

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 519.6, 517.95

doi: 10.17223/19988621/78/1

MSC: 35J25, 65N06

Численное решение прямой задачи электроимпедансной томографии в полной электродной постановке**Анна Александровна Афанасьева¹,
Александр Васильевич Старченко²**^{1, 2} *Томский государственный университет, Томск, Россия*¹ *afanaseva_anyutka@inbox.ru*² *starch@math.tsu.ru*

Аннотация. Данная работа связана с одним из методов медицинской визуализации – электроимпедансной томографией (ЭИТ). Особенностью рассматриваемой двумерной математической постановки для прямой задачи ЭИТ является использование уравнения эллиптического типа с кусочно-постоянными коэффициентами и специального интегро-дифференциального граничного условия на контактной границе электродов. Для приближенного решения рассматриваемой задачи был разработан численный метод с использованием неструктурированных сеток, метода конечных объемов для бариецентрических ячеек и метода исключения Гаусса с выбором главного элемента. Валидация метода выполнена на известном аналитическом решении.

Ключевые слова: уравнение эллиптического типа с кусочно-постоянными коэффициентами, метод конечного объема, неструктурированные сетки, полная электродная модель

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2022-884).

Для цитирования: Афанасьева А.А., Старченко А.В. Численное решение прямой задачи электроимпедансной томографии в полной электродной постановке // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 78. С. 5–21. doi: 10.17223/19988621/78/1

Numerical solution of the direct problem of electroimpedance tomography in a complete electrode formulation

Anna A. Afanas'eva¹, Alexander V. Starchenko²

^{1, 2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ afanaseva_anyutka@inbox.ru

² starch@math.tsu.ru

Abstract. In this article, we consider the two-dimensional mathematical statement for the direct problem of electroimpedance tomography (EIT). The peculiarity of this formulation is the use of an elliptic equation with piecewise constant coefficients and a special integro-differential boundary condition at the contact boundary of the electrodes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 0, (x, y) \in D; \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial n} &= 0, (x, y) \notin \bigcup_{l=1}^L E_l; \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial n} &= \frac{1}{z_l E_l} \left(\int_{E_l} u ds + z_l I_l \right) - \frac{u}{z_l}, (x, y) \in E_l, l = 1, 2, \dots, L. \end{aligned} \quad (7)$$

In [10], it is proved that for the considered mathematical setting, the solution exists and is unique if the following conditions are met: $\sum_{l=1}^L U_l = 0, \sum_{l=1}^L I_l = 0$.

To solve problem (7), due to the complexity of the geometric shape of the area of the object under study, we use the finite volume method (FVM) [6] on unstructured grids. The solution of the finite-difference problem yields an approximate solution of the differential problem in the nodes of an unstructured grid. In the numerical solution of differential equations of the FVM, an important element is the computational grid. A well-constructed computational grid significantly simplifies the solution of differential equations and makes it closer to the exact solution. The accuracy and efficiency of the numerical study of the problem depend on properties of the computational grid used. In this paper, the grid was built using the Gambit program, which is a part of the ANSYS Fluent software package.

The numerical calculations carried out for the test problem - a round disk with two electrodes inhomogeneous in electrical conductivity - are compared with an approximate analytical solution in the form of Fourier series [14]. The numerical solution of the difference scheme was performed by the Gauss method with partial selection of the main element.

To obtain estimates of the comparison of numerical and analytical solutions, the value of the root mean square error (RMSE) was used. Table 1 shows the calculated RMSE values for various values of the electrical conductivity ratio σ_2/σ_1 , various grids: with nodes thickening only on the electrodes, to the entire boundary of the region, with special placement of nodes on the border of the circular insert, and without it. As a result, a good agreement has been obtained for various ratios of electrical conductivity coefficients. In addition, with a fourfold increase in the number of triangles in the grid, a decrease in RMSE is observed, which indicates the convergence of the resulting difference scheme.

Keywords: elliptic equation with piecewise constant coefficients, finite volume method, unstructured grids, complete electrode model

Acknowledgments: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement no. 075-02-2022-884).

For citation: Afanas'eva, A.A., Starchenko, A.V. (2022) Numerical solution of the direct problem of electroimpedance tomography in a complete electrode formulation. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 78. pp. 5–21. doi: 10.17223/19988621/78/1

Введение

На сегодняшний день существует несколько томографических методов: рентгеновские, ультразвуковые, магнитно-резонансные. Наиболее многообещающим методом является электроимпедансная томография (ЭИТ). Этот метод имеет несколько преимуществ. Во-первых, в отличие от рентгеновского метода, пациент не подвергается облучению. Во-вторых, этот метод можно использовать для длительного наблюдения за деятельностью внутренних органов человека. В-третьих, он очень экономичен и подходит для использования в портативных устройствах [1–3]. Для повышения точности и достоверности медицинских исследований можно комбинировать ЭИТ и другие методы диагностики.

Существует два типа задач ЭИТ [4]:

– поиск значений электрических потенциалов на поверхности биологического объекта при заданном распределении удельной проводимости σ и подаваемого тока I (прямая задача);

– восстановление неизвестного распределения проводимости σ при заданном токе и значениях потенциалов на поверхности биологического объекта (обратная задача).

Математические задачи, возникающие в области ЭИТ, относятся к классу нелинейных некорректно поставленных обратных задач. Численное решение таких задач представляют большую сложность и требует разработки специальных методов.

При численном решении дифференциальные задачи обычно приводят к дискретному аналогу с помощью сеточных методов. Выделяют следующие группы этих методов: конечно-разностные (МКР), конечно-элементные (МКЭ), гранично-элементные (МГЭ), конечно-объемные (МКО) и др. Большинство дифференциальных задач решается с помощью МКЭ, преимуществом которого является гибкость, когда нужно быстро улучшить качество аппроксимации без сложных изменений алгоритма. Однако в работе [5] подчеркивалось, что в некоторых вариантах МКЭ не выполняются условия непрерывности электрического тока, а значит, не соблюдается закон сохранения на элементе сетки и поверхности в целом. Результат сравнения МКЭ и МКО в работе [5] показывает, что численное решение, полученное методом МКО, близко к точным результатам даже на очень грубой сетке, и особенно в граничных узлах. Это очень полезно для проблемы ЭИТ.

В работе [6] построены конечно-объемные аппроксимации для численного решения прямой задачи ЭИТ на неструктурированных сетках. В качестве конечных объемов были выбраны барицентрические ячейки, ячейки Дирихле–Вороного и

треугольные конечные объемы. На основе сравнительного анализа полученных численных решений для построенных разностных схем с точным решением и с численным решением на основе МКЭ установлено, что разностные схемы обеспечивают высокую точность расчетов на барицентрических ячейках, ячейках Дирихле–Вороного. Результаты, полученные с использованием треугольных разностных схем конечного объема, оказались хуже, чем в указанных видах конечных объемов, но стоит отметить, что они позволяют использовать граничные условия Неймана без погрешности аппроксимации.

В статье [7] авторы используют метод конечных объемов с барицентрическими ячейками для решения прямых и обратных задач ЭИТ. Результаты численных экспериментов показывают, что численные решения могут хорошо приближаться к точным решениям при уменьшении размера сетки, а точность численных решений обратных задач ЭИТ зависит от выбора начальных значений для итерационного процесса. По сравнению с МКЭ МКО требует меньше времени для достижения требуемой точности. Хотя обратная задача ЭИТ некорректна, полученный в [7] алгоритм сходится, и его устойчивость при граничных условиях Неймана лучше, чем при условиях Дирихле. Однако требуется дополнительный теоретический анализ сходимости и устойчивости.

В публикации [8] предлагаются результаты анализа чувствительности внутреннего распределения электрического потенциала в зависимости от небольших изменений электрической проводимости в объекте и / или контактных сопротивлений поверхностных электродов. При дискретизации дифференциальных постановок задач ЭИТ используется МКЭ. Авторы статьи указывают, что полезная информация для решения обратных задач ЭИТ содержится в основном в небольшой приповерхностной области объекта вблизи электродов. Поэтому использование полной электродной модели способствует лучшему пониманию, как решение обратной задачи ЭИТ обнаруживает изменения в неоднородных средах с аномалиями и без них.

Целью данной работы является построение математической постановки и численного метода для решения прямой задачи ЭИТ с учетом сопротивления электродов. Математическая постановка представляет собой смешанную граничную задачу для эллиптического уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами, причем при задании граничных условий используется специальное интегро-дифференциальное условие на искомую функцию.

Физическая постановка задачи

Физически прямую задачу ЭИТ можно описать следующим образом [4]. Предполагается, что исследуемый объект (рис. 1, область D) находится в воздухе, имеет достаточно гладкую границу Γ и характеризуется кусочно-постоянными значениями коэффициента электропроводности σ . E_1, \dots, E_L отмечают места крепления на поверхности объекта электродов, к которым подается электрический ток относительно низкой [1–4] частоты I_1, \dots, I_L . Из-за отсутствия источников тока внутри объекта сумма входящего и выходящего токов должна быть равна нулю по закону сохранения заряда. Электроды имеют одинаковые размеры, но могут обладать различными значениями электрического сопротивления z_1, \dots, z_L из-за различного качества крепления электродов к поверхности объекта. Требу-

ется найти распределение электрического потенциала внутри объекта и напряжения тока U_1, U_2, \dots, U_L на электродах.

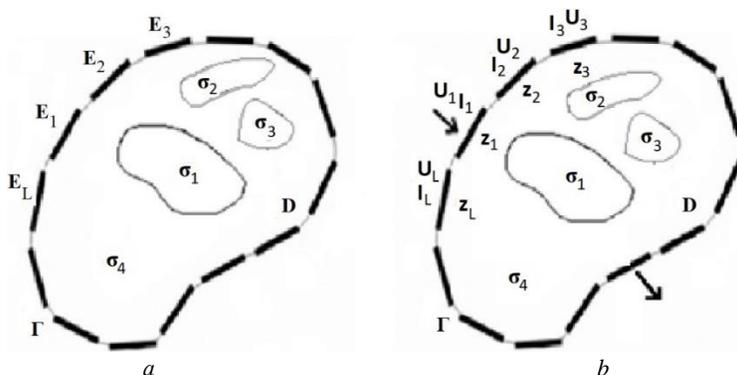


Рис. 1. Геометрия объекта с электродами (а); объект с указанием заданных и измеряемых величин (b)
Fig. 1. Geometry of an object with electrodes (a); an object with indication of the set and measured values (b)

Математическая постановка задачи

Математическая постановка рассматриваемой задачи может быть получена с использованием уравнений Максвелла в проводниках [4, 8, 9]:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \text{rot} \vec{E} = 0, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot} \vec{H} - \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (1)$$

$$\text{div} \vec{E} = \rho, \quad \text{div} \vec{H} = 0$$

и закона Ома для стационарных проводников [4]: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Здесь \vec{E} и \vec{H} – интенсивность электрического и магнитного поля соответственно, c – скорость света, t – время, \vec{j} – плотность электрического тока, ρ – объемная плотность заряда электрического тока, σ – коэффициент электрической проводимости.

В соответствии с физической постановкой задачи можно считать [4, 8], что процесс стационарен $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$, интенсивность магнитного поля невелика $(\vec{H} \approx 0)$

и интенсивность источников заряженных частиц внутри ткани биологического объекта равна нулю $(\rho = 0)$. Тогда имеем $\text{rot} \vec{E} = 0$, или $\vec{E} = \text{grad}(u)$, где u – потенциал электрического поля. Из второго и третьего уравнений (1) можно записать уравнение, описывающее распределение электрического потенциала внутри исследуемой области:

$$\text{div}(\sigma \text{grad} u) = 0. \quad (2)$$

Или с учетом допущения о двумерности изучаемого процесса

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0. \quad (3)$$

На границе области \bar{D} , где нет электродов (см. рис. 1), плотность электрического тока $\vec{j} = \sigma \text{grad}(u)$ равняется 0 в силу отсутствия тока, здесь используются простые условия Неймана:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \quad (4)$$

где n – внешняя нормаль к границе области \bar{D} .

На электродах рассматриваются граничные условия, соответствующие так называемой полной электродной модели [1–4, 8], в которой учитывается сопротивление электродов:

$$u + z_l \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = U_l, \quad l = 1, \dots, L. \quad (5)$$

Здесь U_l – напряжение на l -м электроде, которое наряду с электрическим потенциалом $u(x, y)$ является искомой величиной. Также на электроде известна сила подаваемого или отводимого тока I_l , $l = 1, \dots, L$, причем по закону сохранения заряда $\sum_{l=1}^L I_l = 0$ (при принятом выше предположении об отсутствии внутренних источников заряда внутри области). Величина силы тока l -м электроде определяется как интеграл от плотности электрического тока по контактной поверхности электрода E_l :

$$I_l = \int_{E_l} j_n ds = \int_{E_l} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} ds. \quad (6)$$

Комбинируя граничные условия (5) и (6) и исключая пока неизвестные величины U_l , можно получить интегро-дифференциальные граничные условия для уравнения (3) на электродах

$$u + z_l \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{E_l} \left(\int_{E_l} u ds + z_l I_l \right), \quad l = 1, \dots, L.$$

Таким образом, с учетом принятых предположений и допущений математическая постановка прямой задачи ЭИТ в полной электродной модели имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 0, \quad (x, y) \in D; \\ \sigma \frac{\partial u}{\partial n} &= 0, \quad (x, y) \notin \bigcup_{l=1}^L E_l; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{z_l E_l} \left(\int_{E_l} u ds + z_l I_l \right) - \frac{u}{z_l}, \quad (x, y) \in E_l, \quad l = 1, \dots, L; \quad \sum_{l=1}^L I_l = 0.$$

Как было доказано в работе [10], решение рассматриваемой математической постановки единственно, если $\sum_{l=1}^L U_l = 0$. Также в [10] указывалось, что полная электродная модель в (7) предсказывает экспериментальные данные с ошибкой менее 1%.

Численный метод решения

Для решения задачи (7) в силу сложности геометрической формы области исследуемого объекта будем использовать метод конечного объема [6] на неструктурированных сетках, в результате применения которого дифференциальная задача заменяется конечно-разностной (системой линейных уравнений). Решение конечно-разностной задачи даст приближенное решение дифференциальной задачи в узлах неструктурированной сетки.

На первом этапе применения метода конечного объема область $\bar{D} = D \cup \Gamma$ триангулируется, т.е. покрывается конечным числом непересекающихся треугольных элементов, соседние из которых имеют общие вершины. Граница области исследования аппроксимируется ломаной, представляющей собой совокупность сторон треугольников, последовательно размещенных вдоль границы. Количество вершин треугольников обозначим за N , а количество треугольников – M . Внутри каждого треугольника $\sigma(x, y)$ имеет постоянное значение. В качестве внутреннего конечного объема, не имеющего общих границ с границей области, будем рассматривать барицентрическую ячейку (рис. 2), ограниченную ломаной линией, составленной из отрезков медиан треугольников с общей вершиной P_0 , которая является центром этой ячейки. Таким образом, множество всех вершин треугольников представляют узлы сетки $\bar{\omega}_h = \{P_i\}_{i=1}^N$, вокруг которых строятся барицентрические конечные объемы. Введем сеточную функцию v_h , являющуюся приближенным решением дифференциальной задачи в узлах сетки, т.е.

$$v_i \approx u(P_i) = u(x_{P_i}, y_{P_i}), i = 1, \dots, N.$$

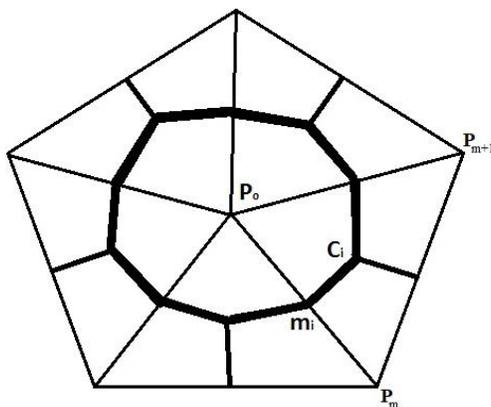


Рис. 2. Барицентрическая ячейка внутри триангулированной области

Fig. 2. Barycentric cell inside a triangulated area

Для получения разностной схемы, связывающей искомые значения сеточной функции v_h , предположим, что распределение приближенного решения внутри каждого m -го треугольника с вершинами P_0, P_m, P_{m+1} (отсчет против часовой стрелки; см. рис. 2) можно представить в следующем виде:

$$v^{(m)}(x, y) = v_{P_0} \Psi_{P_0}^{(m)}(x, y) + v_{P_m} \Psi_{P_m}^{(m)}(x, y) + v_{P_{m+1}} \Psi_{P_{m+1}}^{(m)}(x, y), \quad (8)$$

где $\Psi_{P_0}^{(m)}(x, y), \Psi_{P_m}^{(m)}(x, y), \Psi_{P_{m+1}}^{(m)}(x, y)$ – линейные базисные функции, причем они равны 1 только для своей вершины m -го треугольника, для остальных двух они равны 0. В связи с этим имеем

$$\Psi_{P_0}^{(m)}(x, y) = \frac{1}{2S_m} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{P_m} & y_{P_m} \\ 1 & x_{P_{m+1}} & y_{P_{m+1}} \end{vmatrix}, \quad \Psi_{P_m}^{(m)}(x, y) = \frac{1}{2S_m} \begin{vmatrix} 1 & x_{P_0} & y_{P_0} \\ 1 & x & y \\ 1 & x_{P_{m+1}} & y_{P_{m+1}} \end{vmatrix},$$

$$\Psi_{P_{m+1}}^{(m)}(x, y) = \frac{1}{2S_m} \begin{vmatrix} 1 & x_{P_0} & y_{P_0} \\ 1 & x_{P_m} & y_{P_m} \\ 1 & x & y \end{vmatrix}, \quad S_m = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_{P_0} & y_{P_0} \\ 1 & x_{P_m} & y_{P_m} \\ 1 & x_{P_{m+1}} & y_{P_{m+1}} \end{vmatrix},$$

где S_m – площадь треугольника $\Delta P_0 P_m P_{m+1}$. Заметим, что для одного треугольника базисные функции в сумме дают 1.

Проинтегрируем уравнение (3) по одному внутреннему конечному объему V_0 с границей L_0 и, воспользовавшись формулой Грина [11], получим

$$\oint_{L_0} \left[-\sigma \frac{\partial u}{\partial y} dx + \sigma \frac{\partial u}{\partial x} dy \right] = 0. \quad (9)$$

При замене производных в (9) для каждого m -го треугольника будем использовать $\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{\partial v^{(m)}}{\partial y}$ и с учетом (8) получим для производных постоянные значения, которые легко интегрируются [6] на участках границы L_0 . В итоге для внутренних узлов неструктурированной сетки разностная схема для нахождения сеточных значений будет выглядеть следующим образом:

$$\sum_{m=1}^{M_0} \frac{\sigma_m}{4S_m} \left[v_{P_0} \left((y_{P_m} - y_{P_{m+1}})^2 + (x_{P_{m+1}} - x_{P_m})^2 \right) + v_{P_m} \left((y_{P_{m+1}} - y_{P_0})(y_{P_m} - y_{P_{m+1}}) + (x_{P_0} - x_{P_{m+1}})(x_{P_{m+1}} - x_{P_m}) \right) + v_{P_{m+1}} \left((y_{P_0} - y_{P_m})(y_{P_m} - y_{P_{m+1}}) + (x_{P_m} - x_{P_0})(x_{P_{m+1}} - x_{P_m}) \right) \right] = 0, \quad P_0 \in \omega_n. \quad (10)$$

M_0 – количество треугольников в баричесентрической ячейке с общей вершиной P_0 . Суммирование выполняется по всем треугольным элементам сетки с общей вершиной P_0 , находящейся внутри области D , причем когда значение индекса $m + 1$ становится больше M_0 , нужно его взять равным 1.

Получим разностную схему для значений сеточной функции в узлах, лежащих на границе области D . Пусть P_0 – такой узел, M_1 и M_2 – соседние узлы сетки, лежащие на границе слева и справа от узла P_0 соответственно (рис. 3). Рассмотрим конечный объем V_0 , границу которого L_0 составляют отрезки медиан треугольников $\Delta P_0 M_2 M_3$ и $\Delta P_0 M_3 M_1$: $C_2 m_2, m_2 C_3, C_3 m_1, m_1 C_1$, и участки границы области $C_1 P_0$ и $P_0 C_2$ (см. рис. 3).

Интегрируя уравнение (3) по этому конечному объему и переходя к формуле Грина [11] с заменой производных, получим

$$\oint_{L_0} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_{C_2}^{C_3} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} ds + \int_{C_3}^{C_1} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} ds + \int_{C_1}^{P_0} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} ds + \int_{P_0}^{C_2} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0, P_0 \in \gamma_h. \quad (11)$$

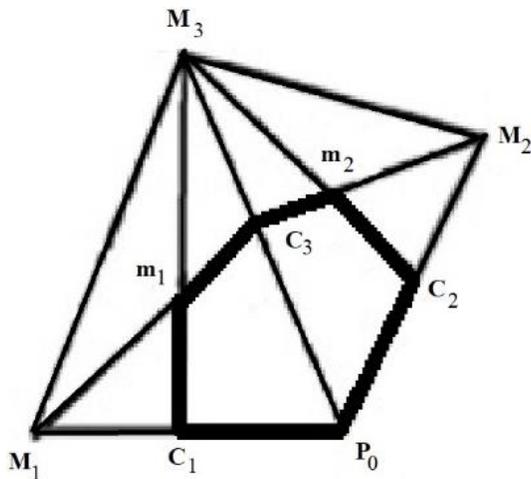


Рис. 3. Граничный конечный объем (M_1P_0 и P_0M_2 – часть границы области D)
Fig. 3. Boundary finite volume (M_1P_0 and P_0M_2 are part of the boundary of area D)

Первые два интеграла приближенно представляем, как и для внутренних конечных объемов, пользуясь линейным видом функции $v^{(m)}(x, y)$ (8). Для двух последних интегралов, которые рассматриваются вдоль границы, будем использовать принятые граничные условия (7). В случае, если отрезки M_1P_0 и / или P_0M_2 являются границей контакта с воздухом, то соответствующие интегралы равны 0. Если же эти отрезки представляют границу контакта с l -м электродом, то

$$\int_{C_1}^{P_0} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} ds = \frac{|P_0C_1|}{z_l E_l} \left(\int_{E_l} u ds + z_l I_l \right) - \frac{1}{z_l} \int_{C_1}^{P_0} u ds,$$

$$\int_{P_0}^{C_2} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} ds = \frac{|C_2P_0|}{z_l E_l} \left(\int_{E_l} u ds + z_l I_l \right) - \frac{1}{z_l} \int_{P_0}^{C_2} u ds.$$

Здесь для вычисления интегралов воспользуемся заменой подынтегральной функции сеточной $v^{(m_2)}(x, y)$ или $v^{(m_1)}(x, y)$, которые имеют линейную зависимость от x и y . Поэтому

$$\int_{C_1}^{P_0} u ds \approx \int_{C_1}^{P_0} v^{(m_1)}(s) ds = \int_{C_1}^{P_0} \left(v_{M_1} + \frac{v_{P_0} - v_{M_1}}{s_{P_0} - s_{M_1}} (s - s_{M_1}) \right) ds = |C_1P_0| \frac{v_{M_1} + 3v_{P_0}}{4}.$$

Аналогично $\int_{P_0}^{C_2} u ds \approx |P_0C_2| \left(\frac{3}{4} v_{P_0} + \frac{1}{4} v_{M_2} \right).$

Для вычисления интеграла $\int_{E_l} u ds$ по контактной поверхности всего электрода, которая образуется несколькими сторонами граничных треугольников, вос-

пользуемся формулой трапеций. В итоге получим разностную схему для граничных узлов сетки:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{M_0} \frac{\sigma_m}{4S_m} \left[v_{P_0} \left((y_{P_m} - y_{P_{m+1}})^2 + (x_{P_{m+1}} - x_{P_m})^2 \right) + \right. \\ & + v_{P_m} \left((y_{P_{m+1}} - y_{P_0}) (y_{P_m} - y_{P_{m+1}}) + (x_{P_0} - x_{P_{m+1}}) (x_{P_{m+1}} - x_{P_m}) \right) \\ & \left. + v_{P_{m+1}} \left((y_{P_0} - y_{P_m}) (y_{P_m} - y_{P_{m+1}}) + (x_{P_m} - x_{P_0}) (x_{P_{m+1}} - x_{P_m}) \right) \right] + \\ & + \frac{j_1 |C_1 P_0|}{z_l} \left(\frac{1}{2E_l} \sum_{k=1}^{K-1} (v_{N_k} + v_{N_{k+1}}) |N_k N_{k+1}| + \frac{z_l I_l}{E_l} - \frac{v_{M_1} + 3v_{P_0}}{4} \right) + \\ & + \frac{j_2 |P_0 C_2|}{z_l} \left(\frac{1}{2E_l} \sum_{k=1}^{K-1} (v_{N_k} + v_{N_{k+1}}) |N_k N_{k+1}| + \frac{z_l I_l}{E_l} - \frac{3v_{P_0} + v_{M_2}}{4} \right) = 0, \quad P_0 \in \gamma_h. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $j_1 = 1$, если $M_1 P_0 \in E_l$, иначе $j_1 = 0$; $j_2 = 1$, если $P_0 M_2 \in E_l$, иначе $j_2 = 0$; K – количество узлов сетки на электроде с номером l .

Исследование аппроксимационных свойств полученной разностной схемы (11)–(12) с помощью формулы Тейлора затруднено из-за нерегулярной структуры расчетной сетки. Устойчивость (11)–(12) может быть исследована с помощью мажоранты Гершгорина [12].

Построение расчетной сетки

В настоящее время существует ряд программ, разработанных для создания секток. Они позволяют строить вычислительные сетки для произвольно сложных геометрических объектов. В качестве примера можно указать следующие генераторы секток: Gambit, Tgrid, GMSH и т.д.

В данной работе расчетные сетки построены с помощью программы Gambit. Идея работы в Gambit заключается в том, что моделирование объекта происходит постепенно: сначала определяются точки, затем строятся линии, после чего строится сетка и определяются граничные условия. А в дальнейшем получившуюся сетку можно будет экспортировать в текстовый файл и продолжить работу с данными.

В качестве тестовой задачи ЭИТ рассмотрим смешанную граничную задачу для уравнения эллиптического типа с кусочно-постоянными коэффициентами (7) в круге единичного радиуса. Electroды полуширины $w = 0.25$ расположены при $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = 3\pi/2$.

Построим для рассматриваемой области неструктурированную треугольную расчетную сетку со сгущением на электродах с помощью сеточного генератора Gambit (рис. 4). В статье [13] проведен анализ выбора расчетной сетки. В результате сравнения четырех секток: без сгущения, со сгущением на электродах, со сгущением на границе с воздухом, со сгущением по всей границе, – был сделан вывод, что лучше использовать сетки со сгущением на электродах или, что еще лучше, со сгущением узлов ко всей границе.

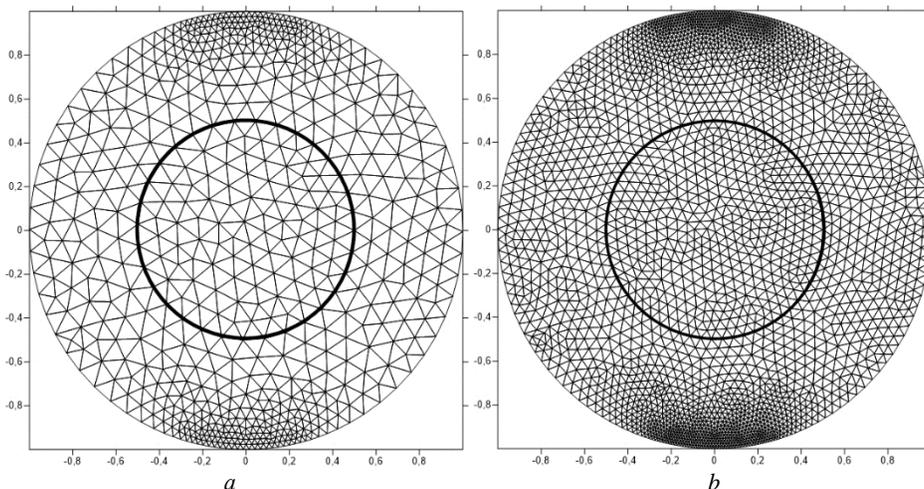


Рис. 4. Расчетная сетка: *a* – сгущение на электродах (1 256 ячеек);
b – сгущение ко всей границе области (2 804 ячейки)
Fig. 4. Calculation grid: (*a*) thickening on the electrodes (1256 cells);
(*b*) thickening to the entire boundary of the region (2804 cells)

Заметим, что граница круглой вставки радиуса $\rho < 1$ с другим значением электрической проводимости проходит через узлы сетки. Также в данной работе с целью оценки влияния на конечный результат были рассмотрены сетки, специально не подстраиваемые под границу вставки. Информация о влиянии такого способа задания электрической проводимости будет полезна при решении обратных задач ЭИТ.

Решение задачи в постановке полной электродной модели

Для решения тестовой задачи для двух электродов в постановке (7) воспользуемся разностной схемой (11)–(12). Сила тока на верхнем электроде ($\varphi = \pi/2$) равна 1 мА, на нижнем ($\varphi = 3\pi/2$) –1 мА. Сопротивление на электродах имели одинаковые значения $z_1 = z_2 = 1$. Круглая вставка радиуса $\rho = 0.5$ имеет электрическую проводимость σ_1 , а окружающее ее кольцо – σ_2 . В расчетах рассматривались следующие значения $\sigma_2/\sigma_1 = 0.01; 0.1; 1; 10; 100$. Полуширина электродов во всех случаях была неизменной $w = 0.25$, и форма электрода совпадала с частью границы круга. Для данной тестовой задачи известно приближенное аналитическое решение в виде рядов Фурье [14], поэтому выполнялось сравнение численного решения с приближенным аналитическим, в котором учитывалось 700 парных членов ряда. Численное решение разностной схемы (11)–(12) выполнялось методом Гаусса с частичным выбором главного элемента.

На рис. 5 представлены графики изменения электрического потенциала по границе круга, рассчитанные для различных отношений σ_2/σ_1 . Из рисунка видно, что наибольшее по модулю значение потенциала имеет место на электродах, причем с ростом значения отношения σ_2/σ_1 абсолютная величина потенциала

увеличивается, т.е. при уменьшении проводимости внутри области σ_1 для обеспечения одной и той же величины тока нужно увеличение значений напряжения на электродах. Визуально наибольшее абсолютное отклонение численного решения от аналитического наблюдается на электродах при $\sigma_2/\sigma_1 > 1$.

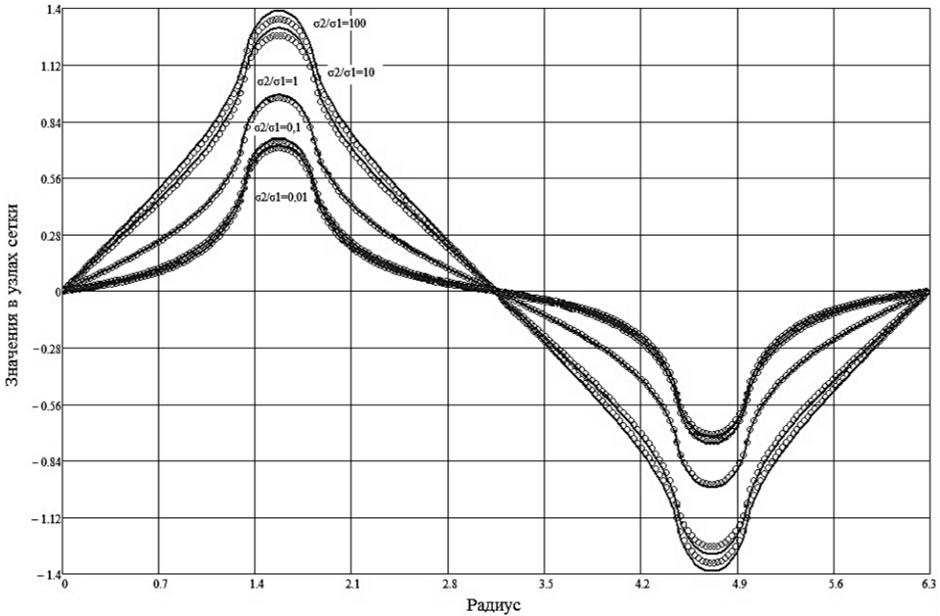


Рис. 5. Сравнение значений электрического потенциала по окружности для различных отношений σ_2/σ_1 . Значки – численный расчет в узлах сетки, сплошные линии – приближенное аналитическое решение

Fig. 5. Comparison of values of the electric potential along the circle for different ratios σ_2/σ_1 . The icons are the numerical calculation in grid nodes; the solid lines show the approximate analytical solution

Для получения объективных оценок воспользуемся величиной среднеквадратичного отклонения (RMSE), которая вычисляется по следующей формуле:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_1} (v_i - u_{an}(x_i, y_i))^2}{N_1}},$$

где N_1 – количество узлов сетки вдоль границы области.

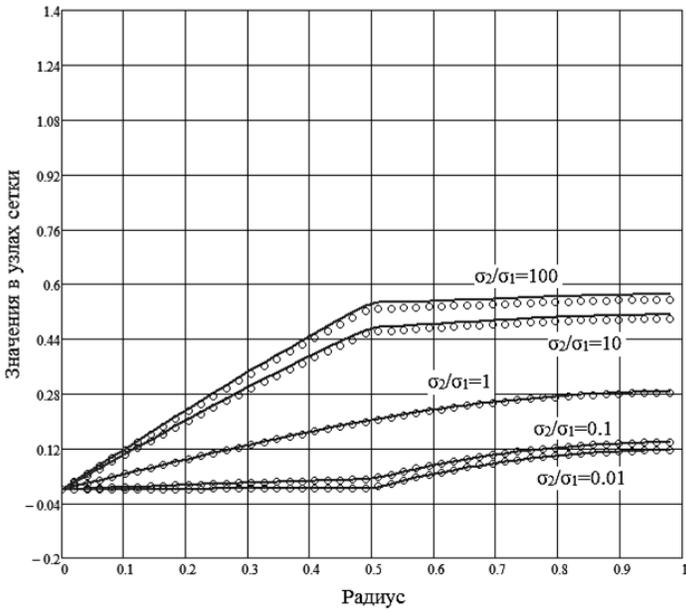
В таблице представлены рассчитанные значения RMSE для различных значений отношения электрических проводимостей σ_2/σ_1 и различных сеток: со сгущением узлов только на электродах, ко всей границе области, со специальным размещением узлов на границе круглой вставки и без (в этом случае принималось соглашение, что если центры треугольников находятся в круге радиусом ρ , то их проводимость равнялась σ_1). Кроме того, для анализа численной сходимости разностной схемы (11)–(12) использовались сетки, в которых каждый треугольник сеток рис. 4 разбивался по серединам сторон на четыре треугольника.

**Среднеквадратическое отклонение численного решения
от аналитического для разных случаев**

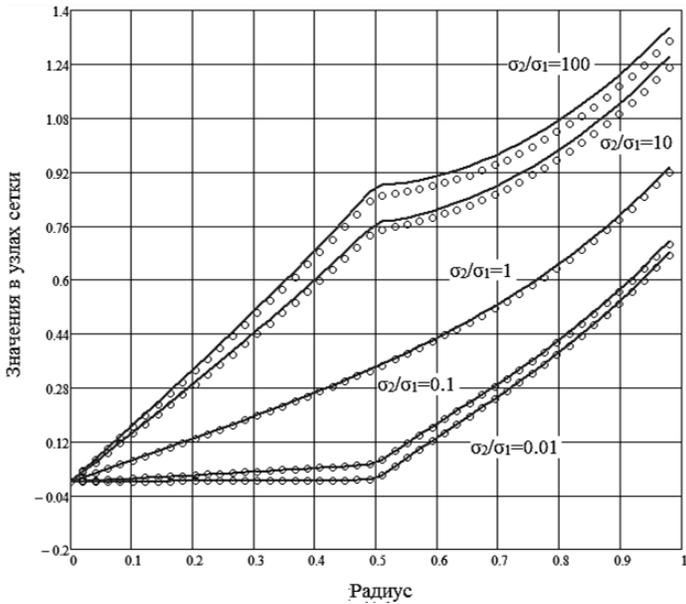
σ_2/σ_1	1	0.1	0.01	10	100
С выделением круглой вставки					
Сетка со сгущением на электродах	0.0093	0.0051	0.0048	0.0225	0.0273
Сетка со сгущением на электродах, с разбиением каждого треугольника на 4	0.0025	0.0022	0.0023	0.0078	0.01
Сетка со сгущением на всей границе	0.0065	0.0032	0.003	0.0173	0.0213
Сетка со сгущением на всей границе, с разбиением каждого треугольника на 4	<u>0.0017</u>	<u>0.0017</u>	<u>0.0017</u>	<u>0.0063</u>	<u>0.0082</u>
Без выделения круглой вставки					
Сетка со сгущением на электродах	0.0085	0.0151	0.0191	0.0136	0.0121
Сетка со сгущением на электродах, с разбиением каждого треугольника на 4	0.0025	0.0059	0.0087	<u>0.0034</u>	<u>0.004</u>
Сетка со сгущением на всей границе	0.0059	0.0088	0.0106	0.0167	0.0215
Сетка со сгущением на всей границе, с разбиением каждого треугольника на 4	<u>0.0017</u>	<u>0.0039</u>	<u>0.0057</u>	0.0057	0.0068

Анализируя представленные значения RMSE, можно заметить, что численные расчеты лучше согласуются с приближенным аналитическим решением при $\sigma_2/\sigma_1 \leq 1$, причем предпочтительнее использовать неструктурированную сетку со сгущением узлов ко всей границе, чем только к электродам. Кроме того, специальное построение сетки под имеющиеся включения с другими значениями электрической проводимости уменьшают ошибку численных расчетов. Заметим однако, что при решении обратной задачи ЭИТ границы неоднородностей по распределению $\sigma(x, y)$, как правило, неизвестны, и это, безусловно, будет вносить дополнительный шум в искомые значения электрической проводимости. Также значения RMSE из таблицы показывают, что при уменьшении размера сетки в два раза для всех рассматриваемых сеток и значений σ_2/σ_1 ошибки разностной схемы (11)–(12) уменьшаются, что свидетельствует о ее сходимости к точному решению. Быстрее всего RMSE уменьшается для однородного диска – почти в 4 раза. Это указывает, что порядок точности построенного численного метода близок ко второму.

На рис. 6 в качестве иллюстрации согласования численного и приближенного аналитического решений [14] приведены графики изменения электрического потенциала по радиусу круга при $\varphi = \pi/4$ и $\varphi = \pi/2$. Рассматривалась сетка, представленная на рис. 4, *b*. Из рисунка видно, что величина электрической проводимости вставки оказывает существенное влияние на распределение потенциала. Если в круглой вставке оно практически линейно изменяется по радиусу, то в кольце зависимость потенциала от радиуса приобретает нелинейный характер, подчеркивая влияние проводимости вставки на эту величину. Также нужно заметить, что при низких значениях электрической проводимости включений потребуются специальные усилия по измельчению сетки для повышения качества численного решения задачи.



a – в сечении $\varphi = \pi/4$



b – в сечении $\varphi = \pi/2$

Рис. 6. Сравнение значений электрического потенциала по радиусу для различных отношений σ_2/σ_1 . Значки – численный расчет в узлах сетки, сплошные линии – приближенное аналитическое решение

Fig. 6. Comparison of the values of the electric potential along the radius for different ratios σ_2/σ_1 . The icons are the numerical calculation in grid nodes; the solid lines show the approximate analytical solution

Заключение

В данной работе представлена двумерная математическая постановка для прямой задачи ЭИТ в биологическом неоднородном токопроводящем объекте с учетом сопротивления приложенных к нему электродов, используемых для подачи и съема тока и измерения напряжения. Особенностью этой математической постановки для двумерного уравнения эллиптического типа с кусочно-постоянными коэффициентами является применение интегро-дифференциального граничного условия на контактной границе электродов. Для численного решения рассматриваемой задачи разработан эффективный численный метод, опирающийся на использование неструктурированных сеток, сгущающихся к границе области исследования, метод конечных объемов для барицентрических ячеек и метод исключения Гаусса с частичным выбором главного элемента для решения сеточных уравнений. Проведенные численные расчеты для тестовой задачи – неоднородного по электрической проводимости круглого диска с двумя электродами – сравнивались с приближенным аналитическим решением. Для различных отношений коэффициентов электрической проводимости (круглой вставки и кольца) получено хорошее согласование, причем при кратном по площади уменьшении размеров конечных объемов неструктурированной сетки расхождение между численным и приближенным аналитическим решениями уменьшалось, что свидетельствует о сходимости построенной конечно-разностной схемы.

Список источников

1. Cheney M., Isaacson D., Newell J.C. Electrical Impedance Tomography // Society for Industrial and Applied Mathematics. 1999. V. 41, No. 1. P. 85–101
2. Saulnier G.J., Blue R.S., Newell J.C., Isaacson D., Edic P.M. Electrical impedance tomography // IEEE Signal Processing Magazine. 2001. V. 18, No. 6. P. 31–43 doi: 10.1109/79.962276
3. Пеккер Я.С., Бразовский К.С., Усов В.Ю. и др. Электроимпедансная томография. Томск : Изд-во НТЛ, 2004. 192 с.
4. Borcea L. Electric Impedance Tomography. Topical Review // Inverse Problems. 2002. V. 18. P. R99–R136.
5. Dong G., Zou J., Bayford R.H., Xinshan M., Shangkai G., Weili Y., Manling G. The comparison between FVM and FEM for EIT forward problem // IEEE Trans. Magnetics. 2005. V. 41, No. 5. P. 1468–1471. doi: 10.1109/tmag.2005.844558
6. Шерина Е.С., Старченко А.В. Разностные схемы на основе метода конечных объемов для задачи электроимпедансной томографии // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 3 (29). С. 25–38.
7. Li J., Yuan Y. Numerical simulation and analysis of generalized difference method on triangular networks for electrical impedance tomography // Applied Mathematical Modelling. 2009. № 33. P. 2175–2186. doi: 10.1016/j.apm.2008.05.025
8. Darbas M., Heleine J., Mendoza R., Velasco A.C. Sensitivity analysis of the complete electrode model for electrical impedance tomography // AIMS Mathematics. 2021. № 6 (7). P. 7333–7366. doi: 10.3934/math.2021431
9. Седов Л.И. Механика сплошной среды. 5-е изд., испр. М. : Наука, 1994. Т. 1. 528 с.
10. Somersalo E., Cheney M., Isaacson D. Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography // SIAM J. Appl. Math. 1992. V. 52. P. 1023–1040. doi: 10.1137/0152060
11. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Методы математической физики : учеб. пособие для вузов. 5-е изд., стереотип. М. : Наука, 1977. 735 с.

12. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы / ред. Е.Ю. Ходан, Е.В. Шикин. М. : Наука, 1977. Т. 2. 400 с.
13. Афанасьева А.А., Старченко А.В. Численное решение задачи электроимпедансной томографии // Все грани математики и механики / под ред. Л.В. Гензе. Томск, 2021. С. 17–29.
14. Старченко А.В., Седнев М.А., Панько С.В. Приближенное аналитическое решение прямой задачи электроимпедансной томографии в неоднородном круге с учетом сопротивления электродов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 74. С. 19–29. doi: 10.17223/19988621/74/3

References

1. Cheney M., Isaacson D., Newell J.C. (1999) Electrical impedance tomography. *Society for Industrial and Applied Mathematics*. 41(1). pp. 85–101.
2. Saulnier G.J., Blue R.S., Newell J.C., Isaacson D., Edic P.M. (2001) Electrical impedance tomography. *IEEE Signal Processing Magazine*. 18(6). pp. 31–43. doi: 10.1109/79.962276
3. Pekker Ya.S., Brazovsky K.S., Usov V.Yu., et al. (2004) *Elektroimpedansnaya tomografiya* [Electroimpedance Tomography]. Tomsk: NTL.
4. Borcea L. (2002) Electric impedance tomography. Topical review. *Inverse Problems*. 18. pp. R99–R136.
5. Dong G., Zou J., Bayford R.H., Xinshan M., Shangkai G., Weili Y., Manling G. (2005) The comparison between FVM and FEM for EIT forward problem. *IEEE Transactions on Magnetics*. 41(5). pp. 1468–1471. doi: 10.1109/tmag.2005.844558
6. Sherina E.S., Starchenko A.V. (2014) Difference schemes based on the finite volume method for the problem of electrical impedance tomography. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 29(3). pp. 25–38.
7. Li J., Yuan Y. (2009) Numerical simulation and analysis of generalized difference method on triangular networks for electrical impedance tomography. *Applied Mathematical Modelling*. 33. pp. 2175–2186. doi: 10.1016/j.apm.2008.05.025
8. Darbas M., Heleine J., Mendoza R., Velasco A.C. (2021) Sensitivity analysis of the complete electrode model for electrical impedance tomography. *AIMS Mathematics*. 6(7). pp. 7333–7366. doi: 10.3934/math.2021431
9. Sedov L.I. (1971) *A Course in Continuum Mechanics. Vol. 1*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
10. Somersalo E, Cheney M., Isaacson D. (1992) Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 52. pp. 1023–1040. doi: 10.1137/0152060
11. Tikhonov A.N., Samarsky A.A. (1963) *Equations of Mathematical Physics*. Oxford: Pergamon Press.
12. Krylov V.I., Bobkov V.V., Monastyrnyy P.I. (1977) *Vychislitel'nyye metody* [Computational methods]. Ed. by E. Yu. Khodan and E.V. Shikin. Moscow: Nauka.
13. Afanasyeva A.A., Starchenko A.V. (2021) Chislennoye resheniye zadachi elektroimpedansnoy tomografii [Numerical solution of the problem of electroimpedance tomography]. *Vse Grani Matematiki i Mekhaniki. Ed. by L.V. Genze*. pp. 17–29.
14. Starchenko A.V., Sednev M.A., Pan'ko S.V. // *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. (2021) Approximate analytical solution of the direct problem of electroimpedance tomography in an inhomogeneous circle taking into account the resistance of the electrodes. 74. pp. 19–29. doi: 10.17223/19988621/74/3

Сведения об авторах:

Афанасьева Анна Александровна – аспирант кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: afanaseva_anyutka@inbox.ru

Старченко Александр Васильевич – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой вычислительной математики и компьютерного моделирования Томского государственного университета, научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: starch@math.tsu.ru

Information about the authors:

Afanas'eva Anna A. (Graduate Student of Department of Computational Mathematics and Computer Modelling of National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: afanaseva_anyutka@inbox.ru

Starchenko Alexander V. (Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department of Computational Mathematics and Computer Modelling of National Research Tomsk State University, Scientific Researcher, Regional Scientific Educational Mathematical Center of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: starch@math.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 24.03.2022; принята к публикации 12.07.2022

The article was submitted 24.03.2022; accepted for publication 12.07.2022