

ЛИТЕРАТУРА

1. Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C25. No. 9. P. 875–884.
2. Harary F. and Hayes J. P. Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. V. 23. P. 135–142.
3. Абросимов М. Б. Графовые модели отказоустойчивости. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2012. 192 с.
4. Абросимов М. Б. О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. Т. 88. Вып. 5. С. 643–650.

УДК 519.17

DOI 10.17223/2226308X/15/28

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ГРАФОВ
С ЗАДАНЫМИ МЕРАМИ СВЯЗНОСТИ¹

Б. А. Теребин, М. Б. Абросимов

Вершинной связностью k называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу. Рёберной связностью λ нетривиального графа называется наименьшее число рёбер, удаление которых приводит к несвязному графу. Исследуются минимальные по числу рёбер n -вершинные графы, которые имеют заданные значения вершинной и рёберной связности. Помимо теоретического интереса, графы с заданными значениями вершинной или рёберной связности представляют и прикладной интерес как модели отказоустойчивых сетей. Основным результатом состоит в том, что для определённой области значений k и λ удалось описать графы, которые при заданном n имеют минимальное число рёбер.

Ключевые слова: граф, вершинная связность, рёберная связность, отказоустойчивость.

Введение

Изучение графов с заданной вершинной или рёберной связностью представляет интерес как с теоретической, так и с прикладной точек зрения. В теоретическом плане эти исследования восходят к работам [1–3], в прикладном — к работе [4], в которой исследуется построение сетей минимальной стоимости с заданной связностью. Большой интерес представляют графы Харари, которые имеют минимальное число рёбер при заданном значении вершинной связности [2, 5].

Рассмотрим простые неориентированные графы и их основные меры связности. Понятия из теории графов используются в соответствии с [6, 7]. Напомним, что *связным* называется граф, любая пара вершин которого соединена путём. В противном случае граф называется *несвязным*. *Тривиальным* называется одновершинный граф. Граф, любые две вершины которого смежны, называется *полным*.

Определение 1. Вершинной связностью k графа G называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу.

Определение 2. Рёберная связность λ нетривиального графа G определяется как наименьшее количество рёбер, удаление которых приводит к несвязному графу.

¹Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках госзадания (проект №FSRR-2020-0006).

Например, деревья имеют вершинную и рёберную связности 1. Полный n -вершинный граф имеет вершинную и рёберную связности $n - 1$. Далее будем рассматривать только связные графы. Обозначим минимальную степень вершины в графе через δ .

Вершинная связность k , рёберная связность λ и минимальная степень вершины δ произвольного графа связаны следующим неравенством:

Теорема 1 [1]. Для любого графа G справедливо неравенство $k \leq \lambda \leq \delta$.

Доказано, что для любых подходящих значений k , λ и δ существует соответствующий граф:

Теорема 2 [3]. Для любых натуральных чисел a, b, c , таких, что $0 < a \leq b \leq c$, существует граф G , у которого $k = a$, $\lambda = b$, $c = \delta$.

В работах [8, 9] рассматривается задача о поиске графов с минимальным числом вершин и рёбер для любых a, b, c из теоремы 2. В данной работе решается задача описания графов с заданным числом вершин n и с минимальным числом рёбер для пар возможных значений k и λ .

Обозначим $N_{k,\lambda}$ минимальное число вершин, которое может содержать граф с заданной вершинной связностью k и рёберной связностью λ .

Теорема 3.

$$N_{k,\lambda} = \begin{cases} 2(\lambda + 1) - k & \text{при } \lambda > k, \\ \lambda + 1 & \text{при } \lambda = k. \end{cases}$$

Обозначим $E_{k,\lambda}$ минимальное число рёбер, которое может содержать граф с заданной вершинной связностью k и рёберной связностью λ .

Теорема 4.

$$E_{k,\lambda} = \begin{cases} \lambda^2 - k^2 + k + \lambda + \sigma & \text{при } \lambda > k, \\ \lambda(\lambda + 1)/2 & \text{при } \lambda = k, \end{cases}$$

где $\sigma = \begin{cases} 0, & \text{если } \lceil (2k^2 - k\lambda - 2k)/2 \rceil \leq 0, \\ \lceil (2k^2 - k\lambda - 2k)/2 \rceil & \text{иначе.} \end{cases}$

Очевидно, что построить граф, содержащий заданное число вершин n , с минимальным числом рёбер для заданных значений k и λ можно только при $n \geq N_{k,\lambda}$. Если $k = \lambda = 1$, то $N_{1,1} = 2$. Легко видеть, что граф с минимальным числом рёбер для заданного числа вершин n с $k = \lambda = 1$ — дерево с числом рёбер $n - 1$.

Основной результат

Определение 3. Диагональю порядка i назовём множество пар (k, λ) , удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $\lambda - k = i$;
- 2) для заданных k и λ можно построить граф с вершинной связностью k и рёберной связностью λ ;
- 3) граф из условия 2 является либо λ -регулярным, либо одна из его вершин имеет степень $\lambda + 1$, а остальные вершины имеют степени λ ;
- 4) условие 3 должно выполняться для графов с любым числом вершин $n \geq N_{k,\lambda}$.

Определение 4. Под парой значений $(k_{\min(i)}, \lambda_{\min(i)})$ будем понимать образующий элемент диагонали порядка i . Образующий элемент — это такая пара значений,

которая удовлетворяет условиям из определения 3 и является наименьшим значением (k, λ) для соответствующей диагонали.

Если есть образующий элемент диагонали порядка i , то можно получить образующий элемент диагонали $i + 1$ следующим образом:

$$k_{\min(i+1)} = k_{\min(i)} + 1, \quad \lambda_{\min(i+1)} = \lambda_{\min(i)} + 2.$$

По аналогии для $i - 1$ диагонали:

$$k_{\min(i-1)} = k_{\min(i)} - 1, \quad \lambda_{\min(i-1)} = \lambda_{\min(i)} - 2.$$

Определение 5. Пару $(2, 2)$ назовём корневым образующим элементом и обозначим (k_r, λ_r) .

Корневой образующий элемент является образующим элементом диагонали порядка 0. Остальные образующие элементы диагоналей можно найти по следующей формуле:

$$k_{\min(i)} = k_r + i, \quad \lambda_{\min(i)} = \lambda_r + 2i.$$

Обозначим множество диагоналей через D . Схематично множество D представлено на рис. 1.

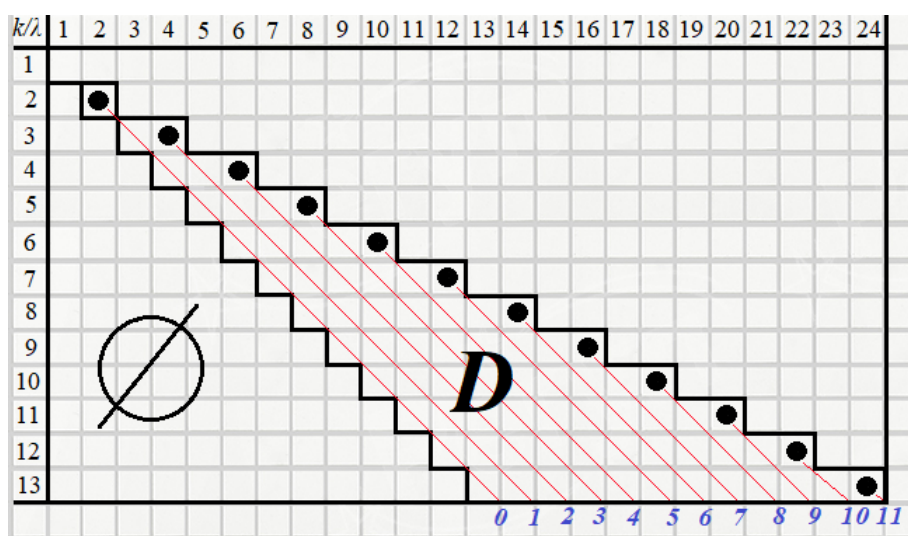


Рис. 1. Схема множества диагоналей D

На рис. 1 точками помечены образующие элементы соответствующих диагоналей. Линиями выделены сами диагонали. Цифрами снизу обозначены порядки диагоналей. В таблице по вертикали идут значения вершинной связности, по горизонтали — рёберной связности. Графы Харари образуют диагональ порядка 0. Напомним, что графом Харари $H_{t,n}$ называется n -вершинный граф с минимальным числом рёбер, у которого $k = \lambda = t$ [2]. Далее приводится основной результат работы, в котором описываются графы из множества D .

Теорема 5. Пусть $k \geq k_{\min(i)}$, $\lambda \geq \lambda_{\min(i)}$, $\lambda - k = i$, $i \geq 0$. Тогда для любого $n \geq N_{k,\lambda}$ существует граф G с заданными k и λ , содержащий n вершин, такой, что:

- если λ или n чётные, то G — λ -регулярный граф;

- если λ и n нечётные, то одна из вершин графа G имеет степень $(\lambda + 1)$, остальные вершины имеют степени λ .

При этом граф G является оптимальным по рёбрам, то есть состоит из наименьшего возможного числа рёбер, равного $\lceil \lambda n/2 \rceil$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Whitney H.* Congruent graphs and the connectivity of graphs // Amer. J. Math. 1932. V. 54. Iss. 1. P. 150–168.
2. *Harary F.* The maximum connectivity of a graph // Proc. NAS USA. 1962. V. 48. P. 1142–1146.
3. *Chartrand G. and Harary F.* Graphs with prescribed connectivities // Theory of Graphs. N.Y.: Academic Press, 1968. P. 61–63.
4. *Steiglitz K., Weiner P., and Kleitman D.* The design of minimum-cost survivable networks // IEEE Trans. Circuit Theory. 1969. V. 16. No. 4. P. 455–460.
5. *Jafarpour M., Shekaramiz M., Javan A., and Moeini A.* Building graphs with maximum connectivity // Proc. IETS. 2020. P. 1–5.
6. *Харари Ф.* Теория графов М.: Мир, 1973.
7. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997.
8. *Теребин Б. А., Абросимов М. Б.* Об оптимальности реализации графов с заданными мерами связности // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2020. № 13. С. 103–105.
9. *Теребин Б. А., Абросимов М. Б.* О минимальном числе рёбер в реализациях графов с заданными мерами связности // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Междунар. науч. конф. 2021. С. 159–161.