ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

УДК 519.81 DOI 10.17223/20710410/57/7

МЕДИАНА ДЛЯ НЕЧЁТНОГО ЧИСЛА ОТНОШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ПОРЯДКА И ЕЁ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ГРУППОВОГО ВЫБОРА

В. Н. Нефедов

Московский авиационный институт, г. Москва, Россия

E-mail: nefedovvn@yandex.ru

Ищется медиана для нечётного числа отношений линейного порядка, заданных на конечном множестве A, также являющаяся линейным порядком на A. К подобной задаче приходим при исследовании некоторых задач группового выбора. В рассматриваемом случае бинарное отношение $\tilde{\rho}$, имеющее минимальное суммарное расстояние (по Хеммингу) до заданного набора бинарных отношений, является медианой для этих отношений, и притом единственной. Однако эта медиана не всегда является линейным порядком (или даже квазипорядком) и в этих случаях не может быть взята в качестве решения поставленной задачи. Тем не менее бинарное отношение $\tilde{\rho}$ обязательно принадлежит множеству $LA[n]$ (линейных асимметричных бинарных отношений на A), которому, в частности, принадлежат и все линейные порядки на A. Исследуются некоторые свойства бинарных отношений из $LA[n]$. Вводятся понятия «почти оптимального» и Δ-оптимального отношений, являющихся линейными порядками и одновременно точными решениями поставленной задачи. Приводятся алгоритмы их нахождения, основанные на полученных утверждениях относительно бинарных отношений из $LA[n]$ и имеющие полиномиальную вычислительную сложность. Рассматривается отношение эквивалентности на множестве $LA[n]$, позволяющее разбивать это множество на классы эквивалентности, количество которых K_n намного меньше числа элементов в $LA[n]$. Например, $|LA[5]| = 1024$, $K_5 = 12$. Таким образом, каждое бинарное отношение из $LA[n]$ эквивалентно в точности одному из K_n представителей классов эквивалентности, а следовательно, обладает его основными свойствами. Но тогда исследование широкого класса задач может быть сведено к рассмотрению сравнительно небольшого их набора. Процесс нахождения указанного набора представителей классов эквивалентности иллюстрируется для $n = 2, 3, 4, 5$. Приводится также метод решения поставленной задачи, использующий представление бинарных отношений в виде графов (метод выделения минимальных множеств представителей контуров в медиане $\tilde{\rho}$), имеющий экспоненциальную вычислительную сложность.

Ключевые слова: *медиана отношений, отношение линейного порядка, линейные отношения, асимметричные отношения, расстояние Хемминга, классы эквивалентности, задача группового выбора.*

MEDIAN FOR AN ODD NUMBER OF LINEAR ORDER RELATIONS AND ITS USE IN GROUP CHOICE PROBLEMS

V. N. Nefedov

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia

We consider the problem of constructing a median for an odd set of linear order relations defined on a finite set $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, which is also sought in the class of linear order relations. We arrive at a similar problem when considering some group choice problems. The distance between binary relations is the Hamming distance between their adjacency matrices. In the case under consideration, the binary relation $\tilde{\rho}$, which has the minimum total distance to the given set of binary relations, is the median for these relations and, moreover, is unique. However, this median is not always transitive (and in this case is neither linear order, nor even a quasi-order), and therefore cannot be taken as a solution to a given problem. However, the median $\tilde{\rho}$ necessarily belongs to the set $LA[n]$ (of linear asymmetric binary relations on A), to which, in particular, all linear orders on A also belong. Some properties of binary relations from $LA[n]$ are investigated. The concepts of "almost optimal" and Δ-optimal relations are introduced, which are linear orders and, at the same time, exact solutions of the stated problem. Algorithms for finding them are given, based on the obtained statements about binary relations from $LA[n]$ and having polynomial computational complexity. An equivalence relation on the set $LA[n]$ is considered, which allows one to divide this set into equivalence classes, the number of which K_n is much less than the number of elements in $LA[n]$. For example, $|LA[5]| = 1024$, $K_5 = 12$. Thus, each binary relation from $LA[n]$ is equivalent to exactly one of the K_n representatives of the equivalence classes and, therefore, has its main properties. But then the study of a wide class of problems can be reduced to considering a relatively small set of them. The process of finding the specified set of equivalence class representatives is illustrated for $n = 2, 3, 4, 5$. A method for solving the problem posed is also given, using the representation of binary relations in the form of graphs (the method of selecting the minimum sets of contour representatives in the median $\tilde{\rho}$), which has exponential computational complexity.

Keywords: *median of relations, linear order relation, linear relations, asymmetric relations, Hamming distance, equivalence classes, group choice problem.*

Введение

Рассматривается задача нахождения медианы для нечётного числа отношений линейного порядка, которая ищется также в классе отношений линейного порядка. К подобной постановке приходим, например, при рассмотрении задачи группового выбора [1−15], когда профиль экспертных предпочтений определяется бинарными отношениями $\rho_1, \ldots, \rho_m$, заданными на конечном множестве альтернатив $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. В этом случае для обеспечения согласованности агрегированного отношения с профилем экспертных предпочтений часто ищется (см., например, [1−3]) бинарное отношение ρ, которое имеет минимальное суммарное расстояние $D(\rho)$ до бинарных отношений, задающих экспертные предпочтения, и которое принято называть *медианой для этих отношений* (*точной медианой*). Расстояние между бинарными отношениями определяется в настоящей работе (аналогично [1]) по формуле Хемминга: сумма модулей разности элементов матриц смежности этих отношений. При этом в случае, когда экспертные предпочтения задаются линейными порядками при нечётном числе экспертов, медиана определяется однозначно по правилу «большинства» [1]. Тем не менее часто медиана не обладает свойством транзитивности, т. е. не является ни линейным порядком, ни даже квазипорядком (т. е. не является строгой или нестрогой ранжировкой). Но тогда в случае, когда агрегированное отношение ищется в виде ранжировки, эта медиана не может быть взята в качестве окончательного решения. Одним из возможных выходов из этой ситуации является нахождение *линейно упорядоченной медианы*, которая соответствует случаю, когда минимальное суммарное расстояние до бинарных отношений, задающих экспертные предпочтения, ищется не на множестве всех возможных бинарных отношений, а на множестве отношений линейного порядка. Такой подход рассматривается во многих работах (см., например, [1] вместе с ссылками на другие работы). И если при этом разница между двумя получаемыми таким образом минимальными суммарными расстояниями невелика, то в качестве искомого агрегированного отношения можно взять линейно упорядоченную медиану (или наиболее предпочтительную, если их несколько). Поскольку для нахождения линейно упорядоченной медианы используется точная медиана и она в нашем случае единственная, будем её обозначать через $\tilde{\rho}$. Следует оговориться, что в общем случае используемый подход применим лишь при небольшом количестве альтернатив (по-видимому, не больше 30), т. е. для достаточного узкого класса задач. В случаях, когда агрегированное отношение ищется при более слабых предположениях (например, в виде нестрогой ранжировки), следует рассматривать иные, более простые и эффективные (для этих случаев) подходы, в частности представленные в [15].

Множество линейно упорядоченных бинарных отношений, т. е. рефлексивных, антисимметричных, транзитивных и с попарно сравнимыми элементами (линейных) на конечном множестве, состоящем из n элементов, обозначим $LO[n]$. Как уже отмечалось, в случае, когда $\rho_1, \ldots, \rho_m \in LO[n]$ и m нечётно, бинарное отношение $\tilde{\rho}$ может не принадлежать $LO[n]$, однако обязательно принадлежит $LA[n]$ — множеству всех рефлексивных антисимметричных линейных бинарных отношений на n-элементном множестве. Множество $LA[n]$ является предметом детального исследования в п. 1–4.

Таким образом, основной задачей, рассматриваемой в работе, является нахождение отношений $\rho \in LO[n]$, доставляющих минимум величине $D(\rho)$ — сумме расстояний от ρ до заданных $\rho_1, \ldots, \rho_m \in LO[n]$, в частности задаваемых экспертами в случае задачи группового выбора, где m нечётно. Такая задача может быть решена методом простого перебора. Однако при больших n такой подход трудно реализуем. Чтобы увеличить допустимое значение n, можно использовать метод ветвей и границ. Одна из возможных схем применения этого метода указана в [13, с. 3]. В проведённых численных экспериментах при использовании метода ветвей и границ удалось даже на маломощном компьютере найти численное решение задачи при $n = 26$.

Возможен и другой подход, описанный в п. 2. В этом подходе исследуем множества $\{\rho \in LO[n] : D(\rho) = D(\tilde{\rho}) + \Delta\}$ для значений $\Delta \in \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ (значение $D(\rho)$ всегда чётно) и ищем минимальное Δ, при котором множество не пусто. Решения, соответствующие этому Δ, в случае $\Delta > 0$ назовём Δ-*оптимальными*, а при $\Delta = 2$ — *почти оптимальными*. Проверка выполнения условия $\{\rho \in LO[n] : D(\rho) = D(\tilde{\rho})\} \neq \varnothing$ является алгоритмически простой, и в случае его выполнения $\tilde{\rho} \in LO[n]$, т. е. является единственным решением поставленной задачи.

Следующий по важности случай соответствует выполнению условий $\tilde{\rho} \notin LO[n]$, $\{\rho \in LO[n] : D(\rho) = D(\tilde{\rho}) + 2\} \neq \varnothing$. В этом случае существует бинарное отношение ρ, являющееся линейным порядком и удовлетворяющее условию $D(\rho) = D(\tilde{\rho}) + 2$, т. е. имеющее «почти» минимальное суммарное расстояние до бинарных отношений

$\rho_1, \ldots, \rho_m$, а именно с минимально возможным отклонением от $D(\tilde{\rho})$, равным 2. Этот случай подробно рассматривается в п. 2. Приводятся легко проверяемые необходимые и достаточные условия его выполнения, а также алгоритм выделения всех возможных решений (с вычислительной сложностью $O(n^2)$). Кроме того, описан простой алгоритм (с полиномиальной вычислительной сложностью) нахождения всех возможных решений для каждого последующего множества $\{\rho \in LO[n] : D(\rho) = D(\tilde{\rho}) + \Delta\}$, где $\Delta = 4, 6, \ldots$, если предыдущие оказались пустыми.

Отметим: множество Δ-оптимальных решений даёт все множество $\operatorname{Arg} \min\limits_{\rho \in LO[n]} D(\rho)$, т. е. является точным решением поставленной задачи. Термин «Δ-оптимальность» говорит об отклонении на Δ величины $\min\limits_{\rho \in LO[n]} D(\rho)$ от $D(\tilde{\rho})$.

Одним из двух необходимых условий для «почти оптимальности» отношения $\tilde{\rho} \notin LO[n]$ является условие $\tilde{\rho} \in LA^{(2)}[n]$, где $LA^{(2)}[n]$ — множество всех бинарных отношений из $LA[n] \setminus LO[n]$, имеющих расстояние по Хеммингу до ближайшего линейного порядка, равное 2. В п. 2 и 3 приводятся утверждения о структуре множества $LA^{(2)}[n]$, в частности получена формула для $|LA^{(2)}[n]|$, дающая возможность определить долю этого множества в $LA[n] \setminus LO[n]$. Например, $|LA^{(2)}[5]| = 480$, $|LA[5] \setminus LO[5]| = 904$.

В п. 3 исследуется также структура множества $LA[n]$. Рассматривается отношение эквивалентности на $LA[n]$, позволяющее разбивать это множество на классы эквивалентности, количество которых K_n намного меньше числа элементов в $LA[n]$. Например, $|LA[5]| = 1024$, $K_5 = 12$. В частности, $\tilde{\rho}$ эквивалентно в точности одному из K_n представителей классов эквивалентности, а следовательно, обладает его основными свойствами. Таким образом, исследование широких классов бинарных отношений может быть сведено к рассмотрению сравнительно небольшого набора их представителей. Процесс нахождения указанного семейства представителей классов эквивалентности иллюстрируется для $n = 2, 3, 4, 5$.

В п. 4 приводятся некоторые методы сведения исходной задачи к одной или нескольким задачам меньшей размерности.

В п. 5 представлен метод решения поставленной задачи, использующий представление бинарных отношений в виде графов (метод выделения минимальных множеств представителей контуров в медиане $\tilde{\rho}$) и имеющий экспоненциальную вычислительную сложность.

Полученные результаты могут быть использованы при построении для единственного эксперта линейного порядка на множестве альтернатив, максимальным образом учитывающего результаты их попарного сравнения. В [1, 12] приведён следующий пример: изучались гастрономические предпочтения собаки на совокупности из шести видов пищи. Каждое утро перед собакой выставляли два вида пищи; считалось, что она отдаёт предпочтение тому виду, с которого начинает завтрак. Результаты сравнений можно свести в матрицу, являющуюся матрицей смежности некоторого бинарного отношения $\rho_1 \in LA[6]$. Требуется найти $\operatorname{Arg} \min\limits_{\rho \in LO[n]} D(\rho)$, где $D(\rho)$ в данном случае совпадает с $d(\rho, \rho_1)$ — расстоянием Хемминга между ρ, ρ_1. Эту задачу можно обобщить на случай, когда исследуются предпочтения нечётного числа испытуемых, для каждого из которых на основании попарных сравнений строится бинарное отношение $\rho_i \in LA[n]$, $i = 1, \ldots, m$. В этом случае, как и ранее, при решении задачи группового выбора приходим к поиску $\operatorname{Arg} \min\limits_{\rho \in LO[n]} D(\rho)$, где $D(\rho)$ имеет тот же вид, что и в случае $\rho_i \in LO[n]$. Оказывается, что в случае $\rho_i \in LA[n]$ также выполняется

$\tilde{\rho} \in LA[n]$ и, более того, все изложенные в работе результаты переносятся и на этот случай, что учитывается в условиях приводимых утверждений.

Замечание 1. Возможны и другие способы задания расстояния между бинарными отношениями, например по формуле Кемени — Снелла [14, 15]. Эта формула используется для нахождения расстояния между ранжировками. При этом в случае линейных порядков (строгих ранжировок) значения расстояний по Хеммингу и по Кемени — Снеллу совпадают (совпадение этих значений будет и в случае, когда отношения принадлежат $LA[n]$).

Замечание 2. Условие нечётности m может показаться весьма ограничительным. Однако в случае чётного m, если, например, выбрать из $\rho_1, \ldots, \rho_m$ бинарное отношение ρ_i с минимальным значением $D_i(\rho) = \sum\limits_{t=1}^{m} d(\rho_i, \rho_t)$ (т. е. с минимальным суммарным расстоянием до остальных отношений) и продублировать его, то будем иметь нечётное число отношений.

1. Основные понятия, определения и вспомогательные утверждения

Пусть $A = \{a_1, a_2 \ldots, a_n\}$. Будем рассматривать бинарные отношения ρ на множестве A, т. е. множества упорядоченных пар $\rho \subseteq A^2$, или кратко $\rho \in 2^{A^2}$. Матрицу смежности бинарного отношения $\rho \in 2^{A^2}$ будем обозначать $R(\rho) = [r_{ij}]_{n\times n}$, где $r_{ij} = 1 \Leftrightarrow (a_i, a_j) \in \rho$. Расстоянием (по Хеммингу) между отношениями $\rho, \rho' \in 2^{A^2}$ назовём величину $d(\rho, \rho') = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} |r_{ij} - r'_{ij}|$.

Пусть имеется набор бинарных отношений $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \in 2^{A^2}$ с матрицами смежности $R^{(1)}, R^{(2)}, \ldots, R^{(m)}$, где $R^{(t)} = R(\rho_t) = \left[r_{ij}^{(t)}\right]_{n\times n}$, $t = 1, 2, \ldots, m$. Поставим ему в соответствие матрицы $P = \sum\limits_{t=1}^{m} R^{(t)} = [p_{ij}]_{n\times n}$, $L = P - P^{\mathrm{T}} = [l_{ij}]_{n\times n}$ (T — операция транспонирования матриц), т. е. $p_{ij} = \sum\limits_{t=1}^{m} r_{ij}^{(t)}$, $l_{ij} = p_{ij} - p_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, а также функцию $D(\rho) = \sum\limits_{t=1}^{m} d(\rho, \rho_t)$, где $\rho \in 2^{A^2}$, $R(\rho) = [r_{ij}]_{n\times n}$.

Рассмотрим для данного набора бинарных отношений $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \in 2^{A^2}$ *мажоритарное отношение* $\tilde{\rho} \in 2^{A^2}$, однозначно определяемое по «правилу большинства» $\tilde{r}_{ij} = 1 \Leftrightarrow l_{ij} \geqslant 0$, где $R(\tilde{\rho}) = [\tilde{r}_{ij}]_{n\times n}$. Будем, кроме того, использовать *нестрогий мажоритарный граф* $\tilde{G} = (A, \tilde{\rho})$ с множеством вершин A и множеством дуг $\tilde{\rho}$. Мажоритарный граф $\tilde{G}$ можно считать нагруженным, если поставить в соответствие каждой дуге $(a_i, a_j) \in \tilde{\rho}$ вес l_{ij}. Определим матрицу весов $C = [c_{ij}]_{n\times n}$ этого графа:

$$c_{ij} = \begin{cases} l_{ij}, & \text{если} (a_i, a_j) \in \tilde{\rho}, \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Нам понадобится

Теорема 1 [1]. Пусть $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ — произвольные бинарные отношения на $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Тогда суммарное расстояние $D(q) = \sum\limits_{t=1}^{m} d(q, \rho_t)$ принимает минимальное значение относительно всех бинарных отношений $q \in 2^{A^2}$ тогда и только тогда, когда для $R(q) = [q_{ij}]_{n\times n}$ выполняется: $q_{ij} = 1 \Leftrightarrow r_{ij}^{t} = 1$ не менее чем для $m/2$ значений $t \in \{1, \ldots, m\}$, где $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. При этом в случае $\sum\limits_{t=1}^{m} r_{ij}^{t} = m/2$ (т.е. при чётном m) $D(q)$ остаётся минимальным при любом выборе $q_{ij} \in \{0, 1\}$.

В настоящей работе предполагается, что $\rho_t \in LA[n]$ (в частном случае $\rho_t \in LO[n]$), $t = 1, \ldots, m$. Заметим в этой связи, что если $\rho \in LA[n], R(\rho) = [r_{ij}]_{n\times n}$, то из определения $LA[n]$ следует, что

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \;\; r_{ii} = 1, \;\; i \neq j \Rightarrow r_{ij} + r_{ji} = 1, \tag{1}$$

а следовательно, в силу сделанного предположения

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \;\; i \neq j \Rightarrow p_{ij} + p_{ji} = \sum_{t=1}^{m} \left(r_{ij+}^{(t)} r_{ji}^{(t)} \right) = \sum_{t=1}^{m} 1 = m. \tag{2}$$

Используя (1) и (2), нетрудно показать, что справедливо

Утверждение 1 [13]. Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_m \in LA[n]$ и m нечётно. Тогда для мажоритарного отношения $\tilde{\rho}$ выполняется $\tilde{\rho} \in LA[n]$, при этом $\tilde{r}_{ij} = 1 \Leftrightarrow r_{ij}^{t} = 1$ для большинства значений $t \in \{1, \ldots, m\}$.

Следствие 1. Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_m \in LA[n]$ и m нечётно. Тогда из теоремы 1 и утверждения 1 получаем, что мажоритарное отношение $\tilde{\rho}$ принадлежит $LA[n]$, при этом $\operatorname{Arg}\min\limits_{q \in 2^{A^2}} D(q) = \{\tilde{\rho}\}$.

Приведём некоторые вспомогательные утверждения относительно $LO[n]$, $LA[n]$. Из определений следует, что $LO[n] \subseteq LA[n]$; $\forall \rho \in LA[n]$ $\big(\rho \in LO[n] \Leftrightarrow \rho$ транзитивно на $A\big)$. Кроме того, из определения $LA[n]$ получаем

Утверждение 2. Пусть $\rho_1, \rho_2 \in LA[n]$. Тогда $d(\rho_1, \rho_2)$ чётно.

Следствие 2. Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_m \in LA[n]$. Тогда $D(\rho)$ чётно для всех $\rho \in LA[n]$.

Из утверждения 1 и следствий 1 и 2 получаем

Утверждение 3. Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_m \in LA[n]$ и m нечётно. Тогда $\min\limits_{q \in 2^{A^2}} D(q)$ чётно.

Приведём простое условие проверки того, что $\rho \in LO[n]$, для $\rho \in LA[n]$. Для этого понадобятся некоторые обозначения.

Пусть $n \geqslant 2$, $\rho \in 2^{A^2}$, $R(\rho) = [r_{ij}]_{n\times n}$. Обозначим $\kappa_i(\rho) = \sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij}$ — количество единиц в i-й строке матрицы $R(\rho)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$; $I(\rho) = \langle i_1, \ldots, i_n \rangle$, где $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_n \leqslant n$, $i_1, \ldots, i_n \in \{\kappa_1(\rho), \ldots, \kappa_n(\rho)\}$, причём для всех $j \in \{1, \ldots, n\}$ компонента i_j входит в $I(\rho)$ столько раз, в скольких строках количество единиц равно i_j.

Пример 1. Пусть бинарные отношения $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in 2^{A^2}$ при $n = 4$ заданы матрицами $R(\rho_i)$, $i = 1, 2, 3$:

$$R(\rho_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R(\rho_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad R(\rho_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда $I(\rho_1) = \langle 2, 3, 3, 3 \rangle$, $I(\rho_2) = \langle 1, 2, 3, 4 \rangle$, $I(\rho_3) = \langle 2, 2, 3, 3 \rangle$, $d(\rho_1, \rho_2) = 5$. При этом $\rho_1 \notin LA[4]$ (см. выделенные элементы в $R(\rho_1)$), $\rho_2 \in LO[4]$, $\rho_3 \in LA[4] \setminus LO[4]$.

Нетрудно показать [13], что справедливо

Утверждение 4. Пусть $\rho \in LA[n]$. Тогда $\rho \in LO[n] \Leftrightarrow I(\rho) = \langle 1, 2, \ldots, n \rangle$.

Замечание 3. Условие $I(\rho) = \langle 1, 2, \ldots, n \rangle$, где $\rho \in 2^{A^2}$, проверяется сложением n элементов каждой из n строк матрицы $R(\rho)$, т. е. имеет вычислительную сложность $O(n^2)$. Проверка условия $\rho \in LA[n]$, которая сводится к проверке выполнения (1), также имеет вычислительную сложность $O(n^2)$. Следовательно, проверка условия $\rho \in LO[n]$ имеет вычислительную сложность $O(n^2)$.

Таким образом, в случае, когда $\rho_1, \ldots, \rho_m \in LA[n]$ и m нечётно, мажоритарное отношение $\tilde{\rho}$, определяемое по «правилу большинства» из матриц P, L, принадлежит $LA[n]$, но может не принадлежать $LO[n]$. Поскольку мы ищем множество $\operatorname{Arg}\min\limits_{\rho \in LO[n]} D(\rho)$, нас интересуют отношения $\rho \in LO[n]$ со значениями $D(\rho)$, имеющими минимальное отклонение от $D(\tilde{\rho})$. В связи с этим можно рассматривать два типа задач: «полную» и «частичную». Решением «полной» задачи является безусловное (т. е. без дополнительных ограничений) нахождение множества всех отношений из $\operatorname{Arg}\min\limits_{\rho \in LO[n]} D(\rho)$. Такая задача в общем случае является экспоненциально сложной. Некоторыми методами её решения являются перебор, в том числе с использованием метода ветвей и границ (см. введение), а также метод (см. п. 5), основанный на исследовании графа $\tilde{G} = (A, \tilde{\rho})$. «Частичная» задача заключается в предварительном выяснении существования для заданного $\Delta_0 \in \{0, 2, 4, \ldots\}$ (см. следствие 2) отношения $\rho \in LO[n]$ с $D(\rho) \leqslant D(\tilde{\rho}) + \Delta_0$, и только в случае положительного ответа — в нахождении $\operatorname{Arg}\min\limits_{\rho \in LO[n]} D(\rho)$ (в случае отрицательного ответа считаем, что приемлемого отношения не существует). Как показано далее, такая задача является полиномиально сложной.

Замечание 4. Функцию $D(\rho) = \sum\limits_{t=1}^{m} d(\rho, \rho_t)$ можно модифицировать, добавив коэффициенты при $d(\rho, \rho_t)$. Возможный часто используемый подход заключается в следующем: в рассмотрение вводятся величины $D(\rho_t)$, $t = 1, \ldots, m$. В случае задачи выбора эти величины характеризуют «согласованность» i-го эксперта с другими экспертами: чем эта величина больше, тем «хуже» согласованность. Далее рассматриваются коэффициенты $\mu_t = \mu / D(\rho_t)$, где $\mu = \left[\sum\limits_{i=1}^{n} 1/D(\rho_i) \right]^{-1}$, $\sum\limits_{t=1}^{m} \mu_t = 1$. Таким образом, наряду с $D(\rho)$ можно использовать функцию $\tilde{D}(\rho) = \sum\limits_{t=1}^{m} \mu_t d(\rho, \rho_t)$. Можно рассматривать $\tilde{D}(\rho)$ как основную функцию (вместо $D(\rho)$), минимизация которой обеспечивает согласованность агрегированного отношения с профилем экспертных предпочтений, либо как вспомогательную — в случае неоднозначности выбора из $\operatorname{Arg}\min\limits_{\rho \in LO[n]} D(\rho)$ (для двухэтапной минимизации). Существует также немало процедур, позволяющих задавать коэффициенты предпочтительности α_i для альтернатив (процедура Коупленда и др. [5–8]), с учётом которых приходим к функции ещё одного вида:

$$\tilde{\tilde{D}}(\rho) = \sum_{t=1}^{m} \mu_t \tilde{d}(\rho, \rho_t) = \sum_{t=1}^{m} \mu_t \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \left| r_{ij} - r_{ij}^{(t)} \right|.$$

2. Условия существования и алгоритмы нахождения всех «почти оптимальных» решений

Получим сначала необходимое и достаточное условие существования «почти оптимального» (или 2-оптимального) отношения $\rho \in LO[n]$.

Теорема 2. Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_m \in LA[n]$ и m нечётно, $\tilde{\rho}$ — мажоритарное отношение, $R(\tilde{\rho}) = [\tilde{r}_{ij}]_{n \times n}$, $\tilde{\rho} \notin LO[n]$. Тогда для существования «почти оптимального» отношения необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $\lambda \in LO[n]$ выполнялись следующие условия:

1) $R(\lambda) = [r^{\lambda}_{ij}]_{n\times n}$, $d(\lambda, \tilde{\rho}) = 2$, т. е. существуют такие $i_0, j_0 \in \{1, \ldots, n\}$, что $i_0 \neq \neq j_0$, $r^{\lambda}_{i_0,j_0} = 1$, $\tilde{r}_{i_0,j_0} = 0$, $r^{\lambda}_{j_0,i_0} = 0$, $\tilde{r}_{j_0,i_0} = 1$, $r^{\lambda}_{ij} = \tilde{r}_{ij}$ при всех $\langle i, j\rangle \in J_0 = = \{1, 2, \ldots, n\}^2 \setminus \{\langle i_0, j_0\rangle, \langle j_0, i_0\rangle\}$;
2) $p_{i_0,j_0} = (m-1)/2$, $p_{j_0,i_0} = (m+1)/2$.

Пример 2. Пусть $n = 4$, $m = 5$, $\rho_1 = \rho_2 : a_3 \prec a_2 \prec a_1 \prec a_4$, $\rho_3 : a_1 \prec a_2 \prec a_4 \prec a_3$, $\rho_4 : a_1 \prec a_4 \prec a_3 \prec a_2$, $\rho_5 : a_2 \prec a_1 \prec a_4 \prec a_3$. Тогда $R^{(t)} = R(\rho_t) = [r^{(t)}_{ij}]_{n\times n}$, $t = 1, 2, 3, 4, 5$, имеют следующий вид:

$$R^{(1)} = R^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad R^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$P = \sum_{t=1}^{5} R^{(t)} = [p_{ij}]_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & \mathbf{2} & 4 \\ 2 & \mathbf{3} & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad R(\tilde{\rho}) = [\tilde{r}_{ij}]_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пусть $\lambda : a_2 \prec a_1 \prec a_4 \prec a_3$, $[r^{\lambda}_{ij}]_{4\times 4} = R(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Тогда при $i_0 = 2$, $j_0 = 3$ условия 1 и 2 теоремы 2 выполняются (для наглядности элементы $r^{\lambda}_{2,3}$, $\tilde{r}_{2,3}$, $r^{\lambda}_{3,2}$, $\tilde{r}_{3,2}$, $p_{2,3}$, $p_{3,2}$ выделены): $r^{\lambda}_{2,3} = 1$, $\tilde{r}_{2,3} = 0$, $r^{\lambda}_{3,2} = 0$, $\tilde{r}_{3,2} = 1$; $r^{\lambda}_{ij} = \tilde{r}_{ij}$ при всех $\langle i, j\rangle \in J_0 = \{1, 2, 3, 4\}^2 \setminus \{\langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle\}$; $p_{2,3} = (m-1)/2 = 2$, $p_{3,2} = (m+1)/2 = 3$, при этом $D(\tilde{\rho}) = 18$, $D(\lambda) = 20 = D(\tilde{\rho}) + 2$.

Для доказательства теоремы 2 используется

Утверждение 5 [13]. Пусть $\rho, \ldots, \rho_m \in LA[n]$ и m нечётно, $\tilde{\rho}$ — мажоритарное отношение, $R(\tilde{\rho}) = [\tilde{r}_{ij}]_{n\times n}$, $\rho \in LA[n]$, $R(\rho) = [r_{ij}]_{n\times n}$, $J_\rho = \{\langle i, j\rangle \in \{1, \ldots, n\}^2 : \tilde{r}_{ij} \neq \neq r_{ij}\}$. Тогда

$$\begin{aligned} D(\rho) = D(\tilde{\rho}) + \sum_{\langle i,j\rangle \in J_\rho} (\max\{p_{ij}, p_{ji}\} - \min\{p_{ij}, p_{ji}\}) = D(\tilde{\rho}) + 2 \sum_{\langle i,j\rangle \in J_\rho, c_{ij} \neq \infty} c_{ij} \geqslant \\ \geqslant D(\tilde{\rho}) + |J_\rho| = D(\tilde{\rho}) + d(\rho, \tilde{\rho}). \end{aligned} \tag{3}$$

Приведем также следующее

Утверждение 6 [13]. Пусть $\rho \in LA[n]$. Тогда $\rho \in LO[n]$ в том и только в том случае, когда в графе $G(\rho) = (A, \rho)$, рассматриваемом без петель, нет контуров.

Следствие 3. Пусть, в условиях теоремы 2, для некоторого $\lambda \in LO[n]$ выполняются условия 1 и 2 этой теоремы. Тогда $c_{i_0,j_0} = \infty$, $c_{j_0,i_0} = 1$ и дуга $\langle a_{i_0}, a_{j_0}\rangle$ входит во все контуры графа $G(\tilde{\rho}) = (A, \tilde{\rho})$.

Доказательство. Поскольку $\tilde{\rho} \notin LO[n]$, то в силу утверждения 6 в $\tilde{G}$ имеется контур. В λ в силу того же утверждения контуров нет и λ получается из $\tilde{\rho}$ заменой одной дуги $\langle a_{i_0}, a_{j_0} \rangle$ на противоположную, поэтому эта замена должна «разрушить» все контуры в $\tilde{G}$, т. е. эта дуга входит во все контуры графа $\tilde{G}$. ■

Утверждение 6 и следствие 3 позволяют выяснить геометрический смысл «почти оптимального» решения. Оно существует тогда и только тогда, когда в нагруженном графе $G(\tilde{\rho}) = (A, \tilde{\rho})$ (рассматриваемом без петель) найдётся дуга $\langle a_i, a_j \rangle$ минимально возможной длины $c_{ij} = 1$, замена которой на противоположную приводит к графу без контуров. На рис. 1 представлен граф $\tilde{G} = (A, \tilde{\rho})$ для $\tilde{\rho}$ из примера 2; замена дуги $\langle a_3, a_2 \rangle$ на $\langle a_2, a_3 \rangle$ «разрушает» все три контура в $\tilde{G}$.

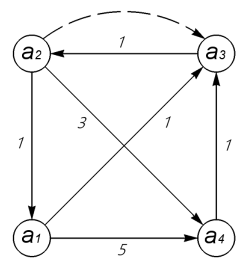

Рис. 1

Используя теорему 2 и следствие 3, опишем простой алгоритм 1 определения существования «почти оптимального» решения и нахождения всех таких решений.

Алгоритм 1. Нахождение всех «почти оптимальных» решений

1: Находим в нагруженном графе $\tilde{G}$ все дуги длины 1.
2: Для каждой из найденных в п. 1 дуг рассматриваем граф, полученный из $\tilde{G}$ заменой этой дуги на противоположную. Если в полученном графе отсутствуют контуры, то одно из возможных «почти оптимальных» решений найдено. Действуя так, получим их все.
3: Если после перебора в п. 2 всех дуг длины 1 не нашли ни одного «почти оптимального» решения, то такого решения не существует.

Алгоритм 1 использует полиномиально сложную процедуру проверки графа на наличие контуров, применяемую не более $n(n-1)/2$ (количество дуг в $\tilde{G}$, отличных от петель) раз, т. е. также имеет полиномиальную сложность вычислений. Проверку графа $\tilde{G}' = (A, \tilde{\rho}')$ на наличие контуров, где $\tilde{\rho}' \in LA[n]$ — бинарное отношение, полученное заменой одной из пар в $\tilde{\rho}$ длины 1 на противоположную, можно в силу утверждения 6 заменить на проверку $\tilde{\rho}' \in LO[n]$, равносильную проверке $I(\tilde{\rho}') = \langle 1, 2, \ldots, n \rangle$ (см. утверждение 4), имеющей сложность $O(n^2)$. Таким образом, алгоритм 1 имеет вычислительную сложность $O(n^4)$.

Если дуг длины 1 в $\tilde{G}$ много, а дуг, входящих в контуры, сравнительно мало, то можно воспользоваться также алгоритмом 2.

Алгоритм 2. Нахождение всех «почти оптимальных» решений

1: Находим в $\tilde{G}$ все дуги, входящие в контуры. Выделяем среди них дуги длины 1.
2: Далее действуем согласно пп. 2 и 3 алгоритма 1.

Если Δ-оптимального решения при $\Delta = 2$ не оказалось, то можем попытаться найти его при $\Delta = 4$ (это имеет смысл делать, если величина $4/D(\tilde\rho)$ достаточно мала). В этом случае, согласно второму равенству в (3), проверяем на наличие контуров графы, полученные из $\tilde G$ заменой на противоположные ровно двух дуг длины 1.

Если Δ-оптимального решения при $\Delta \in \{2, 4\}$ не оказалось, то можем попытаться найти его при $\Delta = 6$ (это имеет смысл делать, если величина $6/D(\tilde\rho)$ достаточно мала). В этом случае, согласно второму равенству в (3), проверяем на наличие контуров графы, полученные из $\tilde G$ заменой на противоположные ровно трёх дуг длины 1 или ровно одной дуги длины 3 (очевидно, что если $c_{ij} \neq \infty$, $i \neq j$, то $c_{ij} = p_{ij} - p_{ji} \in \{1, 3, 5, \ldots, m\}$), и т. д. При этом алгоритм остаётся полиномиальным, если ограничиваем величину Δ сверху некоторой константой.

Опишем процедуру проверки $\tilde\rho$ на «почти оптимальность», использующую простой подсчёт количества единиц в строках матрицы $R(\tilde\rho)$ (подобно условию $I(\rho) = \langle 1, 2, \ldots, n\rangle$ для проверки $\tilde\rho \in LO[n]$). Кроме того, выясним структуру множества всех $\tilde\rho \in LA[n]$, для которых выполняется условие 1 теоремы 2.

Из определения $LA[n]$ следует, что для всех $\rho \in LA[n]$ для $I(\rho) = \langle i_1, \ldots, i_n\rangle$ выполняется

$$1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_n \leqslant n, \quad i_1 + \ldots + i_n = n(n+1)/2. \tag{4}$$

Замечание 5. Отметим, что не всякому целочисленному решению $\langle i_1, \ldots, i_n\rangle$ системы (4) соответствует некоторое $\rho \in LA[n]$, для которого $I(\rho) = \langle i_1, \ldots, i_n\rangle$. Например, вектор $\langle 1, 1, 4, 4\rangle$ является решением системы (4) при $n = 4$, но не существует $\rho \in LA[4]$ с $I(\rho) = \langle 1, 1, 4, 4\rangle$. Действительно, существование в $R(\rho)$ строки с некоторым номером $j \in \{1, \ldots, n\}$ с одной единицей (на главной диагонали) приводит к тому, что в j-м столбце будут только единицы, а следовательно, в $R(\rho)$ не может быть ещё одной строки с одним единичным элементом. Таким образом, из множества целочисленных решений системы (4), соответствующих $\langle i_1, \ldots, i_n\rangle = I(\rho)$, где $\rho \in LA[n]$, следует удалить все решения с $i_1 = i_2 = 1$ и (по аналогичным соображениям) все решения с $i_{n-1} = i_n = n$. Этим не исчерпываются ограничения на целочисленные решения системы (4) для $I(\rho) = \langle i_1, \ldots, i_n\rangle$, где $\rho \in LA[n]$. Например, как будет видно из дальнейшего, не существует $\rho \in LA[6]$ с $I(\rho) = \langle 1, 2, 2, 5, 5, 6\rangle$, хотя для этого вектора условия (4) при $n = 6$ выполняются.

Обозначим для всех $n \geqslant 2$:

$$J_n = \{\langle i_1, \ldots, i_n\rangle : \exists\rho \in LA[n]\,(I(\rho) = \langle i_1, \ldots, i_n\rangle)\},$$
$$\forall\langle i_1, \ldots, i_n\rangle \in J_n \quad LA_{\langle i_1,\ldots,i_n\rangle}[n] = \{\rho \in LA[n] : I(\rho) = \langle i_1, \ldots, i_n\rangle\}.$$

Для каждого $\rho \in LA[n]$ введём в рассмотрение вектор

$$\overline{I}(\rho) = I(\rho) - \langle 1, 2, \ldots, n\rangle = \langle i_1 - 1, i_2 - 2, \ldots, i_n - n\rangle$$

и множество $\overline{J}_n = J_n - \langle 1, 2, \ldots, n\rangle = \{\overline{I}(\rho) : \rho \in LA[n])\}$. Нам понадобится следующее множество V_n целочисленных векторов с элементами из $\{0, 1, -1\}$, где $n \geqslant 3$:

$$V_n = \{\langle \underbrace{0, \ldots, 0}_{s_1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s_2}, -1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s_3}\rangle \in \{0, 1, -1\}^n : s_1 \geqslant 0, s_2 \geqslant 1, s_3 \geqslant 0, s_1 + s_2 + s_3 = n - 2\}.$$

Например,

$$V_3 = \{\langle 1, 0, -1\rangle\}, \quad V_4 = \{\langle 1, 0, -1, 0\rangle, \langle 1, 0, 0, -1\rangle, \langle 0, 1, 0, -1\rangle\},$$
$$V_5 = \{\langle 1, 0, -1, 0, 0\rangle, \langle 1, 0, 0, -1, 0\rangle, \langle 1, 0, 0, 0, -1\rangle, \langle 0, 1, 0 - 1, 0\rangle, \langle 0, 1, 0, 0, -1\rangle, \langle 0, 0, 1, 0, -1\rangle\}.$$

Утверждение 7 [13]. $|V_n| = (n-1)(n-2)/2$.

Далее покажем, что для всех $\rho \in LA[n] \setminus LO[n]$ для существования $\lambda \in LO[n]$, такого, что $d(\lambda, \rho) = 2$, необходимо выполнение условия $\overline{I}(\rho) \in V_n$. Нам потребуются некоторые свойства векторов из $\overline{J}_n$. Справедливо

Утверждение 8 [13]. Пусть $n \geqslant 3$, $\rho \in LA[n] \setminus LO[n]$. Тогда $\overline{I}(\rho)$ содержит не менее двух ненулевых компонент, первая из которых положительная, а последняя — отрицательная. Кроме того, после положительной компоненты не может сразу следовать отрицательная (между ними должна быть хотя бы одна нулевая компонента).

Доказательство утверждения 8 основано на рассуждениях, аналогичных приведённым в замечании 3.

Введём в рассмотрение два преобразования бинарных отношений ρ на A, которые не выводят из $LA[n]$. Пусть S_n — множество всех биективных отображений (подстановок) вида $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$. Обозначим для $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $\rho \in 2^{A^2}$, $\pi \in S_n$

$$\pi\rho = \left\{\langle a_{\pi(i)}, a_{\pi(j)}\rangle : \langle a_i, a_j\rangle \in \rho\right\}$$

(π-преобразование бинарного отношения ρ на A), а в случае $A = \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\pi\rho = \{\langle\pi(i), \pi(j)\rangle : \langle i, j\rangle \in \rho\}\,.$$

Пример 3. Пусть $n = 4$, $\rho = \{\langle a_1, a_1\rangle, \langle a_1, a_2\rangle, \langle a_1, a_3\rangle, \langle a_2, a_4\rangle, \langle a_3, a_4\rangle\}$, $\pi = (1, 2, 4) \in S_4$. Тогда $\pi\rho = \{\langle a_2, a_2\rangle, \langle a_2, a_4\rangle, \langle a_2, a_3\rangle, \langle a_4, a_1\rangle, \langle a_3, a_1\rangle\}$.

При таком определении, очевидно, выполняется следующее условие:

$$\forall\rho, \rho_1 \in 2^{A^2} \ \ \forall\pi, \pi_1, \pi_2 \in S_n \ \ \big((\pi_1\pi_2)\rho = \pi_1(\pi_2\rho), \ \ \rho_1 = \pi\rho \Rightarrow \rho = \pi^{-1}\rho_1\big),$$

где $(\pi_1\pi_2)(i) = \pi_1(\pi_2(i))$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Заметим далее, что для всех $\rho \in 2^{A^2}$ для $R(\rho) = [r_{ij}]_{n\times n}$ справедливо

$$\forall\pi \in S_n \ \big(R(\pi\rho) = [\tilde{r}_{ij}]_{n\times n} \ \Rightarrow \ \tilde{r}_{ij} = r_{\pi^{-1}(i), \pi^{-1}(j)}\big),$$

т. е. если в i-й строке матрицы $R(\rho)$ содержится l единиц и $n - l$ нулей, где $i, l \in \{1, \ldots, n\}$, то в $\pi(i)$-й строке матрицы $R(\pi\rho)$ также содержится l единиц и $n - l$ нулей. Следовательно, справедливо

Утверждение 9. Пусть $n \geqslant 2$, $\langle i_1, \ldots, i_n\rangle \in J_n$, $\rho \in LA_{\langle i_1, \ldots, i_n\rangle}[n]$. Тогда для всех $\pi \in S_n$ выполняется $\pi\rho \in LA_{\langle i_1, \ldots, i_n\rangle}[n]$.

Будем использовать ещё одно преобразование. Обозначим для всех $\rho \in 2^{A^2}$ и $\langle i_0, j_0\rangle \in \left\{\langle i, j\rangle \in \{1, 2, \ldots, n\}^2 : i < j\right\}$

$$\delta_{i_0, j_0}\rho = \{\langle a_i, a_j\rangle \in \rho : \langle i, j\rangle \notin \{\langle i_0, j_0\rangle, \langle j_0, i_0\rangle\}\} \cup \\ \cup \{\langle a_{i_0}, a_{j_0}\rangle : \langle a_{j_0}, a_{i_0}\rangle \in \rho\} \cup \{\langle a_{j_0}, a_{i_0}\rangle : \langle a_{i_0}, a_{j_0}\rangle \in \rho\}\,.$$

В соответствии с этим определением для всех $\rho \in 2^{A^2}$ для $R(\rho) = [r_{ij}]_{n\times n}$ выполняется

$$\forall\langle i_0, j_0\rangle \in \left\{\langle i, j\rangle \in \{1, \ldots, n\}^2 : i < j\right\} \ R(\delta_{i_0, j_0}\rho) = [r'_{ij}]_{n\times n},$$

где $r'_{i_0, j_0} = r_{j_0, i_0}$; $r'_{j_0, i_0} = r_{i_0, j_0}$; $\forall\langle i, j\rangle \in \{1, \ldots, n\}^2 \setminus \{\langle i_0, j_0\rangle, \langle j_0, i_0\rangle\}$ $(r'_{ij} = r_{ij})$, т. е. преобразование δ_{i_0, j_0} меняет ровно два элемента r_{i_0, j_0}, r_{j_0, i_0} местами. Из определения этого преобразования следует, что если $\rho \in LA[n]$, то

$$\forall\langle i_0, j_0\rangle \in \left\{\langle i, j\rangle \in \{1, 2, \ldots, n\}^2 : i < j\right\} \ \rho' = \delta_{i_0, j_0}\rho \in LA[n],$$

и при этом вектор $I(\rho) - I(\rho')$ содержит ровно один элемент «1», ровно один элемент «-1» и $n-2$ элементов «0», т. е. $I(\rho) \neq I(\rho')$, а следовательно, $\rho' \notin LA_{\langle i_1,\ldots,i_n\rangle}[n]$, где $\langle i_1,\ldots,i_n\rangle = I(\rho)$.

Утверждение 10. Пусть $\rho \in LA[n] \setminus LO[n]$, $d(\rho, LO[n]) = 2$. Тогда существуют такие $\lambda \in LO[n]$, $\langle i_0, j_0\rangle \in \left\{\langle i,j\rangle \in \{1,2,\ldots,n\}^2 : i < j\right\}$, что верны следующие условия:

1) $\rho = \delta_{i_0,j_0}\lambda$, $\lambda = \delta_{i_0,j_0}\rho$;
2) $\overline{I}(\rho) \in V_n$, т. е. в векторе $\overline{I}(\rho)$ ровно две ненулевые компоненты 1 и -1, находящиеся в v_1-й и v_2-й позициях соответственно, где $v_1 \leqslant v_2 - 2$ (см. утверждение 8);
3) $i_0 = \min\{i'_0, j'_0\}$, $j_0 = \max\{i'_0, j'_0\}$, $i'_0 \in \left\{i \in \{1,\ldots,n\} : \kappa_i(\rho) = \sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij} = v_1 + 1\right\}$,
$j'_0 \in \left\{i \in \{1,\ldots,n\} : \kappa_i(\rho) = \sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij} = v_2 - 1\right\}$, $r_{i'_0,j'_0} = 1, r_{j'_0,i'_0} = 0$.

Утверждение 10 является очевидным следствием того, что:

а) по его условиям для некоторого $\lambda \in LO[n]$ матрицы $R(\rho) = [r_{ij}]_{n\times n}$, $R(\lambda) = [r^{\lambda}_{ij}]_{n\times n}$ имеют различие ровно в двух позициях (симметричных относительно главной диагонали, поскольку $\rho, \lambda \in LA[n]$): $\langle i_0, j_0\rangle$ и $\langle j_0, i_0\rangle$, где $i_0 < j_0$;
б) $I(\lambda) = \langle 1,2,\ldots,n\rangle$, а следовательно, в силу свойства а, $\overline{I}(\rho) \in V_n$ (поскольку в $R(\rho)$ по сравнению с $R(\lambda)$ в i_0-й строке на одну единицу меньше (или больше), а в j_0-й строке соответственно на одну единицу больше (или меньше));
в) если $r^{\lambda}_{i_0,j_0} = 0$, то для $v_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} r^{\lambda}_{i_0,j}$, $v_2 = \sum\limits_{j=1}^{n} r^{\lambda}_{j_0,j}$ в векторе $\overline{I}(\rho) \in V_n$ компоненты 1 и -1 находятся в v_1-й и v_2-й позициях соответственно, а если $r^{\lambda}_{i_0,j_0} = 1$, то это выполняется для $v_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} r^{\lambda}_{j_0,j}$, $v_2 = \sum\limits_{j=1}^{n} r^{\lambda}_{i_0,j}$.

Замечание 6. Условия 1–3 утверждения 10, очевидно, являются достаточными для существования для некоторого $\rho \in LA[n] \setminus LO[n]$ бинарного отношения $\lambda \in LO[n]$, такого, что $d(\rho, \lambda) = 2$.

Используя утверждение 10, нетрудно описать следующий алгоритм 3.

Алгоритм 3. Нахождение для $\rho \in LA[n] \setminus LO[n]$ всех $\lambda \in LO[n]$, таких, что $d(\rho, \lambda) = 2$

1: Находим по матрице $R(\rho) = [r_{ij}]_{n\times n}$ векторы $I(\rho) = \langle i_1, i_2, \ldots, i_n\rangle$, $\overline{I}(\rho) = I(\rho) - \langle 1,2,\ldots,n\rangle$. Проверяем выполнение $\overline{I}(\rho) \in V_n$. Если это условие не выполняется, то в силу утверждения 10 искомых $\lambda \in LO[n]$ не существует и работа алгоритма заканчивается. В противном случае переходим к п. 2.

2: Находим номера v_1, v_2 компонент вектора $\overline{I}(\rho) \in V_n$, равных 1 и -1 соответственно. Тогда $v_1 \leqslant v_2 - 2$. Определяем множества

$$I_1 = \left\{i \in \{1,\ldots,n\} : v_1 + 1 = i_{v_1} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}\right\},\ I_2 = \left\{i \in \{1,\ldots,n\} : v_2 - 1 = i_{v_2} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}\right\},$$

где i_{v_1}, i_{v_2} — компоненты вектора $I(\rho) = \langle i_1,\ldots,i_n\rangle$.

3: Находим все упорядоченные пары $\langle i_0, j_0\rangle$, такие, что $i_0 \in I_1$, $j_0 \in I_2$, $i_0 \neq j_0$, $r_{i_0,j_0} = 1$. Если таких пар нет, то в силу утверждения 10 искомого $\lambda \in LO[n]$ не существует и работа алгоритма заканчивается. В противном случае для каждой найденной пары $\langle i_0, j_0\rangle$ одним из искомых линейных порядков в случае $(i_0 < j_0)$ является $\lambda = \delta_{i_0,j_0}\rho$, а в случае $(j_0 < i_0)$ — $\lambda = \delta_{j_0,i_0}\rho$.

Замечание 7. Очевидно, что на шаге 2 алгоритма 3, если $v_1 = v_2 - 2$ (т. е. в векторе $\overline{I}(\rho) \in V_n$ ровно один нуль между 1 и -1), то $I_1 = I_2$ и $|I_1| = |I_2| = 3$ (например, в случае $\overline{I}(\rho) = \langle 0, 1, 0, -1, 0\rangle$ выполняется $I(\rho) = \langle 1, 3, 3, 3, 5\rangle$), а если $v_1 \leqslant v_2 - 3$ (т. е. в векторе $\overline{I}(\rho) \in V_n$ более одного нуля между 1 и -1), то $I_1 \cap I_2 = \varnothing$ и $|I_1| = |I_2| = 2$ (например, в случае $\overline{I}(\rho) = \langle 0, 1, 0, 0, -1\rangle$ выполняется $I(\rho) = \langle 1, 3, 3, 4, 4\rangle$). В первом случае для любого $n \geqslant 3$ на шаге 3 проверяем шесть элементов r_{i_0,j_0}, где $i_0, j_0 \in$ $\in I_1 = I_2$, $i_0 \neq j_0$, для трёх из которых $r_{i_0,j_0} = 1$, т. е. всегда имеем ровно три решения. Во втором случае проверяем четыре элемента r_{i_0,j_0}, где $i_0 \in I_1$, $j_0 \in I_2$ (т. е. решений в этом случае не более четырёх, и как показано ниже, оно единственное). Нетрудно видеть, что вычислительная сложность алгоритма 3 равна $O(n^2)$ (аналогично проверке выполнения условия $I(\rho) = \langle 1, 2, \ldots, n\rangle$).

Пример 4. Применим алгоритм 3 к $\rho_1, \rho_2 \in LA[5] \setminus LO[5]$, заданными матрицами $R(\rho_1) = [r_{ij}^{(1)}]_{5\times 5}$, $R(\rho_2) = [r_{ij}^{(2)}]_{5\times 5}$:

$$R(\rho_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R(\rho_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что

$$I(R(\rho_1)) = I(R(\rho_2)) = \langle 2, 2, 3, 4, 4\rangle, \ \overline{I}(R(\rho_1)) = \overline{I}(R(\rho_2)) = \langle 1, 0, 0, 0, -1\rangle \in V_5.$$

Рассмотрим сначала ρ_1. Согласно п. 2 алгоритма 3, определяем $v_1 = 1$, $v_2 = 5$, $i_{v_1} = 2$, $i_{v_2} = 4$,

$$I_1 = \left\{ i \in \{1, 2, 3, 4, 5\} : v_1 + 1 = i_{v_1} = 2 = \sum_{j=1}^{5} r_{ij}^{(1)} \right\} = \{4, 5\},$$

$$I_2 = \left\{ i \in \{1, 2, 3, 4, 5\} : v_2 - 1 = i_{v_2} = 4 = \sum_{j=1}^{5} r_{ij}^{(1)} \right\} = \{1, 2\}.$$

Далее перебираем все значения $r_{i_0,j_0}^{(1)}$, где $i_0 \in I_1 = \{4, 5\}$, $j_0 \in I_2 = \{1, 2\}$ (выделены в матрице $R(\rho_1)$): $r_{4,1}^{(1)} = 0$, $r_{5,1}^{(1)} = 1$, $r_{4,2}^{(1)} = 0$, $r_{5,2}^{(1)} = 0$. Таким образом, нашлась единственная пара $\langle 5, 1\rangle$, такая, что $r_{5,1}^{(1)} = 1$, а следовательно, существует единственный линейный порядок $\lambda_1 = \delta_{1,5}\rho$, такой, что $d(\rho_1, \lambda_1) = 2$:

$$R(\lambda_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим ρ_2. Согласно п. 2 алгоритма 3, определяем $v_1 = 1$, $v_2 = 5$, $i_{v_1} = 2$, $i_{v_2} = 4$,

$$I_1 = \left\{ i \in \{1, 2, 3, 4, 5\} : v_1 + 1 = i_{v_1} = 2 = \sum_{j=1}^{5} r_{ij}^{(1)} \right\} = \{3, 4\},$$

$$I_2 = \left\{ i \in \{1, 2, 3, 4, 5\} : v_2 - 1 = i_{v_2} = 4 = \sum_{j=1}^{5} r_{ij}^{(1)} \right\} = \{1, 2\}.$$

Далее перебираем все значения $r^{(2)}_{i_0,j_0}$, где $i_0 \in I_1 = \{3,4\}$, $j_0 \in I_2 = \{1,2\}$ (выделены в матрице $R(\rho_2)$): $r^{(2)}_{3,1} = 0$, $r^{(2)}_{4,1} = 0$, $r^{(2)}_{3,2} = 0$, $r^{(2)}_{4,2} = 0$. Не нашлось ни одной пары $\langle i_0, j_0\rangle$, такой, что $i_0 \in I_1, j_0 \in I_2$, $r^{(2)}_{i_0,j_0} = 1$, а следовательно, в силу утверждения 10, искомого $\lambda \in LO[5]$ с $d(\rho_2, \lambda) = 2$ не существует и работа алгоритма заканчивается. Нетрудно показать, что ближайшим к ρ_2 линейным порядком также является λ_1, но при этом $d(\rho_2, \lambda_1) = 4$.

Цель дальнейших рассуждений — показать, что множество бинарных отношений $LA^{(2)}[n] = \left\{\rho \in LA[n] \setminus LO[n] : \min\limits_{\lambda \in LO[n]} d(\lambda, \rho) = 2\right\}$ является достаточно широким, а также описать структуру этого множества. Далее установлено, что в случае $n = 4$ выполняется $LA^{(2)}[4] = LA[4] \setminus LO[4]$, но уже для $n = 5$ ситуация меняется и множество $LA^{(2)}[5]$ составляет лишь некоторую (хотя и достаточно широкую) часть множества $LA[5] \setminus LO[5]$. Проиллюстрируем рассуждения для $n = 5$. Пусть $\lambda_1^{(n)}$ — линейный порядок, определяемый условиями $a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_n$ (в случае $n = 5$ с матрицей $R(\lambda_1^{(5)})$):

$$R(\lambda_1^{(5)}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перечислим все возможные $\rho \in LA[n] \setminus LO[n]$, такие, что $d(\lambda_1^{(n)}, \rho) = 2$. Очевидно, что любое из таких бинарных отношений получается из $\lambda_1^{(n)}$ заменой ровно одной пары с разными элементами на противоположную, т. е. является бинарным отношением вида $\rho = \delta_{i,j}\lambda_1^{(n)}$, где $\langle i, j\rangle \in \{\langle i, j\rangle \in \{1, \ldots, n\}^2 : i < j\}$. Исключением являются случаи с $j = i + 1$, поскольку $\delta_{i,i+1}\lambda_1^{(n)}$ (где $i = 1, 2, \ldots, n - 1$) — линейные порядки вида $a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_{i-1} \prec a_{i+1} \prec a_i \prec a_{i+2} \prec \ldots \prec a_n$. Например, $\lambda_2^{(5)} = \delta_{1,2}\lambda_1^{(5)} : a_2 \prec a_1 \prec$ $\prec a_3 \prec a_4 \prec a_5$,

$$R(\lambda_2^{(5)}) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Во всех остальных $(n - 1)(n - 2)/2$ случаях (их шесть при $n = 5$) получаем попарно различные бинарные отношения из $LA^{(2)}[n]$. В случае $n = 5$ имеем

$$\begin{aligned}
\rho^{(5)}_{1,3} &= \delta_{1,3}\lambda_1^{(5)},\ I(\rho^{(5)}_{1,3}) = \langle 1,2,4,4,4\rangle,\ \overline{I}(\rho^{(5)}_{1,3}) = \langle 0,0,1,0,-1\rangle;\\
\rho^{(5)}_{1,4} &= \delta_{1,4}\lambda_1^{(5)},\ I(\rho^{(5)}_{1,4}) = \langle 1,3,3,4,4\rangle,\ \overline{I}(\rho^{(5)}_{1,4}) = \langle 0,1,0,0,-1\rangle;\\
\rho^{(5)}_{1,5} &= \delta_{1,5}\lambda_1^{(5)},\ I(\rho^{(5)}_{1,5}) = \langle 2,2,3,4,4\rangle,\ \overline{I}(\rho^{(5)}_{1,5}) = \langle 1,0,0,0,-1\rangle;\\
\rho^{(5)}_{2,4} &= \delta_{2,4}\lambda_1^{(5)},\ I(\rho^{(5)}_{2,4}) = \langle 1,3,3,3,5\rangle,\ \overline{I}(\rho^{(5)}_{2,4}) = \langle 0,1,0,-1,0\rangle;\\
\rho^{(5)}_{2,5} &= \delta_{2,5}\lambda_1^{(5)},\ I(\rho^{(5)}_{2,5}) = \langle 2,2,3,3,5\rangle,\ \overline{I}(\rho^{(5)}_{2,5}) = \langle 1,0,0,-1,0\rangle;\\
\rho^{(5)}_{3,5} &= \delta_{3,5}\lambda_1^{(5)},\ I(\rho^{(5)}_{3,5}) = \langle 2,2,2,4,5\rangle,\ \overline{I}(\rho^{(5)}_{3,5}) = \langle 1,0,-1,0,0\rangle.
\end{aligned}$$

Матрица $R(\rho_{1,3}^{(5)})$ имеет следующий вид:

$$R(\rho_{1,3}^{(5)}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathbf{0} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В общем случае с произвольным $n \geqslant 5$:

$$\overline{I}(\delta_{l,k}\lambda_1^{(n)}) = \langle \underbrace{0,\dots,0}_{n-k}, 1, \underbrace{0,\dots,0}_{k-l-1}, -1, \underbrace{0,\dots,0}_{l-1} \rangle, \quad l = 1,\dots,n-2, \quad k = l+2,\dots,n. \tag{5}$$

Зная $\overline{I}(\delta_{l,k}\lambda_1^{(n)})$, можно легко найти $I(\delta_{l,k}\lambda_1^{(n)}) = \overline{I}(\delta_{l,k}\lambda_1^{(n)}) + \langle 1, 2, \dots, n\rangle$.

Обозначим $\Lambda^{(n)} = \{\delta_{l,k}\lambda_1^{(n)} : l = 1,\dots,n-2,\ k = l+2,\dots,n\}$. Из (5) следует, что элементы в $\Lambda^{(n)}$ попарно различны. Таким образом, справедливо

Утверждение 11. Пусть $n \geqslant 3$. Тогда

$$\Lambda^{(n)} = \{\delta_{l,k}\lambda_1^{(n)} : l = 1,\dots,n-2,\ k = l+2,\dots,n\} = \{\rho \in LA[n] \setminus LO[n] : d(\lambda_1^{(n)}, \rho) = 2\}.$$

Найденный набор бинарных отношений вида $\delta_{l,k}\lambda_1^{(n)}$, $l = 1,\dots,n-2$, $k = l+2,\dots,n$, из искомого множества $LA^{(2)}[n]$, содержащий $(n-1)(n-2)/2$ попарно различных бинарных отношений, на самом деле является набором представителей попарно не пересекающихся подмножеств этого множества, совокупность которых является разбиением $LA^{(2)}[n]$. Для описания этого разбиения понадобятся некоторые дополнительные свойства рассмотренных ранее π-преобразований бинарных отношений на A.

Назовём бинарные отношения $\rho_1, \rho_2 \in 2^{A^2}$ π-эквивалентными, если $\rho_1 = \pi\rho_2$ для некоторой подстановки $\pi \in S_n$ (пишем $\rho_1 \sim \rho_2$). Очевидно, что это бинарное отношение на 2^{A^2} является рефлексивным, симметричным и транзитивным, т. е. является отношением эквивалентности на всём множестве 2^{A^2}, а следовательно, и на любом его подмножестве.

Для любого бинарного отношения $\rho \in 2^{A^2}$ обозначим $\Pi\rho = \{\pi\rho : \pi \in S_n\}$, $H(\rho) = \{h \in S_n : h\rho = \rho\}$ — подгруппа группы S_n. Очевидно, что $\Pi\rho$ — класс эквивалентности бинарного отношения ρ относительно π-эквивалентности. Цель ближайших рассуждений — доказать равенство

$$LA^{(2)}[n] = \{\rho \in LA[n] \setminus LO[n] : \min_{\lambda \in LO[n]} d(\lambda, \rho) = 2\} = \textstyle\bigcup_{\rho \in \Lambda^{(n)}} \Pi\rho,$$

где $\Pi\rho_1 \cap \Pi\rho_2 = \varnothing$ для любых неравных $\rho_1, \rho_2 \in \Lambda^{(n)}$. Кроме того, докажем утверждения, позволяющие определять $|\Pi\rho|$, где $\rho \in LA[n]$, а тем самым и $|LA^{(2)}[n]| = \sum\limits_{\rho \in \Lambda^{(n)}} |\Pi\rho|$.

Утверждение 12 [13]. Пусть $\rho_1, \rho_2 \in 2^{A^2}$, $\pi \in S_n$. Тогда $d(\rho_1, \rho_2) = d(\pi\rho_1, \pi\rho_2)$.

Пусть $\rho \in 2^{A^2}$. Заметим, что $\pi_1\rho \neq \pi_2\rho \Leftrightarrow \pi_1 H(\rho) \cap \pi_2 H(\rho) = \varnothing$ для всех $\pi_1, \pi_2 \in S_n$, т. е. количество попарно различных бинарных отношений в $\Pi\rho$ совпадает с количеством левых смежных классов группы S_n по подгруппе $H(\rho)$. Таким образом, справедливо

Утверждение 13. Для всех $\rho \in 2^{A^2}$

$$|\Pi\rho| = |S_n / H(\rho)| = \frac{|S_n|}{|H(\rho)|} = \frac{n!}{|H(\rho)|}.$$

Для дальнейшего потребуются некоторые свойства подгруппы $H(\rho)$.

Утверждение 14 [13]. Пусть $\rho \in LA[n]$, $\pi \in S_n$ и в разложении π в произведение независимых циклов присутствует хотя бы один цикл чётной длины. Тогда $\pi\rho \neq \rho$, т. е. $\pi \notin H(\rho)$.

Утверждение 15. Пусть $n \geqslant 2$, $\rho \in 2^{A^2}$, $\pi \in H(\rho)$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$, $\pi(i) = j$. Тогда в i-й и j-й строках матрицы $R(\rho)$ одинаковое число единиц (нулей), т. е. $\kappa_i(\rho) = \kappa_j(\rho)$.

Для удобства применения утверждения 15 воспользуемся следующими обозначениями. Пусть $n \geqslant 2$, $\rho \in 2^{A^2}$. Введем в рассмотрение множества

$$A_1(\rho) = \{a_i \in A : \kappa_i(\rho) = 1\}, \quad \ldots, \quad A_n(\rho) = \{a_i \in A : \kappa_i(\rho) = n\}.$$

Они образуют разбиение множества A. Из утверждения 15 следует

Утверждение 16. Пусть $n \geqslant 2$, $\rho \in 2^{A^2}$, $\pi \in H(\rho)$ и $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ — цикл длины $k \geqslant 2$ из разложения подстановки π в произведение независимых циклов. Тогда найдётся номер $j \in \{1, \ldots, n\}$, такой, что $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\} \subseteq A_j(\rho)$.

Следствие 4. Из утверждений 14 и 16 получаем, что если $\rho \in LA[n]$ и $|A_j(\rho)| \leqslant 2$ для $j = 1, \ldots, n$, то $H(\rho) = \{e\}$, где e — тождественная подстановка.

Используя следствие 4, а также утверждения 4, 9 и 13, получаем

Утверждение 17. Пусть $n \geqslant 2$, $\lambda \in LO[n]$. Тогда $H(\lambda) = \{e\}$, $\Pi\lambda = \{\pi\lambda : \pi \in S_n\} = LO[n]$.

Теперь можем показать,что справедлива

Теорема 3. $LA^{(2)}[n] = \{\rho \in LA[n] \setminus LO[n] : \min\limits_{\lambda \in LO[n]} d(\lambda, \rho) = 2\} = \bigcup\limits_{\rho \in \Lambda^{(n)}} \Pi\rho$ и для всех $\rho_1, \rho_2 \in \Lambda^{(n)} = \{\delta_{l,k}\lambda_1^{(n)} : l = 1, \ldots, n-2, k = l+2, \ldots, n\}$ если $\rho_1 \neq \rho_2$, то $\Pi\rho_1 \cap \Pi\rho_2 = \varnothing$.

Доказательство.

1) Докажем, что $\bigcup\limits_{\rho \in \Lambda^{(n)}} \Pi\rho \subseteq LA^{(2)}[n]$. Пусть $\rho \in \bigcup\limits_{\rho' \in \Lambda^{(n)}} \Pi\rho'$. Тогда $\rho = \pi\rho'$ для некоторых $\rho' \in \Lambda^{(n)}$, $\pi \in S_n$. По определению $\Lambda^{(n)}$ имеем $\rho' = \delta_{l.k}\lambda_1^{(n)}$ для некоторых $l \in \{1, \ldots, n-2\}$, $k \in \{l+2, \ldots, n\}$. Но тогда $d(\rho', \lambda_1^{(n)}) = 2$, и в силу утверждений 9, 12 и 17 получаем $\rho = \pi\rho' \in LA[n] \setminus LO[n]$, $\pi\lambda_1^{(n)} \in LO[n]$, $d(\rho, \pi\lambda_1^{(n)}) = d(\pi\rho', \pi\lambda_1^{(n)}) = d(\rho', \lambda_1^{(n)}) = 2$, т. е. $\rho \in LA^{(2)}[n]$.

2) Докажем, что $LA^{(2)}[n] \subseteq \bigcup\limits_{\rho \in \Lambda^{(n)}} \Pi\rho$. Пусть $\rho \in LA^{(2)}[n]$. Тогда $\rho \in LA[n] \setminus LO[n]$ и найдётся $\lambda \in LO[n]$, такое, что $d(\lambda, \rho) = 2$. Из утверждения 17 получаем, что существует $\pi \in S_n$, для которой $\pi\lambda = \lambda_1^{(n)}$, откуда по утверждению 12 следует $d(\pi\rho, \lambda_1^{(n)}) = d(\pi\rho, \pi\lambda) = d(\rho, \lambda) = 2$, а значит (см.утверждение 11), $\pi\rho = \rho' \in \Lambda^{(n)}$, $\rho = \pi^{-1}\rho' \in \Pi\rho'$ и $\rho \in \bigcup\limits_{\rho' \in \Lambda^{(n)}} \Pi\rho'$. Таким образом, равенство $LA^{(2)}[n] = \bigcup\limits_{\rho \in \Lambda^{(n)}} \Pi\rho$ установлено и для завершения доказательства осталось воспользоваться равенством (5) и утверждением 9. ■

3. Система представителей классов π-эквивалентности из $LA[n]$

В п. 2 выделена система представителей классов π-эквивалентности из $LA^{(2)}[n]$, т. е. множество $\Lambda^{(n)} = \{\delta_{l,k}\lambda_1^{(n)} : l = 1, \ldots, n-2, \ k = l+2, \ldots, n\}$, состоящее из

$(n-1)(n-2)/2$ элементов. Они конструктивным образом определяются и их сравнительно немного. Более того, далее приведено утверждение (лемма 1 «о редукции»), в силу которого при каждом новом n существует единственный класс π-эквивалентности из $LA^{(2)}[n]$, несводимый к соответствующему (редуцированному) классу эквивалентности из $LA^{(2)}[n-1]$. Представителем нового класса является $\rho_{1,n}^{(n)} = \delta_{1,n}\lambda_1^{(n)}$, где $I(\rho_{1,n}^{(n)}) = \langle 2, 2, 3, \ldots, n-2, n-1, n-1\rangle$, $\bar{I}(\rho_{1,n}^{(n)}) = \langle 1, 0, \ldots, 0, -1\rangle \in \mathbb{Z}^n$. При этом при $n \geqslant 5$ справедливо $\Pi\rho_{1,n}^{(n)} \neq LA_{I(\rho_{1,n}^{(n)})}[n]$, т. е. выполнение для некоторого $\rho \in LA[n]$ условия $\bar{I}(\rho) = \langle 1, 0, \ldots, 0, -1\rangle$ не гарантирует выполнение $\rho \in LA^{(2)}[n]$, но требует дополнительной проверки (например, с помощью алгоритма 3).

При небольших $n \geqslant 2$ можно найти систему всех представителей классов π-эквивалентности для всего множества $LA[n]$. Оценим их количество K_n снизу. Поскольку в каждом классе эквивалентности не более $n!$ элементов, количество классов эквивалентности больше или равно $|LA[n]|/n! = 2^{n(n-1)/2}/n!$. Как будет видно из дальнейшего, $K_2 = 1$, $K_3 = 2$, $K_4 = 4$, $K_5 = 12$ и, исходя из приведённой нижней оценки, $K_6 \geqslant 2^{15}/720 \simeq 46$, $K_7 \geqslant 2^{21}/5040 \simeq 416$, $K_8 \geqslant 2^{28}/40320 \simeq 53261$ и т. д. С учётом редукции (см. лемму 1) для каждого очередного n «новых» представителей (несводимых к представителям меньшей размерности) будет меньше. Например, при $n = 5$ из 12 представителей «новых» только 6.

Таким образом, системой представителей классов π-эквивалентности для множества $LA[n]$ является конечный набор ${\rho_i}^{(n)} \in LA[n], i = 1, \ldots, K_n$, такой, что

$$\bigcup_{i=1}^{K_n} \Pi\rho_i^{(n)} = LA[n]; \quad i \neq j \Rightarrow \Pi\rho_i^{(n)} \cap \Pi\rho_j^{(n)} = \varnothing. \tag{6}$$

Одним из таких представителей будет любой линейный порядок из $LO[n]$, например $\lambda_1^{(n)}$, при этом $\Pi\lambda_1^{(n)} = LO[n]$ (см. утверждение 17). Другие примеры представителей — $\rho \in \Lambda^{(n)} = \{\delta_{l,k}\lambda_1^{(n)} : l = 1, \ldots, n-2,\ k = l+2, \ldots, n\}$. Интересен ответ на вопрос, какую долю составляет $LA^{(2)}[n] = \bigcup\limits_{\rho \in \Lambda^{(n)}} \Pi\rho$ от всего множества $LA[n]$. Далее получены системы представителей для $LA[n]$ при $n = 2, 3, 4, 5$, а также описан подход к получению этих систем, восходящий от достигнутого n к $n+1$.

Прежде чем сформулировать необходимую для дальнейшего лемму 1, рассмотрим следующий пример:

Пример 5. Пусть $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in LA[5]$ заданы матрицами смежности

$$R(\rho_1) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ R(\rho_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \mathbf{1} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \ R(\rho_3) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Тогда $I(\rho_1) = \langle 2, 2, 3, 3, 5\rangle$, при этом подматрица матрицы $R(\rho_1)$, полученная вычёркиванием первой строки и первого столбца, соответствует бинарному отношению $\rho_1' \in LA[4]$, где $I(\rho_1') = \langle 2, 2, 3, 3\rangle$, которое естественно назвать отношением, *редуцированным* из бинарного отношения ρ_1:

$$R(\rho_1') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Это связано с тем, что последней компонентой в $I(\rho_1) = \langle 2, 2, 3, 3, 5\rangle$ является $n = 5$, следовательно, в матрице $R(\rho_1)$ присутствует строка из единиц и симметричный ей столбец из нулей (за исключением диагонального элемента). В общем случае это i-я строка и i-й столбец, где $i \in \{1, \ldots, 5\}$, вычеркивая которые, получаем подматрицу, соответствующую редуцированному из исходного отношения из $LA[5]$ отношению из $LA[4]$. В случае произвольного $n \geqslant 2$ подобная редукция возможна для любого $\rho \in LA[n]$ при $I(\rho) = \langle i_1, \ldots, i_{n-1}, n\rangle$. При этом для $\rho' \in LA[n-1]$, редуцированного из ρ, выполняется $I(\rho') = \langle i_1, \ldots, i_{n-1}\rangle$.

Аналогичная ситуация возникает, когда $I(\rho) = \langle 1, i_2, \ldots, i_n\rangle$. Этот случай иллюстрируют ρ_2 и ρ_2':

$$R(\rho_2') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Редуцированное бинарное отношение получаем вычеркиванием столбца из единиц (он может быть только единственным, см. замечание 5) и симметричной ему строки из нулей (за исключением диагонального элемента). Для отношения $\rho' \in LA[n-1]$, редуцированного из отношения $\rho \in LA[n]$, выполняется $I(\rho') = \langle i_2 - 1, \ldots, i_n - 1\rangle$. Например, $I(\rho_2) = \langle 1, 3, 3, 4, 4\rangle$, $I(\rho_2') = \langle 2, 2, 3, 3\rangle$.

Наконец, в случае, когда $I(\rho) = \langle 1, i_2, \ldots, i_{n-1}, n\rangle$, возможна редукция размерности сразу на 2. Для отношения $\rho' \in LA[n-2]$, редуцированного из отношения $\rho \in LA[n]$, выполняется $I(\rho') = \langle i_2 - 1, \ldots, i_{n-1} - 1\rangle$. Например, $I(\rho_3) = \langle 1, 3, 3, 3, 5\rangle$, $I(\rho_3') = \langle 2, 2, 2\rangle$:

$$R(\rho_3') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В общем случае справедлива

Лемма 1 (о редукции). Пусть $n \geqslant 3$, $\rho \in LA[n]$, $k, l \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$, $k + l \leqslant n - 3$, $I(\rho) = \langle 1, 2, \ldots, k, i_{k+1}, \ldots, i_{n-l-1}, i_{n-l}, n - l + 1, \ldots, n\rangle$, $i_{k+1} \geqslant k + 2$, $i_{n-l} \leqslant n - l - 1$. Пусть, далее, $A_k(\rho) = \{a_{v_1}\}$, …, $A_1(\rho) = \{a_{v_k}\}$, $A_n(\rho) = \{a_{j_1}\}$, …, $A_{n-l+1}(\rho) = \{a_{j_l}\}$, $A' = A \setminus \{a_{v_1}, \ldots, a_{v_k}, a_{j_1}, \ldots, a_{j_l}\}$, $\rho' = \rho \cap (A')^2$. Тогда $\rho' \in 2^{(A')^2}$, $\rho' \in LA[n - k - l]$, $I(\rho') = \langle i_{k+1} - k, \ldots, i_{n-l} - k\rangle$ и матрица $R(\rho')$ является результатом вычёркивания из $R(\rho)$ строк и столбцов с номерами $v_1, \ldots, v_k, j_1, \ldots, j_l$ (предполагается, что оставшиеся элементы в A' расположены в том же порядке, что и в A).

Как и ранее, отношение $\rho' \in LA[n - k - l]$ из леммы 1 будем называть *редуцированным* из отношения $\rho \in LA[n]$.

Замечание 8. Заметим, что в условиях леммы 1, если $A' = \{a_{\iota_1}, \ldots, a_{\iota_{n-k-l}}\} = A \setminus \{a_{v_1}, \ldots, a_{v_k}, a_{j_1}, \ldots, a_{j_l}\}$ и λ' — линейный порядок на A' вида $a_{\iota_1} \prec \ldots \prec a_{\iota_{n-k-l}}$, то для линейного порядка

$$\lambda : a_{j_1} \prec \ldots \prec a_{j_l} \prec \underbrace{a_{\iota_1} \prec \ldots \prec a_{\iota_{n-k-l}}}_{\lambda'} \prec a_{v_1} \prec \ldots \prec a_{v_k}$$

выполняется $d(\lambda, \rho) = d(\lambda', \rho')$, т. е. множество $\operatorname{Arg} \min\limits_{\lambda \in LO[n]} d(\lambda, \rho)$ легко определяется по $\operatorname{Arg} \min\limits_{\lambda' \in LO[n-k-l]} d(\lambda', \rho')$ и количества элементов в этих множествах совпадают. Действительно, элементы матриц $R(\lambda), R(\rho)$ могут отличаться только на множествах своих элементов, находящихся на пересечении строк и столбцов, соответствующих A', т. е. на элементах матриц $R(\lambda'), R(\rho')$. Кроме того, нетрудно показать [13], что, в условиях леммы 1, $H(\rho) = H(\rho')$, $|\Pi\rho| = n!/|H(\rho)| = n!/|H(\rho')|$.

Используем эти результаты для рекурсивного нахождения системы представителей $\rho_i^{(n)} \in LA[n]$, $i = 1, \ldots, K_n$, классов π-эквивалентности для множества $LA[n]$, из систем представителей при меньших значениях n: последовательно получим системы представителей, начиная с минимально возможного n.

Случай $n = 2$: $|LA[2]| = 2^{n(n-1)/2} = 2^1 = 2$, $|LO[2]| = 2! = 2$, т. е. $LA[2] = LO[2]$, а следовательно, представителем единственного класса π-эквивалентности для множества $LA[2]$ является линейный порядок $\lambda_1^{(2)}$, соответствующий последовательности $a_1 \prec a_2$ (очевидно, что для второго линейного порядка $\lambda_2^{(2)}$, соответствующего последовательности $a_2 \prec a_1$, выполняется $\lambda_2^{(2)} = (1,2)\lambda_1^{(2)}$).

Случай $n = 3$: $|LA[3]| = 2^{n(n-1)/2} = 2^3 = 8$, $LO[3] = 3! = 6$. Единственным представителем класса π-эквивалентности $LO[3]$ является линейный порядок $\lambda_1^{(3)}$, соответствующий последовательности $a_1 \prec a_2 \prec a_3$. Для оставшихся отношений $\rho_1^{(3)}$, $\rho_2^{(3)}$ приведём матрицы $R(\rho_1^{(3)})$, $R(\rho_2^{(3)})$:

$$R(\rho_1^{(3)}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R(\rho_2^{(3)}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что $I(\rho_1^{(3)}) = I(\rho_2^{(3)}) = \langle 2,2,2 \rangle$, $\overline{I}(\rho_1^{(3)}) = \overline{I}(\rho_2^{(3)}) = \langle 1, 0, -1 \rangle$, $\rho_2^{(3)} = (1\ 2)(\rho_1^{(3)})$ (т. е. $\rho_2^{(3)} \in \Pi\rho_1^{(3)}$), при этом $\rho_1^{(3)} = \delta_{1,3}\lambda_1^{(3)}$ является единственным элементом множества $\Lambda^{(n)} = \left\{\delta_{l,k}\lambda_1^{(n)} : l = 1, \ldots, n-2,\ k = l+2, \ldots, n\right\} = \Lambda^{(3)} = \{\delta_{1,3}\lambda_1^{(3)}\}$. Заметим также: $(1,2,3)\rho_1^{(3)} = \rho_1^{(3)}$, а следовательно, $H(\rho_1^{(3)}) = \langle (1,2,3) \rangle = \{e, (1,2,3), (1,3,2)\}$, $|H(\rho_1^{(3)})| = 3$, $|\Pi\rho_1^{(3)}| = 2 = 3!/|H(\rho_1^{(3)})| = 6/3$ (в силу утверждения 14, разложение любой подстановки из $H(\rho_1^{(3)})$ в произведение независимых циклов может содержать единственный цикл длины 3). Таким образом, имеем систему из двух представителей классов π-эквивалентности для $LA[3]$: $\lambda_1^{(3)}, \rho_1^{(3)}$, при этом $LA[3] = \Pi\lambda_1^{(3)} \cup \Pi\rho_1^{(3)}$, $\Pi\lambda_1^{(3)} = LO[3]$, $\Pi\rho_1^{(3)} = LA[3] \setminus LO[3] = LA^{(2)}[3]$, $|\Pi\lambda_1^{(3)}| = 6$, $|\Pi\rho_1^{(3)}| = 2$.

Случай $n = 4$: $|LA[4]| = 2^{n(n-1)/2} = 2^6 = 64$, $|LO[4]| = 4! = 24$, $|LA[4] \setminus LO[4]| = 64 - 24 = 40$. Единственным представителем класса π-эквивалентности $LO[4]$ является линейный порядок $\lambda_1^{(4)}$, соответствующий последовательности $a_1 \prec a_2 \prec a_3 \prec a_4$. Для перечисления представителей классов π-эквивалентности из $LA^{(2)}[4] \subseteq LA[4] \setminus LO[4]$ воспользуемся множеством $\Lambda^{(4)} = \{\rho_{1,3}^{(4)} = \delta_{1,3}\lambda_1^{(4)}, \rho_{1,4}^{(4)} = \delta_{1,4}\lambda_1^{(4)}, \rho_{2,4}^{(4)} = \delta_{2,4}\lambda_1^{(4)}\}$:

$$R(\rho_{1,3}^{(4)}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 1 & 0 & 1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, R(\rho_{1,4}^{(4)}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R(\rho_{2,4}^{(4)}) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

При этом $I(\rho_{1,3}^{(4)}) = \langle 1,3,3,3 \rangle$, $\bar{I}(\rho_{1,3}^{(4)}) = \langle 0,1,0,-1 \rangle$, $I(\rho_{1,4}^{(4)}) = \langle 2,2,3,3 \rangle$, $\bar{I}(\rho_{1,4}^{(4)}) = \langle 1,0,0,-1 \rangle$, $I(\rho_{2,4}^{(4)}) = \langle 2,2,2,4 \rangle$, $\bar{I}(\rho_{2,4}^{(4)}) = \langle 1,0,-1,0 \rangle$. Поскольку $I(\rho_{1,3}^{(4)}) = \langle 1,3,3,3 \rangle$, выполнены условия леммы 1. Редуцированным отношением для $\rho_{1,3}^{(4)}$ является отношение $\rho_1^{(3)}$ (после вычёркивания в $R(\rho_{1,3}^{(4)})$ столбца с единицами и симметричной ему строки получаем $R(\rho_1^{(3)})$), а следовательно, в силу утверждения 13 и замечания 8,

$|H(\rho_{1,3}^{(4)})| = |H(\rho_1^{(3)})| = 3$, $|\Pi\rho_{1,3}^{(4)}| = 4!/|H(\rho_{1,3}^{(4)})| = 24/3 = 8$. Аналогично, редуцированным отношением для $\rho_{2,4}^{(4)}$ является $\rho_1^{(3)}$, откуда $|H(\rho_{2,4}^{(4)})| = |H(\rho_1^{(3)})| = 3$, $|\Pi\rho_{2,4}^{(4)}| = 8$. Поскольку $I(\rho_{1,4}^{(4)}) = \langle 2,2,3,3\rangle$, то, в силу следствия 4, $|H(\rho_{1,4}^{(4)})| = \{e\} \Rightarrow |\Pi\rho_{1,4}^{(4)}| = 24$. Таким образом, $|\Pi\rho_{1,3}^{(4)}|+|\Pi\rho_{1,4}^{(4)}|+|\Pi\rho_{2,4}^{(4)}| = 8+24+8 = 40 = |LA[4]\setminus LO[4]|$, а следовательно, $LA[4]\setminus LO[4] = \Pi\rho_{1,3}^{(4)}\cup\Pi\rho_{1,4}^{(4)}\cup\Pi\rho_{2,4}^{(4)} = LA^{(2)}[4]$, $\Pi\rho_{1,3}^{(4)} = LA_{\langle 1,3,3,3\rangle}[4]$, $\Pi\rho_{1,4}^{(4)} = LA_{\langle 2,2,3,3\rangle}[4]$, $\Pi\rho_{2,4}^{(4)} = LA_{\langle 2,2,2,4\rangle}[4]$, т. е. имеем систему из четырёх представителей классов π-эквивалентности для $LA[4]$: $\lambda_1^{(4)} \in LO[4]$, $\rho_{1,3}^{(4)} \in \Lambda^{(4)}$, $\rho_{1,4}^{(4)} \in \Lambda^{(4)}$, $\rho_{2,4}^{(4)} \in \Lambda^{(4)}$. Тогда в силу теоремы 3 справедливо $LA[4]\setminus LO[4] = LA^{(2)}[4]$, а следовательно, для любого $\rho \in LA[4]$ либо $\rho \in LO[4]$, либо существует $\lambda \in LO[4]$, такое, что $d(\lambda,\rho) = 2$. Как увидим далее, при $n \geqslant 5$ подобное свойство не выполняется.

С л у ч а й $n = 5$: $|LA[5]| = 2^{n(n-1)/2} = 2^{10} = 1024$, $|LO[5]| = 5! = 120$, $|LA[5]\setminus LO[5]| = 1024 - 120 = 904$. Единственным представителем класса π-эквивалентности $LO[5]$ является, например, линейный порядок $\lambda_1^{(5)} : a_1 \prec a_2 \prec a_3 \prec a_4 \prec a_5$. Для перечисления представителей классов π-эквивалентности из $LA^{(2)}[5] \subseteq LA[5]\setminus LO[5]$ воспользуемся множеством $\Lambda^{(5)} = \{\rho_{1,3}^{(5)} = \delta_{1,3}\lambda_1^{(5)}, \rho_{1,4}^{(5)} = \delta_{1,4}\lambda_1^{(5)}, \rho_{1,5}^{(5)} = \delta_{1,5}\lambda_1^{(5)}, \rho_{2,4}^{(5)} = \delta_{2,4}\lambda_1^{(5)}, \rho_{2,5}^{(5)} = \delta_{2,5}\lambda_1^{(5)}, \rho_{3,5}^{(5)} = \delta_{3,5}\lambda_1^{(5)}\}$, где

$$I(\rho_{1,3}^{(5)}) = \langle 1,2,4,4,4\rangle,\quad \bar I(\rho_{1,3}^{(5)}) = \langle 0,0,1,0,-1\rangle,\quad I(\rho_{1,4}^{(5)}) = \langle\ 1,3,3,4,4\rangle,$$
$$\bar I(\rho_{1,4}^{(5)}) = \langle 0,1,0,0,-1\rangle,\quad I(\rho_{1,5}^{(5)}) = \langle 2,2,3,4,4\rangle,\quad \bar I(\rho_{1,5}^{(5)}) = \langle 1,0,0,0,-1\rangle,$$
$$I(\rho_{2,4}^{(5)}) = \langle 1,3,3,3,5\rangle,\quad \bar I(\rho_{2,4}^{(5)}) = \langle 0,1,0,-1,0\rangle,\quad I(\rho_{2,5}^{(5)}) = \langle 2,2,3,3,5\rangle,$$
$$\bar I(\rho_{2,5}^{(5)}) = \langle 1,0,0,-1,0\rangle,\quad I(\rho_{3,5}^{(5)}) = \langle 2,2,2,4,5\rangle,\quad \bar I(\rho_{3,5}^{(5)}) = \langle 1,0,-1,0,0\rangle.$$

Приведём матрицы, соответствующие некоторым отношениям:

$$R(\rho_{1,3}^{(5)}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ 0 & 1 & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ 1 & 0 & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{bmatrix},\quad R(\rho_{2,4}^{(5)}) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & 0 & 1 & 1 & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 1 & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{bmatrix},\quad R(\rho_{3,5}^{(5)}) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 1 & 0\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 1 & 1\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Поскольку $I(\rho_{1,3}^{(5)}) = \langle 1,2,4,4,4\rangle$, выполнены условия леммы 1. Редуцированным отношением для $\rho_{1,3}^{(5)}$ является $\rho_1^{(3)}$, а следовательно, в силу утверждения 13 и замечания 8, $|H(\rho_{1,3}^{(5)})| = |H(\rho_1^{(3)})| = 3$, $|\Pi\rho_{1,3}^{(5)}| = 5!/3 = 40$. Аналогично, редуцированным отношением для $\rho_{2,4}^{(5)}$, $\rho_{3,5}^{(5)}$ также является $\rho_1^{(3)}$, а следовательно, $|\Pi\rho_{2,4}^{(5)}| = |\Pi\rho_{3,5}^{(5)}| = 5!/3 = 40$.

Поскольку $I(\rho_{1,4}^{(5)}) = \langle 1,3,3,4,4\rangle$, $I(\rho_{1,5}^{(5)}) = \langle 2,2,3,4,4\rangle$, $I(\rho_{2,5}^{(5)}) = \langle 2,2,3,3,5\rangle$, в силу следствия 4 получаем $H(\rho_{1,4}^{(5)}) = H(\rho_{1,5}^{(5)}) = H(\rho_{2,5}^{(5)}) = \{e\}$, а следовательно (см. утверждение 13), $|H(\rho_{1,4}^{(5)}) = |H(\rho_{1,5}^{(5)})| = |H(\rho_{2,5}^{(5)})| = 1$, $|\Pi\rho_{1,4}^{(5)}| = |\Pi\rho_{1,5}^{(5)}| = |\Pi\rho_{2,5}^{(5)}| = 5! = 120$.

Таким образом, $|LA^{(2)}[n]| = 120{\cdot}3+40{\cdot}3 = 480$. Поскольку $|LO[n]|+|LA^{(2)}[n]| = 120+480 = 600$, остаётся ещё 404 отношения из множества $LA[5]\setminus\{LO[5]\cup LA^{(2)}[5]\}$. Кроме того, ниже показано, что $LA_{\langle 1,2,4,4,4\rangle}[5] = \Pi\rho_{1,3}^{(5)}$, $LA_{\langle 1,3,3,4,4\rangle}[5] = \Pi\rho_{1,4}^{(5)}$, $LA_{\langle 1,3,3,3,5\rangle}[5] = \Pi\rho_{2,4}^{(5)}$, $LA_{\langle 2,2,3,3,5\rangle}[5] = \Pi\rho_{2,5}^{(5)}$, $LA_{\langle 2,2,2,4,5\rangle}[5] = \Pi\rho_{3,5}^{(5)}$ (только $LA_{\langle 2,2,3,4,4\rangle}[5] \neq \Pi\rho_{1,5}^{(5)}$).

Рассмотрим другие возможные случаи для $\rho \in LA[5]$. Для $I(\rho) = \langle 3,3,3,3,3 \rangle$ имеем $\overline{I}(\rho) = \langle 2,1,0,-1,-2 \rangle$ и, например, $I(\rho_1^{(5)}) = \langle 3,3,3,3,3 \rangle$, где

$$R(\rho_1^{(5)}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно доказать, что $H(\rho_1^{(5)}) = \langle \sigma \rangle = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4\}$, где $\sigma = (1,2,3,4,5)$, откуда (см. утверждение 13) $|\Pi\rho_1^{(5)}| = 5!/5 = 24$. Кроме того, далее показано, что $LA_{\langle 3,3,3,3,3 \rangle}[5] = \Pi\rho_1^{(5)}$, т. е. $\rho_1^{(5)}$ может служить единственным представителем класса $LA_{\langle 3,3,3,3,3 \rangle}[5]$.

Рассмотрим случай $I(\rho) = \langle 2,3,3,3,4 \rangle$, $\overline{I}(\rho) = \langle 1,1,0,-1,-1 \rangle$. Пусть $i,j \in \{1,2,3,4,5\}$, $A_2(\rho) = \{a_i\}$, $\langle a_i, a_j \rangle \in \rho$, $i \neq j$. Если $\rho' = (j,4)(i,5)\rho$, то $R(\rho')$ имеет следующий вид (элементы матрицы $R(\rho')$, соответствующие знаку $-$, определяются далее с учётом того, что $\rho' \in LA_{\langle 2,3,3,3,4 \rangle}[5]$):

$$R(\rho') = \begin{bmatrix} 1 & - & - & - & 1 \\ - & 1 & - & - & 1 \\ - & - & 1 & - & 1 \\ - & - & - & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Три возможных варианта для $R(\rho')$ в случае $\rho' \in LA_{\langle 2,3,3,3,4 \rangle}[5]$ следующие:

$$R(\rho_2^{(5)}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad R(\rho_3^{(5)}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad R(\rho_4^{(5)}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно показать [13], что $\Pi\rho_2^{(5)} \cap \Pi\rho_3^{(5)} = \varnothing$, $\Pi\rho_2^{(5)} \cap \Pi\rho_4^{(5)} = \varnothing$, $\Pi\rho_3^{(5)} \cap \Pi\rho_4^{(5)} = \varnothing$; далее установим, что $LA_{\langle 2,3,3,3,4 \rangle}[5] = \Pi\rho_2^{(5)} \cup \Pi\rho_3^{(5)} \cup \Pi\rho_4^{(5)}$.

Заметим, что если для некоторого $\pi \in S_5$ выполняется $\pi\rho_2^{(5)} = \rho_2^{(5)}$, то, в силу утверждения 15, $\pi(4) = 4$, $\pi(5) = 5$, т. е. π действует на множестве $\{1,2,3\}$, откуда $\pi \in S_3$, и из матрицы $R(\rho_2^{(5)})$ видно, что $\pi\rho_2^{(5)} = \rho_2^{(5)} \Leftrightarrow \pi\rho_2^{(3)} = \rho_2^{(3)}$ (см. случай $n = 3$), т. е. $H(\rho_2^{(5)}) = H(\rho_2^{(3)}) = \langle (1,2,3) \rangle$, следовательно, $|\Pi\rho_2^{(5)}| = 5!/3 = 40$.

Если для некоторого $\pi \in S_5$ выполняется $\pi\rho_3^{(5)} = \rho_3^{(5)}$, то, в силу утверждения 15, $\pi(1) = 1$, $\pi(5) = 5$ (поскольку первая строка матрицы $R(\rho_3^{(5)})$ — единственная с четырьмя единицами, а пятая — единственная с двумя единицами). Далее из первой строки матрицы $R(\rho_3^{(5)})$ заключаем, что $\pi(3) \neq 2$, $\pi(4) \neq 2$, откуда $\pi(3), \pi(4) \in \{3,4\}$, и поскольку случай $\pi = (3,4)$ невозможен (см. утверждение 14), то $\pi = e$. Таким образом, $H(\rho_3^{(5)}) = \{e\}$, а следовательно, $|\Pi\rho_3^{(5)}| = 5!/1 = 120$. Аналогично доказывается, что $H(\rho_4^{(5)}) = \{e\}$, $|\Pi\rho_4^{(5)}| = 5!/1 = 120$.

Рассмотрим теперь случай $I(\rho) = \langle 2,2,3,4,4 \rangle$, $\overline{I}(\rho) = \langle 1,0,0,0,-1 \rangle$. Заметим, что $\rho_{1,5}^{(5)} \in LA_{\langle 2,2,3,4,4 \rangle}[5]$, т. е. один из возможных представителей классов π-эквивалентности из $LA_{\langle 2,2,3,4,4 \rangle}[5]$ уже найден. Покажем, что он не является единственным, т. е. что $\Pi\rho_{1,5}^{(5)} \neq LA_{\langle 2,2,3,4,4\rangle}[5]$. Мы уже сталкивались с подобной ситуацией в случае $LA_{\langle 2,3,3,3,4\rangle}[5]$, где оказалось три класса π-эквивалентности. Рассмотрим бинарное отношение $\rho_5^{(5)}$ с $R(\rho_5^{(5)})$:

$$R(\rho_5^{(5)}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда $\rho_5^{(5)} \in LA_{\langle 2,2,3,4,4\rangle}[5]$. Нетрудно показать [13], что не существует $\lambda \in LO[5]$, такого, что $d(\rho_5^{(5)}, \lambda) = 2$, и тем самым $\rho_5^{(5)} \notin \Pi\rho_{1,5}^{(5)} \subset LA^{(2)}[5]$. В силу следствия 4, $H(\rho_5^{(5)}) = \{e\}$, а следовательно, $|\Pi\rho_4^{(5)}| = 5!/1 = 120$.

Перечислим всех найденных представителей классов π-эквивалентности для $LA[5]$:

1) $\lambda_1^{(5)} \in LO[5]$, $\Pi\lambda_1^{(5)} = LO[5]$, $|\Pi\lambda_1^{(5)}| = |LO[5]| = 5! = 120$;
2) $\rho_{1,3}^{(5)} = \delta_{1,3}\lambda_1^{(5)} \in \Lambda^{(5)}$, $I(\rho_{1,3}^{(5)}) = \langle 1,2,4,4,4\rangle$, $\Pi\rho_{1,3}^{(5)} \subseteq LA_{\langle 1,2,4,4,4\rangle}[5]$, $|\Pi\rho_{1,3}^{(5)}| = 40$;
3) $\rho_{1,4}^{(5)} = \delta_{1,4}\lambda_1^{(5)} \in \Lambda^{(5)}$, $I(\rho_{1,4}^{(5)}) = \langle 1,3,3,4,4\rangle$, $\Pi\rho_{1,4}^{(5)} \subseteq LA_{\langle 1,3,3,4,4\rangle}[5]$, $|\Pi\rho_{1,4}^{(5)}| = 120$;
4) $\rho_{1,5}^{(5)} = \delta_{1,5}\lambda_1^{(5)} \in \Lambda^{(5)}$, $I(\rho_{1,5}^{(5)}) = \langle 2,2,3,4,4\rangle$, $\Pi\rho_{1,5}^{(5)} \subset LA_{\langle 2,2,3,4,4\rangle}[5]$, $|\Pi\rho_{1,5}^{(5)}| = 120$;
5) $\rho_{2,4}^{(5)} = \delta_{2,4}\lambda_1^{(5)} \in \Lambda^{(5)}$, $I(\rho_{2,4}^{(5)}) = \langle 1,3,3,3,5\rangle$, $\Pi\rho_{2,4}^{(5)} \subseteq LA_{\langle 1,3,3,3,5\rangle}[5]$, $|\Pi\rho_{2,4}^{(5)}| = 40$;
6) $\rho_{2,5}^{(5)} = \delta_{2,5}\lambda_1^{(5)} \in \Lambda^{(5)}$, $I(\rho_{2,5}^{(5)}) = \langle 2,2,3,3,5\rangle$, $\Pi\rho_{2,5}^{(5)} \subseteq LA_{\langle 2,2,3,3,5\rangle}[5]$, $|\Pi\rho_{2,5}^{(5)}| = 120$;
7) $\rho_{3,5}^{(5)} = \delta_{3,5}\lambda_1^{(5)} \in \Lambda^{(5)}$, $I(\rho_{3,5}^{(5)}) = \langle 2,2,2,4,5\rangle$, $\Pi\rho_{3,5}^{(5)} \subseteq LA_{\langle 2,2,2,4,5\rangle}[5]$, $|\Pi\rho_{3,5}^{(5)}| = 40$;
8) $\rho_1^{(5)} \in LA_{\langle 3,3,3,3,3\rangle}[5]$, $\overline{I}(\rho_1^{(5)}) = \langle 2,1,0,-1,-2\rangle$, $\Pi\rho_1^{(5)} \subseteq LA_{\langle 3,3,3,3,3\rangle}[5]$, $|\Pi\rho_1^{(5)}| = 24$;
9) $\rho_2^{(5)} \in LA_{\langle 2,3,3,3,4\rangle}[5]$, $\overline{I}(\rho_2^{(5)}) = \langle 1,1,0,-1,-1\rangle$, $\Pi\rho_2^{(5)} \subset LA_{\langle 2,3,3,3,4\rangle}[5]$, $|\Pi\rho_2^{(5)}| = 40$;
10) $\rho_3^{(5)} \in LA_{\langle 2,3,3,3,4\rangle}[5]$, $\overline{I}(\rho_3^{(5)}) = \langle 1,1,0,-1,-1\rangle$, $\Pi\rho_3^{(5)} \subset LA_{\langle 2,3,3,3,4\rangle}[5]$, $|\Pi\rho_3^{(5)}| = 120$;
11) $\rho_4^{(5)} \in LA_{\langle 2,3,3,3,4\rangle}[5]$, $\overline{I}(\rho_4^{(5)}) = \langle 1,1,0,-1,-1\rangle$, $\Pi\rho_4^{(5)} \subset LA_{\langle 2,3,3,3,4\rangle}[5]$, $|\Pi\rho_4^{(5)}| = 120$;
12) $\rho_5^{(5)} \in LA_{\langle 2,2,3,4,4\rangle}[5]$, $\overline{I}(\rho_5^{(5)}) = \langle 1,0,0,0,-1\rangle$, $\Pi\rho_5^{(5)} \subset LA_{\langle 2,2,3,4,4\rangle}[5]$, $|\Pi\rho_5^{(5)}| = 120$.

Таким образом, получены представители классов π-эквивалентности для $LA[5]$, при этом

$$\begin{gathered} |\Pi\lambda_1^{(5)}| + |\Pi\rho_{1,3}^{(5)}| + |\Pi\rho_{1,4}^{(5)}| + |\Pi\rho_{1,5}^{(5)}| + |\Pi\rho_{2,4}^{(5)}| + |\Pi\rho_{2,5}^{(5)}| + |\Pi\rho_{3,5}^{(5)}| + |\Pi\rho_1^{(5)}| + |\Pi\rho_2^{(5)}| + \\ + |\Pi\rho_3^{(5)}| + |\Pi\rho_4^{(5)}| + |\Pi\rho_5^{(5)}| = 120 + 40 + 120 + 120 + 40 + 120 + 40 + \\ + 24 + 40 + 120 + 120 + 120 = 1024 = |LA[5]|, \end{gathered} \tag{7}$$

следовательно, найденная система представителей является полной.

Нам понадобится следующее очевидное

Утверждение 18. Пусть X — конечное непустое множество, $|X| = N \geqslant 2$, $X_1, \ldots, X_k$ — непустые множества, образующие разбиение множества X. Пусть, далее, $Y_1, \ldots, Y_k$ — конечные множества, такие, что $Y_1 \subseteq X_1, \ \ldots, \ Y_k \subseteq X_k$. Тогда в случае $\sum\limits_{i=1}^{k} |Y_i| = N$ выполняется: $Y_1 = X_1, \ \ldots, \ Y_k = X_k$.

Используя утверждение 18, из (7), учитывая классы эквивалентности 1–12, получаем

$$\begin{gathered} \Pi\lambda_1^{(5)} = LO[5], \ \Pi\rho_{1,3}^{(5)} = LA_{\langle 1,2,4,4,4\rangle}[5], \ \Pi\rho_{1,4}^{(5)} = LA_{\langle 1,3,3,4,4\rangle}[5], \Pi\rho_{1,5}^{(5)} = LA_{\langle 2,2,3,4,4\rangle}[5], \\ \Pi\rho_{2,4}^{(5)} = LA_{\langle 1,3,3,3,5\rangle}[5], \ \Pi\rho_{2,5}^{(5)} = LA_{\langle 2,2,3,3,5\rangle}[5], \ \Pi\rho_{3,5}^{(5)} = LA_{\langle 2,2,2,4,5\rangle}[5], \\ \Pi\rho_1^{(5)} = LA_{\langle 3,3,3,3,3\rangle}[5], \ \Pi\rho_2^{(5)} \cup \Pi\rho_3^{(5)} \cup \Pi\rho_4^{(5)} = LA_{\langle 2,3,3,3,4\rangle}[5], \ \Pi\rho_{1,5}^{(5)} \cup \Pi\rho_5^{(5)} = LA_{\langle 2,2,3,4,4\rangle}[5]. \end{gathered}$$

Результаты для $\rho \in LA[n]$ при $n = 3, 4, 5$ позволяют с помощью леммы 1 сформулировать некоторые свойства для произвольного $n \geqslant 3$. Особенно просто они получаются для $\rho \in LA^{(2)}[n]$. Например, для всех $\rho \in LA^{(2)}[n]$ можно по вектору $\bar{I}(\rho) \in V_{(n)}$ (см. утверждение 10) определить:

1) количество элементов в $\operatorname{Arg}\min\limits_{\lambda \in LO[n]} d(\lambda, \rho)$, которое равно 1 или 3 (см. утверждение 20);
2) количество элементов в $\Pi\rho$: $|\Pi\rho| = n!/3$ либо $|\Pi\rho| = n!$ (см. утверждение 20);
3) точную формулу для $|LA^{(2)}[n]|$ (см. следствие 5);
4) случаи выполнения равенства $LA_{I(\rho)}[n] = \Pi\rho$ для $\rho \in \Lambda^{(n)}$(см. утверждение 21);
5) множество $\bar{V}_{(n)} \subseteq V_{(n)}$ (масксимально широкое), такое, что при любом $\rho \in LA[n]$ выполняется: $I(\rho) \in \bar{V}_{(n)} \Rightarrow \rho \in LA^{(2)}[n]$ (см. утверждение 22).

Для этого понадобятся следующие утверждения:

Утверждение 19. Пусть $n \geqslant 4$, $\rho_{1,n}^{(n)} = \delta_{1,n}\lambda_1^{(n)} \in \Lambda^{(n)}$. Тогда

$$I(\rho_{1,n}^{(n)}) = \langle 2, 2, 3, \ldots, n-2, n-1, n-1\rangle,\ \bar{I}(\rho_{1,n}^{(n)}) = \langle 1, 0, \ldots, 0, -1\rangle \in V_n,$$

1) $\operatorname{Arg}\min\limits_{\lambda \in LO[n]} d(\lambda, \rho_{1,n}^{(n)}) = \{\lambda_1^{(n)}\}$;
2) для всех $\rho \in LA^{(2)}[n]$ в случае $\bar{I}(\rho) = \langle 1, 0, \ldots, 0, -1\rangle \in V_n$ выполняется $|\operatorname{Arg}\min\limits_{\lambda \in LO[n]} d(\lambda, \rho)| = 1,\ H(\rho) = \{e\}$;
3) в случае $n \geqslant 5$ для $\rho_*^{(n)} = \delta_{3,n}\delta_{1,3}\lambda_1^{(n)}$ верно: $\min\limits_{\lambda \in LO[n]} d(\lambda, \rho_*^{(n)}) = d(\lambda_1^{(n)}, \rho_*^{(n)}) = 4$, $\bar{I}(\rho_*^{(n)}) = \langle 1, 0, \ldots, 0, -1\rangle$, а следовательно, $\rho_*^{(n)} \notin \Pi\rho_{1,n}^{(n)}$, $LA_{I(\rho_{1,n}^{(n)})}[n] \neq \Pi\rho_{1,n}^{(n)}$.

Доказательство.

1) Заметим, что $\min\limits_{\lambda \in LO[n]} d(\lambda, \rho_{1,n}^{(n)}) = 2$, и при $n \geqslant 4$, в отличие от $n = 3$ (см. $\rho_1^{(3)} = \delta_{1,3}\lambda_1^{(3)}$), имеем единственную возможность для $\delta_{i,j}$, где $i < j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, чтобы $\delta_{i,j}\rho_{1,n}^{(n)} \in LO[n]$, а именно: $\delta_{i,j} = \delta_{1,n}$ (например, в случае $\rho_{1,4}^{(4)} = \delta_{1,4}\lambda_1^{(4)}$); другие $\delta_{i,j}$ не приводят $\rho_{1,n}^{(n)}$ к линейному порядку.

2) Следует из п. 1, а также того, что из условий $\rho \in LA^{(2)}[n]$, $\bar{I}(\rho) = \langle 1, 0, \ldots, 0, -1\rangle \in V_n$, в силу теоремы 3, получаем, что найдётся подстановка $\pi \in S_n$, такая, что $\rho = \pi\rho_{1,n}^{(n)}$, откуда $\operatorname{Arg}\min\limits_{\lambda \in LO[n]} d(\lambda, \rho) = \{\pi\lambda_1^{(n)}\}$ (см. утверждение 12). Равенство $H(\rho) = \{e\}$ получаем из следствия 4.

3) Доказательство несложно провести для $\rho_5^{(5)}$: заметим, что $\rho_5^{(5)} = \delta_{3,5}\delta_{1,3}\lambda_1^{(5)}$, $\bar{I}(\rho_5^{(5)}) = \langle 1, 0, 0, 0, -1\rangle$. В общем случае рассуждения аналогичны. ■

Утверждение 20. Пусть $n \geqslant 4$, $\rho \in LA^{(2)}[n]$,

$$\bar{I}(\rho) = \langle 0, \ldots, 0, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s}, -1, 0, \ldots, 0\rangle \in V_n,\ s \geqslant 1.$$

Тогда

1) если $s = 1$, то $|\operatorname{Arg}\min\limits_{\lambda \in LO[n]} d(\lambda, \rho)| = 3$, $|\Pi\rho| = n!/3$;
2) если $s \geqslant 2$, то $H(\rho) = \{e\}$, $|\operatorname{Arg}\min\limits_{\lambda \in LO[n]} d(\lambda, \rho)| = 1$, $|\Pi\rho| = n!$.

Доказательство. Для $s = 1$, используя лемму 1, получаем, что редуцированное бинарное отношение принадлежит $LA_{\langle 2,2,2\rangle}[3] = \{\rho_1^{(3)}, (1,2)\rho_1^{(3)}\}$ (см. случай $n = 3$), а следовательно, имеет ровно три линейных порядка, удалённых на расстояние 2 от него (см. $R(\rho_1^{(3)})$), что в силу замечания 8 переносится и на само бинарное отношение ρ. Воспользовавшись замечанием 8, а также равенством $|H(\rho_1^{(3)})| = |H((1,2)\rho_1^{(3)})| = 3$, получаем второе равенство в п. 1. В случае $s \geqslant 2$ для редуцированного отношения выполняются условия утверждения 19, из которого следуют равенства в п. 2. ■

Следствие 5. Пусть выполнены условия утверждения 20. Тогда в случае $s = 1$ имеем $n-2$ варианта для $\bar{I}(\rho) = \langle 0,\dots,0,1,\underbrace{0,\dots,0}_{s},-1,0,\dots,0\rangle \in V_n$, в случае $s = 2$ имеем $n-3$ варианта и т. д., в случае $s = n-2$ — один вариант, следовательно, в силу утверждения 20, справедлива формула

$$|LA^{(2)}[n]| = (n-2)n!/3 + [(n-2)(n-3)/2]n! = (n-2)(3n-7)n!/6.$$

Например, при $n = 5$ по этой формуле имеем $LA^{(2)}[5] = 3 \cdot 8 \cdot 120/6 = 480$, что совпадает с полученным ранее результатом.

Используя лемму 1, свойства отношений из $LA[3], LA[4]$, а также утверждение 19, нетрудно показать [13], что справедливы следующие утверждения:

Утверждение 21. Пусть $n \geqslant 4$, $\rho^* \in \Lambda^{(n)}$,

$$\bar{I}(\rho^*) = \langle 0,\dots,0,1,\underbrace{0,\dots,0}_{s},-1,0,\dots,0\rangle \in V_n,\ \ s \geqslant 1.$$

Тогда если $s \in \{1,2\}$, то $LA_{I(\rho^*)}[n] = \Pi\rho^*$, а если $s \geqslant 3$, то $LA_{I(\rho^*)}[n] \neq \Pi\rho^*$.

Утверждение 22. Пусть $n \geqslant 4$, $\rho \in LA[n]$, $\bar{I}(\rho) \in V_n$, при этом $\bar{I}(\rho) = \langle 0,\dots,0,1,0,-1,0,\dots,0\rangle$ или $\bar{I}(\rho) = \langle 0,\dots,0,1,0,0,-1,0,\dots,0\rangle$. Тогда $\rho \in LA^{(2)}[n]$.

4. Методы сведения исходной задачи к задаче меньшей размерности

Приведём некоторые методы сведения исходной задачи нахождения $\operatorname{Arg}\min\limits_{\rho\in LO[n]} D(\rho)$ в случае, когда $\rho_1,\dots,\rho_m \in LO[n]$ и m нечётно, к задаче меньшей размерности, основанные на использовании леммы 1, а также на разбиении графа $\tilde{G} = (A,\tilde{\rho})$ на компоненты сильной связности, где $\tilde{\rho}$ — мажоритарное отношение, введённое в п. 1. Для описания метода, основанного на лемме 1, понадобятся следующие обозначения:

$$J_{(n)} = \{\langle i,j\rangle : i,j \in \{1,\dots,n\}, i<j\},$$
$$\forall \langle i,j\rangle \in J_{(n)},\ \rho \in 2^{A^2}\quad D_{ij}(\rho) = \sum_{t=1}^{m} |r_{ij} - r_{ij}^{(t)}| + \sum_{t=1}^{m} |r_{ji} - r_{ji}^{(t)}|.$$

Тогда для всех $\langle i,j\rangle \in J_{(n)}$, $\rho \in LA[n]$, используя то, что $r_{ij} + r_{ji} = 1$, $p_{ij} + p_{ji} = m$, получаем следующее равенство [13]:

$$\begin{aligned} D_{ij}(\rho) = 2\min\{p_{ij}, m-p_{ij}\} &+ 2|r_{ij} - \tilde{r}_{ij}|[\max\{p_{ij}, m-p_{ij}\} - \min\{p_{ij}, m-p_{ij}\}] = \\ = 2\min\{p_{ij}, m-p_{ij}\} &+ 2|r_{ij} - \tilde{r}_{ij}|[m - 2\min\{p_{ij}, m-p_{ij}\}]. \end{aligned} \tag{8}$$

Для $J \subseteq \{1,\dots,n\}^2$ обозначим $D_J(\rho) = \sum\limits_{\langle i,j\rangle\in J}\sum\limits_{t=1}^{m} |r_{ij} - r_{ij}^{(t)}|$. Пусть выполнены условия леммы 1 и $\rho_t' = \rho_t \cap (A')^2$, $t = 1,\dots,m$, $I_1 = \{v_1,\dots,v_k,j_1,\dots,j_l\}$, $I' = \{\iota_1,\dots,\iota_{n-k-l}\} = I \setminus I_1$, $D'(\rho) = \sum\limits_{t=1}^{m} d(\rho\cap(A')^2,\ \rho_t') = D_{(I')^2}(\rho)$. Тогда, учитывая (8), для всех $\rho \in LO[n]$ имеем

$$D(\rho) = D_{(I')^2}(\rho) + D_{\{1,\dots,n\}^2\setminus(I')^2}(\rho) = D'(\rho) + \sum_{\langle i,j\rangle \in J_{(n)}\setminus(I')^2} 2\min\{p_{ij}, m-p_{ij}\} + \\ + \sum_{\langle i,j\rangle \in J_{(n)}\setminus(I')^2} 2|r_{ij} - \tilde{r}_{ij}|[\max\{p_{ij}, m-p_{ij}\} - \min\{p_{ij}, m-p_{ij}\}]. \tag{9}$$

Из равенства (9) следует (см. далее замечание 9), что

$$\operatorname{Arg}\min_{\rho\in LO[n]} D(\rho) = \{\rho : \rho\cap(A')^2 \in \operatorname{Arg}\min_{\lambda'\in LO[n-k-l]} D'(\lambda'), \\ r_{ij} = \tilde{r}_{ij}, \langle\, i,j\rangle \in \{1,\dots,n\}^2 \setminus (I')^2\},$$

при этом $\min\limits_{\rho\in LO[n]} D(\rho) = \min\limits_{\lambda'\in LO[n-k-l]} D'(\lambda') + \sum\limits_{\langle i,j\rangle\in J^1_{(n)}} 2\min\{p_{ij}, m-p_{ij}\}$, т. е. исходную задачу свели к задаче меньшей размерности — $(n-k-l)$.

Замечание 9. В выражении в правой части равенства (9) второе слагаемое является постоянной величиной, а минимизацию первого и третьего можно проводить независимо. При этом если минимум первого слагаемого достигается на некотором линейном порядке $\lambda' : a_{\iota_1} \prec \ldots \prec a_{\iota_{n-k-l}}$, т. е. при $\rho\cap(A')^2 = \lambda'$, где $A' = \{a_{\iota_1},\dots,a_{\iota_{n-k-l}}\}$, то выполнение $r_{ij} = \tilde{r}_{ij}$, $\langle i,j\rangle \in \{1,\dots,n\}^2\setminus(I')^2$, приведёт, с одной стороны, к точному минимуму, равному 0, третьего (неотрицательного) слагаемого в (9), а с другой — к тому, что получаемое таким образом бинарное отношение ρ будет линейным порядком вида $a_{j_1} \prec \ldots \prec a_{j_l} \prec \underbrace{a_{\iota_1} \prec \ldots \prec a_{\iota_{n-k-l}}}_{\lambda'} \prec a_{v_1} \prec \ldots \prec a_{v_k}$.

В другом подходе используется разложение $\tilde{G} = (A,\tilde{\rho})$ на компоненты сильной связности. Этот подход использован в [1] для решения более общей задачи, в условиях которой не гарантировано выполнение $\tilde{\rho} \in LA[n]$; в нашем случае это условие будет использовано. Под сильной связностью графа понимается взаимная достижимость любых двух его вершин. Под компонентой сильной связности графа понимается его максимальный сильносвязный подграф (т. е. не являющийся собственным подграфом никакого другого сильносвязного подграфа). Задача выделения указанных компонент имеет полиномиальную вычислительную сложность. Пусть $\tilde{G}_1 = (\tilde{A}_1,\tilde{\rho}_1)$, …, $\tilde{G}_p = (\tilde{A}_p,\tilde{\rho}_p)$ — компоненты сильной связности графа $\tilde{G} = (A,\tilde{\rho})$, где $\{\tilde{A}_1,\dots,\tilde{A}_p\}$ — разбиение множества A. Рассмотрим для $\tilde{G} = (A,\tilde{\rho})$ «граф конденсации» $G_0 = (A_0,\rho_0)$, вершинами которого являются компоненты $\tilde{G}_1,\dots,\tilde{G}_p$ (т. е. $A_0 = \{\tilde{G}_1,\dots,\tilde{G}_p\}$) с дугами, определяемыми по следующему правилу: $\langle\tilde{G}_i,\tilde{G}_j\rangle \in \rho_0 \Leftrightarrow \exists a' \in \tilde{A}_i, a'' \in \tilde{A}_j$ $\big(\langle a',a''\rangle \in \tilde{\rho}\big)$. Тогда из условия $\tilde{\rho} \in LA[n]$ следует, что для бинарных отношений $\rho_0 \in 2^{A_0^2}$, $\tilde{\rho}_1 \in 2^{\tilde{A}_1^2}$, …, $\tilde{\rho}_p \in 2^{\tilde{A}_p^2}$ справедливо: $\rho_0 \in LO[p]$, $\tilde{\rho}_1 \in LA[n_1]$, …, $\tilde{\rho}_p \in LA[n_p]$, где $n_1 = |\tilde{A}_1|$, …, $n_p = |\tilde{A}_p|$, $n_1 + \ldots + n_p = n$. Пусть для простоты обозначений для линейного порядка ρ_0 выполняется $\tilde{A}_1 \prec \tilde{A}_2 \prec \ldots \prec \tilde{A}_p$. Тогда для нахождения всех линейных порядков $\lambda \in \operatorname{Arg}\min\limits_{\rho\in LO[n]} D(\rho)$ составляем всевозможные линейные порядки вида $\lambda_1 \prec \lambda_2 \prec \ldots \prec \lambda_p$ (это условие с учётом транзитивности однозначно определяет линейный порядок на A), где $\lambda_i \in \operatorname{Arg}\min\limits_{\rho\in LO[n_i]} D_{I_i^2}(\rho)$, $I_i = \{i \in \{1,\dots,n\} : a_i \in \tilde{A}_i\}$. Таким образом, произведена декомпозиция исходной задачи на p аналогичных задач меньшей размерности. Нетрудно видеть, что метод, основанный на лемме 1, является следствием этого более общего метода.

5. Использование методов теории графов для точного решения задачи

Из п. 4 следует, что для решения поставленной задачи достаточно ограничиться случаем, когда $\widetilde{G} = (A, \tilde{\rho})$ — сильносвязный граф. Всюду далее рассматриваем графы без петель.

Приведём сначала общие утверждения относительно произвольного сильносвязного графа $G = (A, \rho)$, где $\rho \in 2^{A^2}$. Пронумеруем все пары (дуги графа G), входящие в ρ, т. е. пусть $\rho = \{x_1, \ldots, x_N\}$. Пусть $\eta_1, \ldots, \eta_k$ — множество всех простых контуров (через каждую вершину в простом контуре проходим ровно один раз) в G, записываемых в виде последовательностей (слов) вида $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_l}$, перечисленных в лексикографическом порядке (в этом порядке их алгоритмически легче перечислить). Если дуга $x \in \rho$ входит в контур η, то кратко пишем $x \in \eta$. Множество дуг $U \subseteq \rho$ назовём *множеством представителей контуров* $\eta_1, \ldots, \eta_k$, если $\forall \eta \in \{\eta_1, \ldots, \eta_k\}\, \exists x \in U\, (x \in \eta)$. Оно называется *минимальным*, если отбрасывание любой дуги из U приводит к множеству дуг, не являющемуся множеством представителей контуров $\eta_1, \ldots, \eta_k$. Одним из возможных методов нахождения семейства минимальных представителей контуров $\eta_1, \ldots, \eta_k$ является известный метод Магу. Пусть U — некоторое множество дуг графа G. Введём булевы переменные X_i, соответствующие дугам $x_i, i = 1, \ldots, N$: $X_i = 1 \Leftrightarrow x_i \in U$. Тогда для того, чтобы U являлось множеством представителей контуров $\eta_1, \ldots, \eta_k$, необходимо и достаточно, чтобы

$$F(X_1, \ldots, X_N) = \bigwedge_{i=1}^{k} \left(\bigvee_{x_j \in \eta_i} X_j \right) = 1. \tag{10}$$

Согласно методу Магу, для нахождения семейства минимальных представителей контуров $\eta_1, \ldots, \eta_k$ приводим $F(X_1, \ldots, X_N)$ к дизъюнктивной нормальной форме (днф), а затем к сокращённой днф $F_1(X_1, \ldots, X_N)$, используя «закон поглощения» $C \vee (C \& D) \equiv C$ (пока это возможно). Тогда каждому дизъюнктивному члену $X_{i_1} \& \ldots \& X_{i_s}$ из $F_1(X_1, \ldots, X_N)$ соответствует $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\}$ — минимальное множество представителей контуров $\eta_1, \ldots, \eta_k$. Действуя таким образом, получаем их все.

Пример 6. Пусть $G = (A, \rho)$, $\rho \in LA[4]$, $R(\rho) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Тогда (без учёта рефлексивных пар) $\rho \supseteq \{x_1 = \langle a_1, a_2 \rangle, x_2 = \langle a_1, a_3 \rangle, x_3 = \langle a_2, a_3 \rangle, x_4 = \langle a_2, a_4 \rangle, x_5 = \langle a_3, a_4 \rangle, x_6 = \langle a_4, a_1 \rangle\}$. Перечислим контуры в G (в лексикографическом порядке): $\eta_1 = x_1 x_3 x_5 x_6$, $\eta_2 = x_1 x_4 x_6$, $\eta_3 = x_2 x_5 x_6$. Составим формулу $F(X_1, \ldots, X_6)$, согласно (10):

$$\begin{aligned} F(X_1, \ldots, X_6) = (X_1 \vee X_3 \vee X_5 \vee X_6) \& (X_1 \vee X_4 \vee X_6) \& (X_2 \vee X_5 \vee X_6) \equiv \\ \equiv X_6 \vee X_1 X_2 \vee X_1 X_5 \vee X_2 X_3 X_4 \vee X_4 X_5 \end{aligned}$$

(преобразуем, заменяя & на $\cdot$ и используя равносильность $C \vee (D \& E) \equiv (C \vee D) \& (C \vee E)$). Таким образом, семействами минимальных представителей контуров η_1, η_2, η_3 являются множества дуг $\{x_6\}$, $\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, x_5\}$, $\{x_2, x_3, x_4\}$, $\{x_4, x_5\}$.

Утверждение 23. Пусть U — минимальное множество представителей контуров $\eta_1, \ldots, \eta_k$. Тогда для всех $x \in U$ существует контур $\eta(x) \in \eta_1, \ldots, \eta_k$, такой, что x — единственный представитель в $\eta(x)$ из U, т. е. $\forall x' \in U \setminus \{x\}\, \big(x' \notin \eta(x)\big)$.

Доказательство. Если предположить противное, то для некоторого $x \in U$ имеет место: $\forall \eta \in \eta_1, \ldots, \eta_k \ \exists x'(\eta) \in U \setminus \{x\} \ \bigl(x'(\eta) \in \eta\bigr)$, откуда $U \setminus \{x\}$ — множество представителей контуров $\eta_1, \ldots, \eta_k$, а это противоречит минимальности U.■

Утверждение 24. Пусть $x = \langle a_i, a_j \rangle \in \rho$, $a_i \neq a_j$, $U = \{x\}$ — минимальное множество представителей контуров $\eta_1, \ldots, \eta_k$. Тогда граф G', получаемый из G заменой дуги $\langle a_i, a_j \rangle$ на противоположную — $\langle a_j, a_i \rangle$, является бесконтурным.

Доказательство. Пусть для простоты обозначений $x = \langle a_1, a_2 \rangle$. Предположим, что в G' имеется контур η. Не теряя общности, считаем, что он простой. Заметим, что $\langle a_2, a_1 \rangle \in \eta$, так как в противном случае η — контур в G, в который не входит дуга $x = \langle a_1, a_2 \rangle$, что противоречит условиям. Заметим, что η_1 — контур в G, проходящий через $x = \langle a_1, a_2 \rangle$. Заменяя в η_1 дугу $\langle a_1, a_2 \rangle$ на цепь $a_1, a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}, a_2$, получаемую из η удалением дуги $\langle a_2, a_1 \rangle$ (очевидно, являющуюся простой цепью в G), получаем контур в G, из которого, в свою очередь, можно выделить простой контур, в который не входит дуга $x = \langle a_1, a_2 \rangle$, что противоречит условиям. ■

Утверждение 25. Пусть $U = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\}$ — минимальное множество представителей контуров $\eta_1, \ldots, \eta_k$. Тогда граф G', получаемый из G заменой всех дуг из U на противоположные, является бесконтурным.

Доказательство. Обозначим для $x_i \in U$ через x'_i дугу, противоположную x_i, $U' = \{x'_{i_1}, \ldots, x'_{i_s}\}$. Предположим, что в G' имеется контур η. Не теряя общности, считаем, что он простой. Заметим, что η содержит по крайней мере одну дугу из U', так как в противном случае η — контур в G, в который не входят дуги из U, что противоречит условиям. Поэтому в η входит по крайней мере одна дуга из U. Случай, когда эта дуга является единственной, рассмотрен при доказательстве утверждения 24. Случай, когда их несколько, рассматривается аналогично с использованием утверждения 23, из которого следует, что мы можем последовательно заменять в η дуги x'_i из U' на соответствующие цепи, получающиеся из контуров $\eta(x_i) \in \{\eta_1, \ldots, \eta_k\}$, в каждый из которых входит дуга x_i и не входят другие дуги из U, и в результате получить контур в G, в который не вошла ни одна дуга из U, т. е. прийти к противоречию с тем, что U — множество представителей всех контуров графа G. ■

Из приведённых рассуждений получаем следующий алгоритм 4.

Алгоритм 4. Нахождение множества $\operatorname{Arg}\min\limits_{\rho \in LO[n]} D(\rho)$

1: Находим все простые контуры $\eta_1, \ldots, \eta_k$ в мажоритарном графе $\tilde{G} = (A, \tilde{\rho})$. Для однозначности перечисляем их в лексикографическом порядке.

2: Определяем $U_1, \ldots, U_T$ — минимальные множества представителей контуров (например, методом Магу).

3: Для каждого $U = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\} \in \{U_1, \ldots, U_T\}$ определяем $c(U) = c(x_{i_1}) + \ldots + c(x_{i_s})$. Замена в $\tilde{G} = (A, \tilde{\rho})$ всех дуг из U на противоположные приводит к бесконтурному графу (см. утверждение 25) $G_U = (A, \rho_U)$ (и к бинарному отношению $\rho_U \in LO[n]$, такому, что $D(\rho_U) = D(\tilde{\rho}) + 2c(U)$ (см. утверждение 5)).

4: Находим $c_{\min} = \min\{c(U_i) : i = 1, \ldots, T\}$. Тогда

$$\operatorname{Arg}\min_{\rho \in LO[n]} D(\rho) = \{\rho_U : U \in \{U_1, \ldots, U_T\},\ c(U) = c_{\min}\}.$$

Замечание 10. Если $\lambda_1^{(n-1)} \in LO[n-1]$ — линейный порядок вида $a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec$ $\prec a_{n-1}$, то для $\rho = \lambda_1^{(n-1)} \cup \{\langle a_n, a_1\rangle, \langle a_2, a_n\rangle, \langle a_3, a_n\rangle, \ldots, \langle a_n, a_n\rangle\}$ выполняется: $\rho \in$ $\in LA[n]$ и граф $G = (A, \rho)$ содержит все контуры вида

$$\langle a_1, a_{i_1}\rangle, \langle a_{i_1}, a_{i_2}\rangle, \ldots, \langle a_{i_{k-1}}, a_{i_k}\rangle, \langle a_{i_k}, a_n\rangle, \langle a_n, a_1\rangle,$$

где $2 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n-1$. Их столько же, сколько непустых подмножеств множества $\{2, 3, \ldots, n-1\}$, т. е. $2^{n-2}-1$. Кроме того, в сильносвязном графе все дуги входят в контуры. Таким образом, для формулы (10), по которой определяется $F(X_1, \ldots, X_N)$ в методе Магу для примера 4, имеем $k = 2^{n-2} - 1$, $N = (n-1)(n-2)/2$, что приводит к очень громоздкому при больших n выражению. Эта же величина $k = 2^{n-2} - 1$ фигурирует и в алгоритме 4, что говорит об ограниченной применимости рассматриваемого в настоящем пункте метода (в отличие, например, от метода нахождения Δ-оптимального решения при фиксированном Δ в п. 2).

Заключение

Перечислим основные вопросы, затронутые в работе.

1. Исследуется класс бинарных отношений $LA[n]$. К этому классу, в частности, приводят некоторые задачи группового выбора. Изучается задача построения медианы для нечётного числа отношений линейного порядка (т. е. из $LO[n]$, или, в более общем случае, — из $LA[n]$), которая также ищется в классе отношений линейного порядка. Рассматриваются два типа задач: «полная» и «частичная». Решением «полной» задачи является безусловное (т. е. без каких-либо дополнительных ограничений) нахождение множества всех отношений из $\operatorname{Arg}\min\limits_{\rho \in LO[n]} D(\rho)$. Такая задача в общем случае является экспоненциально сложной. Некоторыми методами её решения являются перебор, в том числе с использованием метода ветвей и границ, а также метод, основанный на исследовании графа $\tilde{G} = (A, \tilde{\rho})$ (п. 5). «Частичная» задача заключается в предварительном выяснении существования для заданного $\Delta_0 \in \{0, 2, 4, \ldots\}$ (следствие 2) отношения $\rho \in LO[n]$ с $D(\rho) \leqslant D(\tilde{\rho}) + \Delta_0$ и только в случае положительного ответа на этот вопрос — в нахождении $\operatorname{Arg}\min\limits_{\rho \in LO[n]} D(\rho)$ (в случае отрицательного ответа считаем, что приемлемого отношения не существует). Эта задача имеет полиномиальную сложность. В любом случае ищется точное множество $\operatorname{Arg}\min\limits_{\rho \in LO[n]} D(\rho)$.

2. Подробно рассматривается случай (достаточно частый), когда $\Delta_0 = 2$. Доказывается теорема о необходимом и достаточном условии существования решений и приводится простой алгоритм их нахождения, вычислительная сложность которого составляет $O(n^2)$.

3. При решении основной задачи часто возникает вспомогательная задача, заключающаяся в определении для некоторого $\rho \in LA[n]/LO[n]$ наличия «рядом» с ρ какого-нибудь линейного порядка $\lambda(\rho) \in LO[n]$, находящегося на минимально возможном расстоянии (равном 2) от ρ, и нахождении этого «ближайшего» к ρ линейного порядка (или всех таковых). Множество всех ρ, для которых указанное $\lambda(\rho)$ существует, обозначается $LA^{(2)}[n]$. Приводятся необходимое и некоторые достаточные легко проверяемые условия для выполнения $\rho \in LA^{(2)}[n]$, а также алгоритм нахождения соответствующих $\lambda(\rho)$.

4. Рассматривается задача разбиения $LA[n]$ на классы π-эквивалентности (аналог изоморфизма в графах). Для $LA^{(2)}[n]$ эта задача решается исчерпывающим образом и описывается алгоритм перечисления всех представителей классов π-эквивалентности

для этого множества. Для случаев $n = 3, 4$ и 5 эта задача также решается полностью. Приведены утверждения (см. лемму 1, а также п. 4), позволяющие при решении задачи перечисления для каждого очередного n использовать решения для предыдущих n. Знание системы представителей позволяет некоторые исследования, проводимые для $\rho \in LA[n]$ (в частности, при использовании $\tilde{\rho}$ в методе из п. 5), сводить к нахождению представителя класса π-эквивалентности, которому принадлежит ρ (при условии, что свойства этого представителя уже изучены).

5. Получен ряд результатов для классов π-эквивалентности множества $LA^{(2)}[n]$ (количество элементов в этих классах, число ближайших линейных порядков для заданного $\rho \in LA^{(2)}[n]$ и некоторые другие). Выведена формула $|LA^{(2)}[n]| = (n-2)(3n-7)n!/6$, показывающая, что при больших n число $|LA^{(2)}[n]|$ во много раз превышает $|LO[n]|$. Например, $|LA^{(2)}[10]| \approx 29{,}95|LO[10]|$, $|LA^{(2)}[15]| \approx 82{,}33|LO[15]|$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Миркин Б. Г.* Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974. 256 с.
2. *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. М.: Мир, 1991. 464 с.
3. *Young H. P.* Condorcet's theory of voting // Amer. Political Sci. Rev. 1988. No. 82. P. 1231–1244.
4. *Осипова В. А., Подиновский В. В., Яшина Н. П.* О непротиворечивом расширении отношений предпочтения в задачах принятия решений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24. № 6. С. 831–839.
5. *Schulze M.* A new monotonic, clone-independent, reversal symmetric, and Condorcet-consistent single-winner election method // Social Choice and Welfare. 2011. No. 36. P. 267–303.
6. *Нефедов В. Н., Осипова В. А., Смерчинская С. О., Яшина Н. П.* Непротиворечивое агрегирование отношений строгого порядка // Изв. вузов. Математика. 2018. № 5. С. 71–85.
7. *Нефедов В. Н., Смерчинская С. О., Яшина Н. П.* Непротиворечивое агрегирование отношений квазипорядка // Прикладная дискретная математика. 2019. № 45. С. 113–126.
8. *Жуков М. С., Орлов А. И.* Задача исследования и итогового ранжирования мнений группы экспертов с помощью медианы Кемени // Научный журнал КубГАУ. 2016. № 122. С. 784–805.
9. *Алексеев Н. С., Осипова В. А.* Методика построения полной порядковой классификации при наличии информации о сравнительной важности критериев // Научно-технич. вестник Поволжья. 2020. № 11. С. 7–11.
10. *Смерчинская С. О., Яшина Н. П.* Агрегирование предпочтений с учетом важности критериев // Труды МАИ. 2015. № 84. `https://mai.ru/upload/iblock/c72/smerchinskaya_yashina_rus.pdf`.
11. *Smerchinskaya S. O. and Yashina N. P.* An algorithm for pairwise comparison of alternatives in multi-criteria problems // Intern. J. Modeling Simulation Scientific Computing. 2018. V. 9. No. 1. `https://www.worldscientific.com/doi/10.1142/S179396231850006X`.
12. *Берж К.* Теория графов и ее применение. М.: ИЛ, 1962.
13. *Нефедов В. Н.* Некоторые свойства линейно упорядоченной медианы для нечетного числа линейных асимметричных отношений. МАИ. Деп. в ВИНИТИ. № 62–В2021 от 08.11.2021. 50 с.
14. *Кемени Дж., Снелл Дж.* Кибернетическое моделирование. М.: Сов. радио, 1972.
15. *Корнеенко В. П.* Методы многокритериального оценивания объектов с многоуровневой структурой показателей эффективности. М.: МАКС Пресс, 2018. 296 с.

REFERENCES

1. *Mirkin B. G.* Group Choice. V.H. Winston and Sons Publ., 1979. 252 p.
2. *Moulin E.* Axioms of Cooperative Decision Making. Cambridge, Cambridge University Press, 1988.
3. *Young H. P.* Condorcet's theory of voting. Amer. Political Sci. Rev., 1988, no. 82, pp. 1231–1244.
4. *Osipova V. A., Podinovskiy V. V., and Yashina N.P.* On non-contradictory extension of preference relations in decision-making problems. USSR Comput. Math. and Math. Physics, 1984, vol. 24, iss. 3, pp. 128–134.
5. *Schulze M.* A new monotonic, clone-independent, reversal symmetric, and Condorcet-consistent single-winner election method. Social Choice and Welfare, 2011, no. 36, pp.267–303.
6. *Nefedov V. N., Osipova V. A., Smerchinskaya S. O., and Yashina N. P.* Non-contradictory aggregation of strict order relations. Russian Math., 2018, vol. 62, pp. 61–73.
7. *Nefedov V. N., Smerchinskaya S. O., and Yashina N. P.* Neprotivorechivoe agregirovanie otnosheniy kvaziporyadka [Non-contradictory aggregation of quasi-order relations]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2019, no. 45, pp. 113–126. (in Russian)
8. *Zhukov M. S. and Orlov A. I.* Zadacha issledovaniya i itogovogo ranzhirovaniya mneniy gruppy ekspertov s pomoshch'yu mediany Kemeni [The problem of research of final ranking for group of experts by means of Kemeny median]. Scientific J. KubSAU, 2016, vol. 122, pp. 784–805. (in Russian)
9. *Alekseev N. S. and Osipova V. A.* Metodika postroeniya polnoy poryadkovoy klassifikatsii pri nalichii informatsii o sravnitel'noy vazhnosti kriteriev [Methodology for building a full order classification with information about comparative importance of criteria]. Nauchno-Tekhnich. Vestnik Povolzh'ya, 2020, no. 11, pp. 7–11. (in Russian)
10. *Smerchinskaya S. O. and Yashina N. P.* Agregirovanie predpochteniy s uchetom vazhnosti kriteriev [Aggregation of preferences taking into account the importance of criteria]. Proc. MAI, 2015, no. 84. `https://mai.ru/upload/iblock/c72/smerchinskaya_yashina_rus.pdf`. (in Russian)
11. *Smerchinskaya S. O. and Yashina N. P.* An algorithm for pairwise comparison of alternatives in multi-criteria problems. Intern. J. Modeling Simulation Scientific Computing, 2018, vol. 9, no. 1. `https://www.worldscientific.com/doi/10.1142/S179396231850006X`.
12. *Berge C.* Theorie des Graphes et ses Applications. Paris, DUNOD, 1958.
13. *Nefedov V. N.* Nekotorye svoystva lineyno uporyadochennoy mediany dlya nechetnogo chisla lineynykh asimmetrichnykh otnosheniy [Some properties of a linearly ordered median for an odd number of linear asymmetric binary relations]. MAI. Dep. VINITI no. 62–B2021, 08.11.2021. 50 p. (in Russian)
14. *Kemeny J. and Snell J.* Mathematical Models in the Social Sciences. N.Y., Blaisdell Publ. Comp., 1963.
15. *Korneenko V. P.* Metody mnogokriterial'nogo otsenivaniya ob"ektov s mnogourovnevoy strukturoy pokazateley effektivnosti [Methods for Multi-Criteria Evaluation of Objects with a Multi-Level Structure of Performance Indicators]. Moscow, MAKS Press , 2018. (in Russian)