

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/78/8

Экспериментальное и аналитическое исследование геометрически-нелинейного изгиба консоли под действием распределенной нагрузки гравитационного типа

Дмитрий Михайлович Зуев¹, Дмитрий Дмитриевич Макаров²,
Кирилл Германович Охоткин³

¹ Сибирский государственный университет науки и технологий
им. акад. М.Ф. Решетнева, Красноярск, Россия

² АО «Информационные спутниковые системы им. акад. М.Ф. Решетнева»,
Железногорск, Красноярский край, Россия

¹ ZuevDmitriy93@yandex.ru

² dima-makarov-98@mail.ru

³ okg2000@mail.ru

Аннотация. Представлено приближенное аналитическое решение для случая геометрически-нелинейного изгиба тонкой упругой консоли под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки гравитационного типа. Решение основано на модификации линеаризованного уравнения Эйлера–Бернулли условием сохранения криволинейной длины. Для верификации решения проведено экспериментальное исследование геометрически-нелинейного изгиба консоли, получены стрела прогиба, осевое смещение и формы изгиба. Сравнение показало качественное и количественное соответствие между экспериментальными и теоретическими данными.

Ключевые слова: консоль, геометрически-нелинейный изгиб, большие деформации, распределенная нагрузка, эксперимент

Для цитирования: Зуев Д.М., Макаров Д.Д., Охоткин К.Г. Экспериментальное и аналитическое исследование геометрически-нелинейного изгиба консоли под действием распределенной нагрузки гравитационного типа // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 78. С. 99–111. doi: 10.17223/19988621/78/8

Original article

The experimental and analytical study of geometrically nonlinear bending of a cantilever beam under a distributed gravity load

Dmitriy M. Zuev¹, Dmitriy D. Makarov², Kirill G. Okhotkin³

¹ Reshetnev Siberian State University, Krasnoyarsk, Russian Federation

² JSC Information Satellite Systems Reshetnev, Zheleznogorsk, Russian Federation

¹ ZuevDmitriy93@yandex.ru

² dima-makarov-98@mail.ru

³ okg2000@mail.ru

Abstract. This paper describes an approximate analytical solution for the geometrically nonlinear bending of a thin elastic cantilever beam under a uniformly distributed gravity load. The solution is based on the linearized Euler-Bernoulli equation of mechanics of materials. Traditionally, such a linear approach is used for small (geometrically linear) deflections. The authors have modified the original equation with an arc-length preservation condition. The modified solution allows one to obtain bending shapes, deflection, and axial displacement in the range of loads corresponding to geometrically nonlinear bending of a beam (large deflections).

An experimental study is conducted to verify the proposed solution. A thin steel band bent by gravity is used as a sample. Changes in the length of the bent sample part allow one to obtain various dimensionless load parameters. The deflections and axial displacements averaged on experimental statistics are determined. Bending shapes are obtained by the least square method of 5th order.

Experimental and theoretical data are shown to be in good agreement. This fact confirms that the approximate analytical solution can be applied to solve large deflection problems in a wider range of loads than normally considered in the original linear theory.

Keywords: cantilever, geometrically nonlinear bending, large deflections, distributed load, experiment

For citation: Zuev, D.M., Makarov, D.D., Okhotkin, K.G. (2022) The experimental and analytical study of geometrically nonlinear bending of a cantilever beam under a distributed gravity load. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 78. pp. 99–111. doi: 10.17223/19988621/78/8

Задачи геометрически-нелинейного изгиба тонких гибких стержней под действием различных видов нагружения важны для различных приложений в науке и технике, в которых стержень может быть подвержен большим деформациям, величина которых может быть сопоставима с длиной самого стержня. К таким практическим приложениям относятся разработка трансформируемых антенн с гибкими элементами [1], разработка перспективных микро- и нано- электромеханических систем (MEMS и NEMS) [2, 3], разработка «податливых» механизмов [4] и др.

Подобные задачи при различных способах распределенного нагружения стержней решаются численными и аналитическими методами многими отечественными и зарубежными исследователями. В работе [5] F. Rohde (1952) представлено аналитическое приближенное решение для стержня под действием равномерно-распределенной нагрузки путем представления угла наклона касательной к точке стержня в степенной ряд по криволинейной длине стержня. R. Frisch-Fay (1961) [6] представил аналитическое приближенное решение для изгиба консоли и выпучивания вертикального стержня равномерно-распределенной нагрузкой. Решение представлено в виде степенного ряда по синусоидальным функциям. R. Shmide и D. DaDeppo (1970) [7] получили точное решение для изгиба консольных стержней и колон под собственным весом. Решение представлено в виде бесконечного степенного ряда. C.Y. Wang (1986) [8] провел критический обзор работ по теме изгиба стержней под собственным весом в различных

случаях. В работе G. Scarpello и D. Ritelli (2011) [9] представлено точное решение для различных случаев нагружения консоли, включая случай консоли при поперечной гравитационной нагрузке. Решение получено в эллиптических интегралах и гипергеометрических функциях. В работе L. Chen (2010) [10] предложена достаточно простая численная техника для определения больших деформаций тонкого упругого стержня. Рассмотрено несколько случаев, в том числе изгиб равномерно распределенной нагрузкой гравитационного типа. Также в этой работе приведено сравнение с экспериментальными данными из статьи T. Belendez и соавт. (2003) [11] для случая комбинированной нагрузки (поперечная сосредоточенная на конце и собственный вес консоли). В работе [12] E. Barbieri (2020) получено решение для изгиба стержня равномерно-распределенной следящей нагрузкой, решение получено с применением гипергеометрических функций.

В литературе также представлены экспериментальные исследования изгиба консоли поперечной равномерно-распределенной нагрузкой [11, 13–16]. В работе [14] авторства H. Lee и соавт. (1964) проведен эксперимент по изгибу тонких упругих консолей поперечной гравитационной нагрузкой. Использовались образцы разной длины, изготовленные из эпоксидной смолы. Авторы привели некоторые формы изгиба, стрелу прогиба и осевое смещение. Также методами фотоупругости были получены распределения напряжений в консоли при изгибе. Однако авторы не привели данных о модуле Юнга образцов. В остальных работах [11, 13, 15, 16] были рассмотрены случаи комбинированной нагрузки – сочетания собственного веса консоли с поперечной сосредоточенной нагрузкой на свободном конце консоли. В этих работах не проводились исследования поведения консоли при различных значениях нагрузки гравитационного типа. В работе Z. Gosar (2014) [13] проведен эксперимент с пластиковой полосой под действием комбинированной нагрузки. Модуль Юнга был измерен экспериментально с помощью соответствующего оборудования, затем уточнен таким образом, чтобы разница между экспериментальными и теоретическими данными была минимальной. Приведены формы изгиба, построенные по пяти экспериментальным точкам. При этом в работе приведены неполные данные об образце, что не дает возможности оценить диапазон безразмерных нагрузок.

В исследовании A.R. Bahari и соавт. [15] проведен численный анализ геометрически-линейного и геометрически-нелинейного изгиба консоли комбинированной нагрузкой, который был сравнен с полученными экспериментальными данными изгиба тонкой стальной полосы. В эксперименте была получена только стрела прогиба консоли. Безразмерная гравитационная нагрузка составила $\mu = 0.01$, где безразмерный параметр нагрузки $\mu = WL^2/2EJ$, W – вес консоли, L – длина консоли, E – модуль Юнга, J – момент инерции поперечного сечения стержня.

В публикации T. Belendez и соавт. (2003) [11] проведен эксперимент с тонкой стальной консолью по действием комбинированной нагрузки. В работе приведены стрела прогиба и осевое смещение при значении гравитационной безразмерной нагрузки $\mu = 0.91$, показаны формы изгиба для трех значений поперечной нагрузки.

Таким образом, в литературе экспериментальные исследования изгиба консоли исключительно равномерно-распределенной поперечной нагрузкой практически не представлены.

Постановка задачи

В данной работе будет рассмотрен геометрически-нелинейный изгиб тонкой упругой консоли под действием поперечной равномерно-распределенной нагрузки гравитационного типа (рис. 1). В процессе изгиба консоль длины L постоянного поперечного сечения и постоянной жесткости EJ подвергается действию равномерно-распределенной нагрузки интенсивностью w . В процессе изгиба консоли направление нагрузки w не изменяется. В результате изгиба консоль получает прогиб f и осевое смещение δx .

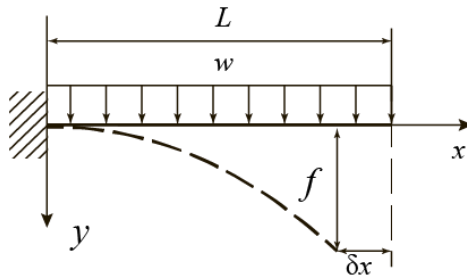


Рис. 1. Схема изгиба консоли поперечной равномерно-распределенной нагрузкой
Fig. 1. Scheme of bending for a cantilever beam under transversal uniformly distributed load

Согласно классической теории изгиба балок в нашем случае приняты следующие допущения:

- не учитываются деформация сдвига;
- материал консоли изотропный и линейно-упругий;
- консоль является нерастяжимой;
- сечение консоли является постоянным.

Цель работы – обобщение ранее предложенного авторами в [17] метода модификации линейных формул на случай поперечной равномерно-распределенной нагрузки гравитационного типа и его валидация путем сравнения с полученными экспериментальными данными.

Приближенное решение. Модифицированные выражения

Для получения аналитического решения при решении задачи изгиба тонкого упругого стержня под действием различных нагрузок традиционно используется нелинейное уравнение Эйлера–Бернулли:

$$\frac{M(x)}{EJ} = \frac{d^2 y}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2}, \quad (1)$$

где $M(x)$ – действующий момент, x и y – координаты точек формы изгиба стержня. Решение уравнения (1) в точной геометрически-нелинейной формулировке является нетривиальной задачей, приводящей к решениям в эллиптических интегралах, гипергеометрических функциях и бесконечных рядах, как, например, в [9].

В классической теории сопротивления материалов изгиб стержня под нагрузкой рассматривается в приближенной линейной формулировке. Для этого при-

нимается допущение, что прогибы являются малыми, и это даст основание линеаризовать правую часть уравнения (1):

$$\frac{M(x)}{EJ} = \frac{d^2 y}{dx^2}. \quad (2)$$

В случае консоли, заделка которой находится в начале координат, начальные условия $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. При гравитационной нагрузке w действующий момент будет выглядеть как

$$M = -\frac{w(L-x)^2}{2}, \quad (3)$$

где w – интенсивность распределенной нагрузки.

Учитывая начальные условия и выражение для действующего момента (3), проинтегрируем (2) и получим выражение для формы изгиба [18]:

$$y = \frac{w}{24EJ} (6L^2 x^2 - 4Lx^3 + x^4). \quad (4)$$

Далее для удобства будем использовать безразмерные координаты (ξ , η) и безразмерный параметр нагрузки μ :

$$\xi = x/L; \quad \eta = y/L; \quad \mu = wL^3/2EJ. \quad (5)$$

В таком случае выражение для формы изгиба (5) примет в безразмерных параметрах вид:

$$\eta(\mu, \xi) = \frac{1}{12} \mu (\xi^4 - 4\xi^3 + 6\xi^2). \quad (6)$$

В теории сопротивления материалов [18] стрела прогиба определяется согласно следующему упрощенному выражению:

$$f = \eta(\mu, 1) = \frac{1}{12} \mu. \quad (7)$$

Такое выражение справедливо, если считать деформации малыми и можно пренебречь смещением конца стержня в горизонтальном направлении (осевым смещением). Таким образом, математический смысл выражения (7) в сохранении проекции длины изогнутой консоли на горизонтальную ось. Считается, что данный подход справедлив для величин прогибов, не превышающих 3–5% от длины стержня [18, 19], что соответствует интервалу безразмерной нагрузки $0 < \mu < 0.6$.

Авторами ранее был предложен оригинальный метод модификации линейных выражений для стрелы прогиба [17], что позволяет получать с помощью линейных выражений усовершенствованные формулы для геометрически-нелинейных изгибов стержня. В работе [17] показано, что результат, полученный с помощью модифицированных линейных выражений, имеет высокую степень приближения к точным аналитическим решениям в эллиптических функциях.

Рассмотрим приложение авторского метода к случаю изгиба тонкой упругой консоли равномерно-распределенной нагрузкой гравитационного типа. Данный метод предлагает использовать условие сохранения криволинейной длины консоли для получения стрелы прогиба, осевого смещения и форм изгиба. Условие сохранения криволинейной длины выглядит следующим образом:

$$\int_0^{1-\delta\xi} \left\{ 1 + \left[\frac{d\eta(\xi, \mu)}{d\xi} \right]^2 \right\}^{1/2} d\xi = 1, \quad (8)$$

где $\delta\zeta = \delta x/L$ – безразмерное осевое смещение конца стержня. Подставляя (6) в (8), получим явный вид условия сохранения длины:

$$\int_0^{1-\delta\zeta} \left\{ 1 + \left[\mu \left(\frac{\xi^3}{3} - \xi^3 + \xi \right) \right]^2 \right\}^{1/2} d\xi = 1. \quad (9)$$

Из уравнения (9) требуется найти безразмерное осевое смещение $\delta\zeta$. Это можно сделать любым численным методом (методом бисекции, к примеру). Далее для получения стрелы прогиба требуется определить прогиб конца стержня в точке $1 - \delta\zeta$:

$$f = \eta(\mu, 1 - \delta\zeta). \quad (10)$$

Для получения форм изгиба нужно воспользоваться выражением (6) и при этом учитывать, что следует проводить построение формы изгиба в интервале $0 < \zeta < (1 - \delta\zeta)$.

Экспериментальная установка и методика эксперимента

Эксперимент для валидации приближенного аналитического решения проводился на установке, представляющей собой штатив, на котором с помощью каретки 1 закреплен образец 2 (рис. 2). Регистрация параметров изогнутой консоли производилась на зеркальную фотокамеру Canon 600D с объективом EF-S 18–55 мм.

Полученный фотоматериал был обработан с помощью программного обеспечения Graph2Digit, которое предназначено для оцифровки графиков с отсканированных бумажных носителей. Для этого согласно метке-этalonу 3 выставлялась координатная сетка, затем согласно положению консоли на фото выставлялся набор точек вдоль изогнутой консоли для оцифровки.

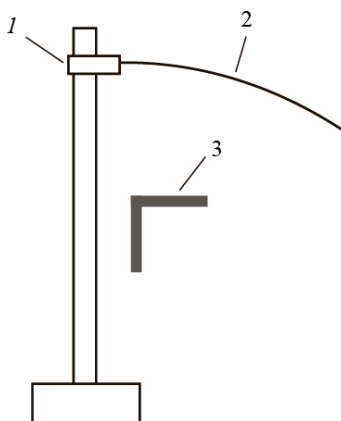


Рис. 2. Схема экспериментальной установки
Fig. 2. Design of the experimental setup

В эксперименте использовалась стальная полоса, параметры которой представлены в табл. 1. Для изменения безразмерной нагрузки μ в процессе эксперимента изменялась эффективная длина консоли (длина образца, которая участвует в изгибе). Изменение эффективной длины происходило с шагом 5 см (эффективная длина консоли в эксперименте составила от 30 до 100 см).

Таблица 1

Параметры образца

Полная длина, см	104
Масса, г	297.3
Линейная масса, г/см	2.86
Ширина, мм	39.2
Толщина, мм	0.95
Модуль упругости, ГПа	210

Полученный набор точек для форм изгиба был выгружен в формате электронных таблиц, где данные были приведены к безразмерным координатам (ξ , η) и безразмерной нагрузке по следующим формулам:

$$\xi = x / L ; \eta = y / L ; \mu = WL^2 / 2EJ .$$

Из полученного набора точек для форм изгиба были извлечены данные для стрелы прогиба f и безразмерного осевого смещения $\delta\zeta$. Эксперимент был проведен семь раз для минимизации погрешности. Данные для стрелы прогиба и осевого смещения были усреднены. Для форм изгиба методом наименьших квадратов были получены полиномы пятой степени.

Полученные экспериментальные результаты

В процессе выполнения эксперимента были получены стрела прогиба и осевое смещение конца стержня на интервале безразмерных нагрузок $0 < \mu < 2.4$ (рис. 3, *a*), формы изгиба для ряда безразмерных нагрузок μ (рис. 3, *b*). В табл. 2 приведены экспериментальные данные для стрелы прогиба и осевого смещения.

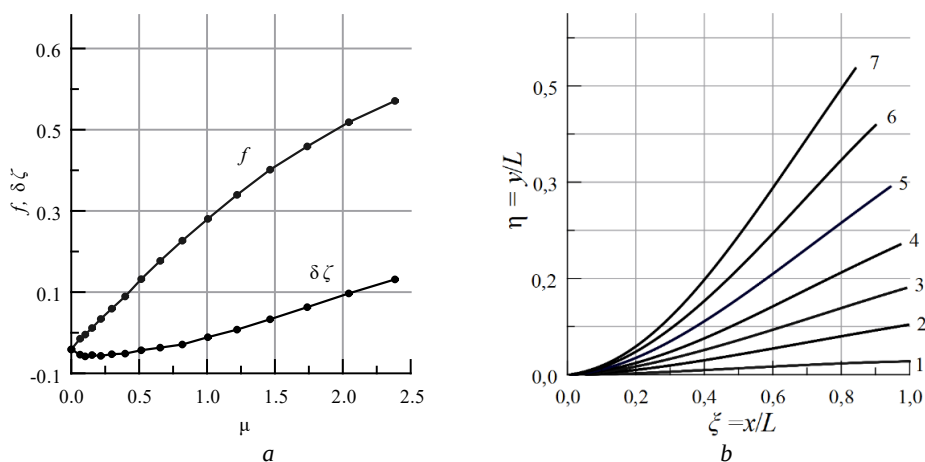


Рис. 3. Полученные экспериментальные данные: *a* – безразмерные стрела прогиба f и осевое смещение образца $\delta\zeta$ в зависимости от безразмерной нагрузки μ ; *b* – формы изгиба.

Цифрами обозначены формы, соответствующие следующим безразмерным нагрузкам: $\mu = 0.064$ (1); $\mu = 0.298$ (2); $\mu = 0.515$ (3); $\mu = 0.818$ (4); $\mu = 1.221$ (5); $\mu = 1.738$ (6); $\mu = 2.384$ (7)

Fig. 3. The obtained experimental data: (a) dimensionless deflection f and axial displacement $\delta\zeta$ as functions of dimensionless load μ and (b) bending shapes.

Numbers indicate bending shapes for the following dimensionless loads:

$\mu =$ (1) 0.064, (2) 0.298, (3) 0.515, (4) 0.818, (5) 1.221, (6) 1.738, and (7) 2.384

Полученные экспериментальные данные для безразмерных стрелы прогиба f и осевого смещения $\delta\zeta$

Безразмерная нагрузка μ	Безразмерный прогиб, f	Безразмерное осевое смещение, $\delta\zeta$
0.064	0.022	-0.011
0.102	0.031	-0.014
0.153	0.045	-0.012
0.217	0.064	-0.013
0.298	0.085	-0.010
0.397	0.111	-0.009
0.515	0.147	-0.002
0.655	0.185	0.004
0.818	0.228	0.010
1.006	0.273	0.026
1.221	0.324	0.041
1.464	0.376	0.063
1.738	0.425	0.088
2.044	0.476	0.117
2.384	0.520	0.147

Анализ полученных результатов

На рис. 4 приведены теоретические и экспериментальные величины стрел прогиба и осевого смещения. Как видно, теоретические и экспериментальные данные согласуются на достаточно хорошем уровне.

На рис. 5 показаны теоретические и экспериментальные формы изгиба для некоторых нагрузок. Как можно увидеть, формы изгиба качественно соответствуют, однако наблюдается небольшое расхождение, которое составляет в среднем около 11%.

Для дальнейшего анализа построим графики отклонения теоретического решения от экспериментальных данных в зависимости от безразмерной нагрузки μ (см. рис. 5) для стрелы прогиба и осевого смещения (для осевого смещения будем строить график отклонения величины $L - \delta\zeta$). Как видно из рис. 6, расхождение для стрелы прогиба между теоретическими и экспериментальными значениями составляет в среднем около 10%, а для осевого смещения менее 2%. Повышение отклонения при малых нагрузках объясняется тем, что прогибы и осевые смещения имеют малое абсолютное значение, что дает вклад в погрешность обработки фотоматериала.

Интересным является тот факт, что описание геометрически-нелинейного изгиба с помощью метода, основанного на линеаризованном уравнении (3), позволяет достичь достаточно высокой точности на интервале сил, которые многократно превосходят традиционно принятые для линейных методов теории сопротивления материалов. Исходя из критерия применимости линейной теории для прогибов величиной не более 3–5% от длины стержня и формулы (7), интервал безразмерных нагрузок применимости линейной теории составляет $\mu < 0.6$. Предлагаемый метод модификации линейных формул был экспериментально проверен на участке сил $\mu < 2.4$.

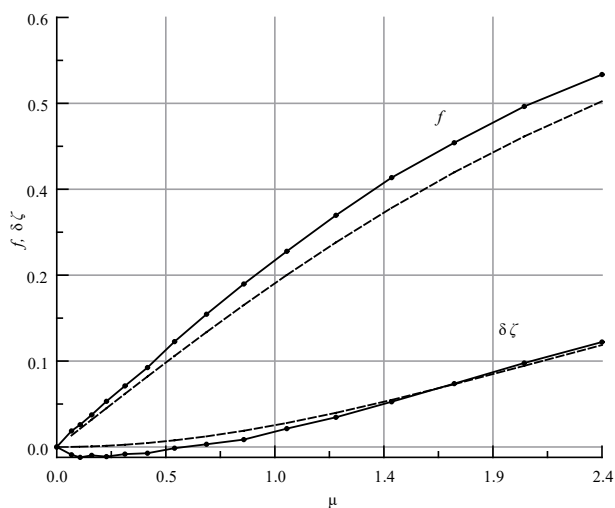


Рис. 4. Сравнение теоретических и экспериментальных стрел прогиба f и осевого смещения $\delta\zeta$. Сплошные линии соответствуют экспериментальным данным, пунктирные линии теоретическим данным (9), (10)

Fig. 4. Comparison of theoretical and experimental data on deflection f and axial displacement $\delta\zeta$. Solid lines indicate experimental data, and dashed lines, theoretical data (9), (10)

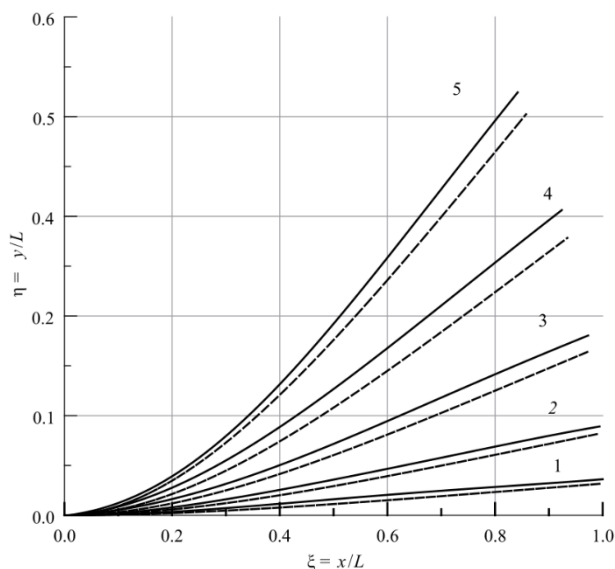


Рис. 5. Сравнение теоретических и экспериментальных форм изгиба. Сплошные линии соответствуют экспериментальным данным, пунктирные теоретическим (6), (9). Цифрами обозначены группы кривых, соответствующих следующим безразмерным нагрузкам: $\mu = 0.153$ (1); $\mu = 0.397$ (2); $\mu = 0.818$ (3); $\mu = 1.464$ (4); $\mu = 2.384$ (5)

Fig. 5. Comparison of theoretical and experimental data on bending shapes. Solid lines indicate experimental data, and dashed lines, theoretical data (6), (9). Numbers denote groups of bending shapes for the following dimensionless loads: $\mu = (1) 0.153$, (2) 0.397, (3) 0.818, (4) 1.464, and (5) 2.384

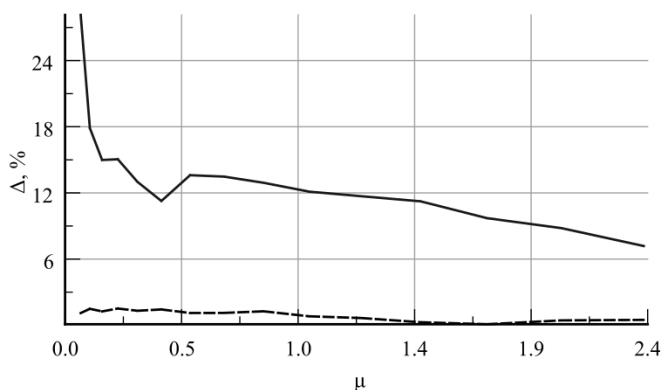


Рис. 6. Отклонение теоретических данных от экспериментальных для стрелы прогиба и осевого смещения. Сплошная линия – отклонение данных для стрелы прогиба f , пунктирная линия – отклонение данных для осевого смещения $\delta\zeta$

Fig. 6. Deviation between theoretical and experimental data on deflection and axial displacement. The solid line indicates deviation for deflection f , and the dashed line, deviation for axial displacement $\delta\zeta$

Предложенный метод модификации линейных формул достаточно прост в применении, что позволяет использовать его для инженерных применений, например на этапе эскизного проектирования трансформируемых антенных спутниковых конструкций.

Выводы

В работе был аналитически и экспериментально исследован геометрически-нелинейный изгиб тонкой упругой консоли под действием поперечной равномерно-распределенной нагрузки гравитационного типа. При этом использован авторский метод для определения форм изгиба, стрелы прогиба и осевого смещения, основанный на модификации линейных выражений классической теории сопротивления материалов. Рассмотрено линеаризованное уравнение Эйлера–Бернулли, которое было дополнено условием сохранения криволинейной длины.

Проведено экспериментальное исследование рассматриваемого случая изгиба консоли на участке сил, соответствующем геометрически-нелинейному изгибу консоли. Были получены формы изгиба, стрела прогиба и осевое смещение.

Сравнение приближенных аналитических решений, полученных с помощью предложенного метода, с экспериментальными данными показало качественное и количественное совпадение (расхождение около 10% для стрелы прогиба и менее 2% для осевого смещения). Этот факт вместе с относительной простотой применения метода дает основание считать полученное приближенное аналитическое решение применимым на практике, например на этапах эскизного проектирования стержневых элементов трансформируемых механических конструкций космических аппаратов.

Стоит отметить, что интервал нагрузок применимости данного метода многократно превосходит интервал применимости классической линейной теории сопротивления материалов. Модифицированное решение, основанное на линеари-

зованном уравнении Эйлера–Бернулли, дает достаточно точные результаты на интервале сил, соответствующем геометрически-нелинейному изгибу. Дальнейшее развитие работы предполагает обобщение метода на другие виды нагрузок и закреплений с экспериментальным подтверждением. Также возможно изучение геометрически-нелинейных колебаний.

Список источников

1. Лопатин А.В. и др. Геометрически нелинейная модель трансформируемого обода большой космической антенны с гибкими композитными элементами // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М.Ф. Решетнева. 2012. № 5 (45). С. 75–80.
2. Li M., Tang H.X., Roukes M.L. Ultra-sensitive NEMS-based cantilevers for sensing, scanned probe and very high-frequency applications // Nat. Nanotechnol. 2007. V. 2, No. 2. P. 114–120. doi: 10.1038/nnano.2006.208
3. Li X., Bhushan B., Takashime K., Baek C., Kim Y. Mechanical characterization of micro / nanoscale structures for MEMS / NEMS applications using nanoindentation techniques // Ultramicroscopy. 2003. V. 97, No. 1-4. P. 481–494. doi: 10.1016/S0304-3991(03)00077-9
4. Zhang A., Chen G. A comprehensive elliptic integral solution to the large deflection problems of thin beams in compliant mechanisms // J. Mech. Robot. 2013. V. 5, No. 2. P. 1–10. doi: 10.1115/1.4023558
5. Rohde F.V. Large deflections of a cantilever beam with uniformly distributed load // Q. Appl. Math. 1952. No. 2. P. 337–338.
6. Frisch-Fay R. The analysis of a vertical and a horizontal cantilever under a uniformly distributed load // J. Franklin Inst. 1961. V. 271, No. 3. P. 192–199. doi: 10.1016/0016-0032(61)90148-X
7. Schmidt R., DaDeppo D.A. Large deflections of heavy cantilever beams and columns // Q. Appl. Math. 1970. V. 28, No. 3. P. 441–444. doi: 10.1090/qam/99779
8. Wang C.Y. A critical review of the heavy elastica // Int. J. Mech. Sci. 1986. V. 28, No. 8. P. 549–559. doi: 10.1016/0020-7403(86)90052-4
9. Scarpello G.M., Ritelli D. Exact Solutions of Nonlinear Equation of Rod Deflections Involving the Lauricella Hypergeometric Functions // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2011. V. 2011. Art. 838924, 22 pages. doi: 10.1155/2011/838924
10. Chen L. An integral approach for large deflection cantilever beams // Int. J. Non. Linear. Mech. Elsevier. 2010. V. 45, No. 3. P. 301–305. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2009.12.004
11. Beléndez T., Neipp C., Beléndez A. Numerical and Experimental Analysis of a Cantilever Beam: a Laboratory Project to Introduce Geometric Nonlinearity in Mechanics of Materials // Int. J. Eng. Educ. 2003. V. 19, No. 6. P. 885–892.
12. Barbieri E. Analytical solution of the cantilevered elastica subjected to a normal uniformly distributed follower load // Int. J. Solids Struct. 2020. V. 202. P. 486–494. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2020.06.031
13. Gosar Z., Kosel F. Large deflection states of euler-bernoulli slender cantilever beam subjected to combined loading // SYLWAN. 2014. V. 158, No. 5. P. 489–499.
14. Lee H.C., Durelli A.J., Parks V.J. Stresses in largely deflected cantilever beams subjected to gravity // J. Appl. Mech. Trans. ASME. 1964. V. 36, No. 2. P. 323–325. doi: 10.1115/1.3564633
15. Bahari A.R., Yunus M.A., Abdul Rani M.N., Ayub M.A., Nalisa A. Numerical and Experimental Investigations of Nonlinearity Behaviour in A Slender Cantilever Beam // MATEC Web Conf. 2018. V. 217. P. 1–6. doi: 10.1051/mateconf/201821702008
16. Brojan M., Cebon M., Kosel F. Large deflections of non-prismatic nonlinearly elastic cantilever beams subjected to non-uniform continuous load and a concentrated load at the free end // Acta Mech. Sin. Xuebao. 2012. V. 28, No. 3. P. 863–869. doi: 10.1007/s10409-012-0053-3

17. Зуев Д.М., Охоткин К.Г. Модифицированные выражения для стрелы прогиба консоли в случае поперечной нагрузки // Космические аппараты и технологии. 2020. Т. 4, № 1. С. 28–35. doi: 10.26732/j.st.2020.1.04
18. Тимошенко С.П., Gere Д. Механика материалов : учебник для вузов. 2-е, стер. изд. СПб. : Лань, 2002. 672 с.
19. Варданян Г.С., Андреев В.И., Амаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов с основами теории упругости теории и пластичности. М. : ACB, 1995. 572 с.

References

1. Lopatin A.V., Zakharov Yu.V., Okhotkin K.G., Vil'yanen V.V., Pashkovskiy A.V. (2012) Geometricheski nelineynaya model' transformiruemogo oboda bol'shoy kosmicheskoy antennoy s gibkimi kompozitnymi elementami [Geometrically nonlinear model of a transformable rim of the large space antenna with flexible composite elements]. *Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta imeni akademika M.F. Reshetneva – Siberian Aerospace Journal*. 5(45). pp. 75–80.
2. Li M., Tang H.X., Roukes M.L. (2007) Ultra-sensitive NEMS-based cantilevers for sensing, scanned probe and very high-frequency applications. *Nature Nanotechnology*. 2(2). pp. 114–120. doi: 10.1038/nnano.2006.208.
3. Li X., Bhushan B., Takashime K., Baek C., Kim Y. (2003) Mechanical characterization of micro/nanoscale structures for MEMS/NEMS applications using nanoindentation techniques. *Ultramicroscopy*. 97. pp. 481–494. doi: 10.1016/S0304-3991(03)00077-9.
4. Zhang A., Chen G. A. (2013) Comprehensive elliptic integral solution to the large deflection problems of thin beams in compliant mechanisms. *Journal of Mechanisms and Robotics*. 5(2). pp. 1–10. doi: 10.1115/1.4023558.
5. Rohde F.V. (1952) Large deflections of a cantilever beam with uniformly distributed load. *Quarterly of Applied Mathematics*. 2. pp. 337–338.
6. Frisch-Fay R. (1961) The analysis of a vertical and a horizontal cantilever under a uniformly distributed load. *Journal of the Franklin Institute*. 271(3). pp. 192–199. doi: 10.1016/0016-0032(61)90148-X.
7. Schmidt R., DaDeppo D.A. (1970) Large deflections of heavy cantilever beams and columns. *Quarterly of Applied Mathematics*. 28(3). pp. 441–444. doi: 10.1090/qam/99779.
8. Wang C.Y. (1986) A critical review of the heavy elastic. *International Journal of Mechanical Sciences*. 28(8). pp. 549–559. doi: 10.1016/0020-7403(86)90052-4.
9. Scarpello G.M., Ritelli D. (2011) Exact solutions of nonlinear equation of rod deflections involving the lauricella hypergeometric functions. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. Article 838924. doi: 10.1155/2011/838924.
10. Chen L. (2010) An integral approach for large deflection cantilever beams. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 45(3). pp. 301–305. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2009.12.004.
11. Beléndez T., Neipp C., Beléndez A. (2003) Numerical and experimental analysis of a cantilever beam: a laboratory project to introduce geometric nonlinearity in mechanics of materials. *International Journal of Engineering Education*. 19(6). pp. 885–892.
12. Barbieri E. (2020) Analytical solution of the cantilevered elastica subjected to a normal uniformly distributed follower load. *International Journal of Solids and Structures*. 202. pp. 486–494. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2020.06.031.
13. Gosar Z., Kosel F. (2014) Large deflection states of Euler-Bernoulli slender cantilever beam subjected to combined loading. *SYLWAN*. 158(5). pp. 489–499.
14. Lee H.C., Durelli A.J., Parks V.J. (1964) Stresses in largely deflected cantilever beams subjected to gravity. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME*. 36(2). pp. 323–325. doi: 10.1115/1.3564633.
15. Bahari A.R., Yunus M.A., Abdul Rani M.N., Ayub M.A., Nalisa A. (2018) Numerical and experimental investigations of nonlinearity behaviour in a slender cantilever beam. *MATEC Web Conferences*. 217. pp. 1–6. doi: 10.1051/mateconf/201821702008.

16. Brojan M., Cebon M., Kosel F (2012) Large deflections of non-prismatic nonlinearly elastic cantilever beams subjected to non-uniform continuous load and a concentrated load at the free end. *Acta Mechanica Sinica/Lixue Xuebao*. 28(3). pp. 863–869. doi: 10.1007/s10409-012-0053-3.
17. Zuev D.M., Okhotkin K.G. (2020) Modified formulas for maximum deflection of a cantilever under transverse loading. *Spacecrafts & Technologies*. 4(1). pp. 28–35. doi: 10.26732/j.st.2020.1.04.
18. Timoshenko S.P., Gere J.M. (1996) *Mechanics of Materials*. 4th ed. CL Engineering.
19. Vardanyan G.S., Andreev V.I., Atarov N.M., Gorshkov A.A. (1995) *Soprotivlenie materialov s osnovami teorii uprugosti teorii i plastichnosti* [Strength of materials with fundamentals of elasticity and plasticity theory]. Moscow: ASV.

Сведения об авторах:

Зуев Дмитрий Михайлович – аспирант, ассистент кафедры технической физики Сибирского государственного университета науки и технологии им. акад. М.Ф. Решетнева, Красноярск, Россия. E-mail: ZuevDmitriy93@yandex.ru

Макаров Дмитрий Дмитриевич – студент-бакалавр по направлению «физика» Сибирского государственного университета науки и технологии им. акад. М.Ф. Решетнева, Красноярск, Россия. E-mail: dima-makarov-98@mail.ru

Охоткин Кирилл Германович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры технической физики Сибирского государственного университета науки и технологии им. акад. М.Ф. Решетнева, Красноярск, Россия; заместитель генерального директора по науке АО «Информационные спутниковые системы им. акад. М.Ф. Решетнева», Железнодорожный, Красноярский край, Россия. E-mail: okg2000@mail.ru

Information about the authors:

Zuev Dmitriy M. (Assistant of the Applied Physics Department, Reshetnev Siberian State University, Krasnoyarsk, Russian Federation). E-mail: ZuevDmitriy93@yandex.ru

Makarov Dmitriy D. (Reshetnev Siberian State University, Krasnoyarsk, Russian Federation). E-mail: dima-makarov-98@mail.ru

Okhotkin Kirill G. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Applied Physics Department, Reshetnev Siberian State University, Krasnoyarsk, Deputy Director-General for Science, JSC Information Satellite Systems Reshetnev, Zheleznogorsk, Russian Federation). E-mail: okg2000@mail.ru

Статья поступила в редакцию 24.10.2021; принята к публикации 12.07.2022

The article was submitted 24.10.2021; accepted for publication 12.07.2022