 10.17223/19988621/65/6.
4. Kovalevskiy A.P., Shatalin E.V. (2015) Vybore regressionnoy modeli zavisimosti massy tela ot rosta s pomoshch'yu empiricheskogo mosta [The choice of a regression model of the body weight on the height via an empirical bridge]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 37. pp. 35–47. doi: 10.17223/19988621/37/3.
5. Pavlov V.D. (2021) Matematicheskie modeli rezonansnykh i antirezonansnykh protsessov [Mathematical models of resonant and antiresonant processes]. *Vestnik Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta putey soobshcheniya – Bulletin of the Ural State University of Railways*. 49. pp. 17–27. doi: 10.20291/2079-0392-2021-1-17-27.
6. Belov N.N., Yugov N.T., Sammel A.Yu., Stepanov E.Yu. (2020) Issledovanie prochnosti prozrachnoy broni na vysokoskorostnoy udar tsilindricheskim udarnikom metodom komp'yuternogo modelirovaniya [Study of the transparent armor strength under a high-speed impact of a cylindrical impactor by computer modeling method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 67. pp. 69–77. doi: 10.17223/19988621/67/7.
7. Gerasimov A.V., Pashkov S.V. (2014) Chislennoe modelirovanie gruppovogo udara vysokoskorostnykh elementov po kosmicheskomu apparatu [Numerical simulation of the group hypervelocity elements impact on a spacecraft]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 29. pp. 57–64.
8. Afanas'eva S.A., Biryukov Yu.A., Belov N.N., Burkin V.V., Ishchenko A.N., Kartashov Yu.I., Kasimov V.Z., Fomenko V.V., Yugov N.T. (2012) Povyshenie effektivnosti vysokoskorostnogo metaniya udarnikov s primeneniem vysokoenergeticheskikh topliv s nanodispersnymi napolnitelyami [Increase of efficiency of high-speed throwing of strikers with application of

- high-energy fuels with nanodispersed fillers]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 18. pp. 67–79.
9. Pavlov V.D. (2020) Magnitnyy potok i ego kvantovanie [Magnetic flux and its quantization]. *Izvestiya Ufimskogo nauchnogo tsentra RAN – Bulletin of the Ufa Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*. 4. pp. 25–28. doi: 10.31040/2222-8349-2020-0-4-25-28.

Сведения об авторе:

Павлов Валентин Дмитриевич – кандидат технических наук, начальник научно-информационного отдела ЗАО «Владимирский электромеханический завод», Владимир, Россия. E-mail: pavlov.val.75@mail.ru

Information about the author:

Pavlov Valentin D. (Candidate of Technical Sciences, Vladimir Electromechanical Plant, Vladimir, Russian Federation). E-mail: pavlov.val.75@mail.ru

Статья поступила в редакцию 23.11.2021; принята к публикации 12.07.2022

The article was submitted 23.11.2021; accepted for publication 12.07.2022

Научная статья

УДК 532.61/534-141

doi: 10.17223/19988621/78/12

Волновые движения жидкого топлива в тороидальных сосудах с учетом капиллярного эффекта

Юй Чжаокай

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия, yuzhaokai933@mail.ru

Аннотация. Разработана методика решения задачи на определение собственных частот и форм колебаний капиллярной жидкости на основе метода конечных элементов. Дана количественная оценка влияния числа Бонда и объема заполнения сосуда жидкостью на поведение капиллярной жидкости в тороидальных сосудах. Из результатов следует, что в условиях микрогравитации сила поверхностного натяжения и граничное условие жидкости на линии трехфазного контакта играют важную роль при определении поведения жидкости.

Ключевые слова: микрогравитация, сила поверхностного натяжения, линия трехфазного контакта, собственная частота и форма, тороидальный сосуд, метод конечных элементов

Благодарности: Автор выражает благодарность руководителю доценту А.Н. Темнову за помощь в формулировке задачи и плодотворные обсуждения результатов работы.

Для цитирования: Юй Ч. Волновые движения жидкого топлива в тороидальных сосудах с учетом капиллярного эффекта // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 78. С. 151–165. doi: 10.17223/19988621/78/12

Original article

Sloshing of a liquid fuel in toroidal tanks with account for capillary effect

Yu Zhao Kai

*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation,
yuzhaokai933@mail.ru*

Abstract. A numerical approach is proposed to solve the linear sloshing problem of an incompressible inviscid liquid with account for surface tension effects, which are predominant in the low-gravity environment. A variational formulation is derived by the linearization of motion equations for the liquid near its initial equilibrium state with con-

sideration of a pressure drop on the free surface and a free-end boundary condition on the contact line. The continuous problem domain is discretized by the finite element method. After discretization, the classical generalized eigenvalue problem is obtained, whose solutions are the natural frequencies and mode shapes. Several examples show the effect of the Bond number and the fluid-filled volume on the liquid behavior in toroidal tanks. A comparison of numerical results with experimental measurements under ground conditions reveals that under microgravity condition, the surface tension force and the boundary condition on the contact line play an important role when determining the natural frequencies and mode shapes of the liquid sloshing. Each fluid-filled volume has its own characteristic Bond number, above which the natural frequencies approximate to the experimental values obtained under ground conditions. The presented results can be used in the coupling dynamic analysis of a spacecraft with propellant tanks.

Keywords: microgravity, surface tension force, contact line, natural frequency and mode shapes, toroidal tank, finite element method

Acknowledgments: The author is grateful to the supervisor associate professor A.N. Temnov for help in formulating the problem and discussion of the results of the work.

For citation: Yu, Z. (2022) Sloshing of a liquid fuel in toroidal tanks with account for capillary effect. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 78. pp. 151–165. doi: 10.17223/19988621/78/12

В современных ракетах и космических аппаратах имеются баки, частично заполненные жидким топливом. Явление плескания топлива в ракетах при больших эффективных силах тяготения и последствия этого явления широко известны и вполне изучены [1–3]. В настоящее время в связи с созданием орбитальных станций и разгонных блоков важную роль приобретает проблема плескания топлива в условиях микрогравитации ($g = 10^{-6} - 10^{-4}g_0$, где $g_0 = 9.81 \text{ м/сек}^2$), когда заметно проявляется влияние силы поверхностного натяжения.

В российских и зарубежных монографиях [4–5] обобщены результаты исследования статики и динамики жидкости в условиях, близких к невесомости. Равновесная свободная поверхность жидкости в условиях микрогравитации принимает криволинейную форму, которая отличается от плоской в наземных условиях и является функцией ряда параметров, в том числе геометрии полости, угла смачивания, числа Бонда и объема заполнения. До сих пор разработаны только численные методы для определения формы свободной поверхности капиллярной жидкости в осесимметричных сосудах простой формы (цилиндр, сфера и эллипсоид) [6–7].

В статьях [8–11] выражения потенциала скоростей жидкости и поля смещения представлены по ряду характерных функций и получена задача на определение собственных частот и форм колебаний капиллярной жидкости. Предложенные в этих работах приближенно-аналитические методы подходят только для сосудов простой формы. Для решения подобных задач в статьях [12–14] были использованы модифицированный метод Галеркина и метод конечных элементов.

Следует отметить, что в последнее время стали использоваться топливные баки более сложной формы – в виде коаксиального цилиндра и тороидальные, однако в них поведение жидкости с учетом капиллярного эффекта исследовано недостаточно.

Топливный бак представляет собой гидромеханическую систему газ–жидкость–твердая стенка. Вывод условий равновесия данной системы в условиях микрогравитации был подробно описан в статье [15], а в работе [16] представлено решение задачи о равновесии и колебаниях капиллярной жидкости в коаксиально-цилиндрических сосудах. В данной работе исследованы собственные колебания капиллярной жидкости в тороидальных сосудах на основе метода конечных элементов. В дальнейшем будем говорить о капиллярной или тяжелой жидкости в зависимости от того, учитывается капиллярный эффект или нет.

Постановка задачи о малых колебаниях капиллярной жидкости

Пусть вектор ускорения $\mathbf{g}$ действует параллельно продольной оси симметрии сосуда. Используем длину дуги s в качестве переменной для описания формы равновесной свободной поверхности. Введем цилиндрическую систему координат $or\theta z$ (рис. 1), а также на свободной поверхности Γ_0 криволинейную систему координат $os\theta h$ таким образом, чтобы поверхность Γ_0 имела уравнение $h = 0$, а координатные линии h были направлены по внешней нормали поверхности Γ_0 .

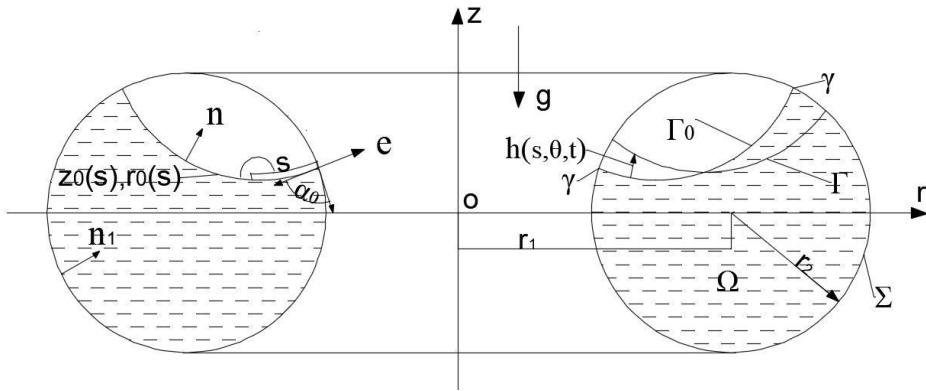


Рис. 1. Основные обозначения параметров жидкости:

$z_0(s)$ и $r_0(s)$ – функции равновесной свободной поверхности; α_0 – угол смачивания жидкости; $h(s, \theta, t)$ – отклонение возмущенной свободной поверхности Γ от Γ_0 по внешней нормали; γ – линия трехфазного контакта; Σ – смачиваемая поверхность сосуда; Ω – область, которую занимает жидкость; r_1 – радиус осевой окружности тора; r_2 – радиус окружности меридиана; $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}_1$ – нормали свободной поверхности и смачиваемой поверхности соответственно; $\mathbf{e}$ – внешняя нормаль линии контакта в касательной плоскости свободной поверхности

Fig. 1. General designations for parameters of a liquid:

$z_0(s)$ and $r_0(s)$ are the functions of an equilibrium free surface; α_0 is the contact angle; $h(s, \theta, t)$ is the deviation of the perturbed free surface Γ from the equilibrium one Γ_0 along the outward normal; γ is the contact line; Σ is the wetted surface of a vessel; Ω is the the area occupied by the liquid; r_1 is the radius of a torus axial circle; r_2 is the radius of a torus meridian circle; $\mathbf{n}$ and $\mathbf{n}_1$ are the normals to the free surface and to the wetted surface, respectively; and $\mathbf{e}$ is the outward normal to the contact line in a tangent plane of the free surface

Будем считать, что равновесная поверхность жидкости Γ_0 в неподвижном сосуде определена ($z = z_0(s)$, $r = r_0(s)$), и жидкость совершает малые колебания, которые подчиняются:

– уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

где φ – потенциал скоростей жидкости;

– условию непротекания на смачиваемой поверхности

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma. \quad (2)$$

Возмущенная свободная поверхность Γ может быть представлена в виде: $h = h(s, \theta, t)$, и линеаризованное кинематическое условие запишется как:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial h}{\partial t} \text{ на } \Gamma_0. \quad (3)$$

Динамическое условие на свободной поверхности вытекает из линеаризованного интеграла Коши–Лагранжа:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{p_d}{\rho} + gz_d = 0 \text{ на } \Gamma_0,$$

где p_d – динамическая составляющая давления и z_d – проекция отклонения свободной поверхности вдоль оси z .

В предположении отклонения свободной поверхности вдоль нормали z_d выглядит следующим образом:

$$z_d = h\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z = hr_{0s},$$

где $\mathbf{e}_z$ – единичный вектор оси z , а r_{0s} – первая производная функции $r_0(s)$ по длине дуги s .

Выражение динамической составляющей давления p_d частиц жидкости на свободной поверхности определяется из условия Лапласа для скачка давления $p_0 - p = 2\sigma K$, где σ – коэффициент поверхностного натяжения и K – средняя кривизна свободной поверхности.

Для равновесной и возмущенной свободной поверхности условие Лапласа имеет выражение:

$$p_0 - p_s = \sigma(k_1 + k_2), \quad p_0 - p = \sigma\left\{(k_1 + k_2) + \left[(k_1^2 + k_2^2)h + \Delta_\Gamma h\right]\right\},$$

где k_1 и k_2 – главные кривизны равновесной свободной поверхности, определяемые уравнениями: $k_1 = r_{0s}z_{0ss} - r_{0ss}z_{0s}$, $k_2 = z_{0s}/r_0$, здесь нижние индексы s и ss означают первую и вторую производные функции по длине дуги s соответственно;

$$\Delta_\Gamma = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{r_{0s}}{r} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \text{ – оператор Лапласа–Бельтрами на поверхности } \Gamma_0.$$

Из соотношения $p_d = p - p_s$ получим выражение динамической составляющей давления на свободной поверхности:

$$p_d = -\sigma\left[(k_1^2 + k_2^2)h + \Delta_\Gamma h\right].$$

Тогда получим динамическое условие на свободной поверхности в виде:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + ghr_{0s} - \frac{\sigma}{\rho}\left[(k_1^2 + k_2^2)h + \Delta_\Gamma h\right] = 0 \text{ на } \Gamma_0. \quad (4)$$

Для вывода краевого условия на линии трехфазного контакта используем условие Дюпре–Юнга: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1 = \cos(\alpha_0)$, и предположение сохранения угла смачива-

ния $\delta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1) = 0$ в процессе плескания жидкости. Тогда получим граничное условие на линии контакта [4. С. 103]:

$$\frac{\partial h}{\partial e} + \chi h = 0, \text{ где } \chi = \frac{k_1 \cos \alpha_0 - k_1^2}{\sin \alpha_0} \text{ на } \gamma, \quad (5)$$

где k_1^2 – кривизна твердой стенки сосуда на линии контакта.

Введем радиус окружности меридиана тора r_2 как характерный размер длины и характерные значения для времени и потенциала: $t^* = (pr_2^3/\sigma)^{1/2}$, $\varphi^* = r_2^2/t^*$. Подставив величины $x = r_2 x'$, $t = t^* t'$ и $\varphi = \varphi^* \varphi'$ в уравнения (1–5), получим безразмерную формулировку задачи, в которой опускаем верхний знак ' над буквами:

$$\Delta \varphi = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial h}{\partial t} \text{ на } \Gamma_0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + B_0 h r_{0s} - \left[(k_1^2 + k_2^2) h + \Delta_\Gamma h \right] = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad \frac{\partial h}{\partial e} + \chi h = 0 \text{ на } \gamma, \quad (6)$$

где $B_0 = \rho g r_2^2 / \sigma$ – число Бонда, характеризующее соотношение массовой силы и силы поверхностного натяжения.

По сравнению с постановкой задачи о малых колебаниях жидкости без учета силы поверхностного натяжения капиллярная специфика в поставленной задаче (6) проявляется в динамическом условии на свободной поверхности и в граничном условии на линии трехфазного контакта.

Вариационная формулировка краевой задачи

Для определения конкретного решения поставленной задачи (6) следует задать начальные условия, например поле смещений h и скорость $\partial h / \partial t$ свободной поверхности в некоторый момент времени. В данной работе рассматриваются собственные колебания, т.е. решения, зависящие от времени t по гармоническому закону. Тогда потенциал скоростей жидкости $\varphi(r, z, \theta, t)$ и поле смещений свободной поверхности $h(s, \theta, t)$ можно представить в виде:

$$\varphi(r, z, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(r, z, \theta) e^{i\omega_n t}, \quad h(s, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(s, \theta) e^{i\omega_n t}.$$

где ω_n – безразмерная частота n -го тона колебаний жидкости.

Исключив переменную времени, получим задачу о собственных колебаниях жидкости с учетом силы поверхностного натяжения:

$$\Delta \varphi_n = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} = i\omega_n h_n \text{ на } \Gamma_0, \\ i\omega_n \varphi_n + B_0 h_n r_{0s} - \left[(k_1^2 + k_2^2) h_n + \Delta_\Gamma h_n \right] = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad \frac{\partial h_n}{\partial e} + \chi h_n = 0 \text{ на } \gamma.$$

Запишем вариационную формулировку задачи в виде:

$$-\int_{\Omega} \Delta \varphi_n \delta \varphi_n d\Omega + \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \delta \varphi_n d\Sigma + \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial n} + i\omega_n h_n \right) \delta \varphi_n d\Gamma_0 + \\ \int_{\Gamma_0} \left\{ \left[B_0 r_{0s} - (k_1^2 + k_2^2) \right] h_n - \Delta_\Gamma h_n + i\omega_n \varphi_n \right\} \delta h_n d\Gamma_0 + \int_{\gamma} \left(\frac{\partial h_n}{\partial e} + \chi h_n \right) \delta h_n d\gamma = 0.$$

Используя интегрирование по частям

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \Delta \varphi_n \delta \varphi_n d\Omega &= -\int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \delta \varphi_n d\Sigma - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \delta \varphi_n d\Gamma_0 + \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \delta \nabla \varphi_n d\Omega, \\ -\int_{\Gamma_0} \Delta_{\Gamma} h_n \delta h_n d\Gamma_0 &= -\int_{\gamma} \frac{\partial h_n}{\partial e} \delta h_n d\gamma + \int_{\Gamma_0} \nabla_{\Gamma} h_n \delta \nabla_{\Gamma} h_n d\Gamma_0, \end{aligned}$$

получим формулировку задачи в вариационном виде: $\delta \Pi_1 = 0$, где Π_1 – функционал, определяемый выражением

$$\Pi_1 = \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \nabla \varphi_n d\Omega + \int_{\Gamma_0} \left\{ \left[B_0 r_{0s} - (k_1^2 + k_2^2) \right] h_n^2 + \nabla_{\Gamma} h_n \nabla_{\Gamma} h_n \right\} d\Gamma_0 + \int_{\gamma} \chi h_n^2 d\gamma.$$

При использовании кинематического условия на свободной поверхности функционал Π_1 приобретает иной вид:

$$\begin{aligned} \Pi_1 = \int_{\Gamma_0} \left\{ \left[B_0 r_{0s} - (k_1^2 + k_2^2) \right] \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \right)^2 + \nabla_{\Gamma} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \right) \nabla_{\Gamma} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \right) \right\} d\Gamma_0 + \\ + \int_{\gamma} \chi \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \right)^2 d\gamma - \lambda_n \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \nabla \varphi_n d\Omega, \end{aligned}$$

где $\lambda_n = \omega_n^2$.

Чтобы установить связь между потенциалом скоростей жидкости φ_n и скоростью движения частиц жидкости на свободной поверхности $\partial \varphi_n / \partial n$, необходимо ввести вспомогательную задачу Неймана:

$$\Delta \varphi_n = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} = f \text{ на } \Gamma_0,$$

где f – заданная функция на свободной поверхности жидкости.

Вариационная формулировка задачи Неймана имеет вид:

$$\int_{\Omega} \Delta \varphi_n \delta \varphi_n d\Omega - \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \delta \varphi_n d\Sigma - \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial n} - f \right) \delta \varphi_n d\Gamma_0 = 0.$$

Аналогично можно преобразовать задачу Неймана в виде: $\delta \Pi_2 = 0$, где Π_2 – функционал, имеющий вид:

$$\Pi_2 = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \varphi_n d\Gamma_0 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \nabla \varphi_n d\Omega.$$

Сосуд осесимметричный, и волны в окружном направлении обладают свойством периодичности. Тогда можно записать $\varphi_n(r, z, \theta)$ и $h_n(s, \theta)$ в виде:

$$\varphi_n(r, z, \theta) = \Phi(r, z) \cos(m\theta), \quad h_n(s, \theta) = H(s) \cos(m\theta), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Отметим, что колебания, отвечающие числу волн в окружном направлении $m = 1$, имеют антисимметричную моду колебаний, и в этом случае возникает переменное результирующее давление на сосуд в поперечном направлении. Данный случай вызывает большой интерес в инженерной практике при проектировании систем управления космических аппаратов. Важное внимание также уделяется колебаниям, отвечающим значению $m = 0$, в которых переменная составляющая давления вдоль оси сосуда.

При заданном значении m можно преобразовать осесимметричную область жидкости из трехмерной в двухмерную:

$$\delta\Pi_1 = 0 \text{ и } \delta\Pi_2 = 0, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \Pi_1 = \int_{\Gamma_0} & \left\{ \left[B_0 r_{0s} - (k_1^2 + k_2^2) \right] \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \right)^2 + \frac{m^2}{r^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 \right] \right\} r ds + \\ & \left[\chi r \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 \right]_{\gamma} - \lambda_n \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 + \frac{m^2 \Phi^2}{r^2} \right] r dr dz, \\ \Pi_2 = \int_{\Gamma_0} & \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Phi r ds - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 + \frac{m^2 \Phi^2}{r^2} \right] r dr dz. \end{aligned}$$

Определение собственных частот и форм колебаний методом конечных элементов

Вариационная формулировка задачи (7) пригодна для применения метода конечных элементов, с помощью которого задача с распределенными параметрами преобразуется в задачу с конечными степенями свободы. В данной работе выбираем треугольный элемент для дискретизации области, занимаемой жидкостью, в правом сечении тороидального сосуда на рис. 1. Допустим, что на контуре свободной поверхности Γ_0 имеется p элементов линии, и i -й элемент имеет u узлов, а в плоском сечении области Ω , занятой жидкостью, получены q элементов треугольника, и i -й элемент имеет v узлов.

Функции $(\Phi)_i$ и $(\partial\Phi/\partial n)_i$ в i -м элементе на свободной поверхности Γ_0 можно представить по узловым значениям данного элемента [17–18]:

$$(\Phi)_i = \sum_{j=1}^u \Phi_{ij} M_j, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_i = \sum_{j=1}^u \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{ij} M_j,$$

где M_j – функция формы j -го узла элемента линии, Φ_{ij} и $(\partial\Phi/\partial n)_{ij}$ – j -е узловое значение функций Φ и $\partial\Phi/\partial n$ в i -м элементе линии.

Таким образом, функция $(\Phi)_i$ в i -м элементе в области жидкости Ω имеет вид:

$$(\Phi)_i = \sum_{j=1}^v \Phi_{ij} N_j,$$

где N_j – функция формы j -го узла элемента треугольника, Φ_{ij} – j -е узловое значение функции Φ в i -м элементе треугольника.

Поставив эти функции в функционал Π_2 ,

$$\begin{aligned} \Pi_2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^u \sum_{k=1}^u \Phi_{ij} \int_{\Gamma_{0i}} M_j M_k r ds \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{ik} - \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^v \sum_{k=1}^v \Phi_{ij} \int_{\Omega_i} \left[\frac{\partial N_j}{\partial r} \frac{\partial N_k}{\partial r} + \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial N_k}{\partial z} + \frac{m^2 N_j N_k}{r^2} \right] r dr dz \Phi_{ik}, \end{aligned}$$

получим функционал Π_2 в матричном виде:

$$\Pi_2 = \sum_{i=1}^p \Phi_i^T \mathbf{B}_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \Phi_i^T \mathbf{A}_i \Phi_i = \Phi_i^T \mathbf{B} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{1}{2} \Phi^T \mathbf{A} \Phi.$$

Здесь Γ_{0i} и Ω_i – i -й элемент на свободной поверхности и в области жидкости соответственно. В дальнейшем обозначим n_f – общее количество узлов на свободной поверхности, а n_l – общее количество узлов в области жидкости,

$$\begin{aligned}\Phi_v^T &= (\Phi_{i1}, \Phi_{i2}, \dots, \Phi_{iu}), \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right)_i = \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{i1}, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{i2}, \dots, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{iu} \right), \\ \Phi_i^T &= (\Phi_{i1}, \Phi_{i2}, \dots, \Phi_{iv}), \mathbf{B}_i = [\mathbf{B}_{jk}^i] \text{ и } \mathbf{B}_{jk}^i = \int_{\Gamma_{0i}} M_j M_k r ds, \\ \mathbf{A}_i &= [\mathbf{A}_{jk}^i] \text{ и } \mathbf{A}_{jk}^i = \int_{\Omega_i} \left[\frac{\partial N_j}{\partial r} \frac{\partial N_k}{\partial r} + \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial N_k}{\partial z} + \frac{m^2 N_j N_k}{r^2} \right] r dr dz, \\ \Phi_1^T &= (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n_f}), \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right)^T = \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_1, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_2, \dots, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{n_f} \right), \\ \Phi^T &= (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n_f}, \dots, \Phi_{n_l}) = (\Phi_1^T, \Phi_2^T).\end{aligned}$$

При составлении матриц элемента $\mathbf{B}_i$ и $\mathbf{A}_i$ применяется метод Гаусса, позволяющий повысить точность вычисления путем специального выбора узлов интегрирования [18]. Матрицы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$ составляются из матриц $\mathbf{B}_i$ и $\mathbf{A}_i$ соответственно, причем матрица $\mathbf{B}$ в порядке $n_f \times n_f$ и матрица $\mathbf{A}$ может быть записана в виде:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{A}_1$ в порядке $n_f \times n_f$, $\mathbf{A}_2$ в порядке $n_f \times (n_l - n_f)$, $\mathbf{A}_3$ в порядке $(n_l - n_f) \times n_f$ и $\mathbf{A}_4$ в порядке $(n_l - n_f) \times (n_l - n_f)$.

Выполнив вариацию функционала $\delta \Pi_2 = 0$

$$\delta \Pi_2 = \delta \Phi_1^T \left(\mathbf{B} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} - \mathbf{A}_1 \Phi_1 - \mathbf{A}_2 \Phi_2 \right) - \delta \Phi_2^T (\mathbf{A}_3 \Phi_1 + \mathbf{A}_4 \Phi_2) = 0,$$

получим следующую систему уравнений:

$$\mathbf{A}_1 \Phi_1 + \mathbf{A}_2 \Phi_2 = \mathbf{B} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}, \quad \mathbf{A}_3 \Phi_1 + \mathbf{A}_4 \Phi_2 = 0.$$

После решения системы уравнений представим Φ_1, Φ_2 через $\partial \Phi / \partial \mathbf{n}$:

$$\Phi_1 = \mathbf{A}_5^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}, \quad \Phi_2 = -\mathbf{A}_6 \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}},$$

где $\mathbf{A}_5 = \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3)$, $\mathbf{A}_6 = \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_5^{-1}$.

Аналогично преобразуем функционал Π_1 в матричной форме:

$$\Pi_1 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right)^T (\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_4) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} - \lambda_n (\Phi_1^T, \Phi_2^T) \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix},$$

где матрицы $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$ и $\mathbf{B}_4$ имеют порядок $n_f \times n_f$ и составлены из матриц $\mathbf{B}_{1i}, \mathbf{B}_{2i}, \mathbf{B}_{3i}$ и $\mathbf{B}_{4i}$ соответственно, δ_{jk} – символ Кронекера,

$$\mathbf{B}_{1i} = [\mathbf{B}_{jk}^{1i}] \text{ и } \mathbf{B}_{jk}^{1i} = \int_{\Gamma_{0i}} r_{0s} M_j M_k r ds,$$

$$\mathbf{B}_{2i} = [\mathbf{B}_{jk}^{2i}] \text{ и } \mathbf{B}_{jk}^{2i} = \int_{\Gamma_{0i}} (k_1^2 + k_2^2) M_j M_k r ds,$$

$$\mathbf{B}_{3i} = [\mathbf{B}_{jk}^{3i}] \text{ и } \mathbf{B}_{jk}^{3i} = \int_{\Gamma_{0i}} \left[\frac{\partial M_j}{\partial s} \frac{\partial M_k}{\partial s} + \frac{m^2 M_j M_k}{r^2} \right] r ds,$$

$$\mathbf{B}_{4i} = [\mathbf{B}_{jk}^{4i}] \text{ и } \mathbf{B}_{jk}^{4i} = (\chi r)_\gamma \delta_{jk}.$$

Исключив Φ_1, Φ_2 через $\partial\Phi/\partial\mathbf{n}$, запишем функционал Π_1 в виде:

$$\Pi_1 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} \right)^T (\mathbf{K} - \lambda_n \mathbf{M}) \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}},$$

где

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}_0 \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_4,$$

$$\mathbf{M} = (\mathbf{A}_5^{-1})^T \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_5^{-1} - (\mathbf{A}_5^{-1})^T \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_6 - \mathbf{A}_6^T \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_5^{-1} + \mathbf{A}_6^T \mathbf{A}_4 \mathbf{A}_6.$$

При составлении матрицы $\mathbf{M}$ применяется метод Guyan reduction [19] для уменьшения числа степеней свободы задачи. Данный подход позволяет получить задачу, степени свободы которой совпадают с количеством узлов на свободной поверхности.

Из вариационной формулировки задачи $\delta\Pi_1 = 0$ получим задачу на определение собственных частот и форм колебаний капиллярной жидкости:

$$(\mathbf{K} - \lambda_n \mathbf{M}) \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} = 0.$$

Из вышесказанного вытекает, что методика решения задачи о малых колебаниях капиллярной жидкости в любом осесимметричном сосуде состоит в следующем:

- 1) определение формы равновесной свободной поверхности капиллярной жидкости $z = z_0(s)$, $r = r_0(s)$ и получение функций r_{0s} , k_1 , k_2 , χ ;
- 2) создание геометрической модели области жидкости и выполнение ее дискретизации треугольными элементами в программе PARTRAN;
- 3) обработка информации о координатах узлов и элементов в программе MATLAB;
- 4) получение матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$ и $\mathbf{B}_4$ с использования численного интегрирования функции методом Гаусса;
- 5) решение задачи на определение собственных частот и форм на основе метода Guyan reduction.

Обсуждение результатов

Отметим, что в данной работе исследованы только колебания, отвечающие числу волн в окружном направлении $m = 1$. В этом случае мода колебаний жидкости антисимметрична ($\cos\theta$), и возникает переменное результирующее давление на сосуд в поперечном направлении. Так как в литературе отсутствуют данные о колебаниях жидкости в тороидальных сосудах в условиях микрогравитации, проверка достоверности и сходимости разработанного алгоритма проведена в примере сферического сосуда. При $\beta = 50\%$ и $\alpha_0 = 90^\circ$ свободная поверхность жидкости в сферическом сосуде принимает плоскую форму, и полученная частота первого тона λ_1^* хорошо совпадает с численным значением, приведенным в литературе [12]. По сравнению с численными значениями из работы [13] видно, что только при

$\beta = 78\%$ есть заметное рассогласование, а при остальных объемах заполнения сосуда жидкостью имеется хорошее совпадение (табл. 1). Можно сделать вывод, что разработанный алгоритм может быть пригоден для исследований колебаний капиллярной жидкости в топливных баках.

Таблица 1

**Проверка достоверности алгоритма в случае сферического сосуда,
 $\lambda_1^* = \lambda_1/B_0$ и β – относительный объем заполнения сосуда жидкостью**

	$B_0 = 1, \alpha_0 = 5^\circ$			$B_0 = 2, \alpha_0 = 5^\circ$			$B_0 = 1\,000, \alpha_0 = 90^\circ$
$\beta, \%$	25	50	78	25	50	78	50
λ_1^* , полученные в данной статье	1.13	1.27	1.55	1.14	1.28	1.53	1.56
λ_1^* в литературе	1.33	1.41	2.03	1.11	1.23	1.83	1.54
	[13]						[12]

Данный алгоритм на основе метода конечных элементов также сходится при увеличении степени дискретизации области жидкости; соответствующие результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2

Анализ сходимости алгоритма при увеличении степени дискретизации области жидкости

	$B_0 = 1, \alpha_0 = 5^\circ$			$B_0 = 2, \alpha_0 = 5^\circ$			$B_0 = 1\,000, \alpha_0 = 90^\circ$
$\beta, \%$	25	50	78	25	50	78	50
Шаг 1	1.148	1.304	1.811	1.165	1.320	1.784	1.561
Шаг 2	1.140	1.290	1.691	1.155	1.310	1.623	1.560
Шаг 3	1.132	1.277	1.584	1.149	1.288	1.560	1.559
Шаг 4	1.129	1.267	1.550	1.143	1.280	1.529	1.558

На рис. 2 показаны формы равновесной свободной поверхности капиллярной жидкости в зависимости от числа Бонда. Так как сосуд осесимметричный и вектор ускорения параллелен оси симметрии, равновесная свободная поверхность представляет собой осесимметричную криволинейную поверхность, и здесь показан только ее контур в правом сечении сосуда. При уменьшении числа Бонда свободная поверхность более искривлена, и ее ориентация изменяется против хода часовой стрелки в тороидальных сосудах. Возможной причиной подобного явления является то, что при уменьшении числа Бонда влияние силы поверхностного натяжения становится больше и свободная поверхность стремится принимать форму с большей кривизной. Подобное явление наблюдалось в экспериментах, проводимых в башне невесомости, при объемах заполнения сосуда жидкостью $\beta \leq 20\%$ [20]. При этом с увеличением размера сосуда появляется тенденция увеличения диапазона β , в котором свободная поверхность принимает форму, представленную на рис. 2 при $B_0 = 0$. На самом деле в башне невесомости жидкость не успевает успокоиться до нужной степени за несколько секунд, особенно при большом ее объеме. Можно предположить, что при исключении ограничения времени эксперимента в башне невесомости форма установившейся свободной поверхности будет совпадать с численными результатами.

Реальное ракетное топливо имеет угол смачивания на стенке топливных баков, близкий к нулю, и это вызывает большое искривление свободной поверхности

около линии трехфазного контакта. На рис. 3 показана схема дискретизации области жидкости, и видно, что около линии трехфазного контакта требуется большая степень дискретизации для точного моделирования поведения жидкости в условиях микрогравитации.

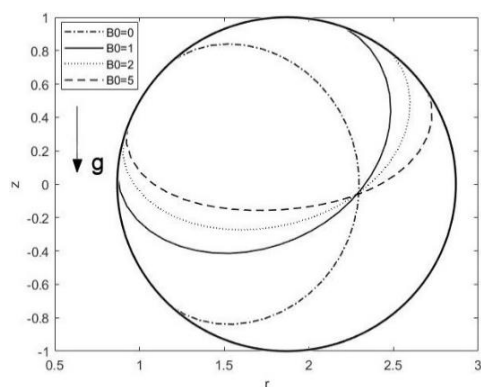


Рис. 2. Формы равновесия свободной поверхности в разных числах Бонда B_0 при $r_1 = 1.87$, $\alpha_0 = 5^\circ$, $\beta = 50\%$

Fig. 2. Free surface equilibrium shapes at various Bond numbers B_0 and $r_1 = 1.87$, $\alpha_0 = 5^\circ$, $\beta = 50\%$

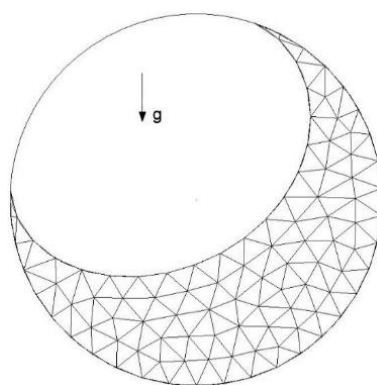


Рис. 3. Схема дискретизации области правого сечения жидкости в тороидальном сосуде

Fig. 3. Discretization scheme for a right cross-section of the liquid in a toroidal vessel

В табл. 3 приведены собственные частоты колебаний жидкости в условиях микрогравитации, и с повышением числа Бонда B_0 значения частот увеличиваются. Для каждого объема заполнения β существуют свои характерные числа Бонда, при превышении которых собственные частоты приближаются к экспериментальным значениям, полученным в наземных условиях [21].

Таблица 3

Собственная частота первого тона λ_1^* колебаний жидкости при $r_1 = 1.87$, $\alpha_0 = 5^\circ$

$\beta \backslash B_0$	1	2	3	4	5	6	8	10	1000	[21]
20%	0.051	0.074	0.085	0.089	—	—	—	—	0.103	0.084
50%	0.010	0.092	0.134	0.153	0.167	0.176	—	—	0.220	0.226
80%	—	—	—	0.046	0.085	0.127	0.191	0.217	0.384	0.406

Собственные формы колебаний жидкости относительно равновесной свободной поверхности в условиях микрогравитации показаны на рис. 4 для правого сечения тороидального сосуда. Отметим, что здесь исследованы только первые четыре тона ($n = 1, 2, 3, 4$) колебаний капиллярной жидкости при антисимметричной моде $m = 1$, т.е. $\cos\theta$. Сплошная линия показывает равновесное положение свободной поверхности, а пунктир — собственную форму.

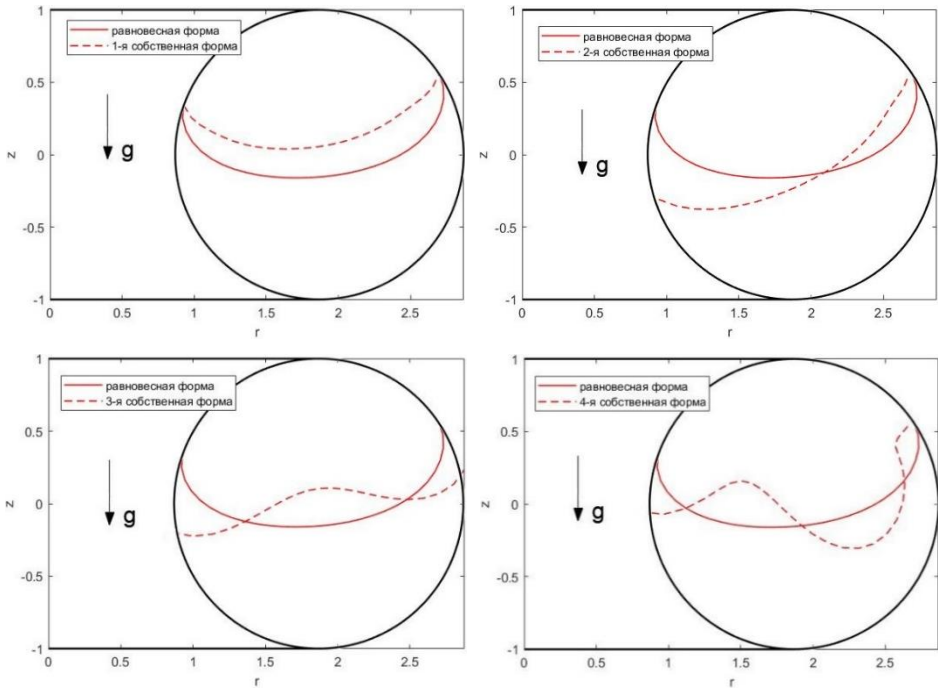


Рис. 4. Собственные формы первых четырех тонов колебаний жидкости
при $r_1 = 1.87$, $B_0 = 5$, $\alpha_0 = 5^\circ$, $\beta = 50\%$

Fig. 4. Natural modes of the first four liquid vibration modes
at $r_1 = 1.87$, $B_0 = 5$, $\alpha_0 = 5^\circ$, $\beta = 50\%$

С точки зрения количества узлов пересечения равновесной поверхности и собственной формы каждого тона колебаний жидкости полученные результаты похожи на экспериментальные результаты для тяжелой жидкости [21].

Заключение

В настоящей работе численно определены собственные частоты и формы колебаний капиллярной жидкости в тороидальных сосудах. Чтобы учитывать силу поверхностного натяжения и граничное условие жидкости на линии трехфазного контакта, введена вариационная формулировка задачи и для ее решения разработан численный алгоритм на основе метода конечных элементов. Из результатов исследований следует, что в условиях микрогравитации сила поверхностного натяжения вызывает сильное искривление свободной поверхности и скачок давления на ней. Искривление равновесной свободной поверхности и поведение жидкости около линии трехфазного контакта имеют большое влияние на собственные частоты и формы колебаний капиллярной жидкости, особенно в тороидальных сосудах. При увеличении числа Бонда свободная поверхность становится перпендикулярной к вектору ускорения и приближается к плоской, в этих условиях можно пренебречь влиянием капиллярного эффекта, и полученные результаты сходятся с экспериментальными значениями для тяжелой жидкости.

Список источников

1. Abramson H.N. The Dynamic Behavior of liquids in Moving Containers. NASA SP-106. 1966. 467 p.
2. Моисеев Н.Н., Петров А.А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объёма жидкости. М. : Вычислит. центр АН СССР, 1966. 272 с.
3. Микишев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. М. : Машиностроение, 1978. 247 с.
4. Мышкис А.Д., Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Копачевский Н.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Методы решения задачи гидромеханики для условий невесомости. Киев : Наукова думка, 1992. 592 с.
5. Dodge F.T. The new “Dynamic behavior of liquids in moving containers”. Southwest Research Inst., 2000. 195 p.
6. Полевиков В.К. О методах численного моделирования равновесных капиллярных поверхностей // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, № 7. С. 975–981.
7. Yang D., Yue B., Zhu L., Song X. Solving shapes of hydrostatic surface in rectangular and revolving symmetrical tanks under microgravity using shooting method // Chinese Journal of Space Science. 2012. V. 32, No. 1. P. 85–91. doi: 10.11728/cjss2012.01.085
8. Dodge F.T., Garza L.R. Experimental and Theoretical Studies of Liquid Sloshing at Simulated Low Gravity // ASME. J. Appl. Mech. 1967. V. 34, No. 3. P. 555–562. doi: 10.1115/1.3607743
9. Wang Z., Deng Z. Sloshing of Liquid in Spherical Tank at Low-gravity Environments // Chinese Journal of Space Science. 1985. V. 5, No. 4. P. 294–302.
10. Wang Z., Deng Z. On the Sloshing of Liquid in a Partially Filled Rectangular Tank under Low-gravity Condition // Journal of Tsinghua University. 1986. V. 26, No. 3. P. 1–9.
11. Utsumi M. Low-gravity propellant slosh analysis using spherical coordinates // Journal of Fluids and Structures. 1998. V. 12, No. 1. P. 57–83. doi: 10.1006/jfls.1997.0125
12. Chu W. Low-Gravity Fuel Sloshing in an Arbitrary Axisymmetric Rigid Tank // ASME. J. Appl. Mech. 1970. V. 37, No. 3. P. 828–837. doi: 10.1115/1.3408616
13. Dodge F.T., Green S.T., Kana D.D. Fluid management technology: liquid slosh dynamics and control. NASA CR-189107. 1991. 198 p.
14. Wang W., Li J., Wang T. Modal analysis of liquid sloshing with different contact line boundary conditions using FEM // Journal of Sound and Vibration. 2008. V. 317, is. 3–5. P. 739–759. doi: 10.1016/j.jsv.2008.03.070
15. Юй Чжаокай, Темнов А.Н. Исследование равновесной свободной поверхности капиллярной жидкости в тороидальном сосуде // Инженерный журнал: наука и инновации. 2021. Вып. 3. С. 1–11. doi: 10.18698/2308-6033-2021-3-2060
16. Юй Чжаокай, Темнов А.Н. Равновесие и колебания свободной поверхности жидкого топлива в коаксиально-цилиндрических сосудах в условиях микрогравитации // Инженерный журнал: наука и инновации. 2021. Вып. 8. С. 1–15. doi: 10.18698/2308-6033-2021-8-2099
17. Киричевский Р.В., Скринникова А.В. Влияние аппроксимирующих функций при построении матрицы жёсткости конечного элемента на скорость сходимости метода конечных элементов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 57. С. 26–38. doi: 10.17223/19988621/57/2
18. Bathe K.J. Finite element procedures. 2nd ed. Waterton, 2014. 1065 p.
19. Guyan R.J. Reduction of stiffness and mass matrices // AIAA Journal. 1965. V. 3, No. 2. P. 380–380. doi: 10.2514/3.2874
20. Symons E.P. Zero-gravity equilibrium configuration of liquid-vapor interface in toroidal tanks. NASA TN D-6076. 1970. 24 p.
21. Meserole J.S., Fortini A. Slosh dynamics in a toroidal tank // Journal of Spacecraft and Rockets. 1987. V. 24, No. 6. P. 523–531. doi: 10.2514/3.25948

References

1. Abramson H.N. (1966) *The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers*. NASA SP-106.
2. Moiseev N.N., Petrov A.A. (1966) *Chislennyye metody rascheta sobstvennykh chastot kolebaniy ogranichennogo ob"ema zhidkosti* [Numerical methods for calculating natural frequencies of vibrations of a limited liquid volume]. Moscow: Vychislitel'nyy tsentr AN SSSR.
3. Mikishev G.N. (1978) *Eksperimental'nye metody v dinamike kosmicheskikh apparatov* [Experimental methods in spacecraft dynamics]. Moscow: Mashinostroyeniye.
4. Myshkis A.D., Babitskiy V.G., Zhukov M.Yu., Kopachevskiy N.D., Slobozhanin L.A., Tyuptsov A.D. (1992) *Metody resheniya zadachi gidromekhaniki dlya usloviy nevesomosti* [Problem-solving procedures in hydromechanics for weightlessness conditions]. Kyiv: Naukova Dumka.
5. Dodge F.T. (2000) *The New "Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers"*. NASA SP-106.
6. Polevikov V.K. (1999) O metodakh chislennogo modelirovaniya ravnovesnykh kapillyarnykh poverkhnostey [On methods of numerical modeling of equilibrium capillary surfaces]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*. 35(7). pp. 975–981.
7. Yang D., Yue B., Zhu L., Song X. (2012) Solving shapes of hydrostatic surface in rectangular and revolving symmetrical tanks under microgravity using shooting method. *Chinese Journal of Space Science*. 32(1). pp. 85–91. doi: 10.11728/cjss2012.01.085.
8. Dodge F.T., Garza L.R. (1967) Experimental and theoretical studies of liquid sloshing at simulated low gravity. *Journal of Applied Mechanics*. 34(3). pp. 555–562. doi: 10.1115/1.3607743.
9. Wang Z., Deng Z. (1985) Sloshing of liquid in spherical tank at low-gravity environments. *Chinese Journal of Space Science*. 5(4). pp. 294–302.
10. Wang Z., Deng Z. (1986) On the sloshing of liquid in a partially filled rectangular tank under low-gravity condition. *Journal of Tsinghua University*. 26(3). pp. 1–9.
11. Utsumi M. (1998) Low-gravity propellant slosh analysis using spherical coordinates. *Journal of Fluids and Structures*. 12(1). pp. 57–83. doi: 10.1006/jfls.1997.0125.
12. Chu W. (1970) Low-gravity fuel sloshing in an arbitrary axisymmetric rigid Tank. *Journal of Applied Mechanics*. 37(3). pp. 828–837. doi: 10.1115/1.3408616.
13. Dodge F.T., Green S.T., Kana D.D. (1991) *Fluid Management Technology: Liquid Slosh Dynamics and Control*. NASA CR-189107.
14. Wang W., Li J., Wang T. (2008) Modal analysis of liquid sloshing with different contact line boundary conditions using FEM. *Journal of Sound and Vibration*. 317(3–5). pp. 739–759. doi: 10.1016/j.jsv.2008.03.070.
15. Yu Z., Temnov A.N. (2021) Issledovanie ravnovesnoy svobodnoy poverkhnosti kapillyarnoy zhidkosti v toroidal'nom sosude [Study of the equilibrium free surface of a capillary liquid in a toroidal vessel]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsiya – Engineering Journal: Science and Innovation*. 3. pp. 1–11. doi: 10.18698/2308-6033-2021-3-2060.
16. Yu Z., Temnov A.N. (2021) Ravnovesie i kolebaniya svobodnoy poverkhnosti zhidkogo topliva v koaksial'no-tsilindricheskikh sosudakh v usloviyakh mikrogravitatsiy [Equilibrium and oscillations of liquid fuel free surface in coaxial-cylindrical vessels under microgravity conditions]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsiya – Engineering Journal: Science and Innovation*. 8. pp. 1–15. doi: 10.18698/2308-6033-2021-8-2099.
17. Kirichevskiy R.V., Skrinnikova A.V. (2019) Vliyanie approksimiruyushchikh funktsiy pri postroyenii matritsy zhostkosti konechnogo elementa na skorost' skhodimosti metoda konechnykh elementov [The effect of approximating functions in the construction of the stiffness matrix of the finite element on the convergence rate of the finite element method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 57. pp. 26–38. doi: 10.17223/19988621/57/2.
18. Bathe K.J. (2014) *Finite Element Procedures*. 2nd edition. Los Angeles: Waterton.

19. Guyan R.J. (1965) Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA Journal*. 3(2). pp. 380–380. doi: 10.2514/3.2874.
20. Symons E.P. (1970) *Zero-gravity Equilibrium Configuration of Liquid-Vapor Interface in Toroidal Tanks*. NASA TN D-6076.
21. Meserole J.S., Fortini A. (1987) SLOSH dynamics in a toroidal tank. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 24(6). pp. 523–531. doi: 10.2514/3.25948.

Сведения об авторе:

Юй Чжаокай – аспирант кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия. E-mail: yuzhaokai933@mail.ru

Information about the author:

Yu Zhao Kai (Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation). E-mail: yuzhaokai933@mail.ru

Статья поступила в редакцию 10.11.2021; принята к публикации 12.07.2022

The article was submitted 10.11.2021; accepted for publication 12.07.2022

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

2022. № 78

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано в печать 15.08.2022 г. Формат 70×100¹/₁₆.
Печ. л. 10,4; усл. печ. л. 13,5. Цена свободная.
Тираж 250 экз. Заказ № 5119.

Дата выхода в свет 26.08.2022 г.

Адрес издателя и редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Томский государственный университет

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru