

Научная статья

УДК 517.934

doi: 10.17223/19988605/59/2

О необходимых условиях существования седловой точки в задаче оптимального управления для систем разностных уравнений типа Вольтерра

Камиль Байрамали оглы Мансимов¹, Махнура Узеир кызы Чырахова²

¹ Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан

^{1, 2} Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан

¹ kamilbmansimov@gmail.com

² kmansimov@mail.ru

Аннотация. Изучается задача оптимального управления для объектов, описываемых системой разностных уравнений типа Вольтерра. Доказаны необходимые условия существования седловой точки.

Ключевые слова: разностное уравнение Вольтерра; седловая точка; терминальный функционал; аналог дискретного принципа максимума

Для цитирования: Мансимов К.Б., Чырахова М.У. О необходимых условиях существования седловой точки в задаче оптимального управления для систем разностных уравнений типа Вольтерра // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 59. С. 13–22. doi: 10.17223/19988605/59/2

Original article

doi: 10.17223/19988605/59/2

On necessary conditions for the existence of a saddle point in the problem of optimal control for systems of difference equations of Volterra type

Kamil B. Mansimov¹, Mahnura U. Chiragova²

¹ Baku State University, Baku, Azerbaijan

^{1, 2} Institute of Control problems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan

¹ kamilbmansimov@gmail.com

² kmansimov@mail.ru

Abstract. On solutions of a system of nonlinear difference equations of Volterra type

$$x(t) = \sum_{\tau=t_0}^t f(t, \tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)), \quad t \in T,$$

define the terminal functional

$$J(u, v) = \varphi(x(t_1)).$$

Here $f(t, \tau, x, u, v)$ is a given n -dimensional vector function continuous in (x, u, v) for all (t, τ) together with partial derivatives in x , $\varphi(x)$ is a given twice continuously differentiable scalar function.

Consider a game problem. Suppose that control $u(t)$ is controlled by player A, striving to minimize functional, and control $v(t)$ is controlled by player B, striving to maximize functional.

Consider the following game problem: among all admissible pairs $(u(t), v(t))$, on which functional is defined, find an admissible pair $(u^0(t), v^0(t))$ such that for any $(u(t), v(t))$

$$J(u^0, v) \leq J(u^0, v^0) \leq J(u, v^0).$$

A pair $(u^0(t), v^0(t))$, satisfying condition, following the accepted terminology, is called a saddle point of functional. A necessary condition for optimality controls is established.

Keywords: Volterra difference equation; saddle point; terminal functional; analogue of the discrete maximum principle

For citation: Mansimov, K.B., Chiragova, M.U. (2022) On necessary conditions for the existence of a saddle point in the problem of optimal control for systems of difference equations of Volterra type. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 59. pp. 13–22. doi: 10.17223/19988605/59/2

В работах [1–2] и других найдены условия существования седловой точки в процессах, описываемых системами интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.

В предлагаемой работе, применяя модификацию методов, предложенных в работах [3–6], найдены различные необходимые условия существования седловой точки в задаче оптимального управления для систем, модели которых описываются системами нелинейных разностных уравнений.

1. Постановка задачи

Пусть R^r , R^q , R^n – линейные пространства r -, q - и n -мерных векторов соответственно, $(u(t), v(t))$ – $r(q)$ -мерный дискретный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $U(V)$, т.е.,

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1\}, \quad (1)$$

$$v(t) \in V \subset R^q, \quad t \in T, \quad (2)$$

где t_0, t_1 – заданные числа, причем разность $t_1 - t_0$ есть натуральное число.

Пару $(u^0(t), v^0(t))$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимой парой. На решениях системы нелинейных разностных уравнений типа Вольтерра

$$x(t) = \sum_{\tau=t_0}^t f(t, \tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)), \quad t \in T, \quad (3)$$

определим терминальный функционал

$$J(u, v) = \varphi(x(t_1)). \quad (4)$$

Здесь $f(t, \tau, x, u, v)$ – заданная n -мерная вектор-функция, непрерывная по (x, u, v) при всех (t, τ) вместе с частными производными по x , $\varphi(x)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция.

Ясно, то функционал (4) определен для всех совокупностей (пар) $(u(t), v(t))$, для которых соответствующее решение $x(t)$ уравнения (3) определено на T .

Перейдем к постановке следующей игровой задачи. Предположим, что управлением $u(t)$ распоряжается игрок A , стремящийся минимизировать функционал (4), а управлением $v(t)$ распоряжается игрок B , стремящийся максимизировать функционал (4).

Рассмотрим следующую игровую задачу: среди всех допустимых пар $(u(t), v(t))$, на которых определен функционал (4), найти такую допустимую пару $(u^0(t), v^0(t))$ чтобы при любых $(u(t), v(t))$

$$J(u^0, v) \leq J(u^0, v^0) \leq J(u, v^0). \quad (5)$$

Пару $(u^0(t), v^0(t))$, удовлетворяющую условию (5), следуя принятой терминологии, назовем седловой точкой функционала (4).

2. Аналог принципа максимума Понтрягина для существования седловой точки

Пусть $(u^0(t), v^0(t))$ – седловая точка функционала (4). Это означает, что для любых $(u(t), v(t))$

$$J(u, v^0) \geq J(u^0, v^0), \quad J(u^0, v) \leq J(u^0, v^0). \quad (6)$$

Предположим, что $x^0(t)$ – решение уравнения

$$x^0(t) = \sum_{\tau=t_0}^t f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)), \quad (7)$$

а множества

$$f(t, \tau, x^0(\tau), U) = \{\alpha : \alpha = f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)), u(\tau) \in U\}, \quad (8)$$

$$f(t, \tau, x^0(\tau), V) = \{\alpha : \alpha = f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)), v(\tau) \in V\} \quad (9)$$

выпуклы при всех (t, τ) .

Пусть $\varepsilon \in [0, 1]$, $\mu \in [0, 1]$, $u(t) \in U$, $t \in T$, $v(t) \in V$, $t \in T$, – произвольные числа и произвольные допустимые управляющие функции соответственно.

В силу выпуклости множеств (8), (9) следует, что существуют допустимые процессы $(u(t; \varepsilon), v^0(t), x(t; \varepsilon))$, $(u^0(t), v^0(t; \mu), x(t; \mu))$, такие что

$$\begin{aligned} x(t; \varepsilon) &= \sum_{\tau=t_0}^t f(t, \tau, x(t; \varepsilon), u(\tau; \varepsilon), v^0(\tau)) \equiv \\ &\equiv \sum_{\tau=t_0}^t \left[\varepsilon f(t, \tau, x(t; \varepsilon), u(\tau), v^0(\tau)) + (1 - \varepsilon) f(t, \tau, x(t; \varepsilon), u^0(\tau), v^0(\tau)) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} x(t; \mu) &= \sum_{\tau=t_0}^t f(t, \tau, x(t; \mu), u^0(\tau), v(\tau; \mu)) \equiv \\ &\equiv \sum_{\tau=t_0}^t \left[\mu f(t, \tau, x(t; \mu), u^0(\tau), v(\tau)) + (1 - \mu) f(t, \tau, x(t; \mu), u^0(\tau), v^0(\tau)) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Введем обозначения

$$a(t) = \left. \frac{\partial x(t; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \quad b(t) = \left. \frac{\partial^2 x(t; \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0}, \quad (12)$$

$$z(t) = \left. \frac{\partial x(t; \mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}, \quad y(t) = \left. \frac{\partial^2 x(t; \mu)}{\partial \mu^2} \right|_{\mu=0}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{u(\tau)} f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) &\equiv \\ &\equiv f(t, \tau, x^0(\tau), u(\tau), v^0(\tau)) - f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{v(\tau)} f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) &\equiv \\ &\equiv f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v(\tau)) - f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)). \end{aligned} \quad (15)$$

Используя (12), (13) и учитывая условия гладкости, наложенные на правую часть уравнений (10), (11), доказывается, что

$$a(t) = \sum_{\tau=t_0}^t \left[f_x(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) a(\tau) + \Delta_{u(\tau)} f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) \right], \quad (16)$$

$$b(t) = \sum_{\tau=t_0}^t \left[f_x(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) a(\tau) + 2\Delta_{u(\tau)} f_x(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) + \right. \\ \left. + a'(\tau) f_{xx}(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) a(\tau) \right], \quad (17)$$

$$z(t) = \sum_{\tau=t_0}^t \left[f_x(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) z(\tau) + \Delta_{u(\tau)} f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) \right], \quad (18)$$

$$y(t) = \sum_{\tau=t_0}^t \left[f_x(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) y(\tau) + 2\Delta_{u(\tau)} f_x(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) z(\tau) + \right. \\ \left. + z'(\tau) f_{xx}(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) z(\tau) \right]. \quad (19)$$

Используя (12), (13), вычислим специальные приращения

$$J(u(t; \varepsilon), v^0(t)) - J(u^0(t), v^0(t)), \quad (20)$$

$$J(u^0(t), v(t; \mu)) - J(u^0(t), v^0(t)) \quad (21)$$

функционала (4), соответствующие допустимым управлениям $(u^0(t), u(t; \varepsilon))$, $(u^0(t), v(t; \mu))$ соответственно.

Применяя формулу Тейлора, эти специальные приращения (20), (21) записываются в виде:

$$\Delta_u J_\varepsilon(u^0(t), v^0(t)) = J(u(t; \varepsilon), v^0(t)) - J(u^0(t), v^0(t)) = \varphi(x(t_1; \varepsilon)) - \varphi(x^0(t_1)) = \\ = \frac{d}{d\varepsilon} \varphi(x(t_1; \varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \varphi(x(t_1; \varepsilon)) \Big|_{\varepsilon=0} + o(\varepsilon^2) = \varepsilon \frac{\partial \varphi(x^0(t_1))}{\partial x} a_1(t_1) + \\ + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x^0(t_1))}{\partial x^2} b(t_1) + \frac{\varepsilon^2}{2} a'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi(x^0(t_1))}{\partial x^2} a(t_1) + o(\varepsilon^2), \quad (22)$$

$$\Delta_v J_\mu(u^0(t), v^0(t)) = J(u^0(t), v(t; \mu)) - J(u^0(t), v^0(t)) = \\ = \frac{d}{d\mu} \varphi(x(t_1; \mu)) \Big|_{\mu=0} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\mu^2} \varphi(x(t_1; \mu)) \Big|_{\mu=0} + o(\mu^2) = \mu \frac{\partial \varphi(x^0(t_1))}{\partial x} z(t_1) + \\ + \frac{\mu^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x^0(t_1))}{\partial x^2} y(t_1) + \frac{\mu^2}{2} z'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi(x^0(t_1))}{\partial x^2} z(t_1) + o(\mu^2). \quad (23)$$

Введем аналог функции Гамильтона–Понтрягина:

$$H(t, x(t), u(t), v(t), \psi^0(t)) = \sum_{\tau=t_0}^t \psi^{0'}(\tau) f(\tau, \tau, x^0(\tau), u(\tau), v(\tau)) - \varphi'_x(x^0(t_1)) f(t_1, t, x^0(t), u(t), v(t)),$$

где $\psi(t)$ – n -мерная вектор-функция, являющаяся решением линейного разностного уравнения типа Вольтерра

$$\psi(t) = H_x(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)). \quad (24)$$

Из тождеств (16)–(19) получаем, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} \psi^{0'}(t) a(t) = \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t \psi^{0'}(\tau) f_x(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau), \psi^0(t)) a(\tau) + \right.$$

$$+ \sum_{\tau=t_0}^{t_1} \psi^{0'}(t) \Delta_{u(\tau)} f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) \Big], \quad (25)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} \psi^{0'}(t) b(t) = \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t \psi^{0'}(t) f_x(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) b(\tau) + \right. \\ \left. + \sum_{\tau=t_0}^{t_1} \psi^{0'}(t) \Delta_{u(\tau)} f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) a(\tau) + \psi^0(\tau) z'(\tau) f_{xx}(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) z(\tau) \right], \quad (26)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} \psi^{0'}(t) z(t) = \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t (\psi^{0'}(t) f_x(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) z(\tau) + \right. \\ \left. + \psi^{0'}(t) \Delta_{u(\tau)} f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau))) \right], \quad (27)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} \psi^{0'}(t) y(t) = \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t (\psi^{0'}(t) f_x(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) y(\tau) + \right. \\ \left. + 2\psi^{0'}(t) \Delta_{u(\tau)} f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) z(\tau) + z'(\tau) \psi^0(\tau) f_{xx}(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) z(\tau) \right]. \quad (28)$$

Используя дискретный аналог формулы Фубини (см., напр.: [7, 8]), доказывается справедливость тождеств

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t \psi^{0'}(t) f_x(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) a(\tau) = \right. \\ \left. = \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t \psi^{0'}(\tau) f_x(\tau, t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) a(t), \right. \right. \quad (29)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t \psi^{0'}(t) \Delta_{u(\tau)} f_x(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) = \right. \\ \left. = \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t \psi^{0'}(\tau) \Delta_{u(t)} f(\tau, t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)), \right. \right. \quad (30)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t (\psi^{0'}(t) f_x(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) a(\tau) + \right. \\ \left. + 2\psi^{0'}(t) \Delta_{u(\tau)} f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) + a'(\tau) \psi^0(\tau) f_{xx}(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) a(\tau) \right] = \\ = \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t}^t (\psi^{0'}(\tau) f_x(\tau, t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) a(t) + \right. \\ \left. + 2\psi^{0'}(t) \Delta_{u(\tau)} f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) + a'(t) \psi^0(t) f_{xx}(t, \tau, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) a(t) \right]. \quad (31)$$

Далее из соотношений (16), (19) следует, что

$$a(t_1) = \sum_{t=t_0}^t \left[f_x(t_1, t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) a(t) + \Delta_{u(t)} f(t_1, t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) \right], \quad (32)$$

$$b(t_1) = \sum_{t=t_0}^t \left[f_x(t_1, t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) b(t) + \right. \\ \left. + 2 \Delta_{u(t)} f_x(t_1, t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) a(t) + a'(t) f_{xx}(t_1, t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) z(t) \right], \quad (33)$$

$$z(t_1) = \sum_{t=t_0}^t \left[f_x(t_1, t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) z(t) + \right. \\ \left. + \Delta_{v(t)} f(t_1, t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) \right], \quad (34)$$

$$y(t_1) = \sum_{t=t_0}^t \left[f_x(t_1, t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) y(t) + \right. \\ \left. + 2\Delta_{v(t)} f_x(t_1, t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) z(t) \right]. \quad (35)$$

Учитывая выражение аналога функции Гамильтона–Понтрягина, сопряженную систему (24) и тождества (25)–(35), после некоторых преобразований специальные приращения (22), (23) функционала (4) по управляющим функциям $(u^0(t), u(t; \varepsilon))$ и $(v^0(t), v(t; \mu))$ соответственно представляются в виде

$$\Delta_u J_\varepsilon(u^0(t), v^0(t)) = J(u(t; \varepsilon), v^0(t)) - J(u^0(t), v^0(t)) = \\ = -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{u(t)} H(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[a'(t_1) \phi_{xx}(x^0(t)) a(t_1) - \right. \\ \left. - \sum_{t=t_0}^{t_1} a'(t) H_{xx}(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) a(t_1) - \right. \\ \left. - 2 \sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{u(t)} H'_x(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) a(t) \right] + o(\varepsilon^2), \quad (36)$$

$$\Delta_v J_\mu(u^0(t), v^0(t)) = J(u^0(t), v(t; \mu)) - J(u^0(t), v^0(t)) = \\ = -\mu \sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) + \frac{\mu^2}{2} \left[z(t_1) \phi_{xx}(x^0(t)) z(t_1) - \right. \\ \left. - \sum_{t=t_0}^{t_1} z'(t) H_{xx}(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) z(t) - \right. \\ \left. - 2 \sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H'_x(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) z(t) \right] + o(\mu^2). \quad (37)$$

Полученные разложения (36), (37) позволяют сформулировать необходимые условия оптимальности типа принципа максимума Понтрягина, а также исследовать случай их вырождения.

3. Необходимые условия оптимальности для существования седловой точки

По предположению $(u^0(t), v^0(t))$ является седловой точкой в рассматриваемой задаче. Поэтому из разложений (36), (37) следует, что

$$-\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{u(t)} H(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) + o(\varepsilon) \geq 0, \quad (38)$$

$$-\mu \sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) + o(\mu) \leq 0. \quad (39)$$

Из неравенств (38), (39) в силу произвольности ε и μ получаем справедливость утверждения.

Теорема 1. В случае выпуклости множеств (8), (9) для существования седловой точки $(u^0(t), v^0(t))$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы неравенства

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{u(t)} H(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) \leq 0, \quad (40)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) \geq 0 \quad (41)$$

выполнялись для всех $u(t) \in U$, $t \in T$, $v(t) \in V$, $t \in T$ соответственно.

Неравенства (40), (41) представляют собой необходимые условия оптимальности первого порядка, причем первое из них – типа принципа максимума Понтрягина, а второе – типа принципа минимума Понтрягина.

Известно (см., напр.: [3, 6]), что часто различные необходимые условия оптимальности первого порядка вырождаются. Подобные случаи называются особыми, а соответствующие управления – особыми управлениями. В этом случае для исследования рассматриваемой задачи надо иметь новые содержательные условия оптимальности.

Изучим случай вырождения необходимых условий оптимальности (40), (41).

Определение. Допустимое управление $(u^0(t), v^0(t))$ назовем особым первого порядка управлением, если для всех $u(t) \in U$, $t \in T$ и $v(t) \in V$, $t \in T$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{u(t)} H(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) = 0, \quad (42)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) = 0 \quad (43)$$

соответственно.

Из введенного определения ясно, что для особого управления необходимые условия оптимальности теряют свое содержательное значение.

Из разложений (36), (37) сразу следует

Теорема 2. Пусть множества (8), (9) выпуклы. Тогда для того, чтобы особое допустимое управление $(u^0(t), v^0(t))$ было седловой точкой, необходимо, чтобы неравенства

$$\begin{aligned} & a'(t_1) \Phi_{xx}(x^0(t)) a(t_1) - \sum_{t=t_0}^{t_1} a'(t) H_{xx}(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) a(t) - \\ & - 2 \sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{u(t)} H'_{xx}(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) a(t) \geq 0, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & z(t_1) \Phi_{xx}(x^0(t)) z(t_1) - \sum_{t=t_0}^{t_1} z'(t) H_{xx}(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) z(t) - \\ & - 2 \sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H'_{xx}(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) z(t) \leq 0 \end{aligned} \quad (45)$$

выполнялись для всех $u(t) \in U$, $t \in T$, $v(t) \in V$, $t \in T$ соответственно.

Неравенства (44), (45) являются довольно общими, но вместе с тем неявными необходимыми условиями оптимальности для особых седловых точек $(u^0(t), v^0(t))$.

Однако с их помощью при некоторых предположениях можно получить необходимые условия оптимальности, явно выраженные через параметры рассматриваемой задачи.

Пусть $R(\tau, t) - (n \times n)$ – матричная функция, являющаяся решением разностного матричного уравнения типа Вольтерра

$$R(\tau, t) = \sum_{s=t}^{\tau} R(\tau, s) \left(f_x(s, t, x^0(t), u(t), v(t)) - f_x(s, t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) \right), t_0 \leq t \leq \tau. \quad (46)$$

Матричная функция $R(\tau, t)$ называется резольвентой уравнения (18) (см., напр.: [7, 8]).

Следуя [7, 8], можно показать, что резольвента $R(\tau, t)$ является также решением уравнения

$$R(\tau, t) = \sum_{s=t}^{\tau} R(\tau, s) \left(f_x(\tau, s, x^0(s), u^0(s), v^0(s)) - f_x(\tau, t, x^0(t), u^0(t), v^0(t)) \right). \quad (47)$$

Уравнения (46), (47) называются уравнениями резольвенты.

Решения $a(t)$ и $z(t)$ уравнений (16), (18) допускают соответственно представления

$$a(t) = \sum_{\tau=t_0}^t \Delta_{u(\tau)} f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) - \sum_{\tau=t_0}^t \left[\sum_{s=t_0}^{\tau} R(t, \tau) \Delta_{u(s)} f(\tau, s, x^0(s), u^0(s), v^0(s)) \right], \quad (48)$$

$$z(t) = \sum_{\tau=t_0}^t \Delta_{v(\tau)} f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) - \sum_{\tau=t_0}^t \left[\sum_{s=t_0}^{\tau} R(t, \tau) \Delta_{v(s)} f(\tau, s, x^0(s), u^0(s), v^0(s)) \right]. \quad (49)$$

Далее, принимая во внимание тождество 2 из [5. С. 45], представления (48), (49) записываются в следующей форме:

$$a(t) = \sum_{\tau=t_0}^t \Delta_{u(\tau)} f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) - \sum_{\tau=t_0}^t \left[\sum_{s=\tau}^t R(t, s) \Delta_{u(\tau)} f(s, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) \right], \quad (50)$$

$$z(t) = \sum_{\tau=t_0}^t \Delta_{v(\tau)} f(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) - \sum_{\tau=t_0}^t \left[\sum_{s=\tau}^t R(t, s) \Delta_{v(\tau)} f(s, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) \right]. \quad (51)$$

Предположим, что

$$f(t, \tau, x, u, v) = A(t, \tau) g(\tau, x, u, v), \quad (52)$$

где $A(t, \tau)$ – заданная $(n \times n)$ дискретная матричная функция, а $g(\tau, x, u, v)$ – заданная n -мерная вектор-функция, непрерывная по (x, u, v) при всех τ .

Пусть по определению

$$Q(t, \tau) = A(t, \tau) - \sum_{s=\tau}^t R(t, s) A(s, \tau).$$

Тогда представления (50), (51) примут вид:

$$a(t) = \sum_{\tau=t_0}^t Q(t, \tau) \Delta_{u(\tau)} g(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)), \quad (53)$$

$$z(t) = \sum_{\tau=t_0}^t Q(t, \tau) \Delta_{v(\tau)} g(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)), \quad (54)$$

С помощью представлений (53), (46)–(54) убеждаемся в справедливости тождеств

$$\begin{aligned} a'(t_1) \Phi_{xx}(x^0(t)) a(t_1) &= \sum_{\alpha=t_0}^{t_1} \sum_{\beta=t_0}^{\alpha} \Delta_{u(\alpha)} g'(\alpha, x^0(\alpha), u^0(\alpha), v^0(\alpha)) Q(t_1, \alpha) \Phi_{xx}(x^0(t_1)) \times \\ &\quad \times Q(t_1, \beta) \Delta_{u(\beta)} g(\beta, x^0(\beta), u^0(\beta), v^0(\beta)), \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{u(t)} H'_x(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) a(t) = \\ &= \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t \Delta_{u(t)} H'_x(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) Q(t, \tau) \Delta_{u(\tau)} g(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) \right], \end{aligned} \quad (56)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} a'(t) H_{xx}(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) a(t) = \sum_{\alpha=t_0}^{t_1} \sum_{\beta=t_0}^{t_1} \Delta_{u(\alpha)} g'(\alpha, x^0(\alpha), u^0(\alpha), v^0(\alpha)) \times \\ \times \left[\sum_{\max(\alpha, \beta)}^{t_1} Q'(t, \alpha) H_{xx}(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) Q(t, \beta) \right] \Delta_{u(\beta)} g(\beta, x^0(\beta), u^0(\beta), v^0(\beta)), \quad (57)$$

$$z'(t_1) \phi_{xx}(x^0(t_1)) z(t_1) = \sum_{\alpha=t_0}^{t_1} \sum_{\beta=t_0}^{t_1} \Delta_{v(\alpha)} g'(\alpha, x^0(\alpha), u^0(\alpha), v^0(\alpha)) Q(t_1, \alpha) \phi_{xx}(x^0(t)) \times \\ \times Q(t_1, \beta) \Delta_{v(\beta)} g(\beta, x^0(\beta), u^0(\beta), v^0(\beta)), \quad (58)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H'_x(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi_0(t)) z(t) = \\ = \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^{t_1} \Delta_{v(\tau)} H'_x(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) Q(t, \tau) \Delta_{v(\tau)} g(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) \right], \quad (59)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} z'(t) H_{xx}(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi_0(t)) z(t) = \sum_{\alpha=t_0}^{t_1} \sum_{\beta=t_0}^{t_1} \Delta_{v(\alpha)} g'(\alpha, x^0(\alpha), u^0(\alpha), v^0(\alpha)) \times \\ \times \left[\sum_{\max(\alpha, \beta)}^{t_1} Q'(t, \alpha) H_{xx}(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) Q(t, \beta) \right] \Delta_{v(\beta)} g(\beta, x^0(\beta), u^0(\beta), v^0(\beta)). \quad (60)$$

Введем матричную функцию $K(\alpha, \beta)$ формулой

$$K(\alpha, \beta) = -Q(t_1, \alpha) \phi_{xx}(x^0(t_1)) Q(t_1, \beta) + \sum_{\max(\alpha, \beta)}^{t_1} Q'(t, \alpha) H_{xx}(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) Q(t, \beta).$$

Сейчас, принимая во внимание это обозначение и тождества (46)–(58) в неравенствах (44), (45) получаем, что

$$\sum_{\alpha=t_0}^{t_1} \sum_{\beta=t_0}^{t_1} \Delta_{u(\alpha)} g'(\alpha, x^0(\alpha), u^0(\alpha), v^0(\alpha)) K(\alpha, \beta) \Delta_{u(\beta)} g(\beta, x^0(\beta), u^0(\beta), v^0(\beta)) + \\ + 2 \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t \Delta_{u(\tau)} H'_x(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) Q(t, \tau) \Delta_{u(\tau)} g(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) \right] \leq 0, \quad (61)$$

$$\sum_{\alpha=t_0}^{t_1} \sum_{\beta=t_0}^{t_1} \Delta_{v(\alpha)} g'(\alpha, x^0(\alpha), u^0(\alpha), v^0(\alpha)) K(\alpha, \beta) \Delta_{v(\beta)} g(\beta, x^0(\beta), u^0(\beta), v^0(\beta)) + \\ + 2 \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t \Delta_{v(\tau)} H'_x(t, x^0(t), u^0(t), v^0(t), \psi^0(t)) Q(t, \tau) \Delta_{v(\tau)} g(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau), v^0(\tau)) \right] \geq 0. \quad (62)$$

Сформулируем полученный результат в виде следующей теоремы.

Теорема 3. Если множества (8), (9) выпуклы, то для того, чтобы особое управление $(u^0(t), v^0(t))$ было седловой точкой функционала (4), при сделанных предположениях необходимо, чтобы неравенства (61), (62) выполнялись для всех $u(t) \in U, t \in T, v(t) \in V, t \in T$ соответственно.

Таким образом, используя специфику (52) уравнения (3), удалось получить конструктивно проверяемое необходимое условие оптимальности особых управлений.

Заключение

В статье исследуется одна игровая задача оптимального управления, описываемая системой нелинейных разностных уравнений типа Вольтерра. Доказано необходимое условие существования

седловой точки в рассматриваемой задаче управления. Отдельно изучен случай вырождения (особый случай) установленного необходимого условия оптимальности типа принципа максимума Понтрягина. При некоторых дополнительных предположениях установлено необходимое условие второго порядка для существования седловой точки.

Список источников

1. Васильев Ф.П. Об условиях существования седловой точки в детерминированных интегро-дифференциальных играх с запаздыванием при наличии параметров // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1970. № 1. С. 15–25.
2. Васильев Ф.П. Об условиях существования седловой точки в детерминированных интегро-дифференциальных играх для интегро-дифференциальных систем с запаздыванием нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. 1972. № 2. С. 40–51.
3. Габасов Р., Кириллова Ф.М. и др. Методы оптимизации. Минск : Четыре четверти, 2011. 472 с.
4. Дымков М.П. Оптимальное управление дискретной системой Вольтерра по квадратному функционалу // Доклады НАН Белоруссии. 1997. Т. 41, № 3. С. 10–16.
5. Дымков М.П. Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления. Минск : БГУ, 2005, 313 с.
6. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. Баку : ЭЛМ, 1999. 176 с.
7. Goo Yoon Hoe, Koo Nam Jip. Asymptotic behavior of nonlinear Volterra difference systems // Bull. Korean Math. Soc. 2007. № 1. P.177–184.
8. Колмановский В.Б. Об асимптотических свойствах решений некоторых нелинейных систем Вольтерра // Автоматика и телемеханика. 2000. № 4. С. 42–50.

References

1. Vasiliev, F.P. (1970) Conditions for the existence of a saddle point in deterministic integro-differential games with delay in the presence of parameters. *Vychislitel'naya matematika i matematicheskaya fizika – Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1. pp. 15–25.
2. Vasiliev, F.P. (1972) On the conditions for the existence of a saddle point in deterministic integro-differential games for integro-differential systems with delay of neutral type. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 2. pp. 40–51.
3. Gabasov, R., Kirillova F.M., et al. (2011) *Optimization Methods*. Minsk: Four quarters.
4. Dymkov, M.P. (1997) Optimal control of a discrete Volterra system with respect to a square functional. *Dokl. NAS of Belarus*. 41(3). pp. 10–16.
5. Dymkov, M.P. (2005) *Extreme Problems in Multiparameter Control Systems*. Minsk: [s.n.].
6. Mansimov, K.B. (1999) *Singular controls in delayed systems*. Baku: ELM.
7. Goo Yoon Hoe & Koo Nam Jip. (2007) Asymptotic behavior of nonlinear Volterra difference systems. *Bull. Korean Math. Soc*. 1. pp. 177–184.
8. Kolmanovsky, V.B. (2000) On the asymptotic properties of solutions of some nonlinear Volterra systems. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 4. pp. 42–50.

Информация об авторах:

Мансимов Камил Байрамали оглы – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики Бакинского государственного университета; руководитель лаборатории «Управление в сложных динамических системах» Института систем управления НАН Азербайджана (Баку, Азербайджан). E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

Чырахова Махнура Узеир кызы – диссертант лаборатории «Управление в сложных динамических системах» Института систем управления НАН Азербайджана (Баку, Азербайджан). E-mail: kmansimov@mail.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Mansimov Kamil B. (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Baku State University, Institute of Control problems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan). E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

Chiragova Mahnura U. (Institute of Control problems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan). E-mail: kmansimov@mail.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 06.04.2021; принята к публикации 30.05.2022

Received 06.04.2021; accepted for publication 30.05.2022