

Научная статья

УДК 681.5

doi: 10.17223/19988605/59/5

Робастная экстраполяция в дискретных системах с интервальными параметрами с использованием алгоритмов оценивания неизвестного входа

Константин Станиславович Ким¹, Валерий Иванович Смагин²

^{1, 2} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ kks93@rambler.ru

² vsm@mail.tsu.ru

Аннотация. Рассматривается задача синтеза экстраполятора для дискретного объекта с интервальными параметрами. Задача решена на основе вероятностного подхода, в основе которого лежит замена неопределенных параметров интервального типа на независимые случайные величины с равномерным законом распределения. Задача решена с использованием принципа разделения, рекуррентных алгоритмов, метода наименьших квадратов и сглаживающих процедур.

Ключевые слова: оценки экстраполяции; дискретная система; интервальные параметры; неизвестный вход, неизвестные параметры

Для цитирования: Ким К.С., Смагин В.И. Робастная экстраполяция в дискретных системах с интервальными параметрами с использованием алгоритмов оценивания неизвестного входа // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 59. С. 47–54. doi: 10.17223/19988605/59/5

Original article

doi: 10.17223/19988605/59/5

Robust extrapolation in discrete systems with interval parameters using algorithms for estimating unknown input

Konstantin S. Kim¹, Valery I. Smagin²

^{1, 2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ kks93@rambler.ru

² vsm@mail.tsu.ru

Abstract. A model with interval parameters and unknown input is described by the equation:

$$x(k+1) = \tilde{A}x(k) + Bu(k) + f(k) + q(k), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

where $x(k) \in \mathbb{R}^n$ is the state vector, $u(k) \in \mathbb{R}^p$ is a known input, $f(k)$ is an unknown input; x_0 is a random vector (the variance $N_0 = M\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T\}$ and the expectation $\bar{x}_0 = M\{x_0\}$ are assumed to be known); $\tilde{A}$ is an interval matrix, B is a known matrix; $q(k)$ is a Gaussian random sequence with the following characteristics: $M\{q(k)\} = 0$, $M\{q(k)q^T(j)\} = Q(k)\delta_{kj}$.

The observation channel is described by the formula:

$$y(k) = Sx(k) + v(k), \quad (2)$$

where $v(k)$ is a Gaussian random sequence with the following characteristics: $M\{v(k)\} = 0$, $M\{v(k)v^T(j)\} = V(k)\delta_{kj}$.

It is assumed that the sequences $q(k)$, $v(k)$ are independent of each other, the systems (1), (2) are observed with parametric perturbations of the dynamics matrix of the system (1). It is also assumed that the matrices $Q(k)$ and $V(k)$ are unknown.

The solution of the problem is proposed to be performed on the basis of the separation principle using the optimal recurrent extrapolation, the least squares method with additional smoothing and a probabilistic approach to accounting for interval uncertainty. The probabilistic method is based on the replacement of interval parameters by independent random variables distributed over their uncertainty intervals according to a uniform distribution.

It is shown that the use of probabilistic approach, smoothing algorithms for estimating an unknown input for a discrete model with interval parameters allows to increase the prediction accuracy.

Keywords: Robust extrapolation estimates; discrete system; unknown input; interval parameters; least-squares

For citation: Kim, K.S., Smagin, V.I. (2022) Robust extrapolation in discrete systems with interval parameters using algorithms for estimating unknown input. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 59. pp. 47–54. doi: 10.17223/19988605/59/5

Задачи синтеза фильтров, экстраполяторов и наблюдателей для динамических систем с неопределенными параметрами, в частности с интервальными параметрами, рассматривались в работах [1–7], при этом использовались методы робастной обработки информации, методы интервальной математики, методы обработки информации с применением оценок неизвестного входа [8–13]. В работах [8–11] для вычисления оценок неизвестного входа использовался МНК, в работах [12, 13] для вычислений оценок неизвестного входа предложено использовать компенсационный подход, в работе [14] для повышения точности оценивания неизвестного входа применялись алгоритмы непараметрического сглаживания.

В настоящей статье рассматривается задача робастной экстраполяции в дискретных системах с аддитивными возмущениями с неизвестным входом и интервальными параметрами. Задача решается на основе вероятностного подхода, принципа разделения с использованием алгоритмов оценивания неизвестного входа с помощью МНК и сглаживающих процедур непараметрического сглаживания.

1. Постановка задачи

Пусть модель объекта с интервальными параметрами описывается разностным уравнением

$$x(k+1) = \tilde{A}x(k) + Bu(k) + f(k) + q(k), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $x(k) \in R^n$ – вектор состояния, $u(k) \in R^p$ – известный вход; $f(k)$ – неизвестный вход, x_0 – случайный вектор (предполагаются известными дисперсионная матрица $N_0 = M\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T\}$ и математическое ожидание $\bar{x}_0 = M\{x_0\}$); $\tilde{A}$ – интервальная матрица (с нижней и верхней границами $\underline{A}$ и $\bar{A}$ соответственно), B – заданная матрица; $q(k)$ – векторная гауссовская случайная последовательность со следующими характеристиками:

$$M\{q(k)\} = 0, \quad M\{q(k)q^T(j)\} = Q(k)\delta_{kj}.$$

Здесь δ_{kj} – символ Кронекера.

Канал наблюдений имеет вид:

$$y(k) = Sx(k) + v(k), \quad (2)$$

где $v(k)$ – гауссовская случайная последовательность с характеристиками: $M\{v(k)\} = 0$, $M\{v(k)v^T(j)\} = V(k)\delta_{kj}$. Предполагается, что последовательности $q(k)$, $v(k)$ и x_0 независимы между собой, система (1), (2) наблюдаема при параметрических возмущениях матрицы динамики системы (1).

По информации, поступившей в момент $k \in [0; T]$, требуется найти оценку прогноза $\hat{x}(k+1)$ на основе минимизации следующего критерия:

$$J(0;T) = M\left\{\sum_{k=0}^T e^T(k)R(k)e(k)\right\}, \quad (3)$$

где $R(k) > 0$ – весовая матрица, $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ – вектор ошибок.

2. Синтез оптимального экстраполятора

Для решения задачи будем использовать рекуррентный экстраполятор Калмана (ЭК), при этом для нахождения его коэффициентов передачи воспользуемся вероятностным подходом. Вероятностный подход используется при анализе робастной устойчивости систем с интервальными параметрами [15] и может также использоваться для синтеза робастных систем управления [16]. Суть метода заключается в том, что интервальные параметры заменяются независимыми случайными величинами, распределенными на своих интервалах неопределенности по равномерному закону.

Воспользовавшись вероятностным подходом, интервальную матрицу $\tilde{A}$ заменим на матрицу, элементы которой зависят от случайных величин:

$$A(\theta) = (A + \sum_{s=1}^m A_s \theta_s), \quad (4)$$

где θ_i – независимые случайные величины, распределенные по равномерному закону распределения на интервале $[-1, +1]$ ($-1 \leq \theta_s \leq 1$ ($s = \overline{1, m}$)). Здесь мы будем предполагать, что случайные величины θ_s не зависят от x_0 , $q(k)$ и $v(k)$. В (4) матрица $A = \frac{1}{2}(\underline{A} + \bar{A})$ является медианой интервальной матрицы (номинальная матрица). Значение $m \leq n^2$ определяет количество интервальных элементов в матрице $\tilde{A}$ (матрица A_s , соответствующая ij -му интервальному элементу матрицы $\tilde{A}$, определится по следующему правилу: ее ij -й элемент вычисляется по формуле $(A_s)_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{A} - \underline{A})_{ij}$, при этом все остальные элементы будут равны нулю).

В этом случае исходная модель объекта описывается разностным уравнением

$$x(k+1) = A(\theta)x(k) + Bu(k) + f(k) + q(k), \quad x(0) = x_0. \quad (5)$$

Для построения оценки будем использовать рекуррентный алгоритм экстраполятора Калмана

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + f(k) + K(k)(y(k) - S\hat{x}(k)), \quad \hat{x}(0) = \bar{x}_0, \quad (6)$$

где $K(k)$ – матрица коэффициентов передачи экстраполятора.

Найдем матрицу $K(k)$, обеспечивающую минимум критерия (3), с использованием принципа разделения. Для этого сначала построим оценки вектора $\hat{x}(k)$ в предположении, что вектор $f(k)$ известен точно, затем – оценки вектора неизвестного входа в предположении, что оценка вектора состояния $\hat{x}(k)$ известна.

Для этого запишем уравнение для вектора ошибок $e(k)$, вычитая из уравнения (5) уравнение (6):

$$\begin{aligned} e(k+1) &= x(k+1) - \hat{x}(k+1) = \\ &= (A - KS)e(k) + \sum_{s=1}^m A_s x(k)\theta_s(k) + q(k) - Kv(k). \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая (7), уравнение для матрицы $N(k) = M\{e(k)e(k)^T\}$ с учетом того, что θ_s распределены по равномерному закону распределения, получим следующее матричное разностное уравнение:

$$\begin{aligned} N(k+1) &= (A - K(k)S)N(k)(A - K(k)S)^T + \frac{1}{3} \sum_{s=1}^m A_s N(k)A_s^T + \\ &+ \frac{1}{3} \sum_{s=1}^m A_s \hat{x}(k)\hat{x}(k)^T A_s^T + Q(k) + K(k)V(k)K(k)^T, \quad N(0) = N_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Представим критерий (3) в виде:

$$J(0;T) = \text{tr } N_0 R(0) + \sum_{k=1}^T \text{tr } N(k) R(k), \quad (9)$$

где tr – след матрицы. Тогда, подставив в (9) формулу (8) со сдвигом на один такт, в результате имеем:

$$J(0;T) = \text{tr } N_0 R(0) + \sum_{k=1}^T \text{tr}((A - K(k-1)S)N(k-1)(A - K(k-1)S)^T + \frac{1}{3} \sum_{s=1}^m A_s N(k-1)A_s^T + \frac{1}{3} \sum_{s=1}^m A_s \hat{x}(k-1)\hat{x}(k-1)^T A_s^T + Q(k-1) + K(k-1)V(k-1)K(k-1)^T)R(k). \quad (10)$$

Используя правила дифференцирования функции след (tr) от произведения матриц [17]:

$$\frac{\partial \text{tr } AXB}{\partial X} = A^T B^T, \quad \frac{\partial \text{tr } A^T X B^T}{\partial X} = BA, \quad (11)$$

из уравнения

$$\frac{\partial J(0;T)}{\partial K} = 0, \quad (12)$$

учитывая, что матрица $R(k)$ не вырождена, получим выражение для матрицы $K(k)$:

$$K(k) = AN(k)S^T(SN(k)S^T + V(k))^{-1}. \quad (13)$$

3. Оценка неизвестного входа

В модели (6) в силу того, что в качестве матрицы динамики используется медиана интервальной матрицы (A), изменится вектор неизвестного входа (этот вектор обозначим $r(k)$):

$$r(k) = f(k) + \sum_{m=1}^s A_s \theta_s x(k) \quad -1 \leq \theta_s \leq 1 (s = \overline{1, m}), \quad (14)$$

где второе слагаемое является дополнительным неизвестным входом, возникающим из-за неопределенности задания матрицы динамики объекта.

В качестве алгоритма оценивания неизвестного входа $r(k)$, будем использовать алгоритмы МНК, в этом случае оценку можно построить на основе минимизации дополнительного критерия [8, 9]:

$$I = \sum_{t=1}^k \left\{ \|y(t) - S\tilde{x}(t)\|_C^2 + \|r(t-1)\|_D^2 \right\}, \quad (15)$$

где C, D – положительно определенные весовые матрицы, $\tilde{x}(t) = A\hat{x}(t-1) + Bu(t-1) + r(t-1)$. Построенные на основе минимизации (15) МНК-оценки неизвестного входа примут вид:

$$\hat{r}^{(LSM)}(k) = [S^T C S + D]^{-1} S^T C [y(k) - S(A\hat{x}(k-1) + Bu(k-1))]. \quad (16)$$

Для повышения точности оценивания неизвестного входа будем дополнительно использовать алгоритмы непараметрического сглаживания [14]:

$$\hat{r}^{(NP)}(k) = [S^T C S + D]^{-1} S^T C \hat{\Omega}, \quad (17)$$

где j -я компонента вектора $\hat{\Omega}(k)$ имеет вид:

$$\hat{\Omega}_j(k) = \frac{\sum_{i=1}^k [y(i) - S(A\hat{x}(i-1) + Bu(i-1))]_j G\left(\frac{k-i+1}{\mu_j}\right)}{\sum_{i=1}^k G\left(\frac{k-i+1}{\mu_j}\right)}. \quad (18)$$

В соотношении (18) $G(\cdot)$ является ядерной функцией и μ_j – коэффициентом сглаживания.

Оценки экстраполяции в дискретных системах с интервальными параметрами определялись из рекуррентного уравнения

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + \hat{r}(k) + K(k)(y(k) - S\hat{x}(k)), \quad \hat{x}(0) = \bar{x}_0, \quad (19)$$

где матрица коэффициентов передачи $K(k)$ вычислялась по формулам (8) и (13), а оценка $\hat{r}(k)$ определялась по формулам (16) или (17).

4. Результаты моделирования

Моделирование выполнено для следующих исходных данных:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0,06 & 0 \\ 0 & 0,02 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,15 \end{pmatrix},$$

$$f(k) = \begin{cases} (0,3 \quad -0,2)^T & \text{if } k \in [1; 30], \\ (0,6 \quad 0,1)^T & \text{if } k \in [31; 75], \\ (0,1 \quad -0,3)^T & \text{if } k \in [76; 126], \\ (0,8 \quad -0,6)^T & \text{if } k \in [127; 184], \\ (0,2 \quad 0,1)^T & \text{if } k \in [185; 200]. \end{cases}$$

Варианты значений медианы интервальной матрицы A , для которых выполнено моделирование, приведены в таблице.

Среднеквадратические ошибки оценок вектора состояния ($\sigma_{x,i}$)

№ п/п	Матрицы медианы и реализации двумерной случайного вектора θ	σ_x	Алгоритм 1	Алгоритм 2	Алгоритм 3
1	$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,15 \\ -0,25 & 0,68 \end{pmatrix}, \bar{\theta}_1 = 0,75, \bar{\theta}_2 = 0,6$	$\sigma_{x,1}$ $\sigma_{x,2}$	1,626 1,303	0,811 0,672	0,737 0,575
2	$A = \begin{pmatrix} 0,94 & 0,15 \\ -0,25 & 0,62 \end{pmatrix}, \bar{\theta}_1 = -0,2, \bar{\theta}_2 = 0,65$	$\sigma_{x,1}$ $\sigma_{x,2}$	2,248 1,492	0,930 0,624	0,759 0,538
3	$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,15 \\ -0,25 & 0,8 \end{pmatrix}, \bar{\theta}_1 = 0,75, \bar{\theta}_2 = 0,5$	$\sigma_{x,1}$ $\sigma_{x,2}$	1,938 1,892	0,929 0,797	0,852 0,671
4	$A = \begin{pmatrix} 0,81 & 0,15 \\ -0,25 & 0,52 \end{pmatrix}, \bar{\theta}_1 = 0,85, \bar{\theta}_2 = 1,0$	$\sigma_{x,1}$ $\sigma_{x,2}$	1,632 1,038	0,888 0,610	0,771 0,568
5	$A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ -0,25 & 0,6 \end{pmatrix}, \bar{\theta}_1 = 0,9, \bar{\theta}_2 = 1,0$	$\sigma_{x,1}$ $\sigma_{x,2}$	1,246 0,932	0,640 0,617	0,601 0,575
6	$A = \begin{pmatrix} 0,71 & 0,15 \\ -0,25 & 0,92 \end{pmatrix}, \bar{\theta}_1 = -0,5, \bar{\theta}_2 = -0,5$	$\sigma_{x,1}$ $\sigma_{x,2}$	1,948 2,267	0,633 0,618	0,585 0,553

В (18) использовалась ядерная функция гауссовского вида:

$$G(z) = \frac{\exp\left(\frac{-z^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}.$$

В таблице приведены результаты сравнения среднеквадратических ошибок отклонений оценок вектора состояния для трех алгоритмов (при различных матрицах A и различных реализациях компонент случайного вектора θ):

- алгоритм 1 – ЭК с матрицей динамики A и с использованием оценок МНК неизвестного входа (16) (в этом случае в уравнении (8) в правой части исключены второе и третье слагаемые);
- алгоритм 2 – ЭК с матрицей динамики A и с использованием оценок неизвестного входа МНК и дополнительного сглаживания (17) (в этом случае в уравнении (8) в правой части также исключены второе и третье слагаемые);
- алгоритм 3 – ЭК с использованием оценок МНК, сглаживания и робастного подхода для оценивания вектора состояния (8), (13).

Усреднение производилось по 100 реализациям. Расчет среднеквадратических ошибок оценивания выполнялся по формулам

$$\sigma_{x,i} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (x_i(k) - \hat{x}_i(k))^2}{N-1}}, (i = \overline{1,2}).$$

Из таблицы видно, что применение для оценок прогноза вектора состояния на 1 такт метода МНК для оценивания неизвестного входа с дополнительным сглаживанием с помощью алгоритма непараметрического сглаживания и робастного алгоритма экстраполяции (8), (13), позволяет уменьшить среднеквадратические ошибки оценивания.

Заключение

С использованием вероятностного подхода, в основе которого лежит замена неопределенных параметров интервального типа на независимые случайные величины с равномерным законом распределения, предложен алгоритм синтеза робастного экстраполятора для линейной дискретной модели с неизвестным входом. Задача решена с использованием принципа разделения, рекуррентных алгоритмов, метода наименьших квадратов и сглаживающих процедур. На численном примере показано, что применение алгоритмов сглаживания и робастного подхода позволяет повысить точность прогнозирования.

Список источников

1. Wang Y., Bevly D., Rajamani R. Interval observer design for LPV systems with parametric uncertainty // *Automatica*. 2015. V. 60. P. 79–85.
2. Abolhasani M., Rahmani M. Robust Kalman filtering for discrete-time systems with stochastic uncertain time-varying parameters // *Electronics Letters*. 2017. V. 53. No. 3. P. 146–148.
3. Ichalal D., Marx B., Maquin D., Ragot J. State estimation of system with bounded uncertain parameters: interval multi-model approach // *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. 2018. V. 32 (3). P. 480–493.
4. Hattab O., Franchek M.A., Grigoriadis K. Observer based parameter estimation for linear uncertain discrete-time systems // *J. of Engineering Research and Application*. 2018. V. 8, is. 10 (part II). P. 51–60. doi: 10.9790/9622-0810025160
5. Wang Z., Lim C., Shen Y. Interval observer design for uncertain discrete time linear systems // *Systems & Control Letters*. 2018. V. 116. P. 41–46.
6. Rocha K.D.T., Terra M.H. Robust Kalman filter for systems subject to parametric uncertainties // *Systems & Control Letters*. 2021. V. 157. Art. 105034.
7. Ким К.С., Смагин В.И. Экстраполяция в дискретных системах с мультипликативными возмущениями при неполной информации // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2019. № 47. С. 49–56.
8. Janczak D., Grishin Yu. State estimation of linear dynamic system with unknown input and uncertain observation using dynamic programming // *Control and Cybernetics*. 2006. № 4. P. 851–862.
9. Gillijns S., Moor B. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems // *Automatica*. 2007. V. 43. P. 111–116.
10. Hsien C.-S. On the optimality of two-stage Kalman filter for systems with unknown input // *Asian J. of Control*. 2010. V. 12, № 4. P. 510–523.

11. Witczak M. Fault diagnosis and fault-tolerant control strategies for non-linear systems : Analytical and Soft Computing Approaches. Springer International Publishing, 2014. 239 p. (Lecture Notes in Electrical Engineering; v. 266).
12. Smagin V.I. State estimation for nonstationary discrete systems with unknown input using compensations // Russian Physics Journal. 2015. V. 58, is. 7. P. 1010–1017.
13. Smagin V.I. Prediction of states of discrete systems with unknown input of the model using compensation // Russian Physics Journal. 2017. V. 59, is. 9, P. 1507–1514.
14. Smagin V.I., Koshkin G.M. Kalman filtering and control algorithms for systems with unknown disturbances and parameters using nonparametric technique // Proceedings 20th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR 2015), 24–27 August, Miedzydroje, Poland. 2015. P. 247–251.
15. Barmish B.R., Polyak B.T. A new approach to open robustness problems based on probabilistic predication formulae // Proc. 13th World IFAC Congr., 30 June – 5 July, San Francisco, USA. 1996. V. H. P. 1–6.
16. Mukhina O.O., Smagin V.I. Locally Optimal Control for Discrete Time Delay Systems with Interval Parameters // Communications in Computer and Information Science. 2014. V. CCIS 487. P. 301–311.
17. Athans M. The matrix minimum principle // Informat. and Contr. 1968. V. 11. P. 592–606.

References

1. Wang, Y., Bevely, D. & Rajamani, R. (2015) Interval observer design for LPV systems with parametric uncertainty. *Automatica*. 60. pp. 79–85. DOI: 10.1016/j.automatica.2015.07.001
2. Abolhasani, M. & Rahmani, M. (2017) Robust Kalman filtering for discrete-time systems with stochastic uncertain time-varying parameters. *Electronics Letters*. 53(3). pp. 146–148. DOI: 10.1049/el.2016.2520
3. Ichalal, D., Marx, B., Maquin, D. & Ragot, J. (2018) State estimation of system with bounded uncertain parameters: interval multi-model approach. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. 32(3). pp. 480–493. DOI: 10.1002/acs.2855
4. Hattab, O., Franchek, M.A. & Grigoriadis, K. (2018) Observer based parameter estimation for linear uncertain discrete-time systems. *Journal of Engineering Research and Application*. 8-2(10). pp. 51–60. DOI: 10.9790/9622-0810025160
5. Wang, Z., Lim, C. & Shen, Y. (2018) Interval observer design for uncertain discrete time linear systems. *Systems & Control Letters*. 116. pp. 41–46. DOI: 10.1016/j.sysconle.2018.04.003
6. Rocha, K.D.T. & Terra, M.H. (2021) Robust Kalman filter for systems subject to parametric uncertainties. *Systems & Control Letters*. 157. Art. no. 105034. DOI: 10.1016/j.sysconle.2021.105034
7. Kim, K.S. & Smagin, V.I. (2019) Extrapolation in discrete systems with multiplicative perturbations at incomplete information. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 47. pp. 49–56. DOI: 10.17223/19988605/47/6
8. Janczak, D. & Grishin, Yu. (2006) State estimation of linear dynamic system with unknown input and uncertain observation using dynamic programming. *Control and Cybernetics*. 4. pp. 851–862.
9. Gillijns, S. & Moor, B. (2007) Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems. *Automatica*. 43. pp. 111–116.
10. Hsien, C.-S. (2010) On the optimality of two-stage Kalman filter for systems with unknown input. *Asian Journal of Control*. 12(4). pp. 510–523. DOI: 10.1002/asjc.205
11. Witczak, M. (2014) Fault diagnosis and fault-tolerant control strategies for non-linear systems. Chapter 2. Unknown input observers and filters. In: Di Cecco, L. (ed.) *Lecture Notes in Electrical Engineering*. Springer International Publishing, Switzerland. pp. 19–56.
12. Smagin, V.I. (2015) State estimation for nonstationary discrete systems with unknown input using compensations. *Russian Physics Journal*. 58(7). pp. 1010–1017. DOI: 10.1007/s11182-015-0602-x
13. Smagin, V.I. (2017) Prediction of states of discrete systems with unknown input of the model using compensation. *Russian Physics Journal*. 59(9). pp. 1507–1514. DOI: 10.1007/s11182-017-0937-6
14. Smagin, V.I. & Koshkin, G.M. (2015) Kalman filtering and control algorithms for systems with unknown disturbances and parameters using nonparametric technique. *Proc. of the 20th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR 2015)*. 24–27 August. Miedzydroje, Poland. pp. 247–251.
15. Barmish, B.R. & Polyak, B.T. (1996) A new approach to open robustness problems based on probabilistic predication formulae. *Proc. 13th World IFAC Congr.* 30 June–5 July. San Francisco. USA. vol. H. pp. 1–6.
16. Mukhina, O.O. & Smagin, V.I. (2014) Locally Optimal Control for Discrete Time Delay Systems with Interval Parameters. *Communications in Computer and Information Science*. CCIS 487. pp. 301–311. DOI: 10.1007/978-3-319-13671-4_35
17. Athans, M. (1968) The matrix minimum principle. *Information and Control*. 11. pp. 592–606.

Информация об авторах:

Ким Константин Станиславович – кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: kks93@rambler.ru

Смагин Валерий Иванович – профессор, доктор технических наук, профессор Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: vsm@mail.tsu.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Kim Konstantin S. (Candidate of Physics and Mathematics, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kks93@rambler.ru

Smagin Valery I. (Doctor of Technical Science, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vsm@mail.tsu.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 06.11.2021; принята к публикации 30.05.2022

Received 06.11.2021; accepted for publication 30.05.2022