УДК 519.17 DOI 10.17223/2226308X/15/26

О ЕДИНСТВЕННОСТИ МИНИМАЛЬНОГО РЁБЕРНОГО 1-РАСШИРЕНИЯ ГИПЕРКУБА[1]

А. А. Лобов, М. Б. Абросимов

Одним из важных свойств надёжных вычислительных систем является их отказоустойчивость. Для её исследования можно использовать аппарат теории графов. Рассматриваются минимальные рёберные расширения графа, которые являются моделью для исследования отказа связей вычислительной системы. Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ с n вершинами называется минимальным рёберным k-расширением n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если граф G вкладывается в каждый граф, получающийся из G^* удалением любых его k рёбер, и имеет при этом минимально возможное число рёбер. Гиперкуб Q_n — это регулярный 2^n-вершинный граф порядка n, представляющий собой декартово произведение n полных 2-вершинных графов K_2. Гиперкуб является распространённой топологией для построения вычислительных систем. Ранее было описано семейство графов Q_n^*, представители которого при $n > 1$ являются минимальными рёберными 1-расширениями соответствующих гиперкубов. Проведённый вычислительный эксперимент показал, что при $n \leqslant 4$ эти расширения являются единственными с точностью до изоморфизма. Получено аналитическое доказательство единственности минимальных рёберных 1-расширений гиперкубов при $n \leqslant 4$ и установлено одно общее свойство произвольного минимального рёберного 1-расширения гиперкуба при $n > 2$.

Ключевые слова: *граф, гиперкуб, рёберная отказоустойчивость, минимальное рёберное 1-расширение.*

Введение

Топология гиперкуба является популярной схемой соединения параллельных процессоров [1], в том числе в отказоустойчивых системах типа IBM Blue Gene/Q [2]. Особый интерес с точки зрения отказоустойчивости представляет 4-куб Q_4 или тессеракт. Для исследования полной отказоустойчивости элементов Дж. Хейз предложил модель, основанную на графах [3], которая позднее была перенесена и на случай отказов связей [4]. Оптимальные вершинные k-отказоустойчивые реализации гиперкубов Q_n при $n > 3$ неизвестны. На практике используются тривиальные отказоустойчивые реализации с одним избыточным элементом, соединённым со всеми остальными. В работе [5] описывается вершинное 1-расширение гиперкуба Q_4, которое имеет на одно ребро меньше, чем тривиальное. Однако не доказано, что оно является минимальным. Ранее была предложена оптимальная рёберная 1-отказоустойчивая реализация гиперкуба Q_4 [4], обобщённая на произвольное $n > 1$ [6]. В данной работе удалось доказать, что при $n \leqslant 4$ гиперкуб Q_n имеет единственную с точностью до изоморфизма оптимальную рёберную 1-отказоустойчивую реализацию (или, в другой терминологии, минимальное рёберное 1-расширение).

Определение 1. Декартовым произведением $G_1 \times G_2$ двух графов $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называется граф $G = (V, \alpha)$, такой, что $V = V_1 \times V_2$ и вершины (u_1, u_2) и (v_1, v_2) смежны в G тогда и только тогда, когда либо $u_1 = v_1$, а u_2 и v_2 смежны в G_2, либо $u_2 = v_2$, а u_1 и v_1 смежны в G_1.

[1]Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках госзадания (проект № FSRR-2020-0006).

Определение 2. Гиперкубом Q_n (n-кубом) называется граф, являющийся декартовым произведением n полных 2-вершинных графов K_2.

Гиперкуб Q_n — это регулярный 2^n-вершинный граф порядка n. Семейство гиперкубов достаточно хорошо изучено [7].

Вершины гиперкуба можно пометить двоичными векторами таким образом, чтобы расстояние между каждыми двумя вершинами равнялось дистанции Хэмминга между их метками. Это свойство непосредственно следует из построения гиперкуба.

1. Рёберные расширения

Определение 3. Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным рёберным k-расширением* n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является рёберным k-расширением графа G, то есть граф G вкладывается в каждый граф, получающийся из G^* удалением любых его k рёбер;
2) граф G^* содержит n вершин, то есть $|V^*| = |V|$;
3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1 и 2.

Если рассматривать простые графы, то минимальное рёберное k-расширение существует не у всех графов. Например, полные графы K_n не имеют минимальных рёберных k-расширений ни при каких натуральных k. Гиперкуб Q_1 соответственно тоже не имеет минимального рёберного k-расширения ни при каких натуральных k. У графа может быть и несколько неизоморфных минимальных рёберных k-расширений. Задача поиска минимальных рёберных k-расширений является вычислительно сложной [8].

В [2] доказана лемма, которая позволяет охарактеризовать вид минимального рёберного k-расширения и оценить минимально возможное количество дополнительных рёбер в нём.

Лемма 1 [2]. Если минимальная степень вершины графа G равна $d > 0$, то его минимальное рёберное k-расширение не содержит вершин степени ниже $d + k$.

2. Минимальное рёберное 1-расширение гиперкуба

Опишем схему построения минимального рёберного 1-расширения для любого гиперкуба Q_n при $n > 1$.

Определим семейство графов Q_n^*. Граф Q_n^* при $n > 1$ получается путём соединения каждой вершины гиперкуба Q_n с наиболее удалённой от неё вершиной. Если вершина имеет код k, то она соединяется с вершиной, код которой получается из k поразрядной инверсией.

Теорема 1. Для n-мерного гиперкуба Q_n при $n > 1$ граф Q_n^* является минимальным рёберным 1-расширением.

Легко убедиться, что минимальное рёберное 1-расширение для гиперкуба Q_2 единственно с точностью до изоморфизма: граф Q_2^* изоморфен графу K_4, и это единственный с точностью до изоморфизма регулярный 4-вершинный граф порядка 3. Для произвольного минимального рёберного 1-расширения гиперкуба Q_n при $n > 2$ удалось установить следующее общее свойство.

Лемма 2. Минимальное рёберное 1-расширение гиперкуба Q_n при $n > 2$ не содержит рёбер, соединяющих вершины, расстояние между которыми равно 2.

Следствие 1. Гиперкуб Q_3 имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное рёберное 1-расширение.

Аналогичный результат удалось доказать и для гиперкуба Q_4, что является основным результатом данной работы.

Теорема 2. Гиперкуб Q_4 имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное рёберное 1-расширение.

Единственные с точностью до изоморфизма минимальные рёберные 1-расширения гиперкубов Q_2 и Q_3 изображены на рис. 1.

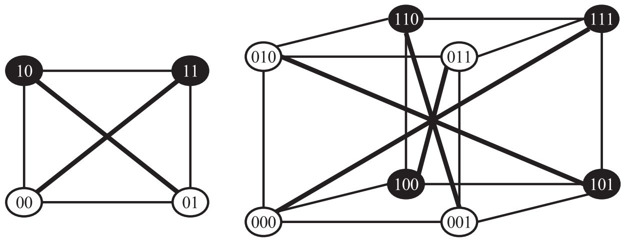

Рис. 1. Минимальные рёберные 1-расширения для Q_2 и Q_3

ЛИТЕРАТУРА

1. *Padua D. A.* Encyclopedia of Parallel Computing. N.Y.: Springer, 2011.
2. *Абросимов М. Б.* Графовые модели отказоустойчивости. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 192 с.
3. *Hayes J. P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C.25. No. 9. P. 875–884.
4. *Harary F. and Hayes J. P.* Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. V. 23. P. 135–142.
5. *Лобов А. А., Абросимов М. Б.* О вершинном 1-расширении гиперкуба // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Междунар. науч. конф. Саратов: Издат. центр «Наука», 2018. С. 249–251.
6. *Лобов А. А., Абросимов М. Б.* О минимальном рёберном 1-расширении гиперкуба // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2018. № 11. С. 109–111.
7. *Harary F., Hayes J. P., and Wu H.-J.* A survey of the theory of hypercube graphs // Computers & Math. with Appl. 1988. V. 15. Iss. 4. P. 277–289.
8. *Абросимов М. Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. № 5(88). С. 643–650.

УДК 519.17 DOI 10.17223/2226308X/15/27

О ВЕРХНЕЙ И НИЖНЕЙ ОЦЕНКАХ ЧИСЛА ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ДУГ МИНИМАЛЬНОГО РЁБЕРНОГО 1-РАСШИРЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ЦИКЛА

О. В. Моденова, М. Б. Абросимов

Исследуются верхняя и нижняя оценки числа дополнительных дуг $\mathrm{ec}(\overrightarrow{C_n})$ минимального рёберного 1-расширения ориентации $\overrightarrow{C_n}$ цикла C_n. Основной результат работы: $\lceil n/2 \rceil \leqslant \mathrm{ec}(\overrightarrow{C_n}) \leqslant n$. Приводятся примеры ориентаций циклов, на которых оценки достигаются.

Ключевые слова: *минимальное рёберное 1-расширение, ориентация цикла, отказоустойчивость.*