

ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE

Научный журнал

2022

№ 60

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере
массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-29497 от 27 сентября 2007 г.)

Подписной индекс в объединённом каталоге «Пресса России» 44031

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук»,
Высшей аттестационной комиссии

Founder – Tomsk State University

EDITORIAL BOARD

Alexander Gortsev – Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. Tel: +73822529599
Valery Smagin – Deputy Editor-in-Chief, Doctor of Sc., Prof. of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. Tel: +73822529599
Lyudmila Nezhelskaya – Executive Editor, Doctor. of Sc., Prof. of the Applied Mathematics Department Tomsk State University. E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Sergey Vorobeychikov – Doctor of Sc., Prof. of the System Analysis and Mathematical Modeling Department Tomsk State University
Vladimir Vishnevsky – Doctor of Sc., Prof. Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).
Gennady Koshkin – Doctor of Sc., Prof. of the System Analysis and Mathematical Modeling Department Tomsk State University
Yury Kostyuk – Doctor of Sc., Prof. of the Theoretical Informatics Department Tomsk State University
Anjela Matrosova – Doctor of Sc., Prof. of the Department of Computer Security Tomsk State University
Anatoly Nazarov – Doctor of Sc., Prof. of the Probability Theory and Mathematical Statistics Department Tomsk State University
Konstantin Samouylov – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied Probability and Informatics Department RUDN University (Moscow, Russia)
Eugene Semenko – Doctor of Sc., Prof. System Analysis and Operations Research Department Reshetnev Siberian State University of Science and Technology (Krasnoyarsk, Russia)
Sergey Sushchenko – Doctor of Sc., Prof., Head of the Applied of Information Department Tomsk State University
Mais Farkhadov – Doctor of Sc., Head of the laboratory Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (Moscow, Russia).
Gurami Tsitsishvili – Doctor of Sc., Prof., Chief researcher Institute for Applied Mathematics Far Eastern Branch of RAS, Prof. Far Eastern Federal University (Vladivostok, Russia)
Editorial address:
Institute of Applied Mathematics and Computer Science,
unit of Applied Mathematics
National Research Tomsk State University
36 Lenina Avenue, Tomsk, 634050
Telephone / fax: +73822529599
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

EDITORIAL COUNCIL

Ana Rosa Cavalli PhD, Prof. University VII Paris, France	Gilbert Saporta PhD, Prof. Pierre and Marie Curie University, Paris, France
Alexander Dudin Doctor of Sc., Prof. Belarusian State University Minsk, Republic Belorussia	Raimund Ubar Doctor of Sc., Prof. University of Technology Tallinn, Estonia
Reindert Nobel Doctor of Sc., Associate Prof. Vrije University, Amsterdam, Netherlands	Nina Yevtushenko Doctor of Sc., Prof. Ivannikov V.P. ISP RAS Moscow, Russia
Enco Orzinger PhD, Prof. University of Rome, Italy	Yervant Zorian PhD, Fellow & Chief Architect, Synopsys, Mountain View, CA, USA
Paolo Prinetto Prof. Politecnico Institute, Torino, Italy	

JOURNAL INFO

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is an independent peer-reviewed research journal that welcomes submissions from across the world.

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is issued four times per year, and can be subscribed to in the Russian Press Joint Catalogue (Subscription Index 44031)

The publication in the journal is free of charge and may be in Russian or in English.

The topics of the journal are the following:

- control of dynamical systems,
- mathematical modeling,
- data processing,
- informatics and programming,
- discrete function and automation,
- designing and diagnostics of computer systems.

Rules of registration articles are given in a site:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

Учредитель – Томский государственный университет

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Горцев Александр Михайлович – гл. редактор, проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной математики ТГУ. Тел. +73822529599
Смагин Валерий Иванович – зам. гл. редактора, проф., д-р техн. наук, проф. кафедры прикладной математики ТГУ. Тел. +73822529599
Нежелская Людмила Алексеевна – ответственный секретарь, доц., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры прикладной математики ТГУ
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

Воробейчиков Сергей Эрикович – д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры системного анализа и математического моделирования ТГУ
Вишневский Владимир Миронович – проф., д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)
Кошкин Геннадий Михайлович – проф., д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры системного анализа и математического моделирования ТГУ
Костюк Юрий Леонидович – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры теоретической информатики ТГУ
Матросова Анжела Юрьевна – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры компьютерной безопасности ТГУ
Назаров Анатолий Андреевич – проф., д-р техн. наук, проф. кафедры теории вероятностей и математической статистики ТГУ
Самуйлов Константин Евгеньевич – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (г. Москва)
Семенкин Евгений Станиславович – проф., д-р техн. наук, проф. каф. системного анализа и исследования операций, СибГУ им. акад. М.Ф. Решетнева (г. Красноярск)
Сушенко Сергей Петрович – проф., д-р техн. наук, зав. кафедрой прикладной информатики ТГУ
Фархадов Маис Паша Оглы – д-р техн. наук, зав. лабораторией Института проблем управления РАН (г. Москва)
Цициашвили Гурами Шалвович – проф., д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. Института прикладной математики ДВО РАН, проф. ДВФУ (г. Владивосток)

Адрес редакции и издателя: 634050, Томск, пр. Ленина, 36
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Институт прикладной математики и компьютерных наук,
отделение прикладной математики
Телефон / факс: +73822529599
E-mail: vestnik_uvti@mail.tsu.ru

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Ана Роза Ковали д-р. философии, проф. Университет VII Париж, Франция	Жильберт Сапорта д-р. философии, проф. Университет им. Пьера и Марии Кюри, Париж, Франция
Александр Дудин д.ф.-м.н., проф. БГУ, Минск, Республика Беларусь	Раймонд Убар д-р. проф. Технологический университет, Таллинн, Эстония
Рейндерт Нобель д-р., доцент Свободный университет, Амстердам, Нидерланды	Нина Евтушенко д-р. техн. наук, проф. ИСП РАН им. Иваницкова В.П., Москва, Россия
Енцо Орзингер д-р. философии, проф. Римский университет, Италия	Ервант Зорин д-р. философии, гл. научный сотр. Фирмы «Синописис», США
Паоло Принетто проф. Политехнический институт Турин, Италия	

О ЖУРНАЛЕ

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» выходит ежеквартально и распространяется по подписке

Статьи публикуются на русском и английском языках.

Тематика публикаций журнала:

- управление динамическими системами,
- математическое моделирование,
- обработка информации,
- информатика и программирование,
- дискретные функции и автоматы,
- проектирование и диагностика вычислительных систем.

Журнал входит в систему Российского Индекса Научного Цитирования (РИНЦ).

Правила оформления статей приведены на сайте:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

СОДЕРЖАНИЕ

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Паршуков А.Н. Метод синтеза модального регулятора для линейного дискретного объекта управления с интервальной неопределенностью коэффициентов	4
Шашихин В.Н. Управление ляпуновским спектром дискретных систем с хаотической динамикой	13

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Дудин А.Н., Дудин С.А., Дудина О.С. Анализ системы обслуживания с коррелированными входными потоками и изменяемыми приоритетами	21
Перова Ю.П., Леско С.А., Жуков Д.О., Чечурин А.В. Анализ и моделирование процессов в сложных социальных сетевых структурах на основе уравнения Фоккера–Планка	32
Рудко И.М. Исследование влияния параметров фильтра на основе усеченных порядковых статистик (УПС-фильтра) на его выходные характеристики	42
Цветков А.Б. Математическое и программное обеспечение для численного моделирования геомеханического состояния углепородного массива	52

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Доронина Ю.В., Скاتков А.В. Многокритериальный анализ статистической устойчивости системных характеристик информационно-телекоммуникационных каналов	59
Евсюткин И.В., Марков Н.Г. Бинарная классификация скважин нефтегазовых промыслов с использованием глубоких нейронных сетей	73
Подкур П.Н., Смоленцев Н.К. Вейвлеты Мейера с кратными коэффициентами масштабирования $N > 2$	84

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Бабанов А.М. Методика структуризации данных в семантических моделях типа «Сущность–Связь»	93
---	----

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Золоторевич Л.А., Ильинков В.А. Определение ключа аппаратной защиты цифровых устройств	102
--	-----

ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ И АВТОМАТЫ

Сперанский Д.В. Об одном подходе к приближенному синтезу дискретных устройств с памятью	111
---	-----

CONTENTS

CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

Parshukov A.N. Method of synthesis of a modal regulator for a linear discrete-time system with interval uncertainty of coefficients	4
Shashikhin V.N. Control of the Lyapunov spectrum of discrete systems with chaotic dynamics	13

MATHEMATICAL MODELING

Dudin A.N., Dudin S.A., Dudina O.S. Analysis of a queuing system with correlated arrival flows and variable priorities	21
Perova J.P., Lesko S.A., Zhukov D.O., Chechurin A.V. Analysis and modeling of processes in complex social network structures based on the Fokker-Planck equation	32
Rudko I.M. Investigating the effect of filter parameters based on truncated order statistics (TOS-filter) on its output characteristics	42
Tsvetkov A.B. Mathematical and software for numerical modeling of the geomechanical state of the carbon mass	52

DATA PROCESSING

Dronina Yu.V., Skatkov A.V. Multicriteria analysis of statistical stability of system characteristics of information and telecommunication channels	59
Evsyutkin I.V., Markov N.G. Binary classification for wells of oil and gas field with the use of deep neural networks	73
Podkur P.N., Smolentsev N.R. Meyer wavelets with multiple scale factors $N > 2$	84

INFORMATICS AND PROGRAMMING

Babanov A.M. Technique of data structuring in semantic models of the “Entity-Relationship” type	93
---	----

DESIGNING AND DIAGNOSTICS OF COMPUTER SYSTEMS

Zolotorevich L.A., Ilyinkov V.A. Determining security key the hardware for digital devices	102
--	-----

DISCRETE FUNCTION AND AUTOMATONS

Speranskiy D.V. On one approach to approximate synthesis of discrete devices with memory	111
--	-----

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

Научная статья

УДК 517.9

doi: 10.17223/19988605/60/1

Метод синтеза модального регулятора для линейного дискретного объекта управления с интервальной неопределенностью коэффициентов

Андрей Николаевич Паршуков

Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия, anparshukov@mail.ru

Аннотация. Предложен метод синтеза дискретного робастного модального регулятора, получен критерий робастного качества управления в условиях интервальной неопределенности коэффициентов в модели объекта управления. Данный метод синтеза доведен до вычислительных процедур и может быть реализован на ЭВМ. Метод синтеза проиллюстрирован примером.

Ключевые слова: интервальная неопределенность коэффициентов; дискретный модальный регулятор; робастное управление; принцип исключения нуля

Для цитирования: Паршуков А.Н. Метод синтеза модального регулятора для линейного дискретного объекта управления с интервальной неопределенностью коэффициентов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 60. С. 4–12. doi: 10.17223/19988605/60/1

Original article

doi: 10.17223/19988605/60/1

Method of synthesis of a modal regulator for a linear discrete-time system with interval uncertainty of coefficients

Andrej N. Parshukov

Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation, anparshukov@mail.ru

Abstract. The article proposes a method for synthesizing a discrete robust modal controller, and obtains a criterion for the robust quality of control under conditions of interval uncertainty of the coefficients in the control plant model. This synthesis method has been brought to computational procedures and can be implemented on a computer. The synthesis method is illustrated by an example.

Keywords: interval uncertainty of coefficients; discrete-time modal regulator; robust control; zero exclusion principle

For citation: Parshukov, A.N. (2022) Method of synthesis of a modal regulator for a linear discrete-time system with interval uncertainty of coefficients . *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 60. pp. 4–12. doi: 10.17223/19988605/60/1

В результате идентификации технологических процессов модель объекта управления чаще всего восстанавливается в виде линейного дифференциального или разностного уравнения заданного порядка, коэффициенты которого определены с точностью до некоторых интервалов.

В большинстве классических схем синтеза регулятор рассчитывается для модели с точно заданными коэффициентами. В случае объекта управления с интервальной неопределенностью коэффициентов регулятор может быть рассчитан по классическим схемам для модели со средними значениями из заданных интервалов. При этом после замыкания объекта управления с интервальной неопределенностью коэффициентов модальным регулятором в характеристическом полиноме замкнутой системы появляется неопределенность. Поскольку свойства устойчивости и качества управления системы определяются расположением нулей ее характеристического полинома, возникает вопрос: при каких размерах интервальной неопределенности в объекте управления замкнутая система еще сохранит свойства устойчивости (робастная устойчивость) и качества управления (робастное качество управления)?

В схеме модального управления [1. С. 8–21, 2. С. 9–12] качество управления задается в виде области Ω на комплексной плоскости, определяющей желаемое расположение нулей характеристического полинома. Следовательно, вопросы исследования (проверки) робастной устойчивости и робастного качества управления могут быть рассмотрены с единых позиций: требуется проверить, принадлежат ли нули заданного семейства полиномов области Ω .

Для непрерывных систем управления проблема исследования робастной устойчивости и робастного качества управления широко представлена в литературе. Можно выделить три главных направления, в рамках которых решается данная задача: принцип исключения нуля [3–6]; теория H^∞ [7–9]; метод LMI [10–13]. В целом для непрерывных систем сформулированная задача исследования робастного качества управления является полностью решенной.

Следует отметить, что большинство из указанных методов и результатов не имеет аналогов для дискретных систем управления: так, например, в [14] показано, что для дискретных систем несправедлива теорема Харитонова. В настоящей статье в развитие результатов, изложенных в [14], разрабатывается методика исследования робастного качества управления для дискретных систем.

В статье приняты следующие обозначения: $\doteq$ – равно по определению; R^n – пространство n -мерных вещественных векторов $\mathbf{x} \doteq [x_1, \dots, x_n]$; C^1 – комплексная плоскость; j – мнимая единица; s – переменная (в общем случае комплексная); s^* – число, комплексно сопряженное числу s ; t – дискретное время ($t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); z – оператор опережения на один такт: $zx(t) = x(t+1)$; Ω – область на C^1 ; $\partial\Omega$ – граница области Ω ; $\text{int } \Omega$ – внутренняя часть области Ω .

Оператор вида

$$f(n, z) = \sum_{i=0}^n f_i \cdot z^i \quad (1)$$

назовем *полиномиальным оператором* степени n . Выполняя в (1) замену z на s , где s переменная, получаем алгебраический полином

$$f(n, s) = \sum_{i=0}^n f_i \cdot s^i.$$

Множество нулей полинома $f(n, s)$ обозначим $\Lambda(f)$:

$$\Lambda(f) \doteq \{\lambda_i \in C^1 : F(n, \lambda_i) = 0, \quad i \in \overline{1, n}\}.$$

Семейство операторов вида

$$f(n, F, z) = \left\{ f(n, \mathbf{f}, z) = \sum_{i=0}^n f_i \cdot z^i : \mathbf{f} \doteq [f_0, \dots, f_n] \in F \right\}, \quad (2)$$

$$F = \left\{ \mathbf{f} \in R^{n+1} : f_i \in [f_i^0 - \Delta f_i, f_i^0 + \Delta f_i], f_n^0 \neq 0, \Delta f \geq 0, i \in \overline{1, n} \right\}$$

назовем *интервальным полиномиальным оператором* степени n .

Выполняя в (2) замену z на s , получаем *интервальный полином*

$$f(n, F, s) = \left\{ f(l, \mathbf{f}, s) = \sum_{i=0}^n f_i \cdot s^i : \mathbf{f} \in F \right\}. \quad (3)$$

Интервальный полином (3) можно представить в виде:

$$f(n, F, s) = f^0(n, s) + \Delta f(n, \Delta F, s), \quad (4)$$

где

$$f^0(n, s) \doteq \sum_{i=0}^n f_i^0 \cdot s^i$$

обычный полином, а

$$\Delta f(n, \Delta F, s) = \left\{ f(n, \delta \mathbf{f}, s) = \sum_{i=0}^n \delta f_i \cdot s^i : \delta \mathbf{f} \doteq [\delta f_0, \dots, \delta f_n] \in \Delta F \right\},$$

$$\Delta F = \left\{ \delta \mathbf{f} \in R^{n+1} : \delta f_i \in [-\Delta f_i; \Delta f_i], i = \overline{0, n} \right\}$$

интервальный полином с симметричными интервалами неопределенности коэффициентов.

1. Схема синтеза робастного модального регулятора и задача исследования робастного качества управления

Пусть линейный одномерный дискретный объект управления задан разностным уравнением n -го порядка с интервальной неопределенностью коэффициентов

$$a(n, A, z)y(t) = b(m, B, z)u(t), \quad n > m, \quad a_n^0 = 1, \quad \Delta a_n = 0, \quad (5)$$

здесь u – входной (управляющий) сигнал, y – выходной (управляемый) сигнал, $a(n, A, z)$ и $b(m, B, z)$ – интервальные операторы вида (4). Модель

$$a^0(n, z)y(t) = b^0(m, z)u(t), \quad (6)$$

принадлежащую семейству моделей (5), назовем *номинальной*.

Качество управления назначается в виде области Ω , определяющей допустимое расположение нулей характеристического полинома на C^1 . Будем предполагать, что область Ω удовлетворяет следующим условиям: замкнута; расположена внутри окружности единичного радиуса; односвязна; для любой точки $\omega \in \Omega$ также выполняется $\omega^* \in \Omega$.

В технологии синтеза модального регулятора (изложенной, например, в [1. С. 8–21]) регулятор ищется в виде разностного уравнения $(n-1)$ -го порядка

$$w(n-1, z)u(t) = v(n-1, z)y(t) + h(q, z)g(t), \quad q \leq n-1, \quad w_{n-1} = 1, \quad (7)$$

здесь g – входной сигнал замкнутой системы управления. Коэффициенты операторов $w(n-1, z)$ и $v(n-1, z)$ регулятора (7) рассчитываются из условия обращения в тождество уравнения

$$a^{\text{et}}(2n-1, s) = a^0(n, s) \cdot w(n-1, s) - b^0(m, s) \cdot v(n-1, s), \quad a_{2n-1}^{\text{et}} = 1, \quad (8)$$

где $a^{\text{et}}(2n-1, s)$ – заданный характеристический полином эталонной системы управления (далее – эталон); выбор эталона ограничен условием

$$\Lambda(a^{\text{et}}) \subset \text{int } \Omega. \quad (9)$$

Выбор полинома $h(q, s)$ не влияет на свойства робастной устойчивости и робастного качества управления, поэтому вопрос расчета полинома $h(q, s)$ в настоящей работе не рассматривается.

В уравнении (8), приравняв коэффициенты при одинаковых степенях переменной s , получаем систему из $2n-1$ линейных алгебраических уравнений относительно $2n-1$ неизвестных коэффициентов полиномов $w(n-1, s)$ и $v(n-1, s)$ [1. С. 12–13]. Данная система однозначно разрешима, если нули полинома $a^0(n, s)$ не совпадают с нулями полинома $b^0(m, s)$ (см.: [2. С. 11]).

После замыкания исходного объекта (5) регулятором, синтезированным по схеме (7)–(9), получим уравнение замкнутой системы

$$a^c(2n-1, A, B, z)y(t) = b^c(m+q, B, z)g(t),$$

здесь

$$\begin{aligned} a^c(2n-1, A, B, s) &= a(n, A, s) \cdot w(n-1, s) - b(m, B, s) \cdot v(n-1, s), \\ b^c(m+q, B, s) &= b(m, B, s) \cdot h(q, s). \end{aligned}$$

Множество полиномов $a^c(2n-1, A, B, s)$ назовем семейством *характеристических полиномов* замкнутой системы. Это семейство может быть записано через свои элементы:

$$a^c(2n-1, A, B, s) = \{a^c(2n-1, \delta a, \delta b, s) : \delta a \in \Delta A, \delta b \in \Delta B\}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} a^c(2n-1, \delta a, \delta b, s) &\doteq a^{et}(2n-1, s) + a(n-1, \delta a, s) \cdot w(n-1, s) - \\ &- b(m, \delta b, s) \cdot v(n-1, s). \end{aligned}$$

Под нулями семейства характеристических полиномов (10) будем понимать совокупность всех нулей всех полиномов, входящих в семейство (10):

$$\Lambda(a^c) = \{\lambda_i : \exists \delta a \in \Delta A, \exists \delta b \in \Delta B, a^c(2n-1, \delta a, \delta b, \lambda_i) = 0, i = \overline{1, 2n-1}\}.$$

Будем считать, что замкнутая система с характеристическим полиномом (10) обладает *робастным качеством управления*, если множество $\Lambda(a^c)$ лежит внутри области Ω :

$$\Lambda(a^c) \subset \text{int } \Omega. \quad (11)$$

При наличии интервальной неопределенности коэффициентов в объекте управления нельзя заранее гарантировать, что модальный регулятор, рассчитанный по формулам (7)–(9), будет обеспечивать выполнение условия (11). Таким образом, задача синтеза модального регулятора в условиях неопределенности в объекте управления состоит из следующих этапов:

- 1) синтез модального регулятора для номинального объекта (6) (по формулам (7)–(9));
- 2) последующая проверка выполнения условия (11) для заданного семейства характеристических полиномов (10) (задача исследования робастного качества управления).

В следующем разделе разрабатывается вычислительная технология исследования робастного качества управления для семейства характеристических полиномов вида (10).

2. Вычислительная технология исследования робастного качества управления

2.1. Критерий робастного качества управления

Далее, чтобы упростить запись выражений, мы будем указывать не все аргументы функций, а только те из них, которые существенны для проводимых рассуждений. При этом при изменении контекста рассуждений будет изменяться и состав аргументов.

Множество полиномов (10) является аффинным семейством полиномов:

$$a^c(s) = \left\{ p(\mathbf{e}, s) = p_0(s) + \sum_{i=1}^{n+m+1} e_i \cdot p_i(s) : \mathbf{e} \doteq [e_1, \dots, e_{n+m+1}] \in E \right\}, \quad (12)$$

где $p_0(s), \dots, p_{n+m+1}(s)$ – полиномы

$$\begin{aligned} p_0(s) &= a^{et}(2n-1, s), \\ p_i(s) &= \begin{cases} \Delta a_{i-1} s^{i-1} \cdot w(n-1, s), & i \in \overline{1, n}, \\ \Delta b_{i-n-1} s^{i-n-1} \cdot v(n-1, s), & i \in \overline{n+1, n+m+1}, \end{cases} \end{aligned}$$

а область E представляет собой $(n+m+1)$ -мерный куб

$$E = \{\mathbf{e} \in R^{n+m+1} : |e_i| \leq 1, \forall i \in \overline{1, n+m+1}\}.$$

Рассмотрим две комплексные плоскости: $(\text{Re}(\omega), j\text{Im}(\omega))$ и $(\text{Re}(\xi), j\text{Im}(\xi))$. Полином $p_0(s)$ отображает точку ω на первой комплексной плоскости в точку $\xi_0 = p_0(\omega)$ второй. В указанном смысле

точку ξ_0 называют *геометрическим образом* полинома $p_0(s)$ для точки ω . Аналогично аффинное семейство полиномов (12) будет отображать точку ω в множество

$$\Xi(\omega) = \left\{ p_0(\omega) + \sum_{i=1}^{n+m+1} e_i \cdot p_i(\omega) : e \in E \right\}. \quad (13)$$

Множество $\Xi(\omega)$ является геометрическим образом семейства полиномов (12) для точки ω .

Доказано (см.: [6. С. 174]), что геометрический образ аффинного семейства полиномов (12) представляет выпуклый многоугольник на C^1 , вершины которого определяются вершинными полиномами $\{p_0(s) \pm p_i(s), i = 1, \dots, n + m + 1\}$. Общее число вершин многоугольника не превышает $2(n + m + 1)$. Точки $\{\xi_0(\omega) \pm \xi_i(\omega), i = 1, \dots, n + m + 1\}$ комплексной плоскости, соответствующие вершинным полиномам, называются *точками-кандидатами*.

Существует множество алгоритмов вычисления координат вершин выпуклого многоугольника по известным точкам-кандидатам (например, алгоритмы Грэхема, Джарвиса и др. [15. С. 106–112]). Многоугольник $\Xi(\omega)$, построенный по своим точкам-кандидатам, будем записывать в виде:

$$\Xi(\omega) = \text{Conv} \{ \xi_0(\omega) \pm \xi_i(\omega), i \in \overline{1, n + m + 1} \}.$$

На основе принципа аргумента и понятия геометрического образа семейства полиномов можем сформулировать критерий робастного качества управления.

Лемма 1. Пусть все нули полинома $p_0(s)$ лежат внутри заданной области Ω . Тогда для того, чтобы множество нулей семейства полиномов (12) также лежало внутри Ω , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$$0 \notin \Xi(\omega), \quad \forall \omega \in \partial\Omega. \quad (14)$$

Доказательство. Все полиномы, входящие в (12), имеют одинаковый порядок. По условию теоремы все нули полинома $p_0(s)$ лежат внутри Ω . Любой другой полином семейства (12) получается вариацией вектора параметров e . При вариации e изменение числа нулей, лежащих внутри Ω , может происходить только в том случае, когда хотя бы один из нулей выйдет на границу области Ω и условие (14) будет нарушено. Что и требовалось доказать.

Точка $\xi_0(\omega)$ является центром многоугольника (13), следовательно, множество (13) может быть записано в виде:

$$\Xi(\omega) = \xi_0(\omega) + \Delta\Xi(\omega),$$

где

$$\Delta\Xi(\omega) = \text{Conv} \{ \pm \xi_i(\omega), i \in \overline{1, n + m + 1} \}.$$

В результате условие (14) принимает вид:

$$-\xi_0(\omega) \notin \Delta\Xi(\omega), \quad \forall \omega \in \partial\Omega,$$

или, учитывая симметрию множества $\Delta\Xi(\omega)$, следующую из симметрии точек-кандидатов, получаем

$$\xi_0(\omega) \notin \Delta\Xi(\omega), \quad \forall \omega \in \partial\Omega. \quad (15)$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 1. Пусть все нули полинома $p_0(s)$ лежат внутри заданной области Ω . Тогда для того, чтобы множество нулей семейства полиномов (12) также лежало внутри Ω , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (15).

Основная сложность проверки условия (15) состоит в необходимости:

- 1) эффективно строить многоугольник $\Delta\Xi(\omega)$ для заданной точки $\omega \in \partial\Omega$;
- 2) эффективно проверять выполнение условия (15) для заданной точки $\omega \in \partial\Omega$.

Технология проверки условия (15) изложена ниже.

2.2. Методика проверки робастного качества управления

Множество точек на C^1 , являющихся вершинами многоугольника $\Delta\Xi(\omega)$, обозначим

$$\Theta = \{ \theta_k \in C^1, k = \overline{1, 2 \cdot r} \}, \quad r \leq n + m + 1.$$

Далее для определенности примем, что координаты вершин Θ рассчитаны по алгоритму Грэхема [15. С. 106–110]: алгоритм Грэхема формирует вершины θ_k в порядке их обхода против часовой стрелки.

Рассмотрим многоугольник

$$\Delta\Xi(\mu, \omega) \doteq \mu \cdot \Delta\Xi(\omega), \quad \mu \geq 0.$$

Очевидно, что многоугольник $\Delta\Xi(\mu, \omega)$ будет иметь вершины в точках

$$\{\mu \cdot \theta_k, \quad k = \overline{1, 2 \cdot r}\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что многоугольник $\Delta\Xi(\mu, \omega)$ является геометрическим образом семейства полиномов, полученных из (12) после умножения всех границ интервалов на μ .

Поставим следующую вспомогательную задачу: для точки $\omega \in \partial\Omega$ требуется найти значение

$$\mu(\omega) \doteq \min \{\mu \in R^1 : \xi_0(\omega) \in \partial\Delta\Xi(\mu, \omega), \quad \mu \geq 0\}, \quad (16)$$

если оно существует. При решении задачи (16) будем выделять два возможных случая: $r = 1$ и $r > 1$.

В случае $r = 1$ многоугольник $\Delta\Xi(\mu, \omega)$ вырождается в отрезок на C^1 с границами в точках $\pm\mu \cdot \theta_1$. Точка $\xi_0(\omega)$ может принадлежать данному отрезку только в том случае, если она находится на линии

$$\alpha \cdot \operatorname{Re}(\xi) + \beta \cdot \operatorname{Im}(\xi) = 0, \quad \alpha = -\operatorname{Im}(\theta_1), \quad \beta = \operatorname{Re}(\theta_1), \quad \xi \in C^1, \quad (17)$$

проходящей через точки θ_1 и $-\theta_1$. Доопределяя $\mu(\omega) = +\infty$ в том случае, когда точка $\xi_0(\omega)$ не принадлежит линии (17), получаем следующее решение задачи (16):

$$\mu(\omega) = \begin{cases} |\xi_0(\omega)/\theta_1|, & \alpha \cdot \operatorname{Re}(\xi_0(\omega)) + \beta \cdot \operatorname{Im}(\xi_0(\omega)) = 0, \\ +\infty, & \alpha \cdot \operatorname{Re}(\xi_0(\omega)) + \beta \cdot \operatorname{Im}(\xi_0(\omega)) \neq 0, \end{cases} \quad (18)$$

в случае $r = 1$.

Рассмотрим случай $r > 1$. Многоугольник $\Delta\Xi(\mu, \omega)$ может быть задан системой линейных алгебраических неравенств

$$\alpha_k \cdot \operatorname{Re}(\xi) + \beta_k \cdot \operatorname{Im}(\xi) + \gamma_k \geq 0, \quad k = \overline{1, 2 \cdot r}, \quad \xi \in C^1, \quad (19)$$

коэффициенты $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} \psi_k &= \operatorname{Re}(\theta_{k+1} - \theta_k) \cdot \operatorname{Im}(\theta_k) - \operatorname{Im}(\theta_{k+1} - \theta_k) \cdot \operatorname{Re}(\theta_k), \quad \gamma_k = \mu \cdot |\psi_k|, \\ \alpha_k &= \begin{cases} \operatorname{Im}(\theta_{k+1} - \theta_k), & \psi_k \geq 0, \\ -\operatorname{Im}(\theta_{k+1} - \theta_k), & \psi_k < 0, \end{cases} \quad \beta_k = \begin{cases} -\operatorname{Re}(\theta_{k+1} - \theta_k), & \psi_k \geq 0, \\ \operatorname{Re}(\theta_{k+1} - \theta_k), & \psi_k < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

здесь для простоты записи формул (20) принимается $\theta_{2r+1} \equiv \theta_1$.

Точка $\xi_0(\omega)$ принадлежит границе $\Delta Z(\gamma)$ в следующих случаях.

Случай 1: точка $\xi_0(\omega)$ находится на k -й стороне многоугольника $\Delta\Xi(\mu, \omega)$. При этом в данной точке k -е неравенство системы (19)–(20) обратится в равенство; соответствующее значение параметра μ обозначим за μ_k :

$$\mu_k = -(\alpha_k \cdot \operatorname{Re}(\xi_0(\omega)) + \beta_k \cdot \operatorname{Im}(\xi_0(\omega))) / |\psi_k|;$$

Случай 2: точка $\xi_0(\omega)$ находится в k -й вершине многоугольника $\Delta\Xi(\mu, \omega)$. При этом k -е и $(k + 1)$ -е неравенства системы (19)–(20) обратятся в равенства. Сформируем множество

$$M_+(\omega) = \{\mu_k \doteq -(\alpha_k \cdot \operatorname{Re}(\xi_0(\omega)) + \beta_k \cdot \operatorname{Im}(\xi_0(\omega))) / |\psi_k| : \mu_k \geq 0, \quad k = \overline{1, 2 \cdot r}\}$$

Отметим, что по смыслу задачи сразу все значения μ_k , ($k = \overline{1, 2 \cdot r}$) не могут быть отрицательны, следовательно, множество $M_+(\omega)$ непусто. Таким образом, искомое значение $\mu(\omega)$ при $r > 1$ находится по формуле

$$\begin{aligned} \mu(\omega) &= \max \{\mu_k \in M_+(\omega) : \\ &\alpha_i \cdot \operatorname{Re}(\xi_0(\omega)) + \beta_i \cdot \operatorname{Im}(\xi_0(\omega)) + \mu_k \cdot |\psi_i| \geq 0, \quad \forall i = \overline{1, 2 \cdot r}\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Изложенные рассуждения можно рассматривать как доказательство следующей леммы:

Лемма 2. Решение задачи (16) для точки $\omega \in \partial\Omega$ определяется формулами (18) в случае $r = 1$ и (21) в случае $r > 1$.

Основываясь на данной лемме, теорему 1 можем переформулировать следующим образом:

Теорема 2. Пусть полином $a^c(2n-1, s)$, принадлежащий семейству (10), удовлетворяет условию (9). Тогда для семейства полиномов (10) выполняется условие робастного качества управления (11) только в том случае, если

$$\mu_- \doteq \min_{\omega \in \partial\Omega} \mu(\omega) > 1, \quad (22)$$

где $\mu(\omega)$ – решение задачи (16).

Значение μ_- определяет, во сколько раз следует увеличить (при $\mu_- > 1$) или уменьшить (при $\mu_- < 1$) одновременно все интервалы в модели (5), чтобы для семейства характеристических полиномов (10) впервые было нарушено условие робастного качества управления (11).

Теорема 2 является обобщением известного в комплексном анализе «принципа аргумента». При этом принцип аргумента может быть сформулирован следующим образом: для того чтобы все нули семейства полиномов $a^c(2n-1, A, B, s)$ лежали внутри Ω , необходимо и достаточно, чтобы при обходе точки ω вдоль $\partial\Omega$ в положительном направлении приращение аргумента каждого полинома из семейства $a^c(2n-1, A, B, s)$ равнялось $2\pi(2n-1)$ рад.

Для того чтобы контролировать последовательность обхода квадрантов на комплексной плоскости, достаточно рассчитывать вариации аргумента в точках $\{\omega_i, i = 1, \dots, N\}$ на контуре $\partial\Omega$, таких что удовлетворяют условию

$$\Delta \arg a^c(2n-1, \delta a, \delta b, \omega) \Big|_{\omega=\omega_i}^{\omega=\omega_{i+1}} \leq \pi/2 \text{ рад},$$

$$\forall a^c(2n-1, \delta a, \delta b, s) \in a^c(2n-1, A, B, s).$$

Пользуясь оценками для вариации аргументов полиномов, последнее условие можно записать в виде:

$$\max_{s \in \Omega} \Delta \arg(\omega - s) \Big|_{\omega=\omega_i}^{\omega=\omega_{i+1}} \leq \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ рад}. \quad (23)$$

Учитывая изложенные рассуждения, далее принято, что на $\partial\Omega$ выбрано конечное множество точек $\{\omega_i, i = 1, \dots, N\}$, удовлетворяющих условию (23).

Алгоритм исследования робастного качества управления:

Шаг 1. Принять $i = 1$.

Шаг 2. Для точки $\omega_i \in \partial\Omega$ по алгоритму Грэхема рассчитать множество Θ вершин многоугольника (13).

Шаг 3. Проверить выполнение условия $r = 1$. Если оно выполняется, то рассчитать $\mu(\omega_i)$ по формуле (18), иначе рассчитать $\mu(\omega_i)$ по формуле (21). Принять $i = i + 1$. Перейти на следующий шаг.

Шаг 4. Проверить выполнение условия $i \leq N$. Если оно выполняется, то перейти на шаг 2, если нет – перейти на следующий шаг.

Шаг 5. Вычислить значение

$$\mu_- = \min_{\omega_i} \mu(\omega_i)$$

и проверить выполнение условия $\mu_- > 1$. Если это условие выполняется, то перейти на следующий шаг, в противном случае перейти на шаг 7.

Шаг 6. Сделать вывод: исследуемое семейство характеристических полиномов (10) обладает свойством робастного качества управления. Перейти на шаг 8.

Шаг 7. Сделать вывод: исследуемое семейство характеристических полиномов (10) не обладает свойством робастного качества управления. Перейти на следующий шаг.

Шаг 8. Останов.

3. Пример исследования робастного качества управления

Задан дискретный объект управления с интервальной неопределённостью коэффициентов

$$a^0(2, z) + \Delta a(1, z)y(t) = b^0(1, z) + \Delta b(1, z)u(t),$$

где

$$a^0(2, z) = z^2 - 1,918z + 0,923, \quad b^0(1, z) = 0,232z - 0,179, \\ \Delta a(1, z) = 10^{-4}[-1; 1]z + 10^{-4}[-2; 2], \quad \Delta b(1, z) = 10^{-2}[-1; 1]z + 10^{-2}[-1; 1]$$

Требования к качеству управления назовем в виде области

$$\Omega = \{\omega : \eta_2 \leq |\omega| \leq \eta_1, \quad |\arg(\omega)| \leq \varphi\},$$

где $\eta_1 = 0,607$, $\eta_2 = 0,961$, $\varphi = \pi/4$ рад. Характеристический полином эталона выберем

$$a^{\text{et}}(3, z) = z^3 - 2,715z^2 + 2,456z - 0,741.$$

Для номинальной модели

$$a^0(2, p)y(t) = b^0(1, p)u(t)$$

и эталона $a^{\text{et}}(3, z)$ рассчитан модальный регулятор

$$(z - 0,833)u(t) = (-0,156z + 0,156)y(t) + h_0g(t).$$

Семейство характеристических полиномов замкнутой системы

$$a^c(3, z) = a^{\text{et}}(3, z) + \Delta a(1, z) \cdot w(1, z) - \Delta b(1, z) \cdot v(1, z) \quad (24)$$

Требуется исследовать семейство полиномов (23) на робастное качество управления.

Решение. В результате расчетов функции $\mu(\omega)$ вдоль $\partial\Omega$ найдено наименьшее значение, равное 1,137. Следовательно, семейство (24) имеет робастное качество управления.

Заключение

В данной работе обоснована схема синтеза робастного модального регулятора. Важной частью процедуры расчета регулятора является задача исследования робастного качества управления. В статье получено обобщение принципа исключения нуля (теорема 2), на основе которого разработана вычислительная технология проверки робастного качества управления. Предложенная схема синтеза проиллюстрирована примером.

Список источников

1. Паршуков А.Н. Методы синтеза модальных регуляторов. Тюмень : ТюмГНГУ, 2009. 84 с.
2. Соловьев И.Г. Методы мажоризации в анализе и синтезе адаптивных систем. Новосибирск : Наука, 1992. 191 с.
3. Ackermann J.A., Bartlett D., Kaesbauer W.S., Steinhauser R. Robust control. Systems with uncertain physical parameters. London : Springer-Verlag, 1993. 413 p.
4. Barmish B.R. New tools for robustness of linear systems. New York : MacMillan, 1994. 394 p.
5. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем // Автоматика и телемеханика. 1990. № 9. С. 45–54.
6. Поляк Б.Т., Щербakov П.С. Робастная устойчивость и управление. М. : Наука, 2002. 303 с.
7. Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34, № 8. P. 831–847.
8. Khargonekar P.P., Rotea M.A. Mixed H_2/H_∞ Control: a Convex Optimization Approach // IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. 36, № 7. P. 824–831.
9. Kogan M.M. Optimal discrete-time H_∞/γ_0 filtering and control under unknown covariances // Int. J. Control. 2016. V. 89, № 4. P. 691–700.
10. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М. : Физматлит, 2007. 280 с.
11. Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. An LMI approach to structured sparse feedback design in linear control systems // Proc. 12th European Control Conference. Zurich, 2013. P. 833–838.
12. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербakov П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств. М. : Ленанд, 2014. 560 с.
13. Баландин Д.В., Коган М.М., Кривдина Л.Н., Федюков А.А. Синтез обобщенного H_∞ -оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах // Автоматика и телемеханика. 2014. № 1. С. 3–22.
14. Зубов В.И., Зубов И.В., Зубова А.Ф. Исследование робастного поведения семейств дискретных полиномов // Журнал Средневолжского математического общества. 2014. Т. 16, № 2. С. 114–117.
15. Preparata F., Shamos M. Computational Geometry. An Introduction. New York : Springer-Verlag, 1985. 411 p.

References

1. Parshukov, A.N. (2009) *Metody sinteza modal'nykh regulyatorov* [Methods of Synthesis of Modal Regulators]. Tyumen: TyumGNGU.
2. Soloviev, I.G. (1992) *Metody mazhorizatsii v analize i sinteze adaptivnykh sistem* [Methods of majorization in the analysis and synthesis of adaptive systems]. Novosibirsk: Nauka.
3. Ackermann, J.A., Bartlett, D., Kaesbauer, W.S. & Steinhauser, R. (1993) *Robust control. Systems with uncertain physical parameters*. London: Springer-Verlag.
4. Barmish, B.R. (1994) *New tools for robustness of linear systems*. New York: MacMillan.
5. Polyak, B.T. & Tsytkin, Ya.Z. (1990) Frequency criteria of robust stability and aperiodicity of linear systems. *Automation and Remote Control*. 51(9). pp. 1192–1201.
6. Polyak, B.T. & Shcherbakov, P.S. (2002) *Robustnaya ustoychivost' i upravlenie* [Robust Stability and Control]. Moscow: Nauka.
7. Doyle, J.C., Glover, K., Khargonekar, P.P. & Francis, B.A. (1989) State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 34(8). pp. 831–847.
8. Khargonekar, P.P. & Rotea, M.A. (1991) Mixed H_2/H_∞ control: a convex optimization approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 36(7). pp. 824–831.
9. Kogan, M.M. (2016) Optimal discrete-time H_∞/γ_0 filtering and control under unknown covariances. *International Journal of Control*. 89(4). pp. 691–700. DOI: 10.1080/00207179.2015.1091511
10. Balandin, D.V. & Kogan, M.M. (2007) *Sintez zakonov upravleniya na osnove lineynykh matrichnykh neravenstv* [Synthesis of control laws based on linear matrix inequalities]. Moscow: Fizmatlit.
11. Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V. & Shcherbakov, P.S. (2013) An LMI approach to structured sparse feedback design in linear control systems. *Proceedings 12th European Control Conference*. Zurich. pp. 833–838.
12. Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V. & Shcherbakov, P.S. (2014) *Upravlenie lineynymi sistemami pri vneshnikh vozmushcheniyakh: tekhnika lineynykh matrichnykh neravenstv* [Control of linear systems under external disturbances: technique of linear matrix inequalities]. Moscow: Lenand.
13. Balandin, D.V., Kogan, M.M., Krivdina, L.N. & Fedukov, A.A. (2014) Design of generalized discrete-time H_∞ -optimal control over finite and infinite intervals. *Automation and Remote Control*. 75(1). pp. 1–17.
14. Zubov, V.I. & Zubov, I.V. & Zubova, A.F. (2014) The investigation of robust behavior interval polynomials. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva – Middle Volga Mathematical Society Journal*. 16(2). pp. 114–117.
15. Preparata, F. & Shamos, M. (1985) *Computational Geometry. An Introduction*. New York: Springer-Verlag.

Информация об авторе:

Паршуков Андрей Николаевич – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры «Электроэнергетика» Тюменского индустриального университета (Тюмень, Россия). E-mail: anparshukov@mail.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Information about the author:

Parshukov Andrej N. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation). E-mail: anparshukov@mail.ru

The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 24.12.2021; принята к публикации 30.08.2022

Received 24.12.2021; accepted for publication 30.08.2022

Научная статья

УДК 681.513

doi: 10.17223/19988605/60/2

Управление ляпуновским спектром дискретных систем с хаотической динамикой

Владимир Николаевич Шашихин*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия, shashihin@bk.ru*

Аннотация. Рассматривается методика синтеза стабилизирующих управлений для дискретных нелинейных систем с хаотической динамикой. Подавление хаоса основано на формировании спектра характеристических показателей Ляпунова путем введения обратной связи по фазовому вектору. Параметры регулятора, обеспечивающего устойчивость особых точек или предельного цикла, вычисляются с применением метода модального управления. Приведен пример использования предлагаемого метода для синтеза управления дискретным осциллятором Ресслера.

Ключевые слова: дискретные нелинейные системы; хаотическая динамика; синтез обратной связи; стабилизация особых точек

Для цитирования: Шашихин В.Н. Управление ляпуновским спектром дискретных систем с хаотической динамикой // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 60. С. 13–20. doi: 10.17223/19988605/60/2

Original article

doi: 10.17223/19988605/60/2

Control of the Lyapunov spectrum of discrete systems with chaotic dynamics

Vladimir N. Shashikhin*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation, shashihin@bk.ru*

Abstract. One of the most topical problems of the modern theory of nonlinear systems is the stabilization of chaotic regimes or the transformation of chaotic motion into regular motion (limit cycle or motion to a singular point). The search for a solution to this problem proceeds along different directions. One of the directions is connected with the application of programmed control based on external resonance perturbations or internal parametric perturbations. The second group of so-called combined control methods combines program control and feedback control.

The paper considers the problem of suppressing chaos by forming the required spectrum of characteristic Lyapunov exponents in a closed nonlinear discrete system. The spectrum is formed by introducing feedback with respect to the phase vector. The feedback parameters are calculated using the technique of the modal control synthesis.

The mathematical model of a nonlinear dynamic system is the difference equation:

$$x(k+1) = F(x(k)) + Bu(k), \quad x(k_0) = x_0.$$

When the components of the function $F(x(k)) = [f_i(x(k))]_{i=1}^n$ are differentiable in the neighborhood of the reference state x^* , this equation is reduced to the linear form: $\bar{x}(k+1) = J(x^*)(\bar{x}(k)) + Bu(k), \quad \bar{x}(k_0) = x_0.$

The problem of controlling the Lyapunov spectrum is to determine the feedback from the phase vector of a nonlinear discrete system such that the closed system has a spectrum equal to the required spectrum. The required spectrum is determined by the problem being solved: stabilization of a singular point or stabilization of a limit cycle. For hyperbolic systems, the Grobman--Hartman theorem holds that a linearized system provides comprehensive infor-

mation on the behavior of a nonlinear system and the stability of singular points of discrete nonlinear systems is determined by the eigenvalues of the Jacobi matrix, which must satisfy the condition: $|\mu_i(J(x^0))| < 1, i = \overline{1, n}$.

Calculation of the feedback coefficient using modal control makes it possible to ensure the equality of the eigenvalues of the matrix of the closed system to a given set of real (complex) numbers, the moduli of which are less than one. The work uses the modal control synthesis based on the reduction of the original system to the canonical Frobenius basis. For a discrete linear system, the parameters of the linear feedback control law: $u(k) = -l^T x(k)$, providing the given values of the roots of the characteristic equation of the closed system are calculated by the formula: $l = (Q^T)^{-1}(\bar{a} - \bar{a}^*)$, here $\bar{a}$ is the vector of the coefficients of the characteristic equation of the Jacobi matrix, whereas $\bar{a}^*$ is the vector of the coefficients of the required characteristic equation. The calculated parameters of the controller also determine the feedback in the original nonlinear system.

As an example, the problem of controlling the Lyapunov spectrum for stabilizing a singular point and a limit cycle of the discrete Ressler oscillator is considered. The spectrum of Lyapunov characteristic exponents of the initial nonlinear system contains positive, close to zero and negative Lyapunov characteristic exponents. Thus, the Ressler oscillator has a chaotic regime.

For the desired value of the highest characteristic Lyapunov exponent $\chi_1^* < 0$, the spectrum has only negative characteristic Lyapunov exponents and the attractor of the feedback system is a stable singular point.

If the desired value of the highest characteristic Lyapunov exponent $\chi_1^*(G) = 0$, then the spectrum of characteristic Lyapunov exponents of the closed system contains zero (close to zero) and two negative exponents, which testifies to the suppression of chaos and the transition to periodic motion, a limit cycle.

Thus, a technique for the synthesis of stabilizing control for a nonlinear discrete system is proposed, which ensures the suppression of chaos in the system and the formation of a regular regime in the form of a singular point or a limit cycle. The problem of suppressing chaos is solved by forming a given spectrum of Lyapunov characteristic exponents by introducing feedback with respect to the phase coordinates of the nonlinear system.

Keywords: discrete nonlinear systems; chaotic dynamics; feedback synthesis; stabilization of singular points

For citation: Shashikhin, V.N. (2022) Control of the Lyapunov spectrum of discrete systems with chaotic dynamics. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 60. pp. 13–20. doi: 10.17223/19988605/60/2

Одна из важнейших проблем современной теории нелинейных систем состоит в стабилизации хаотических режимов или преобразовании хаотического движения в регулярное движение (предельный цикл или движение к особой точке). Поиск решения данной проблемы идет по различным направлениям. Одно из направлений связано с применением программного управления, основанного на внешних резонансных возмущениях [1] либо внутренних параметрических возмущениях [2]. Вторая группа, так называемые методы комбинированного управления [3], сочетает в себе программное управление и управление с обратной связью.

Широкое развитие получили и методы на основе обратной связи, которые были исторически первыми, но остаются актуальными в настоящее время. К ним относится метод линеаризации Пуанкаре (OGY-метод [4]) и обратная связь с запаздыванием (метод Пирагаса [5]) для стабилизации периодической орбиты). Все эти методы имеют свои достоинства и недостатки, связанные с точностью модели системы, необходимостью подбора параметров обратной связи, неполным учетом специфических свойств хаотических процессов.

Для управления системами с хаотической динамикой в условиях действия параметрических и внешних возмущений в настоящее время используется достаточно большой спектр методов теории автоматического управления. К ним можно отнести: ПИД-регуляторы [6, 7]; регуляторы, обеспечивающие робастную устойчивость [8]; адаптивные регуляторы [9]. Широкое распространение получил синергетический подход на основе аналитического конструирования агрегированных регуляторов [10].

В работе рассматривается задача подавления хаоса путем формирования в замкнутой нелинейной дискретной системе требуемого спектра характеристических показателей Ляпунова, соответствующего стабилизации особых точек или предельного цикла. Ляпуновский спектр формируется введением обратной связи по фазовому вектору. Параметры обратной связи вычисляются с использованием методики синтеза модального управления [11].

1. Постановка задачи

В определенных ситуациях для моделирования системы достаточно указать ее состояние в заданные дискретные моменты времени. В этом случае в качестве эволюционного оператора можно использовать функцию, определяющую состояние системы в дискретные моменты времени через ее состояние в предыдущий момент. При этом математической моделью динамической системы служит разностное уравнение с заданным начальным условием

$$x(k+1) = F(x(k)) + Bu(k), \quad x(k_0) = x_0, \quad (1)$$

где $k \in Z$ – дискретное время; Z – множество целых чисел; $x(k) \in R^n$ – фазовый вектор в момент времени k ; $u(k) \in R^m$ – вектор управляющих воздействий в момент времени k ; $F(x(k)) = (f_1(x(k)), f_2(x(k)), \dots, f_n(x(k)))^T$ – вектор-функция $F(x(k)): Z \otimes R^n \rightarrow R^n$.

Для траекторий динамической системы (1) может выполняться одна из двух возможностей:

– либо при некотором $k \neq 0$ $\varphi(k, x_0) = x_0$, в этом случае существует наименьшее натуральное $k \neq 0$ такое, что $\varphi(k + k_0, x_0) = \varphi(k, x_0)$ для всех $k \in Z$, сама точка x_0 называется периодической точкой периода k_0 , а ее траектория состоит из k_0 различных точек (при $k_0 = 1$ точка x_0 называется неподвижной точкой);

– либо $\varphi(k, x_0) \neq x_0$ для всех $k \neq 0$, в этом случае траектория x_0 состоит из счетного множества различных точек.

Пусть уравнение (1) описывает отклонения фазовых координат нелинейного дискретного объекта от некоторого опорного состояния x^* . Используя формулу Тейлора в предположении дифференцируемости компонент функции $F(x(k)) = [f_i(x(k))]_{i=1}^n$ в окрестности опорного состояния x^* , преобразуем уравнение (1) к линейному виду:

$$\bar{x}(k+1) = J(x^*)(\bar{x}(k)) + Bu(k), \quad \bar{x}(k_0) = x_0, \quad (2)$$

где $J(x^*)$ – матрица Якоби векторной функции $F(x(k))$:

$$J(x^*) = \begin{bmatrix} \partial f_1(x(k)) / \partial x_1(k) & \dots & \partial f_1(x(k)) / \partial x_n(k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial f_n(x(k)) / \partial x_1(k) & \dots & \partial f_n(x(k)) / \partial x_n(k) \end{bmatrix}_{x(k)=x^*}. \quad (3)$$

Для произвольного решения дискретной системы характеристический показатель Ляпунова определяется формулой

$$\chi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} [k^{-1} \ln \|x(k)\|].$$

Спектр Ляпунова нелинейной дискретной системы (1)

$$\sigma(F) = \{\chi_i(F), i = \overline{1, n}\}$$

состоит из n различных упорядоченных по убыванию характеристических показателей Ляпунова

$$\chi_1(F) \geq \chi_2(F) \geq \dots \geq \chi_n(F).$$

Задача управления спектром Ляпунова состоит в определении обратной связи по фазовому вектору нелинейной дискретной системы

$$u(k) = -L^* x(k), \quad L^* \in R^{m \times n} \quad (4)$$

такой, чтобы замкнутая нелинейная система

$$x(k+1) = F(x(k)) - BL^* x(k), \quad x(k_0) = x_0 \quad (5)$$

имела спектр

$$\sigma(F - BL^*) = \{\chi_i(F - BL^*), i = \overline{1, n}\}, \quad (6)$$

равный требуемому спектру

$$\sigma(G) = \{\chi_i(G), i = \overline{1, n}\}. \quad (7)$$

Для нелинейной системы (5) линеаризованная система (2) при управлении (4) будет иметь вид:

$$\bar{x}(k+1) = (J(x^*) - BL^*)\bar{x}(k) = A_z \bar{x}(k), \quad \bar{x}(k_0) = \bar{x}_0, \quad (8)$$

где $A_z = (J(x^*) - BL^*)$ – матрица замкнутой системы.

2. Формирование спектра замкнутой системы

Требуемый (желаемый) спектр (7) определяется решаемой задачей – стабилизации особой точки или стабилизации предельного цикла.

Стабилизация особой точки. Особая точка дискретной нелинейной системы (1) удовлетворяет соотношению $x^0 = F(x^0)$. Особые точки, в которых у матрицы Якоби (3) нет собственных значений $\mu_i(J(x^0))$ таких, что $|\mu_i(J(x^0))| = 1$, называются гиперболическими, и для них, как и в случае непрерывных систем, справедлива теорема Гробмана–Хартмана [12] о том, что линеаризованная система (8) дает исчерпывающую информацию относительно поведения нелинейной системы (5) и устойчивость особых точек дискретных нелинейных систем определяется собственными значениями матрицы Якоби, которые должны удовлетворять условию

$$|\mu_i(J(x^0))| < 1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Вычисление коэффициента обратной связи с использованием модального управления позволяет обеспечить равенство собственных значений матрицы замкнутой системы (8) наперед заданному набору вещественных (комплексных) чисел, удовлетворяющих условию (9). В работе используется синтез модального управления на основе приведения исходной системы к каноническому базису Фробениуса [13].

Рассмотрим дискретную линейную систему

$$x(k+1) = Ax(k) - bu(k), \quad x(k_0) = x_0, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad (10)$$

для которой необходимо определить параметры линейного закона управления с обратной связью

$$u(k) = -l^T x(k), \quad (11)$$

обеспечивающего заданные значения корней характеристического уравнения замкнутой системы

$$x(k+1) = Ax(k) - bl^T x(k) = (A - bl^T)x(k), \quad x(k_0) = x_0, \quad (A - bl^T) = A_z \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (12)$$

т.е. равенство спектра матрицы A_z требуемому (желаемому) спектру

$$\rho(A_z) = \{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_{n-1}^*, \lambda_n^*\}.$$

Система (10) соответствует линеаризованной системе (8) исходной нелинейной системы. По требуемому спектру вычисляются коэффициенты характеристического уравнения, имеющего желаемые корни.

Коэффициент обратной связи (11) вычисляется по формуле

$$l^* = (Q^T)^{-1}(\vec{a} - \vec{a}^*). \quad (13)$$

Вычисленные параметры регулятора определяют обратную связь для системы, заданной соотношениями (12). Здесь $\vec{a}$ – вектор коэффициентов характеристического уравнения матрицы Якоби, а $\vec{a}^*$ – вектор коэффициентов требуемого характеристического уравнения, корни которого равны требуемым собственным значениям матрицы Якоби.

Коэффициент обратной связи (13) используется для управления спектром характеристических показателей Ляпунова нелинейной дискретной системы (5).

3. Исследование нелинейной системы

Рассмотрим задачу управления спектром Ляпунова для стабилизации особой точки и предельного цикла дискретного осциллятора Ресслера [14]

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= x_1(k) - \varepsilon[x_2(k) + x_3(k)], \\x_2(k+1) &= x_2(k) + \varepsilon[x_1(k) + ax_2(k)], \\x_3(k+1) &= x_3(k) + \varepsilon b + \varepsilon[x_1(k) - r]x_3(k).\end{aligned}\quad (14)$$

при значениях параметров: $a = 0,1042$; $b = 0,2000$; $r = 9,0000$; $\varepsilon = 0,1000$.

Дискретный осциллятор Ресслера имеет две особые точки:

$$x_1^* = (0,0070 \quad -0,0351 \quad 0,0351); \quad x_2^* = (5,6930 \quad -28,4649 \quad 28,4649),$$

а матрица Якоби равна

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z & 0 & x - c \end{bmatrix}.$$

Собственные числа матрицы Якоби в особых точках:

$$\rho(J(x_1^*)) = \begin{cases} \mu_1 = 0,0970 + 0,9952i, \\ \mu_2 = 0,0970 - 0,9952i, \\ \mu_3 = -5,6870, \end{cases} \quad \rho(J(x_2^*)) = \begin{cases} \mu_1 = 5,4280i, \\ \mu_2 = -5,4280i, \\ \mu_3 = 0,1930. \end{cases}$$

Модули собственных чисел матрицы Якоби в особых точках равны

$$\begin{aligned}|\mu_1| &= 0,9999 < 1, \quad |\mu_2| = 0,9999 < 1, \quad |\mu_3| = 5,6870 > 1, \\ |\mu_1| &= 5,4280 > 1, \quad |\mu_2| = 5,4280 > 1, \quad |\mu_3| = 0,193 < 1.\end{aligned}$$

Так как для каждой особой точки есть собственные числа матрицы Якоби, модуль которых больше единицы, то особые точки являются неустойчивыми. Спектр характеристических показателей Ляпунова системы (14) имеет вид:

$$\sigma(F) = \{\chi_1(F) = 0,07094, \chi_2(F) = 0,01841, \chi_3(F) = -5,44527\},$$

и содержит положительный, близкий к нулю и отрицательный характеристические показатели Ляпунова. Таким образом, система (14) является хаотической. На рис. 1 представлен аттрактор дискретного осциллятора Ресслера без управляющего воздействия.

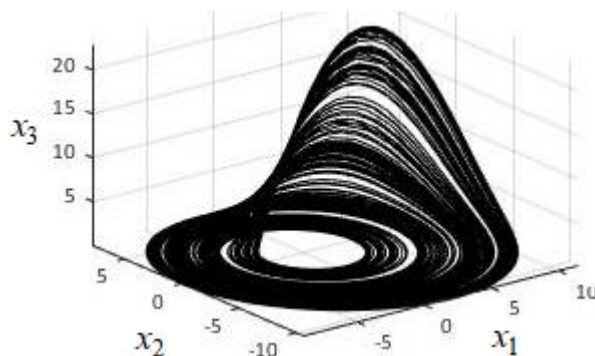


Рис. 1. Странный аттрактор дискретного осциллятора Ресслера
Fig. 1 The strange attractor of the discrete Ressler oscillator

Модель дискретного осциллятора Ресслера с управлением может быть представлена в виде системы (1).

Стабилизация особой точки. Стабилизируем дискретный осциллятор Ресслера так, чтобы его аттрактором была устойчивая особая точка. Для этого нужно выбрать старший характеристический показатель Ляпунова в области отрицательных значений. Выберем желаемое значение старшего ха-

рактического показателя Ляпунова $\chi_1^* < 0$. Задавая значение старшего показателя Ляпунова $\bar{\chi}_{1i} = -0,1$, вычисляется коэффициент обратной связи с использованием формулы (13):

$$l^* = (8,4509 \quad 2,1135 \quad -14,5473)$$

На рис. 2 представлен фазовый портрет замкнутой синтезированной управлением системы с начальной точкой $x_0 = [0 \quad 0 \quad 0]^T$. В данном случае аттрактором системы с обратной связью (11) является устойчивая особая точка.

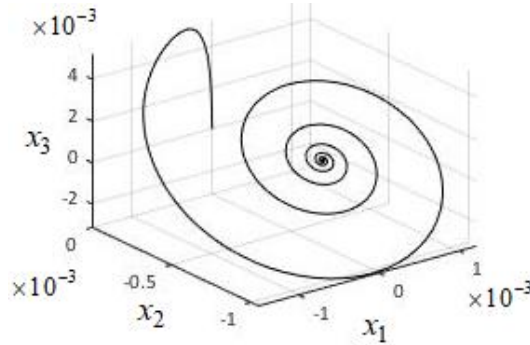


Рис. 2. Стабилизация особой точки дискретного осциллятора Ресслера
Fig. 2. Stabilization of a singular point of a discrete Ressler oscillator

Спектр характеристических показателей Ляпунова (6) системы (14) с управлением $u(t) = -l^* x(t)$ состоит из отрицательных характеристических показателей Ляпунова

$$\sigma(F - bl^*) = \{ \chi_1 = -0,11004, \chi_2 = -0,11022, \chi_3 = -19,82511 \},$$

что свидетельствует об отсутствии хаоса в системе.

Стабилизация предельного цикла. Выберем желаемое значение старшего характеристического показателя Ляпунова $\chi_1^*(G) = 0$ для того, чтобы аттрактором стабилизированной системы был предельный цикл.

Коэффициент обратной связи l^* , вычисленный по формуле (13), равен:

$$l^* = (0,0516 \quad -0,5543 \quad -0,8728).$$

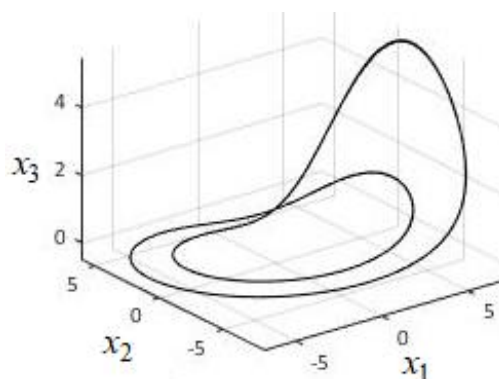


Рис. 3. Предельный цикл дискретного осциллятора Ресслера с обратной связью
Fig. 3. Limit cycle of a discrete Ressler oscillator with feedback

Спектр характеристических показателей Ляпунова замкнутой системы содержит нулевой (близкий к нулевому) и два отрицательных показателя:

$$\sigma(F - Bl^*) = \{ \chi_1 = -0,00067, \chi_2 = -0,13061, \chi_3 = -6,12021 \},$$

что свидетельствует о подавлении хаоса в системе с обратной связью и переходе к периодическому движению. На рис. 3 представлен аттрактор стабилизированной системы, являющийся предельным циклом.

Заключение

Предложена методика синтеза стабилизирующего управления для нелинейной дискретной системы, которая обеспечивает подавление хаоса в системе и формирование регулярного режима в виде особой точки или предельного цикла. Задача подавления хаоса решается за счет формирования заданного спектра характеристических показателей Ляпунова путем введения обратной связи по фазовым координатам нелинейной системы. Коэффициент обратной связи определяется с использованием метода модального управления на основе канонической формы Фробениуса. Рассмотренный пример стабилизации дискретного осциллятора Ресслера подтверждает работоспособность предложенного метода управления нелинейной системой с хаотической динамикой.

Список источников

1. Лоскутов А.Ю. Проблемы нелинейной динамики II. Подавление хаоса и управление динамическими системами // Вестник Московского университета. Сер. 3. Физика. Астрономия. 2001. № 3. С. 3–21.
2. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. М. : Едиториал УРСС, 2004. 320 с.
3. Jackson E.A., Grosu I. An OPCL control of complex dynamic system // Physica. D. 1995. V. 85. P. 1–9.
4. Ott E., Grebogi C., Yorke G. Controlling chaos // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64, № 11. P. 1196–1199.
5. Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback // Phys. Lett. A. 1992. V. 170. P. 421–428.
6. Ибатуллин А.А., Огудов А.А., Хакимов Р.А. Разработка модели нечеткого ПИД-регулятора контура управления температуры в колонне деизобутанизации // Омский научный вестник. 2017. Т. 151, № 1. С. 124–130.
7. Babu D.C., Kumar D.B.S., Sree R.P. Tuning of PID controllers for unstable systems using direct synthesis method // Int. Chem. Eng. 2017. V. 50, № 3. P. 215–241.
8. Ghaffari V. A robust control system scheme based on model predictive controller (MPC) for continuous-time systems // Opt. Control Applic. Meth. 2017. V. 38, № 6. P. 1032–1041.
9. Petre E., Selisteanu D., Roman M. Nonlinear robust adaptive control strategies for lactic fermentation process // J. Chen. Technol. Biotechnol. 2018. V. 93, № 2. P. 518–526.
10. Колесников А.А. Прикладная синергетика: основы системного синтеза. Таганрог : Изд-во ТТИ ЮФУ, 2007. 384 с.
11. Budnik S.V., Shashihin V.N. Stabilization of nonlinear systems with dynamic chaos // Automatic Control and Computer Sciences. 2021. V. 55, № 3. P. 213–221.
12. Гробман Д. Гомеоморфизм систем дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1959. Т. 128, № 5. С. 880–881.
13. Shashihin V.N., Budnik S.V. Synthesis of control for nonlinear systems // Automatic Control and Computer Sciences. 2019. V. 53, № 2. P. 97–106.
14. Адилова А.Б., Савин А.В. Удвоение и разрушение торов в дискретном аналоге системы Ресслера // Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика : тез. докл. VI конф. молодых ученых. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2011. С. 82–83.

References

1. Loskutov, A.Yu. (2001) Problems of nonlinear dynamics II. Suppression of chaos and control of dynamic systems. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 3. Fizika. Astronomiya – Moscow University Physics Bulletin*. 3. pp. 3–21. (In Russian).
2. Magnitsky, N.A. & Sidorov, S.V. (2004) *Novye metody khaoticheskoy dinamiki* [New Methods of Chaotic Dynamics]. Moscow: Editorial URSS.
3. Jackson, E.A. & Grosu, I. (1990) An OPCL control of complex dynamic system. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 85. pp. 1–9. DOI: 10.1016/0167-2789(95)00171-Y
4. Ott, E., Grebogi, C. & Yorke, G. (1990) Controlling chaos. *Physical Review Letters*. 64(11). pp. 1196–1199.
5. Pyragas, K. (1992) Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physical Letters A*. 170. pp. 421–428.
6. Ibatullin, A.A., Ogudov, A.A. & Khakimov, R.A. (2017) Application of fuzzy-logical PID-regulator temperature control loop in isostripper column. *Omskiy nauchnyy vestnik – Omsk Scientific Bulletin*. 151(1). pp. 124–130. (In Russian).
7. Babu, D.C., Kumar, D.B.S. & Sree, R.P. (2017) Tuning of PID controllers for unstable systems using direct synthesis method. *International Chemical Engineering*. 50(3). pp. 215–241. DOI: 10.1080/00194506.2016.1255570
8. Ghaffari, V. (2017) A robust control system scheme based on model predictive controller (MPC) for continuous-time systems. *Optimal Control Applications and Methods*. 38(6). pp. 1032–1041. DOI: 10.1002/oca.2310
9. Petre, E., Selisteanu, D. & Roman, M. Nonlinear robust adaptive control strategies for lactic fermentation process. *Journal of Chemical Technology & Biotechnology*. 93(2). pp. 518–526. DOI: 10.1002/jctb.5383
10. Kolesnikov, A.A. (2007) *Prikladnaya sinergetika: osnovy sistemnogo sinteza* [Applied Synergetics: Foundations of Systemic Synthesis]. Taganrog: TTI SFU.
11. Budnik, S.V. & Shashihin, V.N. (2021) Stabilization of nonlinear systems with dynamic chaos. *Automatic Control and Computer Sciences*. 55(3). pp. 213–221. DOI: 10.3103/S0146411621030032

12. Grobman, D. (1959) Gomeomorfizm sistem differentsial'nykh uravneniy [Homeomorphism of Systems of Differential Equations]. *DAN SSSR*. 128(5). pp. 880–881.
13. Shashihin, V.N. & Budnik, S.V. (2019) Synthesis of control for nonlinear systems. *Automatic Control and Computer Sciences*. 53(2). pp. 97–106. DOI: 10.3103/S0146411619020068
14. Adilova, A.B. & Savin, A.V. (2011) Udvoenie i razrushenie torov v diskretnom analoge sistemy Resslera [Doubling and destruction of tori in a discrete analogue of the Ressler system]. *Nanoelektronika, nanofotonika i nelineynaya fizika* [Nanoelectronics, Nanophotonics and Nonlinear Physics]. Abstracts of the 6th Conference of Young Scientists. Saratov: Saratov State University. pp. 82–83.

Информация об авторе:

Шашихин Владимир Николаевич – профессор, доктор технических наук, профессор Высшей школы киберфизических систем и управления Института компьютерных наук и технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (Санкт-Петербург, Россия). E-mail: shashihin@bk.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Information about the author:

Shashikhin Vladimir N. (Doctor of Technical Sciences, Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation). E-mail: shashihin@bk.ru

The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 18.01.2022; принята к публикации 30.08.2022

Received 18.01.2022; accepted for publication 30.08.2022

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELING

Научная статья

УДК 001.891.573

doi: 10.17223/19988605/60/3

**Анализ системы обслуживания с коррелированными входными потоками
и изменяемыми приоритетами****Александр Николаевич Дудин¹, Сергей Александрович Дудин², Ольга Сергеевна Дудина³**^{1, 2, 3} *Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь*¹ *dudin@bsu.by*² *dudins@bsu.by*³ *dudina@bsu.by*

Аннотация. Приоритетные системы массового обслуживания могут использоваться для решения задач проектирования и оптимизации различных реальных систем, в частности телекоммуникационных систем, систем оказания скорой медицинской помощи. Различные схемы предоставления приоритетов в последние годы дополнились динамическими приоритетами. Такие схемы предполагают изменение приоритетов запросов во время ожидания начала обслуживания. В данной работе рассматривается приоритетная система массового обслуживания, на вход которой поступает марковский входной поток разнотипных запросов. Приоритеты запросов изменяются динамически. Предусмотрена зависимость поведения запросов, находящихся в буфере, а также интенсивности обслуживания от типа запроса.

Ключевые слова: приоритетная система массового обслуживания; динамические приоритеты; оптимизация; коррелированные потоки

Для цитирования: Дудин А.Н., Дудин С.А., Дудина О.С. Анализ системы обслуживания с коррелированными входными потоками и изменяемыми приоритетами // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 60. С. 21–31. doi: 10.17223/19988605/60/3

Original article

doi: 10.17223/19988605/60/3

Analysis of a queuing system with correlated arrival flows and variable priorities**Alexander N. Dudin¹, Sergei A. Dudin¹, Olga S. Dudina¹**^{1, 2, 3} *Belarusian State University, Minsk, Belarus*¹ *dudin@bsu.by*² *dudins@bsu.by*³ *dudina@bsu.by*

Abstract. Priority queuing systems can be used to solve the problems of designing and optimizing various real systems, in particular, telecommunications systems, emergency medical systems. Various priority schemes have been supplemented in recent years with dynamic priorities. Such schemes involve changing the priorities of requests while waiting for service to begin. In this paper, we consider a priority queuing system with a Markovian arrival process of

heterogeneous requests. Request priorities change dynamically. The dependence of the behavior of requests in the buffer, as well as the intensity of service on the type of request, is provided.

Keywords: priority queuing system; dynamic priorities; optimization; correlated arrival process

For citation: Dudin, A.N., Dudin, S.A., Dudina, O.S. (2022) Analysis of a queuing system with correlated arrival flows and variable priori. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 60. pp. 21–31. doi: 10.17223/19988605/60/3

Теория массового обслуживания представляет собой хороший математический аппарат для решения проблем оптимального распределения некоторого ограниченного ресурса между конкурирующими пользователями. В большинстве существующих работ предполагается, что пользователи являются однородными, в то время как во многих реальных системах имеются потоки пользователей, разнородных по требованиям к времени обслуживания и их важности для системы. Например, в моделях функционирования приемных покоев учреждений здравоохранения пациенты делятся на требующих неотложной помощи, скорой помощи и менее срочной помощи [1]. В сетях когнитивного радио имеются потоки лицензированных пользователей и нелицензированных (когнитивных) пользователей [2, 3]. Последние подразделяются на пользователей, требующих и не требующих обслуживания в режиме реального времени, вновь поступивших и вытесненных с обслуживания и т.д. В моделях функционирования интеллектуальных транспортных систем потоки информации, критичной для безопасности движения, заведомо более важны, чем потоки информационно-развлекательные. Работа таких систем может быть описана в терминах приоритетных систем массового обслуживания.

Наряду с рассмотрением различных разновидностей статических относительных и абсолютных приоритетов в последние годы появились исследования систем с динамически изменяющимися приоритетами, в которых во время ожидания запросов пользователей в очереди некоторым детерминированным или рандомизированным образом может происходить изменение изначально назначенного пользователю приоритета. Системам с динамическими изменениями приоритетов запросов посвящены, например, работы [4–11]. Стоит отметить, что в большинстве работ делается практически нереалистичное в современных системах, включая сети телекоммуникаций, предположение о том, что потоки запросов являются стационарными пуассоновскими, в то время как во многих реальных системах потоки не являются стационарными, а имеют высокие коэффициенты корреляции и вариации длин интервалов между моментами поступления.

В данной статье исследуется однолинейная система массового обслуживания с коррелированным входным потоком разнотипных запросов с приоритетами. При выборе следующего запроса на обслуживание приоритеты являются относительными. Прерывание текущего обслуживания в случае прихода более приоритетного запроса не допускается. Система имеет конечный буфер, общий для запросов всех типов. При поступлении новых запросов приоритет является рандомизированно абсолютным. В случае заполнения буфера поступающий запрос удаляет из него запрос более низкого приоритета, если таковой имеется, с фиксированной вероятностью, зависящей от типа поступающего запроса. Поступление запросов описывается ММАР-поток (маркированный марковский входной поток) [12], позволяющим учитывать характерные черты многих реальных потоков, в частности потоков информации в современных телекоммуникационных сетях. Важнейшей особенностью рассмотренной системы является возможность повышения приоритета произвольного запроса во время его пребывания в буфере. Учтена возможность ухода запросов из системы из-за нетерпеливости.

В работе [13] была исследована система массового обслуживания с динамически изменяемыми приоритетами и коррелированным входным потоком. Однако в [13] сделано предположение, что запросы всех типов имеют одинаковые требования к обслуживанию. Данное предположение существенно упрощает исследование системы, но в то же время значительно сужает область применения модели. В реальных системах запросы разных типов могут иметь совершенно разный объем данных или работы, что приводит к разному времени обслуживания. В данной статье предусмотрена зависимость интенсивности обслуживания от типа запроса.

1. Математическая модель

Рассматривается однолинейная система массового обслуживания с конечным буфером, структура которой представлена на рис. 1.

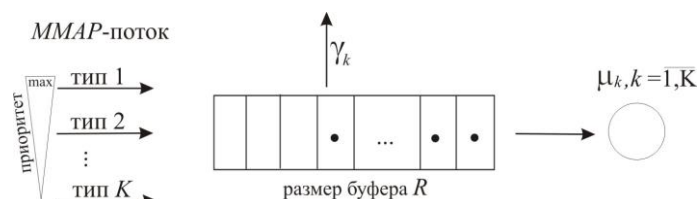


Рис. 1. Структура исследуемой системы
Fig. 1. Structure of the system under study

Входной поток запросов K типов задается ММАР-поток. Этот процесс является обобщением более известного марковского входного потока [14–18] на случай разнотипных запросов. Использование такой модели входного потока вместо широко популярной модели суперпозиции стационарных пуассоновских потоков, являющейся очень частным случаем ММАР-потока, позволяет учитывать флуктуацию мгновенной интенсивности потока, корреляцию длин последовательных интервалов между моментами поступления и их вариацию.

Запросы $k, k = \overline{1, K}$, типов поступают в ММАР-потоке, который определяется неприводимой цепью Маркова $\gamma_t, t \geq 0$, с непрерывным временем и конечным пространством состояний $\{1, 2, \dots, W\}$, а также набором квадратных матриц $D_k, k = \overline{0, K}$. Обозначим через λ среднюю интенсивность поступления запросов, а через λ_k среднюю интенсивность поступления запросов типа $k, k = \overline{1, K}$. Формулы для нахождения данных величин, а также таких характеристик ММАР-потока, как коэффициенты корреляции и вариации, приведены в [18].

Если в момент поступления запроса любого типа в систему прибор свободен, то этот запрос сразу начинает обслуживание. Для хранения запросов различных типов, поступающих, когда прибор занят, в системе имеется буфер емкостью R . Если прибор занят, но буфер не заполнен, запрос любого типа помещается в буфер. Конкретного ограничения на число запросов каждого типа, находящихся в буфере одновременно, нет, но общее количество запросов, находящихся в буфере, не должно превышать его емкость R . Очевидно, что в системе одновременно может находиться не более $R + 1$ запросов (один запрос на обслуживании и R запросов в буфере).

Запросы разных типов имеют разные приоритеты. Считаем, что приоритет типов запросов уменьшается с увеличением номера типа. То есть запросы первого типа имеют наивысший приоритет среди всех типов запросов, а запросы типа K имеют самый низкий приоритет. Приоритет определяет порядок приема запроса в систему, когда буфер заполнен, и порядок выбора запроса из буфера на обслуживание. При выборе запроса из буфера на обслуживание приоритет предполагается *относительным*. Если в момент завершения обслуживания в буфере присутствуют запросы первого типа, то один из этих запросов начинает обслуживание. Запрос типа $k, k \geq 2$, может начать обслуживание, только если в буфере отсутствуют запросы типов $1, 2, \dots, k-1$. Обслуживание любого запроса не может быть прервано в случае поступления запроса, имеющего более высокий приоритет.

Предполагается также, что при принятии в систему запросы типа $k, k = \overline{1, K}$, имеют рандомизированно *абсолютный* приоритет над запросами типа $l, l = \overline{k+1, K}$. То есть если в момент прихода запроса типа k прибор занят, число запросов в буфере равно R и нет запросов типа $l, l = \overline{k+1, K}$, то поступивший запрос покидает систему (теряется). Если же в буфере есть запросы типа $l, l = \overline{k+1, K}$, то поступивший запрос с вероятностью q_k принимается в буфер, а один из запросов из буфера с самым низким приоритетом теряется. С дополнительной вероятностью $1 - q_k$ поступивший запрос

покидает систему, несмотря на наличие в буфере запросов с более низким приоритетом. Такая рандомизация имеет целью уменьшить потери низкоприоритетных запросов. Считаем, что во время пребывания в буфере запросы типа $k, k = \overline{2, K}$, могут увеличить свой приоритет. Полагаем, что после экспоненциально распределенного с параметром α_k времени запрос типа k становится запросом типа l с вероятностью $p_{k,l}, l = \overline{1, k-1}, \sum_{l=1}^{k-1} p_{k,l} = 1, k = \overline{2, K}$.

Запросы, находящиеся в буфере, могут проявлять нетерпеливость и покидать систему без обслуживания независимо от других запросов, если время ожидания слишком велико. Запрос типа k покидает систему без обслуживания по истечении экспоненциально распределенного с параметром γ_k времени ожидания, $\gamma_k \geq 0$. Предполагается, что если запрос меняет приоритет, то отсчет его времени «терпеливости» начинается с самого начала с параметром, соответствующим новому приоритету.

Время обслуживания запроса типа $k, k = \overline{1, K}$, прибором имеет экспоненциальное распределение с параметром $\mu_k, 0 < \mu_k < \infty$. Если в момент окончания обслуживания в буфере есть запросы, то обслуживание начинает первый запрос, имеющий наивысший приоритет. В противном случае прибор простаивает до следующего момента поступления запроса.

2. Процесс изменения состояний системы

Поведение рассматриваемой системы можно описать регулярной неприводимой цепью Маркова с непрерывным временем $\xi_t = \{i_t, m_t, v_t, n_t^{(1)}, \dots, n_t^{(K)}\}, t \geq 0$, где $i_t, i_t = \overline{0, R+1}$ – число запросов в системе; $m_t, m_t = \overline{1, K}$ – тип обслуживаемого запроса; $v_t, v_t = \overline{1, W}$ – состояние управляющего процесса ММАР-потока; $n_t^{(k)}$ – число запросов типа k в буфере, $n_t^{(k)} = \overline{0, \max\{0, i_t - 1\}}$, $\sum_{l=1}^K n_t^{(l)} = \max\{0, i_t - 1\}, k = \overline{1, K}$, в момент времени t .

Цепь Маркова $\xi_t, t \geq 0$, является неприводимой и имеет конечное пространство состояний. Следовательно, стационарные вероятности состояний системы существуют при любых значениях параметров системы:

$$\pi(i, m, v, n^{(1)}, \dots, n^{(K)}) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{i_t = i, m_t = m, v_t = v, n_t^{(1)} = n^{(1)}, \dots, n_t^{(K)} = n^{(K)}\}, i = \overline{0, R+1},$$

$$m = \overline{1, K}, v = \overline{1, W}, n^{(k)} = \overline{0, \max\{0, i - 1\}}, \sum_{l=1}^K n^{(l)} = \max\{0, i - 1\}, k = \overline{1, K}.$$

Из этих вероятностей, перенумерованных в обратном лексикографическом порядке компонент $n^{(1)}, \dots, n^{(K)}$, сформируем вектор-строки $\pi(i, m, v), v = \overline{1, W}$, и векторы π_i следующим образом:

$$\pi(i, m) = (\pi(i, m, 1), \pi(i, m, 2), \dots, \pi(i, m, W)), m = \overline{1, K}, \pi_i = (\pi(i, 1), \pi(i, 2), \dots, \pi(i, K)), i = \overline{2, R+1},$$

$$\pi_0 = (\pi(0, 0, 1, 0), \pi(0, 0, 2, 0), \dots, \pi(0, 0, W, 0)),$$

$$\pi(1, m) = (\pi(1, m, 1, 0), \pi(1, m, 2, 0), \dots, \pi(1, m, W, 0)), \pi_1 = (\pi(1, 1), \pi(1, 2), \dots, \pi(1, K)).$$

Векторы π_i удовлетворяют следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{R+1})Q = 0, (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{R+1})e = 1,$$

где Q – инфинитезимальный генератор цепи Маркова $\xi_t, t \geq 0$, e – вектор-столбец, состоящий из единиц, 0 – вектор-строка, состоящая из нулей. Для решения данной системы может быть применен, например, алгоритм, описанный в [17].

Теорема 1. Инфинитезимальный генератор $Q = (Q_{i,j})_{i,j=\overline{0, R+1}}$ имеет блочно-трехдиагональную структуру, где ненулевые блоки $Q_{i,j}, |i-j| \leq 1$, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 Q_{0,0} &= D_0, \quad Q_{1,1} = I_K \otimes D_0 - C \otimes I_W, \quad Q_{i,i} = I_K \otimes D_0 \otimes I_{T_{i-1}} - C \otimes I_{WT_{i-1}} + I_{KW} \otimes (Y_{i-1} + \hat{I}_{i-1}), i = \overline{2, R}, \\
 Q_{R+1, R+1} &= I_K \otimes D_0 \otimes I_{T_R} - C \otimes I_{WT_R} + I_{KW} \otimes (Y_R + \hat{I}_R) + I_K \otimes \sum_{k=1}^K \left(D_k \otimes \left[(1 - q_k) I_{T_R} + q_k \hat{E}_k \right] \right), \\
 Q_{0,1} &= \sum_{k=1}^K (\mathbf{h}_k \otimes D_k), \quad Q_{i,i+1} = I_K \otimes \sum_{k=1}^K (D_k \otimes A_{i-1}(\mathbf{h}_k)), i = \overline{1, R}, \\
 Q_{1,0} &= C \mathbf{e} \otimes I_W, \quad Q_{i,i-1} = C \otimes I_W \otimes E_{i-1}^- + I_{KW} \otimes L_{i-1}(\gamma), i = \overline{2, R+1}.
 \end{aligned}$$

Здесь I_i – единичная матрица размера i ; $\otimes$ – символ Кронекера произведения матриц [18]; $L_i(\gamma), i = \overline{1, R}$, – матрица, элементы которой определяют интенсивности переходов, когда запрос покидает буфер из-за нетерпеливости; $Y_i = Y_i(H), i = \overline{1, R}$, – матрица, элементы которой определяют интенсивности переходов, происходящих, когда запрос повышает свой приоритет. Матрица H размера $K \times K$ определяет интенсивность возрастания приоритетов и имеет все нулевые элементы, кроме элементов $(H)_{i,j} = p_{i,j} \alpha_i, i = \overline{2, K}, j = \overline{1, i-1}$; $A_i(\mathbf{h}_k), i = \overline{0, R-1}$, – матрица, элементы которой определяют вероятности перехода в момент поступления в систему нового запроса типа k , когда в буфере находится $i, 0 \leq i < R$, запросов (в буфере есть место для поступившего запроса); вектор $\mathbf{h}_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_{K-k})$ задает вероятность того, что поступивший в систему запрос имеет тип $k, k = \overline{1, K}$. $\hat{E}_k, k = \overline{1, K}$, – квадратная матрица размера T_R , элементы которой определяют вероятности перехода в момент, когда запрос типа k поступает в систему, в буфере есть R запросов и поступивший запрос пытается вытеснить из буфера запрос с более низким приоритетом; $E_i^-, i = \overline{1, R}$, – матрица, элементы которой определяют вероятности перехода в момент выбора запроса с максимальным (из присутствующих в системе в данный момент) приоритетом для обслуживания; $\hat{I}_i = -\text{diag}\{Y_i \mathbf{e} + L_i \mathbf{e}\}, i = \overline{1, R}$; $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_K)$; $T_i = \frac{(i+K-1)!}{i!(K-1)!}, i = \overline{1, R}$; $C = \text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K\}$. Формулы для вычисления матриц $Y_i(H), L_i(\gamma), E_i^-, i = \overline{1, R}, A_i(\mathbf{h}_k), i = \overline{0, R-1}, \hat{E}_k, k = \overline{1, K}$, приведены в [19].

Доказательство основано на анализе всех возможных переходов цепи Маркова за бесконечно малый интервал времени. Поступление и завершение обслуживания двух и более запросов за бесконечно малый интервал времени невозможны, поэтому блоки $Q_{i,j}, |i-j| > 1$, являются нулевыми матрицами.

Диагональные элементы матриц $Q_{i,i}, i = \overline{0, R+1}$, отрицательны, а модули этих элементов определяют суммарную интенсивность выхода цепи из соответствующего состояния. Если система пуста ($i=0$), то цепь Маркова $\xi_t, t \geq 0$, может выйти из своего состояния только тогда, когда: (а) управляющий процесс ММАР-потока совершает выход из текущего состояния; интенсивности таких выходов определяются модулями диагональных элементов матрицы D_0 . Если $i=1$, т.е. запрос находится на обслуживании, а буфер пуст, то цепь Маркова $\xi_t, t \geq 0$, может выйти из своего состояния только в случае (а), описанном выше; (б) в случае окончания обслуживания. Интенсивности таких выходов определяются модулем диагональных элементов матрицы $I_K \otimes D_0$ в случае (а) и матрицы $C \otimes I_W$ в случае (б). Если $i = \overline{2, R}$, прибор занят и в буфере есть хотя бы одно свободное место, то цепь Маркова $\xi_t, t \geq 0$, может выйти из своего состояния по тем же причинам, что и в предыдущем случае (интенсивности таких переходов определяются модулями диагональных элементов матриц $I_K \otimes D_0 \otimes I_{T_{i-1}}$ для случая (а) и матриц $C \otimes I_{WT_{i-1}}$ для случая (б)). Также возможно, что (в) какой-то запрос из буфера может изменить свой приоритет или покинуть буфер из-за нетерпеливости, интенсивности таких переходов задаются модулями диагональных элементов матриц $I_{KW} \otimes \hat{I}_{i-1}$. Если

$i = R + 1$, то прибор занят и буфер заполнен полностью. Значит, цепь Маркова ξ_t , $t \geq 0$, может покинуть свое состояние по причинам (а), (б) и (в) (интенсивности таких переходов определяются модулями диагональных элементов матриц $I_K \otimes D_0 \otimes I_{T_R}$, $C \otimes I_{WT_R}$ и $I_{KW} \otimes \hat{I}_R$ соответственно). Также возможны ситуации (г), когда приходит запрос типа k и уходит из системы, несмотря на возможное наличие в буфере запросов с более низким приоритетом, или (д) – этот запрос пытается попасть в буфер и вытеснить запрос с самым низким приоритетом. Интенсивности таких выходов определяются диагональными элементами матрицы $\sum_{k=1}^K (1 - q_k)(I_K \otimes D_k \otimes I_{T_R})$ в случае (г) и матрицы $\sum_{k=1}^K q_k (I_K \otimes D_k \otimes \hat{E}_k)$ в случае (д).

Недиагональные элементы матриц $Q_{i,j}$, $i = \overline{0, R+1}$, неотрицательны и определяют интенсивности переходов цепи Маркова ξ_t , $t \geq 0$, не приводящие к изменению числа запросов i в системе. Такими переходами являются: переходы управляющего процесса ММАР-потока без генерации запроса (интенсивности определяются недиагональными элементами матрицы D_0 , если $i = 0$, матрицы $I_K \otimes D_0$ при $i = 1$, матрицы $I_K \otimes D_0 \otimes I_{T_{i-1}}$ при $i = \overline{2, R+1}$); переходы из-за смены приоритета некоторым запросом в буфере (интенсивности определяются элементами матрицы $I_{KW} \otimes Y_{i-1}$, $i = \overline{2, R+1}$); переходы, когда запрос при поступлении застаёт заполненный буфер и покидает систему или вытесняет запрос с наименьшим приоритетом из буфера (интенсивности определяются недиагональными элементами матрицы $\sum_{k=1}^K (I_K \otimes D_k) \otimes [(1 - q_k)I_{T_R} + q_k \hat{E}_k]$, $i = R + 1$). Таким образом, после некоторых алгебраических преобразований с учетом приведенных выше объяснений мы получаем вид диагональных блоков $Q_{i,j}$, $i = \overline{0, R+1}$, генератора Q .

Элементы матриц $Q_{i,i+1}$, $i = \overline{0, R}$, неотрицательны и определяют интенсивности переходов цепи Маркова ξ_t , $t \geq 0$, приводящих к увеличению количества запросов в системе на единицу. Такие переходы происходят, когда в систему поступает запрос любого типа. Интенсивности этих переходов определяются матрицей $\sum_{k=1}^K (\mathbf{h}_k \otimes D_k)$, если система пуста, и матрицей $\sum_{k=1}^K I_K \otimes D_k \otimes A_{i-1}(\mathbf{h}_k)$, если в системе находится i , $i = \overline{1, R}$, запросов.

Элементы матриц $Q_{i,i-1}$, $i = \overline{1, R+1}$, неотрицательны и определяют интенсивности переходов цепи Маркова ξ_t , $t \geq 0$, приводящих к уменьшению количества запросов в системе на единицу. Такое уменьшение может произойти из-за (а) успешного обслуживания запроса или (б) ухода запроса из буфера из-за нетерпеливости. В случае (а) интенсивности переходов задаются матрицей $C \otimes I_W$, если буфер пуст, и матрицей $C \otimes I_W \otimes E_{i-1}^-$, иначе. В случае (б) интенсивности переходов определены только для случая $i = \overline{2, R+1}$, и задаются элементами матриц $I_{KW} \otimes L_{i-1}(\gamma)$. Теорема доказана.

3. Характеристики производительности

Среднее число запросов в системе вычисляется по формуле $L = \sum_{i=1}^{R+1} i \pi_i \mathbf{e}$. Среднее число запросов в буфере вычисляется по формуле $N_{buf} = \sum_{i=2}^{R+1} (i-1) \pi_i \mathbf{e}$. Среднее число запросов типа k в буфере вычисляется как $N_{buf}^{(k)} = \sum_{i=2}^{R+1} \pi_i (I_{KW} \otimes L_{i-1}(\mathbf{h}_k)) \mathbf{e}$, $k = \overline{1, K}$. Средняя интенсивность выходного потока успешно обслуженных запросов определяется как $\lambda_{serv} = \sum_{i=1}^{R+1} \sum_{m=1}^K \mu_m \pi(i, m) \mathbf{e}$. Средняя интенсивность выходного потока запросов, которые покинули буфер из-за нетерпеливости, вычисляется по формуле

$\lambda_{leave} = \sum_{i=2}^{R+1} \pi_i (I_{KW} \otimes L_{i-1}(\gamma)) \mathbf{e}$. Вероятность потери произвольного запроса находится как $P_{loss} = 1 - \frac{\lambda_{serv}}{\lambda}$. Вероятность потери произвольного запроса из-за нетерпеливости находится как $P_{leave-loss} = \frac{\lambda_{leave}}{\lambda}$. Интенсивность выходного потока запросов типа k , которые покинули буфер из-за нетерпеливости, определяется как $\lambda_{leave}^{(k)} = \sum_{i=2}^{R+1} \pi_i (I_{KW} \otimes L_{i-1}(\gamma_k)) \mathbf{e} = \gamma_k N_{buf}^{(k)}$, $k = \overline{1, K}$, где γ_k – вектор-строка размера K со всеми нулевыми элементами, кроме k -го, который равен γ_k . Средняя интенсивность переходов запросов типа l , $l = \overline{k+1, K}$, в тип k , $k = \overline{1, K-1}$, вычисляется как $\lambda_{inc}^{(k)} = \sum_{l=k+1}^K \alpha_l N_{buf}^{(l)} p_{l,k}$. Вероятность потери произвольного запроса типа k из-за нетерпеливости вычисляется по формуле $P_{leave-loss}^{(k)} = \frac{\lambda_{leave}^{(k)}}{\lambda_k + \lambda_{inc}^{(k)}}$, $k = \overline{1, K}$. Здесь предполагается, что $\lambda_{inc}^{(K)} = 0$. Вероятность потери произвольного запроса типа k по прибытии без попытки вытеснить запрос с более низким приоритетом равна $P_{loss-no-push}^{(k)} = (1 - q_k) \lambda_k^{-1} \pi_{R+1} (I_K \otimes D_k \otimes I_{T_R}) \mathbf{e}$, $k = \overline{1, K}$. Вероятность потери произвольного запроса типа k по прибытии, несмотря на неудачную попытку вытеснить запрос с более низким приоритетом, равна $P_{loss-push}^{(k)} = q_k \lambda_k^{-1} \pi_{R+1} (I_K \otimes D_k \otimes \tilde{E}_k) \mathbf{e}$, $k = \overline{1, K}$, где матрица $\tilde{E}_k$ имеет все нулевые элементы, кроме диагональных элементов, которые равны диагональным элементам матрицы $\hat{E}_k$. Вероятность потери произвольного запроса по прибытии равна $P_{arr-loss} = \lambda^{-1} \sum_{k=1}^K \lambda_k (P_{loss-no-push}^{(k)} + P_{loss-push}^{(k)})$. Вероятность потери произвольного запроса типа k по прибытии равна $P_{arr-loss}^{(k)} = P_{loss-no-push}^{(k)} + P_{loss-push}^{(k)}$, $k = \overline{1, K}$. Вероятность того, что запрос произвольного типа k по прибытии встретит полный буфер и вытеснит запрос с более низким приоритетом, равна $P_{push-out}^{(k)} = q_k \lambda_k^{-1} \pi_{R+1} (I_K \otimes D_k \otimes (\hat{E}_k - \tilde{E}_k)) \mathbf{e}$, $k = \overline{1, K}$. Вероятность того, что произвольный запрос по прибытии встретит полный буфер и вытеснит запрос с более низким приоритетом, равна $P_{push-out} = \lambda^{-1} \sum_{k=1}^K q_k \pi_{R+1} (I_K \otimes D_k \otimes (\hat{E}_k - \tilde{E}_k)) \mathbf{e}$.

4. Численный эксперимент

Исследуем влияние коэффициента корреляции во входном потоке на основные характеристики производительности исследуемой системы. Рассмотрим четыре ММАР-потока с тремя типами запросов $K=3$, которые определяются матрицами D_k , $k = \overline{0, 3}$, имеют одинаковую среднюю интенсивность поступления запросов $\lambda = 20$ и одинаковые интенсивности поступления запросов каждого типа $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 10$, но различные коэффициенты корреляции.

Первый ММАР имеет $W=1$, коэффициент корреляции $c_{cor} = 0$, коэффициент вариации $c_{var} = 1$ и определяется матрицами $D_0 = -20$, $D_1 = 4$, $D_2 = 6$, $D_3 = 10$.

Второй ММАР имеет коэффициент корреляции $c_{cor} = 0,1$ и характеризуется матрицами

$$D_0 = \begin{pmatrix} -53,3383 & 2,3544 & 2,4692 \\ 2,7708 & -9,78638 & 1,6916 \\ 2,7292 & 1,6576 & -6,54159 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 9,2375 & 0,29047 & 0,17496 \\ 0,307359 & 0,69271 & 0,06471 \\ 0,22816 & 0,03399 & 0,1688 \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 13,8563 & 0,435719 & 0,26244 \\ 0,461039 & 1,03908 & 0,09707 \\ 0,342239 & 0,05099 & 0,2532 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 23,0938 & 0,72619 & 0,43739 \\ 0,768399 & 1,7318 & 0,1618 \\ 0,57039 & 0,08499 & 0,42199 \end{pmatrix}.$$

Третий ММАР имеет коэффициент корреляции $c_{cor} = 0,2$ и характеризуется матрицами

$$D_0 = \begin{pmatrix} -62,9307 & 2,4248 & 2,3696 \\ 2,0712 & -9,15879 & 1,8716 \\ 2,3884 & 2,2612 & -7,83879 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 11,3201 & 0,24168 & 0,06543 \\ 0,08567 & 0,825599 & 0,13192 \\ 0,06863 & 0,15832 & 0,41087 \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 16,9802 & 0,36251 & 0,09815 \\ 0,12852 & 1,2384 & 0,19788 \\ 0,10296 & 0,23748 & 0,61631 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 28,3004 & 0,60419 & 0,1636 \\ 0,2142 & 2,064 & 0,32979 \\ 0,1716 & 0,39579 & 1,0272 \end{pmatrix}.$$

Четвертый ММАР имеет коэффициент корреляции $c_{cor} = 0,3$ и характеризуется матрицами

$$D_0 = \begin{pmatrix} -102,15 & 1,57306 & 1,44467 \\ 0,58074 & -8,928 & 0,79992 \\ 1,18389 & 1,54946 & -7,0097 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 19,3919 & 0,37348 & 0,06103 \\ 0,02727 & 1,33332 & 0,14886 \\ 0,00719 & 0,20438 & 0,64370 \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 29,0879 & 0,56023 & 0,09157 \\ 0,040916 & 1,99998 & 0,2233 \\ 0,010799 & 0,306572 & 0,96553 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 48,4798 & 0,93376 & 0,15256 \\ 0,06819 & 3,3333 & 0,37216 \\ 0,01784 & 0,51094 & 1,60925 \end{pmatrix}.$$

Три последних входных потока имеют коэффициент вариации $c_{var} = 4$.

Считаем, что $\mu_1 = 100, \mu_2 = 70, \mu_3 = 60, \gamma_k = 0,1, k = \overline{1,3}, \alpha_2 = \alpha_3 = 0,2, q_1 = q_2 = 0,5, p_{2,1} = 1, p_{3,1} = p_{3,2} = 0,5$.

Будем изменять размерность буфера R на отрезке $[1, 50]$. На рис. 2–4 приведены зависимости основных характеристик производительности системы для четырех ММАР-потоков с различными коэффициентами корреляции, приведенных выше.

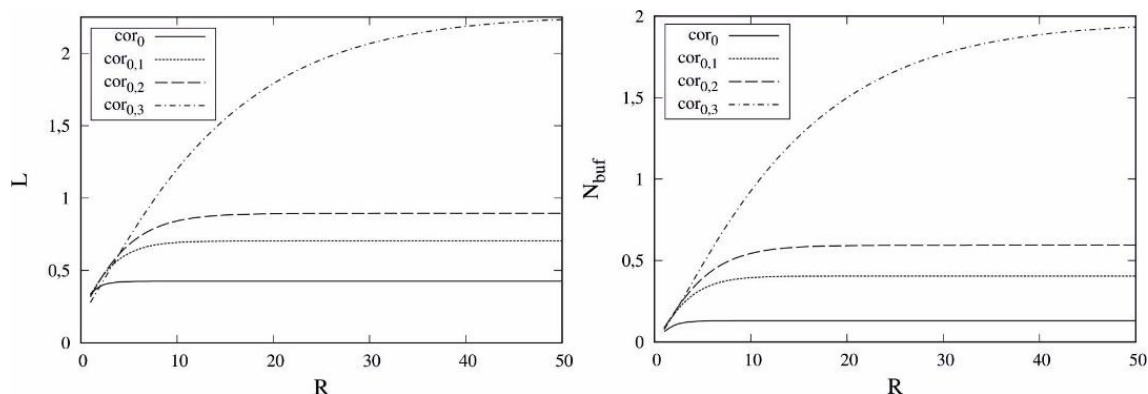


Рис. 2. Среднее число запросов L в системе и N_{buf} в буфере при различных значениях размерности буфера R
Fig. 2. The average number of requests L in the system and N_{buf} in the buffer for different values of the buffer size R

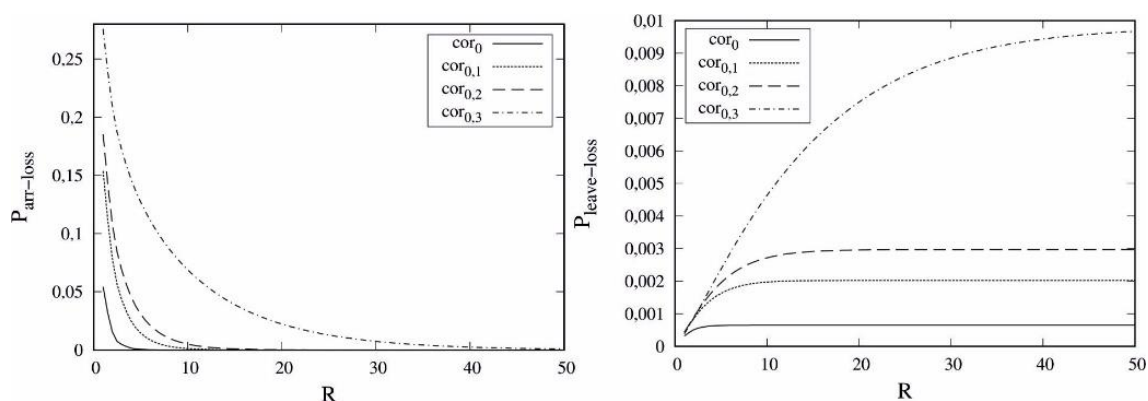


Рис. 3. Вероятности потери $P_{arr-loss}$ и $P_{leave-loss}$ при различных значениях размерности буфера R
Fig. 3. The loss probabilities $P_{arr-loss}$ and $P_{leave-loss}$ for different values of the buffer size R

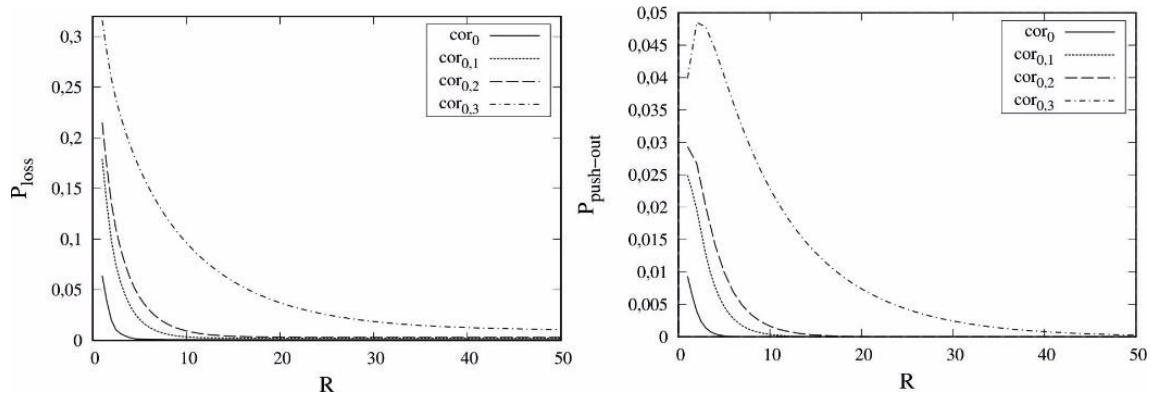


Рис. 4. Вероятности потери P_{loss} и $P_{push-out}$ при различных значениях размерности буфера R

Fig. 4. The loss probabilities P_{loss} and $P_{push-out}$ for different values of the buffer size R

На основании приведенных графиков можно сделать вывод, что увеличение емкости буфера приводит к увеличению среднего числа запросов как в самом буфере N_{buf} , так и системе в целом L . Это происходит из-за того, что при увеличении емкости буфера очевидно уменьшается число запросов, потерянных на входе в систему из-за заполненности буфера, что подтверждается графиком для вероятности $P_{arr-loss}$. Достаточно предсказуемо, что чем больше запросов в буфере, тем большее их число уходит из системы из-за нетерпеливости, так и не дождавшись обслуживания, поэтому вероятность $P_{leave-loss}$ увеличивается с ростом емкости буфера R . Поскольку интенсивность λ_{leave} выходного потока запросов, которые покинули буфер из-за нетерпеливости, можно выразить через вероятность $P_{leave-loss}$, то поведение этих характеристик совпадает. Очевидно, что с ростом R вероятность $P_{push-out}$ должна уменьшаться, так как уменьшается вероятность прихода запроса в полную систему. Однако, как видно из рис. 4, поведение вероятности $P_{push-out}$ для случая $c_{cor} = 0,3$ не является монотонным. Это объясняется тем, что при малой емкости буфера при ее увеличении растет число запросов с низким приоритетом в буфере, принимаемых в систему, поэтому возрастает вероятность того, что произвольный запрос на входе встретит полный буфер и вытеснит запрос с более низким приоритетом. При малых R , например $R = 1$, велика вероятность, что все места в буфере занимают запросы с наивысшим приоритетом, которые не могут быть выбиты.

Можно также наблюдать, что при фиксированном значении емкости буфера R рост коэффициента корреляции во входном потоке негативно влияет на процесс функционирования системы и приводит к ухудшению качества обслуживания в ней. Отметим, что для трех ММАР-потоков с коэффициентами корреляции 0, 0,1 и 0,2 значения характеристик L , N_{buf} , P_{loss} и $P_{leave-loss}$ стабилизируются, а значения вероятностей потерь $P_{arr-loss}$ и $P_{push-out}$ приближаются к нулю при значениях R , больших чем 8, 14 и 21 соответственно. При этом дальнейшее увеличение размера буфера не приводит к улучшению качества обслуживания, поскольку для приведенных значений R емкость буфера достаточна, чтобы запросы практически не терялись на входе ($P_{arr-loss}$ и $P_{push-out}$ принимают значения, близкие к нулю), а потеря запросов из системы возможна только из-за их нетерпеливости (P_{loss} практически совпадает с $P_{leave-loss}$). Дальнейшее улучшение качества обслуживания возможно теперь только за счет увеличения интенсивности обслуживания. Отметим также, что для ММАР-потока с коэффициентом корреляции 0,3 требуется гораздо большая емкость буфера R , чтобы минимизировать вероятности потерь $P_{arr-loss}$ и $P_{push-out}$. Таким образом, проведенные численные эксперименты доказывают важность учета коэффициента корреляции во входном потоке при оценке качества функционирования системы.

Заключение

Исследована приоритетная система массового обслуживания с маркированным марковским входным потоком запросов. Запросы различаются интенсивностью обслуживания и их важностью для системы. Приоритет запроса меняется динамически. Предусмотрен уход запросов из буфера из-за нетерпеливости. Получено компактное описание генератора цепи Маркова, задающей динамику ис-

следуемой системы, и применены численно устойчивые методы для решения системы уравнений равновесия для векторов стационарных вероятностей состояний цепи. Получены аналитические зависимости характеристик производительности от этих векторов. Численно показана зависимость данных характеристик от емкости буфера. Проиллюстрирована важность учета коэффициента корреляции во входном потоке при оценке производительности системы.

Список источников

1. Elalouf A., Wachtel G. Queueing Problems in Emergency Departments: A Review of Practical Approaches and Research Methodologies // *Operations Research Forum*. 2022. V. 3, № 1. P. 1–46.
2. Maharaj B.T., Awoyemi B.S. *Developments in Cognitive Radio Networks: Future Directions for Beyond 5G*. Springer Nature, 2021.
3. Goel S., Kulshrestha R. Queueing based spectrum management in cognitive radio networks with retrial and heterogeneous service classes // *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*. 2022. V. 13. P. 2429–2437.
4. Cao P., Xie J. Optimal control of a multiclass queueing system when customers can change types // *Queueing Systems*. 2016. V. 82, № 3. P. 285–313.
5. Xie J. et al. Determining the conditions for reverse triage in emergency medical services using queueing theory // *International Journal of Production Research*. 2016. V. 54, № 11. P. 3347–3364.
6. Fajardo V.A., Drekić S. Waiting time distributions in the preemptive accumulating priority queue // *Methodology and Computing in Applied Probability*. 2017. V. 19, № 1. P. 255–284.
7. Mojalal M., Stanford D.A., Caron R.J. The lower-class waiting time distribution in the delayed accumulating priority queue // *INFOR: Information Systems and Operational Research*. 2020. V. 58, № 1. P. 60–86.
8. Stanford D.A., Taylor P., Ziedins I. Waiting time distributions in the accumulating priority queue // *Queueing Systems*. 2014. V. 77, № 3. P. 297–330.
9. Xie J. et al. Performance analysis of service systems with priority upgrades // *Annals of Operations Research*. 2017. V. 253, № 1. P. 683–705.
10. Cildoz M., Ibarra A., Mallor F. Accumulating priority queues versus pure priority queues for managing patients in emergency departments // *Operations Research for Health Care*. 2019. V. 23. Art. 100224.
11. Dudin A. et al. Analysis of single-server multi-class queue with unreliable service, batch correlated arrivals, customers impatience, and dynamical change of priorities // *Mathematics*. 2021. V. 9, № 11. Art. 1257.
12. He Q.M. Queues with marked customers // *Advances in Applied Probability*. 1996. V. 28, № 2. P. 567–587.
13. Lee S. et al. A Priority Queue with Many Customer Types, Correlated Arrivals and Changing Priorities // *Mathematics*. 2020. V. 8, № 8. Art. 1292.
14. Chakravarthy S.R. et al. The batch Markovian arrival process: a review and future work // *Advances in Probability Theory and Stochastic Processes*. 2001. V. 1. P. 21–49.
15. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process // *Communications in Statistics. Stochastic Models*. 1991. V. 7, № 1. P. 1–46.
16. Dudin A., Klimenok V.I., Vishnevsky V.M. *The theory of queueing systems with correlated flows*. Cham : Springer, 2020.
17. Dudin S.A., Dudina O.S. Call center operation model as a MAP/PH/N/R–N system with impatient customers // *Problems of Information Transmission*. 2011. V. 47, № 4. P. 364–377.
18. Graham A. *Kronecker products and matrix differentiation with applications*. Chichester : Ellis Horwood, 1981.

References

1. Elalouf, A. & Wachtel G. (2022) Queueing Problems in Emergency Departments: A Review of Practical Approaches and Research Methodologies. *Operations Research Forum*. Springer International Publishing. 3(1). pp. 1–46. DOI: 10.1007/s43069-021-00114-8
2. Maharaj, B.T., Awoyemi, B.S. (2021) *Developments in Cognitive Radio Networks: Future Directions for Beyond 5G*. Springer Nature.
3. Goel, S. & Kulshrestha, R. (2022) Queueing based spectrum management in cognitive radio networks with retrial and heterogeneous service classes. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*. 2429–2437. DOI: 10.1007/s12652-021-03442-z
4. Cao, P. & Xie, J. (2016) Optimal control of a multiclass queueing system when customers can change types. *Queueing Systems*. 82(3). pp. 285–313. DOI: 10.1007/s11134-015-9466-6
5. Xie, J. et al. (2016) Determining the conditions for reverse triage in emergency medical services using queueing theory. *International Journal of Production Research*. 54(11). pp. 3347–3364. DOI: 10.1080/00207543.2015.1109718
6. Fajardo, V.A. & Drekić, S. (2017) Waiting time distributions in the preemptive accumulating priority queue. *Methodology and Computing in Applied Probability*. 19(1). pp. 255–284. DOI: 10.1007/s11009-015-9476-1
7. Mojalal, M., Stanford, D.A. & Caron, R.J. (2020) The lower-class waiting time distribution in the delayed accumulating priority queue. *INFOR: Information Systems and Operational Research*. 58(1). pp. 60–86. DOI: 10.1080/03155986.2019.1624473

8. Stanford, D.A., Taylor, P. & Ziedins, I. (2014) Waiting time distributions in the accumulating priority queue. *Queueing Systems*. 77(3). pp. 297–330. DOI: 10.1007/s11134-013-9382-6
9. Xie, J. et al. (2017) Performance analysis of service systems with priority upgrades. *Annals of Operations Research*. 253(1). pp. 683–705. DOI: 10.1007/s10479-016-2370-6
10. Cildoz, M., Ibarra, A. & Mallor, F. (2019) Accumulating priority queues versus pure priority queues for managing patients in emergency departments. *Operations Research for Health Care*. 23. 100224. DOI: 10.1016/j.orhc.2019.100224
11. Dudin, A. et al. (2021) Analysis of single-server multi-class queue with unreliable service, batch correlated arrivals, customers impatience, and dynamical change of priorities. *Mathematics*. 9(11). pp. 1257. DOI: 10.3390/math9111257
12. He, Q.M. (1996) Queues with marked customers. *Advances in Applied Probability*. 28(2). pp. 567–587.
13. Lee, S. et al. (2020) A Priority Queue with Many Customer Types, Correlated Arrivals and Changing Priorities. *Mathematics*. 8(8). pp. 1292. DOI: 10.3390/math8081292
14. Chakravathy, S.R. et al. (2001) The batch Markovian arrival process: a review and future work. *Advances in Probability Theory and Stochastic Processes*. 1. pp. 21–49.
15. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process. *Communications in Statistics. Stochastic Models*. 7(1). pp. 1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174
16. Dudin, A., Klimenok, V.I. & Vishnevsky, V.M. (2020) *The theory of queueing systems with correlated flows*. Cham: Springer. pp. 63–392.
17. Dudin, S.A. & Dudina, O.S. (2011) Call center operation model as a MAP/PH/N/R– N system with impatient customers. *Problems of Information Transmission*. 47(4). pp. 364–377. DOI: 10.1134/S0032946011040053
18. Graham, A. (1981) *Kronecker products and matrix differentiation with applications*. Chichester: Ellis Horwood.

Информация об авторах:

Дудин Александр Николаевич – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий НИЛ прикладного вероятностного анализа Белорусского государственного университета (Минск, Республика Беларусь); директор Центра прикладного вероятностного анализа Института прикладной математики и телекоммуникаций Российского университета дружбы народов (Москва, Россия). E-mail: dudin@bsu.by

Дудин Сергей Александрович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИЛ прикладного вероятностного анализа Белорусского государственного университета (Минск, Республика Беларусь). E-mail: dudins@bsu.by

Дудина Ольга Сергеевна – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИЛ прикладного вероятностного анализа Белорусского государственного университета (Минск, Республика Беларусь). E-mail: dudina@bsu.by

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Dudin Alexander N. (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Belarusian State University, Minsk, Belarus). E-mail: dudin@bsu.by

Dudin Sergei A. (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Belarusian State University, Minsk, Belarus). E-mail: dudins@bsu.by

Dudina Olga S. (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Belarusian State University, Minsk, Belarus). E-mail: dudina@bsu.by

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 21.04.2022; принята к публикации 30.08.2022

Received 21.04.2022; accepted for publication 30.08.2022

Научная статья

УДК 519.663

doi: 10.17223/19988605/60/4

Анализ и моделирование процессов в сложных социальных сетевых структурах на основе уравнения Фоккера–Планка

Юлия Петровна Перова¹, Сергей Александрович Лесько²,
Дмитрий Олегович Жуков³, Алексей Викторович Чечурин⁴

^{1, 2, 3, 4} Российский технологический университет (МИРЭА), Москва, Россия

¹ jul-np@yandex.ru

² lesko@testor.ru

³ zhukovdm@yandex.ru

⁴ chechurin@testor.ru

Аннотация. Проведено исследование стационарных и динамических распределений новостей по числу комментариев и показано, что наблюдаемый на практике степенной закон зависимости стационарной плотности вероятности распределения новостей по числу комментариев (состояниям системы x) может быть получен из решения стационарного уравнения Фоккера–Планка, если при его выводе сделать ряд допущений: коэффициент $\mu(x)$, отвечающий в уравнении Фоккера–Планка за целенаправленное изменение состояния («снос») системы x (x – текущее число комментариев к новости) линейно зависит от состояния x , а коэффициент $D(x)$, отвечающий за случайное изменение («диффузия»), зависит от x квадратично.

Решение нестационарного дифференциального уравнения Фоккера–Планка при сделанных допущениях позволило получить уравнение для плотности вероятности переходов между состояниями системы в единицу времени, которая хорошо согласуется с наблюдаемыми данными с учетом влияния времени задержки между появлением комментария к новости и комментария к данному комментарию.

Ключевые слова: социальные сети; моделирование социальных процессов; уравнение Фоккера–Планка; мониторинг; управление; нелинейная динамика; степенной закон распределения

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (РНФ), грант № 22-21-00109 «Разработка моделей прогнозирования динамики социальных настроений на основе анализа временных рядов текстового контента социальных сетей с использованием уравнений Фоккера–Планка и нелинейной диффузии».

Для цитирования: Перова Ю.П., Лесько С.А., Жуков Д.О., Чечурин А.В. Анализ и моделирование процессов в сложных социальных сетевых структурах на основе уравнения Фоккера–Планка // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 60. С. 32–41. doi: 10.17223/19988605/60/4

Original article

doi: 10.17223/19988605/60/4

Analysis and modeling of processes in complex social network structures based on the Fokker-Planck equation

Julia P. Perova¹, Sergey A. Lesko², Dmitry O. Zhukov³, Alexey V. Chechurin⁴

^{1, 2, 3, 4} Russian Technological University (MIREA), Moscow, Russian Federation

¹ jul-np@yandex.ru

² lesko@testor.ru

Abstract. The paper investigates stationary and dynamic distributions of news by the number of comments and shows that the power law of dependence of the stationary probability density of the distribution of news by the number of comments (states of the system x) observed in practice can be obtained from the solution of the stationary Fokker – Planck equation, if a number of assumptions are made during its derivation: the coefficient $\mu(x)$, responsible in the Fokker – Planck equation for purposeful state change (“demolition”) of system x (x is the current number of comments on the news) linearly depends on the state of x , and the coefficient $D(x)$ responsible for the random change (“diffusion”) depends on x quadratically.

The solution of the unsteady Fokker–Planck differential equation with the assumptions made made it possible to obtain an analytical equation for the probability density of transitions between the states of the system per unit of time, which is in good agreement with the observed data, taking into account the effect of the delay time between the appearance of a comment to the news and a comment to this comment.

Keywords: social networks; modeling of social processes; Fokker-Planck equation; monitoring; management; nonlinear dynamics; power law of distribution

Acknowledgments: The work was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (RNF), grant No. 22-21-00109 “Development of models for predicting the dynamics of social moods based on the analysis of time series of text content of social networks using the Fokker-Planck equations and nonlinear diffusion”.

For citation: Perova, J.P., Lesko, S.A., Zhukov, D.O., Chechurin, A.V. (2022) Analysis and modeling of processes in complex social network structures based on the Fokker-Planck equation . *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 60. pp. 32–41. doi: 10.17223/19988605/60/4

Описание поведения пользователей социальных сетей и информационных ресурсов является одним из важнейших направлений математической социологии. С практической точки зрения создание моделей, описывающих динамику проявления пользовательских мнений и предпочтений, позволяет разрабатывать системы автоматизированного мониторинга общественного настроения и тенденций его изменения. Преимуществом таких систем по сравнению с традиционными методами изучения общественного мнения является их технологичность в реализации.

Следует отметить, что динамику изменения мнений и настроений пользователей сети Интернет можно в значительной степени отнести к стохастическим процессам. Присутствие человеческого фактора (множество людей с различными мнениями, предпочтениями и характером поведения), с одной стороны, создает случайность изменений (в силу большого разнообразия поведенческих моделей пользователей), а с другой – вносит в динамику изменений элементы целенаправленности.

В статье [1] рассмотрена модель, описывающая пространственное и временное распространение информации в социальных сетях на основе стохастического дифференциального уравнения в частных производных. В работе была создана и исследована неавтономная диффузионная логистическая модель с граничными условиями Дирихле, которая показала, что на диффузию данных в социальных сетях сильно влияют коэффициент диффузии и внутренняя скорость роста (распространение информации или слухи можно рассматривать как своего рода вирусы, не обладающие физической формой).

В этой связи наиболее перспективными, на наш взгляд, для анализа динамики изменения общественного настроения являются модели, которые можно создать на основе стохастических дифференциальных уравнений, например уравнения Фоккера–Планка, которое учитывает как упорядоченные («снос»), так и случайные изменения («диффузия»). Уравнение Фоккера–Планка широко применяется для анализа и моделирования поведения временных рядов при описании процессов в сложных системах [2–5].

Следует отметить, что помимо уравнения Фоккера–Планка для моделирования на основе дифференциальных уравнений используются и другие подходы, например уравнения Лиувилля [5, 6], уравнения диффузии [4, 7] и др.

Помимо описания динамических процессов из уравнения Фоккера–Планка можно получить и стационарные решения, которые могут описывать состояние какой-либо системы в стационарном состоянии, когда, например, ее эволюция уже закончилась и изменения не происходят.

Исследование процессов, происходящих в сложных системах с участием человеческого фактора, показывает, что очень часто для наблюдаемых характеристик параметров этих процессов выполняется степенной закон распределения $\rho(x) \sim x^{-\gamma}$ (где γ – характеристическая степень) [8–13], но в то же время вопрос теоретического обоснования возможности его применения требует дальнейшего изучения. На наш взгляд, это обоснование очень важно. Выявление характера процессов, из которых возникает степенной закон, необходимо для более глубокого изучения поведения и анализа сложных социальных систем.

В связи с этим мы считаем перспективным исследование возможности применения уравнения Фоккера–Планка для разработки моделей динамики социальных процессов.

Результаты, полученные в работе:

1. Наблюдаемое на практике стационарное распределение новостей по числу комментариев к ним соответствует степенному закону: $\rho(x) = [\gamma - 1]x^{-\gamma}$, где $\rho(x)$ – доля новостей в общем их числе, имеющая x комментариев, а γ – показатель степени.

2. Динамика изменения с течением времени числа комментариев к новости или блогу может иметь как S-образный вид, так и двухступенчатый, что может быть связано с существенным различием в среднем времени появления комментариев второго уровня (интервал времени между появлением комментария первого уровня и комментария к данному комментарию), т.е. величиной средней задержки.

3. Наблюдаемый на практике степенной закон зависимости стационарной плотности вероятности распределения новостей по числу комментариев (состояниям x) может быть получен из решения стационарного уравнения Фоккера–Планка, если при его выводе сделать ряд допущений: в частности, предположить, что коэффициент $\mu(x)$, отвечающий в уравнении Фоккера–Планка за целенаправленное изменение состояния системы x (x – текущее число комментариев к новости) линейно зависит от состояния x , а коэффициент $D(x)$, отвечающий за случайное изменение, зависит от x квадратично. Все это позволяет предположить, что уравнение Фоккера–Планка может быть использовано для описания процессов в сложных сетевых структурах.

4. Решение нестационарного уравнения Фоккера–Планка при допущениях о линейной зависимости $\mu(x)$ от состояния x и квадратичной зависимости $D(x)$ от состояния x позволяет получить уравнение для плотности вероятности переходов между состояниями системы в единицу времени, которая хорошо согласуется с наблюдаемыми данными с учетом влияния времени задержки между появлением комментария первого уровня и комментария к данному комментарию.

5. Разработанные на основе уравнения Фоккера–Планка модели хорошо согласуются с наблюдаемыми данными, что позволяет создать алгоритмы мониторинга и прогнозирования эволюции общественного мнения пользователей новостных информационных ресурсов.

В заключение отметим, что сложный характер динамики процессов в сложных социальных системах можно описывать не только на основе моделей, созданных на основе уравнения Фоккера–Планка. Например, в работах [14–17] представлены разработанные авторами модели описания стохастической динамики изменения состояний в сложных социальных системах, учитывающие процессы самоорганизации и наличие памяти (немарковские модели).

1. Сбор и обработка данных

Для наших исследований были выбраны несколько новостных порталов и одно из сетевых сообществ социальной сети «ВКонтакте», посвященное обсуждению новостей информационного ресурса РИА «Новости» (<https://vk.com/ria>). РИА «Новости» было выбрано, исходя из его узнаваемости и популярности в российском обществе, оно занимает первое место среди медиаресурсов (за март 2022 г.) по версии br-analytics (<https://br-analytics.ru/mediatrends/media/?period=202203>), входит в ТОП-3 самых цитируемых информационных агентств в СМИ и социальных медиа (за март 2022 г.), где занимает первое место (<https://www.mlg.ru/ratings/media/federal/11110/#internet>).

Сначала мы с помощью специального программного приложения (парсера) скачали интересный нас новостной контент начиная с 1 января 2019 г. по апрель 2022 г. с ресурса «ВКонтакте», используя разработанный нами парсер и API сети (<https://dev.vk.com/guide>). Внутри социальной сети у каждого поста есть свой уникальный адрес (https://vk.com/ria?w=wall{owner_id}_{post_id}), где {owner_id} – уникальный идентификатор сообщества (в случае РИА «Новости» это «-15755094», а {post_id} – уникальный идентификатор поста (новости). Каждый пост (новость) имеет ряд основных параметров: уникальный идентификатор поста в социальной сети; текст поста; дата и время публикации; количество просмотров и комментариев пользователей. Комментарии, в свою очередь, имеют следующие параметры: уникальный идентификатор в сообществе социальной сети; уникальный идентификатор пользователя; текст комментария; дата и время появления; уровень иерархии комментария; связь по уровню комментирования с родительским комментарием (кто из пользователей комментировал кого из других пользователей при обсуждении новости).

Поскольку комментарии могли оставлять чат-боты, спамеры и недобросовестные пользователи, которые пишут комментарии на профессиональной основе, необходимо было ввести правила отчистки данных. К недобросовестным были отнесены те, кто написал за год более 7 365 комментариев (в среднем более 20 за сутки) или писал с частотой более одного комментария в 5 минут.

При анализе полученных данных необходимо было определить, какому закону распределения подчиняется наблюдаемая плотность распределения. Были рассмотрены три наиболее часто наблюдаемых закона распределения: Гаусса $\rho(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}/\sigma\sqrt{2\pi}$, экспоненциальный $\rho(x) = ae^{-ax}$ и степенной $\rho(x) = \beta x^{-\gamma}$. При обработке собранных данных с помощью линейаризации в соответствующих координатах обнаружено, что лучшая линейаризация наблюдается для степенного закона распределения (рис. 1), для остальных законов линейаризация была плохой.

Прямая, проведенная на рис. 1, показывает, что линия тренда хорошо описывается выбранной нами линейной аппроксимацией $y = -0,76 - 1,48z$, где $y = \ln\{\rho(x)\}$, $z = \ln\{x\}$, $\ln\{\beta\} = -0,76$, а коэффициент корреляции равен 0,95.

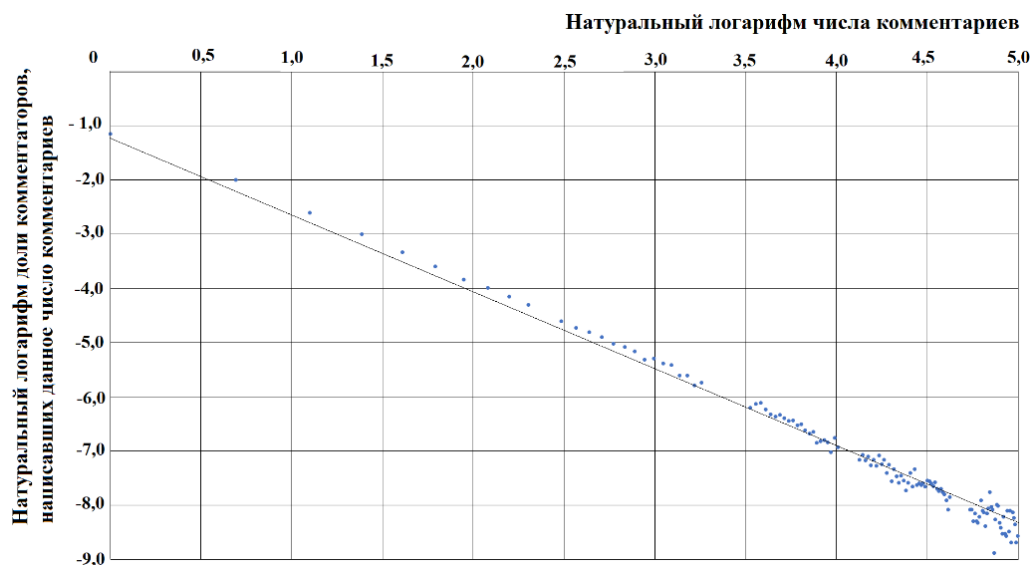


Рис. 1. Линейаризация наблюдаемых данных для степенного распределения доли комментаторов от числа сделанных ими комментариев

Fig. 1. Linearization of the observed data for the power distribution of the proportion of commentators from the number of comments they made

Для подтверждения вывода о линейной аппроксимации можно исследовать поведение остатков и проверить гипотезу о том, что они нормально распределены со средним значением, равным нулю, и имеют однородную дисперсию. Вычисление остатков можно провести на основе реально наблюдаемых значений натурального логарифма доли комментаторов, давших данное число комментариев,

и полученного нами уравнения. Рассчитанная величина математического ожидания для распределения остатков равна 0,25, а дисперсия 0,13. Проверка гипотезы о наклоне (двухвыборочный F -тест для дисперсий) показывает, что дисперсия остатков, рассчитанная относительно линии тренда, существенно меньше, чем дисперсия отклонения точек линейной регрессии от среднего значения величины наблюдаемых данных ($\Sigma y_i/n = \Sigma \{\rho(\ln x_i)\}/n$): Она равна 2,11 ($0,13 \ll 2,11$). Таким образом, из полученных данных можно сделать вывод, что распределение остатков очень близко к нормальному и выявленная регрессия является значимой, что подтверждает вывод о том, что натуральный логарифм доли комментаторов, написавших данные комментарии, линейно зависит от натурального логарифма числа комментариев, что подтверждает выполнение степенного закона.

При проведении исследования также представляло интерес рассмотрение динамики изменения числа комментариев к новостям, привлекающим большое общественное внимание (за время просмотра такие новости или блоги набирают сотни комментариев), с течением времени.

Наблюдение динамики изменения числа комментариев к новости показывает, что она может иметь как S -образный, так и двухступенчатый характер. В качестве примера такой динамики комментирования пользователями «ВКонтакте» новостей ресурса РИА «Новости» выберем несколько публикаций:

1. «Зеленский покинул Украину и переехал в Польшу, – заявил Володин» (динамика комментирования имеет S -образный характер; рис. 2, а; https://vk.com/ria?w=wall-15755094_34243579; <https://ria.ru/20220304/zelenskiy-1776545154.html>). Дата и время появления: 2022-03-04 16:13:27 UTC +03:00). Общее число комментариев составило 894. Число комментариев первого уровня (комментарий самой новости) составило 433, второго (комментарии комментариев первого уровня) 461. Общее количество просмотров – 118 764. Среднее время появления комментариев первого уровня 73 минуты, а второго уровня – 74.

2. «Скоро город будет освобожден, – заявил он» (динамика комментирования имеет двухступенчатый характер; рис. 2, б; https://vk.com/ria?w=wall-15755094_35202266; <https://ria.ru/20220410/ukraina-1782778315.html>). Дата и время появления: 2022-04-10 17:14:40 UTC +03:00). Общее число комментариев составило 901. Число комментариев первого уровня (комментарий самой новости) составило 173, второго (комментарии комментариев первого уровня) 728. Общее количество просмотров – 173 607. Среднее время появления комментариев первого уровня – 75 минуты, а второго уровня – 82.

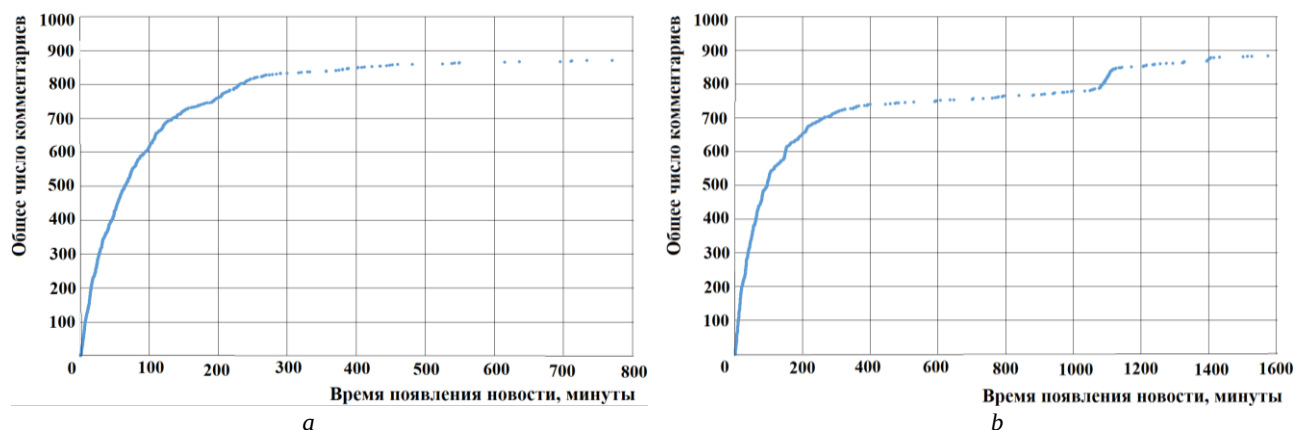


Рис. 2. Наблюдаемая динамика изменения числа комментариев к новостям
Fig. 2. The observed dynamics of changes in the number of comments to the news

На наш взгляд, это может быть связано как с различием в среднем времени появления комментариев второго уровня (интервал времени между появлением комментария первого уровня и комментария к данному комментарию), так и с соотношением между числом комментариев первого и второго уровней. Если для первой новости интервалы среднего времени появления комментариев первого и второго уровней практически совпадают, то для второй наблюдается небольшое увеличение интервала среднего времени появления комментариев второго уровня (происходит запаздывание по времени). Кроме того, для второй новости их число существенно превосходит число комментариев первого уровня.

Для дальнейшего изучения можно сформулировать следующую задачу теоретического исследования: какова природа процессов комментирования новостей и блогов и какие особенности этих сложных социальных систем приводят к тому, что для зависимости плотности вероятности распределения комментариев по их числу выполняется степенной закон, а динамика имеет во многих случаях сложный двухступенчатый характер?

2. Решение стационарного уравнения Фоккера–Планка

В общем виде уравнение Фоккера–Планка имеет вид:

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [\mu(x)\rho(x,t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [D(x)\rho(x,t)], \quad (1)$$

где $\rho(x,t)$ – зависящая от времени t плотность вероятности распределения по состояниям x (в нашем случае состояние x – это число комментариев, наблюдаемое в момент времени t), $D(x)$ – зависящий от состояния x коэффициент, определяющий случайное изменение состояния x («диффузия»), $\mu(x)$ – зависящий от состояния x коэффициент, определяющий целенаправленное изменение состояния x («снос»). Применительно к нашей модели $D(x)$ можно трактовать как действия пользователя, вызванные спонтанным импульсом, возникшим при прочтении новости или комментариев к ней других пользователей, когда описываемое в новости или блоге событие не является существенно важным, но пользователь готов потратить время на комментарий или ответить другому комментатору (у пользователя возникло спонтанное желание отреагировать на данную новость). Коэффициент $\mu(x)$ можно интерпретировать как целенаправленные действия, вызванные желанием отреагировать на существенно важную для пользователя новость или блог, а также дать комментарий на комментарий другого пользователя, если он затронул важную с точки зрения данного пользователя тему (пользователь постоянно интересуется данной темой). Для построения модели необходимо сделать предположение о зависимости $D(x)$ и $\mu(x)$ от состояния x и рассмотреть два условия: во-первых, учтем размерность членов, входящих в уравнение (1), а во-вторых, можно сделать предположение, что с ростом состояния x (ростом числа возможных комментариев (значимости новости или блога) величины $D(x)$ и $\mu(x)$ также должны увеличиваться. Логика подсказывает, что все члены уравнения (1) должны иметь одинаковую размерность, которую имеет $\rho(x)$. Оба условия будут выполнены, если зависимости $D(x)$ и $\mu(x)$ от состояния x будут иметь вид: $\mu(x) = \mu_0 x$ и $D(x) = D_0 x^2$.

Решение стационарного уравнения Фоккера–Планка $-\frac{d}{dx} [\mu(x)\rho(x)] + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} [D(x)\rho(x)] = 0$ при допущениях $\mu(x) = \mu_0 x$ и $D(x) = D_0 x^2$ имеет вид: $\rho(x) = [\gamma - 1]x^{-\gamma}$, что соответствует наблюдаемому на практике степенному закону распределения. По полученным из анализа наблюдаемых данных результатам $\gamma = 1,48$, $\gamma - 1 = 0,48$, натуральный логарифм $(\gamma - 1)$ равен $-0,73$, что с достаточно высокой точностью равно $\ln\{\beta\} = -0,76$ (см. полученное уравнение линеаризации: $y = -0,76 - 1,48z$, где $y = \ln\{\rho(x)\}$, $z = \ln\{x\}$, $\ln\{\beta\} = \ln\{\gamma - 1\} - 0,76$, а коэффициент корреляции равен $0,95$). В целом это указывает на адекватность разработанной модели.

3. Решение нестационарного уравнения Фоккера–Планка и анализ модели

Полученное нами решение нестационарного уравнения Фоккера–Планка при сделанных для $\mu(x)$ и $D(x)$ допущениях имеет вид:

$$\rho(x,t) = \int \frac{\left[\frac{[\ln(x)]^2}{D_0 t} + \left[\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{D_0} \right] \ln(x) - 1 \right]}{\sqrt{2\pi D_0 t^3}} e^{-\left[\frac{[\ln(x)]^2}{2D_0 t} + \left[\frac{3}{2} - \frac{\mu_0}{D_0} \right] \ln(x) + \left[\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{D_0} \right]^2 \frac{D_0 t}{2} \right]} dt. \quad (2)$$

Вероятность того, что число комментариев к моменту времени t достигнет некоторого числа L , можно найти по формуле $P(L,t) = 1 - \int_0^L \rho(x,t) dx$. Зависимость числа комментариев $N(t)$ от времени t будет описываться уравнением $N(t) = P(L,t)L$.

Для анализа полученного решения проведем имитационное моделирование. В качестве примера выберем $L = 100$ и три набора значений μ_0 и D_0 ($\mu_0 = 0,45$ и $D_0 = 0,50$ условных единиц ($\mu_0 < D_0$; см.

кривая 1 на рис. 3), $\mu_0 = 0,50$ и $D_0 = 0,50$ условных единиц ($\mu_0 = D_0$; см. кривая 2 на рис. 3) и $\mu_0 = 0,55$ и $D_0 = 0,50$ условных единиц ($\mu_0 > D_0$; см. кривая 3 на рис. 3). Расчеты показывают, что с ростом μ_0 относительно D_0 скорость роста кривых для числа комментариев $N(t)$ при выбранных значениях параметров модели μ_0 , D_0 и L увеличивается (см. рис. 3).

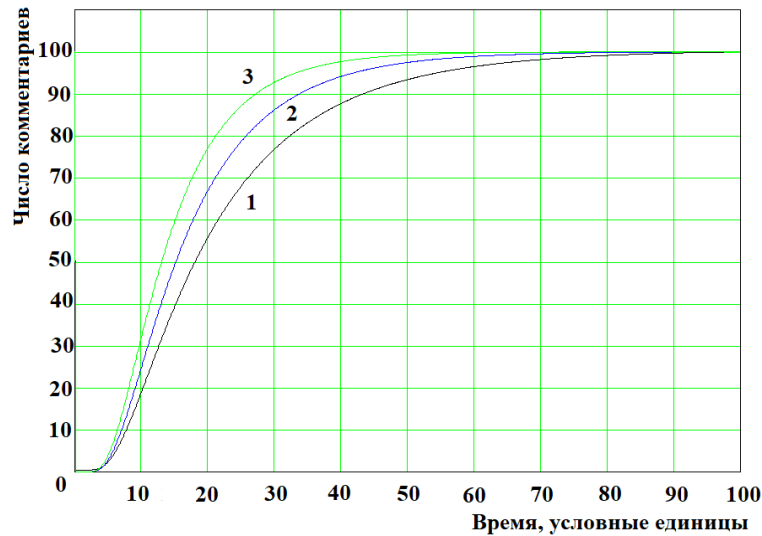


Рис. 3. Динамика изменения с течением времени числа комментариев к новости в имитационной модели на основе уравнения Фоккера–Планка

Fig. 3. Dynamics of changes over time in the number of comments to the news in the simulation model based on the Fokker-Planck equation

Двухступенчатую кривую можно получить, если использовать функцию плотности распределения, учитывающую время задержки τ :

$$\rho(x, t - \tau) = \int \frac{\left[\frac{[\ln(x)]^2}{D_0[t-\tau]} + \left[\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{D_0} \right] \ln(x) - 1 \right]}{\sqrt{2\pi D_0[t-\tau]^3}} e^{-\left[\frac{[\ln(x)]^2}{2D_0[t-\tau]} + \left[\frac{3}{2} - \frac{\mu_0}{D_0} \right] \ln(x) + \left[\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{D_0} \right]^2 \frac{D_0[t-\tau]}{2} \right]} dt. \quad (3)$$

Соответствие теоретической модели и наблюдаемых данных (см. рис. 2, 3) можно получить, если предположить, что могут одновременно протекать два процесса с различными μ_0 и D_0 . Причем сумма парциальных долей процессов должна быть равна 1, т.е. $P_{\text{общ}}(L, t) = \alpha_1 P_1(L, t) + \alpha_2 \cdot P_2(L, t)$.

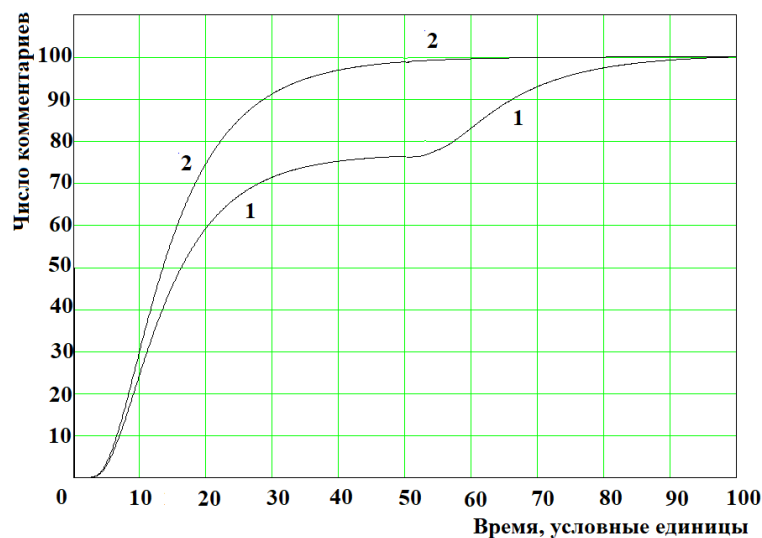


Рис. 4. Динамика изменения с течением времени числа комментариев к новости в имитационной модели на основе уравнения Фоккера–Планка с учетом двух параллельных процессов

Fig. 4. Dynamics of changes over time in the number of comments on the news in the simulation model based on the Fokker-Planck equation, taking into account two parallel processes

В качестве примера моделирования выберем для процесса комментирования самой новости или блога следующие параметры модели: $\mu_{0,1} = 0,55$, $D_{0,1} = 0,50$, а для процесса комментирования комментариев $\mu_{0,2} = 0,50$, $D_{0,2} = 0,50$, $\tau = 50$ условных единиц, $\alpha_1 = 0,75$, $\alpha_2 = 0,25$ ($\alpha_1 + \alpha_2 = 1$), $L = 100$ ($\mu_{0,1} > \mu_{0,2}$ было выбрано исходя из предположения, что комментирование новости является более первичным процессом для пользователей, чем комментирование комментариев).

На рис. 4 представлены результаты моделирования динамики изменения с течением времени числа комментариев $N(t)$ с учетом того, что могут параллельно протекать два процесса. Как видно из результатов моделирования, представленных на рис. 4, наблюдается хорошее совпадение реальных данных и теоретических расчетов.

Заключение

В работе проведено исследование стационарных и динамических распределений новостей по числу комментариев. Обработка данных, полученных с информационного портала, показала, что статическое распределение новостей по числу комментариев к ним подчиняется степенному закону $\rho(x) \sim x^{-\gamma}$ (где γ – характеристическая степень), а динамическое распределение (изменение числа комментариев с течением времени) в ряде случаев имеет S-образный характер, а иногда и более сложный – двухступенчатый; это зависит от величины среднего времени появления комментариев второго уровня (интервал времени между появлением комментария первого уровня и комментария к данному комментарию), т.е. величины средней задержки.

В статье показано, что наблюдаемый на практике степенной закон зависимости стационарной плотности вероятности распределения новостей по числу комментариев (состояниям x) может быть получен из решения стационарного уравнения Фоккера–Планка $-\frac{d}{dx}[\mu(x)\rho(x)] + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}[D(x)\rho(x)] = 0$, если при его выводе сделать ряд допущений: в частности, предположить, что коэффициент $\mu(x)$, отвечающий в уравнении Фоккера–Планка за целенаправленное изменение («снос») состояния системы x (x – текущее число комментариев к новости) линейно зависит от состояния x , а коэффициент $D(x)$, отвечающий за случайное изменение («диффузия»), зависит от x квадратично.

Решение нестационарного дифференциального уравнения Фоккера–Планка при сделанных допущениях позволило получить аналитическое уравнение для плотности вероятности переходов между состояниями системы в единицу времени

$$\rho(x, t) = \int \frac{\left[\frac{[\ln(x)]^2}{D_0 t} + \left[\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{D_0}\right] \ln(x) - 1\right]}{\sqrt{2\pi D_0 t^3}} e^{-\left[\frac{[\ln(x)]^2}{2D_0 t} + \left[\frac{3}{2} - \frac{\mu_0}{D_0}\right] \ln(x) + \left[\frac{1}{2} - \frac{\mu_0}{D_0}\right]^2 \frac{D_0 t}{2}\right]} dt,$$

которое хорошо согласуется с наблюдаемыми данными с учетом влияния времени задержки между появлением комментария первого уровня и комментария к данному комментарию.

Список источников

1. Du B., Lian X., Cheng X. Partial differential equation modeling with Dirichlet boundary conditions on social networks // Boundary Value Problems. V. 2018, is. 1. Art. 50.
2. Lux T. Inference for systems of stochastic differential equations from discretely sampled data: a numerical maximum likelihood approach // Annals of Finance. 2012. V. 9 (2), P. 217–248.
3. Hurn A., Jeisman J., Lindsay K. Teaching an old dog new tricks: improved estimation of the parameters of stochastic differential equations by numerical solution of the Fokker-Planck equation // Financial Econometrics Handbook / G. Gregoriou, R. Pascualau (eds.). London : Palgrave, 2010
4. Elliott R.J., Siu T.K., Chan L.A PDE approach for risk measures for derivatives with regime switching // Annals of Finance. 2007. V. 4(1). P. 55–74.
5. Орлов Ю.Н., Федоров С.Л. Генерация нестационарных траекторий временного ряда на основе уравнения Фоккера–Планка // Труды МФТИ. 2016. № 8 (2). С. 126–133.
6. Chen Y., Cosimano T.F., Himonas A.A., Kelly P. An Analytic Approach for Stochastic Differential Utility for Endowment and Production Economies // Computational Economics. 2013. V. 44 (4). P. 397–443.
7. Savku E., Weber G.-W. Stochastic differential games for optimal investment problems in a Markov regime-switching jump-diffusion market // Annals of Operations Research. 2022. V. 312. P. 1171–1196. doi: 10.1007/s10479-020-03768-5

8. Dorogovtsev S.N., Mendes J.F.F. Evolution of networks // *Adv. Phys.* 2002. V. 51. P. 1079–1187.
9. Newman M.E.J. The structure and function of complex networks // *SIAM Rev.* 2003. V. 45. P. 167–256.
10. Dorogovtsev S.N., Mendes J.F.F., Samukhin A.N. Generic scale of the scale-free growing networks // *Phys. Rev. E.* 2001. V. 63. Art. 062101.
11. Golder S.A., Wilkinson D.M., Huberman B.A. Rhythms of social interaction: messaging within a massive online network // *Communities and Technologies : Proc. of the 3rd Communities and Technologies Conference, Michigan State University.* 2007. P. 41–66.
12. Kumar R., Novak J., Tomkins A. Structure and evolution of online social networks // *Proc. of the 12th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. KDD'06.* 2006. P. 611–617.
13. Mislove A., Marcon M., Gummadi K.P., Druschel P., Bhattacharjee B. Measurement and analysis of online social networks // *Proc. of the 7th ACM SIGCOMM Conference on Internet Measurement. IMC'07.* 2007. P. 29–42.
14. Sigov A.S., Zhukov D.O., Khvatova T.Yu., Andrianova E.G. A Model of Forecasting of Information Events on the Basis of the Solution of a Boundary Value Problem for Systems with Memory and Self-Organization // *Journal of Communications Technology and Electronics.* 2018. V. 18, № 2. P. 106–117.
15. Zhukov D., Khvatova T., Millar C., Zaltzman A. Modelling the stochastic dynamics of transitions between states in social systems incorporating self-organization and memory // *Technological Forecasting and Social Change.* 2020. V. 158. Art. 120134.
16. Zhukov D.O., Lesko S.A. Stochastic self-organisation of poorly structured data and memory realisation in an information domain when designing news events forecasting models // *The 2nd IEEE International Conference on Big Data Intelligence and Computing.* 2016. August 8–12, Auckland, New Zealand. doi: 10.1109/DASC-PICom-DataCom-CyberSciTec.2016.153
17. Zhukov D.O., Zaltzman A.D., Khvatova T.Yu. Forecasting Changes in States in Social Networks and Sentiment Security Using the Principles of Percolation Theory and Stochastic Dynamics // *Proceedings of the 2019 IEEE International Conference “Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies”; IT and QM and IS 2019.* Art. 8928295. P. 149–153.

References

1. Du, B., Lian, X. & Cheng, X. (2018) Partial differential equation modeling with Dirichlet boundary conditions on social networks. *Boundary Value Problems.* 2018(1). No 50. DOI: 10.1186/s13661-018-0964-4
2. Lux, T. (2012) Inference for systems of stochastic differential equations from discretely sampled data: a numerical maximum likelihood approach. *Annals of Finance.* 9(2). pp. 217–248. DOI: 10.1007/s10436-012-0219-9
3. Hurn, A., Jeisman, J. & Lindsay, K. (2010) Teaching an old dog new tricks: improved estimation of the parameters of stochastic differential equations by numerical solution of the Fokker–Planck equation. In: Gregoriou, G. & Pascual, R. (eds) *Financial Econometrics Handbook.* London: Palgrave.
4. Elliott, R.J., Siu, T.K. & Chan, L. (2007) A PDE approach for risk measures for derivatives with regime switching. *Annals of Finance.* 4(1). pp. 55–74. DOI: 10.1007/s10436-006-0068-5
5. Orlov, Yu.N. & Fedorov, S.L. (2016) Generation of nonstationary time series trajectories based on the Fokker–Planck equation. *Trudy MFTI.* 8(2). pp. 126–133.
6. Chen, Y., Cosimano, T.F., Himonas, A.A. & Kelly, P. (2013) An Analytic Approach for Stochastic Differential Utility for Endowment and Production Economies. *Computational Economics.* 44(4). pp. 397–443. DOI: 10.1007/s10614-013-9397-4
7. Savku, E. & Weber, G.-W. (2020) Stochastic differential games for optimal investment problems in a Markov regime-switching jump-diffusion market. *Annals of Operations Research.* 312. pp. 1171–1196. DOI: 10.1007/s10479-020-03768-5
8. Dorogovtsev, S.N. & Mendes, J.F.F. (2002) Evolution of networks. *Advances of Physics.* 51. pp. 1079–1187.
9. Newman, M.E.J. (2003) The structure and function of complex networks. *SIAM Review.* 45. pp. 167–256. DOI: 10.1137/S003614450342480
10. Dorogovtsev, S.N., Mendes, J.F.F. & Samukhin, A.N. (2001) Generic scale of the scale-free growing networks. *Physical Review E.* 63. 062101. DOI: DOI: 10.1103/PhysRevE.63.062101
11. Golder, S.A., Wilkinson, D.M. & Huberman, B.A. (2007) Rhythms of social interaction: messaging within a massive online network. In: Steinfield, C., Pentland, B.T., Ackerman, M., Contractor, N. (eds) *Communities and Technologies.* London: Springer. pp. 41–66. DOI: 10.1007/978-1-84628-905-7_3
12. Kumar, R., Novak, J. & Tomkins, A. (2006) Structure and evolution of online social networks. *Proceedings of the 12th ACM SIGKDD international conference on knowledge discovery and data mining. KDD '06.* pp 611–617.
13. Mislove, A., Marcon, M., Gummadi, K.P., Druschel, P. & Bhattacharjee, B. (2007) Measurement and analysis of online social networks. *Proceedings of the 7th ACM SIGCOMM conference on internet measurement. IMC '07.* pp. 29–42.
14. Sigov, A.S., Zhukov, D.O., Khvatova, T.Yu. & Andrianova, E.G. (2018) A Model of Forecasting of Information Events on the Basis of the Solution of a Boundary Value Problem for Systems with Memory and Self-Organization. *Journal of Communications Technology and Electronics.* 18(2). pp.106–117. DOI: 10.1134/S1064226918120227
15. Zhukov, D., Khvatova, T., Millar, C. & Zaltzman, A. (2020) Modelling the stochastic dynamics of transitions between states in social systems incorporating self-organization and memory. *Technological Forecasting and Social Change.* 158. 120134. DOI: 10.1016/j.techfore.2020.120134
16. Zhukov, D.O. & Lesko, S.A. (2016) Stochastic self-organisation of poorly structured data and memory realisation in an information domain when designing news events forecasting models. *The 2nd IEEE International Conference on Big Data Intelligence and Computing.* August 8–12, Auckland, New Zealand. DOI: 10.1109/DASC-PICom-DataCom-CyberSciTec.2016.153

17. Zhukov, D.O., Zaltzman, A.D. & Khvatova, T.Yu. (2019) Forecasting Changes in States in Social Networks and Sentiment Security Using the Principles of Percolation Theory and Stochastic Dynamics. *Proceedings of the 2019 IEEE International Conference "Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies"; IT and QM and IS 2019*. Article No 8928295. pp. 149–153.

Информация об авторах:

Перова Юлия Петровна – старший преподаватель кафедры телекоммуникаций Института радиоэлектроники и информатики Российского технологического университета – МИРЭА (Москва, Россия). E-mail: jul-np@yandex.ru.

Лесько Сергей Александрович – кандидат технических наук, доцент кафедры моделирования систем Института кибербезопасности и цифровых технологий Российского технологического университета – МИРЭА (Москва, Россия). E-mail: lesko@testor.ru

Жуков Дмитрий Олегович – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры информационного противоборства Института кибербезопасности и цифровых технологий Российского технологического университета – МИРЭА (Москва, Россия). E-mail: zhukovdm@yandex.ru.

Чечурин Алексей Викторович – кандидат технических наук, доцент кафедры моделирования систем Института кибербезопасности и цифровых технологий Российского технологического университета – МИРЭА (Москва, Россия). E-mail: chechurin@testor.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Perova Julia P. (Senior lecturer of the Department of Telecommunications, Institute of Radio Electronics and Computer Science, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russian Federation). E-mail: jul-np@yandex.ru

Lesko Sergey. A. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Systems Modeling, Institute of Cybersecurity and Digital Technologies, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russian Federation). E-mail: lesko@testor.ru

Zhukov Dmitry O. (Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Information Warfare, Institute of Cybersecurity and Digital Technologies, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russian Federation). E-mail: zhukovdm@yandex.ru

Chechurin Alexey V. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Systems Modeling, Institute of Cybersecurity and Digital Technologies, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russian Federation). E-mail: chechurin@testor.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 29.03.2022; принята к публикации 30.08.2022

Received 29.03.2022; accepted for publication 30.08.2022

Научная статья

УДК 519.234:621.391

doi: 10.17223/19988605/60/5

Исследование влияния параметров фильтра на основе усеченных порядковых статистик (УПС-фильтра) на его выходные характеристики

Игорь Михайлович Рудько

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия, igor-rudko@mail.ru

Аннотация. Проводится сравнение двух алгоритмов обнаружения при использовании ими энергетического критерия обнаружения – «классическая» задача проверки двух простых гипотез и применение фильтра на основе усеченной порядковой статистики (УПС-фильтра), которым заменяется интегратор в «классической» задаче. На статистических моделях исследовано влияние параметров УПС-фильтра на его выходные характеристики. Показано, что при использовании критерия Неймана–Пирсона порог отсека для УПС-фильтра определяется медианой шума. Исследована зависимость вероятности обнаружения от числа разбиений времени интегрирования в энергетическом приемнике. Исследована зависимость вероятности обнаружения от размера матрицы скользящего окна. Показано, что применение УПС-фильтра обеспечивает существенный выигрыш в вероятности обнаружения.

Ключевые слова: порядковая статистика; проверка статистических гипотез; системы обнаружения; статистическое моделирование

Для цитирования: Рудько И.М. Исследование влияния параметров фильтра на основе усеченных порядковых статистик (УПС-фильтра) на его выходные характеристики // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 60. С. 42–51. doi: 10.17223/19988605/60/5

Original article

doi: 10.17223/19988605/60/5

Investigating the effect of filter parameters based on truncated order statistics (TOS-filter) on its output characteristics

Igor M. Rudko

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation, igor-rudko@mail.ru

Abstract. Two detection algorithms are compared when they use the energy detection criterion - the "classical" problem of testing two simple hypotheses and the application of a filter based on truncated order statistics (TOS-filter), which replaces the integrator in the "classical" problem. On statistical models, the influence of the parameters of the TOS-filter on its output characteristics was studied. It is shown that when using the Neyman-Pearson criterion, the cutoff threshold for the TOS-filter is determined by the median of the noise. The dependence of the detection probability on the number of integration time partitions in the energy receiver is studied. The dependence of the detection probability on the size of the sliding window matrix is studied. It is shown that the use of the TOS-filter provides a significant gain in the detection probability.

Keywords: order statistics; statistical hypotheses testing; detection systems; statistical modeling

For citation: Rudko, I.M. (2022) Investigating the effect of filter parameters based on truncated order statistics (TOS-filter) on its output characteristics. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 60. pp. 42–51. doi: 10.17223/19988605/60/5

Во многих системах обработки локационной информации, работающих в пассивном режиме, системах спектрального анализа и анализа вибраций решаются задачи обнаружения сигнала на фоне помехи, причем статистические свойства сигнала и помехи одинаковы, и единственным их отличием являются энергии (дисперсии). В простейшей форме операция обнаружения – это задача проверки двух статистических гипотез: нулевой гипотезы H_0 , когда данные относятся только к шуму, и альтернативной гипотезы H_1 , когда данные относятся к совместному воздействию сигнала и шума. При решении задачи обнаружения приемник вычисляет отношение правдоподобия, которое представляет собой отношение плотностей распределения вероятностей для гипотез H_1 и H_0 [1].

Модель обнаружения в этих задачах обычно представляется как энергетический порог, установленный над средним значением помехи (энергетический приемник) [2]. Блок-схему такого приемника можно представить как последовательно соединенные согласующий фильтр, квадратичный детектор, интегратор и блок принятия решения. Задача входного фильтра, стоящего перед детектором, – максимально «разделить» статистики H_0 и H_1 , используя различия в статистических и частотных параметрах шума и сигнала (согласованная фильтрация) [3].

Таким образом, информативны только случаи превышения порога, а шумовой фон лишь «забивает» тракт обработки, особенно при принятии решения оператором. Поэтому представляет интерес создание алгоритмов, осуществляющих поиск сигнала без учета составляющих шумового фона.

В случае, когда таких различий (кроме различных дисперсий) нет или частотный спектр сигнала неизвестен или изменяется случайным образом, целесообразно использовать фильтр на основе усеченной порядковой статистики (УПС-фильтр) [4–6], на который в схеме энергетического приемника заменяется интегратор.

В настоящей работе методами математического моделирования исследуется влияние задаваемых параметров УПС-фильтра на его выходные характеристики.

1. Алгоритм работы УПС-фильтра

Пусть на интервале $[0, T_0]$ наблюдается сигнал

$$X = \sum_{i=1}^N S^2(i\Delta t), \quad (1)$$

где $T_0 = N\Delta t$, $\Delta t = 1/(2\Delta F)$, Δt – интервал дискретизации по времени, ΔF – полоса пропускания входного фильтра системы обнаружения.

В случае дискретизации по времени решение о наличии или отсутствии сигнала принимается по набору полученных в результате предварительной обработки значений N независимых гауссовских случайных величин $S_1, S_2, \dots, S_N$, имеющих нулевое математическое ожидание и одинаковую дисперсию σ^2 . Здесь $\sigma^2 = \sigma_{\text{ш}}^2$ в случае отсутствия сигнала ($\sigma_{\text{ш}}^2$ – дисперсия помехи) и $\sigma^2 = \sigma_{\text{ш}}^2 + \sigma_{\text{с}}^2$ в случае присутствия сигнала ($\sigma_{\text{с}}^2$ – дисперсия полезной составляющей).

Статистику X можно представить в виде $X = \sigma^2 Z$, где Z – случайная величина, имеющая χ^2 -распределение с n степенями свободы, а $\sigma^2 = \sigma_{\text{ш}}^2$ в случае гипотезы H_0 и $\sigma^2 = \sigma_{\text{с}}^2 + \sigma_{\text{ш}}^2$ в случае альтернативы H_1 .

Формула (1) описывает классический энергетический приемник (интегратор).

В одиночном акте наблюдения (испытании) в нашем распоряжении имеется выборка из N результатов наблюдений – выборка (вектор) X . Выписав отношение правдоподобия для гипотез H_1 и H_0 ,

получаем достаточную статистику $\Lambda(X) = \sum_{i=1}^N X_i$.

Приведенный выше «классический» алгоритм базируется на существовании равномерно наиболее мощного критерия для проверки гипотезы H_0 против альтернативы H_1 . При этом используется вся информация, содержащаяся в оцениваемой выборке X .

Алгоритм работы УПС-фильтра:

1. T_0 разбивается на m одинаковых интервалов, в каждом из которых согласно (1) вычисляется последовательность выборок $X_j \sim \{X_1, \dots, X_i, \dots, X_m\}$.

2. Накапливается c оцениваемых выборок X_j .

3. По накопленным выборкам строится матрица X_{ij} размерностью m строк на c столбцов (c – «глубина» матрицы памяти) – $\{X_1, \dots, X_i, \dots, X_m\}_j$, где $1 \leq j \leq c$.

4. В каждом столбце матрицы X_{ij} строится порядковая статистика $X_{(i)j}$, где $1 \leq i \leq m$, – упорядоченные величины статистики X_i , такие что $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(i)} \leq \dots \leq X_{(m)}$.

5. В каждой строке полученной матрицы $X_{(i)j}$ определяются оценки математических ожиданий (вектор $\hat{m}$) $\hat{m}_i = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^c X_{(i)j}$, где $1 \leq i \leq m$.

6. Порог отсека k (первый порог) определяется из условия

$$k = \arg \min_i |h_0 - \hat{m}_i|, \quad (2)$$

где $1 \leq i \leq m$, а h_0 определяется по формуле

$$\alpha = \int_0^{h_0} f_{\text{ш}}(x) dx = \frac{1}{2^{n/2} \sigma_0^n \Gamma(n/2)} \int_0^{h_0} x^{n/2-1} e^{-x^2/2\sigma_0^2} dx, \quad (3)$$

где α – заданный квантиль, $n = N/m$, σ_0^2 – дисперсия шума, так как известными параметрами являются только статистические свойства помехи, а именно математическое ожидание μ_0 и дисперсия σ_0^2 .

7. Вычисляется оценка $W_j = \sum_{i=k}^m X_{(i)j}$.

Таким образом, на выходе УПС-фильтра получаем последовательность отфильтрованных оценок W_j , задача обнаружения по которым решается по «классическому» алгоритму обнаружения (задача проверки двух гипотез).

УПС-фильтр работает по принципу скользящего окна, т.е. каждый новый вектор X_j с индексом $c + 1$ вытесняет из матрицы $X_{(i)j}$ вектор X_j с индексом 1.

В отличие от алгоритма проверки двух гипотез (энергетического приемника), для реализации предлагаемого алгоритма обнаружения необходимо предварительное накопление выборок $\{X_1, \dots, X_i, \dots, X_m\}_j$, где $1 \leq j \leq c$, что приводит к задержке в принятии решения на время $T = jT_0$, где $1 \leq j \leq c$. Такая задержка во многих задачах не является существенной.

Следует подчеркнуть, что если в алгоритме проверки двух простых гипотез для принятия решения используется только вектор X , то в рассматриваемом алгоритме – матрица $X_{(i)j}$, в которой текущий вектор X_j является одним из столбцов.

Сравним статистические свойства случайных величин Z и W , сформированных из случайной выборки X_i , $1 \leq i \leq m$, двумя различными способами:

– Энергетический приемник:

- $Z = \sum_{i=1}^m X_i$ – имеет χ^2 -распределение с $N = nm$ степенями свободы и математическим ожиданием

$\mu_Z = nm\sigma^2$ и дисперсией $\sigma_Z^2 = 2nm\sigma^4$, и в силу центральной предельной теоремы при достаточно больших значениях m ее функция плотности распределения нормализуется: $Z \sim N(\mu_Z, \sigma_Z^2)$.

– УПС-фильтр:

- $W = \sum_{i=k}^m X_{(i)}$, где $X_{(i)}$, $1 \leq i \leq m$, – упорядоченные величины (порядковые статистики) статисти

стики X_i , такие что $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(i)} \leq \dots \leq X_{(m)}$. Статистики $X_{(i)}$ также имеют центральное χ^2 -распределение с n степенями свободы. Если случайные величины X_i статистически независимы и одинаково распределены, то случайные величины $X_{(i)}$ зависимы из-за неравенств между ними. В дальнейшем будем называть статистику W усеченной порядковой статистикой (УПС), а параметр k – порогом отсека.

Известны выражения для вычисления моментов порядковых статистик [7], которые в случае центрального χ^2 -распределения приобретают следующий вид:

– математическое ожидание μ_j величины $X_{(j)}$ определяется по формуле

$$\mu_j = \frac{m!}{(j-1)!(m-j)!} \int_0^\infty K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)^{j-1} \left[1 - K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)\right]^{m-j} \frac{x}{\sigma^2} k_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right) dx, \quad (4)$$

– дисперсия

$$\sigma_j^2 = \frac{m!}{(j-1)!(m-j)!} \int_0^\infty K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)^{j-1} \left[1 - K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)\right]^{m-j} (x - \mu_j)^2 \frac{1}{\sigma^2} k_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right) dx, \quad (5)$$

– ковариация

$$\sigma_{jk} = E[X_{(j)}X_{(k)}] = \frac{m!}{(m-k)!(k-j-1)!(j-1)!} \int_0^\infty \int_0^y C(x, y) x y \frac{1}{\sigma^4} k_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right) k_n\left(\frac{y}{\sigma^2}\right) dx dy, \quad (6)$$

где $C(x, y) = K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)^{j-1} \left[K_n\left(\frac{y}{\sigma^2}\right) - K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right) \right]^{k-j-1} \left[1 - K_n\left(\frac{y}{\sigma^2}\right) \right]^{m-k}$, а $k_n(x)$ и $K_n(x)$ – плотность и функция вероятности χ^2 -распределения с n степенями свободы.

Для случайной величины W математическое ожидание определяется по формуле

$$\mu_w(k) = \sum_{j=k}^m \mu_j, \quad 1 \leq k \leq m,$$

а дисперсия с учетом зависимости случайных величин $X_{(i)}$ [8]:

$$\sigma_w^2(k) = \sum_{l=k}^m \sigma_l^2 + 2 \sum_{k \leq j < l \leq m} \sigma_{jl}, \quad 1 \leq k \leq m, \quad (7)$$

и в силу центральной предельной теоремы при достаточно больших значениях m ее функция плотности распределения также нормализуется: $W \sim N(\mu_w, \sigma_w^2)$.

Аналитические расчеты по формулам (4)–(6) практически возможны только при малых значениях m и n . В работе [4] показано, что при решении задачи проверки двух гипотез использование статистики W дает выигрыш в $P_{обн}$ при заданной $P_{лт}$ по сравнению со статистикой Z .

Исследование УПС-фильтра при больших значениях m и n возможно только на математических моделях.

2. Статистическое моделирование УПС-фильтра

При статистическом моделировании УПС-фильтра исследовались следующие его параметры, влияющие на выходные характеристики УПС-фильтра:

1. Величина порога отсечения h_0 ;
2. Соотношения m и n при $N = mn = const$;
3. «Глубина» матрицы фильтра c .

Блок-схема алгоритма статистического моделирования приведена на рис. 1.

«Шум N » и «Сигнал S » – генераторы случайных чисел, имеющих χ^2 -распределения с заданными дисперсиями $\sigma_{ш}^2$ и σ_c^2 . При достаточно больших значениях n χ^2 -распределение можно аппроксимировать нормальным распределением $N(\mu, \sigma^2)$. Тогда для гипотезы $H_0: N(\mu_0, \sigma_0^2)$, где $\mu_0 = n\sigma_{ш}^2$, $\sigma_0^2 = 2n\sigma_{ш}^4$, а для гипотезы $H_1: N(\mu_1, \sigma_1^2)$, где $\mu_1 = n\sigma_{ш}^2(1 + \rho)$, $\sigma_1^2 = 2n\sigma_{ш}^4(1 + \rho)^2$. Здесь $\rho = \sigma_c^2/\sigma_{ш}^2$ – отношение сигнал/помеха в полосе ΔF .

Для нормальных распределений удобным способом сравнения статистик H_0 и H_1 является использование коэффициента разделимости $\gamma = (\mu_1 - \mu_0)/(\sigma_0 + \sigma_1)$ [4]. Вероятность ошибки $P_{ош} = P_{лт} = P_{пр} = 1 - \Phi(\gamma)$, где $P_{пр}$ – вероятность пропуска.

Очевидно, что чем больше γ , тем, при заданном пороге по $P_{лт}$, больше $P_{обн}$.

Согласно приведенным выше формулам генерируются случайные величины Z и W . Для гипотез H_0 и H_1 набираются статистики для случайных величин Z и W , по которым строятся оценки $\hat{\mu}_{z0}$, $\hat{\sigma}_{z0}^2$ и

$\hat{\mu}_{W0}, \hat{\sigma}_{W0}^2$ для гипотезы H_0 и $\hat{\mu}_{Z1}, \hat{\sigma}_{Z1}^2$ и $\hat{\mu}_{W1}, \hat{\sigma}_{W1}^2$ для гипотезы H_1 . По этим оценкам для заданной вероятности ложной тревоги $P_{ЛТ}$ определяется вероятность обнаружения $P_{обн}$.

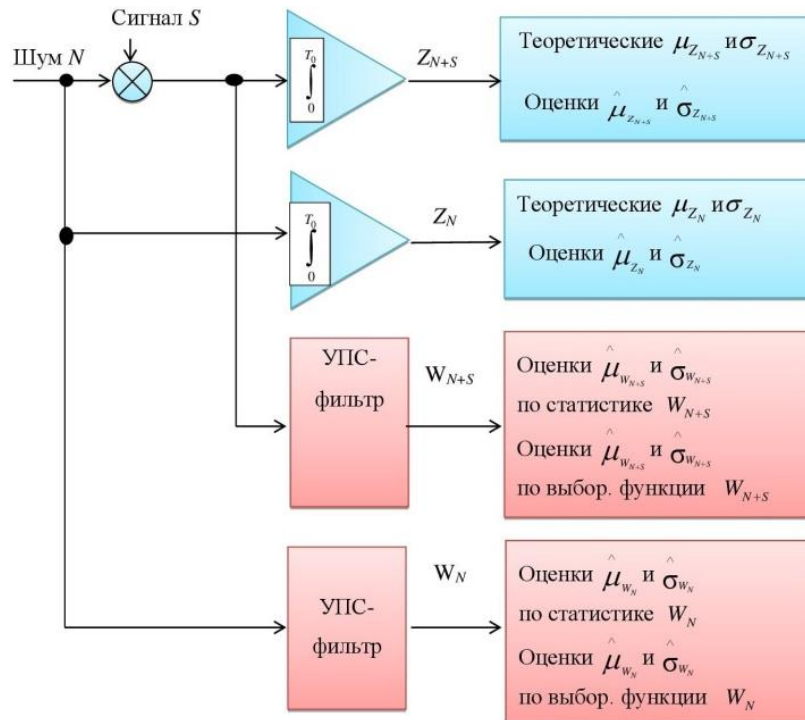


Рис. 1. Блок-схема алгоритма статистического моделирования
Fig. 1. Block diagram of the algorithm statistical modeling

Для статистики Z при заданном ρ вычисляются оценки $\hat{\mu}_{Z0}, \hat{\sigma}_{Z0}^2$ и $\hat{\mu}_{Z1}, \hat{\sigma}_{Z1}^2$, которые сравниваются с теоретическими значениями μ_{Z0}, σ_{Z0}^2 и μ_{Z1}, σ_{Z1}^2 .

Так как для статистики W теоретические значения μ_Z, σ_Z^2 рассчитать не удастся, то для получения более надежного результата оценки производятся двумя разными способами: при заданном ρ оценки $\hat{\mu}_{W0}, \hat{\sigma}_{W0}^2$ и $\hat{\mu}_{W1}, \hat{\sigma}_{W1}^2$ вычисляются, во-первых, непосредственно по выборке W и, во-вторых, по нормированной гистограмме выборки W , а затем сравниваются.

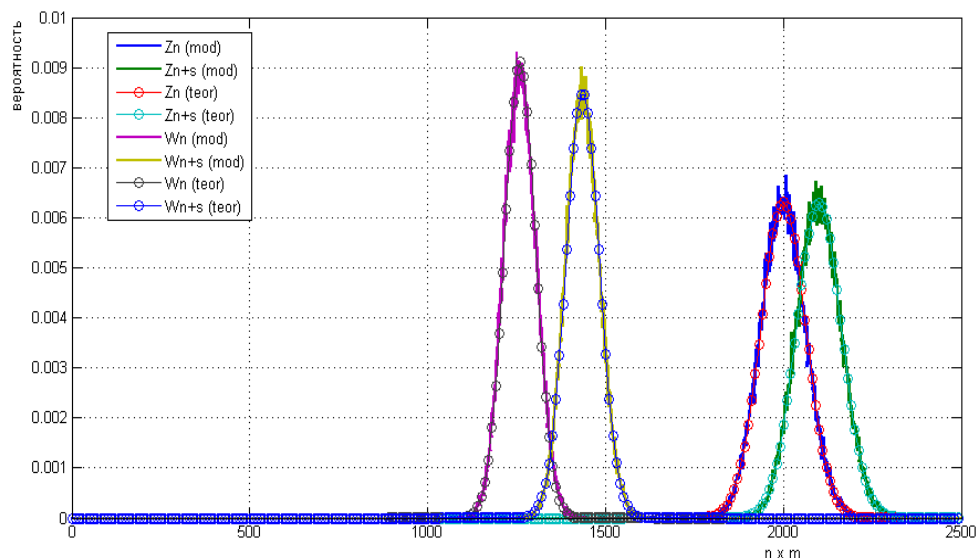


Рис. 2. Плотности вероятности процессов Z и W и их гистограммы для гипотез H_0 и H_1
Fig. 2. Probability densities of Z and W processes and their histograms for hypotheses H_0 and H_1

На рис. 2 в качестве примера приведены результаты математического моделирования случайных процессов Z и W , а именно: теоретические значения плотностей $f_Z(\sigma_n)$, $f_Z(\sigma_{n+s})$ и $f_W(\sigma_n)$, $f_W(\sigma_{n+s})$ и их нормированные гистограммы, построенные по математической модели. Параметры модели: $n = 20$, $m = 100$, $c = 100$, $\rho = 0,05$, первый порог h_0 равен медиане порядковой статистики $X_{(i)}$, $k = 19,34$. (Размеры массивов для построения гистограмм – 100 000.) На рис. 2 хорошо видно, что использование УПС-фильтра привело к существенному увеличению разделимости случайных процессов на выходе УПС-фильтра (W) по сравнению с выходом интегратора (Z). Коэффициенты разделимости γ , полученные при моделировании: $\gamma_Z = 0,048$ и $\gamma_W = 0,386$, что близко к теоретическим значениям.

2.1. Моделирование влияния порога отсечения h_0

Как показано в [4], для статистики W в случае малых значений n и m при изменении порога отсечения h_0 коэффициенты разделимости γ_W изменяются и достигают максимума при значениях h_0 , близких к математическому ожиданию шума.

Необходимо учитывать, что процесс W является только частью процесса Z (используется только часть выборки $X_{(i)}$, превышающая порог h_0). Поэтому его плотность вероятности является условной плотностью вероятности $P(W | X_{(i)} > h_0)$. То есть необходимо ввести нормирующий коэффициент $(1 - \alpha)$, где α определяется из решения уравнения (3).

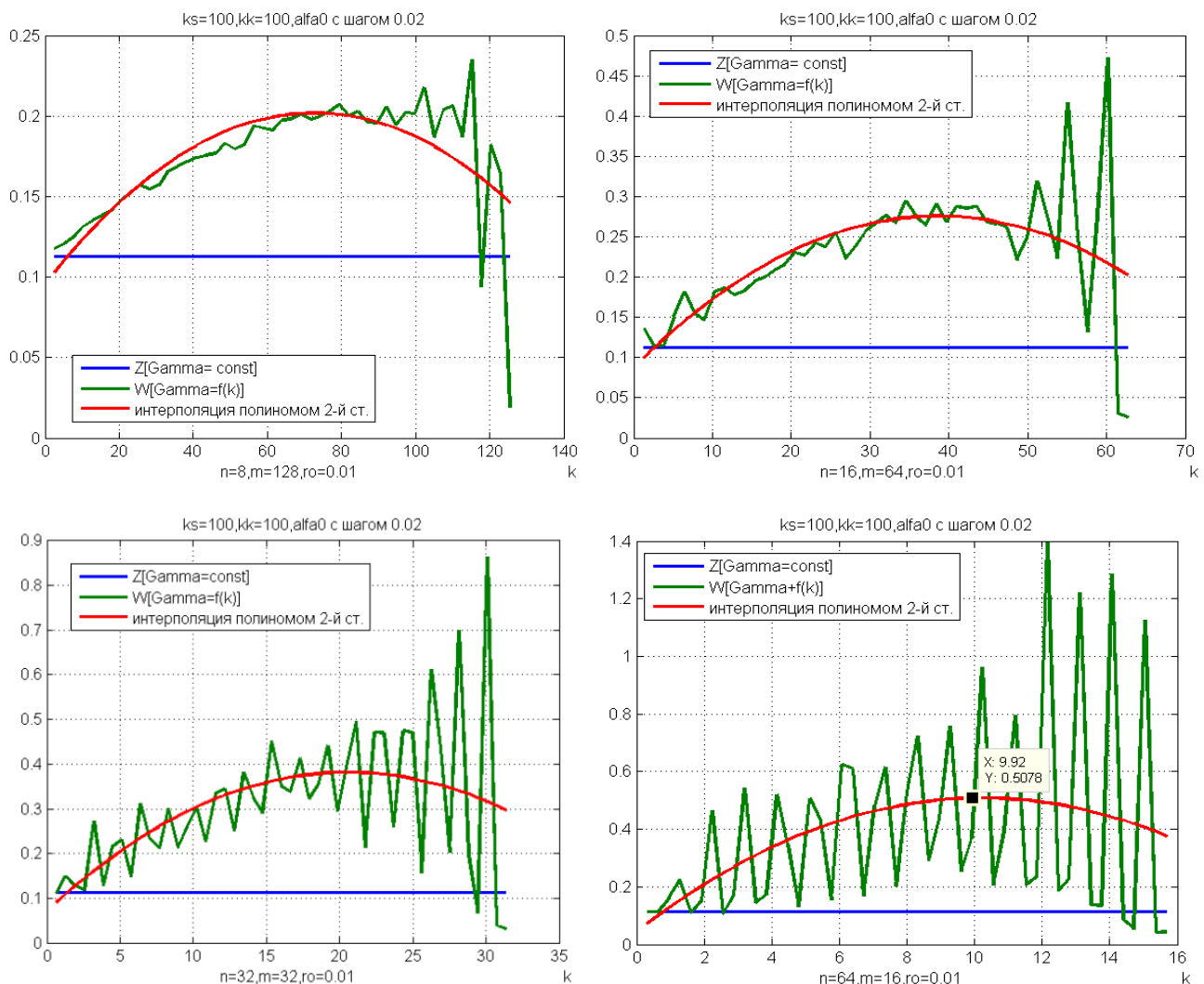


Рис. 3. Зависимости коэффициентов разделимости γ от порога отсечения h_0
Fig. 3. Dependences of the separability coefficients γ on the cut-off threshold h_0

На рис. 3 приведены графики изменения γ в зависимости от порога отсечения h_0 . Шаг по порогу отсечения равен 0,02 квантиля, $\rho = 0,01$. На рис. 3 хорошо видно, что коэффициент разделимости γ имеет максимум, приблизительно равный $m/2$, что соответствует аналитическому результату.

2.2. Моделирование влияния соотношений m и n на коэффициент разделимости γ

На рис. 3 также видно, что коэффициент разделимости $\gamma_{\max}$ (и, следовательно, вероятность обнаружения $P_{\text{обн}}$) сильно зависит от соотношения m и n .

Как показывает моделирование, оптимальным соотношением m и n является их приблизительное равенство.

Рассмотрим изменение $P_{\text{обн}}$ при различных соотношениях m и n от отношения сигнал/помеха ρ при $P_{\text{лт}} = 0,005$. Эти графики приведены на рис. 4. На этом рисунке для сравнения также приведены графики (теория и модель) изменения $P_{\text{обн}}(\rho)$ при $P_{\text{лт}} = 0,005$ для исходного процесса Z .

На рис. 4 видно, что функция $P_{\text{обн}}(\rho)$ имеет ступенчатый характер, причем «высота» ступени тем больше, чем меньше m . Этот факт объясняется формулой (2).

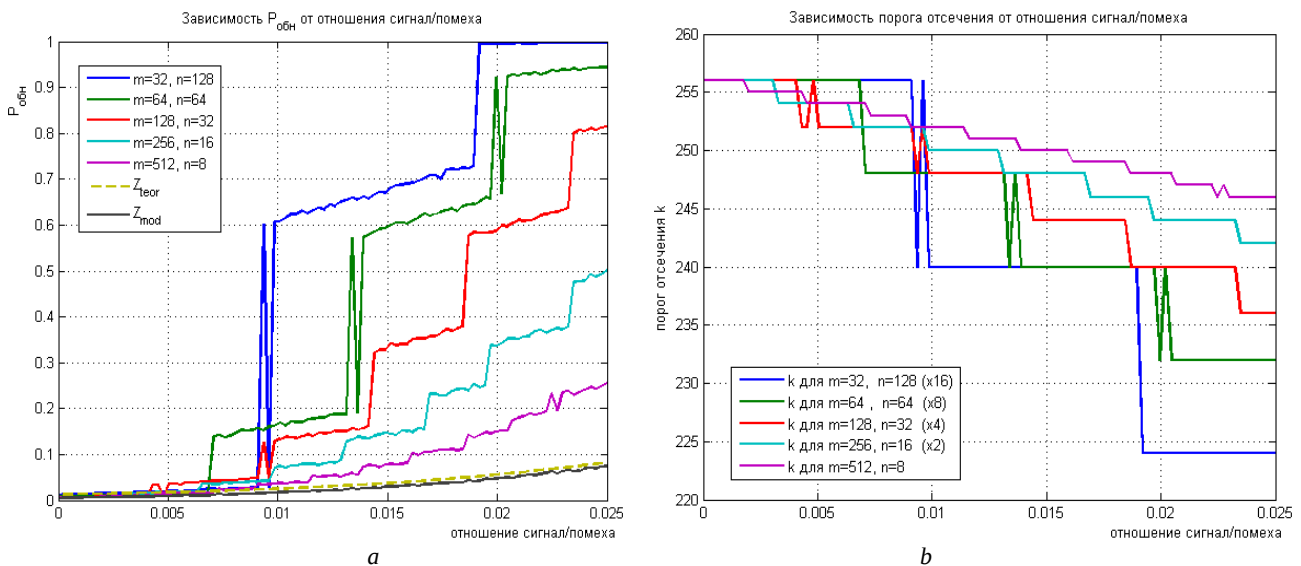


Рис. 4. Изменение $P_{\text{обн}}(\rho)$ при различных m и n (a). Зависимость порога отсечения от ρ (b)

Fig. 4. Change in $P_{\text{det}}(\rho)$ for different m and n (a). Cutoff threshold versus ρ (b)

Известно [9], что при больших значениях m достаточно точным приближением к математическому ожиданию элемента порядковой статистики с номером μ_j является значение, удовлетворяющее уравнению $P(x) = j/(m+1)$. Если ввести в рассмотрение функцию Q , такую что $Q[P(x)] = x$, то получим асимптотическую формулу $\mu_j \sim Q(j/(m+1))$, где $1 \leq j \leq m$, т.е. математические ожидания μ_j приближенно равны квантилям функции распределения $P(x)$, взятым с равномерным шагом. Следовательно, чем меньше m , тем больше шаг по квантилям. Из формулы (2) следует, что с ростом ρ растут оценки $\hat{\mu}_j$, порог k уменьшается и, как следствие, происходит изменение индекса суммирования с k на $(k-1)$. При этом $P_{\text{обн}}$ «скачком» изменяется на величину, определяемую приращением квантиля. С ростом m $P_{\text{обн}}$ для процесса W падает и стремится к $P_{\text{обн}}$ для процесса Z .

Пилообразный вид графиков на рис. 3 объясняется этими скачкообразными переходами. На рис. 4 также показаны изменения порога отсечения (приведенные к общему масштабу), соответствующие «скачкам» $P_{\text{обн}}$. Например, для $m = 32$ с ростом ρ k меняется от 16 до 14.

На рис. 5 приведены нормированные гистограммы процессов Z и W для шума и сигнала с $\rho = 0,0085$ и $\rho = 0,01$, т.е. до и после изменения порога с $k = 16$ на $k = 15$. Из анализа этих гистограмм видно, что, если для процесса Z увеличение ρ практически не влияет на расхождение гистограмм, то

для процесса W небольшое увеличение ρ существенно раздвигает гистограммы шума N и смеси сигнала и шума $N + S$, т.е. $P_{\text{обн}}$ увеличивается.

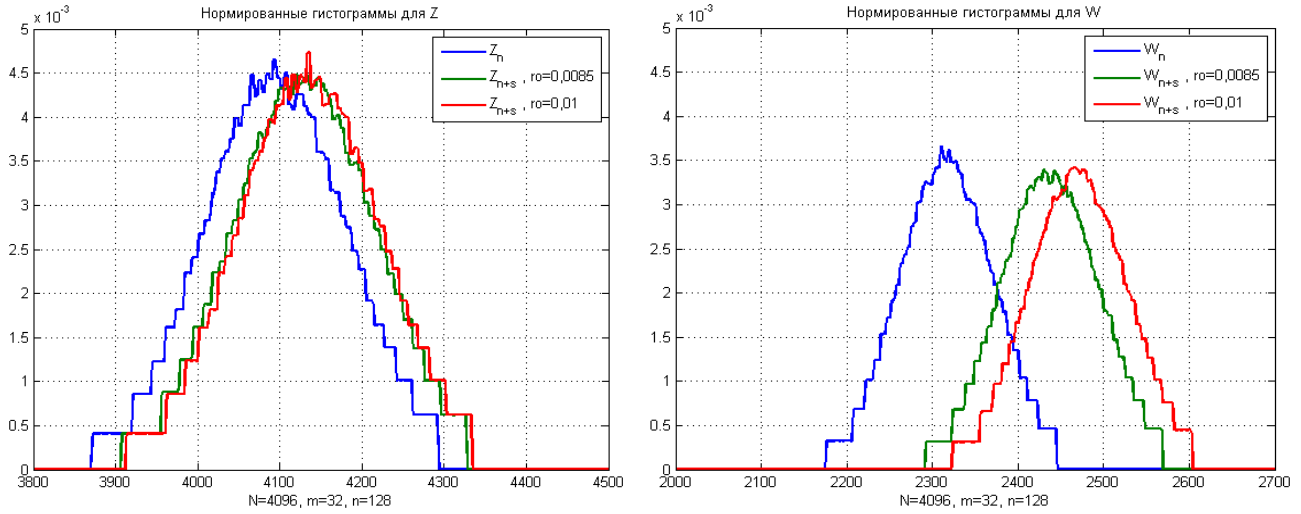


Рис. 5. Нормированные гистограммы процессов Z и W

Fig. 5. Normalized histograms of processes Z and W

2.3. Моделирование влияния «глубины» матрицы УПС-фильтра

Дисперсия, рассчитанная по формуле (7), является теоретической. На практике используется оценка этой дисперсии по матрице $(X_{(ij)})$ УПС-фильтра, и эта оценка зависит от «глубины» матрицы $X_{(ij)}$, т.е. числа ее столбцов – c . В статье [4] приведены результаты математического моделирования с.к.о. УПС W в зависимости от числа столбцов памяти c , содержащей матрицу порядковых статистик $X_{(ij)}$. При $c = 1$, т.е. когда $X_{(ij)}$ вырождается в вектор, дисперсия определяется по формуле [5]

$$\sigma_w^2 = 2n \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \sigma^4 e^{-(h/2\sigma^2)} \left[1 + \sum_{k=1}^{n/2+1} \frac{(h/2\sigma^2)^k}{k!} \right] - \left(n \sigma^2 e^{-(h/2\sigma^2)} \left[1 + \sum_{k=1}^{n/2} \frac{(h/2\sigma^2)^k}{k!} \right] \right)^2,$$

где h – порог отсеечения, и $\sigma_w > \sigma_z$, затем σ_w спадает, и уже при $c > 4$ $\sigma_w < \sigma_z$ и быстро стремится к своему «потенциальному» значению, определяемому формулой (7), т.е. к значению, когда «глубина» памяти велика.

Влияние «глубины» памяти $X_{(ij)}$ на $P_{\text{обн}}$ исследуется на модели обработки гидроакустической информации, рассмотренной в [10]. Моделируется проход цели мимо ненаправленного приемника, т.е. ρ вначале растет от нуля до максимума и после прохода траверса уменьшается до нуля.

Параметры модели: время наблюдения $T_0 = 10$, $\Delta F = 1\,000$, $N = 20\,000$, $P_{\text{лт}} = 0,005$. Сравниваются «глубина» памяти $c = 6, 12$ и 18 при $(m = 100, n = 200)$ и $(m = 200, n = 100)$, размер статистики $ks = 10\,000$.

На рис. 6 представлены графики изменения $P_{\text{обн}}$ для указанных выше параметров.

Из приведенных рисунков видно:

- $P_{\text{обн}}$ для статистики W всегда больше, чем для статистики Z ;
- $P_{\text{обн}}$ для статистики W растет с увеличением «глубины» памяти c ;
- $P_{\text{обн}}$ для статистики W меньше потенциальной $P_{\text{обн}}$ из-за ограниченного размера матрицы $X_{(ij)}$;
- $P_{\text{обн}}$ для статистики W зависит от соотношения m и n .

– для статистики W сдвиг максимума $P_{\text{обн}}$ (сдвиг относительно траверса, т.е. ρ_{max}) определяется временем заполнения матрицы $X_{(ij)}$, т.е. параметром c .

Для корректного сравнения $P_{\text{обн}}$ по статистикам W и Z при фиксированной вероятности ложной тревоги $P_{\text{лт}}$ необходимо учитывать, что плотность вероятности $W - P_w$ является, как показано выше,

условной плотностью вероятности. Поэтому необходимо вводить весовой коэффициент $(1 - \alpha)$. Кроме того, с.к.о. оценки шума σ_w растет с уменьшением «глубины» матрицы $\mathbf{X}_{(ij)}$.

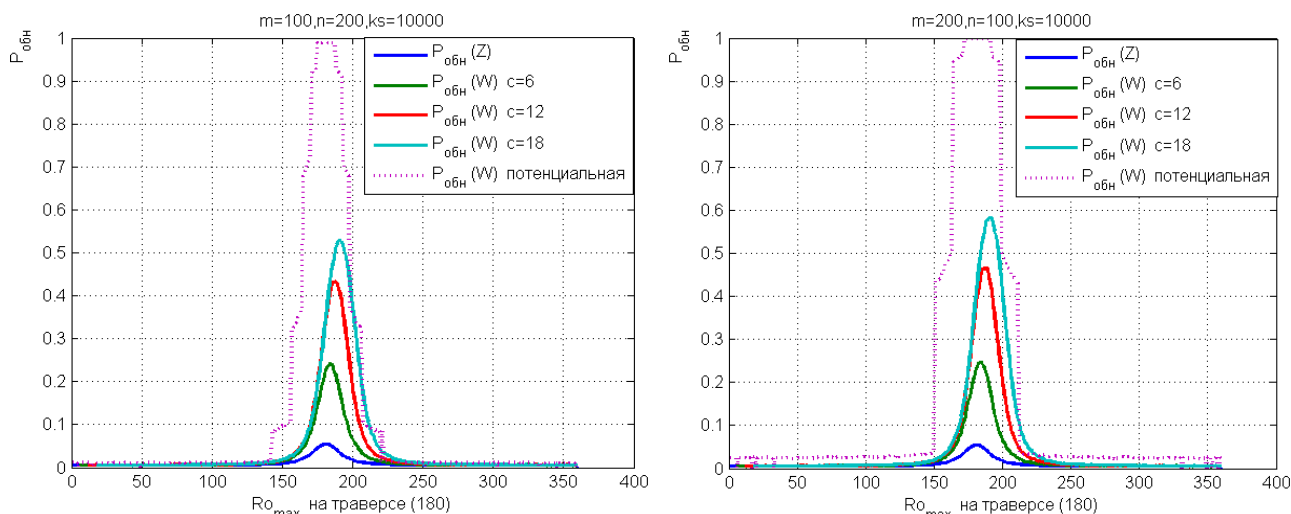


Рис. 6. Сравнение $P_{обн}$ статистик W и Z при различных c
Fig. 6. Comparison of P_{det} statistics W and Z for different c

Таким образом, порог для шума должен пересчитываться:

h_0 – порог для $P_{ЛТ}$, рассчитанный для плотности вероятности $W - N(\mu_w, \sigma_w^2)$ для шума;

h_1 – порог для $P_{ЛТ}$ с учетом весового коэффициента $(1 - \alpha)$ ($h_0 > h_1$);

h_2 – порог для $P_{ЛТ}$, рассчитанный с учетом «глубины» c матрицы $\mathbf{X}_{(ij)}$ ($h_1 < h_2$).

Заключение

Исследован алгоритм обнаружения сигналов на фоне шума, основанный на свойствах усеченных порядковых статистик (УПС-фильтр), который позволяет обеспечить большую вероятность обнаружения $P_{обн}$ при заданной вероятности ложной тревоги $P_{ЛТ}$ по сравнению с «классическим» алгоритмом проверки двух гипотез. Выигрыш достигается за счет введения дополнительного порога, отсекающего малые значения обрабатываемого сигнала, и использования для построения оценки этого порога информации, не использующейся в «классическом» алгоритме и содержащейся в предыдущих реализациях сигнала.

Список источников

1. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М. : Сов. радио, 1968. Т. 2. 504 с.
2. Бурдик В.С. Анализ гидроакустических систем. Л. : Судостроение, 1988. 392 с.
3. Зарайский В.А., Тюрин А.М. Теория гидролокации. Л. : ВМА, 1975. 604 с.
4. Рудько И.М. Применение порядковых статистик в задачах обнаружения // Управление большими системами. М. : ИПУ РАН, 2012. Вып. 37. С. 63–83.
5. Рудько И.М. Статистические свойства суммы членов усеченного вариационного ряда // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 1 (22). С. 124–130.
6. Рудько И.М. Применение порядковых статистик в задачах обнаружения в частотной области // Управление большими системами. М. : ИПУ РАН, 2016. Вып. 62. С. 6–29.
7. David H.A., Nagaraja H.N. Order Statistics. Hoboken, NJ : John Wiley & Sons, 2003. 458 p. (Wiley Series in Probability and Statistics).
8. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М. : Сов. радио, 1969. Т. 1. 752 с.
9. Дэйвид Г. Порядковые статистики. М. : Наука, 1979. 336 с.
10. Рудько И.М. Обнаружение подвижного объекта с использованием порядковых статистик // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2019. № 48. С. 42–50.

References

1. Levin, B.R. (1968) *Teoreticheskie osnovy statisticheskoy radiotekhniki* [Theoretical Foundations of Statistical Radio Engineering]. 2. Moscow: Sovetskoe radio.
2. Burdic, W.S. (1984) *Analiz gidroakusticheskikh sistem* [Acoustic System Analysis]. Leningrad: Sudostroenie.
3. Zarayskiy, V.A. & Tyurin, A.M. (1975) *Teoriya gidrolokatsii* [Theory of Hydrolocation]. Leningrad: VMA.
4. Rudko, I.M. (2012) Applying Order Statistics to Detection Problems. *Upravlenie bol'shimi sistemami – Large-Scale Systems Control*. 37. pp. 63–83.
5. Rudko, I.M. (2013) Statistical characteristics to sum of terms of truncated variational series. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(22). pp. 124–130.
6. Rudko, I.M. (2016) Applying order statistic to detection problems in the frequency domain. *Upravlenie bol'shimi sistemami – Large-Scale Systems Control*. 62(3). pp. 6–29.
7. David, H.A. & Nagaraja, H.N. (2003) *Order Statistics*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
8. Levin, B.R. (1969) *Teoreticheskie osnovy statisticheskoy radiotekhniki* [Theoretical Foundations of Statistical Radio Engineering]. Vol. 1. Moscow: Sovetskoe radio.
9. David, H.A. (1975) *Poryadkovye statistiki* [Order Statistics]. Translated from English. Moscow: Nauka.
10. Rudko, I.M. (2019) Detection of moving object using order statistics. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 48. pp. 42–50. DOI: 10.17223/19988605/48/5

Информация об авторе:

Рудько Игорь Михайлович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник Института проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН (Москва, Россия). E-mail: igor-rudko@mail.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Information about the author:

Rudko Igor M. (Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation). E-mail: igor-rudko@mail.ru

The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 14.01.2022; принята к публикации 30.08.2022

Received 14.01.2022; accepted for publication 30.08.2022

Научная статья

УДК 004.942

doi: 10.17223/19988605/60/6

Математическое и программное обеспечение для численного моделирования геомеханического состояния углепородного массива

Андрей Борисович Цветков

Сибирский государственный индустриальный университет, Новокузнецк, Россия, atsvet@mail.ru

Аннотация. Предлагается подход для построения нелинейной математической модели напряженно-деформированного состояния углепородного массива, в которой учитывается интегральное воздействие на горные породы природных и техногенных сил. Для исследования предложенной нелинейной модели разработан комплекс проблемно-ориентированных программ и приведены результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: нелинейная математическая модель; напряженно-деформированное состояние; массив горных пород

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Кемеровской области в рамках научного проекта № 20-41-420004.

Для цитирования: Цветков А.Б. Математическое и программное обеспечение для численного моделирования геомеханического состояния углепородного массива // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 60. С. 52–58. doi: 10.17223/19988605/60/6

Original article

doi: 10.17223/19988605/60/6

Mathematical and software for numerical modeling of geomechanical state of carbon mass

Andrey B. Tsvetkov

Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russian Federation, atsvet@mail.ru

Abstract. Underground mining is associated with mine workings and subsequent arrangement of free space in accordance with the purpose of the designed object. Man-made impact on the massif leads to violation of the natural field of stresses and formation in the field of mining of zones of high mountain pressure and rock unloading, which can lead to mountain impacts, sudden emissions of coal, rock and gas, collapses.

Analysis of results of mathematical simulation of stress-strain state of the developed section of the massif is necessary for detection and prevention of pre-accident situations. The results of experiments confirm that the stress field of undisturbed rocks, formed under the influence of natural forces, is determined by the relations of the theory of elasticity. Based on studies, it was found that under the influence of anthropogenic forces, a zone is formed around the developed space, in which the connection between stresses and deformations is non-linear. Therefore, taking into account the properties of rocks in the mathematical model, the deformation conditions of which are determined by nonlinear equations, will allow to obtain qualitatively new information on the stressed-deformed state of rocks in the field of influence of mine workings.

The article proposes an approach for constructing a nonlinear mathematical model of the stress-strain state of the carbon mass, which takes into account the integral effect on rocks of natural and man-made forces. To study the proposed nonlinear model, the author developed a set of problem-oriented programs and presented the results of computational experiments.

Keywords: nonlinear mathematical model; stress-strain state; rock mass

Acknowledgments: The study was carried out with the financial support of the Russian Federation and the Kemerovo region as part of the scientific project No. 20-41-420004.

For citation: Tsvetkov, A.B. (2022) Mathematical and software for numerical modeling of the geomechanical state of the carbon mass. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 60. pp. 52–58. doi: 10.17223/19988605/60/6

Геологическая среда – сложный природный объект. Методология описания сложных систем рассмотрена Г. Хакеном, философия которого предусматривает три уровня описания: микро-, мезо- и макроскопический [1]. Поэтому автором предлагается рассматривать геосреду как иерархическую нелинейную систему, декомпозицию которой, в зависимости от задач исследования, необходимо проводить согласно данным трем уровням.

Из геосреды на макроуровне выделяется исследуемый участок геомассива. На микроуровне возникает необходимость введения параметров, которые позволили бы описывать наиболее значимые особенности поведения на мезоуровне – это свойства горных пород и действующие на них силы. На мезо- и макроуровне связь между параметрами обеспечивается посредством уравнений, в которых учитываются не сами процессы на микроуровне, а их проявление и влияние на геосреду при воздействии природных и техногенных сил. Такой подход позволяет рассматривать общие сценарии поведения геомассива, включающего систему горных выработок, а также является основой для исследования посредством математического моделирования его геомеханического состояния [1, 2].

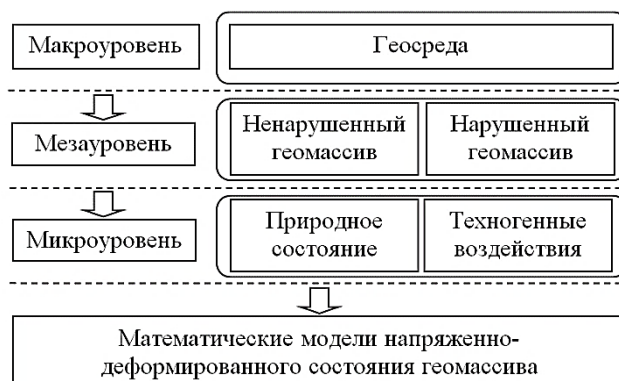


Рис. 1. Схема построения математических моделей напряженно-деформированного состояния

Fig. 1. Scheme for constructing mathematical models of the stress-strain state

Если ставится задача исследования напряженно-деформированного состояния геомассива при воздействии природных и техногенных сил, то можно ограничиться мезоуровнем, считая его представительным. Геомассив по отношению к техногенным воздействиям находится в двух состояниях – природном и нарушенном. В результате горных работ происходит существенное изменение природного состояния горного массива: локализация деформаций и формирование в области нарушения целостности горных пород разгруженных зон и концентраторов напряжений [3]. При таких условиях наблюдаются необратимые деформации, и математическая модель напряженно-деформированного состояния геомассива на мезоуровне должна строиться на основе законов, соответствующих нелинейному характеру деформирования горных пород [4, 5] (рис. 1).

1. Определяющие соотношения математической модели

Установлено, что выемка угольного пласта приводит к смещениям части углепородной толщи. На рис. 2 приведены зоны деформирования пород, которые характерны для геомассива, включающего очистные выработки [6]. По результатам натурных исследований выявлено, что в природном состоянии, формирующемся в геологическом масштабе времени, горные породы сохраняют сплошность, и для определения напряженно-деформированного состояния ненарушенной части геомассива D_1 можно применять соотношения теории упругости [3, 7].

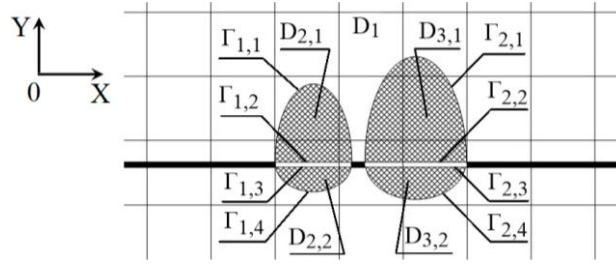


Рис. 2. Зоны деформирования
Fig. 2. Deformation zones

Исследователями отмечено, что при техногенных воздействиях породы частично ослаблены трещинами и обладают пластическими свойствами [8]. Следовательно, для зон влияния горных выработок $D_{2,1}$, $D_{2,2}$, $D_{3,1}$ и $D_{3,2}$, выделенных на рис. 2 штриховкой, характерна нелинейная зависимость деформаций от напряжений.

В соответствии с теорией сдвижения горных пород зоны деформирования $D_{2,1}$, $D_{2,2}$, $D_{3,1}$, $D_{3,2}$ определяются контурами $\Gamma_{1,1}$, $\Gamma_{1,4}$, $\Gamma_{2,1}$, $\Gamma_{2,4}$. Контурами $\Gamma_{1,2}$, $\Gamma_{1,3}$, $\Gamma_{2,2}$, $\Gamma_{2,3}$ задана область очистного выработанного пространства. Расчетная область D представлена в виде объединения областей D_1 , $D_{2,1}$, $D_{2,2}$, $D_{3,1}$, $D_{3,2}$: $D = D_1 \cup D_{2,1} \cup D_{2,2} \cup D_{3,1} \cup D_{3,2}$.

Для определения напряженно-деформированного состояния геомассива решена следующая краевая задача: в области D найти горизонтальные $u = u(x, y)$ и вертикальные перемещения $v = v(x, y)$, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \mu^* (u''_{xx} + u''_{yy}) + (\mu^* + \lambda^*) (u''_{xx} + v''_{xy}) = 0, \\ \mu^* (v''_{xx} + v''_{yy}) + (\mu^* + \lambda^*) (u''_{xy} + v''_{yy}) + \rho g = 0 \end{cases} \quad (1)$$

и граничным условиям: $u(0, y) = 0$, $u(h_x, y) = 0$, $u(x, 0) = 0$, $u(x, h_y) = 0$, $v'_x(0, y) = 0$, $v'_x(h_x, y) = 0$, $\sigma_y(x, 0) = 0$, $v(x, h_y) = 0$; где h_x , h_y – размер расчетной области массива по оси абсцисс и ординат; ρ – плотность пород; g – ускорение свободного падения; $\lambda^* = E^* v^* / ((1 + v^*)(1 - 2v^*))$, $\mu^* = E^* / (2(1 + v^*))$, $E^* = 3E_1 / (2E_1 \Psi + 1 - 2v)$, $v^* = (1/2 - (1 - 2v) / (2E_1 \Psi)) / (1 + (1 - 2v) / (2E_1 \Psi))$ – переменные параметры; E_1 – начальное значение переменного параметра; v – коэффициент Пуассона; Ψ – функция, описывающая условия деформирования пород, которая равна $1/(2\mu)$ в зоне упругого деформирования, $3\varepsilon/(2\sigma(\varepsilon))$ – в остальных зонах; $\sigma(\varepsilon)$ – функция, аппроксимирующая экспериментальные диаграммы деформирования, полученные по результатам испытаний различных видов угля и пород.

Начальное значение переменного параметра E_1 предлагается определять согласно зависимости

$$E_1 = k \cdot E, \quad (2)$$

где E – модуль упругости; k – безразмерный эмпирический коэффициент, $(0 < k \leq 1)$. Для вычисления эмпирического коэффициента k разработана формула вида:

$$k = \begin{cases} \frac{y - y_{\Gamma_{1,2}}}{y_{\Gamma_{1,1}} - y_{\Gamma_{1,2}}}, & \text{если } (x, y) \in D_{2,1}; \\ \frac{y - y_{\Gamma_{1,3}}}{y_{\Gamma_{1,4}} - y_{\Gamma_{1,3}}}, & \text{если } (x, y) \in D_{2,2}; \\ \frac{y - y_{\Gamma_{2,2}}}{y_{\Gamma_{2,1}} - y_{\Gamma_{2,2}}}, & \text{если } (x, y) \in D_{3,1}; \\ \frac{y - y_{\Gamma_{2,3}}}{y_{\Gamma_{2,4}} - y_{\Gamma_{2,3}}}, & \text{если } (x, y) \in D_{3,2}; \\ 1, & \text{если } (x, y) \in D_1, \end{cases} \quad (3)$$

где y – вертикальные координаты точек, принадлежащих зонам $D_{2,1}$, $D_{2,2}$, $D_{3,1}$ и $D_{3,2}$ (см. рис. 2); $y_{Г1,1}$, $y_{Г1,2}$, $y_{Г1,3}$, $y_{Г1,4}$, $y_{Г2,1}$, $y_{Г2,2}$, $y_{Г2,3}$, $y_{Г2,4}$ – вертикальные координаты точек, принадлежащих контурам $Г_{1,1}$, $Г_{1,2}$, $Г_{1,3}$, $Г_{1,4}$, $Г_{2,1}$, $Г_{2,2}$, $Г_{2,3}$ и $Г_{2,4}$. Предложенная математическая модель исследуется методом конечных элементов.

При определении напряжений, деформаций и перемещений применяется модифицированный алгоритм метода конечных элементов, адаптированный к системам компьютерной алгебры. В разработанном алгоритме предусмотрены аналитические операции преобразования функциональных зависимостей, что обеспечивает определение коэффициентов разрешающей системы уравнений в вычислительной среде с учетом реальных условий деформирования пород в зонах влияния горной выработки [9]. Для проведения вычислительных экспериментов разработан комплекс проблемно-ориентированных программ в системе Mathematica на языке Wolfram Language [10, 11].

2. Вычислительный эксперимент

Пример исследования геомеханического состояния участка геомассива в зоне влияния системы очистных выработок приведен на рис. 3, 4.

Расчетная область исследуемого участка геомассива представлена: алевролитом крупнозернистым Ω_1 , Ω_9 , Ω_{15} ; алевролитом мелкозернистым Ω_2 , Ω_{10} , Ω_{20} ; песчаником Ω_3 , Ω_5 , Ω_8 , Ω_{11} , Ω_{13} , Ω_{18} , Ω_{21} , Ω_{23} , Ω_{26} ; переслаиванием алевролитов разной зернистости Ω_4 , Ω_{12} , Ω_{17} ; алевролитом среднезернистым Ω_6 , Ω_{14} , Ω_{24} ; аргиллитом Ω_7 , Ω_{25} ; пластом угля Ω_{16} , Ω_{19} , Ω_{22} [12]. Границы очистных выработок в угольном пласте Ω_{19} обозначены точками А, В, С, D (см. рис. 3). Краевая задача (1) решалась при условии, что массовые силы направлены вдоль вертикальной оси и создавались собственным весом пород.

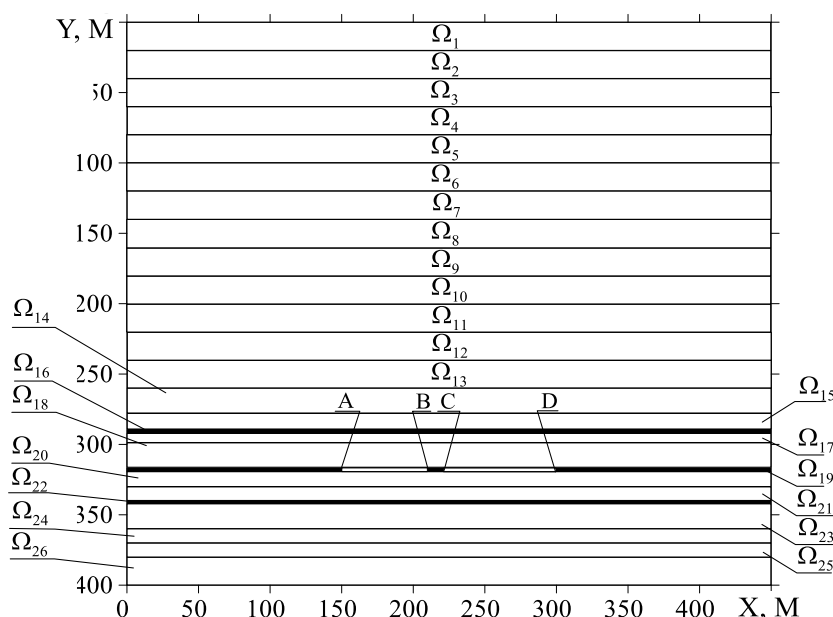


Рис. 3. Схема исследуемого участка
Fig. 3. Scheme of the study area

Результаты численного моделирования распределения вертикальных напряжений приведены на рис. 4, а, b (на рисунках знак «минус» соответствует сжимающим напряжениям).

Распределения сжимающих вертикальных напряжений характеризуются максимумами в краевых участках горных выработок обрабатываемого угольного пласта Ω_{19} и постепенным затуханием дополнительных вертикальных напряжений, вызванных техногенным воздействием, при удалении от него в направлении вмещающей толщи. На вертикальных границах расчетной области величины сжимающих вертикальных напряжений соответствуют природному полю напряжений нетронутого массива (см. рис. 4, а).

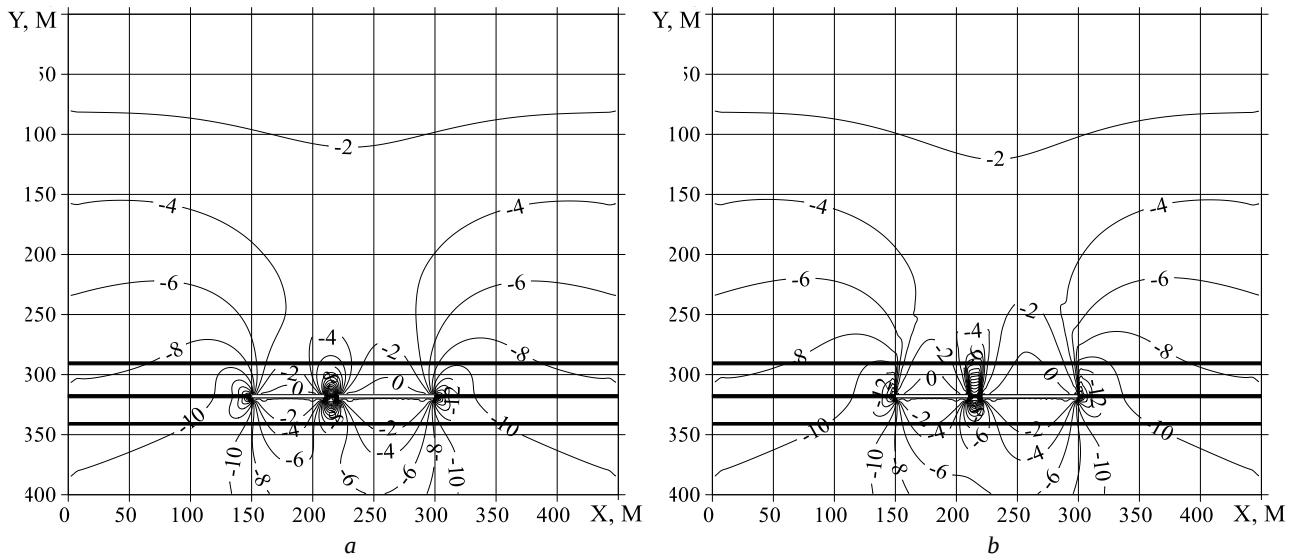


Рис. 4. Изолинии распределения вертикальных напряжений:
 а – решение краевой задачи теории упругости; б – нелинейное решение
 Fig. 4. Vertical stress distribution isolines:
 а – solution of the boundary value problem of elasticity theory; б – non-linear solution

Из анализа полученных результатов следует, что в области техногенных воздействий формируются зоны разгрузки, в которых сжимающие вертикальные напряжения меньше соответствующих напряжений в нетронutom массиве. Непосредственно в подработанных породах кровли выработанного пространства наблюдаются зоны растягивающих вертикальных напряжений.

По результатам вычислительного эксперимента выявлено, что зоны растягивающих вертикальных напряжений, сформировавшиеся над кровлей очистных выработок, для нелинейного решения в несколько раз больше, чем при условии линейной зависимости между напряжениями и деформациями (см. рис. 4, а, б).

При решении краевой задачи теории упругости подрабатываемые участки угольного пласта Ω_{16} , расположенные в зонах техногенных воздействий от пласта Ω_{19} , не попали в зоны растягивающих напряжений (рис. 4, а). При нелинейном решении подработанный пласт Ω_{16} в окрестности $x = 270$ м располагается в зоне растягивающих вертикальных напряжений (см. рис. 4, б).

Многочисленными исследованиями установлено, что прочность горных пород при растяжении на порядок меньше, чем при сжатии [5]. Поэтому в зонах растяжения наблюдаются дезинтеграция и повышенное образование пор и трещин, что приводит к способности пород вмещать больший объем газа по сравнению с их природным состоянием. В участках геомассива с повышенным по сравнению с природным удельным содержанием газа формируется газовый коллектор. Увеличение количества метана в порах газового коллектора способно приводить к выдавливанию метановоздушной смеси в направлении горных выработок, что может создавать опасные ситуации при проведении очистных работ.

Заключение

Таким образом, учет в математической модели условий деформирования горных пород, определяемых нелинейными уравнениями, позволил получить качественно новую информацию о геомеханическом состоянии в области влияния горных выработок. Техногенные воздействия на геомассив приводят к нарушению природного поля напряжений и формированию в области ведения горных работ зон повышенного горного давления и разгрузки, что может спровоцировать предаварийные ситуации. Предложенная нелинейная математическая модель позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние геомассива и выявлять при проведении горных работ опасные участки, которые необходимо учитывать при создании проектной документации.

Список источников

1. Хакен Г. Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам. М. : Мир, 1991. 240 с.
2. Ершов Л.В., Максимов В.А. Математические основы физики горных пород. М. : МГИ, 1968. 293 с.
3. Борисов А.А. Механика горных пород и массивов. М. : Недра, 1980. 360 с.
4. Цветков А.Б., Павлова Л.Д., Фрянов В.Н. Сравнительная оценка математических моделей геомеханического состояния массива горных пород // Краевые задачи и математическое моделирование : темат. сб. науч. ст. Новокузнецк, 2014. С. 314–317.
5. Карташов Ю.М., Матвеев Б.В., Михеев Г.В. Прочность и деформируемость горных пород. М. : Недра, 1979. 269 с.
6. Турчанинов И.А., Иофис М.А., Каспарьян Э.В. Основы механики горных пород. Л. : Недра, 1989. 488 с.
7. Грицко Г.И., Власенко Б.В., Посохов Г.Е. Прогнозирование и расчет проявлений горного давления. Новосибирск : Наука, 1980. 159 с.
8. Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г. Пластичность горных пород. М. : Недра, 1979. 301 с.
9. Цветков А.Б., Павлова Л.Д. Адаптация алгоритма метода конечных элементов к системе символьной математики // Наукоемкие технологии разработки и использования минеральных ресурсов : Междунар. науч.-практ. конф. : сб. науч. ст. Новокузнецк, 2015. С. 121–125.
10. Tsvetkov A.B., Pavlova L.D., Fryanov V.N. Numerical simulation of geomechanical state of coal massif in the vicinity of underground workings in the superimposed seams // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2017. V. 84. Art. 012005. URL: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1755-1315/84/1/012005/pdf> (дата обращения: 22.03.2022).
11. Цветков А.Б., Павлова Л.Д., Фрянов В.Н. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020618419. Программа численного исследования математической модели деформирования геомассива с учетом разномодульности горных пород // Реестр программ для ЭВМ. Дата регистрации 27.07.2020.
12. Штумпф Г.Г. Физико-технические свойства горных пород и углей Кузнецкого бассейна. М. : Недра, 1994. 447 с.

References

1. Hacken, G. (1991) *Informatsiya i samoorganizatsiya. Makroskopicheskiy podkhod k slozhnym sistemam* [Information and self-organization. Macroscopic approach to complex systems]. Translated from English. Moscow: Mir.
2. Ershov, L.V. & Maksimov, V.A. (1968) *Matematicheskie osnovy fiziki gornykh porod* [Mathematical Foundations of Rock Physics]. Translated from English. Moscow: MGI.
3. Borisov, A.A. (1980) *Mekhanika gornykh porod i massivov* [Mechanics of Rocks and Massifs]. Moscow: Nedra.
4. Tsvetkov, A.B., Pavlova, L.D. & Fryanov, V.N. (2014) *Sravnitel'naya otsenka matematicheskikh modeley geomekhanicheskogo sostoyaniya massiva gornykh porod* [Comparative assessment of mathematical models of the geomechanical state of the rock mass]. In: *Kraevye zadachi i matematicheskoe modelirovanie* [Boundary problems and mathematical modeling]. Novokuznetsk: [s.n.], pp. 314–317.
5. Kartashov, Yu.M., Matveev, B.V., & Mikheev, G.V. (1979) *Prochnost' i deformiruemost' gornykh porod* [Strength and Deformability of Rocks]. Moscow: Nedra.
6. Turchaninov, I.A., Iofis, M.A. & Kasparyan, E.V. (1989) *Osnovy mekhaniki gornykh porod* [Fundamentals of Rock Mechanics]. Leningrad: Nedra.
7. Gritsko, G.I., Vlasenko, B.V. & Posokhov, G.E. (1980) *Prognozirovanie i raschet proyavleniy gornogo davleniya* [Forecasting and Calculation of Manifestations of Mountain Pressure]. Novosibirsk: Nauka.
8. Stavrogin, A.N. & Protosenya, A.G. (1979) *Plastichnost' gornykh porod* [Plasticity of Rocks]. Moscow: Nedra.
9. Tsvetkov, A.B. & Pavlova, L.D. (2015) *Adaptatsiya algoritma metoda konechnykh elementov k sisteme simvol'noy matematiki* [Adaptation of the algorithm of the finite element method to the system of symbolic mathematics]. In: Fryanov, V.I. (ed.) *Naukoemkie tekhnologii razrabotki i ispol'zovaniya mineral'nykh resursov* [Science-intensive technologies for the development and use of mineral resources]. Novokuznetsk: [s.n.], pp. 121–125.
10. Tsvetkov, A.B., Pavlova, A.B. & Fryanov, V.N. (2017) Numerical simulation of geomechanical state of coal massif in the vicinity of underground workings in the superimposed seams. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 84(012005). [Online] Available from: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1755-1315/84/1/012005/pdf> (Accessed: 22nd March 2022). DOI: 10.1088/1755-1315/84/1/012005
11. Tsvetkov, A.B., Pavlova, L.D. & Fryanov, V.N. (2020) *Svidetel'stvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM № 2020618419. Programma chislen'nogo issledovaniya matematicheskoy modeli deformirovaniya geomassiva s uchetom raznomodul'nosti gornykh porod* [Certificate of state registration of the program for computers No. 2020618419. Program for numerical study of mathematical model of geomassival deformation taking into account rock modularity]. Computer Program Register. Registration Date 27.07.2020
12. Stumpf, G.G. (1994) *Fiziko-tekhnicheskie svoystva gornykh porod i ugley Kuznetskogo basseyna* [Physical and Technical Properties of Rocks and Coals of the Kuznetsk Basin]. Moscow: Nedra.

Информация об авторе:

Цветков Андрей Борисович – доцент, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики Института информационных технологий и автоматизированных систем Сибирского государственного индустриального университета (Новокузнецк, Россия). E-mail: atsvet@mail.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Tsvetkov Andrey B. (Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Institute of Information Technologies and Automated Systems, Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russian Federation). E-mail: atsvet@mail.ru

The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 16.04.2022; принята к публикации 30.08.2022

Received 16.04.2022; accepted for publication 30.08.2022

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

DATA PROCESSING

Научная статья

УДК 004.94

doi: 10.17223/19988605/60/7

Многокритериальный анализ статистической устойчивости системных характеристик информационно-телекоммуникационных каналов**Юлия Валентиновна Доронина¹, Александр Владимирович Скатков²**^{1,2} Севастопольский государственный университет, Севастополь, Россия¹ apkSev@yandex.ru² vm1945@mail.ru

Аннотация. Рассматривается основа подхода к исследованию системной статистической устойчивости характеристик моделей информационно-телекоммуникационных каналов (состояний и времени пребывания в устойчивом состоянии) на основе алгоритма фазового укрупнения и полумарковской модели. Предложена метрика системной многомерной устойчивости моделей. Совокупность показателей устойчивости формирует метрику полимодельного комплекса (системную многомерную устойчивость), что позволило наиболее полно оценивать качество моделей информационных каналов. Исследованы некоторые свойства системной многомерной устойчивости и предложена метрика статистической системной многомерной волатильности.

Ключевые слова: системная статистическая устойчивость; фазовое укрупнение состояний; информационно-телекоммуникационные каналы; время пребывания в состояниях; полумарковская модель; мультимоделирование

Для цитирования: Доронина Ю.В., Скатков А.В. Многокритериальный анализ статистической устойчивости системных характеристик информационно-телекоммуникационных каналов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 60. С. 59–72. doi: 10.17223/19988605/60/7

Original article

doi: 10.17223/19988605/60/7

Multi-criteria analysis of statistical stability of system characteristics of information and telecommunication channels**Yulia V. Doronina¹, Alexander V. Skatkov²**^{1,2} Sevastopol State University, Sevastopol, Russia¹ apkSev@yandex.ru² vm1945@mail.ru

Abstract. The basis of the approach to the study of the system statistical stability of the characteristics of models of information and telecommunication channels (states and residence time in a stable state) based on the algorithm of phase enlargement and the Semimarkov model is considered. A metric of the system multidimensional stability of models is proposed. The set of stability indicators forms the metric of the polymodel complex (system multidimen-

sional stability), which made it possible to fully assess the quality of information channel models. Some properties of system multidimensional stability are investigated and a metric of statistical system multidimensional volatility is proposed.

Keywords: system statistical stability; phase aggregation of states; information and telecommunication channels; residence time in states; semi-Martian model; multimodeling

For citation: Dronina, Yu.V., Skatkov, A.V. (2022) Multicriteria analysis of statistical stability of system characteristics of information and telecommunication channels. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 60. pp. 59–72. doi: 10.17223/19988605/60/7

Принципы обеспечения устойчивости системных характеристик информационно-телекоммуникационных каналов (ИТКК) критических объектов часто исследуются в рамках сетевого уровня, при этом эффект управления определяется топологическим ресурсом информационно-телекоммуникационной системы [1, 2] либо маршрутами передачи информационных потоков [3–5].

Состояние ИТКК характеризуется рядом аналоговых характеристик: максимальной и средней нагрузкой, пропускной способностью и т.п. В определенных задачах для систем массового обслуживания (СМО) эти характеристики являются исчерпывающими, но в современных масштабированных сетях большой размерности требуется работать с множеством случайных функций, что в общем случае представляет определенную сложность.

Наряду с этим при росте размерности и масштаба ИТКК целесообразно интегрировать разнородную информацию по состоянию этих сетей и, по возможности, укрупнять. Это необходимо как для снижения объема информации, так и для извлечения знаний из комплексированных данных о состоянии ИТКК.

В теории сложных систем для агрегирования исследуемых процессов применяются, например, идеи фазового укрупнения (ФУ) [6–8]. Проблема устойчивости стохастических систем в схемах фазового усреднения заключается в том, чтобы установить наличие фундаментальных свойств стохастических систем с марковскими и / или полумарковскими переключениями. Одно из возможных решений таких задач – использование функции Ляпунова для усредненных или предельных диффузионных систем. В этом случае функция Ляпунова является случайной эволюцией для соответствующей стохастической системы [6].

При больших размерностях сети ИТКК укрупнение (агрегирование) как самих ИТКК по типам, так и их состояний является необходимым и естественным подходом. Типизация ИТКК в данной статье не рассматривается, а множество всех возможных состояний ИТКК предварительно подвергается процедуре кластеризации посредством экспертного анализа. Целью кластеризации является агрегирование фазового пространства состояний ИТКК, а полученные при этом кластеры и есть множества состояний, которые образуют ФУ для конкретной схемы ИТКК. Дальнейший анализ предлагается проводить для состояний ИТКК в агрегированном (кластеризованном) множестве, что позволит решать регуляторную задачу управления ИТКК.

В этой связи устойчивость состояния каналов, как и статистическая устойчивость моделей функционирования этих каналов, будет проводиться по следующим направлениям:

- устойчивость мощности множества кластеров (УК);
- устойчивость вероятностей перехода между кластерами (УВП);
- устойчивость времен пребывания ИТКК в подмножествах фазово-укрупненных состояний (УВС).

Таким образом, качественная проблема исследования устойчивости распадается на три самостоятельных задачи анализа: 1 – УК, 2 – УВП, 3 – УВС, – а отрицательное решение по одной из них ведет к отсутствию этого свойства у системы в целом, что определяет полноту свойства устойчивости ИТКК.

В случае, когда установлена полная или частичная устойчивость, обеспечение, например, максимизации времени пребывания ИТКК в заданном подмножестве состояний сопряжено с принятием

решения о выборе некоторого режима функционирования ИТКК. Нахождение соответствующих помехам управлений, нивелирующих эти помехи, не является целью данной статьи, такие соответствия предполагаются принятыми в качестве исходных данных задачи.

С целью уточнения терминологии и в связи с указанными выше трудностями трактовки понятийного аппарата устойчивости примем следующие обозначения системной многомерной устойчивости в задачах анализа системной динамики, в которой не детализируется источник возникновения неустойчивости, а анализируются свойства модели в ее выходных характеристиках на основе полумарковских процессов (ПМП). В этом контексте системная статистическая устойчивость – это требуемое свойство квалиметрии модели по k -характеристикам. Например, в рассматриваемой задаче примем следующее обозначение: cpt – устойчивость, где c отражает решение первой задачи УК, p – решение задачи УВП, t –УВС. Предложенная детализация квалиметрической оценки устойчивости модели ИТКК позволит на этапе формализации сохранить представимость понятийного аппарата и снизить описательную сложность при постановке задач различного уровня.

В данной статье кластеры выбираются априори в соответствии с методами, принятыми в теории надежности сложных систем. Устойчивость кластеров считается обеспеченной, в связи с чем этот аспект не рассматривается, хотя и не представляет методологической трудности. Таким образом, в представленном исследовании предложен подход к оценке pt – статистической устойчивости фазового укрупнения состояний информационных каналов.

1. Обзор исследований по аспектам устойчивости и фазового укрупнения сложных процессов

Существующие исследования относительно понятия «устойчивость» в основном рассматривают качество модели по отношению к изменениям ее характеристик, основных связей между переменными, типов ограничений в определенном интервале ее параметров [9–11].

Наряду с этим пониманием устойчивость – это фундаментальное свойство динамических систем, исследуемое зачастую в двух плоскостях: как реакция системы на внешние возмущения динамического характера и как изменение параметров в ответ на эти возмущения [12–14]. Таким образом, имеет место двойственная статистическая устойчивость: самой системы и ее модели. В частности, для различных видов шифрования с соответствующими уровнями криптостойкости кодов выбор наиболее криптостойкого из них может быть сопряжен с удорожанием функционирования и повышением нагрузки канала, а следовательно, – со снижением его устойчивости [15–18].

Статистическая устойчивость рассматривалась авторами как аспект квалиметрического анализа моделей [9]. В работах [10, 11] предложено осуществлять сопоставление модели исследуемому объекту по целостному свойству через измерение расстояния между соответствующими точками в n -мерном пространстве элементарных свойств объекта. В [10, 19] рассматривается «мера близости j -го свойства модели $y_j(M)$ его значению $y_j(Ob)$ у объекта-оригинала, которая оценивается разностью $|y_j(Ob) - y_j(M)| \leq \varepsilon$ и по n свойствам обобщается в условие $\rho(M, Ob) \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, где Ob – объект, $y_j(Ob)$ – значение объекта $y_j(M)$ – значение модели» [10]. Для измерения расстояния $\rho(M, Ob)$ применяются различные метрики, которые рекомендовано использовать для оценки моделей по адекватности [11, 19–21].

Другим аспектом устойчивости является устойчивость решения задачи как результата моделирования (обнаруженных свойств, сценариев, траекторий, состояний) по отношению к изменениям параметров модели или начальных условий [22–25]. Если зависимость от параметров и начальных условий является регулярной, то малые ошибки в исходных данных приведут к небольшим изменениям результата.

В одном из известных алгоритмов укрупнения подразумевается разбиение фазового пространства состояний (ФПС) на непересекающиеся классы рабочих и нерабочих состояний (в нашем случае это могут быть классы устойчивых и неустойчивых состояний ИТКК): $E = \bigcup_{k=1}^r E_k$. На основе новых

классов строится новая схема ФПС системы, функционирование которой описывает процессы исследуемой системы [6].

Таким образом, задачи оценивания устойчивости статистик – результата моделирования объектов, как и устойчивости моделей в целом, формулировались и решались ранее в рамках методологических факторов квалитетрического анализа либо других модельных свойств [26–29]. Однако в практических задачах, решаемых на основе имитационного моделирования, в том числе полумарковскими моделями, наиболее часто на первый план выступает проблема размерности выборки. Это, в свою очередь, требует различных планов решения, в том числе на основе агрегирования состояний и применения алгоритмов ФУ. В противном случае проблема размерности моделей может приводить к росту неопределенности и, как следствие, – к сложности управления ИТКК.

2. Оценка *spt*-устойчивости моделей при решении задачи функционирования ИТКК

Процесс управления длительностью пребывания ИТКК в подмножестве устойчивых состояний разворачивается в двумерном модельном пространстве – формировании устойчивого множества состояний ИТКК и статистической устойчивости модели. Рассмотрим их подробнее.

Введем следующие обозначения: $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ – пространство состояний ИТКК; e_n – состояние ИТКК на n -м шаге (после n -го перехода, $n \geq 0$); θ_n – время пребывания ИТКК в состоянии e_n . Поскольку в задаче подразумевается анализ длительностей пребывания ИТКК в состояниях (и / или их подмножествах), целесообразно применить полумарковский подход.

Полумарковский процесс $(S(t), t \geq 0)$ задается процессом марковского восстановления (ПМВ) вида: $\{e_n, \theta_n, n \geq 0\}$, в котором первая компонента ($e_n, n \geq 0$) – вложенная цепь Маркова (ВЦМ), вторая ($\theta_n, n \geq 0$) определяет времена пребывания в состояниях. Один из способов задания ПМВ в пространстве состояний ИТКК представляет собой полумарковскую (ПМ) матрицу вида:

$$Q_{S_k, l}(t) = P\{S_{n+1} = s_k, \theta_{n+1} \leq t \mid S_n = s_l\}, s_k, s_l \in E. \quad (1)$$

Элементы полумарковской матрицы (1) представляют собой вероятности того, что произойдет переход ИТКК из состояния s_k в состояние s_l , и время пребывания в состоянии s_k будет не больше, чем t . На основе этой матрицы можно вычислить другие аналитические характеристики ПМВ [6, 7].

Требуется сформировать механизм принятия решений по выбору полумарковской модели функционирования на основе оценок *spt*-устойчивости моделей, в том числе с учетом средних времен пребывания в выделенных подмножествах состояний ИТКК с учетом схемы исследования (рис. 1).

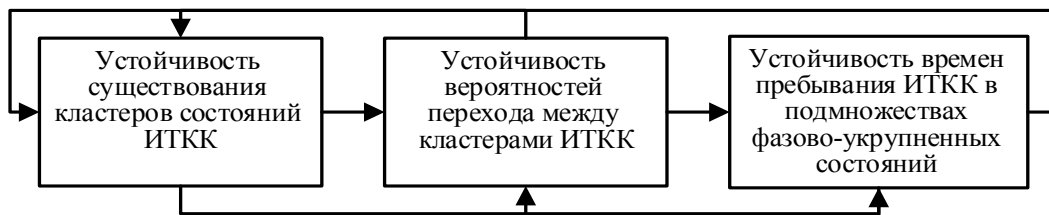


Рис. 1. Схема исследования многокритериальной устойчивости при анализе функционирования информационно-телекоммуникационных каналов

Fig. 1. The scheme of the study of multicriteria stability in the analysis of the functioning of the information and telecommunication channels

Предположим, что время функционирования ИТКК – случайная величина (СВ) α_1 с функцией распределения (ФР) $F_1(t) = P\{\alpha_1 \leq t\}$. Время предварительной обработки данных в канале – СВ α_2 с ФР $F_2(t) = P\{\alpha_2 \leq t\}$. Время безотказной работы при реализации процесса операционной обработки – СВ α_3 с ФР $F_3(t) = P\{\alpha_3 \leq t\}$, время восстановления – СВ β_3 с ФР $G_3(t) = P\{\beta_3 \leq t\}$. СВ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3$ пред-

полагаются независимыми, имеющими конечные математические ожидания и дисперсии; у ФР $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$, $G_3(t)$ существуют плотности $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $g_3(t)$.

Определим ФР $F_\theta(t)$ СВ θ , представляющую собой время пребывания в работоспособных состояниях ИТКК. Возможностью отказов самого канала в данной модели пренебрегается, и предполагается, что интенсивность внешних воздействий выше, чем интенсивность внутренних неисправностей ИТКК. Для описания функционирования ИТКК используем ПМВ $\{\xi_n, \theta_n, n \geq 0\}$ и соответствующий ему полумарковский процесс (ПМП) $\xi(t)$ с состояниями:

1x – ИТКК функционирует в номинальном режиме, реализуется предобработка данных;

20x – состояние операционной обработки данных в канале, время, оставшееся до отказа процесса, равно $x \geq 0$;

21x – состояние (мгновенное), соответствующее моменту окончания процесса операционной обработки данных в ИТКК; время, оставшееся до отказа, равно $x \geq 0$;

30y – произошло восстановление прерванного процесса операционной обработки данных в ИТКК; время, оставшееся до окончания выбора типа шифрования, равно $y \geq 0$;

31y – произошел сбой при операционной обработке данных; время, оставшееся до окончания прерванного процесса, равно $y \geq 0$.

Граф состояний ИТКК на основе ПМП приведен на рис. 2.

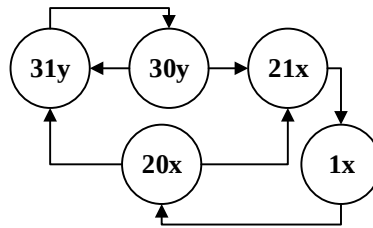


Рис. 2. Укрупненная модель состояний информационно-телекоммуникационных каналов при управлении выбором типа шифрования
Fig2. An enlarged model of information and telecommunication channels states when managing the choice of encryption type

Фазовое пространство состояний имеет вид: $E = \{1x, 20x, 21x, 30y, 31y\}$. Найдем распределение времени пребывания ПМП $\xi(t)$ в подмножестве состояний E_+ . Примем $\tau_{20x}, \tau_{30y}, \tau_{31y}, \tau_{1x}$ – времена пребывания $\xi(t)$ в E_+ с начальными состояниями 20x, 30y, 31y, 1x соответственно, а $\Phi_{20x}(x, t)$, $\Phi_{30y}(y, t)$, $\Phi_{31y}(y, t)$, $\Phi_{1x}(x, t)$ – их функции распределения. Запишем систему уравнений марковского восстановления для функций $\bar{\Phi}_i(x, t) = 1 - \Phi_i(x, t)$, $i = \overline{1, 4}$, с учетом того, что $\bar{\Phi}_{30y}(x, t) = 1$, $\bar{\Phi}_{31y}(x, t) = 1$, $\bar{\Phi}_{20x}(x, t) = \bar{F}_2(t)$, $\bar{\Phi}_{1x}(x, t) = \bar{F}_1(t) \cdot \bar{F}_2(t)$ согласно [6] при $0 \leq t < x$, и $\bar{F}_1(t) \cdot \bar{F}_2(t) = 1 - \int_0^t F_1(x) f_2(t-x) dx$. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{20x}(x, t) &= \int_0^{t-x} f_2(x+y) \bar{\Phi}_{31x}(y, t-x) dy + \bar{F}_2(t), \\ \bar{\Phi}_{30y}(x, t) &= \int_0^x f_3(x-s) \bar{\Phi}_{31y}(s, t-x+s) ds, \\ \bar{\Phi}_{31y}(x, t) &= \int_0^{t-x} g_3(t-x-\tau) \bar{\Phi}_{30y}(x, x+\tau) d\tau + \bar{G}_3(t-x), \\ \bar{\Phi}_{1x}(x, t) &= \int_0^{t-x} f_1(t-x-\tau) \bar{\Phi}_{20x}(x, x+\tau) d\tau + (1 - \int_0^t F_1(x) f_2(t-x) dx). \end{aligned} \quad (1)$$

Решение системы (2) получено, например, в [6]. Однако при внесении хотя бы одного состояния в модель система усложняется на порядок. Таким образом, решение системы (3) позволяет получить времена пребывания процесса $\xi(t)$ в работоспособном подмножестве состояний E_+ и их ФР.

Рассмотрим теперь понятие статистической устойчивости модели процесса управления ИТКК. Введем ряд обозначений: M_x – исследуемая модель (на основе полумарковской модели (ПММ)), n – кратность запусков ПММ, $n = |N|$; ω_n – многомерная матрица, которая содержит результаты первичной статистики для оценивания статистической устойчивости времен пребывания ИТКК в наблюдаемых состояниях; γ^{M_x} – оценочная метрика статистической устойчивости модели M_x ; $\tilde{\gamma}$ – заданная лицом, принимающим решения (ЛПР) оценка статистики модели M_x ; $\Delta\gamma$ – мера близости текущей и заданной оценок статистики модели M_x ; ε – точность модели; p – доверительная вероятность оценки параметров модели. Символом " $\xrightarrow{M_x}$ " будем обозначать отображение, осуществляемое имитационной моделью M_x ; M_x, M_v, M_m – обозначения имитационных моделей соответственно: общее обозначение имитационной модели, модель с результатом в виде вектора, модель с результатом в виде матрицы.

На основе сформулированного авторами в [9] определения статистической устойчивости модели M_x оценивание статистической устойчивости времен пребывания ИТКК в наблюдаемых состояниях, начиная с некоторых $n_i \geq n_0, \tau_i > \tau_0, \tau \in T$, точности ε и доверительной вероятности p , может быть осуществлено при выполнении условия

$$\left| \gamma^{M_x}(\omega(n_i), t_k) - \tilde{\gamma} \right|_{\varepsilon, p} \leq \Delta\gamma \quad (2)$$

с учетом условия сходимости по статистической вероятности.

Величины $\tilde{\gamma}, \Delta\gamma, \varepsilon$ являются параметрическими инструментами управления, в том числе могут быть заложены в качестве параметров в систему поддержки принятия решений по оптимизации функционирования ИТКК.

Общая схема моделирования следующая: для некоторого числа запусков модели, за которое система из первоначального состояния перейдет в терминальное состояние, описываемое матрицей $\|T_{ij}^k\|$; $\|T_{ij}^{M_m}\|$ – «восстановленная» матрица времен переходов, содержащая статистические оценки τ_{ij} (эта матрица будет использована для анализа статистической устойчивости рассматриваемой модели и оценивания $\hat{\theta}_z, z = \overline{1, N}$); $\|\omega\|$ – матрица результатов моделирования; $\|P_{ij}\|$ – матрица переходов ПММ для $j \in E^*$; $\langle S_0, S_1, \dots, S_n \rangle$ – последовательность (цепочка) состояний ПММ; $\|P_{ij}^{M_m}\|$ – «восстановленная» матрица переходных вероятностей, содержащая статистические оценки P_{ij} [9].

Планы имитационных экспериментов по различным схемам моделирования могут быть представлены в виде кортежа $\Pi(k, \eta)$, где k – кратность запусков модели, $k = |K|$; $\eta_{\omega, v}$ – многомерная матрица с результатами первичной статистики. Обозначая D – множество допустимых планов ($J = |D|$), формализуем $\Pi_j(k_j, \eta_j)$ – реализуемый план моделирования.

Если при исследовании ИТКК на основе ПММ по схеме моделирования следующего вида: $\|T_{ij}\| \xrightarrow{M_v} \|T_{ij}^{M_x}\| \xrightarrow{M_m} \|\omega\|$, отклонение значений в матрице $\|T_{ij}^{M_m}\|$ не превысит заданную ЛПР величину $\tilde{\omega}_\tau$ (т.е. оценки $\hat{\theta}_z, z = \overline{1, N}$ будут находиться в заданных пределах), а для $\|P_{ij}\| \xrightarrow{M_v} \|P_{ij}^{M_x}\| \xrightarrow{M_m} \|v\|$ – величину $\tilde{v}_p$, то для плана экспериментов $\Pi(k, \omega, v)$ модель M_x будет считаться $\omega_\varphi, \tilde{v}_p$ при k запусках модели (ε, p -), или *cpt*-статистически устойчивой, и обозначаться $\gamma_\varepsilon^{2M_x}, \gamma_p^{2M_x}$.

Приведенная на рис. 3 схема отражает принцип снижения мощности множества решений для значений *cpt*-статистической устойчивости при моделировании процесса функционирования ИТКК,

заключающемся в выборе границ устойчивости. Этот процесс может быть связан с определением уровня фронта Парето при многокритериальной оптимизации решения (см. рис. 3, а) либо определением ЛПП граничных (допустимых) значений устойчивости модели при решении некоторой задачи (см. рис. 3, б) [29, 30].

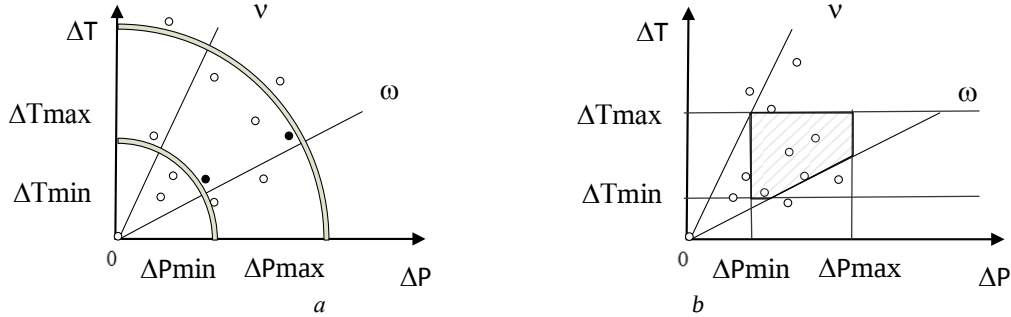


Рис. 3. Представление моделей ИТКК на плоскости на основе *cpt*-статистической устойчивости:
 а – определением уровня фронта Парето при многокритериальной оптимизации решения; б – определением граничных (допустимых) значений устойчивости модели при решении некоторой задачи
 Fig. 3. Representation of information and telecommunication channels models on a plane based on *cpt*-statistical stability:
 а – by determining the level of the Pareto front with multi-criteria optimization of the solution; б – by determining of the boundary (permissible) values of the stability of the model when solving a certain problem

Выбору подлежат решения из заштрихованной области (4 варианта решений, предпочтительной является самая нижняя точка (см. рис. 3, б); чем ближе точки решений к началу координат, тем выше устойчивость ИТКК, т.е. $\gamma_{\varepsilon, p}^{0M_x} \geq \gamma_{\varepsilon, p}^{2M_x}$, где $\gamma_{\varepsilon, p}^{0M_x}$ – *cpt*-статистическая устойчивость исследуемого объекта в точке начала координат по точности модели и доверительной вероятности оценки. Для локальной параметризации двумерной метрики статистической устойчивости, получим

$$\gamma_{\varepsilon}^{0M_x} \geq \gamma_{\varepsilon}^{2M_x}; \gamma_p^{0M_x} \geq \gamma_p^{2M_x}. \quad (3)$$

Отметим, что для приведенного случая (см. рис. 3, б) величины границ $\Delta P_{\min}, \Delta P_{\max}, \Delta T_{\min}, \Delta T_{\max}$ не зависят от времени; в более сложных случаях границы могут быть нестационарными, и, соответственно, область решений изменяется согласно требованиям ЛПП, что будет определять динамику фронта Парето [31–33].

Формализуем основные свойства меры *cpt*-статистической устойчивости в задачах анализа полумарковской модели сложных систем.

3. Внешняя (полная и частная) системная *cpt*-монотонность (многомерная монотонность) (ВПММ, ВЧММ) модели по *k*-экспериментальным наблюдениям

Определение 1. Модель обладает свойством ВПММ, если при $k_1^{M_1}, k_2^{M_1}$ – кратности запусков и с учетом неравенств $k_1^{M_1} > k_2^{M_1}$ и $\tau_i > \tau_0, \tau \in T$, выполняется $\Delta^2 \gamma_{k_1}^{M_1} > \Delta^2 \gamma_{k_2}^{M_1}$, следовательно, справедливо

$$\Delta^2 \gamma_{k_1}^{M_1}(\mathbf{v}_{\varphi}, \omega_{\tau}) > \Delta^2 \gamma_{k_2}^{M_1}(\mathbf{v}_{\varphi}, \omega_{\tau}), \quad (4)$$

и модель M_1 будем считать статистически *cpt*-устойчивой ($\Delta^2 \gamma_k^{M_1}$) и монотонной относительно запусков модели (*k*-ВПММ или просто *k*-ВММ).

При заданной устойчивости кластеров (*c*-устойчивости в предположении о детерминированной кластеризации) будем в дальнейшем подразумевать *pt*-устойчивость ИТКК; таким образом, рассматривается двумерная монотонность (ВПДМ, ВЧДМ).

Свойство ВПММ (4) позволяет сравнивать модели в смысле эффективности оценок и получать две матрицы-результаты: $\|P_{ij}\| \xrightarrow{M_v} \|P_{ij}^{M_x}\| \xrightarrow{M_m} \|\mathbf{v}\|$ и $\|T_{ij}\| \xrightarrow{M_v} \|T_{ij}^{M_x}\| \xrightarrow{M_m} \|\omega\|$, что соответствует гипотезе H_0 (ну-

левая гипотеза (H_0) – это гипотеза о том, что две пары совокупностей $\|P_{ij}\|, \|P_{ij}^{M_x}\|$ и $\|T_{ij}\|, \|T_{ij}^{M_x}\|$, которые сравниваются по нескольким признакам, не различаются между собой; рис. 4.).

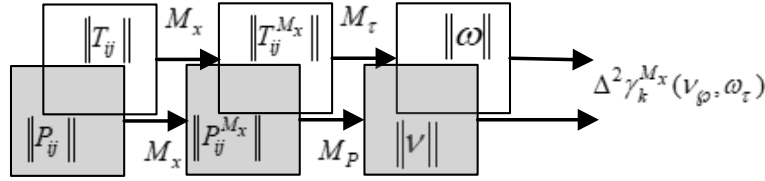


Рис. 4. Схема формирования метрик системной (двумерной) статистической устойчивости при исследовании функционирования ИТКК

Fig. 4. Scheme of formation of metrics of system (two-dimensional) statistical stability in the study of the functioning of information and telecommunication channels

Свойство метрики *cpt*-статистической устойчивости может быть сформулировано для других параметров ПММ. Рассмотрим некоторые из них.

Свойство 1. Свойство внешней полной двумерной монотонности (ВПДМ) ПММ по k , n -экспериментальным наблюдениям (или внешней двумерной монотонности (ВДМ)).

Пусть $A_1(\Delta^2 \gamma_{n_i}^{M_1}(v_{\varphi_{n_i}}, \omega_{\tau_{n_i}}))$, $A_2(\Delta^2 \gamma_{n_j}^{M_1}(v_{\varphi_{n_j}}, \omega_{\tau_{n_j}}))$, $A_3(\Delta^2 \gamma_{k_i}^{M_1}(v_{\varphi_{k_i}}, \omega_{\tau_{k_i}}))$, $A_4(\Delta^2 \gamma_{k_j}^{M_1}(v_{\varphi_{k_j}}, \omega_{\tau_{k_j}}))$ – утверждения, $i = \overline{1, I}$; $j = \overline{1, I}$. Если $\Delta^2 \gamma_{k_i}^{M_1} > \Delta^2 \gamma_{k_j}^{M_1}$ и выполняются условия в виде утверждений

$$\forall n_i(A_1) \exists n_j(A_2), (n_i > n_j) \rightarrow [A_1(\Delta^2 \gamma_{n_i}^{M_1}(v_{\varphi}, \omega_{\tau}) > A_2(\Delta^2 \gamma_{n_j}^{M_1}(v_{\varphi}, \omega_{\tau}))], \quad (5)$$

$$\forall k_i(A_3) \exists k_j(A_4), (k_i > k_j) \rightarrow [A_3(\Delta^2 \gamma_{k_i}^{M_1}(v_{\varphi}, \omega_{\tau}) > A_4(\Delta^2 \gamma_{k_j}^{M_1}(v_{\varphi}, \omega_{\tau}))], \quad (6)$$

то модель M_1 обладает свойством ВДМ (n , k -ВДМ):

$$\forall n_i(A_1) \exists n_j(A_2), (n_i > n_j), (k_i > k_j) \rightarrow [A_1 > A_2] \wedge [A_3 > A_4]. \quad (7)$$

Модель M_1 обладает свойством ВДМ, если выполняется (6) или следующее условие:

$$\forall n_i(A_1) \exists n_j(A_2), (n_i > n_j), (k_i > k_j) \rightarrow [A_1 > A_2] \vee [A_3 > A_4]. \quad (8)$$

Таким образом, для двух параметров модели n и k следует учитывать двумерность оценок $\Delta^2 \gamma_{k,n}^{M_1}(v_{\varphi_{k,n}}, \omega_{\tau_{k,n}})$.

Свойство 2. Свойство частной системной одномерной монотонности (ВЧОМ) модели по k -экспериментальным наблюдениям является частным случаем свойства многомерной и двумерной монотонностей ВЧММ (ВЧДМ) и формулируется следующим образом.

Модель M_2 обладает свойством ВЧОМ, если $A_5(\Delta \gamma_{k_i}^{M_2}(v_{\varphi_{k_i}}))$, $A_6(\Delta \gamma_{k_j}^{M_2}(v_{\varphi_{k_j}}))$ – предикаты, $i = \overline{1, I}$; $j = \overline{1, I}$, и для $k_1^{M_2}, k_2^{M_2}$ – кратности запусков при $\Delta \gamma_{k_1}^{M_2} > \Delta \gamma_{k_2}^{M_2}$ выполняются условия

$$\forall k_i(A_5) \exists k_j(A_6), (k_i > k_j) \rightarrow [A_5(\Delta \gamma_{k_i}^{M_2}(v_{\varphi})) > A_6(\Delta \gamma_{k_j}^{M_2}(v_{\varphi}))]; \quad (9)$$

тогда модель M_2 будем считать статистически устойчивой ($\Delta \gamma_k^{M_2}$) и монотонной относительно запусков модели (k -ВЧОМ).

Аналогичные рассуждения справедливы и для одномерной метрики $\Delta \gamma_k^{M_2}(\omega_{\tau})$:

$$\forall k_i(A_5) \exists k_j(A_6), (k_i > k_j) \rightarrow [A_5(\Delta \gamma_{k_i}^{M_2}(\omega_{\tau})) > A_6(\Delta \gamma_{k_j}^{M_2}(\omega_{\tau}))]. \quad (10)$$

С учетом (4) условие (10) для конкретных постановок задач может быть уточнено следующим образом:

$$\Delta \gamma_{k_1, \varepsilon}^{M_1}(v_{\varphi}, \varepsilon) > \Delta \gamma_{k_2, \varepsilon}^{M_1}(v_{\varphi}, \varepsilon), \Delta \gamma_{k_1, p}^{M_1}(v_{\varphi}, p) > \Delta \gamma_{k_2, p}^{M_1}(v_{\varphi}, p). \quad (11)$$

Условие (11) ослабляет требования полной монотонности, рассматривая эту характеристику применительно только к точности ε или доверительной вероятности p . Причем возможны случаи с фиксацией одного из параметров и учетом изменчивости другого.

Для сокращения записи метрики многомерной статистической устойчивости моделей предложено обозначение $\omega_{\varphi, \tau}^{1,1}$, которое имеет следующую трактовку: верхние индексы играют роль индикаторов одного из контролируемых элементов метрики: p или τ . Например, при достижении статистической устойчивости по τ , но недостижении по p , обозначение метрики примет вид: $\omega_{\varphi, \tau}^{0,1}$.

Определение 2. Мера неустойчивости процедуры восстановления матрицы переходов как модельный параметр (для ε_1 – различия $\|P_{ij}^{M_i}\|$, ε_2 – различия $\|T_{ij}^{M_i}\|$) определяется как *системная статистическая двумерная однородная волатильность* (СДОВ) на множестве из n реализаций с учетом стандартного отклонения s : $\mathcal{G}_i^j = s_i^j \sqrt{n_i}$, $i = \overline{1, I}$; $j = \overline{1, J}$ и $0 \leq n_i \leq N$, где N – предельный допустимый объем данных для модели M_x .

Однородность определяется однотипностью ε_1 и ε_2 – различий по каждому из планов моделирования в ПММ: $\|P_{ij}\| \xrightarrow{M_v} \|P_{ij}^{M_x}\| \xrightarrow{M_m} \|v\|$ и $\|T_{ij}\| \xrightarrow{M_v} \|T_{ij}^{M_x}\| \xrightarrow{M_m} \|\omega\|$.

В примере (см. рис. 2) элементы матрицы $\|T_{ij}^{M_i}\|$ представляют собой времена пребывания ИТКК в состояниях $\tau_{20x}, \tau_{30y}, \tau_{31y}, \tau_{1x}$ с ФР $\Phi_{20x}(x, t), \Phi_{30y}(y, t), \Phi_{31y}(y, t), \Phi_{1x}(x, t)$, определяемые решением системы (2).

Статистическая системная многомерная волатильность (СМВ) определяется для некоторого множества $\{\varepsilon_m\}$, $m = \overline{1, M}$, относительно матриц $\|\alpha_{ij}^{M_i}\|$ по плану моделирования вида: $\|\alpha_{ij}\| \xrightarrow{M_v} \|\alpha_{ij}^{M_x}\| \xrightarrow{M_m} \|v\|$, где $\|v\|$ – многомерная матрица, содержащая результаты первичной статистики для оценивания СМВ.

Следует отметить, что для СМВ в рамках ПММ при оценивании среднего времени пребывания ИТКК в некотором подмножестве состояний $j \in E^*$ на основе системы уравнений вида: $M\theta_i + \sum_{j \in E^*} P_{ij} \cdot \tau_j$, имеет место рост волатильности во втором слагаемом при росте значений локальных показателей в каждом из сомножителей (например, одномерной волатильности).

Выражение для метрики $\mathcal{G}_i^j$, $i = \overline{1, I}$; $j = \overline{1, J}$, позволяет оценить степень неустойчивости статистик (нестационарности статистик) в зависимости от объема повторных запусков моделей в полимодельном комплексе. Для моделей больших размерностей и при переменном числе запусков этот показатель позволит получить числовую меру верификации модели с точки зрения устойчивости (неустойчивости) статистик.

4. Результаты имитационного моделирования статистической устойчивости характеристик информационно-телекоммуникационных каналов

Модель построена в предположении о заданной устойчивости кластеров (априорной c -устойчивости) по графу состояний (см. рис. 2). Ограничения требуемых значений pt -устойчивости приняты в первой группе расчетов: $P_{\min} = 0,15$; $P_{\max} = 0,43$; $T_{\min} = 0,2$; $T_{\max} = 0,6$; во второй группе расчетов ЛПР изменены следующие значения: $P_{\max} = 0,6$; $T_{\min} = 0,1$; $T_{\max} = 0,4$.

На рис. 5 представлены результаты моделирования решений по состоянию ИТКК на основе метрик pt -статистической устойчивости и свойства ВДМ.

Приведенные на рис. 5 значения метрики cpt -статистической устойчивости отражают результаты моделирования состояния ИТКК на основе свойства ВДМ и заданных ЛПР ограничений параметров: (см. рис. 5, а) для границ $P_{\min} = 0,15$; $P_{\max} = 0,43$; $T_{\min} = 0,2$; $T_{\max} = 0,6$ в область решений попадают четыре точки ($T_1 = 0,3$; $P_1 = 0,2$; $T_2 = 0,3$; $P_2 = 0,3$; $T_3 = 0,5$; $P_3 = 0,3$; $T_4 = 0,4$; $P_4 = 0,4$, предпочтительна $\Delta T_1 = 0,3$; $\Delta P_1 = 0,2$); при изменении границ (см. рис. 5, б), а именно расширении допустимого множества ΔP на 0,17 единиц и сдвиге ΔT : $P_{\min} = 0,15$; $P_{\max} = 0,6$; $T_{\min} = 0,1$; $T_{\max} = 0,4$, в область решений

попадают четыре точки: $T_1 = 0,3; P_1 = 0,2$; $T_2 = 0,3; P_2 = 0,2$; $T_3 = 0,3; P_3 = 0,3$; $T_4 = 0,4; P_4 = 0,4$, пред-
почтительна $T_1 = 0,1; P_1 = 0,2$.

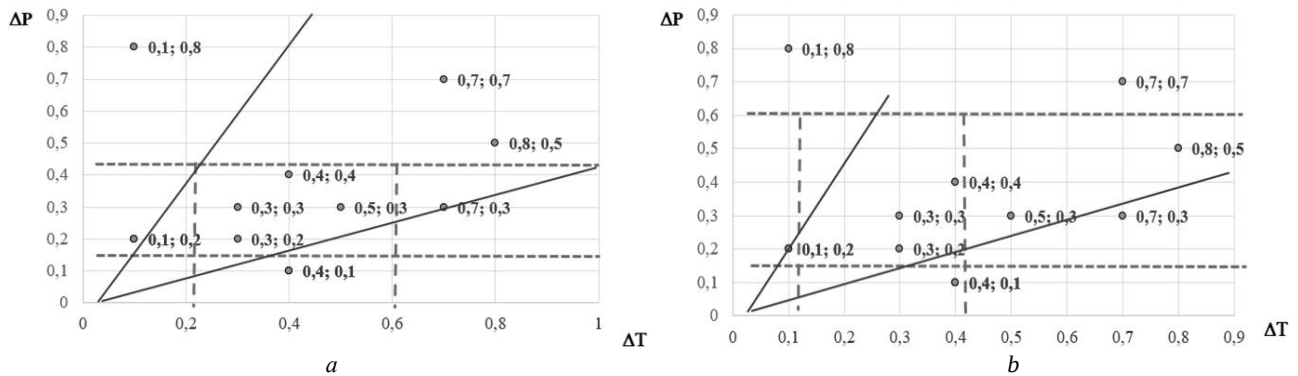


Рис. 5. Результаты моделирования *cpt*-статистической устойчивости с учетом заданных ограничений при исследовании функционирования ИТКК для равномерного закона распределения:

$a - P_{\min} = 0,15; P_{\max} = 0,43; T_{\min} = 0,2; T_{\max} = 0,6$; $b - P_{\min} = 0,15; P_{\max} = 0,6; T_{\min} = 0,1; T_{\max} = 0,4$

Fig. 5. The results of modeling *cpt*-statistical stability taking into account the specified constraints in the study of the functioning of information and telecommunication channels for a uniform distribution law:

$a - P_{\min} = 0,15; P_{\max} = 0,43; T_{\min} = 0,2; T_{\max} = 0,6$; $b - P_{\min} = 0,15; P_{\max} = 0,6; T_{\min} = 0,1; T_{\max} = 0,4$

По сравнению с результатами моделирования, приведенными на рис. 5, применение экспоненциального закона распределения дало меньшее рассеяние значений ΔP и ΔT .

На рис. 6 представлены фрагменты оценок статистической волатильности ПММ, построенные в тех же предположениях, что и представленные на рис. 5, по оценкам $\Delta^2 \gamma_{k,n}^{M_1}(v_{\varphi_{k,n}}, \omega_{\tau_{k,n}})$ для $\varepsilon = 0,3$ и $\varepsilon = 0,1$, где Dte , Dpe – соответствующие оценки статистической волатильности ПММ по временам и вероятностям пребывания в состояниях при $n = 100$ (реализаций процесса).

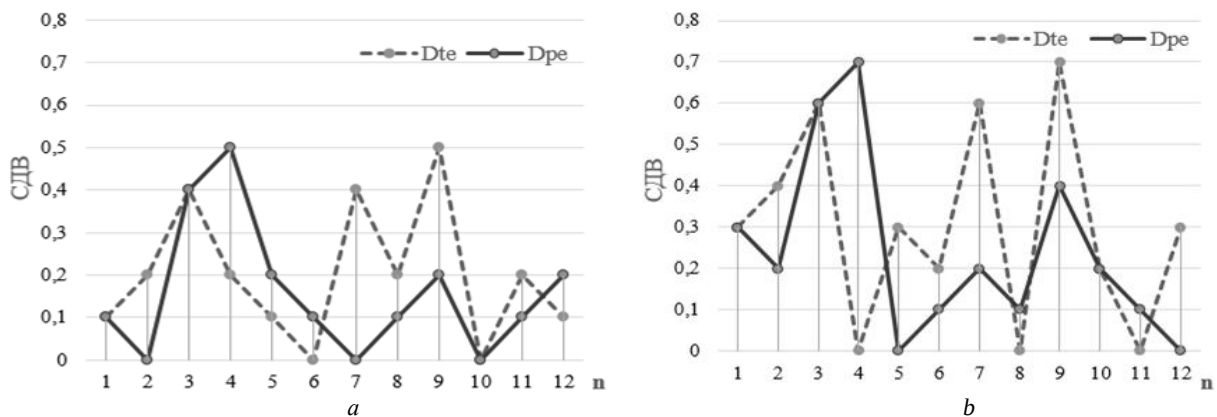


Рис. 6. Фрагменты оценок величины статистической волатильности ПММ для Dte , Dpe :

$a - \varepsilon = 0,3$; $b - \varepsilon = 0,1$

Fig. 6. Fragments of estimates of the statistical volatility of the semi-Markov model for Dte , Dte :

$a - \varepsilon = 0,3$; $b - \varepsilon = 0,1$

Приведенные на рис. 6 оценки величины двумерной статистической волатильности ПММ $\Delta^2 \gamma_{k,n}^{M_1}(v_{\varphi_{k,n}}, \omega_{\tau_{k,n}})$ по приведенным исходным данным для $\varepsilon = 0,3$ (см. рис. 6, *a*) более сглажены относительно рассчитанных значений по отклонению $\varepsilon = 0,1$ (см. рис. 6, *b*). Таким образом, при принятии решений о применимости конкретной ПММ при заданном ЛПР объеме выборки n неучет возможного отклонения ε может привести к разбросу результатов от 0,5 до 0,7 (например, для Dte в точке $n = 9$ или для Dpe в точке $n = 4$; см. рис. 6, *a*, *b*).

Кроме приведенных выше свойств ВПДМ, ВЧДМ, СДВ, СМВ могут быть сформулированы и другие свойства, отражающие особенности оценки устойчивости характеристик с учетом особенностей постановки задачи исследований и конкретного вида модели ИТКК и исследуемого процесса в нем.

Поскольку рассматриваемая в статье системная статистическая устойчивость моделей описывается векторными оценками, то для поддержки принятия решений по определению квалиметрически приемлемой модели в многокритериальном пространстве необходимо формировать множество решений на основе Парето-подхода, оставляя выбор конкретного решения за ЛПР.

Заключение

Исследование масштабируемых многокомпонентных информационно-телекоммуникационных каналов проблематично в связи с объективными сложностями работы в пространстве состояний и их характеристик большой размерности. Предложенный авторами подход подразумевает совокупность ряда упорядоченных процедур, на основе которых реализовано моделирование системной *cpt*-статистической устойчивости с учетом границ областей решения, задаваемых ЛПР.

Результаты исследования многомерной *cpt*-статистической устойчивости могут быть применены к задачам управления временами пребывания в состояниях ИТКК и построения системы поддержки принятия решений по привлечению дополнительных ресурсов, например в случае увеличения длительности пребывания ИТКК в критических состояниях, а также с целью исключения непродуктивного использования системы, анализа рисков функционирования ИТКК, которое сопряжено с рядом принципиальных особенностей, ограничивающих использование принятых статистик.

Предложенные в исследовании свойства *cpt*-метрики позволили получить информацию о качестве сложных модельных комплексов с точки зрения понимания качества отдельных моделей как фактора принятия решений в области анализа и синтеза сложных систем.

Список источников

1. Lin T.Y., Goyal P., Girshick R., He K., Dollár P. Focal loss for dense object detection // Proc. of the IEEE international conference on computer vision. 2017. P. 2980–2988.
2. Мальцев Г.Н., Евтеев А.В. Устойчивость слежения за задержкой фазоманипулированных сигналов с расширением спектра в системах синхронизации радиотехнических систем // Информатика и автоматизация. 2021. № 20 (1). С. 16–42.
3. Gordon L.A., Loeb M.P., Lucyshyn W., Richardson R. CSI/FBI Computer Crime and Security Survey. San Francisco, CA : Computer Security Institute, 2005. 26 p. (Computer Security Institute Publications).
4. Zander S., Armitage G., Branch P. A Survey of Covert Channels and Countermeasures in Computer Network Protocols accepted for publication // IEEE Commun. Surveys and Tutorials. 2007. V. 9, № 3. P. 44–57.
5. Браницкий А.А., Котенко И.В. Анализ и классификация методов обнаружения сетевых атак // Труды СПИИРАН. 2016. Т. 45. С. 207–244.
6. Королук В.С. Стохастические модели систем. Киев : Наукова думка, 1989. 208 с.
7. Obzherin Yu.E., Boyko E.G. Semi-Markov Models. Control of Restorable Systems with Latent Failures. London : Elsevier Academic Press, 2015. 214 p.
8. Zegzhda P.D., Kort S.S., Suprun A.F. Detection of anomalies in behavior of the software with usage of markov chains // Automatic Control and Computer Sciences. 2015. V. 49, № 8. P. 820–825.
9. Доронина Ю.В., Скатков А.В. Анализ статистической устойчивости стационарных марковских моделей // Труды СПИИРАН. 2019. № 5 (18). С. 1119–1148.
10. Микони С.В., Соколов Б.В., Юсупов Р.М. Квалиметрия моделей и полимодельных комплексов. М. : РАН, 2018. 314 с.
11. Sokolov B.V., Yusupov R.M. Information Fusion Models 'Quality Estimation and Models' Quality Control Theory // VI ISTC Scientific Advisory Committee Seminar "Science and Computing", Moscow, Russia, September 15–17 2003 : Abstracts. Moscow, 2003. P. 102–104.
12. Park K. Fundamentals of Probability and Stochastic Processes with Applications to Communications. New York : Springer, 2018. 273 p.
13. Мусаев А.А., Скворцов М.С. Методы параметрической оптимизации надежности структурно-сложных технических систем // Труды СПИИРАН. 2008. № 6. С. 44–50.
14. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2006. 832 с.
15. Sharma M., Gandhi S. Compression and Encryption: an Integrated Approach // International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT). 2012. V. 1, is. 5. Art. 235.
16. Kushner H.J., Yin G. Stochastic Approximation Algorithms and Applications. Berlin ; New York : Springer-Verlag, 2003. xxii, 474 p.

17. Kutoyants Yu.A. Identification of Dynamical Systems with Small Noise. Dordrecht : Kluwer, 1994. 301 p.
18. Herniter M.E. Introduction to Model-Based System Design // Rose Hulman Institute of Technology. 2010. URL: http://wiki.ece.rosehulman.edu/herniter/images/8/8d/MBSD1_Lecture_Notes_Complete_Winter09-10.pdf (accessed: 20.06.2021).
19. Ростовцев Ю.Г., Юсупов Р.М. Проблема обеспечения адекватности субъектно-объектного моделирования // Известия вузов. Приборостроение. 1991. № 7. С. 7–14.
20. Okhtilev M.Yu., Gnidenko A.S., Alferov V.V., Salukhov V.I., Nazarov D.I. Methods and Algorithms of Integrated Modeling of Complex Technical Objects in Dynamically Changing Conditions // Proc. of the International Scientific Conference MMET NW. 2018. P. 282–284.
21. Sokolov B., Kovalev A., Kalinin V., Minakov E., Petrovskiy D. Logic Dynamic Model and Algorithms of Operation Complex // European Modeling & Simulation Symposium (EMSS-2018). 2018. P. 59–67.
22. Li Y.-F., Zio E. A multi-state model for the reliability assessment of a distributed generation system via universal generating function // Reliability Engineering and System Safety. 2012. V. 106. P. 28–36.
23. Panella I., Hardwick G. Model Oriented System Design Applied to Commercial Aircraft Secondary Flight Control Systems // International Conference on Simulation and Modeling Methodologies, Technologies and Applications. SIMULTECH 2017 / M. Obaidat, T. Ören, F. Rango (eds.). Cham : Springer, 2019. P. 55–76. (Advances in Intelligent Systems and Computing, v. 873).
24. Laaksonen O., Peltoniemi M. The essence of dynamic capabilities and their measurement // International Journal of Management Reviews. British Academy of Management. 2018. V. 20, № 2. P. 184–205.
25. Garza-Reyes J.A., Romero J.T., Govindan K. et al. A PDCA-based approach to Environmental Value Stream Mapping (E-VSM) // Journal of Cleaner Production. 2018. V. 180. P. 335–348.
26. Кондрашков А.В., Пичугин Ю.А. Идентификация и статистическая проверка устойчивости модели Вольтерры // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2014. № 1 (189). С. 124–135.
27. Dolgui A., Ivanov D., Sokolov B. Scheduling of recovery action in supply chain with resilience analysis consideration // International Journal of Production Research. 2018. V. 56, № 19. P. 6473–6490.
28. Zhao Y., Liu Y., Jiang F., Liu X., Zhao D. Fast noisy image quality assessment based on free-energy principle // Communications in Computer and Information Science. 2018. V. 815. P. 290–299.
29. Calandra R., Peters J., Deisenroth M.P. Pareto Front Modeling for Sensitivity Analysis in Multi-Objective Bayesian Optimization. NIPS Workshop on Bayesian Optimization, 2014. 5 p. URL: <http://www.ias.tu-darmstadt.de/uploads/Publications/Calandra-NIPS2015-bayesopt.pdf> (accessed: 01.04.2022).
30. Hartikainen M., Miettinen K., Wiecek M.M. PAINT: Pareto front interpolation for nonlinear multiobjective optimization // Computational Optimization and Applications. 2012. V. 52, is. 3, P. 845–867.
31. Degiannakis S., Floros C. Methods of Volatility Estimation and Forecasting // Modelling and Forecasting High Frequency Financial Data. London : Palgrave Macmillan, 2015. P. 58–109.
32. Герасимова Д.С., Саяпин А.В., Палухин А.А., Кацура А.В. Bootstrap-метод для оценки статистических характеристик малых выборок авиационных агрегатов // Сибирский журнал науки и технологий. 2018. Т. 19, № 3. С. 482–488.
33. Gorban I.I. The Statistical Stability Phenomenon. Springer, 2017. 361 p. doi: 10.1007/978-3-319-43585-5

References

1. Lin, T., Goyal, P., Girshick, R. et al. (2020) Focal Loss for Dense Object Detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 42(2). pp. 318–327. DOI: 10.1109/TPAMI.2018.2858826
2. Maltsev, G.N. & Evteev, A.V. (2021) Stability of Tracking the Delay of Phase-shift Keyed Signals with Spectrum Expanding in Synchronization Systems of Radio Engineering Systems. *Informatika i avtomatizatsiya – Informatics and Automation*. 20(1). pp. 16–42.
3. Gordon, L.A., Loeb, M.P., Lucyshyn, W. & Richardson, R. (2006) *CSI/FBI Computer Crime and Security Survey*. San Francisco, CA: Computer Security Institute.
4. Zander, S., Armitage, G. & Branch, P. (2007) A Survey of Covert Channels and Countermeasures in Computer Network Protocols. *IEEE Commun. Surveys and Tutorials*. 9(3). pp. 44–57. DOI: 10.1109/COMST.2007.4317620
5. Branitsky, A.A. & Kotenko, I.V. (2016) Analiz i klassifikatsiya metodov obnaruzheniya setevykh atak [Analysis and classification of methods for detecting network attacks]. *Trudy SPIIRAN*. 45. pp. 207–244. (In Russ.).
6. Korolyuk, V.S. (1989) *Stokhasticheskie modeli sistem* [Stochastic Models of Systems]. Kyiv: Naukova Dumka.
7. Obzherin, Yu.E. & Boyko, E.G. (2015) *Semi-Markov Models. Control of Restorable Systems with Latent Failures*. London: Elsevier.
8. Zegzhda, P.D., Kort, S.S. & Suprun, A.F. (2015) Detection of anomalies in behavior of the software with usage of Markov chains. *Automatic Control and Computer Sciences*. 49. pp. 820–825. DOI: 10.3103/S0146411615080386.
9. Doronina, Yu.V. & Skatkov, A.V. (2019) Analysis of statistical stability of stationary Markov models. *Trudy SPIIRAN*. 5(18). pp. 1119–1148. DOI: 10.15622/sp.2019.18.5.1119–1148
10. Mikoni, S.V., Sokolov, B.V. & Yusupov, R.M. (2018) *Kvalimetriya modeley i polimodel'nykh kompleksov* [Qualimetry of Models and Polymodel Complexes]. Moscow: RAS. DOI: 10.31857/S9785907036321000001
11. Sokolov, B.V. & Yusupov, R.M. (2003) Information Fusion Models 'Quality Estimation and Models' Quality Control Theory. *VI ISTC Scientific Advisory Committee Seminar "Science and Computing"*. Moscow, Russia, September 15–17, 2003. Moscow. pp. 102–104.

12. Park, K. (2018) *Fundamentals of Probability and Stochastic Processes with Applications to Communications*. New York: Springer.
13. Musaev, A.A. & Skvortsov, M.S. (2008) Metody parametriceskoy optimizatsii nadezhnosti strukturno-slozhnykh tekhnicheskikh sistem [Methods of parametric optimization of reliability of structurally complex technical systems]. *Trudy SPIIRAN*. 6. pp. 44–50.
14. Dorf, R. & Bishop, R. (2006) *Sovremennye sistemy upravleniya* [Modern Control Systems]. Moscow: Laboratoriya Bazovykh Znaniy.
15. Sharma, M. & Gandhi, S. (2012) Compression and Encryption: An Integrated Approach. *International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT)*. 1(5). Art. 235.
16. Kushner, H.J. & Yin, G.G. (2003) *Stochastic Approximation Algorithms and Applications*. Berlin and New York: Springer-Verlag.
17. Kutoyants, Yu.A. (1994) *Identification of Dynamical Systems with Small Noise*. Dordrecht: Kluwer.
18. Herniter, M.E. (2010) *Introduction to Model-Based System Design*. [Online] Available from: http://wiki.ece.rosehulman.edu/herniter/images/8/8d/MBSD1_Lecture_Notes_Complete_Winter09-10.pdf (Accessed: 20th June 2021)
19. Rostovtsev, Yu.G. & Yusupov, R.M. (1991) Problema obespecheniya adekvatnosti sub"ektno-ob"ektnogo modelirovaniya [Problems of ensuring the adequacy of subject-object modeling]. *Izvestiya vuzov. Priborostroenie – Journal of Instrument Engineering*. no. 7. pp. 7–14.
20. Okhtilev, M.Yu., Gnidenko, A.S., Alferov, V.V., Salukhov, V.I. & Nazarov, D.I. (2018) Methods and Algorithms of Integrated Modeling of Complex Technical Objects in Dynamically Changing Conditions. *Proceedings of the International Scientific Conference MMET NW*. pp. 282–284.
21. Sokolov, B., Kovalev, A., Kalinin, V., Minakov, E. & Petrovskiy, D. (2018) Logic Dynamic Model and Algorithms of Operation Complex. *European Modeling & Simulation Symposium (EMSS-2018)*. pp. 59–67.
22. Li, Y.-F. & Zio, E. (2012) A multi-state model for the reliability assessment of a distributed generation system via universal generating function. *Reliability Engineering and System Safety*. 106. pp. 28–36. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.res.2012.04.008>
23. Panella, I. & Hardwick, G. (2017) Model Oriented System Design Applied to Commercial Aircraft Secondary Flight Control Systems. In: Obaidat, M., Ören, T. & Rango, F. (eds) *International Conference on Simulation and Modeling Methodologies, Technologies and Applications. SIMULTECH 2017*. Springer, Cham. pp. 55–76. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-01470-4_4
24. Laaksonen, O. & Peltoniemi, M. (2018) The essence of dynamic capabilities and their measurement. *International Journal of Management Reviews. British Academy of Management*. 20(2). pp. 184–205. DOI: <https://doi.org/10.1111/ijmr.12122>
25. Garza-Reyes, J.A., Romero, J.T., Govindan, K. et al. (2018) A PDCA-based approach to Environmental Value Stream Mapping (E-VSM). *Journal of Cleaner Production*. 180. pp. 335–348. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2018.01.12>
26. Kondrashkov, A.V. & Pichugin, Yu.A. (2014) On the identification and statistical testing stability of the Volterra model. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki – St. Petersburg Polytechnic University Journal. Physics and Mathematics*. 1(189). pp. 124–135.
27. Dolgui, A., Ivanov, D. & Sokolov, B. (2018) Scheduling of recovery action in supply chain with resilience analysis consideration. *International Journal of Production Research*. 56(19). pp. 6473–6490. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207543.2017.1401747>
28. Zhao, Y., Liu, Y., Jiang, F., Liu, X. & Zhao, D. (2018) Fast noisy image quality assessment based on free-energy principle. *Communications in Computer and Information Science*. 815. pp. 290–299. DOI: [10.1007/978-981-10-8108-8_27](https://doi.org/10.1007/978-981-10-8108-8_27)
29. Calandra, R., Peters, J. & Deisenroth, M.P. (2014) Pareto Front Modeling for Sensitivity Analysis in Multi-Objective Bayesian Optimization. *NIPS Workshop on Bayesian Optimization*. 5. [Online] Available from: <http://www.ias.tu-darmstadt.de/uploads/Publications/Calandra-NIPS2015-bayesopt.pdf>. (Accessed: 1st April 2022).
30. Hartikainen, M., Miettinen, K. & Wiecek, M.M. (2012) PAINT: Pareto front interpolation for nonlinear multiobjective optimization. *Computational Optimization and Applications*. 52(3). pp. 845–867. DOI: [10.1007/s10589-011-9441-z](https://doi.org/10.1007/s10589-011-9441-z)
31. Degiannakis, S. & Floros, C. (2015) *Modelling and Forecasting High Frequency Financial Data*. London: Palgrave Macmillan. pp. 58–109. DOI: [10.1057/9781137396495_3](https://doi.org/10.1057/9781137396495_3)
32. Gerasimova, D.S., Sayapin, A.V., Palukhin, A.A. & Katsura, A.V. (2018) [Application of the bootstrap method for statistical characteristics assessment of aircraft components' small samples]. *Sibirskiy zhurnal nauki i tekhnologii – The Siberian Aerospace Journal*. 19(3). pp. 482–488. DOI: [10.31772/2587-6066-2018-19-3-482-488](https://doi.org/10.31772/2587-6066-2018-19-3-482-488)
33. Gorban, I.I. (2017) *The Statistical Stability Phenomenon*. Springer. DOI: [10.1007/978-3-319-43585-5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-43585-5)

Информация об авторах:

Дорони́на Юлия Валентиновна – доцент, доктор технических наук, профессор кафедры информационных технологий и компьютерных систем Института информационных технологий и управления в технических системах Севастопольского государственного университета (Севастополь, Россия). E-mail: apkSev@yandex.ru

Скатко́в Александр Владимирович – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры информационных технологий и компьютерных систем Института информационных технологий и управления в технических системах Севастопольского государственного университета (Севастополь, Россия). E-mail: vm1945@mail.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Doronina Yulia V. (Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Information Technologies and Computer Systems, Institute of Information Technologies and Management in Technical Systems, Sevastopol State University, Sevastopol, Russian Federation). E-mail: apkSev@yandex.ru

Skatkov Alexander V. (Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Information Technologies and Computer Systems, Institute of Information Technologies and Management in Technical Systems, Sevastopol State University, Sevastopol, Russian Federation). E-mail: vm1945@mail.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 27.04.2022; принята к публикации 30.08.2022

Received 27.04.2022; accepted for publication 30.08.2022

Научная статья

УДК 622.276:004.896

doi: 10.17223/19988605/60/8

Бинарная классификация скважин нефтегазовых промыслов с использованием глубоких нейронных сетей

Евсюткин Иван Викторович¹, Марков Николай Григорьевич²

^{1, 2} Томский политехнический университет, Томск, Россия

¹ ive1@tpu.ru

² markovng@tpu.ru

Аннотация. Предложены модели глубоких искусственных нейронных сетей прямого распространения для решения задачи выбора скважин-кандидатов на проведение геолого-технических мероприятий на фонде скважин. Разработан адаптивный алгоритм предварительной обработки исходных данных. Приведены результаты исследования ряда моделей нейронных сетей на подготовленных с помощью этого алгоритма обучающей и тестовой выборках по фондам скважин двух месторождений. Выявлено подмножество моделей, позволяющих получить практически приемлемую точность классификации скважин-кандидатов.

Ключевые слова: скважина-кандидат для проведения геолого-технического мероприятия на фонде скважин; интеллектуальный анализ данных; бинарная классификация скважин; модели искусственных нейронных сетей

Для цитирования: Евсюткин И.В., Марков Н.Г. Бинарная классификация скважин нефтегазовых промыслов с использованием глубоких нейронных сетей // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 60. С. 73–83. doi: 10.17223/19988605/60/8

Original article

doi: 10.17223/19988605/60/8

Binary classification for wells of oil and gas field with the use of deep neural networks

Ivan V. Evsyutkin¹, Nikolay G. Markov²

^{1, 2} Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation

¹ ive1@tpu.ru

² markovng@tpu.ru

Abstract. The well-stock of the oil and gas extraction enterprise only on one field can include hundreds and even thousands of wells. The management of such well-stock demands considerable labor and time expenditure of qualified specialists of the extracting enterprise. They have to analyze large volumes of diverse geological and technological data. Part of the tasks solved by specialists at the management of a well-stock, including the management of the geological and technical arrangements (GTA) on the well-stock, are loosely formalized tasks. Intellectual methods of decision-making support are extremely necessary for experts for their solving. The analysis of research results in the field of intellectual methods for well-stock management showed that artificial neural networks (ANN) are generally applied. The first encouraging results are received using ANN, however, only partial tasks are solved and the accuracy of the received results is not high. It indicates the relevance of the development of new models and methods of intellectual data analysis for high-automated management of the well-stock.

The problem of candidates-wells selection for the GTA on a well-stock which can be simplified to the task of binary classification of production wells is considered in the article. It is offered to solve it with the use of the developed models of deep feed-forward ANN. Historical data from well-stocks of oil and gas-condensate fields of the Tomsk region are used as basic data for preparation of the training and evaluating selections for the ANN models.

The adaptive algorithm of preliminary processing of such data is developed, taking into account specifics of basic technological and geological data on the well-stocks. The training and evaluating selections for the offered ANN models are created with the algorithm's help. The following architectural characteristics and hyper-parameters varied at the research of efficiency of the ANN models: the set of the input parameters, the number of the hidden layers, an activation function, a training speed, an optimizing training algorithm, etc.

Research results of the set of the offered ANN models on the prepared training and evaluating selections on the production well-stocks of these two fields showed that there is a subset of the ANN models allowing to receive high (98,5 % and above) the precision of classification of candidates-wells for GTA, acceptable for practical use on oil and gas fields at GTA management. These results also emphasize adequacy of the revealed subset of the ANN models of the complexity of the solved classification task without dependence on the prevailing fluid in the got raw oil and gas products on a field and the geological structure of a field. It is shown that the ANN models, trained on the joint selection by data from well-stocks of production wells of two fields, generally give more a good result on the accuracy of classification of wells, than in the case of their training on data from one field.

Keywords: a candidate-well for carrying out geological and technical arrangements on a well-stock; intellectual analysis of data; the binary classification of wells; the models of artificial neural networks

For citation: Evsyutkin, I.V., Markov, N.G. (2022) Binary classification for wells of oil and gas field with the use of deep neural networks. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 60. pp. 73–83. doi: 10.17223/19988605/60/8

Фонд скважин нефтегазодобывающего предприятия только на одном месторождении может включать сотни и даже тысячи скважин. Столь крупный объект управления требует серьезного внимания со стороны субъектов управления – служб предприятия – с целью формирования и оказания различных управляющих воздействий на скважины фонда и продуктивные пласты для поддержания добычи углеводородного сырья (УВС) на проектных уровнях. Управление фондом скважин промысла требует значительных трудовых и временных затрат квалифицированных специалистов добывающего предприятия, которые должны анализировать большие объемы разнородных геологических и технологических данных, получаемых при мониторинге продуктивных пластов месторождения и скважин фонда [1]. Однако существующие сегодня у большинства добывающих предприятий производственные информационные системы (ИС) являются чаще всего узкоспециализированными, и в них не реализованы интеллектуальные методы поддержки принятия решений специалистами при управлении фондом скважин [2]. Часть решаемых специалистами задач при управлении фондом скважин, в том числе при управлении геолого-техническими мероприятиями (ГТМ), – это слабоформализуемые задачи [3]. При их решении специалистам необходимы интеллектуальные методы поддержки принятия решений. По мнению ряда исследователей [4, 5], сегодня методы и алгоритмы интеллектуального анализа данных (ИАД) являются альтернативными многим традиционным методам и алгоритмам, применяемым в нефтегазовой отрасли.

В работе [6] приведены результаты исследования эффективности искусственных нейронных сетей (ИНС) для прогноза параметров работы скважин после проведения гидроразрыва пласта. На нескольких нефтяных месторождениях ООО «Газпромнефть-Ноябрьскнефтегаз» проведен достаточно большой объем работ по гидроразрыву пластов. Результаты прогноза с помощью модели ИНС в виде персептрона на этих данных оказались невысокими. В [7] модели ИНС использовались для анализа операций по выравниванию профиля приемистости для нагнетательных скважин, а также для оценки влияния геолого-геофизических характеристик продуктивных пластов и технологических параметров скважин на результат в виде прироста уровня добычи нефти вследствие уменьшения обводненности УВС. При этом точность прогноза при использовании моделей ИНС оказалась сопоставимой с таковой у метода гидродинамического моделирования, но скорость выполнения моделей ИНС гораздо выше. При решении той же задачи выравнивания профиля приемистости предварительно был использован метод кластеризации для группировки исходных данных на нефтяных месторождениях Поволжья [8]. Это позволило несколько уменьшить ошибку в предсказаниях характеристик добывающих скважин. К сожалению, все полученные результаты прогноза далеки от результатов, представляющих практический интерес. Из имеющихся обзоров следует, что интересные результаты при использовании ИНС в нефтегазовой

отрасли получены в транснациональной компании Schlumberge, однако особенности применяемых в компании моделей ИНС в литературе практически не описаны. Подводя итог, можно сказать, что в нефтегазовой отрасли получены первые обнадеживающие результаты при решении частных задач с помощью методов ИАД. Однако точность этих результатов невысока, а решение ряда практически важных задач управления фондом скважин с помощью таких методов даже не рассматривалось. Все это указывает на актуальность разработки новых моделей, методов и алгоритмов ИАД и их программной реализации для высокоавтоматизированного управления фондом скважин в условиях постоянно обновляющихся на промыслах данных.

Одной из ключевых слабоформализуемых задач при управлении фондом скважин является задача выбора скважин-кандидатов для ГТМ, сводящаяся к задаче бинарной классификации всех добывающих скважин фонда. В работах, посвященных решению этой задачи, получены первые результаты применения моделей ИНС на нефтяных (основной добываемый флюид – нефть) месторождениях [9]. В действительности же каждое разрабатываемое месторождение имеет весьма сложное геологическое строение (разное число продуктивных пластов и пропластков, разная геометрия резервуаров (пластов) и т.п.) и разный состав и свойства добываемого УВС. В связи с этим актуальным является проведение исследований, показывающих возможности предлагаемых моделей ИНС для ИАД по фондам скважин месторождений с другим геологическим строением и с другим типом сырья (основной добываемый флюид – газ или газовый конденсат), чем у месторождения в [9].

В статье приводятся результаты решения такой задачи с использованием разработанных моделей глубоких ИНС прямого распространения. Предварительная подготовка данных с целью формирования обучающей и тестовой выборок для ИНС ведется с помощью разработанного адаптивного алгоритма. Показано, что обеспечиваемая с помощью разработанного набора моделей ИНС точность решения задачи бинарной классификации добывающих скважин для различных по геологическому строению и по приоритетному типу флюида месторождений удовлетворяет практически важным требованиям специалистов добывающих предприятий.

1. Задача выбора скважин-кандидатов для ГТМ

Известно, что важной задачей при управлении фондом скважин является задача выбора скважин-кандидатов для ГТМ, сводящаяся к задаче бинарной классификации всех добывающих скважин фонда. Предлагается решать эту задачу с помощью ИНС. В первый класс должны попасть все скважины, которые планируются к проведению определенного типа (вида) ГТМ. Это класс «скважин-кандидатов для ГТМ». Основанный на опыте и интуиции специалистов и проведенный ранее на фонде ручной выбор скважин-кандидатов специалистами-геологами будет считаться эталоном при формировании обучающей выборки для ИНС, если после проведенного ГТМ произошло существенное увеличение дебита скважины. Во второй класс скважин отнесем все остальные скважины фонда (класс «скважин не для ГТМ»), на которых в момент времени, когда принималось решение, по той или иной причине ГТМ проводить не следовало. Например, это высокодебитные скважины, дающие основной объем добычи УВС на месторождении.

Большинство исследователей при выборе модели ИНС руководствуются правилом соответствия сложности задачи и функциональной мощности выбираемого инструмента (модели ИНС) для ее решения: не следует использовать сложную модель ИНС при решении простой задачи. Были проанализированы различные типы (классы) ИНС, и в качестве наиболее перспективного типа для решения поставленной задачи классификации скважин выбраны глубокие ИНС прямого распространения FFNN [10]. Такой тип моделей ИНС является компромиссом между невысокой сложностью моделей ИНС, но достаточными их функциональными возможностями при решении стоящей задачи. По сути, делается допущение, что возможностей таких нейронных сетей будет достаточно при решении задачи выбора скважин-кандидатов для ГТМ. Однако необходимо исследовать эффективность FFNN для ответа на вопрос, может ли этот тип (класс) ИНС дать точность при решении задачи классификации скважин, приемлемую с практической точки зрения.

Подготовка обучающей и тестовой выборки для моделей ИНС ведется на основе исторических данных из баз данных (БД) предприятия по разрабатываемым месторождениям. Такие данные обычно получены путем измерения значений ряда технологических и геологических параметров фонда скважин месторождения, для которого необходимо решить задачу классификации и сформировать список скважин-кандидатов для ГТМ. Среди таких параметров наиболее важными являются геологические и технологические параметры каждого комплекса «скважина–продуктивный пласт»: дебит нефти Q_n , т; дебит газа Q_g , тыс. м³; дебит жидкости Q_j , м³; дебит воды Q_v , т; давление забойное $P_{заб}$, атм; давление буферное $P_{буф}$, атм; давление затрубное $P_{зат}$, атм; температура на устье скважины T_y , °С; давление пластовое $P_{пл}$, атм; пластовая температура $T_{пл}$, °С; обводненность W , %; эффективная мощность пласта H , м; газовый фактор B ; диаметр штуцера D , мм. Скважины, признанные специалистами геологических служб предприятия кандидатами на ГТМ и на которых были проведены ГТМ с увеличением после мероприятия уровня добычи УВС, считались нами эталонными и имели при подготовке выборки соответствующие метки.

При исследовании эффективности модели ИНС важно понять, какое сочетание геологических и (или) технологических параметров содержит наиболее существенные признаки, которые модель ИНС может извлечь из них для решения поставленной задачи классификации. Формировались следующие обучающие и тестовые наборы параметров, подаваемые затем на вход ИНС:

Набор № 1 – все чаще всего измеряемые на промыслах параметры скважин и продуктивных пластов: Q_n ; Q_g ; Q_j ; Q_v ; $P_{заб}$; $P_{буф}$; $P_{зат}$; T_y ; D ; $P_{пл}$; $T_{пл}$; W ; H ; B .

Набор № 2 – все технологические параметры скважин: Q_n ; Q_g ; Q_j ; Q_v ; $P_{заб}$; $P_{буф}$; $P_{зат}$; T_y ; B .

Набор № 3 – параметры дебитов скважин: Q_n ; Q_g ; Q_j ; Q_v .

Набор № 4 – технологические параметры скважин (без дебитов): $P_{заб}$; $P_{буф}$; $P_{зат}$; T_y ; B .

Набор № 5 – параметры дебитов скважин и параметры продуктивных пластов: Q_n ; Q_g ; Q_j ; Q_v ; $P_{пл}$; $T_{пл}$.

Точность классификации добывающих скважин фонда с помощью модели ИНС из класса FFNN должна оцениваться для обучающей выборки и для тестовой выборки отдельно путем вычисления специальной метрики [11]. Несмотря на интуитивную понятность наиболее известной из таких метрик – метрики *Accuracy* (точность), при ее применении требуется сбалансированность выборки для каждого из классов при бинарной классификации: оба класса скважин должны быть представлены выборками приблизительно равного объема. В реальности же так не всегда получается, в первую очередь из-за того, что ГТМ на добывающей скважине проводятся гораздо реже, чем скважина работает без ГТМ. Поэтому использовалась метрика *Precision*, часто применяемая при решении задач классификации объектов в случаях, когда выборки по классам объектов значительно отличаются по объему. Эта метрика позволяет вычислять долю скважин, в реальности принадлежащих данному классу («скважина-кандидат для ГТМ» или «скважина, на которой ГТМ проводить не следует»), относительно всех скважин, которые модель ИНС отнесла к этому классу:

$$Precision = \frac{TP}{TP + FP} \times 100 \%, \quad (1)$$

где TP – истинно-положительное решение; FP – ложно-положительное решение.

Отметим, что далее с помощью выражения (1) получены оценки точности классификации скважин для класса «скважина-кандидат для ГТМ».

2. Формирование моделей ИНС для исследования

Выбранный класс моделей FFNN имеет большое число варьируемых характеристик архитектуры и гиперпараметров, что позволяет создавать и обучать в рамках этого класса различные модели ИНС. Каждая из таких моделей ИНС описывается парой множеств:

$$\langle Architecture, Hyperparameters \rangle, \quad (2)$$

где *Architecture* – множество характеристик архитектуры ИНС (число подаваемых на вход технологических и геологических параметров, число скрытых слоев, число нейронов в скрытых слоях, функ-

ция активации и т.д.); *Hyperparameters* – множество гиперпараметров ИНС при обучении (скорость обучения, алгоритм обучения, размер мини-выборки, число эпох).

Среди наиболее часто варьируемых характеристик – число скрытых слоев FFNN, число значений геологических и технологических параметров во входном слое ИНС и функция активации нейронов. Рациональный выбор характеристик и параметров в выражении (2) должен обеспечивать формирование модели (моделей) ИНС и ее (их) обучение с целью решения с требуемой точностью задачи классификации. Число сочетаний различных параметров и характеристик модели ИНС может быть весьма велико, поэтому очень важно ограничить задачу поиска только теми из них и, соответственно, остановиться на тех моделях ИНС, которые с высокой вероятностью дают гарантированный результат для практического использования при решении задачи бинарной классификации для фондов скважин на месторождениях с различными геологическим строением и преобладающим типом флюида (нефть, газ или газовый конденсат).

Число скрытых слоев в моделях ИНС при исследовании выбиралось равным 2, 3, 4, ..., 9, 10, 15, 20. Формировались модели ИНС с различным числом входов. В исследованиях осуществлялась поочередная подача на вход ИНС каждого из пяти сформированных наборов геологических и технологических параметров, поэтому число входов модели ИНС определялось числом параметров в наборе. Для всех таких моделей ИНС исследовался эффект от применения различных функций активации (Sigmoid, TanH, ReLU) и алгоритмов оптимизации при обучении ИНС (SGD, Adam, AdaGrad, AdaDelta). Изменялась также скорость обучения: 0,2; 0,1; 0,05; 0,01; 0,005; 0,001. Обобщенная модель включает в себя входной слой, куда подаются значения параметров из того или иного обучающего или тестового набора из пяти перечисленных для исследуемой скважины, совокупность скрытых слоев с конкретной функцией активации и выходной слой (Softmax). Выходной слой содержит два нейрона, позволяющих сделать вывод, является ли скважина кандидатом на ГТМ. Для предотвращения переобучения перед выходным слоем в модели ИНС использовался слой Dropout [12].

Программная реализация моделей ИНС осуществлялась с использованием нейросетевой библиотеки CNTK компании Microsoft [13].

3. Предварительная обработка данных

Решение поставленной задачи классификации осуществлялось с использованием архивов данных в виде БД по двум эксплуатируемым месторождениям: нефтяному месторождению (Месторождение 1) и газоконденсатному месторождению (Месторождение 2), находящимся в Томской области. Фонд скважин Месторождения 1 имеет 142 добывающих скважины, на которых было проведено 436 различных ГТМ за 6 лет. Фонд скважин Месторождения 2 имеет 60 добывающих скважин, на которых было проведено 313 различных ГТМ за 5 лет. В БД за несколько лет эксплуатации месторождений накоплен значительный объем данных по параметрам каждого комплекса «скважина–продуктивный пласт» и имеется информация о проведенных ГТМ.

Исходные данные для последующего ИАД с целью выработки управляющих воздействий на фонд скважин могут поступать (собираться) в БД из различных ИС и (или) АСУ ТП предприятия. Зачастую такая БД содержит ошибочную, пропущенную и искаженную информацию о параметрах скважин фонда и продуктивных пластов эксплуатируемого месторождения. Это означает, что в соответствии с концепцией Big Data необходима предварительная обработка (актуализация) исходных данных с таких месторождений. При этом следует использовать различные подходы, методы и алгоритмы обработки постоянно растущих объемов данных. Анализ показал, что данные из БД по Месторождению 1 и Месторождению 2 не являются исключением и также подлежат предварительной обработке (подготовке), прежде чем будут использованы при обучении и тестировании моделей ИНС. Формирование обучающей и тестовой выборок проводилось с учетом особенностей геологических и технологических данных по разработанному и программно реализованному адаптивному алгоритму. Алгоритм позволяет также отбраковывать ошибочные данные, анализировать корректность данных, определять характер пропусков в данных и с учетом этого адаптивно восстанавливать их с требуемой

точностью. Он отличается от известных методов и алгоритмов наличием решающих правил, позволяющих адаптировать процесс вычисления при восстановлении данных к видам пропусков и ошибок в исходных данных. Рассмотрим алгоритм более подробно.

Начало.

Шаг 1. С помощью SQL-запросов к БД выбранного месторождения происходит извлечение (сбор) данных с целью их последующей предварительной обработки.

Шаг 2. Ведется выбраковка из собранных данных явно ошибочных значений параметров (обычно допущены при ручном вводе в БД), далее в анализе они не используются; оставшиеся данные сводятся в две таблицы, причем первая из них содержит паспортные данные скважин и значения технологических и геологических параметров в виде временных рядов, а вторая таблица включает данные, связанные с проведенными на скважинах и в продуктивных слоях различными ГТМ.

Шаг 3. Ведется анализ данных на корректность, при этом с учетом диапазонов значений параметров для конкретного месторождения определяются ошибочные или пропущенные данные, а также аномально большие отсчеты параметров из-за сбоев измерительной аппаратуры; поиск таких данных осуществляется во многих случаях путем сравнения с соседними во временном ряду значениями параметра. Найденные значения удаляются, но вместо них на Шаге 4 вводятся новые.

Шаг 4. Адаптивное восстановление с использованием решающих правил удаленных или пропущенных данных и интерполяция значений некоторых параметров по соседним имеющимся значениям для получения вектора значений всех параметров на определенный момент времени.

Шаг 5. Формирование массива обучающих примеров; проводится с учетом периода выполнения ГТМ на добывающей скважине или времени ее простоя по другим причинам, поскольку в вектор значений параметров на вход ИНС по каждой скважине не должны попасть значения одновременно до и после проведения тех или иных ГТМ или остановок скважины.

Шаг 6. Создание дополнительных обучающих примеров из имеющегося массива обучающих примеров с помощью метода аугментации – добавления к значениям ряда технологических и геологических параметров в Наборах № 1–5 случайного 5%-ного шума [14].

Шаг 7. Нормализация всех подготовленных данных, поскольку значения параметров скважин и продуктивных пластов измеряются в разных диапазонах, а каждый параметр должен оказывать влияние на конечный результат в исследованиях моделей ИНС.

Шаг 8. Формируются обучающая и тестовая выборки: все полученные обучающие примеры относятся к одной из них, при этом тестовая выборка составляет 20% от общего числа примеров, а обучающая – 80%.

Конец.

Замечание 1. Разработанные решающие правила на Шаге 4 учитывают все возможные ситуации (единичный пропуск, совокупность пропущенных или удаленных значений параметра, размер интервала пропуска и т.п.) и позволяют выбрать и запустить один из реализованных методов интерполяции, дающий в конкретном случае наиболее высокую точность для восстанавливаемых данных. Реализованы методы линейной интерполяции, локальной кусочно-квадратичной интерполяции и одномерный кубический сплайн [15]. Разработка решающих правил проведена с использованием результатов исследований точности каждого из этих методов на данных по фонду скважин Месторождения 1 [16].

Замечание 2. Процедура получения дополнительных обучающих примеров на Шаге 6 алгоритма с использованием метода аугментации данных весьма важна. Во-первых, возникает проблема, если фонд скважин месторождения имеет относительно небольшое количество добывающих скважин (особенно если это месторождение эксплуатируется не так давно), а обучающая выборка для получения высокой точности классификации скважин с помощью ИНС должна иметь значительный объем. Во-вторых, в любом фонде тех скважин, которые подвергались ГТМ в выбранный период времени, обычно меньше, поэтому существует проблема несбалансированности выборок для двух классов скважин. Эти две проблемы и решаются с помощью указанного метода аугментации имеющихся данных.

4. Результаты исследования моделей ИНС

С использованием приведенного алгоритма осуществлена предварительная обработка данных из БД фондов скважин Месторождения 1 и Месторождения 2. Для первого из них число обучающих примеров, включая полученные с помощью метода аугментации, составило 2 016 пар «признаки–метки» для каждого из пяти указанных выше наборов параметров, что позволило сформировать обучающие и тестовые выборки для моделей ИНС в случае каждого из пяти наборов параметров. К сожалению, не для всех вышеперечисленных параметров фонда скважин Месторождения 2 имеется достаточный объем данных, поэтому для его комплексов «скважина–продуктивный пласт» в исследованиях использовался урезанный набор из таких параметров. Удалось провести предварительную обработку данных, подготовить 3 371 обучающий пример и сформировать обучающую и тестовую выборки только в случае параметров из Набора № 4.

Для повышения точности классификации скважин при проведении исследований моделей ИНС использовался один из методов кросс-валидации – метод *K* блоков [17], причем с учетом того, что отношение объемов обучающей и тестовой выборок выбрано 4:1, число блоков *K* равно 5. При формировании первого блока в тестовую выборку попадает каждый пятый обучающий пример из общего объема обучающей и тестовой выборок, а при построении очередного блока происходит то же самое, но все номера обучающих примеров изменяются на единицу и т.д. Точность классификации при обучении и тестировании модели ИНС оценивается в случае каждого блока в виде значений метрики *Precision*, вычисляемой по формуле (1) для практически важного класса «скважина-кандидат для ГТМ». Затем вычисляется усредненная метрика *Precision* с учетом результатов по каждому из пяти блоков.

Первые результаты исследований эффективности каждой модели ИНС при решении поставленной задачи классификации были получены для Месторождения 1 и приведены в [9]. Анализ этих результатов позволил сделать вывод, что основным фактором, влияющим на точность классификации, является различие моделей ИНС, в первую очередь по числу скрытых слоев. Точность также в значительной мере определяется перечнем параметров, подаваемых на вход ИНС. При этом наилучшая точность достигнута для Наборов № 1 и № 2, а наихудшая – для Набора № 3.

В табл. 1 показаны результаты экспериментов с моделями ИНС с изменяемым числом скрытых слоев при решении задачи классификации скважин в случае фонда Месторождения 2 для тестовой выборки. Аналогичная таблица с результатами для точности классификации получена в случае обучающей выборки. Значения точности классификации в ней на 1–1,5% выше, что указывает на правильно полученные в процессе обучения архитектуру и гиперпараметры ИНС. При этом взвешенные средние абсолютные погрешности составляют соответственно 0,3 и 0,7% для обучающей и тестовой выборок.

Таблица 1

Результаты классификации скважин-кандидатов для ГТМ на фонде Месторождения 2

Алгоритм обучения	Функция активации	Точность классификации добывающих скважин для различного числа скрытых слоев в модели ИНС, %										
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
SGD	Sigmoid	79,111	80,277	81,630	81,333	53,185	53,185	53,185	53,185	53,185	53,185	53,185
	TanH	94,519	98,222	97,926	98,815	97,778	91,926	98,512	95,259	95,111	89,630	97,926
	ReLU	93,333	97,926	98,815	99,259	98,667	94,815	98,667	98,667	97,630	97,333	95,111
AdaGrad	Sigmoid	77,037	77,630	78,370	74,963	53,185	53,185	53,185	53,185	53,185	53,185	53,185
	TanH	92,296	98,519	99,259	98,815	99,111	98,963	96,889	99,259	98,815	98,963	96,148
	ReLU	53,185	53,185	53,185	53,185	53,185	53,185	53,185	53,185	53,185	53,185	53,185
AdaDelta	Sigmoid	53,185	53,185	53,185	53,185	53,185	53,185	53,185	53,185	53,185	53,185	53,185
	TanH	74,963	73,481	73,630	73,185	74,667	74,222	74,667	74,815	75,407	75,259	79,407
	ReLU	73,481	74,593	76,296	77,630	77,778	77,630	78,519	80,000	80,296	80,889	81,630
Adam	Sigmoid	89,778	91,704	95,407	94,222	92,000	93,481	85,481	87,852	83,259	53,185	53,185
	TanH	98,370	98,370	98,666	98,666	98,666	95,111	96,296	93,185	85,333	46,815	46,815
	ReLU	97,333	90,074	98,222	98,519	98,519	98,963	97,778	98,074	97,037	54,222	53,185

Из табл. 1 следует, что для Набора № 4 параметров для некоторого числа скрытых слоев и функций активации TanH и ReLU получены весьма высокие результаты (98,5% и выше, что приемлемо на практике; такие значения выделены жирным шрифтом) при использовании алгоритмов обучения SGD, AdaGrad и Adam. Из сравнения этих результатов с результатами для фонда Месторождения 1 в случае набора параметров № 4, изложенными в [9], следует, что модели ИНС, которые показали невысокие результаты на данных по фонду Месторождения 1, чаще всего дают невысокие результаты и для фонда Месторождения 2.

Был проведен ряд дополнительных исследований. Во-первых, модели ИНС, обученные на данных по фонду скважин Месторождения 1, были исследованы на тестовой выборке Месторождения 2. При этом наряду с обученными моделями ИНС для фонда Месторождения 1, которые дали самую высокую точность на тестовой выборке этого фонда, исследовались модели ИНС, которые дали на этой же тестовой выборке невысокую точность. Наоборот, обученные модели ИНС для фонда Месторождения 2 были исследованы на тестовой выборке Месторождения 1. Во-вторых, было осуществлено слияние обучающих выборок с фондов скважин этих месторождений. Несмотря на то, что для фонда Месторождения 2 имеется большая обучающая выборка, чем для фонда Месторождения 1, объединенная выборка была использована для обучения моделей ИНС и для Месторождения 2. Результаты этих исследований на соответствующей тестовой выборке каждого из месторождений представлены в табл. 2. Жирным шрифтом выделены лучшие результаты, полученные в случае обучения ИНС на объединенной выборке.

Таблица 2

Результаты классификации скважин-кандидатов для ГТМ на фондах Месторождений 1 и 2 с использованием данных и моделей ИНС другого месторождения

Алгоритм обучения	Функция активации	Число скрытых слоев	Точность классификации скважин, %					
			Месторождение 1			Месторождение 2		
			Обучение на своих данных	Обучение на объединенной выборке	Использованы обученные модели Мест. 2	Обучение на своих данных	Обучение на объединенной выборке	Использованы обученные модели Мест. 1
SGD	Sigmoid	3	76,877	79,558	61,086	80,277	81,630	61,187
	TanH	10	94,836	99,334	54,102	95,111	98,963	58,293
	ReLU	6	95,572	99,533	72,931	98,667	99,259	62,857
AdaGrad	Sigmoid	2	76,753	75,691	61,197	77,037	77,481	59,740
	TanH	6	95,203	99,933	52,239	99,111	98,963	63,636
	ReLU	4	58,426	60,773	60,754	53,185	53,185	53,210
AdaDelta	Sigmoid	4	58,426	60,773	60,754	53,185	53,185	53,210
	TanH	8	71,834	71,242	42,749	74,667	74,667	67,199
	ReLU	10	66,053	77,901	56,785	80,296	80,296	53,210
Adam	Sigmoid	6	87,824	95,301	61,552	92,000	96,593	55,547
	TanH	3	97,418	99,800	58,714	98,370	98,667	62,894
	ReLU	4	97,173	99,448	63,282	98,222	98,963	62,894

Из табл. 2 видно, что модели ИНС, обученные на объединенной выборке, полученной для фондов месторождений даже с разным составом добываемого УВС и с различным геологическим строением месторождений, дают более высокий результат по точности классификации скважин, чем в случае их обучения на данных с одного месторождения. Однако если с использованием обучающей выборки месторождения уже были получены высокие результаты по точности классификации, то выигрыша от объединения выборок может не быть. Модели ИНС, построенные и обученные на данных одного фонда скважин, при тестировании их на данных другого фонда дают более низкую точность классификации скважин (см. третий столбец для каждого из месторождений), чем при тестировании их на данных с собственного фонда. По-видимому, извлекаемые ИНС признаки, которыми обладают скважины-кандидаты для ГТМ конкретного фонда, являются довольно индивидуальными. Это не позволяет применять обученные на одном фонде модели ИНС при решении задач классификации скважин на фондах других месторождений без дообучения их на данных этих фондов скважин.

Приведенные результаты позволяют сделать вывод, что на множестве исследованных моделей ИНС прямого распространения существует подмножество моделей, дающих высокую (98,5% и выше) с практической точки зрения точность классификации добывающих скважин вне зависимости от преобладающего типа флюида в добываемом УВС (в случае Месторождения 1 – нефть, а в случае Месторождения 2 – газ) и вне зависимости от геологического строения этих месторождений. Отметим, что, по мнению специалистов-практиков с нефтегазовых промыслов, такая точность классификации скважин полностью удовлетворяет их требованиям.

Заключение

Рассмотрено применение глубоких ИНС прямого распространения для решения задачи выбора скважин-кандидатов для ГТМ на фонде добывающих скважин месторождения. С учетом специфики исходных технологических и геологических данных по фонду скважин и принципов концепции Big Data разработан адаптивный алгоритм предварительной обработки данных с целью формирования обучающей и тестовой выборок для таких моделей ИНС.

Результаты исследования множества предложенных моделей ИНС прямого распространения на подготовленных с помощью адаптивного алгоритма обучающей и тестовой выборках по фондам добывающих скважин нефтяного и газоконденсатного месторождений показали, что найдено подмножество моделей ИНС, позволяющих получить высокую (98,5% и выше) точность классификации скважин-кандидатов для ГТМ. Такая точность приемлема для практического использования моделей ИНС на промыслах при управлении ГТМ. Эти результаты также подчеркивают адекватность выявленного подмножества моделей ИНС сложности решаемой задачи классификации независимо от преобладающего флюида в добываемом УВС и от геологического строения месторождений.

Модели ИНС, обученные на объединенной выборке по данным из фондов добывающих скважин двух месторождений, дают в общем случае более высокий результат по точности классификации скважин, чем в случае их обучения на данных одного фонда. Все приведенные результаты в итоге позволяют считать, что предлагаемые наборы моделей ИНС будут обеспечивать точность классификации скважин, приемлемую для использования с практической точки зрения на разных по геологическому строению и составу флюидов месторождениях.

Список источников

1. Шадрин А.В., Крец В.Г. Основы нефтегазового дела. М. : Нац. Открытый Ун-т «ИНТУИТ», 2016. 214 с.
2. Марков Н.Г. Информационно-управляющие системы для газодобывающего производства. Томск : Изд-во Том. политехн. ун-та, 2016. 261 с.
3. Евсюткин И.В., Марков Н.Г. Глубокие искусственные нейронные сети для прогноза значений дебитов добывающих скважин // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2020. Т. 331, № 11. С. 88–95.
4. Taha A., Amani M. Introduction to Smart Oil and Gas Wells: Drilling, Completion and Monitoring Solutions // Int J Petrochem Res. 2019. V. 3, № 1. P. 249–254.
5. Redouane S., Suresh R., Subashini S., Saeed Al N. Smart solutions in the oil and gas industry: a review // Journal of Clean Energy Technologies. 2019. V. 7, № 5. P. 72–76.
6. Дмитриевский А.Н. Цифровизация и интеллектуализация нефтегазовых месторождений // Автоматизация и информационные технологии в нефтегазовой области. 2016. Т. 2, № 24. С. 13–19.
7. Келлер Ю.А. Разработка искусственных нейронных сетей для предсказания технологической эффективности от выравнивания профиля приемистости // Известия Томского политехнического университета. Информационные технологии. 2014. Т. 325, № 5. С. 60–65.
8. Келлер Ю.А. Применение кластеризации данных на основе самоорганизующихся карт Кохонена при подборе скважин-кандидатов для методов увеличения нефтеотдачи // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. Т. 28, № 3. С. 32–37.
9. Евсюткин И.В., Марков Н.Г. Управление геолого-техническими мероприятиями на месторождениях нефти и газа с использованием искусственных нейронных сетей // Доклады ТУСУР. Управление, вычислительная техника и информатика. 2020. Т. 23. № 1. С. 62–69.
10. Schmidhuber J. Deep Learning in Neural Networks: an Overview // Neural Networks. 2015. № 61. P. 85–117.
11. Juba B., Le H.S. Precision-Recall versus Accuracy and the Role of Large Data Sets // Proc. of the AAAI Conference on Artificial Intelligence. 2019. V. 33, № 01. P. 4039–4048.

12. Ma Z., Sattar A., Zhou J., Chen Q., Su K. Dropout with Tabu Strategy for Regularizing Deep Neural Networks // *The Computer Journal*. 2020. V. 63, № 7. P. 1031–1038.
13. Hatcher W.G., Yu W.A. Survey of Deep Learning: Platforms, Applications and Emerging Research Trends // *IEEE Access*. 2018. V. 6. P. 24411–24432.
14. Khandakar M., Louis J. Times-series data augmentation and deep learning for construction equipment activity recognition // *Advanced Engineering Informatics*. 2019. V. 42. Art. 100944. 12 p.
15. Шевченко А.С. Численные методы. М. : ИНФРА-М, 2021. 381 с.
16. Evsyutkin I.V., Markov N.G. The intellectual analysis of geological and technological data during the management of an oil field's well-stock // *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. V. 1661. Art. 012033. 7 p.
17. Ahmed F.Y.H., Ali Y.H., Shamsuddin S.M. Using K-Fold Cross Validation Proposed Models for Spikeprop Learning Enhancements // *International Journal of Engineering & Technology*. 2018. V. 7, № 4. P. 145–151.

References

1. Shadrina, A.V. & Krets, V.G. (2016) *Osnovy neftegazovogo dela* [Fundamentals of Oil and Gas Engineering]. Moscow: National Open University of INTUIT.
2. Markov, N.G. (2016) *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy dlya gazodobyvayushchego proizvodstva* [Information Control Systems for Gas Extraction Industry]. Tomsk: Tomsk Polytechnic University.
3. Evsyutkin, I.V. & Markov, N.G. (2020) Deep artificial neural networks for forecasting debit values for production wells. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Inzhiniring geosurosov – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*. 331(11). pp. 88–95. DOI: 10.18799/24131830/2020/11/2888
4. Taha, A. & Amani, M. (2019) Introduction to Smart Oil and Gas Wells: Drilling, Completion and Monitoring Solutions. *International Journal of Petrochemistry and Research*. 3(1). pp. 249–254. DOI: 10.18689/ijpr-1000143
5. Redouane, S., Suresh, R., Subashini, S. & Saeed, Al.N. (2019) Smart solutions in the oil and gas industry: A review. *Journal of Clean Energy Technologies*. 7(5). pp. 72–76. DOI: 10.18178/JOCET.2019.7.5.512
6. Dmitriyevsky, A.N. (2016) Tsifrovizatsiya i intellektualizatsiya neftegazovykh mestorozhdeniy [Digitalization and intellectualization of oil and gas fields]. *Avtomatizatsiya i informatsionnye tekhnologii v neftegazovoy oblasti*. 2(24). pp. 13–19.
7. Keller, Yu.A. (2014) Razrabotka iskusstvennykh neyronnykh setey dlya predskazaniya tekhnologicheskoy effektivnosti ot vyravni-vaniya profilya priemistosti [Design of artificial neural networks for predicting the technological efficiency of improving water injection profile]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Informatsionnye tekhnologii*. 325(5). pp. 60–65.
8. Keller, Yu.A. (2014) The application of data clustering on the basis of kohonen self-organizing maps in the process of selecting candidate wells for enhanced oil recovery methods. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(28). pp. 32–37.
9. Evsyutkin, I.V. & Markov, N.G. (2020) Management of geological and technical arrangements on oil-and-gas fields with the use of artificial neural networks. *Doklady TUSUR. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Proceedings of TUSUR University. Control, Computer Machines and Informatics*. 23(1). pp. 62–69.
10. Schmidhuber, J. (2015) Deep Learning in Neural Networks: An Overview. *Neural Networks*. 61. pp. 85–117. DOI: 10.1016/j.neunet.2014.09.003
11. Juba, B. & Le, H.S. (2019) Precision-Recall versus Accuracy and the Role of Large Data Sets. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*. 33(01). pp. 4039–4048. DOI: 10.1609/aaai.v33i01.33014039
12. Ma, Z., Sattar, A., Zhou, J., Chen, Q. & Su, K. (2020) Dropout with Tabu Strategy for Regularizing Deep Neural Networks. *The Computer Journal*. 63(7). pp. 1031–1038. DOI: 10.48550/arXiv.1808.09907
13. Hatcher, W.G. & Yu, W. (2018) A Survey of Deep Learning: Platforms, Applications and Emerging Research Trends. *IEEE Access*. 6. pp. 24411–24432.
14. Khandakar, M. & Louis, J. (2019) Times-series data augmentation and deep learning for construction equipment activity recognition. *Advanced Engineering Informatics*. 42(100944). DOI: 10.1016/j.aei.2019.100944
15. Shevchenko, A.S. (2021) *Chislennyye metody* [Numerical Techniques]. Moscow: INFRA-M.
16. Evsyutkin, I.V. & Markov, N.G. (2020) The intellectual analysis of geological and technological data during the management of an oil field's well-stock. *Journal of Physics: Conference Series*. 1661(012033). DOI: 10.1088/1742-6596/1661/1/012033
17. Ahmed, F.Y.H., Ali, Y.H., & Shamsuddin, S.M. (2018) Using K-Fold Cross Validation Proposed Models for Spikeprop Learning Enhancements. *International Journal of Engineering & Technology*. 7(4). pp. 145–151. DOI: 10.14419/ijet.v7i4.11.20790

Информация об авторах:

Евсюткин Иван Викторович – кандидат технических наук, доцент Отделения информационных технологий Инженерной школы информационных технологий и робототехники Национального исследовательского Томского политехнического университета (Томск, Россия). E-mail: ive1@tpu.ru

Марков Николай Григорьевич – профессор, доктор технических наук, профессор Отделения информационных технологий Инженерной школы информационных технологий и робототехники Национального исследовательского Томского политехнического университета (Томск, Россия). E-mail: markovng@tpu.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Evsyutkin Ivan V. (Candidate of Technical Sciences, Assistant Professor, National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ive1@tpu.ru

Markov Nikolay G. (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: markovng@tpu.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 06.11.2021; принята к публикации 30.08.2022

Received 06.11.2021; accepted for publication 30.08.2022

Научная статья

УДК 51-76

doi: 10.17223/19988605/60/9

Вейвлеты Мейера с кратными коэффициентами масштабирования $N > 2$

Полина Николаевна Подкур¹, Николай Константинович Смоленцев²

¹ Кузбасский технический университет им. Т.Ф. Горбачева, Кемерово, Россия, paulina.podkur@gmail.com

² Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия, smolennk@mail.ru

Аннотация. Определяются вейвлеты Мейера с произвольным натуральным коэффициентом масштабирования $N > 2$ с использованием вейвлетов Мейера с кратными коэффициентами масштабирования $MN > 2$. Получены выражения частотных функций вейвлетов и соответствующих фильтров. Рассмотрен пример при $M = 3$ и $N = 2$.

Ключевые слова: вейвлеты Мейера; вейвлет-анализ; вейвлеты с коэффициентом масштабирования N

Для цитирования: Подкур П.Н., Смоленцев Н.К. Вейвлеты Мейера с кратными коэффициентами масштабирования $N > 2$ // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 60. С. 84–92. doi: 10.17223/19988605/60/9

Original article

doi: 10.17223/19988605/60/9

Meyer wavelets with multiple scale factors $N > 2$

Paulina N. Podkur¹, Nikolay K. Smolentsev²

¹ T.F. Gorbachev Kuzbass State Technical University, Kemerovo, Russian Federation, paulina.podkur@gmail.com

² Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation, smolennk@mail.ru

Abstract. In this paper, wavelets with a scaling factor $N > 2$ are defined, similar to the classical Meyer wavelets with $N = 2$. The Meyer wavelets stand out among other wavelets in that they provide the clearest separation of the signal over frequency bands and have rapidly decaying filters. The construction of the Meyer wavelets $\varphi(x)$ and $\psi^1(x), \dots, \psi^{N-1}(x)$ with a scaling factor $N > 2$ in this paper is performed in the frequency domain according to the formulas $\hat{\varphi}(\omega) = H^0\left(\frac{\omega}{N}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{N}\right)$ and $\hat{\psi}^k(\omega) = H^k\left(\frac{\omega}{N}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{N}\right)$, $k = 1, 2, \dots, N-1$, based on the construction of the frequency functions $H^0(\omega)$ and $H^k(\omega)$. As the scaling function $\varphi(x)$ for any N , the Meyer function $\varphi(x)$ known for $N = 2$ is taken. Other frequency functions $H^k(\omega)$ are constructed on the basic interval $[-\pi, \pi]$ by smoothing functions equal to ± 1 on the intervals $[-(k+1)\pi/N, -k\pi/N]$ and $[k\pi/N, (k+1)\pi/N]$ and equal to zero outside these intervals. The functions $H^k(\omega)$ for an even value of k are defined as even functions, and for an odd value of k , as odd functions on the interval $[-\pi, \pi]$. This construction works well for odd N dimensions. But in the case of even N , one of the filters, namely the filter for the wavelet $\psi^{N-1}(x)$, has an infinite impulse response and a weak decrease at infinity, which makes practical use difficult in the case of even $N > 2$. To solve this problem, the paper proposes to use multiple scaling factors MN . It is shown that if wavelets with scaling factors M and N are given, then wavelets with scaling factor MN can be determined. If $H^k(\omega)$ and $G^l(\omega)$ are frequency functions of N - and M -wavelets, respectively, then the frequency functions of wavelets with a multiple of the scaling factor MN are defined by the formula $H^{kl}(\omega) = G^l(N\omega)H^k(\omega)$. It is also shown that if the given M - and N -wavelets have the Meyer function $\varphi(x)$ as a scaling one, then the result is wavelets with the Meyer scaling function $\varphi(x)$ with the scaling factor MN . Considering that for $N = 2$ the Meyer wavelets

$\varphi(x)$ and $\psi(x)$ are well known and have rapidly decaying filters, this solves the above problem with wavelet filters for an even scaling factor and completely solves the problem of defining Meyer wavelets with an arbitrary scaling factor $N > 2$. At the end of the paper, an example is considered for $M = 3$ and $N = 2$.

Keywords: Meyer wavelets; wavelet analysis; wavelets with scaling factor N

For citation: Podkur, P.N., Smolentsev, N.R. (2022) Meyer wavelets with multiple scale factors $N > 2$. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 60. pp. 84–92. doi: 10.17223/19988605/60/9

Вейвлет-анализ предоставляет мощный инструмент для решения различных задач математического моделирования. Особенно эффективно вейвлет-анализ используется для изучения медицинских данных [1–3]. В настоящее время известно и эффективно используется множество вейвлетов [4, 5]. Среди них вейвлеты Мейера выделяются тем, что они обеспечивают наиболее четкое разделение сигнала по частотным диапазонам и имеют быстро убывающие фильтры. Использование степеней двойки для построения теории вейвлетов и при их использовании удобно во многих отношениях, хотя и не является обязательным. Можно вместо коэффициента масштабирования 2 использовать любое целое число N , и даже рациональное, большее единицы [4]. Развитию этой темы посвящены работы [5, 6]. Вейвлет-анализ с коэффициентом масштабирования $N > 2$ имеет определенные преимущества, обеспечивая разделение сигнала на N частотных диапазонов уже при однократном вейвлет-разложении. Примеры вейвлет-анализа данных фондового рынка с коэффициентами масштабирования 4, 5 и 8 представлены в работе [5]. В работах [7, 8] показана возможность использования вейвлет-анализа с коэффициентом масштабирования 3 для изучения сигналов ЭЭГ. В работе [8] предложены построение и использование аналогов вейвлетов Мейера с произвольным коэффициентом масштабирования $N > 2$. Однако в случае четного N один из фильтров вейвлетов, а именно фильтр вейвлета $\psi^{N-1}(x)$ имеет бесконечную импульсную характеристику и слабое убывание на бесконечности, что затрудняет практическое использование таких вейвлетов в случае четного $N > 2$.

В данной работе предлагается другой подход к построению вейвлетов Мейера, которые не имеют отмеченных выше недостатков. Определены вейвлеты Мейера с произвольным коэффициентом масштабирования N , которые вполне подходят для нечетных значений N . Основное содержание работы заключается в построении вейвлетов Мейера с кратными коэффициентами масштабирования MN . Учитывая, что для $N = 2$ вейвлеты Мейера $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены [4, 5] и имеют быстро убывающие фильтры, этот прием решает указанную выше проблему с фильтрами вейвлетов Мейера для четного $N > 2$. Отметим, что в отличие от работы [8] здесь предлагается более унифицированный подход к определению N -вейвлетов Мейера, когда в качестве масштабирующей функции для всех коэффициентов масштабирования N берется одна и та же функция Мейера $\varphi(x)$.

1. Предварительные сведения

Напомним основные положения вейвлет-анализа с масштабным коэффициентом $N \geq 2$ (развитие этой темы см.: [5]). Функция $\varphi(x) \in L^2(\mathbf{R})$ называется масштабирующей с коэффициентом N , если она удовлетворяет соотношению

$$\varphi(x) = \sqrt{N} \sum_{n \in \mathbf{Z}} h_n^0 \varphi(Nx - n), \quad (1)$$

где набор действительных чисел $\{h_n^0\}$ называется *масштабирующим фильтром* функции $\varphi(x)$. Для масштабирующей функции $\varphi(x)$ определяется *частотная функция* формулой

$$H^0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} h_n^0 e^{-in\omega}. \quad (2)$$

После преобразования Фурье масштабирующее соотношение (1) принимает вид:

$$\hat{\varphi}(\omega) = H^0\left(\frac{\omega}{N}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{N}\right). \quad (3)$$

Масштабирующей функции $\varphi(x)$ соответствует $N - 1$ вейвлетов $\psi^1(x), \dots, \psi^{N-1}(x)$, определенных равенствами

$$\psi^k(x) = \sqrt{N} \sum_{n \in \mathbf{Z}} h_n^k \varphi(Nx - n), \quad k = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (4)$$

где коэффициенты разложения $\{h_n^k\}_{n \in \mathbf{Z}}$ называются *фильтрами вейвлетов*. В частотной области соотношения (4) принимают вид:

$$\hat{\psi}^k(\omega) = H^k\left(\frac{\omega}{N}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{N}\right), \quad k = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (5)$$

где $H^k(\omega)$ – частотные функции, соответствующие вейвлетам $\psi^k(x)$:

$$H^k(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} h_n^k e^{-in\omega}, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (6)$$

Вейвлеты называются ортогональными, если сдвиги масштабированных вейвлетов $\psi_{j,n}^k(x) = \sqrt{N^j} \psi^k(N^j x - n)$, $n \in \mathbf{Z}$, $k = 1, 2, \dots, N - 1$, образуют полную ортонормированную систему функций в $L^2(\mathbf{R})$. Для ортогональности частотные функции вейвлетов должны удовлетворять свойству унитарности матрицы [4, 5]:

$$\begin{pmatrix} H^0(\omega) & H^0\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) & \dots & H^0\left(\omega - \frac{2\pi(N-1)}{N}\right) \\ H^1(\omega) & H^1\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) & \dots & H^1\left(\omega - \frac{2\pi(N-1)}{N}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H^{N-1}(\omega) & H^{N-1}\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) & \dots & H^{N-1}\left(\omega - \frac{2\pi(N-1)}{N}\right) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

2. Вейвлеты Мейера

Масштабирующая функция Мейера $\varphi(x)$ для коэффициента $N = 2$ определяется через задание ее преобразования Фурье равенством

$$\hat{\varphi}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right], \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} v\left(\frac{3}{2\pi} |\omega| - 1\right)\right), & \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3}, \\ 0, & \text{для остальных } \omega, \end{cases} \quad (8)$$

где $v(x)$ есть вспомогательная функция, удовлетворяющая трем условиям: $v(x) = 0$ при $x \leq 0$, $v(x) = 1$ при $x \geq 1$, и $v(x) + v(1-x) = 1$ [4, 5]. Распространенным выбором функции $v(x)$ является следующая полиномиальная интерполяция: $v(x) = x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3)$ между 0 и 1 на промежутке $[0, 1]$.

Теорема 1. Масштабирующая функция Мейера $\varphi(x)$ является N -масштабирующей для любого натурального $N > 2$.

Доказательство. Достаточно показать, что существует частотная функция $H^0(\omega)$ для которой выполнено масштабирующее соотношение в форме образов Фурье: $\hat{\varphi}(\omega) = H^0\left(\frac{\omega}{N}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{N}\right)$. Вследствие 2π -периодичности функцию $H^0(\omega)$ достаточно определить на промежутке $[-\pi, \pi]$. Поскольку функция $\hat{\varphi}(\omega)$ обращается в нуль вне промежутка $[-4\pi/3, 4\pi/3]$ и $\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{N}\right) = 1$ на промежутке $\left[-\frac{2\pi N}{3}, \frac{2\pi N}{3}\right]$,

включающем $[-4\pi/3, 4\pi/3]$, то $H^0\left(\frac{\omega}{N}\right) = \hat{\phi}(\omega)$ на $[-4\pi/3, 4\pi/3]$, или $H^0(\omega) = \hat{\phi}(N\omega)$ на промежутке $[-4\pi/3N, 4\pi/3N]$. Таким образом, получаем искомую функцию $H^0(\omega)$:

$$H^0(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \left[-\frac{2\pi}{3N}, \frac{2\pi}{3N}\right], \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} v\left(\frac{3N}{2\pi} |\omega| - 1\right)\right), & \frac{2\pi}{3N} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3N}, \\ 0, & \text{для остальных } \omega. \end{cases} \quad (9)$$

Вне промежутка $[-\pi, \pi]$ функция $H^0(\omega)$ продолжается периодически. Коэффициенты $\{h_n^0\}$ N -масштабирующего соотношения (1) находятся из разложения в ряд Фурье функции $H^0(\omega)$.

2.1. Построение частотных функций и вейвлетов

Для построения вейвлетов Мейера найдем сначала их частотные функции $H^k(\omega)$ с учетом унитарности матрицы (7). Вследствие 2π -периодичности, функцию $H^k(\omega)$ достаточно определить на промежутке $[-\pi, \pi]$. Сначала определим $H^k(\omega)$ на $[0, \pi]$, а затем продолжим на $[-\pi, 0]$ как четную либо нечетную функцию в соответствии с четностью k . Берем функцию, равную единице на промежутке $[k\pi/N, (k+1)\pi/N]$ и равную нулю вне этого промежутка. Затем сгладим ее вблизи концов $k\pi/N, (k+1)\pi/N$, а именно на промежутках $\frac{k\pi}{N} - \frac{\pi}{3N} \leq \omega < \frac{k\pi}{N} + \frac{\pi}{3N}$ и $\frac{(k+1)\pi}{N} - \frac{\pi}{3N} \leq \omega < \frac{(k+1)\pi}{N} + \frac{\pi}{3N}$. Тогда получаются следующие выражения сглаженных функций $H_+^k(\omega)$, $k = 1, 2, \dots, N-2$, при $\omega \geq 0$:

$$H_+^k(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < \frac{k\pi}{N} - \frac{\pi}{3N} \text{ или } \omega \geq \frac{(k+1)\pi}{N} + \frac{\pi}{3N}, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} v\left(\frac{3N}{2\pi} \omega - \frac{3k-1}{2}\right)\right), & \frac{k\pi}{N} - \frac{\pi}{3N} \leq \omega < \frac{k\pi}{N} + \frac{\pi}{3N}, \\ 1, & \frac{k\pi}{N} + \frac{\pi}{3N} \leq \omega < \frac{(k+1)\pi}{N} - \frac{\pi}{3N}, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} v\left(\frac{3N}{2\pi} \omega - \frac{3(k+1)-1}{2}\right)\right), & \frac{(k+1)\pi}{N} - \frac{\pi}{3N} \leq \omega < \frac{(k+1)\pi}{N} + \frac{\pi}{3N}. \end{cases} \quad (10)$$

На весь промежуток $[-\pi, \pi]$ функции $H_+^k(\omega)$ можно продолжить как по четности, так и по нечетности. Далее мы уточним, как это сделать из требования унитарности матрицы (7). Вне промежутка $[-\pi, \pi]$ функции $H_+^k(\omega)$ продолжаются по периодичности. Последняя частотная функция $H_+^{N-1}(\omega)$ на $[0, \pi]$ определяется формулой:

$$H_+^{N-1}(\omega) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} v\left(\frac{3N}{2\pi} \omega - \frac{3(N-1)-1}{2}\right)\right), & \omega \in \left[\frac{(N-1)\pi}{N} - \frac{\pi}{3N}, \frac{(N-1)\pi}{N} + \frac{\pi}{3N}\right], \\ 1, & \omega \in \left[\frac{(N-1)\pi}{N} + \frac{\pi}{3N}, \pi\right], \\ 0, & \text{для остальных } \omega \in [0, \pi]. \end{cases} \quad (11)$$

Покажем, что указанные выше функции $H^0(\omega)$, $H^k(\omega)$ и (11) обладают тем свойством, что строки матрицы (7) имеют единичную норму. Равенство $|H^0(\omega)|^2 + |H^0(\omega - 2\pi/N)|^2 + \dots + |H^0(\omega - 2\pi(N-1)/N)|^2 = 1$ достаточно показать только на промежутке $[\pi/N - \pi/3N, \pi/N + \pi/3N]$. Это следует из того, что сглаживание всех функций в точках разрыва проведено одинаково и симметрично. Кроме того, в приведенной

сумме носители соседних функций пересекаются именно по тем промежуткам, где производилось сглаживание. На промежутке $[\pi/N - \pi/3N, \pi/N + \pi/3N]$ в сумме имеется только два ненулевых слагаемых, $H^0(\omega)$ и $H^0(\omega - 2\pi/N)$. Тогда получаем с использованием равенства $v(1-x) = 1-v(x)$

$$\begin{aligned} |H^0(\omega)|^2 + |H^0(\omega - 2\pi/N)|^2 + \dots + |H^0(\omega - 2\pi(N-1)/N)|^2 &= |H^0(\omega)|^2 + |H^0(\omega - 2\pi/N)|^2 = \\ &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{3N}{2\pi}\omega - 1\right)\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{3N}{2\pi}\left|\omega - \frac{2\pi}{N}\right| - 1\right)\right) = \\ &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{3N}{2\pi}\omega - 1\right)\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}v\left(1 - \left(\frac{3N}{2\pi}\omega - 1\right)\right)\right) = \\ &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{3N}{2\pi}\omega - 1\right)\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{3N}{2\pi}\omega - 1\right)\right) = 1. \end{aligned}$$

Аналогично показывается нормированность остальных строк для функций $H^k(\omega)$ как для четного продолжения $H^k_+(\omega)$, так и для нечетного. Обеспечим эрмитову ортогональность строк матрицы (7) частотных функций. Поскольку носитель функции $H^k(\omega)$ имеет непустое пересечение с носителями только соседних функций $H^{k-1}(\omega)$ и $H^{k+1}(\omega)$, то достаточно обеспечить ортогональность только соседних строк. Для этого достаточно частотные функции $H^k(\omega)$ с четными номерами k считать четными функциями, а нечетные $H^k(\omega)$ сделать нечетными функциями на промежутке $[-\pi, \pi]$, исходя из функций $H^k_+(\omega)$, определенных на промежутке $[0, \pi]$.

Таким образом, искомые частотные функции вейвлетов $\psi^1(x)$, $\psi^2(x)$, ..., $\psi^{N-1}(x)$ имеют следующий вид: для четных значений k функция $H^k(\omega)$ является четной и на промежутке $[0, \pi]$ определяется формулой (10), а для нечетных значений k функция $H^k(\omega)$ является нечетной и на промежутке $[0, \pi]$ также определяется формулой (10). Соответственно определяется и последняя частотная функция $H^{N-1}(\omega)$ в зависимости от четности числа $N-1$.

Масштабирующий фильтр $\{h_n^0\}$ и фильтры вейвлетов $\{h_n^k\}$, $k = 1, 2, \dots, N-1$, находятся разложением в ряд Фурье частотных функций $H^0(\omega)$ и $H^k(\omega)$.

Вейвлеты $\psi^k(x)$ определяются своими фильтрами $\{h_n^k\}$ по формуле (4). Поскольку преобразования Фурье вейвлетов $\hat{\psi}(\omega)$ и $\hat{\psi}^k(\omega)$ имеют компактные носители, то функции $\varphi(x)$ и $\psi^1(x)$, $\psi^2(x)$, ..., $\psi^{N-1}(x)$ являются бесконечно дифференцируемыми.

3. Кратные коэффициенты масштабирования

Отметим, что в случае четного $N > 2$, определенная выше последняя частотная функция $H^{N-1}(\omega)$ в точках $(2n+1)\pi$ имеет разрыв: слева от π она принимает значение 1, а справа – значение -1 . Вследствие этого фильтр $\{h_n^{N-1}\}$ имеет бесконечную импульсную характеристику и слабое убывание на бесконечности, что затрудняет практическое использование таких вейвлетов в случае четного $N > 2$. Этот недостаток можно устранить с использованием кратных коэффициентов масштабирования и классических вейвлетов Мейера с коэффициентом масштабирования 2.

Пусть $\varphi_H(x)$ и $\psi_H^1(x)$, $\psi_H^2(x)$, ..., $\psi_H^{N-1}(x)$ – масштабирующая функция и вейвлеты с масштабным коэффициентом N . Соответствующие фильтры и масштабирующие соотношения в частотной области:

$$\begin{aligned} H^0(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n^0 e^{-in\omega}, \quad H^k(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n^k e^{-in\omega}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \\ \hat{\varphi}_H(\omega) &= H^k\left(\frac{\omega}{N}\right) \hat{\varphi}_H\left(\frac{\omega}{N}\right), \quad \hat{\psi}_H^k(\omega) = H^k\left(\frac{\omega}{N}\right) \hat{\varphi}_H\left(\frac{\omega}{N}\right), \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Пусть $\varphi_G(x)$ и $\psi_G^1(x)$, $\psi_G^2(x)$, ..., $\psi_G^{M-1}(x)$ – масштабирующая функция и вейвлеты с масштабным коэффициентом M . Соответствующие фильтры и масштабирующие соотношения в частотной области:

$$G^0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m^0 e^{-im\omega}, \quad G^l(\omega) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m^l e^{-im\omega}, \quad l = 1, 2, \dots, M-1,$$

$$\hat{\phi}_G(\omega) = G^0\left(\frac{\omega}{M}\right) \hat{\phi}_G\left(\frac{\omega}{M}\right), \quad \hat{\psi}_G^l(\omega) = G^l\left(\frac{\omega}{M}\right) \hat{\phi}_G\left(\frac{\omega}{M}\right), \quad l = 1, 2, \dots, M-1.$$

Рассмотрим вопрос о том, как из заданных N - и M -вейвлетов получить масштабирующую функцию и вейвлеты $\psi^{kl}(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, $l = 0, 1, 2, \dots, M-1$, с коэффициентом масштабирования MN .

3.1. Разложение с коэффициентом N

Задачу удобно решать на уровне формальных степенных рядов [5]. Пусть $X(z) = \sum_n x_n z^n$ – степенной ряд, соответствующий сигналу $\{x_n\}$, $z \in \mathbb{C}$. Сделаем сначала вейвлет-разложение сигнала при помощи вейвлетов с коэффициентом масштабирования N , а потом к тому, что получится, применим вейвлет-разложение с коэффициентом M .

На уровне степенных рядов вейвлет-разложение (с учетом N -децимации) производится по следующей схеме [5]:

$$X \rightarrow \{A^0, A^1, A^2, \dots, A^{N-1}\},$$

где компоненты разложения $A^k(w)$ являются также степенными рядами и определяются из формул

$$A^k(w) = A^k(z^N) = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} H^k(\rho^s z) X(\rho^s z), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (12)$$

где $\rho = e^{-\frac{i2\pi}{N}}$ и $w = z^N$.

Коэффициенты степенных рядов $A^k(w)$ представляют собой коэффициенты $\{a_m^k\}$ вейвлет-разложения сигнала $\{x_n\}$.

3.2. Вейвлет-разложение с коэффициентом M

Теперь к каждому $A^k(w)$ применяем вейвлет-разложение с коэффициентом масштабирования M . На уровне степенных рядов это вейвлет-разложение производится по следующей схеме:

$$A^k(w) \rightarrow \{A^{k0}(u), A^{k1}(u), \dots, A^{kM-1}(u)\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

где компоненты разложения $A^{kl}(u) = A^{kl}(w^M)$ определяются из формул

$$A^{kl}(u) = A^{kl}(w^M) = \frac{1}{M} \sum_{p=0}^{M-1} G^l(\tau^p w) A^k(\tau^p w), \quad l = 0, 1, \dots, M-1,$$

где $\tau = e^{-\frac{i2\pi}{M}}$ и $u = w^M$. В итоге мы получаем разложение сигнала $X(z)$ на серию формальных степенных рядов $A^{kl}(u)$. Для нахождения $A^{kl}(u)$ нам потребуются выражения вида $A^k(\tau^p w)$. Если $w = z^N$, то $\tau^p w = (\tau^{p/N} z)^N$. Тогда

$$A^k(\tau^p w) = A^k(\tau^p z^N) = A^k\left((\tau^{p/N} z)^N\right) = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} H^k(\rho^s \tau^{p/N} z) X(\rho^s \tau^{p/N} z), \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Вычислим $A^{kl}(w^M)$. Пусть $\sigma = e^{-\frac{i2\pi}{MN}}$, следовательно, $\tau = \sigma^N$ и $\rho = \sigma^M$. Тогда

$$\begin{aligned} A^{kl}(w^M) &= \frac{1}{M} \sum_{p=0}^{M-1} G^l(\tau^p w) A^k(\tau^p w) = \frac{1}{M} \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{M-1} G^l(\tau^p w) \sum_{s=0}^{N-1} H^k(\rho^s \tau^{p/N} z) X(\rho^s \tau^{p/N} z) = \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{p=0}^{M-1} G^l\left((\tau^{p/N} z)^N\right) \sum_{s=0}^{N-1} H^k(\rho^s \sigma^p z) X(\rho^s \sigma^p z) = \frac{1}{MN} \sum_{p=0}^{M-1} G^l(\sigma^{pN} z^N) \sum_{s=0}^{N-1} H^k(\sigma^{Ms+p} z) X(\sigma^{Ms+p} z). \end{aligned}$$

Обозначим $Ms + p = q$, $q = 0, 1, \dots, MN - 1$. Тогда $p = q - Ms$. Получаем

$$G^l(\sigma^{pN} z^N) = G^l(\sigma^{(q-Ms)N} z^N) = G^l(\sigma^{qN-MNs} z^N) = [\sigma^{MN} = 1] = G^l(\sigma^{qN} z^N).$$

Получаем окончательную формулу:

$$A^{kl}(w^M) = \frac{1}{MN} \sum_{q=0}^{MN-1} G^l((\sigma^q z)^N) H^k(\sigma^q z) X(\sigma^q z),$$

где $\sigma = e^{\frac{i2\pi}{MN}}$.

Теперь в качестве частотных функций вейвлетов $\psi^{kl}(x)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, $l = 0, 1, \dots, M - 1$ возьмем функции

$$H^{kl}(z) = G^l(z^N) H^k(z).$$

Тогда

$$A^{kl}(z^{MN}) = \frac{1}{MN} \sum_{q=0}^{MN-1} H^{kl}(\sigma^q z) X(\sigma^q z),$$

что полностью соответствует общей схеме (12) вейвлет-разложения сигнала на уровне формальных степенных рядов с коэффициентом масштабирования MN .

Будем считать, что $z = e^{i\omega}$, тогда положим $H^{kl}(\omega) = H^{kl}(e^{i\omega})$. Таким образом, мы получили следующие частотные функции вейвлетов:

$$H^{kl}(\omega) = G^l(N\omega) H^k(\omega).$$

Найдем масштабирующие фильтры вейвлетов $\psi^{kl}(x)$ (здесь обозначено $n = p + mN$, $p = n - mN$):

$$\begin{aligned} G^l(N\omega) H^k(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m^l e^{-iNm\omega} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} h_p^k e^{-ip\omega} = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m^l h_p^k e^{-i(Nm+p)\omega} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m^l h_{n-mN}^k e^{-in\omega} = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n^{kl} e^{-in\omega} = H^{kl}(\omega). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем масштабирующие фильтры вейвлетов $\psi^{kl}(x)$

$$h_n^{kl} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m^l h_{n-mN}^k, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad l = 0, 1, \dots, M - 1.$$

Теорема 2. Если $\varphi_H(x)$ и $\varphi_G(x)$ являются N - и M -масштабирующими функциями Мейера с частотными функциями $H^0(\omega)$ и $G^0(\omega)$ соответственно, то масштабирующая функция $\hat{\psi}^{00}(\omega)$, соответствующая масштабирующему фильтру $H^{00}(\omega) = G^0(N\omega) H^0(\omega)$, также является функцией Мейера $\varphi(x)$.

Доказательство. Достаточно показать, что функция Мейера $\varphi(x)$ удовлетворяет масштабирующему соотношению с коэффициентами $h_n^{00} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m^0 h_{n-mN}^0$ (обозначим $m = n - kN$, $n = m + kN$):

$$\begin{aligned} \psi^{00}(x) &= \sqrt{NM} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k^0 h_{n-kN}^0 \varphi(MNx - n) = \\ &= \sqrt{NM} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_k^0 h_m^0 \varphi(MNx - m - kN) = \sqrt{NM} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_k^0 h_m^0 \varphi(N(Mx - k) - m) = \\ &= \sqrt{M} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k^0 \varphi(Mx - k) = \varphi(x). \end{aligned}$$

4. Пример. Вейвлеты Мейера с коэффициентом масштабирования 6

Рассмотрим построение вейвлетов Мейера с кратным коэффициентом масштабирования, когда $M = 3$ и $N = 2$. Масштабирующая функция будет одна и та же – $\varphi(x)$, указанная в формуле (8).

Напомним схему построения вейвлетов Мейера для $N = 2$ [4, 5]. Пусть $H^0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n^0 e^{-in\omega}$ – частотная функция вейвлета Мейера $\varphi(x)$ для $N = 2$. Тогда вейвлет $\psi(x)$ находится из формулы

$\hat{\psi}(\omega) = e^{i\omega/2} \overline{H^0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Соответствующая частотная функция имеет вид:

$H^1(\omega) = e^{i\omega/2} \overline{H^0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)}$, и ее фильтр $\{h_n^1\}$ находится по формуле $h_n^1 = (-1)^{n+1} h_{-n-1}^0$.

В случае $M = 3$ мы берем ту же самую масштабирующую функцию $\varphi(x)$ с масштабирующим соотношением $\varphi(x) = \sqrt{3} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n^0 \varphi(3x - n)$, где масштабирующий фильтр $\{g_n^0\}$ находится из разложения в ряд Фурье функции $G^0(\omega)$, определенной по формуле (9) при $N = 3$. Фильтры вейвлетов $\{g_n^1\}, \{g_n^2\}$ находятся разложением в ряд Фурье частотных функций $H^1(\omega)$ и $H^2(\omega)$, определенных на основе формул (10) и (11).

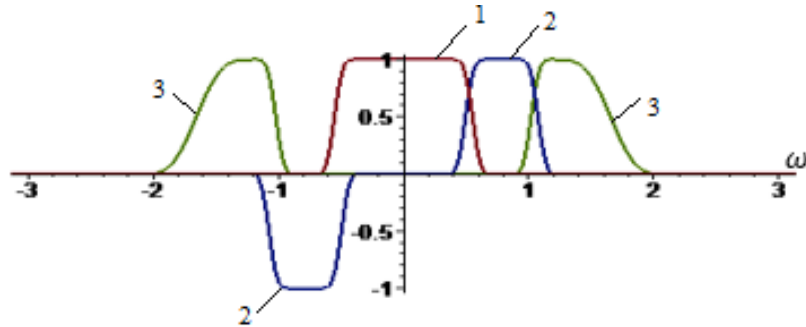


Рис. 1. Графики частотных функций $H^0(\omega)$ (линия 1), $H^1(\omega)$ (линия 2) и $H^2(\omega)$ (линия 3)
Fig. 1. Plots of frequency functions $H^0(\omega)$ (line 1), $H^1(\omega)$ (line 2) and $H^2(\omega)$ (line 3)



Рис. 2. Графики модулей частотных функций $H^{10}(\omega)$ (линия 1), $H^{11}(\omega)$ (линия 2) и $H^{12}(\omega)$ (линия 3)
Fig. 2. Plots of moduli of frequency functions $H^{10}(\omega)$ (line 1), $H^{11}(\omega)$ (line 2) and $H^{12}(\omega)$ (line 3)

Следуя схеме, изложенной в предыдущем параграфе, определим частотные функции вейвлетов $\psi^{kl}(x)$, $k = 0, 1$, $l = 0, 1, 2$ по формуле $H^{kl}(\omega) = G^l(2\omega)H^k(\omega)$. Здесь $\psi^{00}(x) = \varphi(x)$ – масштабирующая функция Мейера. Таким образом, мы получаем матрицу частотных функций вейвлетов $\psi^{kl}(x)$ с коэффициентом масштабирования 6 и фильтры вейвлетов $h_n^{kl} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m^l h_{n-2m}^k$, $k = 0, 1$, $l = 0, 1, 2$.

Приведем графики частотных функций $H^{kl}(\omega) = G^l(N\omega)H^k(\omega)$ (рис. 1, 2).

Заключение

В данной работе построены вейвлеты Мейера с произвольным коэффициентом масштабирования $N > 2$. Дано общее определение вейвлетов Мейера с произвольным коэффициентом масштабирования $N > 2$. Представленная конструкция хорошо работает для нечетных $N > 2$, однако в случае четного N один из фильтров вейвлетов, а именно фильтр вейвлета $\psi^{N-1}(x)$, имеет бесконечную импульсную характеристику и слабое убывание на бесконечности. Далее для решения этой проблемы в работе используются кратные коэффициенты масштабирования MN . Показано, что если заданы вейвлеты с коэффициентами масштабирования M и N , то можно определить вейвлеты с коэффициентом масштабирования MN . Показано также, что если заданные M - и N -вейвлеты имеют функцию Мейера $\varphi(x)$ в качестве масштабирующей, то и в результате получаются MN -вейвлеты с той же масштабирующей функцией Мейера $\varphi(x)$. Учитывая, что для $N = 2$ вейвлеты Мейера $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ хорошо известны и имеют быстро убывающие фильтры, это решает указанную выше проблему с фильтрами вейвлетов для четного коэффициента масштабирования и полностью решает вопрос определения вейвлетов Мейера с произвольным коэффициентом масштабирования $N > 2$.

Список источников

1. Павлов А.Н., Храмов А.Е., Короновский А.А., Ситникова Е.Ю., Макаров В.А., Овчинников А.А. Вейвлет-анализ в нейро-динамике // Успехи физических наук. 2012. Т. 182, № 9. С. 905–939.
2. Подкур П.Н., Смоленцев Н.К. Вейвлет-пакетное разложение ЭЭГ на основные частотные ритмы // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 2 (35). С. 54–61.
3. Rahman M.A., Khanam F., Ahmad M., Uddin M.S. Multiclass EEG signal classification utilizing Rényi min-entropy-based feature selection from wavelet packet transformation // Brain Informatics. 2020. V. 7/7. P. 1–11.
4. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М. : Ижевск : РХД, 2001. 464 с.
5. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. М. : ДМК Пресс, 2013. 628 с.
6. Podkur P.N., Smolentsev N.K. About construction of orthogonal wavelets with compact support and with scaling coefficient N // Cornell University. 2007. URL: <https://arxiv.org/abs/0705.4150>
7. Подкур П.Н., Смоленцев Н.К. Вейвлет-анализ ЭЭГ с коэффициентом масштабирования 3 // Южно-Сибирский научный вестник. 2020. Вып. 6 (34). С. 56–61. doi: 10.25699/T7719-3385-0014-J
8. Подкур П.Н., Смоленцев Н.К. Вейвлеты Мейера с коэффициентом масштабирования $N > 2$ // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2021. № 56. С. 81–89.

References

1. Pavlov, A.N., Khramov, A.E., Koronovsky, A.A., Sitnikova, E.Yu., Makarov, V.A. & Ovchinnikov, A.A. (2012) Veyvlet-analiz v neyro-dinamike [Wavelet analysis in neurodynamics]. *Uspekhi fizicheskikh nauk*. 182(9). pp. 905–939.
2. Podkur, P.N. & Smolentsev, N.K. (2016) Wavelet packet decomposition EEG on the basic frequency rhythms. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(35). pp. 54–61. DOI: 10.17223/19988605/35/6
3. Rahman, M.A., Khanam, F., Ahmad, M. & Uddin, M.S. (2020) Multiclass EEG signal classification utilizing Rényi min-entropy-based feature selection from wavelet packet transformation. *Brain Informatics*. 7/7. pp. 1–11. DOI: 10.1186/s40708-020-00108-y
4. Daubechies, I. (1992) *Desyat' lektсий po veyvletam* [Ten Lectures on Wavelets]. Moscow; Izhevs : RKHD.
5. Smolentsev, N.K. (2014) *Osnovy teorii veyvletov. Veyvlety v MATLAB* [Fundamentals of the Theory of Wavelets. Wavelets in MATLAB]. Moscow: DMK Press.
6. Podkur, P.N. & Smolentsev, N.K. (2007) *About construction of orthogonal wavelets with compact support and with scaling coefficient N* . [Online] Available form: <https://arxiv.org/abs/0705.4150>.
7. Podkur, P.N. & Smolentsev, N.R. (2020) Wavelet analysis of EEG with scaling factor 3. *Yuzhno-Sibirskiy nauchnyy vestnik – South-Siberian Scientific Bulletin*. 6(34). pp. 56–61. DOI: 10.25699/T7719-3385-0014-J
8. Podkur, P.N. & Smolentsev, N.R. (2021) Meyer wavelets with scaling factor $N > 2$. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 56. pp. 81–89. DOI: 10.17223/19988605/56/9

Информация об авторах:

Подкур Полина Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Кузбасского государственного технического университета им. Т.Ф. Горбачева (Кемерово, Россия). E-mail: paulina.podkur@gmail.com

Смоленцев Николай Константинович – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики Кемеровского государственного университета (Кемерово, Россия). E-mail: smolennk@mail.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Podkur Paulina N. (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, T.F. Gorbachev Kuzbass State Technical University, Kemerovo, Russian Federation). E-mail: paulina.podkur@gmail.com

Smolentsev Nikolay K. (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation). E-mail: smolennk@mail.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 14.04.2022; принята к публикации 30.08.2022

Received 14.04.2022; accepted for publication 30.08.2022

ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

INFORMATICS AND PROGRAMMING

Научная статья

УДК 004.652.8

doi: 10.17223/19988605/60/10

**Методика структуризации данных в семантических моделях
типа «Сущность–Связь»****Алексей Михайлович Бабанов***Томский государственный университет, Томск, Россия, babanov2000@mail.ru*

Аннотация. Строго определен понятийный базис модели «Сущность–Связь» (ER-модели), сформулирована проблема триализма, возникающая при представлении явлений предметной области (ПрО) в этой модели, предложены методика определения подходящих форм данных и правила структуризации для каждой из этих форм.

Ключевые слова: ER-модель; проектирование; схема данных; методика

Для цитирования: Бабанов А.М. Методика структуризации данных в семантических моделях типа «Сущность–Связь» // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 60. С. 93–101. doi: 10.17223/19988605/60/10

Original article

doi: 10.17223/19988605/60/10

Technique of data structuring in semantic models of the “Entity-Relationship” type**Alexey M. Babanov***Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, babanov2000@mail.ru*

Abstract. Database designing of complex corporate systems is not complete without the use of a semantic technique, and, therefore, one or another semantic model. Models of the “Entity-Relationship” type are the most widespread in this class. Most publications on the ER model assume that the designer will, on a whim, determine the appropriate forms of data representation. The problem is aggravated by the fact that one (and only one) of the three possible forms should be chosen for each phenomenon of the subject area.

If we take as a basis the terms and definitions of the author of the model P. Chen and look at them from the point of view of logic, we get the following consistent conceptual basis.

An entity is an abstract representation of a single application domain (AD) object. This abstraction is built on the basis of a certain notion about things, which is essential from the point of view of the AD problems. Each notion defines its own entity set, the intension of which is the content of the concept, and the extension is its scope.

A relationship is a single instance of a relation (in a logical sense) between entities. For relationship sets, not the notion about things is used (as with entities), but the notion about n things. A relationship set can be viewed as a mathematical relation defined on n entity sets in the general case, and a relationship as a tuple of this relation with n entities as elements.

Each entity in a relationship plays a specific role, a function that is common to all entities of that role.

Information about an object or a relationship between objects is obtained by observing or measuring the characteristics that are essential for a particular notion, and is expressed by a set of “attribute-value” pairs. Abstract values are classified purely syntactically into different value sets. Thus, a value set in this model is what is sometimes called a domain in other models – the area of admissible attribute values.

An attribute in the ER model is formally defined by Chen as a mapping that associates entities or relationships of some set with single values or tuples of values.

When choosing a data form for a single phenomenon, one should be aware of the possible triadism (the presence of three forms of representation in ER model) of the phenomena of the modeled world. The three forms of data are the three possible kinds of signs in this model. It is necessary to generate such data structures that would optimally take into account two mutually contradictory criteria – the informativeness of data required by business processes and the efficiency of their storage and manipulation. In the vast majority of data models and DBMS, when designing a database schema, it is necessary to make a choice in favor of only one of the possible forms for each phenomenon. The information needs of the AD business processes are decisive.

The procedures for designing entity sets and relationships are similar and consist of the steps of defining the corresponding notion, a common noun as its name, and extracting meaningful attribute mappings.

Since each relationship set corresponds to the notion about n objects, special attention must be paid to the construction of the necessary and sufficient system of entities that make up one relationship of each considered relationship sets. On the one hand, it must include all objects that determine the sense of the notion about n objects, on the other hand, it should not contain objects that can be excluded from the content of the concept without loss of information.

The second difficulty in designing relationship sets is to distinguish between the entities involved in a relationship and the values of the relationship's characteristics.

One of the important skills that a data schema designer should have is the ability to choose short but precise names for structural elements. Namely, by reading them in a diagram, any person should be able to recreate the semantic picture of the modeled world-concepts of interest about objects and n objects. In the ER model, schema elements such as entity sets, relationship sets, roles, and attributes can have semantically meaningful names. Value sets combine structurally uniform elements that do not have semantics; they have standard abstract names-strings, integers, etc.

The article did not focus on certain notations and tools of the ER model. The given definitions and methods can be successfully applied in each of them.

Keywords: ER model; design; data schema; methodology

For citation: Babanov, A.M. (2022). Technique of data structuring in semantic models of the “Entity-Relationship” type. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 60. pp. 93–101. doi: 10.17223/19988605/60/10

Проектирование баз данных сложных корпоративных систем не обходится без использования семантической методики, а значит, той или иной семантической модели. Наибольшее распространение в этом классе получили модели типа «Сущность–Связь». В большинстве публикаций по ER-модели предполагается, что проектировщик по наитию определит подходящие формы представления данных. Проблема усугубляется тем, что для каждого явления предметной области следует выбрать одну (и только одну) из трех возможных форм.

Проектирование семантических схем данных до сих пор остается скорее искусством, нежели наукой, поскольку, как правило, не регламентируется строгими определениями и методиками. Характерным является следующий взгляд на этот предмет: «...звучит просто, но в сложной системе может вызвать затруднения. Это то, что будет совершенствоваться только с практикой» [1].

Современные методики проектирования ER-схем в лучшем случае предлагают отталкиваться от грамматики естественных языков [1, 2]: «Стоит запомнить, что сущность – существительное, которое находится в прямоугольнике, а связь – глагол, который находится в ромбе» [2]. Встречаются и более «глубокие» идеи. «Компоненты ER можно приравнять к частям речи. Общее существительное – тип сущностей. Собственное существительное – сущность. Глагол – тип отношений. Прилагательное – атрибут типа сущностей. Наречие – атрибут типа отношений» [1]. Подобные методики не выдерживают критики даже в случае самых простых предметных областей (ПрО).

В статье строго определяются структурные понятия ER-модели, которые впоследствии используются для выбора формы представления явлений ПрО и построения семантической схемы данных. Предлагаются методики решения обеих этих задач.

1. Структурные понятия ER-модели

По поводу понятийного базиса ER-модели отсутствует единство взглядов. Одни авторы используют термин «сущность» и для обозначения знаков (единичных явлений), и для обозначения

типов (множеств знаков) [2, 3]. В таком случае рано или поздно возникает противоречие в понятийном базисе модели. Другие авторы пользуются двумя терминами: один – для знаков, другой – для типов [4–6]. В таком случае традиционно используют пары «экземпляр сущности – сущность» и «сущность – тип (множество, класс, набор) сущностей». Но и в этом случае не избежать противоречия, если отождествлять понятия «объект предметной области» и «сущность» [3, 4]. Если взять за основу термины и определения автора модели П. Чена [7] и посмотреть на них с точки зрения логики, то получится следующий непротиворечивый понятийный базис.

Сущность (англ. entity) – абстрактное представление единичного объекта ПрО. Эта абстракция строится на основании некоторого понятия о предметах, существенного с точки зрения задач ПрО. Любое понятие характеризуется содержанием (условием, истинность которого говорит о том, что объект подпадает под это понятие) и объемом (классом объектов, удовлетворяющих условию содержания). Содержание понятия предполагает наличие определенных характеристик, общих для всех объектов объема, возможно, различающихся значениями. Очевидно, что с точки зрения различных понятий можно построить несколько абстракций-сущностей одного и того же объекта. Например, один и тот же человек может быть и пациентом, и студентом одновременно. Таким образом термины «объект» и «сущность» не только не тождественны, между обозначаемыми ими элементами существует отношение типа «один-ко-многим». Каждое понятие определяет свое множество сущностей (англ. entity set), интенционалом которого является содержание понятия, а экстенционалом – его объем.

Связь (англ. relationship) – это единичный экземпляр отношения (в логическом смысле) между сущностями. Абсолютно все, что говорилось о сущности и множестве сущностей, можно сказать о связи и множестве связей. Разница заключается лишь в том, что для последних используется не понятие о предметах (как у сущностей), а понятие об n -ках предметов. Множество связей (англ. relationship set) можно рассматривать как математическое отношение, определенное в общем случае на n множествах сущностей, а связь – как кортеж этого отношения с n элементами-сущностями.

Каждая сущность в связи играет определенную роль (англ. role) – функцию, общую для всех сущностей этой роли. Таким образом, даже если в понятии об n -ках предметов неоднократно участвует одно и то же множество сущностей, в каждой связи сущности этого типа будут различаться своими ролями. В силу того что множество связей рассматривается как математическое отношение, порядок упоминания сущностей в связи является значимым, и поэтому для представления связей используются кортежи в смысле математики (упорядоченные последовательности). Однако указание ролей сущностей в связях делает соблюдение порядка сущностей необязательным, и поэтому в таком случае для представления связей используются уже множества пар «роль–сущность».

Информацию об объекте или взаимоотношении между объектами получают путем наблюдения или измерения характеристик, существенных для того или иного понятия, и выражают множеством пар «атрибут–значение». Абстрактные значения (англ. value) классифицируются чисто синтаксически в различные множества значений (англ. value set). Таким образом, множество значений в этой модели представляет собой то, что в других моделях иногда называют доменом, – область допустимых значений атрибутов.

Атрибут (англ. attribute) в ER-модели формально определяется Ченом как отображение, ставящее в соответствие сущностям или связям некоторого множества одиночные значения или кортежи значений [7]. Таким образом, областью определения атрибутного отображения может быть множество сущностей или множество связей, а областью значений – множество значений или Декартово произведение множеств значений. Причем это отображение не обязано быть функциональным, образ у одного прообраза может быть несколько. В таком случае говорят о многозначных атрибутах. Обратите внимание, что в этой модели в форме атрибутов представляются как свойства, так и характеристики сущностей и связей. У первых просто фиксирована область значений – множество истинных значений (Истина и Ложь), в то время как у вторых она произвольна.

Мы познакомились со структурными понятиями ER-модели. Заметим только, что множества сущностей, множества связей, роли, множества значений и атрибуты являются типами и составляют схему базы данных (БД) в этой модели, а сущности, связи и значения – суть знаки, и представляют

данные о явлениях ПрО (именно с этими тремя формами данных и связана проблема триализма, обсуждаемая далее).

Как видим, предлагаемые в ER-модели структурные понятия очень близки по смыслу общечеловеческим понятиям: сущность – предмет, связь – отношение, атрибут – свойство или характеристика. Надо только отдавать себе отчет, что происходит переход от интуитивно воспринимаемых человеком понятий к формальным понятиям со своими определениями и свойствами.

2. Проблема триализма данных

Явления ПрО представляются в памяти компьютера, и в частности в БД, в виде некоторым образом структурированных данных. Спроектированная структура данных должна быть, с одной стороны, эффективной (минимизировать расходы памяти и время отклика), с другой – удобной и понятной в использовании людьми. Но главное, структура данных должна отражать потребности бизнес-процессов ПрО, для информационного обеспечения которых создается хранилище. Заинтересованность людей, реализующих эти процессы, – главный критерий релевантности принимаемых при проектировании решений.

В частности, бизнес-процессы определяют представляющие интерес явления ПрО, данные о которых должны быть представлены в БД. Выбирая форму данных для единичного явления в случае ER-модели, следует помнить о возможном триализме (наличии трех форм представления) явлений моделируемого мира [4, 8]. Три формы данных – это три возможных вида знаков в этой модели. «Использование основных понятий “сущность”, “атрибут”, “связь” представляется весьма естественным, хотя при анализе предметной области правильный выбор понятий (что считать сущностями, что связями и что атрибутами сущностей) может вызвать затруднения» [8].

Решение этой задачи должно порождать структуры, оптимально учитывающие два взаимно противоречивых критерия – требуемую бизнес-процессами информативность данных и эффективность их хранения и манипулирования ими. Так, понятие «брак между людьми» можно мыслить как атрибут, множество связей или множество сущностей и, соответственно, представлять элементы этого понятия как значение, связь или сущность. В подавляющем большинстве моделей данных и СУБД, проектируя схему БД, необходимо сделать выбор в пользу только одной из возможных форм для каждого явления. При этом можно использовать следующие соображения (рассмотрим их на конкретном примере понятия «брак между людьми»). Решающими являются информационные потребности бизнес-процессов ПрО.

Если вам достаточно информации о том, состоит человек в браке или нет, можно представлять эти явления как значения атрибута «*Замужем / Женат?*» множества сущностей *ЧЕЛОВЕК*. Если вас к тому же интересует, с кем конкретно заключен брак, необходимо трактовать *БРАК* как множество связей между сущностями множества *ЧЕЛОВЕК*. Даже если вы захотите описать это явление с помощью тех или иных характеристик, вам не придется менять форму множества связей (в ER-модели Чена множества связей могут иметь атрибуты). А вот если вам понадобится представлять связи браков с другими явлениями, вам не обойтись без множества сущностей *БРАК*.

Как вы понимаете, мы перечислили варианты представления в порядке возрастания функциональности и информативности форм. Но это не означает, что все явления нужно трактовать как сущности. Бинаризация представлений (сведение структур данных к понятиям бинарной модели – множествам знаков и исключительно бинарным отношениям между ними), на первый взгляд, упрощает проектирование, но она скрадывает важную для проектирования эффективной схемы БД семантику ПрО, невосполнимую на последующих этапах. Поэтому альтернативы следует рассматривать именно в таком порядке (атрибут, множество связей, множество сущностей) и останавливать процесс выбора при достижении требуемой информативности.

Первые два варианта реализации явлений типа «брак» представлены в левой части рис. 1 (вверху – текстовые определения, внизу – ER-диаграммы) и, по-видимому, в пояснениях не нуждаются. В третьем случае (правая часть рисунка) предполагается, что помимо сведений о состоянии людей

в браке интерес представляет информация о том, кто рожден в момент зарегистрированного брака между родителями. Налицо необходимость в констатации наличия связей типа *РОЖДЕНИЕ В БРАКЕ* между множествами сущностей *ЧЕЛОВЕК* и *БРАК*.

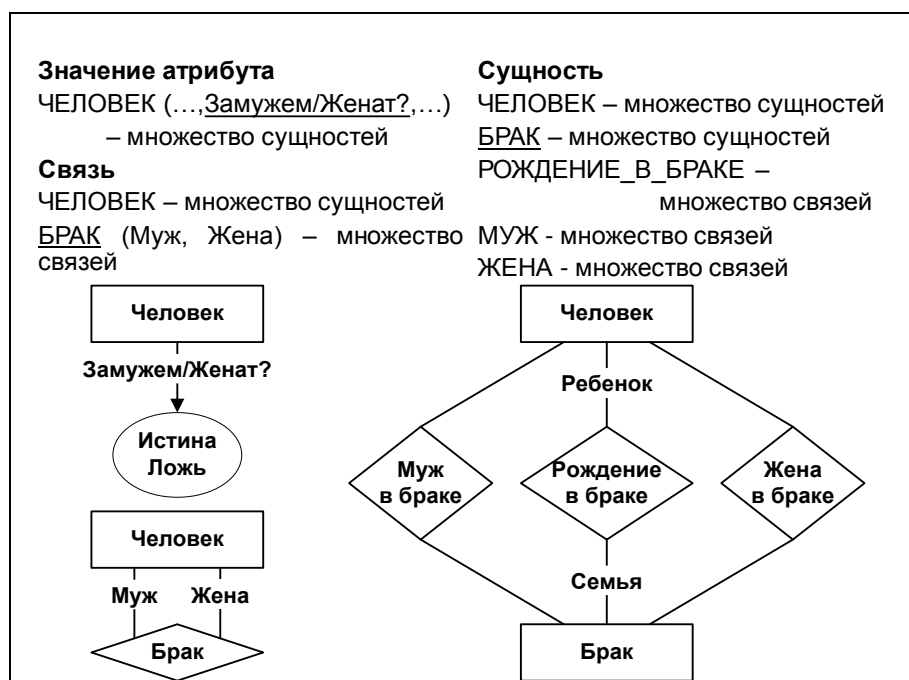


Рис. 1. Проблема триализма в ER-модели
 Fig. 1. The problem of trialism in the ER model

Обратите внимание на то, что по правилам структуризации ER-модели в связи могут вступать только сущности (а не связи или значения), и поэтому явления типа «брак» в последнем случае мы вынуждены представлять в виде множества сущностей. При этом роли *Муж* и *Жена* (второй случай) трансформируются в множества связей *МУЖ В БРАКЕ* и *ЖЕНА В БРАКЕ* (третий случай).

Именно этих соображений следует придерживаться при выборе подходящей структуры. И части речи в текстовых описаниях ПрО не являются определяющими в этом процессе. Получается, что в нашем примере существительное БРАК играло роль и прилагательного (атрибут множества сущностей), и глагола (множество связей), и существительного (множество сущностей).

В подавляющем большинстве опубликованных методик проектирования ER-схем данных [3, 4, 9–12] приводится три основных шага этого процесса:

- определение множеств сущностей;
- определение множеств связей;
- определение ограничений целостности.

Эта статья посвящена проектированию структур данных, поэтому далее будем говорить о первых двух этапах.

3. Проектирование множеств сущностей

Поскольку невозможно определить понятия для *n*-ок предметов, не задав первоначально понятия об этих предметах, сначала создаем структуры данных для последних – множества сущностей. После принятия решения о том, что некоторые однотипные явления будут представляться в форме множества сущностей, следует применить следующую процедуру для его проектирования.

1. Определить соответствующее понятие о предметах. Надо мысленно представить его содержание (правило принадлежности явлений ПрО объему этого понятия). Оно должно быть истинным для всех объектов, подпадающих под это понятие, и ложным в противном случае. Если есть возмож-

ность дать строгое логическое определение, следует это сделать. Но в подавляющем большинстве случаев формально определить понятие не удастся. В таком случае можно дать развернутое словесное описание.

2. Подобрать множеству сущностей существительное в качестве имени. Пространное вербальное определение, хоть оно и максимально точно отражает смысл понятия, неудобно использовать в качестве идентификатора соответствующей структуры. В идеале им должно быть общее существительное в единственном числе, как можно более близкое по значению. В глоссарии этому имени ставят в соответствие словесное описание. Таким образом, имя множества сущностей отражает смысл каждой его сущности.

3. Выделить для множества сущностей значащие (представляющие интерес с точки зрения бизнес-процессов) атрибутивные отображения. Определить для каждого:

- семантику (смысл предметной функции, которая ставит в соответствие каждой сущности некоторое(-ые) значение(-я));
- имя (общее существительное, отражающее смысл этой функции);
- область значений (множество значений, которые могут являться образами сущностей при этом отображении).

4. Проектирование множеств связей

После определения множеств сущностей можно приступить к созданию их агрегатов – множеств связей. Процедура проектирования множества связей выглядит следующим образом.

1. Определить соответствующее понятие об n -ках предметов.
2. Подобрать ему общее существительное в качестве имени.
3. Выделить для него значащие атрибутивные отображения. Определить для каждого:
 - семантику,
 - имя,
 - область значений.

Реализация этих задач во многом схожа с реализацией аналогичных задач предыдущего шага (проектирование множеств сущностей). Поэтому мы не стали повторяться. Однако с выполнением этого этапа связаны определенные сложности.

Поскольку каждому множеству связей соответствует понятие об n -ках предметов, особое внимание необходимо уделить построению необходимой и достаточной системы сущностей, составляющих одну связь каждого рассматриваемого множества связей. С одной стороны, в нее должны войти все объекты, определяющие смысл понятия об n -ках предметов, с другой стороны, в ней не должно быть объектов, которые можно исключить из содержания понятия без потери информации.

Следует руководствоваться следующими соображениями. В момент создания связи должны быть определены сущности для всех ролей без исключения. Не должно быть связей, в которых хотя бы одна сущность появляется позже, а значит, до поры до времени ссылка на нее в связи пуста. И в дальнейшем, пока существует связь, все сущности в ней не изменяются. Лучшее представление для связи – это ребро в экстенсionalе БД. Связь степени n – это ребро с n концами, каждому из концов которого соответствует своя роль, и инцидентна одна вершина, представляющая сущность. В таком случае становятся понятными приведенные выше правила.

Проиллюстрировать сказанное можно попыткой применить форму множества связей для третьего случая нашего предыдущего примера (см. рис. 1). Кому-то может прийти в голову идея реализовать в этом случае тернарное множество связей *Брак* с ролями *Муж*, *Жена*, *Ребенок*. Как правило, люди вступают в брак, еще не имея детей. Необходимо создавать связь для фиксации явления «вступление в брак», но не хватает сущности в роли *Ребенок*. Теперь представьте себе, что появился ребенок, заполнилась роль *Ребенок*. Казалось бы, все хорошо. А что делать, когда у этой пары родился второй ребенок, – добавлять роль или создавать новую связь? Оба решения не оптимальны. Все эти практические сложности связаны с неудачно спроектированной структурой множества связей.

Вторая сложность проектирования множеств связей касается того, что следует отличать сущности, участвующие в связи, от значений характеристик связи. Для примера рассмотрим множество связей *ЭЛЕМЕНТ РАСПИСАНИЯ ЗАНЯТИЙ* (рис. 2). На первый взгляд система множеств сущностей (*ПРЕПОДАВАТЕЛЬ*, *ГРУППА*, *ПРЕДМЕТ*, *АУДИТОРИЯ*, *ДЕНЬ НЕДЕЛИ* и *ВРЕМЯ*), объекты которых образуют связи этого типа, безупречна. Действительно, клеточка расписания занятий связывает именно эти объекты.

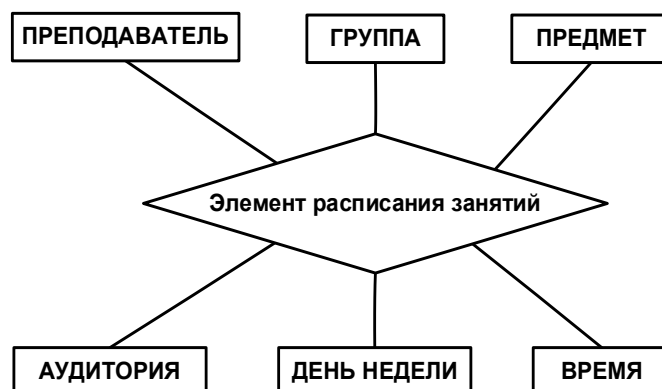


Рис. 2. Неправильно спроектированное множество связей
Fig. 2. Incorrectly designed relationship set

Однако объекты таких типов, как *АУДИТОРИЯ*, *ДЕНЬ НЕДЕЛИ* и *ВРЕМЯ*, скорее всего, не дотягивают до звания сущностей. Кроме собственно знаков этих объектов («104-я аудитория 2-го корпуса», «Понедельник» и «8:45») в БД мы не будем фиксировать о них больше ничего. У них нет характеристик, отношений с другими объектами, представляющих для нас интерес. Поэтому такие объекты, по сути, являются значениями соответствующих атрибутов множества связей – *Аудитория*, *День Недели* и *Время*. А значит, множество связей *ЭЛЕМЕНТ РАСПИСАНИЯ ЗАНЯТИЙ* на самом деле определено на множествах сущностей *ПРЕПОДАВАТЕЛЬ*, *ГРУППА*, *ПРЕДМЕТ* и имеет степень, равную трем (рис. 3).

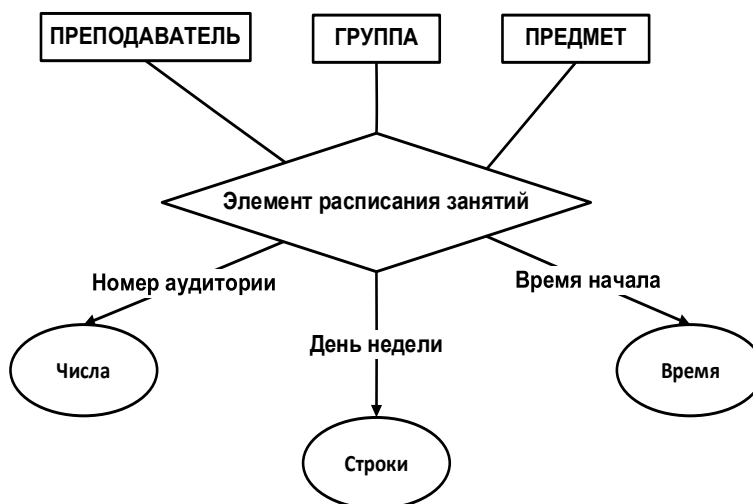


Рис. 3. Правильно спроектированное множество связей
Fig. 3. Correctly designed relationship set

Многие методики посоветовали бы в этом случае использовать для явления *ЭЛЕМЕНТ РАСПИСАНИЯ ЗАНЯТИЙ* такую форму, как множество сущностей. Тем самым мы опять осуществляем уже упомянутую бинаризацию структур и еще на семантическом уровне огрубляем картину мира, фиксированную в схеме данных. Но детальное рассмотрение этого вопроса относится, скорее, уже к ограничениям целостности данных и не является предметом этой статьи, посвященной структуризации.

5. Принципы именования элементов схемы

Одним из важных навыков, которыми должен обладать проектировщик схем данных, является умение подбирать краткие, но точные имена структурным элементам. Именно читая их в схеме, любой человек должен быть в состоянии воссоздать семантическую картину моделируемого мира – представляющие интерес понятия о предметах и *n*-ках предметов. В ER-модели семантически значимыми именами могут обладать такие элементы схемы, как множества сущностей, множества связей, роли и атрибуты. Множества значений объединяют структурно единообразные элементы, не имеющие семантики, они имеют стандартные абстрактные имена – строки, целые числа и т.д.

При проектировании ER-схемы следует придерживаться следующих принципов определения имен структурных объектов.

Классы знаков определяются соответствующими понятиями об индивидах (для множеств сущностей), понятиями об *n*-ках индивидов (для множеств связей) или понятиями о предметно-функциональных характеристиках (для атрибутивных отображений). Каждому такому понятию желательно подобрать краткое общее имя существительное, традиционно используемое для передачи семантики объектов класса (при необходимости можно использовать определения и дополнения). Если не удастся подобрать такого имени, которое бы точно и однозначно раскрывало содержание понятия, следует выбрать его из наиболее подходящих по смыслу и уточнить требуемую семантику в глоссарии в виде формального или развернутого словесного определения.

Как правило, с именами множеств сущностей, атрибутов и ролей проблем не бывает. В естественных языках для них уже придуманы и широко используются подходящие термины. Хуже обстоят дела с множествами связей. Очень немногие из них имеют традиционно используемые имена, определяющие семантику связи без предпочтения какой-то одной роли (хорошими примерами таких имен являются «Брак», «Рождение»). Действительно, эти слова отражают смысл именно ненаправленной связи, в отличие от неудачных имен «Муж» и «Родитель», которые больше подходят ролям этих связей. А теперь представьте себе, что вам необходимо определить в схеме бинарную связь между студентом и группой. Варианты имен *Студент группы* и *Студенческая группа* выделяют одну из ролей, вторую делая второстепенной. В таком случае вместо использования имени одной из ролей для множества связей можно применить комбинацию имен ролей, которые играют сущности в этих связях (например, «Группа–Студент»). С точки зрения точности передачи семантики ПрО и логической строгости этот вариант имени предпочтительней имени, в котором необоснованно выделена и использована только одна роль.

Заключение

В настоящей статье выполнено исследование путей перехода от интуитивного к строго научному подходу в области концептуального проектирования данных.

Предлагаются строгий понятийный базис модели, методика определения подходящих форм данных и правила структуризации данных в семантических моделях типа «Сущность–Связь». Также предложены правила создания компонентов схемы (множеств сущностей и множеств связей), которые определяют основные шаги структуризации.

На примерах показано, как на основе решения проблемы триализма можно выбрать для каждого явления ПрО подходящую структурную форму.

Список источников

1. Фролов И. ER-диаграмма – это... Описание, виды, правила построения. 2018. URL: <https://fb.ru/article/436948/er-diagramma---eto-opisanie-vidyi-pravila-postroeniya> (дата обращения: 12.01.2022).
2. Ефименко В. Учимся проектированию Entity Relationship – диаграмм. 2019. URL: <https://habr.com/ru/post/440556/> (дата обращения: 12.01.2022).
3. Watt A., Eng N. Database Design. 2nd ed. BCcampus, 2014. Viii, 136 p.

4. Швецов В. Базы данных. Первая стадия концептуального проектирования базы данных (концептуальное моделирование). URL: <https://intuit.ru/studies/courses/508/364/lecture/8647> (дата обращения: 12.01.2022).
5. Кара-Ушанов В.Ю. Модель «Сущность–Связь». Екатеринбург : Урал. федер. ун-т, 2017. 64 с.
6. Создание ER-Диаграмм // Информационные технологии. URL: <http://inf-teh-lotos.ru/sozdanie-er-diagramm> (дата обращения: 12.01.2022).
7. Chen P. The entity-relationship model – towards a unified view of data // *ACM Transactions on Database Systems*. 1976. V. 1 (1). P. 9–36.
8. Хрусталёв Е.Ю., Баранова Н.М. Интеллектуальные семантические модели для повышения качества образовательных и научно-исследовательских процессов // *Экономический анализ: теория и практика*. 2013. № 35 (338). С. 2–10.
9. Хусаинова Г.Я. Методика построения ER-диаграммы для базы данных // *NovaInfo*. 2017. № 76-1. С. 322–327.
10. Nguyen Kim Anh. Data Modeling Using Entity-Relationship Model. 2009. URL: https://cnx.org/contents/aM2VU_eRT@1/Data-Modeling-Using-Entity-Relationship-Model (дата обращения: 12.01.2022).
11. Tsichritzis D., Lochovsky F. Data Models. Prentice-Hall, Inc., 1982. 400 p.
12. Бабанов А.М. Семантическая методика проектирования БД и ее перспективы, открывающиеся с применением ERM-модели данных // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2011. № 3 (16). С. 58–66.

References

1. Frolov, I. (2018) *ER-diagramma – eto... Opisanie, vidy, pravila postroeniya* [ER diagram is... Description, types, construction rules]. [Online] Available from: <https://fb.ru/article/436948/er-diagramma---eto-description-vidyi-pravila-postroeniya> (Accessed: 12th January 2022).
2. Efimenko, V. (2019) *Uchimsya proektirovaniyu Entity Relationship – diagramm* [Learning to design Entity Relationship diagrams]. [Online] Available from: <https://habr.com/ru/post/440556/> (Accessed: 12th January 2022).
3. Watt, A. & Eng, N. (2014) *Database Design*. 2nd ed. BCcampus.
4. Shvetsov, V. (n.d.) *Bazy dannykh. Pervaya stadiya kontseptual'nogo proektirovaniya bazy dannykh (kontseptual'noe modelirovanie)* [Databases. The first stage of the conceptual design of the database (conceptual modeling)]. [Online] Available from: <https://intuit.ru/studies/courses/508/364/lecture/8647> (Accessed: 12th January 2022).
5. Kara-Ushanov, V.Yu. (2017) *Model' "Sushchnost'–Svyaz"* [Model "Entity - Relationship"]. Yekaterinburg: Ural Federal University.
6. Inf-teh-lotos.ru. (n.d.) *Sozdanie ER-Diagramm. Informatsionnye tekhnologii* [Information technology. Creation of ER Diagrams]. [Online] Available form: <http://inf-teh-lotos.ru/sozdanie-er-diagramm> (Accessed: 12th January 2022).
7. Chen, P. (1976) The entity-relationship model – towards a unified view of data. *ACM Transactions on Database Systems*. 1(1). pp. 9–36. DOI: 10.1145/320434.320440
8. Khrustalev, E.Yu. & Baranova, N.M. (2013) Intelligent semantic models for improving the quality of educational and research processes. *Ekonomicheskii analiz: teoriya i praktika – Economic Analysis: Theory and Practice*. 35(338). pp. 2–10.
9. Khusainova, G.Ya. (2017) Metodika postroeniya ER-diagrammy dlya bazy dannykh [Technique for constructing an ER diagram for a database]. *NovaInfo*. 76-1. pp. 322–327.
10. Nguyen Kim Anh. (2009) *Data Modeling Using Entity-Relationship Model*. [Online] Available from: https://cnx.org/contents/aM2VU_eRT@1/Data-Modeling-Using-Entity-Relationship-Model (Accessed: 12th January 2022).
11. Tsichritzis, D. & Lochovsky, F. (1982) *Data Models*. Prentice Hall Inc.
12. Babanov, A.M. (2011) Semantic method of database designing and its prospects opening with application of the erm data model. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 16(3). pp. 58–66.

Информация об авторе:

Бабанов Алексей Михайлович – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: babanov2000@mail.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Information about the author:

Babanov Alexey M. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: babanov2000@mail.ru

The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 15.01.2022; принята к публикации 30.08.2022

Received 15.01.2022; accepted for publication 30.08.2022

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

DESIGNING AND DIAGNOSTICS OF COMPUTER SYSTEMS

Научная статья

УДК 519.873:519.718.7

doi: 10.17223/19988605/60/11

Определение ключа аппаратной защиты цифровых устройств

Людмила Андреевна Золоторевич¹, Валерий Андреевич Ильинков²

^{1,2} Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Республика Беларусь

¹ lazolotorevich@gmail.com

² v.ilyinkov@gmail.com

Аннотация. Рассматриваются особенности и надежность логического кодирования комбинационных схем. Предлагается алгоритм взлома кода комбинационных схем, основанный на описании закодированной структуры функцией разрешения и сведении задачи к КНФ-выполнимости. Исходными данными для декодирования структуры цифрового устройства являются структурная реализация закодированной схемы, полученная, например, методом обратного проектирования (проектирования по прототипу), а также активированный физический образец интегральной схемы, в защищенную от несанкционированного доступа память которой загружено подлинное значение ключа. Этот образец может использоваться в виде модели черного ящика. Основная идея взлома ключа состоит в том, чтобы решить задачу, не прибегая к исследованиям на большом интервале значений входных и выходных переменных.

Ключевые слова: цифровое устройство; логическое кодирование; декодирование; функция разрешения; выполнимость КНФ-функции

Для цитирования: Золоторевич Л.А., Ильинков В.А. Определение ключа аппаратной защиты цифровых устройств // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 60. С. 102–110. doi: 10.17223/19988605/60/11

Original article

doi: 10.17223/19988605/60/11

Determining security key the hardware for digital devices

Ludmila A. Zolotorevich¹, Valery A. Ilyinkov²

^{1,2} Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

¹ lazolotorevich@gmail.com

² v.ilyinkov@gmail.com

Abstract. The features and reliability of logical coding of combinational circuits are considered. An algorithm for breaking the code of combinational circuits is proposed, based on the description of the encoded structure by the resolution function and the reduction of the problem to CNF satisfiability. The initial data for decoding the structure of a digital device are the structural implementation of the encoded circuit, obtained, for example, by the reverse engi-

neering method (prototype design), as well as an activated physical sample of the integrated circuit, the correct key value is loaded into the memory protected from unauthorized access. This sample can be used as a black box model. The main idea of key breaking is to solve the problem without resorting to research on a large range of values of input and output variables.

Keywords: digital device; logical encoding; decoding; resolution function; CNF satisfiability

For citation: Zolotarevich, L.A., Ilyinkov, V.A. (2022) Determining security key the hardware for digital devices. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 60. pp. 102–110. doi: 10.17223/19988605/60/11

Серьезной проблемой для электронной и оборонной промышленности в последние годы стали пиратство, перепроизводство и контрафакция, что привело к необходимости защиты проектов СБИС, СнК от несанкционированного вмешательства в цикл проектирования и / или производства интегральных схем [1]. По оценкам Technology Information Handling Services (IHS), финансовый риск из-за контрафактных и несанкционированных микросхем оценивается в более чем 169 млрд долларов в год, что примерно в 10 раз превышает ущерб от пиратства в области ПО [2]. Для оборонной промышленности важнейшей проблемой является возможность использования контрафактных интегральных схем с модифицированными функциями, что в определенное время может деструктивно повлиять на функционирование структуры, ухудшить эксплуатационные характеристики, привести к раскрытию конфиденциальной информации и др. Кроме больших финансовых потерь существует реальная проблема обеспечения национальной безопасности, так как 15% интегральных схем в системах оборонной промышленности являются контрафактными.

В связи с этим стала очевидной необходимость защиты проектов на основе создания таксономии нарушений и отклонений, общего подхода к контролю СБИС, СнК, с моделями которых приходится работать при проектировании и организации контроля на всех этапах жизненного цикла цифровой системы с учетом злонамеренных внедрений в цикл проектирования и производства интегральных схем. Как развитие теории контролепригодного проектирования (Design-for-Testability; DfT) в работе [3] предлагается подход к проектированию Design-for-Trust (DfTr), который дополнительно включает средства для контроля и предотвращения аппаратных атак при проектировании и изготовлении СБИС.

В последние годы для защиты проектов интегральных схем применяются методы и средства аппаратного кодирования комбинационных блоков. Для обеспечения надежности подобной защиты проектов необходимы средства контроля эффективности применяемых методов кодирования, выявления внесенных троянов на основе создания общего подхода к контролю проектов на всех этапах проектирования и производства.

В работе рассматриваются некоторые особенности метода логического кодирования структурных схем цифровых устройств комбинационного типа. Предлагается метод взлома кода при наличии информации о структуре закодированного объекта и возможности доступа к физической модели. Задача решается на основе описания закодированной структуры в виде КНФ-функции разрешения, решения задачи выполнимости (SAT) и физического моделирования объекта.

1. Логическое кодирование ИС как метод аппаратной защиты

В работе [2] проанализированы различные модели процесса злонамеренного искажения проекта, описывающие условия, при которых подобное искажение может внедриться в цифровую систему. В числе возможных источников искажений рассматриваются поставщики базовых функциональных блоков интеллектуальной собственности (IP's), которые приобретаются разработчиками СнК, собственно разработчики СнК, а также кремниевые фабрики – изготовители СнК. Методы несанкционированного доступа в проект могут быть различными, в том числе основываться на применении специальных средств САПР, способных исказить проект на RTL-уровне. В современных условиях наиболее уязвимым этапом может быть этап производства.

Одним из методов борьбы с вышеупомянутыми угрозами является логическое кодирование, которое обеспечивает доступ к объекту только авторизованным пользователям [4]. Метод предпола-

гает сокрытие функциональности проекта и использование ключа, применение которого выводит систему в область правильного функционирования.

Идея кодирования основана на том, чтобы изменить конструкцию ИС, добавив в нее дополнительные логические элементы и новые входы, называемые ключевыми, т.е. на применении метода обфускации структуры объекта. В такой постановке если злоумышленник не владеет ключом, то ему недоступна внутренняя реализация объекта. Задача структурной обфускации и логического кодирования заключается в том, чтобы затруднить или сделать невозможным получение подлинного ключа. Ключевые входы подсоединяются к защищенной от несанкционированного доступа памяти, а закодированная схема будет работать правильно только в том случае, если на ее ключевые входы поданы подлинные значения. Значения ключевых входов передаются после изготовления микросхем конечным пользователям (рис. 1).

Таким образом, логическое кодирование основывается на предположении, что производитель не знает и не может вычислить подлинные значения ключевых входов или, в противном случае, поиск подлинного ключа должен быть для злоумышленника затруднителен.

В литературе предложены различные методы кодирования комбинационной логики, в которых используются в качестве ключевых вентилях элементы XOR / XNOR [1, 5–7], AND / OR [8], мультиплексоры [9] или комбинации этих вентилях [10]. Выбор линии для включения вентиля, тип применяемого вентиля существенно влияют на эффективность кодирования. Воздействие неподлинного ключа можно сравнить с влиянием неисправности константного типа на данной линии (см. рис. 1). При выборе в качестве ключевых вентилях XOR или NXOR применение неподлинного ключа приводит к появлению неисправности константного типа в любом случае, при любом входном воздействии, в отличие от вентилях OR, NOR, AND, NAND, что влияет в целом на эффективность кодирования.

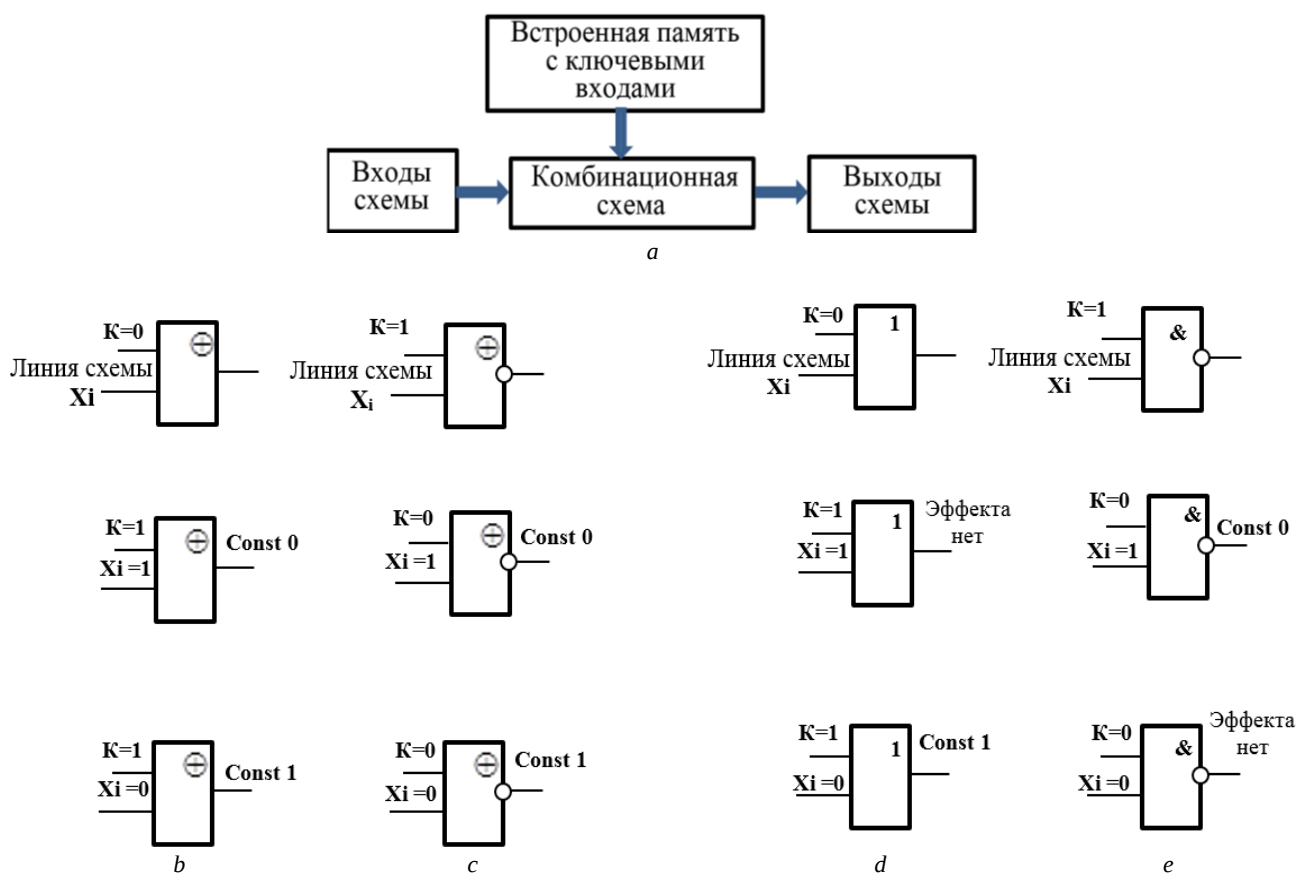


Рис. 1. Логическое кодирование цифровых устройств:

a – общая идея кодирования; *b* – эффекты применения ключевого вентиля XOR-типа; *c* – NXOR; *d* – OR; *e* – NAND

Fig. 1. Logic encoding of digital devices:

a – general idea of coding; *b* – effects of applying an XOR-type key gate; *c* – NXOR; *d* – OR; *e* – NAND

Кроме типа применяемого вентиля существует еще два основных способа увеличить влияние кодовых вентилях на значения выходов схемы. Один из них заключается в выборе линий, сигналы в которых влияют на максимально возможное количество выходов схемы, второй – в повышении чувствительности схемы в ответ на применение неподлинного ключа.

Выбор линии для включения вентиля в большой степени влияет на эффективность кодирования. Один из подходов основан на случайном выборе линии схемы [4]. В работе [1] показана недостаточная эффективность этого метода. Во-первых, вставка ключевого вентиля в случайно выбранную линию схемы не может гарантировать необходимое расстояние Хэмминга между истинным выходным вектором и полученным в случае применения неподлинного ключа.

В работе [11] для характеристики эффективности выбора линии в схеме для введения ключевого вентиля предложено использовать метрику $M = N_0P_0 * N_0O_0 + N_0P_1 * N_0O_1$, где N_0P_0 (N_0P_1) – количество входных наборов, которые обнаруживают неисправность типа *const 0* (*const 1*), а N_0O_0 (N_0O_1) – количество ошибочных бит выходного вектора в результате появления неисправности *const 0* (*const 1*). Данная метрика может быть усовершенствована для получения возможности отслеживать в динамике параметры N_0O_0 (N_0O_1) для анализа неактивированных выходов при кодировании. Использование метрики M при кодировании можно сформулировать как нахождение множества неисправностей кодируемой схемы, которые вместе будут влиять на 50% выходных линий при их активизации. Кодирование на основе использования метрики M требует моделирования схемы $Q = 2s \times 2^n$ раз, где s – общее количество линий схемы (переменных полного состояния схемы), n – количество входных переменных схемы. Для примера схемы, рассмотренного ниже, $M = 256 \times 34 = 8\,704$. Для реальных схем подобный подход практически не приемлем по причине высоких вычислительных затрат. В то же время с целью оптимизации вычислительных процедур предлагается эвристическое решение – сократить количество моделируемых входных наборов до 1 000 [11].

Основная задача, которая должна быть решена при практической реализации данной общей идеи, заключается в том, чтобы определить оптимальное множество внутренних линий схемы и количество ключевых элементов для создания максимальных трудностей для злоумышленника по поиску подлинного ключа. При включении очередного вентиля при кодировании логических устройств необходимо проводить анализ на появление эффекта маскирования неисправностей, который способен блокировать эффект кодирования [1. Рис. 2]. При наличии избыточности некоторые линии схемы не могут быть активированы ни одним входным набором, поэтому вставка ключевого вентиля в данном случае может быть бесполезной [1. Рис. 1].

В работе [1] на примере рассмотрена возможность повышения эффективности кодирования за счет включения в структуру схемы вентилях управления, которые позволяют активизировать влияние неподлинного состояния каждого отдельного бита ключа на формирование выходного вектора закодированной схемы. Для того чтобы усилить влияние неподлинного бита кодового слова на результат функционирования схемы, управляющие вентили объединяют биты кодового слова в группы, используя при этом их выходы в качестве входов ключевых вентилях. В таком случае реализуется групповое воздействие нескольких битов кодового слова на активацию ключевого вентиля. Если хотя бы один из ключевых входов, включенных в группу, принимает неподлинное значение, ключевой вентиль окажется активированным.

2. Контроль надежности кодирования комбинационных схем

В работе [2] предлагается подход SAT-атаки для определения кода аппаратной защиты комбинационных схем цифровых устройств на структурном уровне. Подход основан на сведении задачи к определению выполнимости булевой функции.

Ниже приводится алгоритм декодирования комбинационных схем на основе описания закодированной структуры КНФ-функции разрешения схемы и решения задачи ее выполнимости. Алгоритм проиллюстрирован на примере фрагмента схемы.

Исходными данными для декодирования структуры цифрового устройства являются структурная реализация закодированной схемы, которая может быть получена методом обратного проектирования (проектирования по прототипу), а также активированный физический образец интегральной схемы, в защищенную от несанкционированного доступа память которой заказчик загрузил подлинное значение ключа. Этот образец может использоваться в виде модели черного ящика $Y = eval(X)$. Основная идея SAT-атаки взлома ключа состоит в том, чтобы определить подлинный ключ, не прибегая к исследованиям на большом интервале входно-выходных переменных [2].

Обозначим $\vec{Y} = f(\vec{X})$ – функцию, реализуемую комбинационной схемой с первичными входами $\vec{X}$ и выходами $\vec{Y}$. КНФ-функции разрешения исходной схемы $Cir_a(\vec{X}, \vec{Y})$. Сведем задачу получения ключа к описанию закодированной схемы в виде КНФ-представления булевой функции разрешения $Cir_b(\vec{X}, \vec{K}, \vec{Y})$, где $\vec{X}$ – первичные входы схемы, $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; $\vec{K}$ – ключевые входы схемы, $\vec{K} = (k_1, k_2, \dots, k_r)$; $\vec{Y}$ – выходные линии схемы, $\vec{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$.

Если $F = f(\vec{X}, \vec{Y})$ – функция, реализуемая исходной схемой, то для любого $\vec{X}$ $F = Cir_b(\vec{X}, \vec{K}, \vec{Y})$, если применить к закодированной схеме подлинное значение ключа. Цель злоумышленника состоит в том, чтобы найти такой ключ $\vec{K} = (k_1, k_2, \dots, k_r)$, чтобы $\forall \vec{X} \quad Cir_b(\vec{X}, \vec{K}, \vec{Y}) \wedge Cir_a(\vec{X}, \vec{Y})$. Но злоумышленник не может получить формулу $Cir_a(\vec{X}, \vec{Y})$, так как ему недоступно структурное описание исходной схемы. Не получив доступа к структуре исходной схемы и не имея, таким образом, возможности построить отношение $Cir_a(\vec{X}, \vec{Y})$, злоумышленник может наблюдать реакцию схемы на требуемое входное воздействие на активированной ИС, выполнив функцию черного ящика $eval$:

$$\vec{X}_i = (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \vec{Y}_i = (y_1, y_2, \dots, y_m).$$

Для заданного набора входных векторов $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_p$ и соответствующих выходных наблюдений $\vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \dots, \vec{Y}_p$ определение ключевого значения, которое согласуется с этими p наблюдениями, является достаточно простым, если свести задачу к решению выполнимости формулы

$$(SAT) \wedge_{j=1}^p Cir_b(\vec{X}_j, \vec{K}, \vec{Y}_j).$$

Однако если теперь выполнить новое наблюдение на физическом образце схемы $eval(\vec{X}_s) = \vec{Y}_s$, то нет гарантии, что удовлетворительное присваивание $\vec{K}$ для формулы $\wedge_{j=1}^p Cir_b(\vec{X}_j, \vec{K}, \vec{Y}_j)$ также будет удовлетворительным присваиванием $\vec{K}$ для формулы $\wedge_{j=p+1}^{2^n} Cir_b(\vec{X}_j, \vec{K}, \vec{Y}_j)$.

Для практической атаки при большом числе входных переменных функция $eval$ может быть определена только на небольшом числе входных векторов $Cir_b(\vec{X}, \vec{K}, \vec{Y}) \Leftrightarrow eval(\vec{X}) = \vec{Y}$, в то время как $\exists \vec{K} : \forall \vec{X} \quad Cir_b(\vec{X}, \vec{K}, \vec{Y}) \wedge Cir_a(\vec{X}, \vec{Y})$.

Решение проблемы заключается в том, что вместо поиска подлинного ключа выполняется определение ключа как члена класса эквивалентности ключей, который дает на выходах правильный результат для всех входных состояний.

Определение 1. Два ключа $\vec{K}_1$ и $\vec{K}_2$ являются эквивалентными ($\vec{K}_1 = \vec{K}_2$) тогда и только тогда, когда для входного значения $\vec{X}_i$ закодированная схема выдает одинаковое выходное значение $\vec{Y}_i$ для ключей $\vec{K}_1$ и $\vec{K}_2$.

Для определения подлинного ключа итеративно исключаются ключи из класса эквивалентности, которые выдают неправильные значения выходов по крайней мере для одного входного шаблона. Класс эквивалентных ключей определяется на некотором входно-выходном векторе решением выполнимости функции $Cir_b(\vec{X}_j, \vec{K}, \vec{Y}_j)$ полным методом.

Определение 2. Входной вектор $\vec{X}^d$ называется различающим, если реакция схемы при использовании ключа $\vec{K}_1$ равна $\vec{Y}_1^d$ и отличается от реакции $\vec{Y}_2^d$ при использовании ключа $\vec{K}_2$.

При наличии различающего набора можно проверить реакцию активированной схемы для входа $\vec{X}^d$ и использовать ее, чтобы исключить ключ $\vec{K}_1$ или $\vec{K}_2$ как не являющийся подлинным ключом.

Приведем алгоритм для нахождения подлинного ключа из класса эквивалентности:

- 1 $i := 1$.
- 2 $F_i = \text{Cir}_b(\vec{X}, \vec{K}_1, \vec{Y}_1) \wedge \text{Cir}_b(\vec{X}, \vec{K}_2, \vec{Y}_2)$.
- 3 Если $F_i \wedge \vec{Y}_1 \neq \vec{Y}_2$ не выполняется, переход к п. 8 – различающий набор не определен.
- 4 Решение $F_i = \text{Cir}_b(\vec{X}, \vec{K}_1, \vec{Y}_1) \wedge \text{Cir}_b(\vec{X}, \vec{K}_2, \vec{Y}_2) \wedge (\vec{Y}_1 \neq \vec{Y}_2)$, $\vec{X}_i^d := \vec{X}$. Входной набор $\vec{X}_i^d$ является различающим.
- 5 $\vec{Y}_i^d := \text{eval}(\vec{X}_i^d)$.
- 6 $i = i + 1$.
- 7 $F_i = F_{i-1} \wedge \text{Cir}_b(\vec{X}_i^d, \vec{K}_1, \vec{Y}_i^d) \wedge \text{Cir}_b(\vec{X}_i^d, \vec{K}_2, \vec{Y}_i^d)$. Переход к п. 3.
- 8 Выход.

Каждая итерация алгоритма исключает хотя бы один неверный член рассматриваемого класса. Это связано с тем, что поиск различающего входного набора ведется с условием $\vec{Y}_1 \neq \vec{Y}_2$, т.е. при одинаковых входных данных выходные должны отличаться для разных ключей. Следовательно, хотя бы один ключ окажется неправильным. Алгоритм завершается, когда определен подлинный ключ из класса эквивалентных ключей.

Для полноты изложения рассмотрим получение функции разрешения F^f . Функция F^f , называемая функцией разрешения для логической функции f , зависит не только от аргументов функции f , но и от самой f и принимает значение логической 1 при всех допустимых состояниях входных и выходной переменных [12]. Функция F^f принимает значение 0 при всех недопустимых состояниях входных и выходной переменных. Приведем функции разрешения F^f и запрета $\overline{F^f}$ в виде таблицы истинности для конъюнкции $f = a * b$ (табл. 1).

В табл. 2 приведены КНФ-функций разрешения для некоторых типов вентильных элементов.

Таблица 1

Функции разрешения и запрета

a	b	f	F^f	$\overline{F^f}$
0	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1

Таблица 2

Функции разрешения

№ п/п	Однобитовые арифметические и логические уравнения	КНФ-функций разрешения
1	$f = b \vee c$	$(\overline{b} \vee f)(\overline{c} \vee f)(b \vee c \vee \overline{f})$
2	$f = b * c$	$(b \vee \overline{f})(c \vee \overline{f})(\overline{b} \vee \overline{c} \vee f)$
3	$f = a \oplus b$	$(a \vee b \vee \overline{f})(a \vee \overline{b} \vee f)(\overline{a} \vee b \vee \overline{f})(\overline{a} \vee \overline{b} \vee f)$
4	$f = a \sim b$	$(a \vee b \vee f)(a \vee \overline{b} \vee \overline{f})(\overline{a} \vee b \vee \overline{f})(\overline{a} \vee \overline{b} \vee f)$

Рассмотрим пример. На рис. 2 приведены схема (рис. 2, а) и вариант ее кодирования, которое выполнено включением дополнительных вентилей XOR (B₁) и NXOR (B₂) (рис. 2, б).

Приведем функцию разрешения закодированной схемы $Cir_b(\vec{X}, \vec{K}, \vec{Y})$. При формировании соответствующей функции разрешения схемы переменные a, b, c – входные переменные, $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1$ – выходы соответствующих элементов.

$$\begin{aligned} Cir_b = & (a \vee b \vee a_1)(a \vee \bar{b} \vee a_1)(\bar{a} \vee b \vee a_1)(\bar{a} \vee \bar{b} \vee a_1) \times \\ & \times (b \vee c \vee a_2)(b \vee \bar{c} \vee a_2)(\bar{b} \vee c \vee a_2)(\bar{b} \vee \bar{c} \vee a_2) \times \\ & \times (a \vee c \vee a_3)(a \vee \bar{c} \vee a_3)(\bar{a} \vee c \vee a_3)(\bar{a} \vee \bar{c} \vee a_3) \times \\ & \times (a_3 \vee k_1 \vee b_2)(a_3 \vee \bar{k}_1 \vee b_2)(\bar{a}_3 \vee k_1 \vee b_2)(\bar{a}_3 \vee \bar{k}_1 \vee b_2) \times \\ & \times (k_2 \vee a_1 \vee b_1)(k_2 \vee \bar{a}_1 \vee b_1)(\bar{k}_2 \vee a_1 \vee b_1)(\bar{k}_2 \vee \bar{a}_1 \vee b_1) \times \\ & \times (b_1 \vee a_2 \vee b_2 \vee c_1)(b_1 \vee a_2 \vee \bar{b}_2 \vee c_1)(b_1 \vee \bar{a}_2 \vee b_2 \vee c_1)(b_1 \vee \bar{a}_2 \vee \bar{b}_2 \vee c_1) \times \\ & \times (\bar{b}_1 \vee a_2 \vee b_2 \vee c_1)(\bar{b}_1 \vee a_2 \vee \bar{b}_2 \vee c_1)(\bar{b}_1 \vee \bar{a}_2 \vee b_2 \vee c_1)(\bar{b}_1 \vee \bar{a}_2 \vee \bar{b}_2 \vee c_1). \end{aligned}$$

1. В качестве входного вектора для поиска ключей используем случайный вектор $\vec{X} = 110$ для которого определяем $\vec{Y}$ с помощью активированной схемы: $eval(\vec{X}) = 1$.

2. Найдем решение задачи SAT для функции $F = Cir_b ab\bar{c}c_1$ на основе полного алгоритма решения выполнимости:

$$F = \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 (k_1 \vee b_2)(\bar{k}_1 \vee \bar{b}_2)(k_2 \vee \bar{b}_1)(\bar{k}_2 \vee b_1) ab\bar{c}c_1.$$

Функция выполнима при следующих условиях:

а) $F = k_1 k_2 \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 b_1 \bar{b}_2 c_1$; $\vec{K}_1 = 11$;

б) $F = \bar{k}_1 \bar{k}_2 \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 b_1 b_2 c_1$; $\vec{K}_2 = 01$;

в) $F = k_1 k_2 \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 b_1 b_2 c_1$; $\vec{K}_3 = 00$.

Таким образом, определены три ключа, $\vec{K}_1 = 11$, $\vec{K}_2 = 01$, $\vec{K}_3 = 00$, которые составляют класс эквивалентных на данном этапе декодирования.

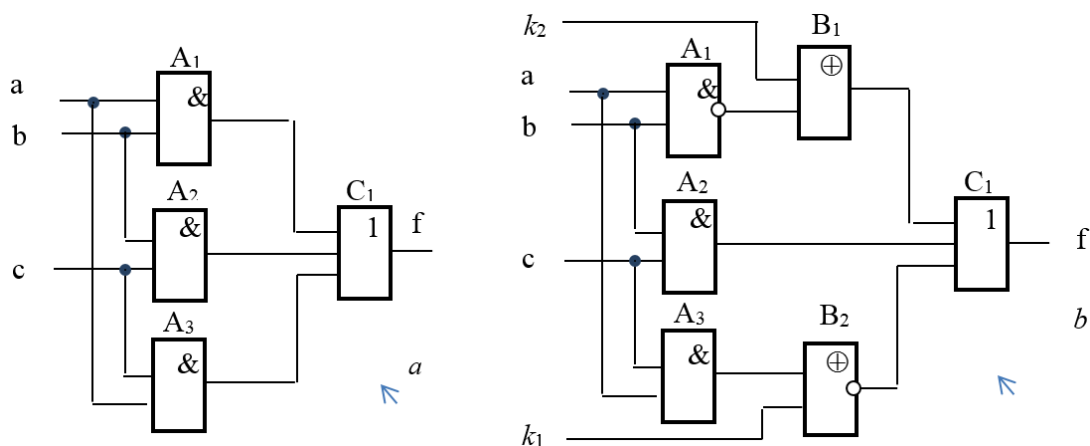


Рис. 2. Комбинационная схема для иллюстрации алгоритма взлома ключа:

a – исходная схема; b – закодированная схема

Fig. 2. Combination scheme to illustrate the key cracking algorithm:

a – original schema; b – coded scheme

3. Определим различающий входной набор для первых двух ключей $\vec{K}_1 = 11$ и $\vec{K}_2 = 01$ из найденного класса. Для этого необходимо определить выполнимость функции

$$F_1 = Cir_b(\vec{X}, \vec{K}_1, \vec{Y}_1) \wedge Cir_b(\vec{X}, \vec{K}_2, \vec{Y}_2). \quad (1)$$

Для решения (1) определяем один из выполнимых входно-выходных векторов для первого ключа $\vec{K}_1 = 11$. Задача решается на основе неполного алгоритма выполнимости функции

$$F = \text{Cir}_b k_1 k_2. \quad (2)$$

Получим $F = \overline{a} \overline{b} \overline{c} k_1 k_2 a_1 \overline{a}_2 a_3 \overline{b}_1 \overline{b}_2 c_1$. Таким образом, определены новые входной $\vec{X} = 101$ и выходной $\vec{Y} = 1$ векторы. Проверим выполнимость функции $F = \text{Cir}_b \overline{a} \overline{b} \overline{c} k_1 k_2 \overline{c}_1$ на полученном входном наборе при значении выходного вектора, отличном от полученного в (2), для второго ключа $\vec{K}_2 = 01$. В результате $F = \overline{a} \overline{b} \overline{c} k_1 k_2 a_1 \overline{a}_2 a_3 \overline{b}_1 \overline{b}_2 \overline{c}_1$.

Следовательно, $\vec{X} = 101$ является различающим входным набором, так как разным ключам соответствуют разные выходы.

4. Определим вектор $\vec{Y} \Rightarrow \vec{X} = 101$, $\vec{Y} = \text{eval}(\vec{X}) = 1$ с помощью активированной схемы.

5. Вычислим функцию (1) для $\vec{K}_1 = 11$: $F_{K_1} = \text{Cir}_b \overline{a} \overline{b} \overline{c} k_1 k_2 c_1$; для $\vec{K}_2 = 01$: $F_{K_2} = \text{Cir}_b \overline{a} \overline{b} \overline{c} k_1 k_2 c_1$. Функция $F_{K_2} = \text{Cir}_b \overline{a} \overline{b} \overline{c} k_1 k_2 c_1$ не выполняется. Следовательно, ключ $\vec{K}_2 = 01$ исключается из класса эквивалентности.

6. Вычислим функцию (1) для $\vec{K}_3 = 00$: $F_{K_3} = \text{Cir}_b \overline{a} \overline{b} \overline{c} k_1 k_2 c_1$. Функция F_{K_3} не выполняется, так как ключ $\vec{K}_3 = 00$ не является подлинным.

Поскольку ключи $\vec{K}_2 = 01$ и $\vec{K}_3 = 00$ оказались неверными, подлинным ключом является единственный ключ, оставшийся в классе эквивалентности ключей, – $\vec{K} = 11$.

Заключение

В работе рассмотрены некоторые особенности кодирования структурной реализации проекта интегральной схемы на основе использования средств тестового диагностирования.

Для оценки надежности кодирования предлагается алгоритм декодирования, основанный на решении SAT КНФ-функции разрешения, описывающей закодированную структуру. Проиллюстрированный на примере алгоритм нахождения правильного ключа из множества ключей класса эквивалентности направлен на решение проблемы декодирования схем практических размеров. Эффективность практического применения данного алгоритма зависит от эффективности этапа поиска различающего входного набора. При выполнении данного этапа целесообразно использовать неполные алгоритмы выполнимости, которые осуществляют поиск выполняющего набора неполным перебором пространства возможных решений. Основное достоинство таких алгоритмов – высокая скорость работы. Однако если алгоритм не находит решения за приемлемое время, применяется полный алгоритм решения выполнимости.

Список источников

1. Золоторевич Л.А. Аппаратная защита цифровых устройств // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника, информатика. 2020. № 50. С. 69–78.
2. Subramanyan P., Ray S., Malik S. Evaluating the security of logic encryption algorithms // IEEE International Symposium on Hardware Oriented Security and Trust (HOST). 2015. P. 137–143.
3. Rajendran J., Sam M., Sinanoglu O., Karri R. Security analysis of integrated circuit camouflaging // ACM SIGSAC Conference on Computer & Communications Security. Germany, Berlin. 04–08 November 2013. P. 709–720.
4. Roy J.A., Koushanfar F., Markov I.L. EPIC: Ending piracy of integrated circuits // IEEE Computer. 2010. V. 43, № 10. P. 30–38.
5. Yasin M., Rajendran J., Sinanoglu O., Karri R. On improving the security of logic locking // IEEE TCAD. 2016. V. 35, № 9. P. 1411–1424.
6. Rajendran J., Pino Y., Sinanoglu O., Karri R. Logic encryption: a fault analysis perspective // Proc. IEEE/ACM DATE. 2012. P. 953–958.
7. Rajendran J. et al. Fault analysis-based logic encryption // IEEE Trans. Comput. 2015. V. 64, № 2. P. 410–424.
8. Dupuis S., Ba P., Natale G.D., Flottes M., Rouzeyre B. A novel hardware logic encryption technique for thwarting illegal overproduction and hardware trojans // IEEE 20th International On-Line Testing Symposium (IOLTS). 2014. P. 49–54.
9. Plaza S.M., Markov I.L. Solving the third-shift problem in IC piracy with test-aware logic locking // IEEE Trans. Comput.-Aided Design Integr. Circuits Syst. 2015. V. 34, № 6. P. 961–971.

10. Lee Y.-W., Toubia N. Improving logic obfuscation via logic cone analysis // Proc. Latin-American Test Symposium. 2015. P. 1–6.
11. Karousos N., Pexaras K., Karybali I.G., Kalligeros E. Weighted logic locking: A new approach for ic piracy protection // IEEE 23rd International Symposium on On-Line Testing and Robust System Design (IOLTS). 2017. P. 221–226.
12. Zolotarevich, L.A. Issledovaniye metodov i sredstv verifikatsii proyektov i generatsii testov MES / L.A. Zolotarevich // Sbornik nauchnykh trudov vserossiyskoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii "Problemy razrabotki perspektivnykh mikroelektronnykh sistem – MES-2006". Red. A.L. Stempkovsky. M.: IPPM RAN. 2006. P. 163–168.

References

1. Frolov, I. (2018) *ER-diagramma – eto... Opisanie, vidy, pravila postroeniya* [ER diagram is... Description, types, construction rules]. [Online] Available from: <https://fb.ru/article/436948/er-diagramma---eto-description-vidy-pravila-postroeniya> (Accessed: 12th January 2022).
2. Efimenko, V. (2019) *Uchimsya proektirovaniyu Entity Relationship – diagramm* [Learning to design Entity Relationship diagrams]. [Online] Available from: <https://habr.com/ru/post/440556/> (Accessed: 12th January 2022).
3. Watt, A. & Eng, N. (2014) *Database Design*. 2nd ed. BCcampus.
4. Shvetsov, V. (n.d.) *Bazy dannykh. Pervaya stadiya kontseptual'nogo proektirovaniya bazy dannykh (kontseptual'noe modelirovanie)* [Databases. The first stage of the conceptual design of the database (conceptual modeling)]. [Online] Available from: <https://intuit.ru/studies/courses/508/364/lecture/8647> (Accessed: 12th January 2022).
5. Kara-Ushanov, V.Yu. (2017) *Model' "Sushchnost'–Svyaz"* [Model "Entity - Relationship"]. Yekaterinburg: Ural Federal University.
6. Inf-teh-lotos.ru. (n.d.) *Sozdanie ER-Diagramm. Informatsionnye tekhnologii* [Information technology. Creation of ER Diagrams]. [Online] Available from: <http://inf-teh-lotos.ru/sozdanie-er-diagramm> (Accessed: 12th January 2022).
7. Chen, P. (1976) The entity-relationship model – towards a unified view of data. *ACM Transactions on Database Systems*. 1(1). pp. 9–36. DOI: 10.1145/320434.320440
8. Khrustalev, E.Yu. & Baranova, N.M. (2013) Intelligent semantic models for improving the quality of educational and research processes. *Ekonomicheskii analiz: teoriya i praktika – Economic Analysis: Theory and Practice*. 35(338). pp. 2–10.
9. Khusainova, G.Ya. (2017) Metodika postroeniya ER-diagrammy dlya bazy dannykh [Technique for constructing an ER diagram for a database]. *NovayaInfo*. 76-1. pp. 322–327.
10. Nguyen Kim Anh. (2009) *Data Modeling Using Entity-Relationship Model*. [Online] Available from: <https://cnx.org/contents/aM2VUeRT@1/Data-Modeling-Using-Entity-Relationship-Model> (Accessed: 12th January 2022).
11. Tsichritzis, D. & Lochovsky, F. (1982) *Data Models*. Prentice Hall Inc.
12. Babanov, A.M. (2011) Semantic method of database designing and its prospects opening with application of the erm data model. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 16(3). pp. 58–66.

Информация об авторах:

Золоторевич Людмила Андреевна – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры электронных вычислительных машин Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники (Минск, Республика Беларусь). E-mail: lazolotarevich@gmail.com

Ильинков Валерий Андреевич – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры инфокоммуникационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники (Минск, Республика Беларусь). E-mail: v.ilyinkov@gmail.com

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Zolotarevich Ludmila A. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus). E-mail: lazolotarevich@gmail.com

Ilyinkov Valery A. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus). E-mail: v.ilyinkov@gmail.com

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 31.01.2022; принята к публикации 30.08.2022

Received 31.01.2022; accepted for publication 30.08.2022

ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ И АВТОМАТЫ

DISCRETE FUNCTION AND AUTOMATONS

Научная статья

УДК 53.083

doi: 10.17223/19988605/60/12

Об одном подходе к приближенному синтезу дискретных устройств с памятью

Дмитрий Васильевич Сперанский

Российский университет транспорта (МИИТ), Москва, Россия, speranskiy.dv@gmail.com

Аннотация. Рассматриваются теоретические аспекты проблемы приближенного синтеза дискретных устройств с памятью, представленных моделью конечного автомата. Предложен подход к решению проблемы, состоящий из двух этапов. На первом этапе осуществляется подготовка предварительной информации о функционировании заданного автомата-прототипа. На втором этапе она используется для синтеза автомата, аппроксимирующего работу прототипа, осуществляемого с использованием предлагаемого генетического алгоритма.

Ключевые слова: дискретные устройства с памятью (ДУ); приближенный синтез ДУ; генетические алгоритмы

Для цитирования: Сперанский Д.В. Об одном подходе к приближенному синтезу дискретных устройств с памятью // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 60. С. 111–119. doi: 10.17223/19988605/60/12

Original article

doi: 10.17223/19988605/60/12

On one approach to approximate synthesis of discrete devices with memory

Dmitriy V. Speranskiy

Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russian Federation, speranskiy.dv@gmail.com

Abstract. The problem of approximate synthesis of discrete memory devices (DM) is considered. In the last decade a similar problem for combinational circuits (CC) has been actively studied. Interest in them is caused by the possibility of obtaining compact and reliable devices at the expense of relaxing requirements for the accuracy of their functions. The resulting flexibility in operation can be used to reduce chip area, circuit delays, and increase fault tolerance. Changes in the devices result in mismatches with the outputs of the prototype circuit. In a number of areas they may be quite acceptable in practice. The problem of approximate synthesis of discrete memory devices in the proposed article was investigated in the formulation, which has not been previously considered, which explains the absence of relevant publications. In previously known publications on the approximate synthesis of automata-type systems, where the closeness of the obtained solution is understood as obtaining an approximate (in quality) solution to the optimal one of the problem for which the sought simpler device is created. In this case, the quality of the solution can be evaluated according to various criteria. The corresponding methods are not applicable to the problem we are considering, since they are based on the use of the specifics of such systems.

In the paper the object of research is any discrete memory device (DM) represented by a finite state machine model described by its transition-exit table (TET). This is the most general and widespread mathematical model of such DMs. For practical applications the following problem is of interest: for a given DM of interest it is required to synthesize an approximating device (ADM) that minimizes the number of mismatches (conflicts) with DM outputs

on an arbitrary input sequence and that should be less complex than the prototype DM. The proposed article is devoted to the approach of its solution.

This approach implies two stages. The first stage consists in obtaining vectors of characteristic features of outputs of a given automaton. Their obtaining is based on the use of the well-developed apparatus of the theory of sampling research. These vectors are formed by the TET of a given DM using the frequency principle. Their components correspond to DM outputs and are equal to 0 or 1, or to the symbol *. The values 0 or 1 indicate that they are with high probability almost stabilized at the corresponding DM output, while the symbol * indicates the absence of stabilization. The feature vectors are used at the second stage to form the initial generation for the operation of the GA proposed in the article.

The second stage consists in obtaining the TET of the sought device with memory, which is an approximate model of the given automaton (prototype). The search for such a table is reduced to a problem of combinatorial type and for its solution the use of so-called simple GA is proposed. It is known that they are very effective for solving problems of combinatorial type.

The article gives a generalized description of GA. The introduced target function in the form of a weighted sum of two summands is justified since the problem under consideration is multicriteria. The peculiarities of the implementation of the GA, in particular the execution of the recombination (crossing) operator, are given.

Keywords: discrete memory devices (DM); approximate DM synthesis; genetic algorithms

For citation: Speranskiy, D.V. (2022) On one approach to approximate synthesis of discrete devices with memory. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science. 60. pp. 111–119. doi: 10.17223/19988605/60/12

В последнее десятилетие проявляется большой интерес к проблеме приближенного синтеза комбинационных схем (КС) [1–4]. Решение этой проблемы позволяет получить компактные высокоскоростные и надежные устройства. Такой результат достигается за счет менее жестких требований к точности реализации схемой ее функций.

Ослабление требований к точности функционирования схемы, в результате которого возникают отклонения от выходов прототипа, в некоторых случаях оказывается вполне приемлемым на практике.

Появляющаяся в результате некоторая гибкость в функционировании устройства может быть использована с целью уменьшения площади кристалла, задержек в схеме, повышения отказоустойчивости и полноты обнаружения неисправностей (при тестировании). Это является весомым аргументом в пользу применения приближенного синтеза. Можно в качестве примера указать довольно широкий круг приложений, где некоторые пределы отклонений (рассогласований выходов) не являются критичными. К числу таких областей относятся беспроводные коммуникации, картография, графические объекты, аудио- и видеозаписи и т.д.

Названная проблема представляет интерес и для устройств с памятью, но публикации по их приближенному синтезу в точно такой же постановке, как и для КС, отсутствуют. В случае КС приближенный синтез состоит в построении более простой схемы по возможности с минимальным числом рассогласований по выходам с заданной КС. Однако имеется много публикаций, посвященных приближенному синтезу устройств автоматного типа, где такой синтез понимается как получение приближенного (по качеству) решения проблемы, для которого синтезируется более простое устройство. При этом под качеством понимается «близость» приближенного решения к оптимальному, которая может оцениваться по различным критериям (но не так, как в случае КС). В качестве примера назовем публикации [5, 6], посвященные приближенному синтезу систем автоматного типа, относящихся к классу специализированных систем оптимального управления. Соответствующие методы неприменимы к рассматриваемой нами задаче, поскольку они базируются на использовании специфики таких систем. Аналогичная ситуация имеет место и во многих иных публикациях, в которых синтезируемые устройства должны решать специальные задачи из разных областей.

Для решения задач приближенного синтеза КС разработаны различные подходы, основанные на использовании логической регрессии [3], реконфигурации КС и их логической оптимизации, вероятностных и эволюционных методах [2] и др. Возможно, что для решения аналогичной задачи для устройств с памятью полезным может оказаться использование некоторых идей из названных подходов.

Далее рассматривается задача приближенного синтеза любых дискретных устройств с памятью, функционирование которых описывается моделью конечного автомата [7]. Для ее решения в статье предлагается подход, предполагающий выполнение двух этапов. Первый этап состоит в получении векторов характеристических признаков выходов заданного автомата. Получение таких признаков будет основано на использовании аппарата теории выборочных исследований. Второй этап состоит в получении таблицы переходов-выходов (ТПВ) искомого устройства с памятью, являющегося аппроксимированной моделью заданного автомата (прототипа). Получение такой таблицы сводится к задаче комбинаторного типа, и для ее решения предлагается использование так называемого простого генетического алгоритма (ПГА), подробно описанного в ряде публикаций, например в [8]. Далее предполагается знакомство с его структурой, типовым набором стандартных операторов (репродукции, кроссинговера, мутации). Известно, что генетические алгоритмы (ГА) весьма эффективны для решения задач комбинаторного типа.

Методы приближенного синтеза должны быть применимы в практических приложениях к устройствам с достаточно большим числом входов. Поэтому в случае КС для описания их функционирования отказываются от таблиц истинности из-за большой их размерности, а вместо них используется «черный ящик» (например, как в [3]). Внутренняя структура черного ящика считается неизвестной. В процессе решения задачи на него можно подавать любые входные сигналы и наблюдать при этом выходные, т.е. получать любое необходимое множество пар слов «вход–выход» КС. При решении рассматриваемой ниже задачи будет использоваться ТПВ автомата-прототипа. Такая таблица выполняет роль аналога черного ящика.

1. Постановка задачи

Объектом исследования является дискретное устройство с памятью (ДУ), представленное моделью конечного автомата, описываемого его ТПВ.

В статье рассматриваются теоретические аспекты решения следующей задачи. Для заданного ДУ требуется синтезировать аппроксимирующее его работу устройство (АДУ), минимизирующее число рассогласований (конфликтов) с выходами ДУ на произвольной входной последовательности, которое должно быть менее сложным, чем ДУ-прототип.

Приведенная постановка задачи пока не является строгой, а носит содержательный характер. Для строгой ее постановки необходимо уточнить сформулированные требования. Первое из них интерпретируется далее как потенциальная возможность в ходе синтеза уменьшать число конфликтов. Условимся, что во втором требовании сложность АДУ будет полагаться равной числу состояний конечного автомата, являющегося его математической моделью, плюс сложность комбинационных схем (например, число входящих в них вентилях) для управления триггерами (памятью) и выходами АДУ.

Понятно, что идеальный случай – это задача синтеза минимального по сложности АДУ с минимальным числом конфликтов с выходами ДУ. Однако при естественных ограничениях на вычислительные ресурсы лучшая АДУ из полученных на предыдущих шагах поиска может не удовлетворять одновременно обоим требованиям.

Пользователю АДУ всегда желательно иметь несколько вариантов его схемной реализации, чтобы он имел возможность выбора с учетом и других критериев. Предлагаемый ниже подход такую возможность может обеспечить. Действительно, предлагаемое в процессе решения использование в нем ГА при повторных его запусках, а также применение нового множества генерируемых выборок будут приводить к новым схемам АДУ.

Отметим, что в рассматриваемой нами задаче приемлемость АДУ задается иначе, чем это принято для КС. Для КС она обычно задается в виде порогового значения вероятности появления конфликтов выходов с эталоном КС, но не оговаривается число конфликтов.

В случае КС многие названные выше подходы к решению задачи приближенного синтеза, как правило, начинают выполнять синтез с чистого листа. Они не пользуются никакой предварительно подготовленной информацией о характере функционирования ДУ-прототипа.

Соответствующие методы синтеза представляют собой итерационные процессы. При этом скорость их сходимости и общая трудоемкость существенно зависят от качества результатов первой итерации. По-видимому, ее качество можно улучшить, получив предварительно некоторую информацию об особенностях функционирования ДУ. При этом возникают естественные вопросы о «цене» получения такой информации и ее влиянии на скорость сходимости процесса. Заметим, что способы формирования упомянутой информации и возможные пути оценки затрат достаточно полно разработаны в теории выборочных исследований, которые подробно изложены, например, в монографии [9]. Поэтому здесь эти вопросы не рассматриваются.

2. Формирование вектора признаков выходов ДУ и начального поколения в ГА

Первый этап предлагаемого подхода к решению рассматриваемой задачи заключается в получении некоторых характеристических признаков выходов заданного ДУ. Опишем, как формируется такая информация. Известно [10], что задачи, решаемые с применением различных эволюционных алгоритмов, могут быть сведены к задачам классификации и кластеризации. Элементы множества V , для которого решаются эти задачи, таковы, что в них закодированы свойства реальных объектов и особенности предметной области. В конкретных задачах множество V есть вектор признаков этих объектов. Значения признаков могут быть получены на основе анализа совокупности отобранных для анализа выборок из генеральной совокупности (ГС) объектов. В нашем случае ГС представляет собой все множество элементов вида:

$$s_i \xrightarrow{a_j/b_i} s_k, \quad (1)$$

указывающих переход из состояния в состояние ДУ, а также вход / выход ДУ при его реализации. Каждая выборка трактуется как упорядоченная последовательность таких элементов, соответствующая траектории движения автомата (ДУ) при подаче заданной входной последовательности.

На основе информации, полученной из используемых выборок, далее выдвигаются гипотезы о структуре геномов элементов выборок и конструируется ГА. Один из возможных путей поиска значений компонентов в векторе признаков для каждого элемента выборки состоит в формальном анализе их состава.

Предполагается, что используемое множество репрезентативных выборок $V = \{V_1, V_2, \dots, V_d\}$ может генерироваться с помощью, например, генераторов случайных чисел, специальных алгоритмов или иными способами. Генерируемые случайные символы 0 и 1 используются затем в качестве входов заданного ДУ. Снимаемые при этом с его выходов данные используются в качестве компонентов векторов признаков, упомянутых выше. Полученная таким образом информация из выборок $V_1, V_2, \dots, V_d$ будет анализироваться, и результаты использоваться для формирования векторов признаков.

Условимся считать, что каждая выборка из множества $V = \{V_1, V_2, \dots, V_d\}$ состоит из последовательности элементов вида (1) фиксированной длины k . Значение этого параметра определяется методами теории выборочных исследований.

Излагаемое ниже будет поясняться на примере ДУ, задаваемого в виде ТПВ, для которого требуется синтезировать АДУ. Для простоты изложения рассмотрим автомат, заданный табл. 1, у которого множество состояний $S = \{s_1, s_1, \dots, s_9\}$, входной алфавит $X = \{a_1, a_2, a_3\}$, выходной – $Y = \{0, 1\}$ (автомат имеет один выходной канал). Если число выходных каналов ДУ больше одного, то значения 0 и 1 на каждом канале фиксируются и указываются для каждого канала в отдельности.

Вектор характеристических признаков выходов ДУ предназначен для формирования начального поколения АДУ, необходимого для работы ПГА. Его описание использует терминологию генетики, которую будем пояснять применительно к рассматриваемой задаче. Условимся считать, что ДУ, задаваемое ТПВ, имеет m входных и n выходных каналов. Используя оговоренную терминологию, в качестве особи будем считать состояние ДУ, которому соответствует битовая строка из m хромосом. Каждая хромосома содержит n (бит) генов и определяет значение на каждом выходном канале

в строке ТПВ ДУ, соответствующей каждому состоянию ДУ. Хромосома, содержащая в своих генах конкретные их значения, называется генотипом. Таким образом, ТПВ содержит в себе информацию о генотипах всех состояний ДУ. Так, в нашем примере каждому состоянию ДУ сопоставляется битовая строка из трех хромосом a_1, a_2, a_3 (по одной для каждого входного сигнала), каждая из которых содержит по одному биту (значению выхода ДУ при переходе в следующее состояние). То есть функционирование ДУ, заданное табл. 1, описывается девятью хромосомами, содержащими в общем 3×9 генов (бит).

Таблица 1

Автомат с множеством состояний S и входов X

$S \backslash X$	a_1	a_2	a_3
s_1	$s_2/1$	$s_2/0$	$s_5/0$
s_2	$s_1/0$	$s_4/0$	$s_4/1$
s_3	$s_2/1$	$s_2/0$	$s_5/1$
s_4	$s_3/0$	$s_2/1$	$s_2/1$
s_5	$s_6/1$	$s_4/0$	$s_3/0$
s_6	$s_8/0$	$s_9/1$	$s_6/1$
s_7	$s_6/1$	$s_2/0$	$s_8/1$
s_8	$s_4/1$	$s_4/1$	$s_7/0$
s_9	$s_7/0$	$s_9/1$	$s_7/1$

На втором этапе предлагаемого подхода поиск подходящих генотипов хромосом будет производиться с использованием ГА [8]. Начальное (нулевое) поколение для ГА (строится на основе ТПВ исходного автомата) представляет собой множество из N групп хромосом, где N – число состояний автомата. Каждая группа хромосом взаимно однозначно сопоставляется особи (состоянию ДУ). Гены этих хромосом есть значения ДУ на соответствующих выходных каналах автомата. За счет варьирования значений генов в хромосомах при выполнении ГА будет происходить переход от одного поколения особей к следующему.

Опишем процесс формирования начального поколения особей на основе ТПВ заданного автомата. С этой целью в ТПВ ДУ вычисляются частоты значений символов 0 (1) в каждом из генов z ($1 \leq z \leq n$) всех хромосом состояний ДУ. Так, в примере автомата, ТПВ которого представлена табл. 1, первый столбец ее выходов для всех состояний (соответствующих входному символу a_1) содержит пять значений 1 и четыре значения 0. Поэтому полагаем частоту выходного символа 0 (1) соответственно равной 4 (5) на этом фрагменте. Аналогично подсчитываются частоты появления символов 0 и 1 во всех остальных столбцах (для входных символов a_2 и a_3).

Обозначим через $g_{s,a_j}(0)$ ($g_{s,a_j}(1)$) число выходов 0 (1) в строке состояния s и столбца a_j табл. 1, где $s = 1, 2, \dots, 9$, $j = 1, 2, 3$. Здесь возможны следующие ситуации:

- 1) $g_{s,a_j}(0)$ значительно больше $g_{s,a_j}(1)$;
- 2) $g_{s,a_j}(1)$ значительно больше $g_{s,a_j}(0)$;
- 3) $g_{s,a_j}(0)$ и $g_{s,a_j}(1)$ отличаются не очень существенно.

В первом случае значение разряда (гена) y ($1 \leq y \leq n$) в хромосоме полагается равным 0, во втором случае – 1, в третьем случае замещается символом *. Результатом является структура геномов для вектора признаков, используемая в первой итерации ПГА в процессе синтеза АДУ.

Для формирования хромосом начального поколения состояний АДУ выполним следующие действия. Значения в позициях генов, являющихся 0 или 1 (стабилизированными в полученной структуре), полагаются равными этим значениям во всех хромосомах. Остальные гены в хромосоме каждой конкретной особи (состояния) замещаются случайным образом значениями 0 или 1.

В нашем примере структура начальных генотипов хромосом всех особей (состояний) АДУ будет иметь следующий вид:

a_1	a_2	a_3
*	*	1

Поэтому значения в гене a_3 в каждой хромосоме начального поколения полагаются равными 1, а гены a_1 и a_2 замещаются девятью случайными комбинациями символов 0 и 1.

Полученные описанным способом геномы далее используются в качестве исходной информации для ГА. Способ формирования состава хромосом начального поколения диктуется следующими содержательными соображениями. В каждом закрепленном гене хромосомы (он соответствует конкретному выходному каналу ДУ) содержится наиболее часто встречающееся при работе ДУ значение на этом выходе у всех его состояний. Интуитивно понятно, что поиск подходящих геномов хромосом, осуществляемый ГА, в этом случае с большей вероятностью потребует меньше итераций, чем при другом выборе начальных генотипов.

3. Обобщенное описание ГА

Изобретатель ГА J. Holland в [11] доказал shemata theorem, содержательный смысл которой состоит в следующем. С ростом числа итераций ГА вероятность приближения к экстремуму его целевой функции (фитнес-функции) возрастает. Это означает, что от поколения к поколению происходящая при выполнении ГА селекция постепенно стабилизирует значения группы разрядов в геноме. Кроме того, при продолжении выполнения итерационного процесса разрушения стабилизации не происходит. Эта теорема указывает на перспективность пути определения стабильных разрядов в начальном поколении ГА, что можно реализовать, например, так, как описано в предыдущем разделе статьи.

Перед началом работы предлагаемого ГА создается множество репрезентативных выборок V , и на его основе далее формируется информация, необходимая для его работы.

Начнем с описания целевой функции (ЦФ) ГА. Из постановки задачи понятно, что она представляет собой многокритериальную задачу оптимизации. Для построения ЦФ воспользуемся популярным направлением развития классических методов оптимизации, когда новая «общая» ЦФ строится из отдельных компонентов ЦФ в виде взвешенной суммы.

Вначале введем ЦФ для оценки отдельного варианта A схемы АДУ (для конкретной выборки $V_i \in V$):

$$G(A) = \sum_{i=1}^2 w_i f_i(A),$$

где веса $w_i \in [0,1]$ и $\sum_{i=1}^2 w_i = 1$. Выбор весов w_i для каждой «частной» ЦФ должен выполняться пользователем. В нашем случае $G(A)$ имеет два слагаемых, где $f_1(A)$ – число конфликтов выходов оцениваемого АДУ, $f_2(A)$ – его сложность. На каждой выборке множества $V = \{V_1, V_2, \dots, V_d\}$ выберем «лучшие» АДУ, образующие множество $\tilde{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_d\}$. Каждая из них имеет наименьшее значение ЦФ $G(A_i)$ на выборке, на которой она получена. Определим ЦФ для ГА на всем множестве выборок V (мощности d) следующим образом:

$$F(V) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d G(A_i).$$

Целью ГА является минимизация функции $F(V)$, являющейся средним арифметическим ЦФ «лучших» АДУ, полученных на всем множестве V .

ГА начинает работу с формирования начального поколения АДУ. Мощность K начальной популяции является важнейшим параметром ГА и обычно принадлежит диапазону [30; 200]. На разных этапах работы ГА оптимальное значение K может быть различным. Формирование начального поколения для решения рассматриваемой задачи осуществляется так, как это описано выше. Известно [8], что в целом эффективность ГА в значительной степени определяется структурой и качеством начальной популяции (поколения).

Следующий шаг в работе ГА состоит в выполнении репродукции, включающей создание родительских пар (пула) из особей текущего поколения. Из многих известных способов отбора на практи-

ке наиболее часто используется селективный отбор (с применением рулетки). Здесь родителями могут стать только особи, значения целевой функции которых не менее среднего значения по популяции при равной вероятности этих кандидатов. Такой путь, как правило, обеспечивает более быструю сходимость ГА и целесообразен для предлагаемого ГА.

Очередной шаг состоит в выполнении оператора рекомбинации (скрещивания, кроссинговера) двух особей. В нашей задаче, имея в виду ее автоматную специфику, целесообразно применение вводимой нами разновидности кроссинговера, отчасти аналогичного однородному [8]. Он радикально отличается от популярных типов одноточечного и многоточечного кроссинговеров. Здесь каждый ген потомка создается сложением по модулю двух хромосом родителей, и в каждой позиции, где стоит 1 после суммирования, производится обмен генами в хромосомах родителей. Это означает, что обмен генами происходит в позициях, где скрещиваемые автоматы имеют разные выходы.

На следующем шаге работы предлагаемого ГА полученные потомки подвергаются мутации (обычно с вероятностью из диапазона $[0,01; 0,05]$), состоящей в инвертировании мутируемого гена. Далее расширенная популяция сокращается до исходного размера, где остаются автоматы с лучшими значениями ЦФ, и проверяются критерии останова работы ГА. Он работает до тех пор, пока в процессе эволюции либо будет создано заданное количество поколений, либо на некоторой итерации будет достигнуто заданное качество, либо будет исчерпан выделенный объем вычислительных ресурсов.

Изменения генотипов моделей АДУ при работе ГА означают изменения значений выходов АДУ, порождающие новые автоматы. В них можно минимизировать число состояний, а при структурном синтезе АДУ по минимизированному автомату можно минимизировать и комбинационные схемы возбуждения триггеров, реализующих память автоматов и схемы управления выходами АДУ. Таким образом, в последовательно получаемых поколениях АДУ может уменьшаться число конфликтов по выходам с ДУ, а также и сложность схемной реализации.

ГА производит последовательную обработку по одному и тому же сценарию каждой выборки из множества V , и после обработки всех выборок будет получено значение ЦФ ГА на использованном множестве выборок V .

Перед началом работы ГА предусматривается случайная генерация множества репрезентативных выборок $V = \{V_1, V_2, \dots, V_d\}$. На каждой из них производится логическое моделирование работы заданного ДУ, стартующего из одного и того же начального состояния. Такое моделирование осуществляется один раз до выполнения ГА, и его выходы используются как эталон для сравнения с выходами синтезируемого АДУ. Это же состояние является начальным и для АДУ при его моделировании в процессе выполнения ГА. По этим данным описанным выше способом формируется начальное поколение АДУ, после чего начинается выполняться унифицированная часть ГА для обработки текущей выборки.

После получения очередного поколения АДУ необходимо вычислить для каждого АДУ его сложность и число конфликтов путем логического моделирования дискретного устройства, а также использования программы синтеза его схемы по автоматной модели. Заметим, что для этого имеются различные готовые пакеты программ.

После получения очередного поколения АДУ и значения ЦФ можно предусмотреть возможность выполнения очередной итерации ГА, рассчитывая на синтез более «качественного» АДУ, чем было получено на предыдущей итерации. Кроме того, с этой же целью можно реализовать синтез АДУ на новом множестве выборок.

Для создания ГА при решении различных задач ныне существуют специальные программные средства, существенно облегчающие решение этой проблемы. В качестве примера назовем программный DEAP-пакет для создания ГА на языке Python.

В качестве эксперимента на основе упрощенной программной версии ГА были проделаны расчеты для автомата, представленного табл. 1. К примеру, сложность АДУ оценивалась только числом его состояний. В результате варьирования длины и состава множества выборок, мощности начального поколения и других параметров был получен АДУ, у которого строки выходов ТПВ (хромосомы)

изменились в состоянии s_2 на $(0,1,1)$, в состоянии s_3 на $(1,0,0)$, в состоянии s_7 на $(1,0,0)$, в состоянии s_8 на $(1,0,0)$. В остальных строках ТПВ исходного ДУ выходы остались прежними. Указанные в скобках триады выходных сигналов и есть решения, полученные в результате упомянутых экспериментов. После минимизации этого автомата получен автомат с пятью состояниями (вместо девяти состояний в исходном; табл. 2). В этой таблице «новые» состояния представляют собой классы эквивалентных состояний исходного автомата: $I = \{1, 3, 8\}$, $II = \{2, 4\}$, $III = \{5, 7\}$, $IV = \{6\}$, $V = \{9\}$.

Таблица 2

Автомат с 5 состояниями

$\begin{matrix} X \\ S \end{matrix}$	a_1	a_2	a_3
I	II/1	II/1	III/0
II	I/0	II/1	II/1
III	IV/1	II/0	I/0
IV	I/0	V/1	IV/1
V	II/0	V/1	III/1

При проведении экспериментов на использованных выборках число конфликтов по выходам не превышало нескольких процентов от длины выборок. Понятно, что из этого примера делать какие-либо выводы о предлагаемом подходе некорректно. Для этого требуется накопление достаточного объема экспериментальных данных, но мотивацией полезности исследований предлагаемого подхода данный пример служить может.

Заключение

Известные ранее методы приближенного синтеза ДУ с памятью существенно базировались на специфике ДУ и именно тех проблем, для решения которых они разрабатывались. Эти методы оказываются неприменимыми к ДУ с памятью произвольной природы и назначения. Модель конечного автомата для них является наиболее общей, поскольку не предполагает при синтезе АДУ использования какой-либо специфики ДУ и решаемых ими проблем. В этом предлагаемый подход обладает в некотором смысле универсальностью.

Показано, что исследуемая задача может быть сведена к задаче комбинаторного типа. Имеющийся ныне опыт эволюционных вычислений доказал, что такие задачи эффективно решаются с использованием ГА. В статье в применении к рассматриваемой задаче приводится обобщенное описание одного из возможных вариантов ГА. Перед началом его работы предполагается получение предварительной информации о функционировании ДУ в виде векторов признаков его выходов. Далее они применяются для повышения быстродействия и эффективности ГА. Такие данные формируются на основе достаточно хорошо разработанной ныне теории выборочных исследований с использованием частотного принципа.

Таким образом, предложенный подход к решению задачи приближенного синтеза ДУ с памятью произвольной природы заполняет пока свободную нишу, поскольку публикации с описанием иных общих подходов отсутствуют. Получить объективную оценку предлагаемого подхода можно только при наличии достаточного объема экспериментальных данных, которых пока не имеется. Однако обоснованием целесообразности работы в этом направлении являются актуальность задачи, использование универсальной математической модели ДУ с памятью и приведенные обоснования принципов, заложенных при конструировании ГА.

Список источников

1. Shin D., Gupta S. Approximate logic synthesis for error tolerant // Design, Automation & Test in Europe Conference & Exhibition (DATE 2010). 2010. P. 957–960.
2. Sanches-Clemente A.J., Entrena L., Hrbacek R., Sekanina L. Error Mitigation Using Approximate Logic Circuits : a Comparison of Probabilistic and Evolution Approaches // IEEE Trans. on Reliability. 2016. V. 65, № 4. P. 1871–1883.

3. Stempkovsky A., Telpukhov D., Solovyev R. Synthesis of Approximate Combinational Circuits based on Logic Regression Approach // Proc. of IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS). Varna, 2020. P. 64–68.
4. Gavrilov S.V., Telpukhov D. Automated Evolutionary Design of Fault-Tolerant Logic Circuits // Problemy razrabotki perspektivnykh makro- i nanoelectronnykh system (MES). 2019. № 1. P. 2–6.
5. Бортакровский А.С., Коновалова А.А. Синтез оптимальных дискретных систем автоматного типа при мгновенных многократных переключениях // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 5. С. 38–70.
6. Немыченков Г.И. Приближенный синтез оптимальных систем автоматного типа // Труды МАИ. 2016. Вып. 89. С. 1–14.
7. Gill A. Introduction to the theory of finite-state machine. Mc Graw-Hill company, 1962. 207 p.
8. Скобцов Ю.А., Сперанский Д.В. Эволюционные вычисления : учеб. пособие. М.: Нац. Открытый Ун-т «ИНТУИТ», 2015. 326 с.
9. Cochran W. Sampling techniques. New York ; London : John Wiley and Sons, Inc., 1963. 413 p.
10. Королев Л.Н. Эволюционные вычисления, нейросети, генетические алгоритмы // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. Т. 15, № 3. С. 119–133.
11. Holland J. Adaptation in Natural and Artificial Systems. Cambridge : MIT Press, 1992. 211 p.

References

1. Shin, D. & Gupta, S. (2010) Approximate logic synthesis for error tolerant. *Design, Automation & Test in Europe Conference & Exhibition (DATE 2010)*. pp. 957–960. DOI: 10.1109/DATE.2010.5456913
2. Sanches-Clemente, A.J., Entrena, L., Hrbacek, R. & Sekanina, L. (2016) Error Mitigation Using Approximate Logic Circuits : A Comparison of Probabilistic and Evolution Approaches. *IEEE Trans. on Reliability*. 65(4). pp. 1871–1883. DOI: 10.1109/TR.2016.2604918
3. Stempkovsky, A., Telpukhov, D. & Solovyev, R. (2020) Synthesis of Approximate Combinational Circuits based on Logic Regression Approach. *Proceedings of IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS)*. Varna. pp. 64–68.
4. Gavrilov, S.V. & Telpukhov, D. (2019) Automated Evolutionary Design of Fault-Tolerant Logic Circuits. *Problemy razrabotki perspektivnykh makro- i nanoelectronnykh system (MES) – Problemy razrabotki perspektivnykh makro- i nanoelectronnykh system (MES)*. 1. pp. 2–6.
5. Bortakovsky, A.S. & Konovalova, A.A. (2014) Synthesis of optimal discrete automata-type systems for instantaneous multiple switching. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*. 5. pp. 38–70. DOI: 10.7868/S0002338814050047
6. Nemychenkov, G.I. (2016) Approximate synthesis of optimal automata-type systems. *Trudy MAI*. 89. pp. 1–16. (in Russia).
7. Gill, A. (1962) *Introduction to the theory of finite-state machine*. Mc GRAW-Hill company.
8. Skobtsov, Yu.A. & Speranskiy, D.V. (2015) *Evolutsionnye vychisleniya* [Evolutionary Computations]. Moscow: National Open University “INTUIT”.
9. Cochran, W. (1963) *Sampling Techniques*. New York; London: John Wiley and Sons.
10. Korolev, L.N. (2009) Evolutionary Computing, Neural Networks, Genetic Algorithms. *Fundamental'naya i prikladnaya matematika – Fundamental and Applied Mathematics*. 15(3). pp. 119–133.
11. Holland, J. (1992) *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. Cambridge: MIT Press.

Информация об авторе:

Сперанский Дмитрий Васильевич – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры систем управления транспортной инфраструктурой Российского университета транспорта (МИИТ) (Москва, Россия). E-mail: speranskiy.dv@gmail.com

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Information about the author:

Speranskiy Dmitriy V. (Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Transportation Infrastructure Management Systems of Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russian Federation). E-mail: speranskiy.dv@gmail.com

The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 24.01.2022; принята к публикации 30.08.2022

Received 24.01.2022; accepted for publication 30.08.2022

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

2022. № 60

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Редакторы-переводчики: Г.М. Кошкин; В.Н. Горенинцева
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 30.09.2022 г. Формат 60х84^{1/8}.
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 14,0.
Тираж 250 экз. Заказ № 5161. Цена свободная.

Дата выхода в свет 13.10.2022 г.

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru