Научная статья
УДК 531.011
doi: 10.17223/19988621/78/11

Формальное порождение величин механического движения

Валентин Дмитриевич Павлов

ЗАО «Владимирский электромеханический завод», Владимир, Россия, pavlov.val.75@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются квантово-механические дифференциальные уравнения, являющиеся формальными аналогами уравнения Шредингера. Их отличия друг от друга и от уравнения Шредингера заключаются в порядках частных производных. Характерной особенностью этих уравнений является наличие размерных коэффициентов, представляющих собой произведение целых степеней массы и скорости, что позволяет рассматривать их в качестве величин механического движения. Установлена логическая закономерность формирования этих величин. Рассмотрен прикладной характер двух из них – интегрального вектора Умова для кинетической энергии и обратного импульса.
Ключевые слова: интегральный вектор Умова, обратный импульс, движение, величина, порядок

Для цитирования: Павлов В.Д. Формальное порождение величин механического движения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 78. С. 143–150. doi: 10.17223/19988621/78/11

Original article

Formal derivation of mechanical motion magnitudes

Valentin D. Pavlov

Vladimir Electromechanical Plant, Vladimir, Russian Federation, pavlov.val.75@mail.ru

Abstract. Formally, a zero-order magnitude of the mechanical motion ${}^0p = mv^0$ can be derived from the Schrödinger equation. The first-order magnitude of the mechanical motion ${}^1p = mv^1$ is provided by a formal analog of the Schrödinger equation obtained when comparing the wave function Ψ and its gradient, while the second-order magnitude of the mechanical motion ${}^2p = mv^2/2!$ is obtained when comparing the wave function and its time derivative. Thus, the zero-, first-, and second-order magnitudes of the mechanical motion are derived. Apparently, other formal analogs of the Schrödinger equation can provide magnitudes of the mechanical motion of other orders. The third-order magnitude of the mechanical motion ${}^3p = mv^3/3!$ is the Umov integral vector for the kinetic energy. The negative first-order magnitude of the mechanical motion ${}^{-1}p = mv^{-1}$ represents a reverse impulse. Almost all the results are obtained using the quantum mechanical dif-

ferential equations, while the results themselves are predominantly macromechanical. In all formal analogs of the Schrödinger equation, the order of partial derivatives differs by one. For motion magnitudes with a positive degree of velocity, the order of time derivatives is higher than that of the spatial ones. For magnitudes with a negative degree, the order of spatial derivatives is higher.
Keywords: Umov vector, backward impulse, motion, magnitude, order

For citation: Pavlov, V.D. (2022) Formal derivation of mechanical motion magnitudes. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 78. pp. 143–150. doi: 10.17223/19988621/78/11

Введение

Волновая функция

$$\Psi = Ce^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{mv^2}{2}t - m\mathbf{vr})}$$

удовлетворяет уравнению Шредингера (УШ) [1, 2] для свободной частицы

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi ,$$

$$\Delta\Psi = -\frac{2i}{\hbar}\left(\frac{mv^0}{0!}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial t} .$$

Формально УШ порождает величину механического движения нулевого порядка (в том смысле, что она в УШ содержится) [3–5]

$$^{0}p = \frac{mv^0}{0!} . \quad (1)$$

Примечательно, что квантово-механическая конструкция порождает макромеханическую величину. В дальнейшем используется преимущественно этот же принцип.

Цель работы заключается в демонстрации того факта, что изменение порядка частных производных в уравнении Шредингера порождает также волновое уравнение, но уже для иной механической субстанции, составленной целыми степенями массы и скорости.

Аналоги УШ и порождаемые ими величины движения

Градиент волновой функции равен

$$\nabla\Psi = \frac{i}{\hbar}m\mathbf{v}Ce^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{mv^2}{2}t - m\mathbf{vr})} .$$

Обе части волновой функции можно умножить на одну и ту же величину

$$\Psi = Ce^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{mv^2}{2}t - m\mathbf{vr})}\Bigg|\times\frac{i}{\hbar}m\mathbf{v} .$$

Из сопоставления этих двух уравнений вытекает следующий формальный аналог УШ (ФАУШ):

$$\nabla\Psi = \frac{i}{\hbar} m\mathbf{v}\Psi \,,$$

$$\nabla\Psi = \frac{i}{\hbar}\left(\frac{m\mathbf{v}^1}{1!}\right)\Psi \,,$$

который порождает величину механического движения первого порядка [6–8]

$$^1\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{1!}, \quad ^1 p = \frac{mv^1}{1!} \,. \tag{2}$$

Производная волновой функции равна

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\frac{mv^2}{2} Ce^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{mv^2}{2}t - m\mathbf{v}\mathbf{r})} \,.$$

$$\Psi = Ce^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{mv^2}{2}t - m\mathbf{v}\mathbf{r})}\Bigg| \times -\frac{i}{\hbar}\frac{mv^2}{2} \,.$$

Из сопоставления этих двух уравнений вытекает следующий ФАУШ:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\frac{mv^2}{2}\Psi \,,$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\left(\frac{mv^2}{2!}\right)\Psi \,,$$

который порождает величину механического движения второго порядка

$$^2 p = \frac{mv^2}{2!} \,. \tag{3}$$

Величины механического движения (1), (2), (3) известны.

Очевидно, что другие ФАУШ могут порождать величины механического движения других порядков.

Интегральный вектор Умова для кинетической энергии

Далее система координат выбирается таким образом, чтобы одна из осей совпадала с направлением движения. Тогда пространственные производные будут одномерными.

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\hbar^2}\frac{m^2v^4}{4} Ce^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{mv^2}{2}t - m\mathbf{v}\mathbf{r})}\Bigg| \times i\hbar \,, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r} = \frac{i}{\hbar} m\mathbf{v}Ce^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{mv^2}{2}t - m\mathbf{v}\mathbf{r})}\Bigg| \times \left(-\frac{mv^2\mathbf{v}}{4}\right).$$

ФАУШ

$$4i\hbar\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -mv^2\mathbf{v}\frac{\partial\Psi}{\partial r} \,,$$

$$4i\hbar\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -3!\left(\frac{mv^2\mathbf{v}}{3!}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial r} \,.$$

Он порождает величину механического движения третьего порядка

$$^{3}\mathbf{p} = \frac{mv^2\mathbf{v}}{3!}, \quad ^{3}p = \frac{mv^3}{3!}. \qquad (5)$$

Коэффициент 1/3! выбран для сохранения преемственности выражений (1), (2), (3).

Для установления смысла величины (5) можно обратиться к дифференциальному вектору Умова

$$d\mathbf{U} = w d\mathbf{v},$$

здесь w – плотность энергии.

Для кинетической энергии

$$d\mathbf{U} = \frac{mv^2}{2V} d\mathbf{v},$$

$$\mathbf{U}V = \frac{mv^2}{3!}\mathbf{v}.$$

V – объем.

Таким образом, величина (5) – это интегральный вектор Умова для кинетической энергии.

Обратный импульс

Сравнение выражения

$$\frac{\partial^3\Psi}{\partial r^3} = -\frac{i}{\hbar^3} m^3 v^2 \mathbf{v} C e^{-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{mv^2}{2}t - m\mathbf{v}\mathbf{r}\right)}$$

с формулой (4) приводит следующему ФАУШ:

$$\frac{\partial^3\Psi}{\partial r^3} = 4\frac{i}{\hbar}\frac{m}{v}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^3\Psi}{\partial r^3} = 4\frac{i}{\hbar}\left(0!\frac{m}{v}\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2},$$

который порождает величину механического движения минус первого порядка (обратный импульс)

$$^{-1}\mathbf{p} = 0!\frac{m\mathbf{v}}{v^2}, \quad ^{-1}p = 0!\frac{m}{v}.$$

Смысл этой величины и ее актуальность устанавливает

Теорема. В водородоподобном атоме величина $m_e v^{-1}$ квантуется. Фиксированным (неизменным) квантом является величина $m_e v_0^{-1}$, соответствующая основному энергетическому уровню.

Доказательство. В водородоподобном атоме полная, потенциальная и кинетическая энергии электрона связаны следующим образом [9]:

$$U_n = 2E_n, \quad E_{Kn} = -E_n. \qquad (6)$$

При этом

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{Z^2 m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2}.$$

Для основного энергетического уровня по аналогии с боровским радиусом a_0 скорость электрона можно обозначить v_0.

Из (6) следует

$$E_{K1} = \frac{m_e v_0^2}{2} = -E_1 = \frac{Z^2 m_e e^4}{8h^2 \varepsilon_0^2},$$

$$\frac{m_e}{v_0} = \pm \frac{2h\varepsilon_0 m_e}{Ze^2},$$

$$E_{Kn} = \frac{m_e v_n^2}{2} = -E_n = \frac{1}{n^2} \frac{Z^2 m_e e^4}{8h^2 \varepsilon_0^2},$$

$$\frac{m_e}{v_n} = \pm n \frac{2h\varepsilon_0 m_e}{Ze^2} = n \frac{m_e}{v_0}.$$

Теорема доказана.

Следствие:

$$\frac{m_e}{v_{n+1}} = \frac{m_e}{v_n} + \frac{m_e}{v_0}.$$

Порядки величин движения

Определение. Величина движения порядка n – это

$$^n p = k_n m v^n, \; k_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}, n \ge 0 \\ (-1)^{n+1}(n+1)!, n < 0 \end{cases}.$$

Величина движения любого порядка порождается соответствующим ФАУШ. Нетрудно заметить, что

$$^{n-1} p = \frac{d}{dv} {}^n p, n \ne 0.$$

Порядки величин движения и соответствующие им ФАУШ сведены в таблицу.

Порядки величин движения и соответствующие им ФАУШ

Величины движения	ФАУШ
$^n p = \dfrac{mv^n}{n!}$	$(-1)^n i\hbar \dfrac{\partial^{n-1}\Psi}{\partial t^{n-1}} = 2^{-n+1} m v^n \dfrac{\partial^{n-2}\Psi}{\partial x^{n-2}}$ при $n \ge 2$
$^3\mathbf{p} = \dfrac{mv^2\mathbf{v}}{3!}$, $^3 p = \dfrac{mv^3}{3!}$	$-i\hbar \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \dfrac{mv^2\mathbf{v}}{2^2} \dfrac{\partial\Psi}{\partial r}$
$^2 p = \dfrac{mv^2}{2!}$	$i\hbar \dfrac{\partial\Psi}{\partial t} = \dfrac{mv^2}{2^1}\Psi$
$^1\mathbf{p} = \dfrac{m\mathbf{v}}{1!}$, $^1 p = \dfrac{mv^1}{1!}$	$-i\hbar \dfrac{\partial\Psi}{\partial r} = \dfrac{m\mathbf{v}}{2^0}\Psi$
$^0 p = \dfrac{mv^0}{0!}$	$i\hbar \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} = 2^1 m \dfrac{\partial\Psi}{\partial t}$

Окончание таблицы

Величины движения	ФАУШ
${}^{-1}\mathbf{p} = 0!\dfrac{m\mathbf{v}}{v^2}, \quad {}^{-1}p = 0!mv^{-1}$	$-i\hbar\dfrac{\partial^3\Psi}{\partial r^3} = \dfrac{2^2 m\mathbf{v}}{v^2}\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$
${}^{-2}p = -1!mv^{-2}$	$i\hbar\dfrac{\partial^4\Psi}{\partial x^4} = 2^3 mv^{-2}\dfrac{\partial^3\psi}{\partial t^3}$
${}^{-3}\mathbf{p} = 2!\dfrac{m\mathbf{v}}{v^4}, \quad {}^{-3}p = 2!mv^{-3}$	$-i\hbar\dfrac{\partial^5\Psi}{\partial x^5} = \dfrac{2^4 m\mathbf{v}}{v^4}\dfrac{\partial^4\Psi}{\partial t^4}$
${}^{-n}p = (-1)^{n-1}(n-1)!mv^{-n}$	$(-1)^n i\hbar\dfrac{\partial^{n+2}\Psi}{\partial x^{n+2}} = 2^{n+1}mv^{-n}\dfrac{\partial^{n+1}\Psi}{\partial t^{n+1}}$ при $n \geq -1$

Заключение

Почти все полученные результаты явились следствием использования квантово-механических дифференциальных уравнений, однако сами по себе результаты являются преимущественно макромеханическими.

Величины механического движения различных порядков порождаются формальными аналогами уравнения Шредингера. К таким величинам относятся как известные (масса, импульс, кинетическая энергия), так и неизвестные (интегральный вектор Умова для кинетической энергии, обратный импульс и др.).

Во всех ФАУШ порядки частных производных отличаются на единицу. Для величин движения с положительной степенью скорости порядок временных производных выше, чем пространственных. Для величин с отрицательной степенью выше порядок пространственных производных.

Величины с нечетными степенями скорости допускают векторное представление.

Интегральный вектор Умова характеризует движение энергии тела.

Обратный импульс квантуется в водородоподобном атоме.

Список источников

1. *Алиев А.Р., Раджабов Ш.Ш.* Разложение по собственным функциям магнитного оператора Шредингера в ограниченных областях // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 69. С. 5–14. doi: 10.17223/19988621/69/1
2. *Мищарина Е.Ю., Либин Э.Е., Бубенчиков М.* О решении нестационарного уравнения Шредингера // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 5 (43). С. 28–34. doi: 10.17223/19988621/43/3
3. *Гладков С.О., Богданова С.Б.* К теории движения тел с переменной массой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 65. С. 83–91. doi: 10.17223/19988621/65/6
4. *Ковалевский А.П., Шаталин Е.В.* Выбор регрессионной модели зависимости массы тела от роста с помощью эмпирического моста // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 5(37). С. 35–47. doi: 10.17223/19988621/37/3
5. *Павлов В.Д.* Математические модели резонансных и антирезонансных процессов // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. 2021. № 1 (49). С. 17–27. doi: 10.20291/2079-0392-2021-1-17-27
6. *Белов Н.Н., Югов Н.Т., Саммель А.Ю., Степанов Е.Ю.* Исследование прочности прозрачной брони на высокоскоростной удар цилиндрическим ударником методом

компьютерного моделирования // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 67. С. 69–77. doi: 10.17223/19988621/67/7

7. *Герасимов А.В., Пашков С.В*. Численное моделирование группового удара высокоскоростных элементов по космическому аппарату // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 3 (29). С. 57–64.
8. *Афанасьева С.А., Бирюков Ю.А., Белов Н.Н., Буркин В.В., Ищенко А.Н., Карташов Ю.И., Касимов В.З., Фоменко В.В., Югов Н.Т*. Повышение эффективности высокоскоростного метания ударников с применением высокоэнергетических топлив с нанодисперсными наполнителями // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 2 (18). С. 67–79.
9. *Павлов В.Д.* Магнитный поток и его квантование // Известия Уфимского научного центра РАН. 2020. № 4. С. 25–28. doi: 10.31040/2222-8349-2020-0-4-25-28

References

1. Aliev A.R., Rajabov Sh.Sh. (2021) Razlozhenie po sobstvennym funktsiyam magnitnogo operatora Shredingera v ogranichennykh oblastyakh [Eigenfunction expansions of the magnetic Schrödinger operator in bounded domains]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 69. pp. 5–14. doi: 10.17223/19988621/69/1.
2. Mishcharina E.Yu., Libin E.E., Bubenchikov M.A. (2016) O reshenii nestatsionarnogo uravneniya Shredingera [On the solution of the nonstationary Schrödinger equation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 43. pp. 28−34. doi: 10.17223/19988621/43/3.
3. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2020) K teorii dvizheniya tel s peremennoy massoy [To the theory of motion of bodies with variable mass]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 65. pp. 83–91. doi: 10.17223/19988621/65/6.
4. Kovalevskiy A.P., Shatalin E.V. (2015) Vybor regressionnoy modeli zavisimosti massy tela ot rosta s pomoshch'yu empiricheskogo mosta [The choice of a regression model of the body weight on the height via an empirical bridge]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 37. pp. 35–47. doi: 10.17223/19988621/37/3.
5. Pavlov V.D. (2021) Matematicheskie modeli rezonansnykh i antirezonansnykh protsessov [Mathematical models of resonant and antiresonant processes]. *Vestnik Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta putey soobshcheniya – Bulletin of the Ural State University of Railways*. 49. pp. 17–27. doi: 10.20291/2079-0392-2021-1-17-27.
6. Belov N.N., Yugov N.T., Sammel A.Yu., Stepanov E.Yu. (2020) Issledovanie prochnosti prozrachnoy broni na vysokoskorostnoy udar tsilindricheskim udarnikom metodom komp'yuternogo modelirovaniya [Study of the transparent armor strength under a high-speed impact of a cylindrical impactor by computer modeling method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 67. pp. 69–77. doi: 10.17223/19988621/67/7.
7. Gerasimov A.V., Pashkov S.V. (2014) Chislennoe modelirovanie gruppovogo udara vysokoskorostnykh elementov po kosmicheskomu apparatu [Numerical simulation of the group hypervelocity elements impact on a spacecraft]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 29. pp. 57–64.
8. Afanas'eva S.A., Biryukov Yu.A., Belov N.N., Burkin V.V., Ishchenko A.N., Kartashov Yu.I., Kasimov V.Z, Fomenko V.V., Yugov N.T. (2012) Povyshenie effektivnosti vysokoskorostnogo metaniya udarnikov s primeneniem vysokoenergeticheskikh topliv s nanodispersnymi napolnitelyami [Increase of efficiency of high-speed throwing of strikers with application of

high-energy fuels with nanodispersed fillers]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 18. pp. 67–79.
9. Pavlov V.D. (2020) Magnitnyy potok i ego kvantovanie [Magnetic flux and its quantization]. *Izvestiya Ufimskogo nauchnogo tsentra RAN – Bulletin of the Ufa Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*. 4. pp. 25–28. doi: 10.31040/2222-8349-2020-0-4-25-28.

***Сведения об авторе*:**
Павлов Валентин Дмитриевич – кандидат технических наук, начальник научно-информационного отдела ЗАО «Владимирский электромеханический завод», Владимир, Россия. E-mail: pavlov.val.75@mail.ru

***Information about the author*:**
Pavlov Valentin D. (Candidate of Technical Sciences, Vladimir Electromechanical Plant, Vladimir, Russian Federation). E-mail: pavlov.val.75@mail.ru

Статья поступила в редакцию 23.11.2021; принята к публикации 12.07.2022

The article was submitted 23.11.2021; accepted for publication 12.07.2022