Научная статья
УДК 514.76 MSC: 53C15, 53D10, 53C25, 53C50
doi: 10.17223/19988621/78/3

# Левоинвариантные пара-кэлеровы структуры на шестимерных нильпотентных группах Ли

**Николай Константинович Смоленцев**

*Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия, smolennk@mail.ru*

**Аннотация.** Рассматриваются левоинвариантные пара-комплексные структуры на шестимерных нильпотентных группах Ли. Получен полный перечень шестимерных нильпотентных групп Ли, которые допускают пара-кэлеровы структуры, найдены явные выражения пара-комплексных структур и исследованы свойства кривизны ассоциированных пара-кэлеровых метрик. Показано, что паракомплексные структуры являются нильпотентными, а соответствующие пара-кэлеровы метрики являются Риччи-плоскими.
**Ключевые слова:** шестимерные нильпотентные группы Ли, симплектические группы Ли, пара-комплексные структуры, левоинвариантные паракэлеровы структуры

**Для цитирования:** Смоленцев Н.К. Левоинвариантные пара-кэлеровы структуры на шестимерных нильпотентных группах Ли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 78. С. 38–48. doi: 10.17223/19988621/78/3

Original article

# Left-invariant para-Kähler structures on six-dimensional nilpotent Lie groups

**Nikolay K. Smolentsev**

*Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation, smolennk@mail.ru*

**Abstract.** As is known, nilpotent Lie groups, except for the Abelian case, do not admit left-invariant positive definite Kähler metrics. However, pseudo-Kähler structures can exist. In the six-dimensional case, it is known that 13 classes of noncommutative nilpotent Lie groups admit pseudo-Kähler structures. Recently, para-complex and para-Kähler structures are of great interest. Therefore, the question of invariant para-Kähler structures on six-dimensional nilpotent Lie groups is natural. Since a left-invariant tensor is determined by its value on the Lie algebra **g**, a left-invariant para-Kähler structure on a Lie group is a triple ($\omega$, $J$, $g$) consisting of a symplectic form $\omega$, an integrable almost para-complex structure $J$, and a pseudo-Riemannian metric $g$ on the Lie algebra **g**. In this case, the consistency conditions are satisfied: $\omega(JX, JY) = -\omega(X, Y)$ and $g(X, Y) = \omega(X, JY)$. Note also that $g(JX, JY) = -g(X, Y)$. The integrability condition for $J$ at the level of Lie

algebras has the form: $N_J(X, Y) = [X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] = 0$ for any $X, Y \in \mathbf{g}$. It follows from the integrability condition for $J$ that the ±1-eigensubspaces $\mathbf{g}^+$ and $\mathbf{g}^-$ of the operator $J$ are subalgebras. Then the para-Kähler Lie algebra $\mathbf{g}$ can be represented as the direct sum of two isotropic subalgebras: $\mathbf{g} = \mathbf{g}^+ \oplus \mathbf{g}^-$.
In this paper, we consider para-Kähler structures on six-dimensional nilpotent Lie algebras. A complete list of 15 classes of non-commutative six-dimensional nilpotent Lie algebras that admit para-Kähler structures is obtained. Explicit expressions for the para-complex structures $J$ are found, and the curvature properties of the associated para-Kähler metrics are investigated. It is shown that para-complex structures are nilpotent, and the corresponding para-Kähler metrics are Ricci-flat.
**Keywords:** six-dimensional nilpotent Lie groups, symplectic Lie groups, para-complex structures, left-invariant para-Kähler structures

**For citation:** Smolentsev, N.K. (2022) Left-invariant para-Kähler structures on six-dimensional nilpotent Lie groups. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 78. pp. 38–48. doi: 10.17223/19988621/78/3

## Введение

Как известно [1], нильпотентные группы Ли, за исключением абелевого случая, не допускают левоинвариантных положительно определенных кэлеровых метрик. Однако псевдокэлеровы структуры могут существовать. В работе [2] получен полный список из 13 классов некоммутативных шестимерных нильпотентных групп Ли, допускающих псевдокэлеровы структуры. В работе [3] проведено более полное исследование указанных выше классов шестимерных псевдокэлеровых нильпотентных групп Ли. В последнее время большой интерес вызывают пара-комплексные и пара-кэлеровы структуры. Поэтому естественным является вопрос об инвариантных пара-кэлеровых структурах на шестимерных нильпотентных группах Ли. В данной статье будет показано, что 15 классов некоммутативных шестимерных нильпотентных групп Ли допускают пара-кэлеровы структуры.

Напомним основные понятия и факты, которые будут использованы в работе.

Почти пара-комплексной структурой на $2n$-мерном многообразии $M$ называется поле $J$ эндоморфизмов $J$: $TM \to TM$, такое, что $J^2 = Id$, причем ранги собственных распределений $T^{\pm}M := \ker(Id \mp J)$ равны. Почти пара-комплексная структура $J$ называется *интегрируемой*, если распределения $T^{\pm}M$ инволютивны. В этом случае $J$ называется *пара-комплексной структурой*. Тензор Нийенхейса $N$ почти пара-комплексной структуры $J$ определяется равенством $N_J(X, Y) = [X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY]$ для любых векторных полей $X$, $Y$ на $M$. Как и в комплексном случае, пара-комплексная структура $J$ интегрируема тогда и только тогда, когда $N_J = 0$.

*Пара-кэлерово многообразие* можно определить как симплектическое многообразие $(M, \omega)$ с согласованной пара-комплексной структурой $J$, т.е. такой, что $\omega(JX, JY) = -\omega(X, Y)$. В этом случае на $M$ определена метрика $g(X, Y) = \omega(X, JY)$, которая является псевдоримановой нейтральной сигнатуры. Отметим, что $g(JX, JY) = -g(X, Y)$. В работе [4] представлен обзор теории пара-комплексных структур и рассмотрены инвариантные пара-комплексные и пара-кэлеровы структуры на однородных пространствах.

Отметим, что термин «пара-кэлерово» многообразие употребляется также в другом смысле. А. Грей в работе [5] заметил, что замечательные геометрические и топологические свойства кэлеровых многообразий в большой степени объясняются тем, что тензор кривизны $R$ удовлетворяет специальному тождеству Кэлера: $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(X, Y)JZ, JW)$ для любых векторных полей $X, Y, Z, W$, где $J$ – тензор комплексной структуры, согласованный с римановой метрикой $g$. Однако класс многообразий, обладающих указанным свойством, несколько шире. В работе Рицы [6] 1974 г. почти эрмитовы многообразия, удовлетворяющие тождеству Кэлера, названы паракэлеровыми многообразиями. Имеется множество работ, посвященных изучению таких паракэлеровых многообразий (см. напр.; [7, 8]), где можно найти также ссылки на классические и более современные публикации.

В данной работе паракэлеровы многообразия рассматриваются с точки зрения паракомплексной геометрии, которая была введена Либерманом [9] в 1952 г. по аналогии с комплексной геометрией. Более подробно о такой паракэлеровой геометрии см. в обзоре [4]. Отметим для сравнения, что такие пара-кэлеровы многообразия удовлетворяют следующему тождеству: $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)JZ, JW)$, где $J$ – тензор пара-комплексной структуры, согласованный с псевдо-римановой метрикой $g$ [4].

Мы будем рассматривать левоинвариантные (почти) пара-комплексные структуры на группе Ли $G$, которые задаются левоинвариантным полем эндоморфизмов $J$: $TG \to TG$ касательного расслоения $TG$. Поскольку такой тензор $J$ определяется линейным оператором на алгебре Ли $\mathbf{g} = T_eG$, то мы будем говорить, что $J$ – это инвариантная почти пара-комплексная структура на алгебре Ли $\mathbf{g}$. В этом случае условие интегрируемости $J$ также формулируется на уровне алгебры Ли: $N_J(X, Y) = [X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] = 0$, для любых $X, Y \in \mathbf{g}$. Из условия интегрируемости $J$ следует, что собственные подпространства $\mathbf{g}^+$ и $\mathbf{g}^-$ оператора $J$ являются подалгебрами. Поэтому пара-комплексная алгебра Ли $\mathbf{g}$ может быть представлена в виде прямой суммы двух подалгебр:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}^+ \oplus \mathbf{g}^-.$$

Если на алгебре Ли $\mathbf{g}$ задана пара-комплексная структура $J$, то для элемента $Z$ центра $\mathrm{Z}(\mathbf{g})$ вектор $JZ$ может не быть центральным, но из условия интегрируемости сразу следует, что $ad_{JZ}$ коммутирует с $J$:

$$[JZ, JX] = J[JZ, X], \quad ad_{JZ} \cdot J = J \cdot ad_{JZ}.$$

Левоинвариантная симплектическая структура $\omega$ на группе Ли $G$ задается 2-формой максимального ранга на алгебре Ли $\mathbf{g}$. Замкнутость формы $\omega$ эквивалентна условию $\omega([X,Y], Z) - \omega([X, Z], Y) + \omega([Y, Z], X) = 0$, $\forall X, Y, Z \in \mathbf{g}$. В этом случае алгебру Ли $\mathbf{g}$ будем называть симплектической.

Напомним, что подпространство $W \subset \mathbf{g}$ называется $\omega$-изотропным если и только если $\omega(W, W) = 0$, и $W$ называется $\omega$-лагранжевым, если оно $\omega$-изотропно и из $\omega(W, u) = 0$ следует, что $u \in W$. Подпространства $U, V \subset W$ симплектического пространства $(W, \omega)$ будем называть $\omega$-дуальными, если для любого вектора $u \in U$ существует вектор $v \in V$ такой, что $\omega(u, v) \neq 0$, и наоборот, $\forall v \in V$, $\exists u \in U$, $\omega(u, v) \neq 0$.

Левоинвариантная пара-кэлерова структура на группе Ли задается парой $(\omega, J)$, состоящей из симплектической формы $\omega$ на $\mathbf{g}$ и *согласованной* с $\omega$ пара-комплексной структуры $J$ на $\mathbf{g}$, т.е. такой, что $\omega(JX, JY) = -\omega(X, Y)$. Согласованная пара $(\omega, J)$ определяет на $\mathbf{g}$ пара-кэлерову псевдориманову метрику $g(X, Y) = \omega(X, JY)$.

При этом подалгебры $\mathbf{g}^+$ и $\mathbf{g}^-$ являются изотропными для метрики $g$ и ω-лагранжевыми.

Нижний центральный ряд алгебры Ли $\mathbf{g}$ есть убывающая последовательность идеалов $C^0\mathbf{g}$, $C^1\mathbf{g}$, ..., определенная индуктивно: $C^0\mathbf{g} = \mathbf{g}$, $C^{k+1}\mathbf{g} = [\mathbf{g}, C^k\mathbf{g}]$. Алгебра Ли $\mathbf{g}$ называется нильпотентной, если $C^k\mathbf{g} = 0$ для некоторого $k$. Для нильпотентной алгебры Ли определена также возрастающая центральная последовательность идеалов $\{\mathbf{g}_k\}$, $\mathbf{g}_0 = \{0\} \subset \mathbf{g}_1 \subset \mathbf{g}_2 \subset \ldots \subset \mathbf{g}_{s-1} \subset \mathbf{g}_s = \mathbf{g}$, где идеалы $\mathbf{g}_k$ определены индуктивно по правилу

$$\mathbf{g}_k = \{X \in \mathbf{g} \mid [X, \mathbf{g}] \subseteq \mathbf{g}_{k-1}\},\ k \geq 1.$$

В частности, $\mathbf{g}_1 = \mathrm{Z}(\mathbf{g})$ – это центр алгебры Ли. Кроме того, первый производный идеал $C^1\mathbf{g}$ входит в идеал $\mathbf{g}_{s-1}$.

Для заданной почти пара-комплексной структуры $J$ определенные выше идеалы $\{\mathbf{g}_k\}$, вообще говоря, не являются $J$-инвариантными. Можно определить возрастающую последовательность $J$-инвариантных идеалов $\mathbf{a}_k(J)$ следующим образом:

$$\mathbf{a}_0(J) = \{0\},\ \mathbf{a}_k(J) = \{X \in \mathbf{g} \mid [X, \mathbf{g}] \subseteq \mathbf{a}_{k-1}(J) \text{ и } [JX, \mathbf{g}] \subseteq \mathbf{a}_{k-1}(J)\},\ k \geq 1.$$

Ясно, что $\mathbf{a}_k(J) \subseteq \mathbf{g}_k$ для $k \geq 1$. Очевидно, что идеал $\mathbf{a}_1(J)$ лежит в центре $\mathrm{Z}(\mathbf{g}) = \mathbf{g}_1$ алгебры Ли $\mathbf{g}$.

**Определение 1**. *Левоинвариантная почти пара-комплексная структура J называется нильпотентной, если для последовательности идеалов* $\{\mathbf{a}_k(J)\}$ *существует номер p такой, что* $\mathbf{a}_p(J) = \mathbf{g}$.

Пусть ∇ – связность Леви−Чивита, соответствующая псевдоримановой метрике $g$. Она определяется из шестичленной формулы [10], которая для левоинвариантных векторных полей $X$, $Y$, $Z$ на группе Ли принимает вид:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) + g([Z,Y],X).$$

Напомним, что тензор кривизны $R(X, Y)$ определяются формулой

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]},$$

а тензор Риччи $Ric$ – это свертка тенора кривизны по первому нижнему и верхнему индексам, $Ric_{jk} = R^i_{ijk}$. Метрика $g$ называется Риччи-плоской, если $Ric \equiv 0$.

## 1 Левоинвариантные симплектические и пара-кэлеровы структуры на алгебрах Ли

Пусть $\mathbf{g}$ – алгебра Ли, на которой заданы симплектическая форма ω, почти пара-комплексная структура $J$, согласованная с ω, и псевдориманова метрика $g(X, Y) = \omega(X, JY)$. Приведем несколько простых фактов относительно первого производного идеала $C^1(\mathbf{g})$, центра $\mathrm{Z}(\mathbf{g})$ алгебры Ли $\mathbf{g}$ и идеалов $\{\mathbf{g}_k\}$ и $\{\mathbf{a}_k(J)\}$.

**Предложение 1**. *Для любой симплектической формы* ω *на* $\mathbf{g}$ *выполняется равенство* $\omega(C^1(\mathbf{g}), \mathrm{Z}(\mathbf{g})) = 0$.

*Доказательство*. Сразу следует из формулы $d\omega(X, Y, Z) = \omega([X, Y], Z) - \omega([X, Z], Y) + \omega([Y, Z], X) = \omega([X, Y], Z) = 0$, $\forall X, Y, Z \in \mathbf{g}$.

**Предложение 2**. *Для любой симплектической формы* ω *на* $\mathbf{g}$ *и согласованной с ней почти пара-комплексной структуры J выполняется равенство* $\omega(C^1\mathbf{g} \oplus J(C^1\mathbf{g}), \mathbf{a}_1(J)) = 0$.

*Доказательство*. Поскольку $\mathbf{a}_1(J)$ лежит в центре $\mathrm{Z}(\mathbf{g})$, то $\omega(C^1(\mathbf{g}), \mathbf{a}_1(J)) = 0$. Равенство $\omega(J(C^1\mathbf{g}), \mathbf{a}_1(J)) = 0$ следует из $J$-инвариантности $\mathbf{a}_1(J)$ и формулы $\omega(JX, JY) = -\omega(X, Y)$.

**Следствие 1**. *Для любой почти пара-кэлеровой структуры* $(\mathbf{g}, \omega, g, J)$ *идеал* $\mathbf{a}_1(J) \subset \mathbf{g}_1$ *ортогонален подпространству* $C^1\mathbf{g} \oplus J(C^1\mathbf{g})$: $g(C^1\mathbf{g} \oplus J(C^1\mathbf{g}), \mathbf{a}_1(J)) = 0$.

**Предложение 3**. *Для любой нильпотентной почти пара-кэлеровой структуры* $J$ *идеал* $\mathbf{a}_{p-1}(J)$ *содержит* $C^1\mathbf{g} \oplus J(C^1\mathbf{g})$.

*Доказательство*. Поскольку $\mathbf{g}_p = \{X \in \mathbf{g} \mid [X, \mathbf{g}] \subseteq \mathbf{a}_{p-1}(J)$ и $[JX, \mathbf{g}] \subseteq \mathbf{a}_{p-1}(J)\} = \mathbf{g}$, то $C^1\mathbf{g} \subset \mathbf{a}_{p-1}(J)$. Поэтому $J(C^1\mathbf{g}) \subset J(\mathbf{a}_{p-1}(J)) = \mathbf{a}_{p-1}(J)$.

**Предложение 4**. *Для любой левоинвариантной (псевдо)римановой структуры* $g$ *на алгебре Ли* $\mathbf{g}$ *имеют место следующие свойства*:

1. *Если вектор* $X$ *лежит в центре алгебры Ли, то* $\nabla_X Y = \nabla_Y X$, $\forall Y \in \mathbf{g}$.
2. *Если векторы* $X$ *и* $Y$ *лежат в центре алгебры Ли, то* $\nabla_X Y = 0$.

*Доказательство*. Следует из формулы $2g(\nabla_X Y, Z) = g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g(X, [Z, Y])$ для ковариантной производной $\nabla$ на группе Ли. Действительно, если вектор $X$ лежит в центре алгебры Ли, то $2g(\nabla_X Y, Z) = g(X, [Z, Y])$ и $2g(\nabla_Y X, Z) = g([Y, X], Z) + g([Z, Y], X) + g(Y, [Z, X]) = g([Z, Y], X)$, $\forall Z \in \mathbf{g}$.

**Следствие 2.** *Если векторы* $X$, $Y$ *и* $Z$ *лежат в центре алгебры Ли, то* $R(X, Y)Z = 0$.

Пусть $J$ – нильпотентная почти пара-комплексная структура на нильпотентной алгебре Ли $\mathbf{g}$, и $\mathbf{a}_0 = \{0\} \subset \mathbf{a}_1(J) \subset \ldots \subset \mathbf{a}_{p-1}(J) \subset \mathbf{a}_p(J) = \mathbf{g}$ – соответствующая последовательность идеалов. Заметим, что хотя идеалы $\mathbf{a}_k(J)$ являются $J$-инвариантными, они не обязаны быть четномерными.

**Предложение 5**. *Если вектор* $X$ *лежит в идеале* $\mathbf{a}_1(J) \subset \mathrm{Z}(\mathbf{g})$ *алгебры Ли, то* $\nabla_X Y = \nabla_Y X = 0$, $\forall Y \in \mathbf{g}$.

*Доказательство*. Пусть $X \in \mathbf{a}_1(J) \subset \mathbf{g}_1 = \mathrm{Z}(\mathbf{g})$ и $Z, Y \in \mathbf{g}$. Тогда из формулы ковариантной производной и из следствия 1 вытекает, что $2g(\nabla_X Y, Z) = g(X, [Z, Y]) = 0$.

**Следствие 3.** *Если вектор* $X$ *лежит в идеале* $\mathbf{a}_1(J) \subset \mathbf{g}_1$ *алгебры Ли, то* $R(X, Y)Z = R(Z, Y)X = 0$, $\forall Y, Z \in \mathbf{g}$.

*Доказательство*. Следует из $\nabla_X Y = \nabla_Y X = 0$, $\forall Y \in \mathbf{g}$ и формул $R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z$ и $R(Z, Y)X = \nabla_Z(\nabla_Y X) - \nabla_Y(\nabla_Z X) - \nabla_{[Z,Y]}X$.

## 2. Левоинвариантные пара-кэлеровы структуры на шестимерных нильпотентных алгебрах Ли

Классификационный список шестимерных симплектических нильпотентных алгебр Ли представлен в работе [11]. Многие алгебры Ли данного списка имеют возрастающую последовательность идеалов $\mathrm{Z}(\mathbf{g}) = \mathbf{g}_1 \subset \mathbf{g}_2 \subset \mathbf{g}_3 = \mathbf{g}$ размерностей 2, 4 и 6 (будем говорить, что такая алгебра Ли имеет тип (2, 4, 6)). Выберем дополнение $A$ к $\mathbf{g}_2$ и дополнение $B$ к $\mathrm{Z}(\mathbf{g})$ в $\mathbf{g}_2$. Тогда такую алгебру Ли можно представить в виде прямой суммы двумерных подпространств:

$$\mathbf{g} = A \oplus B \oplus \mathrm{Z}(\mathbf{g}).$$

Из определения идеалов $\mathbf{g}_3 = \{X \in \mathbf{g} \mid [X, \mathbf{g}] \subseteq \mathbf{g}_2\} = \mathbf{g}$ и $\mathbf{g}_2 = \{X \in \mathbf{g} \mid [X, \mathbf{g}] \subseteq \mathrm{Z}(\mathbf{g})\}$ сразу следует, что дополнительные подпространства $A$ и $B$ обладают свойствами:

$$[A, A] \subset \mathbf{g}_2 = B \oplus \mathrm{Z}(\mathbf{g}), \quad [A, B] \subset \mathrm{Z}(\mathbf{g}).$$

Например, для алгебры $\mathbf{G}_{21}$ списка работы [11] со скобками Ли $[e_1, e_2] = e_4$, $[e_1, e_4] = e_6$, $[e_2, e_3] = e_6$ мы имеем: $\mathrm{Z}(\mathbf{g}) = \mathbf{R}\{e_5, e_6\}$, $\mathbf{g}_2 = \mathbf{R}\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$, $\mathbf{g}_3 = \mathbf{g}$. Тогда в качестве подпространств $A$ и $B$ можно выбрать: $B = \mathbf{R}\{e_3, e_4\}$ и $A = \mathbf{R}\{e_1, e_2\}$.

Симплектические структуры классификационного списка работы [11] показывают, что для алгебр типа (2, 4, 6) дополнительные подпространств $A$ и $B$ можно выбрать так, что на подпространстве $B$ симплектическая форма $\omega$ невырождена, а подпространства $A$ и $Z(\mathbf{g})$ являются ω-изотропными и ω-дуальными. Для алгебр Ли других типов вместо $Z(\mathbf{g})$ необходимо выбрать двумерное подпространство $C \subset Z(\mathbf{g})$.

**Теорема 1**. *Пусть шестимерная симплектическая алгебра Ли* $(\mathbf{g}, \omega)$ *имеет разложение в виде прямой суммы двумерных подпространств*

$$\mathbf{g} = A \oplus B \oplus C,$$

*где* $C \subset Z(\mathbf{g})$, $[A, A] \subset B \oplus C$ *и* $[A, B] \subset C$. *Предположим, что* $B \oplus C$ *является абелевой подалгеброй, подпространства* $A$ *и* $C$ *–* ω*-изотропны и* ω*-дуальны, на подпространстве* $B$ *форма* ω *невырождена и* $\omega(B \oplus C, C) = 0$. *Тогда для любой согласованной с* ω *нильпотентной почти пара-комплексной структуры* $J$, *для которой подпространства* $B$ *и* $C$ *инвариантны, для связности Леви–Чивита* $\nabla$ *соответствующей псевдоримановой метрики* $g_J$ *имеют место свойства*:

1. $\nabla_X Y \in B \oplus C, \quad \forall X, Y \in \mathbf{g}$,
2. $\nabla_X Y, \nabla_Y X \in C, \quad \forall X \in \mathbf{g}, \forall Y \in B \oplus C$,
3. $\nabla_X Y = 0, \quad \forall X, Y \in B \oplus C$.

*Доказательство*. Свойство 1. Пусть $X, Y \in \mathbf{g}$. Тогда $[X, Y] \in B \oplus C$. Предположим, что $\nabla_X Y$ не лежит в $B \oplus C$, т.е. имеет ненулевую компоненту из $A$. Тогда существует вектор $Z \in C \subset Z(\mathbf{g})$, такой что $\omega(\nabla_X Y, JZ) \neq 0$. В то же время $2\omega(\nabla_X Y, JZ) = 2g(\nabla_X Y, Z) = g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X) = g([X, Y], Z) = \omega([X, Y], JZ) = 0$. Последнее равенство следует из свойства $\omega(B \oplus C, C) = 0$.

Свойство 2. Пусть теперь $X \in \mathbf{g}$ и $Y \in B \oplus C$. Тогда $\nabla_X Y$ лежит в $B \oplus C$. Предположим, что $\nabla_X Y$ не лежит в $C$, т.е. имеет ненулевую компоненту из $B$. Тогда из условия невырожденности формы ω на $B$ и равенства $\omega(B \oplus C, C) = 0$ следует, что существует вектор $Z \in B$, такой что $JZ \in B$ и $\omega(\nabla_X Y, JZ) \neq 0$. В то же время, учитывая коммутативность $B \oplus C$ и включение $[A, B] \subset C \subset \mathbf{a}_1(J) \subset Z(\mathbf{g})$, имеем: $2\omega(\nabla_X Y, JZ) = 2g(\nabla_X Y, Z) = g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Z,Y], X) = g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) = \omega([X, Y], JZ) + \omega([Z, X], JY) = 0$. Последнее равенство следует из того, что $JY, JZ \in B \oplus C$, $[X, Y], [Z, X] \in C$ и $\omega(B \oplus C, C) = 0$. Таким образом, $\nabla_X Y \in C$. Включение $\nabla_Y X \in C$ следует из формулы $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

Свойство 3. Пусть $X, Y \in B \oplus C$. Тогда для любого $Z \in \mathbf{g}$ совершенно аналогично выполняется: $2g(\nabla_X Y, Z) = g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X) = \omega([Z, X], JY) + \omega([Z, Y], JX) = 0$.

**Следствие 4**. *В предположениях теоремы 1 если вектор* $X$ *лежит в подпространстве* $B \oplus C$, *то имеют место следующие равенства:* $R(X, Y)Z = R(Y, X)Z = R(Z, Y)X = 0$ *для любых* $Y, Z \in \mathbf{g}$.

*Доказательство*. Пусть $X \in B \oplus C$ и пусть $Y, Z \in \mathbf{g}$. В формуле $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$ мы имеем $[X, Y] \in C \subset \mathbf{a}_1(J)$, поэтому по предложению 5 $\nabla_{[X,Y]} Z = 0$. Далее, $\nabla_Y Z \in B \oplus C$, поэтому $\nabla_X \nabla_Y Z = 0$ – по свойству 3 теоремы. По свойству 2 теоремы имеем: $\nabla_X Z \in C \subset \mathbf{a}_1(J) \subset Z(\mathbf{g})$. Тогда $\nabla_Y \nabla_X Z = 0$ по предложению 5.

Пусть $X \in B \oplus C$ и $R(Z, Y)X = \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_{[Z,Y]} X$. Мы имеем $[Z, Y] \in B \oplus C$, поэтому $\nabla_{[Z,Y]} X = 0$. Поскольку $\nabla_Y X \in C \subset \mathbf{a}_1(J) \subset Z(\mathbf{g})$, то $\nabla_Z \nabla_Y X = 0$ по предложению 5. Аналогично $\nabla_Y \nabla_Z X = 0$. Поэтому $R(Z, Y)X = 0$.

Выберем базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ алгебры Ли $\mathbf{g}$, адаптированные к разложению $\mathbf{g} = A \oplus B \oplus C$, т.е. такой, что $A = \mathbf{R}\{e_1, e_2\}$, $B = \mathbf{R}\{e_3, e_4\}$ и $C = \mathbf{R}\{e_5, e_6\}$.

**Следствие 5**. *В предположениях теоремы 1 для любых $X$, $Y$, $Z \in \mathbf{g}$ выполняется включение $R(X, Y)Z \in C \subset Z(\mathbf{g})$. В адаптированном к разложению $\mathbf{g} = A \oplus B \oplus C$ базисе тензор кривизны может иметь с точностью до симметрий только четыре ненулевые компоненты: $R^5_{1,2,1}$, $R^6_{1,2,1}$, $R^5_{1,2,2}$, $R^6_{1,2,2}$. В частности, тензор Риччи равен нулю.*

*Доказательство*. Пусть $X, Y, Z \in \mathbf{g}$. В формуле $R(X, Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$ мы имеем $[X, Y] \in B \oplus C$, поэтому $\nabla_{[X,Y]}Z \in C$. Далее, $\nabla_Y Z \in B \oplus C$, поэтому $\nabla_X\nabla_Y Z \in C$. Аналогично $\nabla_Y\nabla_Z X \in C$. Таким образом, $R(X, Y)Z \in C$. Утверждение о ненулевых компонентах вытекает из следствия 4.

Рассмотрим вопрос о том, какие из алгебр Ли классификационного списка работы [11] допускают согласованные пара-комплексные структуры $(\omega, J)$. Результаты представлены в таблице приведенной ниже теоремы 2. У каждой алгебры Ли таблицы указан ее номер из списка симплектических алгебр Ли работы [11]. Для каждой симплектической алгебры Ли $(\mathbf{g}, \omega)$ этой таблицы существуют многопараметрические семейства пара-комплексных структур $J$, согласованных с $\omega$. В таблице теоремы 2 приведена одна из них, наиболее простая $J$, которая представлена в блочном виде в базисе $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ алгебры Ли и в соответствии с разложением $\mathbf{g} = \mathbf{R}\{e_1, e_2\} \oplus \mathbf{R}\{e_3, e_4\} \oplus \mathbf{R}\{e_5, e_6\}$. Символом $R$ обозначен тензор Римана. Дуальный базис обозначен символами $\{e^1, ..., e^6\}$.

**Теорема 2**. *Шестимерная нильпотентная некоммутативная алгебра Ли допускает пара-кэлерову структуру $(J, \omega)$ тогда и только тогда, когда она симплекто-изоморфна одной из алгебр представленной ниже таблицы. Допустимые пара-комплексные структуры $J$ являются нильпотентными, а соответствующие псевдоримановы метрики Риччи – плоскими.*

**Пара-кэлеровы шестимерные нильпотентные алгебры Ли**

| | Алгебра Ли | Симплектическая форма | Пара-комплексная структура |
|---|---|---|---|
| **G6** | $[e_1, e_2] = e_3$,<br>$[e_1, e_3] = e_4$,<br>$[e_1, e_4] = e_5$,<br>$[e_2, e_3] = e_6$ | $e^1\wedge e^6 + e^2\wedge e^4 +$<br>$+ e^2\wedge e^5 - e^3\wedge e^4$ | $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $R \neq 0$ |
| **G10** | $[e_1, e_2] = e_4$,<br>$[e_1, e_4] = e_5$,<br>$[e_1, e_3] = e_6$,<br>$[e_2, e_4] = e_6$ | $e^1\wedge e^6 + e^2\wedge e^5 -$<br>$- e^3\wedge e^4 - e^2\wedge e^6$ | $J = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\dfrac{a(a+2)}{2(a+1)} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -a-2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $R \neq 0$ при $a \neq 0$ |
| **G11** | $[e_1, e_2] = e_4$,<br>$[e_1, e_4] = e_5$,<br>$[e_2, e_3] = e_6$,<br>$[e_2, e_4] = e_6$ | $e^1\wedge e^6 + e^2\wedge e^5 -$<br>$- e^3\wedge e^4 + \lambda e^2\wedge e^6$ | $J = \begin{pmatrix} -1 & -2\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R \neq 0$ при $a \neq 1$ |
| **G12** | $[e_1, e_2] = e_4$,<br>$[e_1, e_4] = e_5$,<br>$[e_2, e_3] = -e_5$<br>$[e_1, e_3] = e_6$,<br>$[e_2, e_4] = e_6$ | $-e^1\wedge e^5 + \lambda e^2\wedge e^6 +$<br>$+ (\lambda - 1)e^3\wedge e^4$ | $J = \begin{pmatrix} 0 & \lambda a \\ \dfrac{1}{\lambda a} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\lambda a^2 - 1}{a(\lambda+1)} \\ \dfrac{a(\lambda+1)}{\lambda a^2 - 1} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{a} \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $R \neq 0$ |

Продолжение таблицы

| | Алгебра Ли | Симплектическая форма | Пара-комплексная структура |
|---|---|---|---|
| **G13** | $[e_1, e_2] = e_4$,<br>$[e_1, e_3] = e_5$,<br>$[e_1, e_4] = e_6$,<br>$[e_2, e_3] = e_6$ | $e^1\wedge e^6 + \lambda e^2\wedge e^5 +$<br>$+ (\lambda - 1)\, e^3\wedge e^4$,<br>$\lambda \neq 0$ и 1<br>$e^1\wedge e^6 + e^2\wedge e^4 +$<br>$+ \frac{1}{2}\, e^2\wedge e^5 - \frac{1}{2}\, e^3\wedge e^4$ | $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a(\lambda+1) & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda a & -1 \end{pmatrix}$,<br>$R_1 = 0$,<br>$J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $R_2 \neq 0$ |
| **G14** | $[e_1, e_2] = e_4$,<br>$[e_1, e_3] = e_5$,<br>$[e_1, e_4] = e_6$ | $e^1\wedge e^6 + e^2\wedge e^5 + e^3\wedge e^4$ | $J = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2-1}{b} & -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & -b \\ \frac{a^2-1}{b} & -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & -b \\ \frac{a^2-1}{b} & -a \end{pmatrix}$,<br>$R = 0$ |
| **G15** | $[e_1, e_2] = e_4$,<br>$[e_2, e_3] = e_5$,<br>$[e_1, e_4] = e_6$ | $-e^1\wedge e^5 + e^1\wedge e^6 +$<br>$+ e^2\wedge e^5 +$ | $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a(a-2)}{2} & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2-a & -1 \end{pmatrix}$, $R \neq 0$ |
| **G16** | $[e_1, e_2] = e_5$,<br>$[e_3, e_4] = -e_5$,<br>$[e_1, e_3] = e_6$,<br>$[e_2, e_4] = e_6$ | $e^1\wedge e^6 + e^2\wedge e^3 - e^4\wedge e^5$ | $J = e_1 \otimes e^1 - e_2 \otimes e^2 + e_3 \otimes e^3 - e_4 \otimes e^4 + e_5 \otimes e^5 -$<br>$-e_6 \otimes e^6 + \frac{4-a^2}{2a} e_2 \otimes e^3 + a e_4 \otimes e^1 + a e_6 \otimes e^5$,<br>$R \neq 0$ |
| **G17** | $[e_1, e_3] = e_5$,<br>$[e_1, e_4] = e_6$,<br>$[e_2, e_3] = e_6$ | $e^1\wedge e^6 + e^2\wedge e^5 + e^3\wedge e^4$ | $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a-1}{b} & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 0 \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a-1}{b} & -1 \end{pmatrix}$,<br>$R = 0$ |
| **G18** | $[e_1, e_2] = e_4$,<br>$[e_1, e_3] = e_5$,<br>$[e_2, e_3] = e_6$ | $\omega_1 = e^1\wedge e^6 + \lambda e^2\wedge e^5 +$<br>$+ (\lambda-1)\, e^3\wedge e^4$,<br>$\lambda \neq 0$ и 1<br>$\omega_2 = e^1\wedge e^5 + \lambda e^1\wedge e^6 -$<br>$- \lambda e^2\wedge e^5 + e^2\wedge e^6 -$<br>$-2\lambda e^3\wedge e^4$, $\lambda \neq 0$<br>$\omega_3 = -e^1\wedge e^6 + e^2\wedge e^5 +$<br>$+ 2e^3\wedge e^4 + e^3\wedge e^5$ | $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $J_2 = J_1$,<br>$J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $R = 0$ |
| **G19** | $[e_1, e_2] = e_4$,<br>$[e_1, e_4] = e_5$,<br>$[e_1, e_5] = e_6$ | $e^1\wedge e^3 + e^2\wedge e^6 - e^4\wedge e^5$ | $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R \neq 0$ |
| **G21** | $[e_1, e_2] = e_4$,<br>$[e_1, e_4] = e_6$,<br>$[e_2, e_3] = e_6$ | $e^1\wedge e^6 + e^2\wedge e^5 - e^3\wedge e^4$ | $J = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2-1}{b} & -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & -b \\ \frac{a^2-1}{b} & -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & -b \\ \frac{a^2-1}{b} & -a \end{pmatrix}$,<br>$R \neq 0$ |

Окончание таблицы

| | Алгебра Ли | Симплектическая форма | Пара-комплексная структура |
|---|---|---|---|
| **G23** | $[e_1, e_2] = e_5$, $[e_1, e_3] = e_6$, | $\omega_1 = e^1\wedge e^6 + e^2\wedge e^5 + e^3\wedge e^4$<br>$\omega_2 = e^1\wedge e^4 + e^2\wedge e^6 + e^3\wedge e^5$<br>$\omega_3 = e^1\wedge e^4 + e^2\wedge e^5 - e^3\wedge e^6$ | $J_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}$,<br>$J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,<br>$J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R = 0$ |
| **G24** | $[e_2, e_3] = e_5$, $[e_1, e_4] = e_6$ | $e^1\wedge e^6 + e^2\wedge e^5 + e^3\wedge e^4$ | $J = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a^2/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $R \neq 0$ |
| **G25** | $[e_1, e_2] = e_6$ | $e^1\wedge e^6 + e^2\wedge e^5 + e^3\wedge e^4$ | $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & -1 \end{pmatrix}$, $R = 0$ |

*Доказательство*. Левоинвариантная пара-кэлерова структура – это пара $(\omega, J)$, состоящая из симплектической формы $\omega$ и согласованной с $\omega$ интегрируемой почти пара-комплексной структуры $J$ на алгебре Ли $\mathbf{g}$. Поскольку симплектическая форма является заданной, то оператор $J$ должен обладать следующими свойствами: $J^2 = Id$, $\omega(JX, JY) = -\omega(X, Y)$ и $[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] = 0$. Условие согласованности $\omega(JX, JY) = -\omega(X, Y)$ запишем в виде $\omega(JX, Y) + \omega(X, JY) = 0$. Пусть в базисе $\{e_1, \ldots, e_6\}$ алгебры Ли симплектическая форма $\omega$ и оператор $J$ имеют матрицы $\omega_{ij}$ и $J^i_j$, $J = J^i_j e_i \otimes e^j$. Тогда система уравнений для нахождения пара-кэлеровой структуры $(\omega, J)$ состоит из следующих уравнений на переменные $J^i_j$:

$$\begin{cases} J^i_k J^k_j = \delta^i_j, \\ \omega_{kj} J^k_i + \omega_{ik} J^k_j = 0, \\ J^l_i J^m_j C^k_{lm} - J^l_i J^k_m C^m_{lj} - J^l_j J^k_m C^m_{il} + C^k_{ij} = 0, \end{cases}$$

где $\delta^i_j$ – единичная матрица, $C^k_{ij}$ – структурные константы алгебры Ли и индексы меняются от 1 до 6. Эта система решается при помощи СКМ Maple. Для всех алгебр Ли списка работы [11], которые не вошли в таблицу теоремы 2, указанная система уравнений не имеет действительных решений. Для алгебр Ли из таблицы теоремы 2 легко видеть, что приведенные почти пара-комплексные структуры $J$ согласованы с симплектическими формами $\omega$. Интегрируемость $J$ сразу следует из того, что собственные подпространства $\mathbf{g}^+$ и $\mathbf{g}^-$ являются подалгебрами. Для всех алгебр Ли данного списка, за исключением **G6**, выполняются условия теоремы 1. Поэтому соответствующие пара-кэлеровы метрики для них являются Риччи-плоскими.

Рассмотрим более подробно алгебру Ли **G6** с симплектической формой $\omega = e^1\wedge e^6 + e^2\wedge e^4 + e^2\wedge e^5 - e^3\wedge e^4$. Для почти пара-комплексной структуры

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

имеем такую последовательность идеалов: $\mathbf{a}_1(J) = Z(\mathbf{g})\} = \{e_5, e_6\}$, $\mathbf{a}_2(J) = \{e_4, e_5, e_6\}$, $\mathbf{a}_3(J) = \{e_3, e_4, e_5, e_6\}$, $\mathbf{a}_4(J) = \mathbf{g}$. Поэтому $J$ является нильпотентной. Собственные подпространства $\mathbf{g}^+$ и $\mathbf{g}^-$ образованы векторами $\{e_1, e_4, e_5\}$ и $\{e_2, e_3, e_6\}$. Легко видеть, что они являются подалгебрами. Следовательно, почти пара-комплексная структура $J$ интегрируема. Условие согласованности $\omega(JX, JY) = -\omega(X, Y)$ очевидно выполняется. В системе Maple легко вычисляется тензор кривизны. Он имеет следующие ненулевые компоненты: $R^4_{1,2,1} = 1$, $R^6_{1,2,2} = 1$, $R^6_{1,2,3} = -1$, $R^5_{1,3,1} = -1$, $R^6_{1,3,2} = -1$. Поэтому пара-кэлерова метрика также является Риччи-плоской.

Отметим, что наиболее общая пара-кэлерова структура для данной алгебры Ли $\mathbf{G}_6$ зависит от пяти параметров $J_i^j$ и имеет вид:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_1^3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{J_1^3 J_3^4}{2} & J_2^4 & J_3^4 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{J_1^3 (J_2^4 + J_3^4)}{2} & J_2^5 & -J_2^4 - J_3^4 & 0 & 1 & 0 \\ J_1^6 & \dfrac{J_1^3 J_2^4}{2} & \dfrac{J_1^3 J_3^4}{2} & J_1^3 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$g_J = \begin{pmatrix} J_1^6 & \dfrac{J_1^3 J_2^4}{2} & \dfrac{J_1^3 J_3^4}{2} & J_1^3 & 0 & -1 \\ \dfrac{J_1^3 J_2^4}{2} & J_2^4 + J_2^5 & -J_2^4 & 1 & 1 & 0 \\ \dfrac{J_1^3 J_3^4}{2} & -J_2^4 & -J_3^4 & -1 & 0 & 0 \\ J_1^3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Список источников**


1. *Benson C., Gordon C.S.* Kähler and symplectic structures on nilmanifold // Topology. 1988. V. 27. P. 513–518. doi: 10.1016/0040-9383(88)90029-8
2. *Cordero L.A., Fernandez M., Ugarte L.* Pseudo-Kähler metrics on six-dimensional nilpotent Lie algebras // J. of Geom. and Phys. 2004. V. 50. P. 115–137. doi: 10.1016/j.geomphys.2003.12.003
3. *Смоленцев Н.К.* Канонические псевдо-кэлеровы метрики на шестимерных нильпотентных группах Ли // Вестник Кемеровского государственного университета. 2011. Т. 3/1, № 47: Геометрия и анализ. С. 155–168.
4. *Алексеевский Д.В., Медори К., Томассини А.* Однородные пара-кэлеровы многообразия Эйнштейна // Успехи математических наук. 2009. Т. 64, вып. 1 (385). С. 3–50. doi: 10.4213/rm9262

5. *Gray A.* Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds // Tohoku Math. J. 1976. V. 28, No. 4. P. 601–612. doi: 10.2748/TMJ/1178240746
6. *Rizza G.B.* Varieta parakählleriane // Ann. Mat. Pura Appl. 1974. V. 98. P. 47–61.
7. *Schäfer L.* Conical Ricci-flat nearly Parakählerian Manifolds // Ann. Global Anal. Geom. 2014. V. 45, No. 1. P. 11–24.
8. *Banaru M.* A note on parakählerian manifolds // Kyungpook Math. J. 2003. V. 43, No. 1. P. 49–61.
9. *Libermann P.* Sur les structures presque paracomplexes // Comptes rendus de l'Académie des Sciences. 1952. V. 234. P. 2517–2519.
10. *Кобаяси Ш., Намидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М. : Наука, 1981. Т. 2. 416 с.
11. *Goze M., Khakimdjanov Y., Medina A.* Symplectic or contact structures on Lie groups // Differential Geom. Appl. 2004. V. 21, No. 1. P. 41–54. doi: 10.1016/j.difgeo.2003.12.006

***References***

1. Benson C., Gordon C.S. (1998) Kähler and symplectic structures on nilmanifolds. *Topology*. 27(4). pp. 513–518. doi: 10.1016/0040-9383(88)90029-8.
2. Cordero L.A., Fernandez M., Ugarte L. (2004) Pseudo-Kähler metrics on six-dimensional nilpotent Lie algebras. *Journal of Geometry and Physics*. 50(1–4). pp. 115–137. doi: 10.1016/j.geomphys.2003.12.003.
3. Smolentsev N.K. (2011) Canonical pseudo-Kähler metrics on six-dimensional nilpotent Lie groups. *Vestnik Kemerovskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika – Kemerovo State University Journal of Mathematics.* 3/1(47). pp. 155–168. (arXiv:1310.5395 [math.DG])
4. Alekseevsky D.V., Medori C., Tomassini A. (2009) Homogeneous para-Kähler Einstein manifolds. *Russian Mathematical Surveys*. 64(1). pp. 1–43. doi: 10.1070/RM2009v064n01ABEH004591.
5. Gray A. (1976) Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds. *Tohoku Mathematical Journal*. 28(4). pp. 601–612. doi: 10.2748/TMJ/1178240746.
6. Rizza G.B. (1974) Varietà parakähleriane. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. 98. pp. 47–61.
7. Schäfer L. (2014) Conical Ricci-flat nearly para-Kähler manifolds. *Annals of Global Analysis and Geometry*. 45(1). pp. 11–24.
8. Banaru M. (2003) A note on parakählerian manifolds. *Kyungpook Mathematical Journal*. 43(1). pp. 49–61.
9. Libermann P. (1952) Sur les structures presque paracomplexes. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. 234. pp. 2517–2519.
10. Kobayashi S. and Nomizu, K. (1963) *Foundations of Differential Geometry*. *Vol. 1 and 2*. New York: Interscience Publishers.
11. Goze M., Khakimdjanov Y., Medina A. (2004) Symplectic or contact structures on Lie groups. *Differential Geometry and its Applications*. 21(1). pp. 41–54. doi: 10.1016/j.difgeo.2003.12.006.

***Сведения об авторе*:**
**Смоленцев Николай Константинович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики Кемеровского государственного университета, Кемерово, Россия. E-mail: smolennk@mail.ru

***Information about the author*:**
**Smolentsev Nikolay K.** (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Fundamental Mathematics Department, Kemerovo State University, Kemerovo, Russia). E-mail: smolennk@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 02.12.2021; принята к публикации 12.07.2022*

*The article was submitted 02.12.2021; accepted for publication 12.07.2022*