

Научная статья

УДК 532.61/534-141

doi: 10.17223/19988621/78/12

Волновые движения жидкого топлива в тороидальных сосудах с учетом капиллярного эффекта

Юй Чжаокай

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия, yuzhaokai933@mail.ru

Аннотация. Разработана методика решения задачи на определение собственных частот и форм колебаний капиллярной жидкости на основе метода конечных элементов. Дана количественная оценка влияния числа Бонда и объема заполнения сосуда жидкостью на поведение капиллярной жидкости в тороидальных сосудах. Из результатов следует, что в условиях микрогравитации сила поверхностного натяжения и граничное условие жидкости на линии трехфазного контакта играют важную роль при определении поведения жидкости.

Ключевые слова: микрогравитация, сила поверхностного натяжения, линия трехфазного контакта, собственная частота и форма, тороидальный сосуд, метод конечных элементов

Благодарности: Автор выражает благодарность руководителю доценту А.Н. Темнову за помощь в формулировке задачи и плодотворные обсуждения результатов работы.

Для цитирования: Юй Ч. Волновые движения жидкого топлива в тороидальных сосудах с учетом капиллярного эффекта // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 78. С. 151–165. doi: 10.17223/19988621/78/12

Original article

Sloshing of a liquid fuel in toroidal tanks with account for capillary effect

Yu Zhao Kai

*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation,
yuzhaokai933@mail.ru*

Abstract. A numerical approach is proposed to solve the linear sloshing problem of an incompressible inviscid liquid with account for surface tension effects, which are predominant in the low-gravity environment. A variational formulation is derived by the linearization of motion equations for the liquid near its initial equilibrium state with con-

sideration of a pressure drop on the free surface and a free-end boundary condition on the contact line. The continuous problem domain is discretized by the finite element method. After discretization, the classical generalized eigenvalue problem is obtained, whose solutions are the natural frequencies and mode shapes. Several examples show the effect of the Bond number and the fluid-filled volume on the liquid behavior in toroidal tanks. A comparison of numerical results with experimental measurements under ground conditions reveals that under microgravity condition, the surface tension force and the boundary condition on the contact line play an important role when determining the natural frequencies and mode shapes of the liquid sloshing. Each fluid-filled volume has its own characteristic Bond number, above which the natural frequencies approximate to the experimental values obtained under ground conditions. The presented results can be used in the coupling dynamic analysis of a spacecraft with propellant tanks.

Keywords: microgravity, surface tension force, contact line, natural frequency and mode shapes, toroidal tank, finite element method

Acknowledgments: The author is grateful to the supervisor associate professor A.N. Temnov for help in formulating the problem and discussion of the results of the work.

For citation: Yu, Z. (2022) Sloshing of a liquid fuel in toroidal tanks with account for capillary effect. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 78. pp. 151–165. doi: 10.17223/19988621/78/12

В современных ракетах и космических аппаратах имеются баки, частично заполненные жидким топливом. Явление плескания топлива в ракетах при больших эффективных силах тяготения и последствия этого явления широко известны и вполне изучены [1–3]. В настоящее время в связи с созданием орбитальных станций и разгонных блоков важную роль приобретает проблема плескания топлива в условиях микрогравитации ($g = 10^{-6} - 10^{-4}g_0$, где $g_0 = 9.81 \text{ м/сек}^2$), когда заметно проявляется влияние силы поверхностного натяжения.

В российских и зарубежных монографиях [4–5] обобщены результаты исследования статики и динамики жидкости в условиях, близких к невесомости. Равновесная свободная поверхность жидкости в условиях микрогравитации принимает криволинейную форму, которая отличается от плоской в наземных условиях и является функцией ряда параметров, в том числе геометрии полости, угла смачивания, числа Бонда и объема заполнения. До сих пор разработаны только численные методы для определения формы свободной поверхности капиллярной жидкости в осесимметричных сосудах простой формы (цилиндр, сфера и эллипсоид) [6–7].

В статьях [8–11] выражения потенциала скоростей жидкости и поля смещения представлены по ряду характерных функций и получена задача на определение собственных частот и форм колебаний капиллярной жидкости. Предложенные в этих работах приближенно-аналитические методы подходят только для сосудов простой формы. Для решения подобных задач в статьях [12–14] были использованы модифицированный метод Галеркина и метод конечных элементов.

Следует отметить, что в последнее время стали использоваться топливные баки более сложной формы – в виде коаксиального цилиндра и тороидальные, однако в них поведение жидкости с учетом капиллярного эффекта исследовано недостаточно.

Топливный бак представляет собой гидромеханическую систему газ–жидкость–твердая стенка. Вывод условий равновесия данной системы в условиях микрогравитации был подробно описан в статье [15], а в работе [16] представлено решение задачи о равновесии и колебаниях капиллярной жидкости в коаксиально-цилиндрических сосудах. В данной работе исследованы собственные колебания капиллярной жидкости в тороидальных сосудах на основе метода конечных элементов. В дальнейшем будем говорить о капиллярной или тяжелой жидкости в зависимости от того, учитывается капиллярный эффект или нет.

Постановка задачи о малых колебаниях капиллярной жидкости

Пусть вектор ускорения $\mathbf{g}$ действует параллельно продольной оси симметрии сосуда. Используем длину дуги s в качестве переменной для описания формы равновесной свободной поверхности. Введем цилиндрическую систему координат $or\theta z$ (рис. 1), а также на свободной поверхности Γ_0 криволинейную систему координат $os\theta h$ таким образом, чтобы поверхность Γ_0 имела уравнение $h = 0$, а координатные линии h были направлены по внешней нормали поверхности Γ_0 .

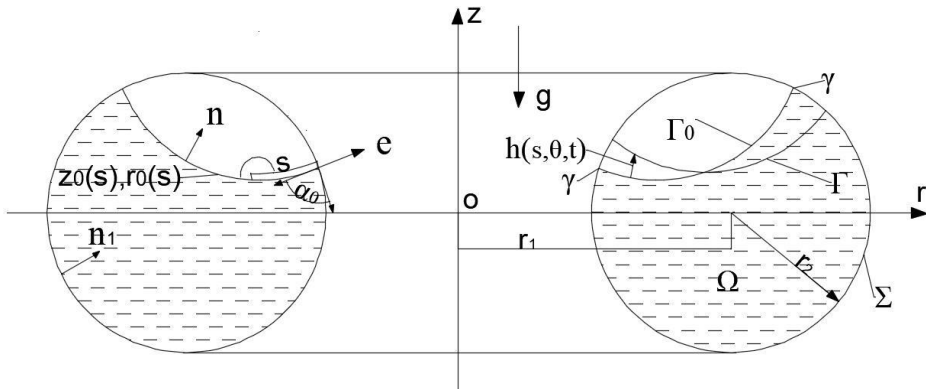


Рис. 1. Основные обозначения параметров жидкости:

$z_0(s)$ и $r_0(s)$ – функции равновесной свободной поверхности; α_0 – угол смачивания жидкости; $h(s, \theta, t)$ – отклонение возмущенной свободной поверхности Γ от Γ_0 по внешней нормали; γ – линия трехфазного контакта; Σ – смачиваемая поверхность сосуда; Ω – область, которую занимает жидкость; r_1 – радиус осевой окружности тора; r_2 – радиус окружности меридиана; $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}_1$ – нормали свободной поверхности и смачиваемой поверхности соответственно; $\mathbf{e}$ – внешняя нормаль линии контакта в касательной плоскости свободной поверхности

Fig. 1. General designations for parameters of a liquid:

$z_0(s)$ and $r_0(s)$ are the functions of an equilibrium free surface; α_0 is the contact angle; $h(s, \theta, t)$ is the deviation of the perturbed free surface Γ from the equilibrium one Γ_0 along the outward normal; γ is the contact line; Σ is the wetted surface of a vessel; Ω is the the area occupied by the liquid; r_1 is the radius of a torus axial circle; r_2 is the radius of a torus meridian circle; $\mathbf{n}$ and $\mathbf{n}_1$ are the normals to the free surface and to the wetted surface, respectively; and $\mathbf{e}$ is the outward normal to the contact line in a tangent plane of the free surface

Будем считать, что равновесная поверхность жидкости Γ_0 в неподвижном сосуда определена ($z = z_0(s)$, $r = r_0(s)$), и жидкость совершает малые колебания, которые подчиняются:

– уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

где φ – потенциал скоростей жидкости;

– условию непротекания на смачиваемой поверхности

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma. \quad (2)$$

Возмущенная свободная поверхность Γ может быть представлена в виде: $h = h(s, \theta, t)$, и линеаризованное кинематическое условие запишется как:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial h}{\partial t} \text{ на } \Gamma_0. \quad (3)$$

Динамическое условие на свободной поверхности вытекает из линеаризованного интеграла Коши–Лагранжа:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{p_d}{\rho} + gz_d = 0 \text{ на } \Gamma_0,$$

где p_d – динамическая составляющая давления и z_d – проекция отклонения свободной поверхности вдоль оси z .

В предположении отклонения свободной поверхности вдоль нормали z_d выглядит следующим образом:

$$z_d = h\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z = hr_{0s},$$

где $\mathbf{e}_z$ – единичный вектор оси z , а r_{0s} – первая производная функции $r_0(s)$ по длине дуги s .

Выражение динамической составляющей давления p_d частиц жидкости на свободной поверхности определяется из условия Лапласа для скачка давления $p_0 - p = 2\sigma K$, где σ – коэффициент поверхностного натяжения и K – средняя кривизна свободной поверхности.

Для равновесной и возмущенной свободной поверхности условие Лапласа имеет выражение:

$$p_0 - p_s = \sigma(k_1 + k_2), \quad p_0 - p = \sigma\left\{(k_1 + k_2) + \left[(k_1^2 + k_2^2)h + \Delta_\Gamma h\right]\right\},$$

где k_1 и k_2 – главные кривизны равновесной свободной поверхности, определяемые уравнениями: $k_1 = r_{0s}z_{0ss} - r_{0ss}z_{0s}$, $k_2 = z_{0s}/r_0$, здесь нижние индексы s и ss означают первую и вторую производные функции по длине дуги s соответственно;

$$\Delta_\Gamma = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{r_{0s}}{r} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \text{ – оператор Лапласа–Бельтрами на поверхности } \Gamma_0.$$

Из соотношения $p_d = p - p_s$ получим выражение динамической составляющей давления на свободной поверхности:

$$p_d = -\sigma\left[(k_1^2 + k_2^2)h + \Delta_\Gamma h\right].$$

Тогда получим динамическое условие на свободной поверхности в виде:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + ghr_{0s} - \frac{\sigma}{\rho}\left[(k_1^2 + k_2^2)h + \Delta_\Gamma h\right] = 0 \text{ на } \Gamma_0. \quad (4)$$

Для вывода краевого условия на линии трехфазного контакта используем условие Дюпре–Юнга: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1 = \cos(\alpha_0)$, и предположение сохранения угла смачива-

ния $\delta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1) = 0$ в процессе плескания жидкости. Тогда получим граничное условие на линии контакта [4. С. 103]:

$$\frac{\partial h}{\partial e} + \chi h = 0, \text{ где } \chi = \frac{k_1 \cos \alpha_0 - k_1^z}{\sin \alpha_0} \text{ на } \gamma, \quad (5)$$

где k_1^z – кривизна твердой стенки сосуда на линии контакта.

Введем радиус окружности меридиана тора r_2 как характерный размер длины и характерные значения для времени и потенциала: $t^* = (pr_2^3/\sigma)^{1/2}$, $\varphi^* = r_2^2/t^*$. Подставив величины $x = r_2 x'$, $t = t^* t'$ и $\varphi = \varphi^* \varphi'$ в уравнения (1–5), получим безразмерную формулировку задачи, в которой опускаем верхний знак ' над буквами:

$$\Delta \varphi = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial h}{\partial t} \text{ на } \Gamma_0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + B_0 h r_{0s} - \left[(k_1^2 + k_2^2) h + \Delta_\Gamma h \right] = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad \frac{\partial h}{\partial e} + \chi h = 0 \text{ на } \gamma, \quad (6)$$

где $B_0 = \rho g r_2^2 / \sigma$ – число Бонда, характеризующее соотношение массовой силы и силы поверхностного натяжения.

По сравнению с постановкой задачи о малых колебаниях жидкости без учета силы поверхностного натяжения капиллярная специфика в поставленной задаче (6) проявляется в динамическом условии на свободной поверхности и в граничном условии на линии трехфазного контакта.

Вариационная формулировка краевой задачи

Для определения конкретного решения поставленной задачи (6) следует задать начальные условия, например поле смещений h и скорость $\partial h / \partial t$ свободной поверхности в некоторый момент времени. В данной работе рассматриваются собственные колебания, т.е. решения, зависящие от времени t по гармоническому закону. Тогда потенциал скоростей жидкости $\varphi(r, z, \theta, t)$ и поле смещений свободной поверхности $h(s, \theta, t)$ можно представить в виде:

$$\varphi(r, z, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(r, z, \theta) e^{i\omega_n t}, \quad h(s, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(s, \theta) e^{i\omega_n t}.$$

где ω_n – безразмерная частота n -го тона колебаний жидкости.

Исключив переменную времени, получим задачу о собственных колебаниях жидкости с учетом силы поверхностного натяжения:

$$\Delta \varphi_n = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} = i\omega_n h_n \text{ на } \Gamma_0, \\ i\omega_n \varphi_n + B_0 h_n r_{0s} - \left[(k_1^2 + k_2^2) h_n + \Delta_\Gamma h_n \right] = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad \frac{\partial h_n}{\partial e} + \chi h_n = 0 \text{ на } \gamma.$$

Запишем вариационную формулировку задачи в виде:

$$-\int_{\Omega} \Delta \varphi_n \delta \varphi_n d\Omega + \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \delta \varphi_n d\Sigma + \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial n} + i\omega_n h_n \right) \delta \varphi_n d\Gamma_0 + \\ \int_{\Gamma_0} \left\{ \left[B_0 r_{0s} - (k_1^2 + k_2^2) \right] h_n - \Delta_\Gamma h_n + i\omega_n \varphi_n \right\} \delta h_n d\Gamma_0 + \int_{\gamma} \left(\frac{\partial h_n}{\partial e} + \chi h_n \right) \delta h_n d\gamma = 0.$$

Используя интегрирование по частям

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \Delta \varphi_n \delta \varphi_n d\Omega &= -\int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \delta \varphi_n d\Sigma - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \delta \varphi_n d\Gamma_0 + \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \delta \nabla \varphi_n d\Omega, \\ -\int_{\Gamma_0} \Delta_{\Gamma} h_n \delta h_n d\Gamma_0 &= -\int_{\gamma} \frac{\partial h_n}{\partial e} \delta h_n d\gamma + \int_{\Gamma_0} \nabla_{\Gamma} h_n \delta \nabla_{\Gamma} h_n d\Gamma_0, \end{aligned}$$

получим формулировку задачи в вариационном виде: $\delta \Pi_1 = 0$, где Π_1 – функционал, определяемый выражением

$$\Pi_1 = \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \nabla \varphi_n d\Omega + \int_{\Gamma_0} \left\{ \left[B_0 r_{0s} - (k_1^2 + k_2^2) \right] h_n^2 + \nabla_{\Gamma} h_n \nabla_{\Gamma} h_n \right\} d\Gamma_0 + \int_{\gamma} \chi h_n^2 d\gamma.$$

При использовании кинематического условия на свободной поверхности функционал Π_1 приобретает иной вид:

$$\begin{aligned} \Pi_1 = \int_{\Gamma_0} \left\{ \left[B_0 r_{0s} - (k_1^2 + k_2^2) \right] \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \right)^2 + \nabla_{\Gamma} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \right) \nabla_{\Gamma} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \right) \right\} d\Gamma_0 + \\ + \int_{\gamma} \chi \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \right)^2 d\gamma - \lambda_n \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \nabla \varphi_n d\Omega, \end{aligned}$$

где $\lambda_n = \omega_n^2$.

Чтобы установить связь между потенциалом скоростей жидкости φ_n и скоростью движения частиц жидкости на свободной поверхности $\partial \varphi_n / \partial n$, необходимо ввести вспомогательную задачу Неймана:

$$\Delta \varphi_n = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} = f \text{ на } \Gamma_0,$$

где f – заданная функция на свободной поверхности жидкости.

Вариационная формулировка задачи Неймана имеет вид:

$$\int_{\Omega} \Delta \varphi_n \delta \varphi_n d\Omega - \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \delta \varphi_n d\Sigma - \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial n} - f \right) \delta \varphi_n d\Gamma_0 = 0.$$

Аналогично можно преобразовать задачу Неймана в виде: $\delta \Pi_2 = 0$, где Π_2 – функционал, имеющий вид:

$$\Pi_2 = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \varphi_n d\Gamma_0 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \nabla \varphi_n d\Omega.$$

Сосуд осесимметричный, и волны в окружном направлении обладают свойством периодичности. Тогда можно записать $\varphi_n(r, z, \theta)$ и $h_n(s, \theta)$ в виде:

$$\varphi_n(r, z, \theta) = \Phi(r, z) \cos(m\theta), \quad h_n(s, \theta) = H(s) \cos(m\theta), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Отметим, что колебания, отвечающие числу волн в окружном направлении $m = 1$, имеют антисимметричную моду колебаний, и в этом случае возникает переменное результирующее давление на сосуд в поперечном направлении. Данный случай вызывает большой интерес в инженерной практике при проектировании систем управления космических аппаратов. Важное внимание также уделяется колебаниям, отвечающим значению $m = 0$, в которых переменная составляющая давления вдоль оси сосуда.

При заданном значении m можно преобразовать осесимметричную область жидкости из трехмерной в двухмерную:

$$\delta\Pi_1 = 0 \text{ и } \delta\Pi_2 = 0, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \Pi_1 = \int_{\Gamma_0} & \left\{ \left[B_0 r_{0s} - (k_1^2 + k_2^2) \right] \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \right)^2 + \frac{m^2}{r^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 \right] \right\} r ds + \\ & \left[\chi r \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 \right]_{\gamma} - \lambda_n \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 + \frac{m^2 \Phi^2}{r^2} \right] r dr dz, \\ \Pi_2 = \int_{\Gamma_0} & \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Phi r ds - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 + \frac{m^2 \Phi^2}{r^2} \right] r dr dz. \end{aligned}$$

Определение собственных частот и форм колебаний методом конечных элементов

Вариационная формулировка задачи (7) пригодна для применения метода конечных элементов, с помощью которого задача с распределенными параметрами преобразуется в задачу с конечными степенями свободы. В данной работе выбираем треугольный элемент для дискретизации области, занимаемой жидкостью, в правом сечении тороидального сосуда на рис. 1. Допустим, что на контуре свободной поверхности Γ_0 имеется p элементов линии, и i -й элемент имеет u узлов, а в плоском сечении области Ω , занятой жидкостью, получены q элементов треугольника, и i -й элемент имеет v узлов.

Функции $(\Phi)_i$ и $(\partial\Phi/\partial n)_i$ в i -м элементе на свободной поверхности Γ_0 можно представить по узловым значениям данного элемента [17–18]:

$$(\Phi)_i = \sum_{j=1}^u \Phi_{ij} M_j, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_i = \sum_{j=1}^u \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{ij} M_j,$$

где M_j – функция формы j -го узла элемента линии, Φ_{ij} и $(\partial\Phi/\partial n)_{ij}$ – j -е узловое значение функций Φ и $\partial\Phi/\partial n$ в i -м элементе линии.

Таким образом, функция $(\Phi)_i$ в i -м элементе в области жидкости Ω имеет вид:

$$(\Phi)_i = \sum_{j=1}^v \Phi_{ij} N_j,$$

где N_j – функция формы j -го узла элемента треугольника, Φ_{ij} – j -е узловое значение функции Φ в i -м элементе треугольника.

Поставив эти функции в функционал Π_2 ,

$$\begin{aligned} \Pi_2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^u \sum_{k=1}^u \Phi_{ij} \int_{\Gamma_{0i}} M_j M_k r ds \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{ik} - \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^v \sum_{k=1}^v \Phi_{ij} \int_{\Omega_i} \left[\frac{\partial N_j}{\partial r} \frac{\partial N_k}{\partial r} + \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial N_k}{\partial z} + \frac{m^2 N_j N_k}{r^2} \right] r dr dz \Phi_{ik}, \end{aligned}$$

получим функционал Π_2 в матричном виде:

$$\Pi_2 = \sum_{i=1}^p \Phi_i^T \mathbf{B}_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \Phi_i^T \mathbf{A}_i \Phi_i = \Phi_i^T \mathbf{B} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{1}{2} \Phi^T \mathbf{A} \Phi.$$

Здесь Γ_{0i} и Ω_i – i -й элемент на свободной поверхности и в области жидкости соответственно. В дальнейшем обозначим n_f – общее количество узлов на свободной поверхности, а n_l – общее количество узлов в области жидкости,

$$\begin{aligned}\Phi_v^T &= (\Phi_{i1}, \Phi_{i2}, \dots, \Phi_{iv}), \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right)_i = \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{i1}, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{i2}, \dots, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{iu} \right), \\ \Phi_i^T &= (\Phi_{i1}, \Phi_{i2}, \dots, \Phi_{iv}), \mathbf{B}_i = [\mathbf{B}_{jk}^i] \text{ и } \mathbf{B}_{jk}^i = \int_{\Gamma_{0i}} M_j M_k r ds, \\ \mathbf{A}_i &= [\mathbf{A}_{jk}^i] \text{ и } \mathbf{A}_{jk}^i = \int_{\Omega_i} \left[\frac{\partial N_j}{\partial r} \frac{\partial N_k}{\partial r} + \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial N_k}{\partial z} + \frac{m^2 N_j N_k}{r^2} \right] r dr dz, \\ \Phi_1^T &= (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n_f}), \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right)^T = \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_1, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_2, \dots, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{n_f} \right), \\ \Phi^T &= (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n_f}, \dots, \Phi_{n_l}) = (\Phi_1^T, \Phi_2^T).\end{aligned}$$

При составлении матриц элемента $\mathbf{B}_i$ и $\mathbf{A}_i$ применяется метод Гаусса, позволяющий повысить точность вычисления путем специального выбора узлов интегрирования [18]. Матрицы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$ составляются из матриц $\mathbf{B}_i$ и $\mathbf{A}_i$ соответственно, причем матрица $\mathbf{B}$ в порядке $n_f \times n_f$ и матрица $\mathbf{A}$ может быть записана в виде:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{A}_1$ в порядке $n_f \times n_f$, $\mathbf{A}_2$ в порядке $n_f \times (n_l - n_f)$, $\mathbf{A}_3$ в порядке $(n_l - n_f) \times n_f$ и $\mathbf{A}_4$ в порядке $(n_l - n_f) \times (n_l - n_f)$.

Выполнив вариацию функционала $\delta \Pi_2 = 0$

$$\delta \Pi_2 = \delta \Phi_1^T \left(\mathbf{B} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} - \mathbf{A}_1 \Phi_1 - \mathbf{A}_2 \Phi_2 \right) - \delta \Phi_2^T (\mathbf{A}_3 \Phi_1 + \mathbf{A}_4 \Phi_2) = 0,$$

получим следующую систему уравнений:

$$\mathbf{A}_1 \Phi_1 + \mathbf{A}_2 \Phi_2 = \mathbf{B} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}, \quad \mathbf{A}_3 \Phi_1 + \mathbf{A}_4 \Phi_2 = 0.$$

После решения системы уравнений представим Φ_1, Φ_2 через $\partial \Phi / \partial \mathbf{n}$:

$$\Phi_1 = \mathbf{A}_5^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}, \quad \Phi_2 = -\mathbf{A}_6 \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}},$$

где $\mathbf{A}_5 = \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3)$, $\mathbf{A}_6 = \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_5^{-1}$.

Аналогично преобразуем функционал Π_1 в матричной форме:

$$\Pi_1 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right)^T (\mathbf{B}_0 \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_4) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} - \lambda_n (\Phi_1^T, \Phi_2^T) \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix},$$

где матрицы $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$ и $\mathbf{B}_4$ имеют порядок $n_f \times n_f$ и составлены из матриц $\mathbf{B}_{1i}, \mathbf{B}_{2i}, \mathbf{B}_{3i}$ и $\mathbf{B}_{4i}$ соответственно, δ_{jk} – символ Кронекера,

$$\mathbf{B}_{1i} = [\mathbf{B}_{jk}^{1i}] \text{ и } \mathbf{B}_{jk}^{1i} = \int_{\Gamma_{0i}} r_{0s} M_j M_k r ds,$$

$$\mathbf{B}_{2i} = [\mathbf{B}_{jk}^{2i}] \text{ и } \mathbf{B}_{jk}^{2i} = \int_{\Gamma_{0i}} (k_1^2 + k_2^2) M_j M_k r ds,$$

$$\mathbf{B}_{3i} = [\mathbf{B}_{jk}^{3i}] \text{ и } \mathbf{B}_{jk}^{3i} = \int_{\Gamma_{0i}} \left[\frac{\partial M_j}{\partial s} \frac{\partial M_k}{\partial s} + \frac{m^2 M_j M_k}{r^2} \right] r ds,$$

$$\mathbf{B}_{4i} = [\mathbf{B}_{jk}^{4i}] \text{ и } \mathbf{B}_{jk}^{4i} = (\chi r)_\gamma \delta_{jk}.$$

Исключив Φ_1, Φ_2 через $\partial\Phi/\partial\mathbf{n}$, запишем функционал Π_1 в виде:

$$\Pi_1 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} \right)^T (\mathbf{K} - \lambda_n \mathbf{M}) \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}},$$

где

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}_0 \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_4,$$

$$\mathbf{M} = (\mathbf{A}_5^{-1})^T \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_5^{-1} - (\mathbf{A}_5^{-1})^T \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_6 - \mathbf{A}_6^T \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_5^{-1} + \mathbf{A}_6^T \mathbf{A}_4 \mathbf{A}_6.$$

При составлении матрицы $\mathbf{M}$ применяется метод Guyan reduction [19] для уменьшения числа степеней свободы задачи. Данный подход позволяет получить задачу, степени свободы которой совпадают с количеством узлов на свободной поверхности.

Из вариационной формулировки задачи $\delta\Pi_1 = 0$ получим задачу на определение собственных частот и форм колебаний капиллярной жидкости:

$$(\mathbf{K} - \lambda_n \mathbf{M}) \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} = 0.$$

Из вышесказанного вытекает, что методика решения задачи о малых колебаниях капиллярной жидкости в любом осесимметричном сосуде состоит в следующем:

- 1) определение формы равновесной свободной поверхности капиллярной жидкости $z = z_0(s)$, $r = r_0(s)$ и получение функций r_{0s} , k_1 , k_2 , χ ;
- 2) создание геометрической модели области жидкости и выполнение ее дискретизации треугольными элементами в программе PARTRAN;
- 3) обработка информации о координатах узлов и элементов в программе MATLAB;
- 4) получение матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$ и $\mathbf{B}_4$ с использования численного интегрирования функции методом Гаусса;
- 5) решение задачи на определение собственных частот и форм на основе метода Guyan reduction.

Обсуждение результатов

Отметим, что в данной работе исследованы только колебания, отвечающие числу волн в окружном направлении $m = 1$. В этом случае мода колебаний жидкости антисимметрична ($\cos\theta$), и возникает переменное результирующее давление на сосуд в поперечном направлении. Так как в литературе отсутствуют данные о колебаниях жидкости в тороидальных сосудах в условиях микрогравитации, проверка достоверности и сходимости разработанного алгоритма проведена в примере сферического сосуда. При $\beta = 50\%$ и $\alpha_0 = 90^\circ$ свободная поверхность жидкости в сферическом сосуде принимает плоскую форму, и полученная частота первого тона λ_1^* хорошо совпадает с численным значением, приведенным в литературе [12]. По сравнению с численными значениями из работы [13] видно, что только при

$\beta = 78\%$ есть заметное рассогласование, а при остальных объемах заполнения сосуда жидкостью имеется хорошее совпадение (табл. 1). Можно сделать вывод, что разработанный алгоритм может быть пригоден для исследований колебаний капиллярной жидкости в топливных баках.

Таблица 1

**Проверка достоверности алгоритма в случае сферического сосуда,
 $\lambda_1^* = \lambda_1/B_0$ и β – относительный объем заполнения сосуда жидкостью**

	$B_0 = 1, \alpha_0 = 5^\circ$			$B_0 = 2, \alpha_0 = 5^\circ$			$B_0 = 1\,000, \alpha_0 = 90^\circ$
$\beta, \%$	25	50	78	25	50	78	50
λ_1^* , полученные в данной статье	1.13	1.27	1.55	1.14	1.28	1.53	1.56
λ_1^* в литературе	1.33	1.41	2.03	1.11	1.23	1.83	1.54
	[13]						[12]

Данный алгоритм на основе метода конечных элементов также сходится при увеличении степени дискретизации области жидкости; соответствующие результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2

Анализ сходимости алгоритма при увеличении степени дискретизации области жидкости

	$B_0 = 1, \alpha_0 = 5^\circ$			$B_0 = 2, \alpha_0 = 5^\circ$			$B_0 = 1\,000, \alpha_0 = 90^\circ$
$\beta, \%$	25	50	78	25	50	78	50
Шаг 1	1.148	1.304	1.811	1.165	1.320	1.784	1.561
Шаг 2	1.140	1.290	1.691	1.155	1.310	1.623	1.560
Шаг 3	1.132	1.277	1.584	1.149	1.288	1.560	1.559
Шаг 4	1.129	1.267	1.550	1.143	1.280	1.529	1.558

На рис. 2 показаны формы равновесной свободной поверхности капиллярной жидкости в зависимости от числа Бонда. Так как сосуд осесимметричный и вектор ускорения параллелен оси симметрии, равновесная свободная поверхность представляет собой осесимметричную криволинейную поверхность, и здесь показан только ее контур в правом сечении сосуда. При уменьшении числа Бонда свободная поверхность более искривлена, и ее ориентация изменяется против хода часовой стрелки в тороидальных сосудах. Возможной причиной подобного явления является то, что при уменьшении числа Бонда влияние силы поверхностного натяжения становится больше и свободная поверхность стремится принимать форму с большей кривизной. Подобное явление наблюдалось в экспериментах, проводимых в башне невесомости, при объемах заполнения сосуда жидкостью $\beta \leq 20\%$ [20]. При этом с увеличением размера сосуда появляется тенденция увеличения диапазона β , в котором свободная поверхность принимает форму, представленную на рис. 2 при $B_0 = 0$. На самом деле в башне невесомости жидкость не успевает успокоиться до нужной степени за несколько секунд, особенно при большом ее объеме. Можно предположить, что при исключении ограничения времени эксперимента в башне невесомости форма установившейся свободной поверхности будет совпадать с численными результатами.

Реальное ракетное топливо имеет угол смачивания на стенке топливных баков, близкий к нулю, и это вызывает большое искривление свободной поверхности

около линии трехфазного контакта. На рис. 3 показана схема дискретизации области жидкости, и видно, что около линии трехфазного контакта требуется большая степень дискретизации для точного моделирования поведения жидкости в условиях микрогравитации.

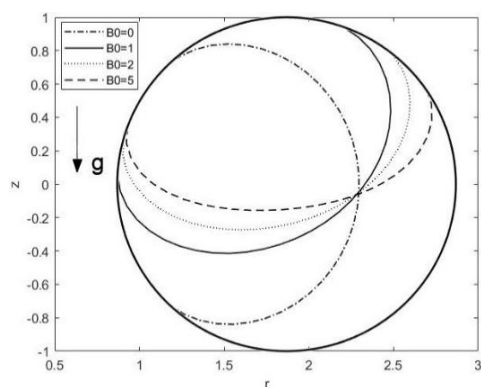


Рис. 2. Формы равновесия свободной поверхности в разных числах Бонда B_0 при $r_1 = 1.87$, $\alpha_0 = 5^\circ$, $\beta = 50\%$

Fig. 2. Free surface equilibrium shapes at various Bond numbers B_0 and $r_1 = 1.87$, $\alpha_0 = 5^\circ$, $\beta = 50\%$

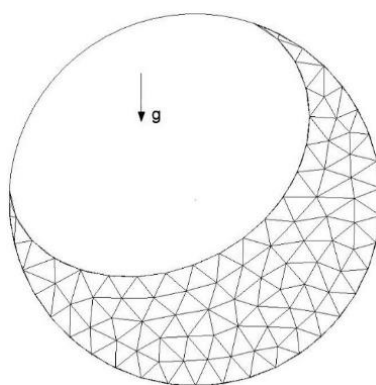


Рис. 3. Схема дискретизации области правого сечения жидкости в тороидальном сосуде

Fig. 3. Discretization scheme for a right cross-section of the liquid in a toroidal vessel

В табл. 3 приведены собственные частоты колебаний жидкости в условиях микрогравитации, и с повышением числа Бонда B_0 значения частот увеличиваются. Для каждого объема заполнения β существуют свои характерные числа Бонда, при превышении которых собственные частоты приближаются к экспериментальным значениям, полученным в наземных условиях [21].

Таблица 3

Собственная частота первого тона λ_1^* колебаний жидкости при $r_1 = 1.87$, $\alpha_0 = 5^\circ$

$\beta \backslash B_0$	1	2	3	4	5	6	8	10	1000	[21]
20%	0.051	0.074	0.085	0.089	—	—	—	—	0.103	0.084
50%	0.010	0.092	0.134	0.153	0.167	0.176	—	—	0.220	0.226
80%	—	—	—	0.046	0.085	0.127	0.191	0.217	0.384	0.406

Собственные формы колебаний жидкости относительно равновесной свободной поверхности в условиях микрогравитации показаны на рис. 4 для правого сечения тороидального сосуда. Отметим, что здесь исследованы только первые четыре тона ($n = 1, 2, 3, 4$) колебаний капиллярной жидкости при антисимметричной моде $m = 1$, т.е. $\cos\theta$. Сплошная линия показывает равновесное положение свободной поверхности, а пунктир — собственную форму.

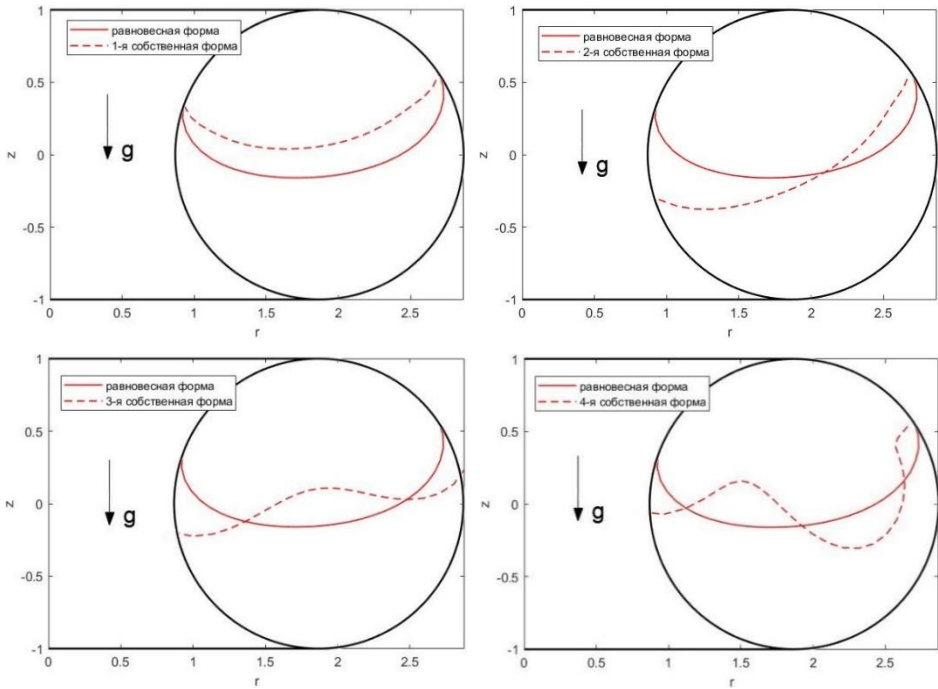


Рис. 4. Собственные формы первых четырех тонов колебаний жидкости
при $r_1 = 1.87$, $B_0 = 5$, $\alpha_0 = 5^\circ$, $\beta = 50\%$

Fig. 4. Natural modes of the first four liquid vibration modes
at $r_1 = 1.87$, $B_0 = 5$, $\alpha_0 = 5^\circ$, $\beta = 50\%$

С точки зрения количества узлов пересечения равновесной поверхности и собственной формы каждого тона колебаний жидкости полученные результаты похожи на экспериментальные результаты для тяжелой жидкости [21].

Заключение

В настоящей работе численно определены собственные частоты и формы колебаний капиллярной жидкости в тороидальных сосудах. Чтобы учитывать силу поверхностного натяжения и граничное условие жидкости на линии трехфазного контакта, введена вариационная формулировка задачи и для ее решения разработан численный алгоритм на основе метода конечных элементов. Из результатов исследований следует, что в условиях микрогравитации сила поверхностного натяжения вызывает сильное искривление свободной поверхности и скачок давления на ней. Искривление равновесной свободной поверхности и поведение жидкости около линии трехфазного контакта имеют большое влияние на собственные частоты и формы колебаний капиллярной жидкости, особенно в тороидальных сосудах. При увеличении числа Бонда свободная поверхность становится перпендикулярной к вектору ускорения и приближается к плоской, в этих условиях можно пренебречь влиянием капиллярного эффекта, и полученные результаты сходятся с экспериментальными значениями для тяжелой жидкости.

Список источников

1. Abramson H.N. The Dynamic Behavior of liquids in Moving Containers. NASA SP-106. 1966. 467 p.
2. Моисеев Н.Н., Петров А.А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объёма жидкости. М. : Вычислит. центр АН СССР, 1966. 272 с.
3. Микишев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. М. : Машиностроение, 1978. 247 с.
4. Мышкис А.Д., Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Копачевский Н.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Методы решения задачи гидромеханики для условий невесомости. Киев : Наукова думка, 1992. 592 с.
5. Dodge F.T. The new “Dynamic behavior of liquids in moving containers”. Southwest Research Inst., 2000. 195 p.
6. Полевиков В.К. О методах численного моделирования равновесных капиллярных поверхностей // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, № 7. С. 975–981.
7. Yang D., Yue B., Zhu L., Song X. Solving shapes of hydrostatic surface in rectangular and revolving symmetrical tanks under microgravity using shooting method // Chinese Journal of Space Science. 2012. V. 32, No. 1. P. 85–91. doi: 10.11728/cjss2012.01.085
8. Dodge F.T., Garza L.R. Experimental and Theoretical Studies of Liquid Sloshing at Simulated Low Gravity // ASME. J. Appl. Mech. 1967. V. 34, No. 3. P. 555–562. doi: 10.1115/1.3607743
9. Wang Z., Deng Z. Sloshing of Liquid in Spherical Tank at Low-gravity Environments // Chinese Journal of Space Science. 1985. V. 5, No. 4. P. 294–302.
10. Wang Z., Deng Z. On the Sloshing of Liquid in a Partially Filled Rectangular Tank under Low-gravity Condition // Journal of Tsinghua University. 1986. V. 26, No. 3. P. 1–9.
11. Utsumi M. Low-gravity propellant slosh analysis using spherical coordinates // Journal of Fluids and Structures. 1998. V. 12, No. 1. P. 57–83. doi: 10.1006/jfls.1997.0125
12. Chu W. Low-Gravity Fuel Sloshing in an Arbitrary Axisymmetric Rigid Tank // ASME. J. Appl. Mech. 1970. V. 37, No. 3. P. 828–837. doi: 10.1115/1.3408616
13. Dodge F.T., Green S.T., Kana D.D. Fluid management technology: liquid slosh dynamics and control. NASA CR-189107. 1991. 198 p.
14. Wang W., Li J., Wang T. Modal analysis of liquid sloshing with different contact line boundary conditions using FEM // Journal of Sound and Vibration. 2008. V. 317, is. 3–5. P. 739–759. doi: 10.1016/j.jsv.2008.03.070
15. Юй Чжаокай, Темнов А.Н. Исследование равновесной свободной поверхности капиллярной жидкости в тороидальном сосуде // Инженерный журнал: наука и инновации. 2021. Вып. 3. С. 1–11. doi: 10.18698/2308-6033-2021-3-2060
16. Юй Чжаокай, Темнов А.Н. Равновесие и колебания свободной поверхности жидкого топлива в коаксиально-цилиндрических сосудах в условиях микрогравитации // Инженерный журнал: наука и инновации. 2021. Вып. 8. С. 1–15. doi: 10.18698/2308-6033-2021-8-2099
17. Киричевский Р.В., Скринникова А.В. Влияние аппроксимирующих функций при построении матрицы жёсткости конечного элемента на скорость сходимости метода конечных элементов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 57. С. 26–38. doi: 10.17223/19988621/57/2
18. Bathe K.J. Finite element procedures. 2nd ed. Waterton, 2014. 1065 p.
19. Guyan R.J. Reduction of stiffness and mass matrices // AIAA Journal. 1965. V. 3, No. 2. P. 380–380. doi: 10.2514/3.2874
20. Symons E.P. Zero-gravity equilibrium configuration of liquid-vapor interface in toroidal tanks. NASA TN D-6076. 1970. 24 p.
21. Meserole J.S., Fortini A. Slosh dynamics in a toroidal tank // Journal of Spacecraft and Rockets. 1987. V. 24, No. 6. P. 523–531. doi: 10.2514/3.25948

References

1. Abramson H.N. (1966) *The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers*. NASA SP-106.
2. Moiseev N.N., Petrov A.A. (1966) *Chislennyye metody rascheta sobstvennykh chastot kolebaniy ogranichennogo ob"ema zhidkosti* [Numerical methods for calculating natural frequencies of vibrations of a limited liquid volume]. Moscow: Vychislitel'nyy tsentr AN SSSR.
3. Mikishev G.N. (1978) *Eksperimental'nye metody v dinamike kosmicheskikh apparatov* [Experimental methods in spacecraft dynamics]. Moscow: Mashinostroyeniye.
4. Myshkis A.D., Babitskiy V.G., Zhukov M.Yu., Kopachevskiy N.D., Slobozhanin L.A., Tyuptsov A.D. (1992) *Metody resheniya zadachi gidromekhaniki dlya usloviy nevesomosti* [Problem-solving procedures in hydromechanics for weightlessness conditions]. Kyiv: Naukova Dumka.
5. Dodge F.T. (2000) *The New "Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers"*. NASA SP-106.
6. Polevikov V.K. (1999) O metodakh chislennogo modelirovaniya ravnovesnykh kapillyarnykh poverkhnostey [On methods of numerical modeling of equilibrium capillary surfaces]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*. 35(7). pp. 975–981.
7. Yang D., Yue B., Zhu L., Song X. (2012) Solving shapes of hydrostatic surface in rectangular and revolving symmetrical tanks under microgravity using shooting method. *Chinese Journal of Space Science*. 32(1). pp. 85–91. doi: 10.11728/cjss2012.01.085.
8. Dodge F.T., Garza L.R. (1967) Experimental and theoretical studies of liquid sloshing at simulated low gravity. *Journal of Applied Mechanics*. 34(3). pp. 555–562. doi: 10.1115/1.3607743.
9. Wang Z., Deng Z. (1985) Sloshing of liquid in spherical tank at low-gravity environments. *Chinese Journal of Space Science*. 5(4). pp. 294–302.
10. Wang Z., Deng Z. (1986) On the sloshing of liquid in a partially filled rectangular tank under low-gravity condition. *Journal of Tsinghua University*. 26(3). pp. 1–9.
11. Utsumi M. (1998) Low-gravity propellant slosh analysis using spherical coordinates. *Journal of Fluids and Structures*. 12(1). pp. 57–83. doi: 10.1006/jfls.1997.0125.
12. Chu W. (1970) Low-gravity fuel sloshing in an arbitrary axisymmetric rigid Tank. *Journal of Applied Mechanics*. 37(3). pp. 828–837. doi: 10.1115/1.3408616.
13. Dodge F.T., Green S.T., Kana D.D. (1991) *Fluid Management Technology: Liquid Slosh Dynamics and Control*. NASA CR-189107.
14. Wang W., Li J., Wang T. (2008) Modal analysis of liquid sloshing with different contact line boundary conditions using FEM. *Journal of Sound and Vibration*. 317(3–5). pp. 739–759. doi: 10.1016/j.jsv.2008.03.070.
15. Yu Z., Temnov A.N. (2021) Issledovanie ravnovesnoy svobodnoy poverkhnosti kapillyarnoy zhidkosti v toroidal'nom sosude [Study of the equilibrium free surface of a capillary liquid in a toroidal vessel]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsiya – Engineering Journal: Science and Innovation*. 3. pp. 1–11. doi: 10.18698/2308-6033-2021-3-2060.
16. Yu Z., Temnov A.N. (2021) Ravnovesie i kolebaniya svobodnoy poverkhnosti zhidkogo topliva v koaksial'no-tsilindricheskikh sosudakh v usloviyakh mikrogravitatsiy [Equilibrium and oscillations of liquid fuel free surface in coaxial-cylindrical vessels under microgravity conditions]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsiya – Engineering Journal: Science and Innovation*. 8. pp. 1–15. doi: 10.18698/2308-6033-2021-8-2099.
17. Kirichevskiy R.V., Skrinnikova A.V. (2019) Vliyanie approksimiruyushchikh funktsiy pri postroenii matritsy zhostkosti konechnogo elementa na skorost' skhodimosti metoda konechnykh elementov [The effect of approximating functions in the construction of the stiffness matrix of the finite element on the convergence rate of the finite element method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 57. pp. 26–38. doi: 10.17223/19988621/57/2.
18. Bathe K.J. (2014) *Finite Element Procedures*. 2nd edition. Los Angeles: Waterton.

19. Guyan R.J. (1965) Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA Journal*. 3(2). pp. 380–380. doi: 10.2514/3.2874.
20. Symons E.P. (1970) *Zero-gravity Equilibrium Configuration of Liquid-Vapor Interface in Toroidal Tanks*. NASA TN D-6076.
21. Meserole J.S., Fortini A. (1987) SLOSH dynamics in a toroidal tank. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 24(6). pp. 523–531. doi: 10.2514/3.25948.

Сведения об авторе:

Юй Чжаокай – аспирант кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия. E-mail: yuzhaokai933@mail.ru

Information about the author:

Yu Zhao Kai (Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation). E-mail: yuzhaokai933@mail.ru

Статья поступила в редакцию 10.11.2021; принята к публикации 12.07.2022

The article was submitted 10.11.2021; accepted for publication 12.07.2022