

**В Е С Т Н И К
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2022

№ 79

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.С. Робаев (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, Е.Л. Лобода, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, М.А. Шеремет, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Konstantin S. Rogaev (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimatov, Aleksey M. Bubenchikov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Egor L. Loboda, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Mikhail A. Sheremet, Gennadiy R. Shragel, Ernst R. Shragel.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферруется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://vestnik.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Бородин В.И., [Лун-Фу А.В.], Бубенчиков М.А., Бубенчиков А.М., Мамонтов Д.В. Точное решение основного уравнения акустики для развивающейся по двум направлениям волны давления	5
Маммадова Л.И., Набиев И.М. Единственность восстановления оператора Штурма–Лиувилля со спектральным параметром, квадратично входящим в граничное условие	14
Старченко А.В., Шельмина Е.А., Кижнер Л.И., Одинцов С.Л. Численное моделирование качества воздуха над городом Томском при слабом ветре	25
Хамдамов И.М., Чай З.С., Шарипова Л.Д. Предельное распределение периметра выпуклой оболочки, порожденной пуассоновским точечным процессом в выпуклом многоугольнике	44

МЕХАНИКА

Блинкова Е.В., Бордовицына Т.В. Исследование динамики области орбитальных резонансов высоких порядков	58
Кауров П.В. Определение давления при течении жидкости в плоском клиновидном слое с учетом сил инерции	69
Колегов Г.А., Крайнов А.Ю. Моделирование вентиляции угольных шахт с учетом выработанных пространств	78
Кривошенина М.Н. Моделирование напряженного состояния в преградах из анизотропных материалов	89
Лихачев А.В., Табанохова М.В. Новый алгоритм обработки данных метода фотоупругости	100
Маевский К.К. Силикаты магния при высоких динамических нагрузках	111
Мамазова Д.А., Рыльцева К.Е., Шрагер Г.Р. Численное исследование влияния неизотермичности на характеристики течения степенной жидкости в трубе с резким расширением	120
Пестренин В.М., Пестренина И.В., Перельман О.М., Фадейкин А.С., Деркач Н.Д. Ограниченные цилиндрическим отбойником изгибные колебания составного тяжелого горизонтального вращающегося вала	135
Селиховкин М.А., Ахмадиева А.А., Жуков И.А., Марченко Е.С., Хрусталева А.П. Исследование влияния наночастиц алмаза на структуру и механическое поведение сплава Mg–Ca–Zn	152
Шляхов С.М., Кривулина Э.Ф. Задача устойчивости криволинейной арки малого подъема из пористого материала при случайном ее нагружении	162

CONTENTS

MATHEMATICS

Borodin V.I., Lun-Fu A.V., Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Mamontov D.V. Exact solution of the fundamental equation of acoustics for a pressure wave developing in two directions	5
Mammadova L.I., Nabiev I.M. Uniqueness of recovery of the Sturm–Liouville operator with a spectral parameter quadratically entering the boundary condition	14
Starchenko A.V., Shelmina E.A., Kizhner L.I., Odintsov S.L. Numerical simulation of air quality over a Tomsk city in light wind	25
Khamdamov I.M., Chay Z.S., Sharipova L.D. The limit distribution of the perimeter of a convex hull generated by a Poisson point process in a convex polygon	44

MECHANICS

Blinkova E.V., Bordovitsyna T.V. Investigation of dynamics of a region with high-order orbital resonances	58
Kaurov P.V. Pressure calculation for a fluid flowing in a plane wedge-shaped layer with account for inertial forces	69
Kolegov G.A., Krainov A.Yu. Simulation of the coal mine ventilation with account for gob areas	78
Krivosheina M.N. Simulation of the stress state in barriers made of anisotropic materials	89
Likhachev A.V., Tabanyukhova M.V. A new processing algorithm for photoelasticity method data	100
Maevskiy K.K. Magnesium silicates at high dynamic loading	111
Mamazova D.A., Ryltseva K.E., Shrager G.R. A numerical study of the effect of nonisothermality on the power-law fluid flow characteristics in a sudden pipe expansion	120
Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Perelman O.M., Fadeykin A.S., Derkach N.D. Bending vibrations of a heavy horizontal composite rotating shaft limited by a cylindrical baffle	135
Selikhovkin M.A., Akhmadieva A.A., Zhukov I.A., Marchenko E.S., Khrustalyov A.P. Investigation of the effect of diamond nanoparticles on the structure and mechanical behavior of Mg-Ca-Zn alloy	152
Shlyakhov S.M., Krivulina E.F. A stability problem for a low-height curvilinear porous arch under random loading	162

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 517.958

doi: 10.17223/19988621/79/1

MSC: 35G40, 35C15

Точное решение основного уравнения акустики для развивающейся по двум направлениям волны давления

Владислав Иванович Бородин¹, Александр Викторович Лун-Фу²,
Михаил Алексеевич Бубенчиков³, Алексей Михайлович Бубенчиков⁴,
Дмитрий Владимирович Мамонтов⁵

^{1, 2} ООО «Газпром трансгаз Томск», Томск, Россия

^{3, 4, 5} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ v.borodin@gtt.gazprom.ru

² a.Lun-Fu@gtt.gazprom.ru

³ michael121@mail.ru

⁴ bubenchikov_am@mail.ru

⁵ orevaore@mail.ru

Аннотация. Для случая начального возмущения звукового давления в виде импульса Гаусса на оси трубы удалось записать точное решение задачи об эволюции осесимметричной волны давления. Решение позволяет вне зависимости от интенсивности звука сразу за поверхностью трубы определить характер распределения пространственной волны давления внутри и вне газовой трубы.

Ключевые слова: волновое уравнение для давления, непериодическая звуковая волна, операционное исчисление, точное решение

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2020-1479/1).

Для цитирования: Бородин В.И., Лун-Фу А.В., Бубенчиков М.А., Бубенчиков А.М., Мамонтов Д.В. Точное решение основного уравнения акустики для развивающейся по двум направлениям волны давления // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 79. С. 5–13. doi: 10.17223/19988621/79/1

Exact solution of the fundamental equation of acoustics for a pressure wave developing in two directions

Vladislav I. Borodin¹, **Alexandr V. Lun-Fu²**, Mikhail A. Bubenchikov³, Alexey M. Bubenchikov⁴, Dmitriy V. Mamontov⁵

^{1,2} Gazprom transgaz Tomsk LLC, Tomsk, Russian Federation

^{3,4,5} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ v.borodin@gtt.gazprom.ru

² a.Lun-Fu@gtt.gazprom.ru

³ michael121@mail.ru

⁴ bubenchikov_am@mail.ru

⁵ orevaore@mail.ru

Abstract. The authors proceed from the hyperbolic equation for acoustic pressure. Using the integral Fourier transform along the axial coordinate, an equation in partial derivatives for the kernel of this transformation is found. This equation contains only one spatial coordinate and time. Applying the integral Laplace transform in time to the last equation, we obtain an ordinary differential equation with respect to the radial coordinate for the corresponding image. It turns out that the solution of the last equation is the well-known Macdonald function. For this function, it was possible to find the original image according to Laplace. All this made it possible to write an integral formula for the pressure in a sound wave. If the function of the initial pressure distribution along the pipe axis is taken in the form of a Gaussian impulse, then the integrals included in the representation of the desired solution are taken explicitly. As a result, we obtain an explicit compact formula for the acoustic pressure distribution in the axisymmetric case. It is convenient to use this formula to analyze the distribution of sound disturbances both along the pipe axis and in the radial direction. Therefore, the results are presented as isobars in the (z, r) plane corresponding to different times.

Keywords: wave equation for pressure, non-periodic sound wave, operational calculus, exact solution

Acknowledgments: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement No. 075-02-2020-1479/1).

For citation: Borodin, V.I., Lun-Fu, A.V., Bubenchikov, M.A., Bubenchikov, A.M., Mamontov, D.V. (2022) Exact solution of the fundamental equation of acoustics for a pressure wave developing in two directions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 79. pp. 5–13. doi: 10.17223/19988621/79/1

Введение

В настоящее время фиксируется большой интерес к разработке теории прохождения звуковых волн через многослойные акустические системы.

В [1] исследовано распространение звука по каналу с двойными стенками в случае неоднородности импеданса стенки. Проанализировано влияние внешнего радиуса воздуховода и контраста импедансов футеровки, среднего расхода и

центральной перфорированной трубы. Учет облицовки стен потребовал факторизации матрицы Винера–Хопфа 3×3 . В [2] исследован звук из полубесконечного канала, содержащего внутренний канал. Условие Робина на одной из внутренних стен имитирует наличие второго акустического слоя. Все остальные поверхности используют условия Неймана. Представление решения краевой задачи через интегралы Фурье приводит к матричному уравнению Винера–Хопфа. Последнее уравнение сводится к форме, для которой применяются методы слабой факторизации. В результате были получены данные о выходе звука из раздвоенного круглого волновода.

Акустические модели сложной конструкции выхлопной трубы, содержащей звукопоглощающие вставки, обычно приводят к матричным уравнениям Винера–Хопфа, для которых авторами разрабатываются оригинальные методы численной факторизации [3, 4]. Однако есть и подходы, не относящиеся к этому методу.

В работе [5] описан метод согласования режимов колебаний. Численные результаты демонстрируют влияние радиуса волновода, длины части оболочки и свойств звукопоглощающей оболочки на распространение звуковых волн в бесконечно круглой цилиндрической трубе с вставленным перфорированным экраном. Исследования распространения звуковых волн в волноводах с композитными стенками или перфорированными вставками приводят к связанным матричным уравнениям, для которых все еще необходимо найти подходящие методы факторизации. В случае распространения монохроматической волны или выделения собственных мод колебаний задачи решить проще. В этом случае можно добиться вполне приличного согласия с результатами по методу Винера–Хопфа.

В работе [6] мы предлагаем новый подход, который позволяет аналитически оценить звукоизоляцию в результате отражения звуковых волн определенной частоты от многослойной стены. Подход основан на представлении решения уравнения для амплитуды монохроматической волны через базисные функции и нахождении всех коэффициентов линейных представлений в отдельных зонах композитной стенки из условий «сшивки» решения на границах отдельных слоев. Выполнение данных условий приводит к линейной системе алгебраических соотношений для коэффициентов представлений решений. Решая эту систему, мы находим коэффициенты отражения и пропускания через многослойную стенку, соответствующие заданной частоте. Анализ волновой динамики внутри многослойной структуры завершается перебором по всем частотам рассматриваемого спектра. Такой подход расширяет возможности всех имеющихся теоретических работ, проводимых в этом направлении. Кроме того, он позволяет детально описать характер распространения звуковых волн в направлении нормали к выбранным акустическим слоям и является альтернативой уже существующим подходам [3–5].

Цель настоящей работы – построение точного аналитического распределения для аперiodической звуковой волны, которое в дальнейшем используется для тестирования алгоритмов разложения на монохроматические волны, используемые в анализе многослойных осесимметричных конструкций.

Осесимметричное распределение для неперiodической звуковой волны

Неперiodические решения волнового уравнения обычно появляются под влиянием начальных условий. Пусть, например, избыточное звуковое давление

$P(r, z, t)$ удовлетворяет волновому дифференциальному уравнению с осевой симметрией

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Будем искать решение дифференциального уравнения (1) в форме интегрального преобразования Фурье по переменной z :

$$P(r, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz\lambda} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi} f(\xi) d\xi \right] G(\lambda, t, r) d\lambda. \quad (2)$$

Если в формуле (2) множитель $G(\lambda, t, r)$ положить равным единице, то эта формула превращается в тождество Фурье, т.е. функция $f(z) = p(0, z, 0)$ является распределением давления вдоль оси газовой трубы. Далее, для того чтобы давление $P(r, z, t)$ удовлетворяло дифференциальному уравнению (1), множитель $G(\lambda, t, r)$ должен удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных следующего вида:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} - \lambda^2 G - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

Применяя к уравнению (3) операционное исчисление по времени t , обозначим через $\bar{G}(\lambda, p, r)$ изображение по Лапласу для функции $G(\lambda, t, r)$, т.е. положим

$$\bar{G}(\lambda, p, r) = p \int_0^{\infty} e^{-p't} G(\lambda, t, r) dt. \quad (4)$$

Из равенств (3) и (4) следует, что изображение $\bar{G}(\lambda, p, r)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 \bar{G}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{G}}{dr} - \left(\lambda^2 + \frac{p^2}{c^2} \right) \bar{G} = 0. \quad (5)$$

Одним из решений дифференциального уравнения (5), как известно из теории функций Бесселя [7], является функция Макдональда $K_0\left(r\sqrt{\lambda^2 + p^2/c^2}\right)$, поэтому изображение по Лапласу для множителя $G(\lambda, t, r)$ можно записать в виде:

$$\bar{G}(\lambda, p, r) = pK_0\left(\alpha\sqrt{p^2 + \beta^2}\right), \quad \text{где } \alpha = \frac{r}{c}, \quad \beta = \lambda c. \quad (6)$$

Дальнейший успех при применении операционного исчисления, как обычно, зависит от того, сможем ли мы в справочных таблицах найти оригинал для изображения вида (6).

В справочнике В.А. Диткина и А.П. Прудникова [8, с. 346] мы находим более общее операционное соответствие между оригиналом и изображением, чем это нужно для формулы (6):

$$\frac{pK_{\nu+1/2}\left(\alpha\sqrt{p^2 + \beta^2}\right)}{\left(\sqrt{p^2 + \beta^2}\right)^{\nu+1/2}} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 & t \leq \alpha, \\ (t-\alpha)\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \left(\frac{\sqrt{t^2 - \alpha^2}}{\alpha\beta}\right)^{\nu} J_{\nu}\left(\beta\sqrt{t^2 - \alpha^2}\right) & t > \alpha. \end{cases} \quad (7)$$

Оригинал здесь представляется в виде разрывной функции от времени t . Подставляя сюда $\nu = -1/2$, получим

$$pK_0\left(\alpha\sqrt{p^2+\beta^2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 & t \leq \alpha, \\ (t-\alpha)\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\sqrt{t^2-\alpha^2}}} J_{-1/2}\left(\beta\sqrt{t^2-\alpha^2}\right) & t > \alpha. \end{cases} \quad (8)$$

Функция Бесселя с полуцелым индексом, согласно справочнику [7], равна

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z. \quad (9)$$

Таким образом, после подстановки (9) в (8) и последующих сокращений получим простое выражение для множителя $G(\lambda, t, r)$, входящего в решение (2):

$$G(\lambda, t, r) = \begin{cases} 0 & ct \leq r, \\ \sqrt{\frac{ct-r}{ct+r}} \cos\left(\lambda\sqrt{c^2t^2-r^2}\right) & ct > r. \end{cases} \quad (10)$$

Само решение задачи об аperiодической звуковой волне будет представлять теперь формулой

$$P(r, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda z} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi} f(\xi) d\xi \right] \sqrt{\frac{ct-r}{ct+r}} \cos\left(\lambda\sqrt{c^2t^2-r^2}\right) d\lambda. \quad (11)$$

Если рассматривать важный частный случай начального распределения давления вдоль оси трубы в виде импульса Гаусса, то интегралы в формуле (11) возьмутся в явном виде, и в таком же явном виде получится и поле звукового давления $P(r, z, t)$. Возьмем, например, функцию начального распределения давления вдоль оси трубы в виде:

$$f(\xi) = P_0 e^{-\delta \xi^2}. \quad (12)$$

Здесь P_0 – амплитуда, а параметр δ определяет размер начального импульса по оси z . Тогда для интеграла в квадратных скобках формулы (11), имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi} f(\xi) d\xi = 2P_0 \int_0^{\infty} e^{-\delta \xi^2} \cos \lambda\xi d\xi = P_0 \sqrt{\frac{\pi}{\delta}} e^{-\frac{\lambda^2}{4\delta}}. \quad (13)$$

Аналогично можно вычислить и интеграл по переменной λ в формуле (11). В результате получим выражение для поля звукового давления:

$$P(r, z, t) = P_0 \sqrt{\frac{ct-r}{ct+r}} \frac{1}{2} \left[e^{-\delta (z+\sqrt{c^2t^2-r^2})^2} + e^{-\delta (z-\sqrt{c^2t^2-r^2})^2} \right]. \quad (14)$$

Полагая в этом решении $r = 0$, находим, что давление вдоль оси трубы меняется по закону

$$P(0, z, t) = P_0 \frac{1}{2} \left[e^{-\delta (z+ct)^2} + e^{-\delta (z-ct)^2} \right]. \quad (15)$$

Когда время $t = 0$, формула (15) дает начальное распределение давления (12), но благодаря наличию члена ct поле давления состоит из двух импульсов Гаусса, которые движутся в противоположные стороны. Аналогичным свойством обладает и полное решение (14), но здесь скорость движения импульсов Гаусса зависит от радиуса r .

Исходное уравнение (1) является однородным, поэтому оно будет справедливым для любой линейно преобразованной величины давления. Однако при этом начальный импульс давления P_0 должен быть представлен в соответствующем виде. Если же пространство заполнено воздухом при давлении 1 атм, то избыточное давление P_0 не должно превышать 5–6 атм. В противном случае в реальности возмущение давления будет распространяться не в виде звуковой, а в виде ударной волны. В результате мы получим другой режим движения среды, который описывается несколько иными уравнениями.

Нами проведены расчеты при $P_0 = 0,5$ атм и $\delta = 2$ м (рис. 1, 2).

На рис. 1 показаны линии постоянного давления (изобары), которые вычислены по формуле (14) в такой момент времени после начала движения акустической волны, когда расстояние ct равняется 10 м.

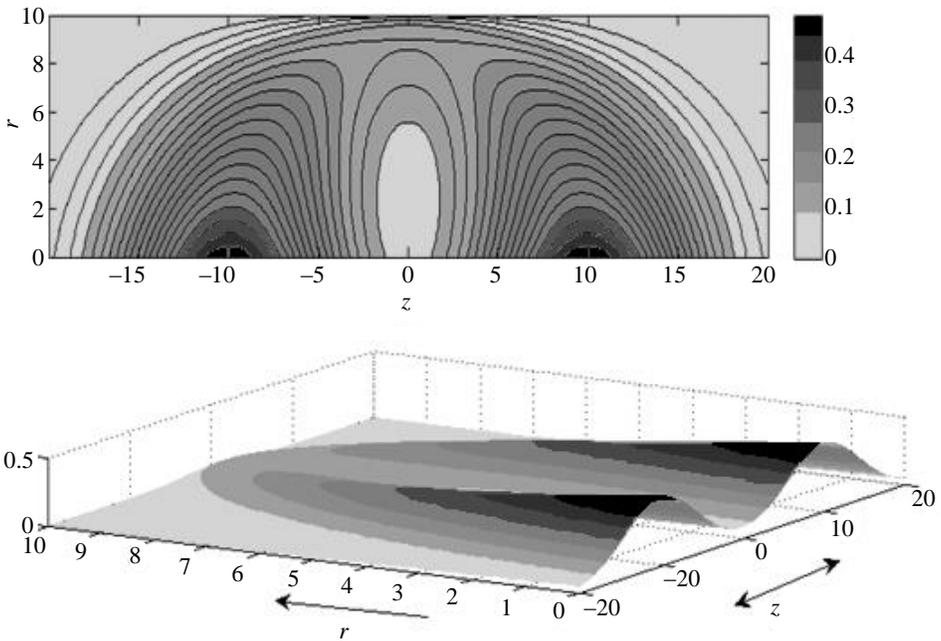


Рис. 1. Линии постоянного звукового давления вне газовой трубы, вычисленные по формуле (14). Момент времени таков, что $ct = 10$ м

Fig. 1. Lines of constant acoustic pressure calculated by formula (14) beyond the gas pipe. The time instant is such that $ct = 10$ m

В нижней части рис. 1 интенсивность давления показана графически как поверхность вида $P = P(r, z)$ в плоскости (r, z) при фиксированном значении расстояния ct .

На рис. 2 представлено распределение звукового давления вокруг газовой трубы при нескольких значениях расстояния ct , пройденного акустическим возмущением.

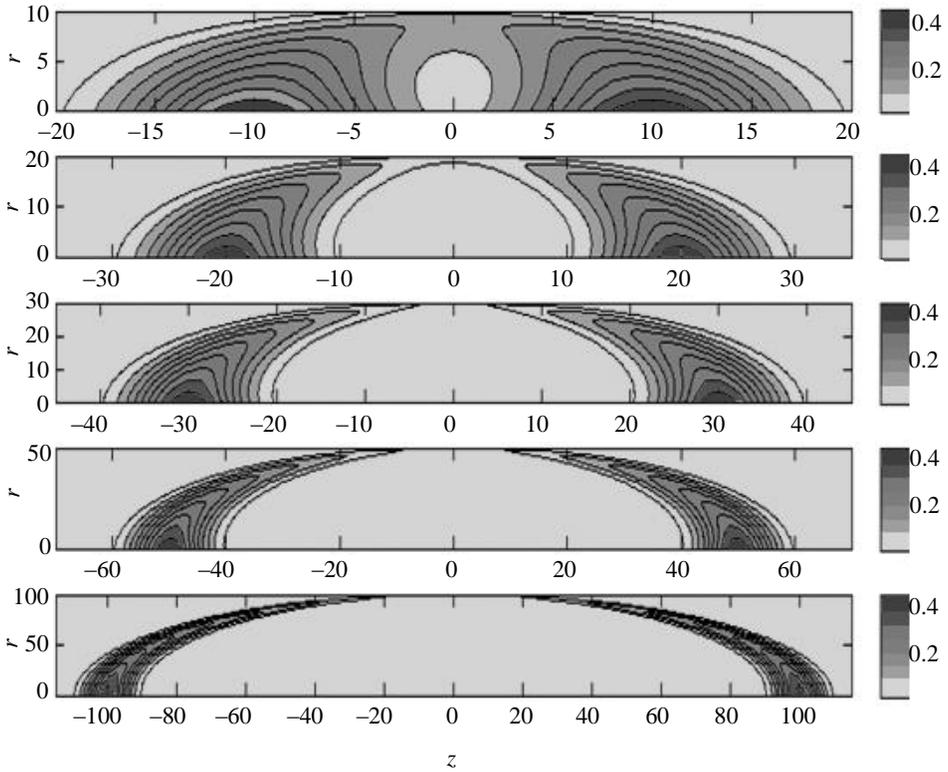


Рис. 2. Линии постоянного звукового давления в расширяющейся звуковой волне при различных значениях параметра ct : $ct = 10, 20, 30, 50, 100$ м

Fig. 2. Lines of constant acoustic pressure in an expanding acoustic wave at different values of the parameter ct : $ct = 10, 20, 30, 50,$ and 100 m

Как видим, звуковая волна от местного локального возмущения внутри газовой трубы уходит в бесконечность, расширяясь одновременно как в радиальном, так и в осевом направлении.

Заключение

Основным результатом работы является построенное точное аналитическое решение задачи о распространении осесимметричного акустического возмущения в безграничном пространстве. Согласно этому решению форма аperiодической звуковой волны в автомодельных переменных $ct - r$ и $ct + r$ остается одинаковой во все время распространения начального возмущения $f(z)$. Таким образом, построенное решение справедливо лишь для однородной акустической среды. Тем не менее полученное распределение оказывается чрезвычайно полезным при тестировании алгоритмов разложения аperiодического сигнала на монохроматические волны и соединении этих волн после прохождения многослойных акустических конструкций.

Список источников

1. Demir A., Çınar Yanaz Ö. Propagation of sound in an infinite two-part duct carrying mean flow inserted axially into a larger infinite duct with wall impedance discontinuity // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2009. V. 89. P. 454–465. doi: 10.1002/zamm.200800145
2. Peake N., Abrahams I.D. Sound radiation from a semi-infinite lined duct // *Wave Motion*. 2019. V. 92. Art. 102407. doi: 10.1016/j.wavemoti.2019.102407
3. Tiryakioğlu B. Mode Matching Analysis of Sound Waves in an Infinite Pipe with Perforated Screen // *Acoustical Physics*. 2021. V. 66. P. 580–586. doi: 10.1134/S1063771020060135
4. Gabard G., Astley R.J. Theoretical model for sound radiation from annular jet pipes: Far- and near-field solutions // *Journal of Fluid Mechanics*. 2006. V. 549. P. 315–341.
5. Veitch B., Peake N. Acoustic propagation and scattering in the exhaust flow from coaxial cylinders // *Journal of Fluid Mechanics*. 2008. V. 613. P. 275–307.
6. Lun-Fu A.V., Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Mamontov D.V. Passage of Monochromatic Sound Through a Gas Pipeline Wall // *Acoustics Australia*. 2021. V. 50. P. 119–126. doi: 10.1007/s40857-021-00255-0
7. Градштейн И.С., Рыжик Н.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. : Физматгиз, 1963. 1100 с.
8. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. М. : Высшая школа, 1965. 466 с.

References

1. Demir A., Çınar Yanaz Ö. (2009) Propagation of sound in an infinite two-part duct carrying mean flow inserted axially into a larger infinite duct with wall impedance discontinuity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 89. pp. 454–465. doi: 10.1002/zamm.200800145.
2. Peake N., Abrahams I.D. (2019) Sound radiation from a semi-infinite lined duct. *Wave Motion*. 92. 102407. doi: 10.1016/j.wavemoti.2019.102407.
3. Tiryakioğlu B. (2021) Mode matching analysis of sound waves in an infinite pipe with perforated screen. *Acoustical Physics*. 66. pp. 580–586. doi: 10.1134/S1063771020060135.
4. Gabard G., Astley R.J. (2006) Theoretical model for sound radiation from annular jet pipes: Far- and near-field solutions. *Journal of Fluid Mechanics*. 549. pp. 315–341.
5. Veitch B., Peake N. (2008) Acoustic propagation and scattering in the exhaust flow from coaxial cylinders. *Journal of Fluid Mechanics*. 613. pp. 275–307.
6. Lun-Fu A.V., Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Mamontov D.V. (2021) Passage of monochromatic sound through a gas pipeline wall. *Acoustics Australia*. 50. pp. 119–126. doi: 10.1007/s40857-021-00255-0.
7. Gradshteyn I.S., Ryzhik N.M. (2007) *Table of Integrals, Series, and Products*. Amsterdam: Elsevier.
8. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. (1965) *Spravochnik po operacionnomu ischisleniyu* [Handbook of Operational Calculus]. Moscow: Vysshaya Shkola.

Сведения об авторах:

Бородин Владислав Иванович – генеральный директор ООО «Газпром трансгаз Томск», Томск, Россия. E-mail: v.borodin@gtt.gazprom.ru

Лун-Фу Александр Викторович – главный инженер ООО «Газпром трансгаз Томск», Томск, Россия. E-mail: a.Lun-Fu@gtt.gazprom.ru

Бубенчиков Михаил Алексеевич – доктор физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: michael121@mail.ru

Бубенчиков Алексей Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: bubenchikov_am@mail.ru

Мамонтов Дмитрий Владимирович – младший научный сотрудник регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: orevaore@mail.ru

Information about the authors:

Borodin Vladislav I. (CEO Lead engineer, Gazprom transgaz Tomsk LLC, Tomsk, Russian Federation). E-mail: v.Borodin@gtt.gazprom.ru

Lun-Fu Alexandr V. (Lead engineer, Gazprom transgaz Tomsk LLC). E-mail: a.Lun-Fu@gtt.gazprom.ru

Bubenchikov Mikhail A. (Doctor of Physics and Mathematics, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: michael121@mail.ru

Bubenchikov Alexey M. (Doctor of Physics and Mathematics, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bubenchikov_am@mail.ru

Mamontov Dmitriy V. (National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: orevaore@mail.ru

Статья поступила в редакцию 07.05.2022; принята к публикации 03.10.2022

The article was submitted 07.05.2022; accepted for publication 03.10.2022

Научная статья

УДК 517.984.5

doi: 10.17223/19988621/79/2

MSC: 34A55, 34B24, 47E05

Единственность восстановления оператора Штурма–Лиувилля со спектральным параметром, квадратично входящим в граничное условие

Лейла Ибрагим кызы Маммадова¹, Ибрагим Маил оглы Набиев²

¹ *Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, Баку, Азербайджан*

² *Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан*

² *Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан*

² *Университет Хазар, Баку, Азербайджан*

¹ *leylaimae@yahoo.com*

² *nabievim@yahoo.com*

Аннотация. Работа посвящена исследованию обратной задачи для оператора Штурма–Лиувилля с неразделенными граничными условиями, одно из которых квадратично зависит от спектрального параметра. Доказана теорема единственности, и построен алгоритм решения обратной задачи. В качестве спектральных данных используются спектр рассмотренной краевой задачи, свободный член квадратичной функции спектрального параметра, входящей в граничное условие, и некоторая специальная последовательность знаков.

Ключевые слова: оператор Штурма–Лиувилля, неразделенные граничные условия, обратная задача, теорема единственности, алгоритм решения

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития науки при Президенте Азербайджанской Республики, грант № EIF/MQM/Elm-Tehsil-1-2016-1(26)-71/05/1.

Для цитирования: Маммадова Л.И., Набиев И.М. Единственность восстановления оператора Штурма–Лиувилля со спектральным параметром, квадратично входящим в граничное условие // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 79. С. 14–24. doi: 10.17223/19988621/79/2

Original article

Uniqueness of recovery of the Sturm–Liouville operator with a spectral parameter quadratically entering the boundary condition

Leyla I. Mammadova¹, Ibrahim M. Nabiev²

¹ *Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan*

² *Baku State University, Baku, Azerbaijan*

² *Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan*

² *Khazar University, Baku, Azerbaijan*

¹ *leylaimae@yahoo.com*

² *nabievim@yahoo.com*

Abstract. The work is devoted to the study of the inverse problem for the Sturm–Liouville operator with a real square-integrable potential. The boundary conditions are non-separated. One of these boundary conditions includes a quadratic function of the spectral parameter. A uniqueness theorem is proved and an algorithm for solving the inverse problem is constructed. As spectral data, we use the spectrum of the considered boundary value problem, the constant term of the quadratic spectrum of the spectral parameter included in the boundary condition, and some special sequence of signs. From these spectral data, the characteristic function of the boundary value problem is first reconstructed in the form of an infinite product and the parameters of the boundary conditions, and then the problem is reduced to the inverse problem of reconstructing the potential of the Sturm–Liouville operator from the spectra of two boundary value problems with separated boundary conditions.

The results of the article can be used for solving various versions of inverse problems of spectral analysis for differential operators, as well as for integrating some nonlinear equations of mathematical physics.

Keywords: Sturm–Liouville operator, nonseparated boundary conditions, inverse problem, uniqueness theorem, solution algorithm

Acknowledgments: This work was supported by the Science Development Foundation under the President of the Republic of Azerbaijan, Grant no. EIF/MQM/Elm-Tehsil-1-2016-1(26)-71/05/1.

For citation: Mammadova, L.I., Nabiev, I.M. (2022) Uniqueness of recovery of the Sturm–Liouville operator with a spectral parameter quadratically entering the boundary condition. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 79. pp. 14–24. doi: 10.17223/19988621/79/2

Введение

Во многих теоретических и прикладных задачах современной теории дифференциальных операторов весьма важную роль играют исследования, связанные с краевыми задачами со спектральным параметром в граничных условиях. Применение метода Фурье к смешанным задачам для уравнений в частных производ-

ных, в которых дифференцирование по времени входит в граничные условия, приводит к таким задачам. Подобные задачи довольно часто возникают при построении систем защиты приборов от ударного воздействия, исследованиях колебаний струны с грузом на конце, крутильных колебаний вала с маховиком на конце, колебаний антенн, нагруженных сосредоточенными емкостями и индуктивностями и др. (см.: [1, с. 45; 2, с. 161; 3, с. 215]).

Исследованию краевых задач со спектральным параметром в граничных условиях посвящено большое количество работ. Наиболее известным объектом при решении таких задач служит оператор Штурма–Лиувилля. Прямые и обратные задачи спектрального анализа для этого оператора с разделенными граничными условиями и со спектральным параметром в граничных условиях полностью решены во многих работах (см.: [4–12] и литературу в них). Задачи восстановления с неразделенными граничными условиями, зависящими от спектрального параметра, рассмотрены в [13–17], где для восстановления неизвестных коэффициентов дифференциального уравнения и граничных условий используются как минимум два спектра и некоторые дополнительные спектральные данные. В статье [18] подробно исследована задача восстановления оператора Штурма–Лиувилля с граничным условием, содержащим линейную функцию спектрального параметра. Отметим, что в работе [19] дан краткий обзор результатов по обратным спектральным задачам для дифференциальных операторов второго порядка на отрезке с неразделенными граничными условиями. Приведены основные результаты и методы, связанные с обратными задачами для операторов Штурма–Лиувилля и диффузии с неразделенными (в том числе периодическими и квазипериодическими) граничными условиями.

В настоящей работе исследуется обратная спектральная задача восстановления оператора Штурма–Лиувилля с неразделенными граничными условиями, одно из которых квадратично зависит от спектрального параметра. Доказана теорема единственности, и получен алгоритм решения обратной задачи. В качестве спектральных данных берутся спектр одной краевой задачи, некоторая последовательность знаков и некоторое число.

Рассмотрим краевую задачу, порожденную на отрезке $[0, \pi]$ уравнением Штурма–Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y \quad (1)$$

и граничными условиями вида:

$$\begin{aligned} y(0) - y(\pi) &= 0, \\ y'(0) - (m\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta)y(\pi) - y'(\pi) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $q(x)$ – вещественная функция, принадлежащая пространству $L_2[0, \pi]$, λ – спектральный параметр, α, β, m – вещественные числа. Эту задачу будем обозначать через P .

При $m = \alpha = \beta = 0$ граничные условия (2) оказываются периодическими. Обратные спектральные задачи в этом случае (а также в случаях антипериодических и квазипериодических граничных условий) разными методами полностью решены (см.: [20–22] и литературу в них). Характеристика спектра задачи P с граничными условиями без спектрального параметра ($m = \alpha = 0$) подробно исследована в работе [23] (также см.: [24]). Имеется немного работ, относящихся к краевой

задаче P в случае $m = 0$, т.е. когда граничные условия линейно зависят от спектрального параметра (см.: [13–18]). Отметим, что обратные задачи в случае $m \neq 0$ ранее не изучались.

В дальнейшем будем полагать, что $m\alpha \neq 0$.

Постановка обратной задачи. Теорема единственности

Спектр задачи P совпадает с множеством нулей целой функции экспоненциального типа

$$\Delta(\lambda) = c(\pi, \lambda) + (m\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta)s(\pi, \lambda) + s'(\pi, \lambda) - 2, \quad (3)$$

которая называется характеристической функцией краевой задачи P . Здесь $c(x, \lambda)$, $s(x, \lambda)$ – решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям $c(0, \lambda) = s'(0, \lambda) = 1$, $c'(0, \lambda) = s(0, \lambda) = 0$. Известно [20, с. 38], что для функций $c(\pi, \lambda)$, $s(\pi, \lambda)$ и $s'(\pi, \lambda)$ справедливы следующие представления:

$$c(\pi, \lambda) = \cos \lambda\pi + A \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda} + \frac{f_1(\lambda)}{\lambda}, \quad (4)$$

$$s(\pi, \lambda) = \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda} - A \frac{\cos \lambda\pi}{\lambda^2} + \frac{f_2(\lambda)}{\lambda^2}, \quad (5)$$

$$s'(\pi, \lambda) = \cos \lambda\pi + A \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda} + \frac{f_3(\lambda)}{\lambda}, \quad (6)$$

где $A = \frac{1}{2} \int_0^\pi q(x) dx$, $f_2(\lambda)$ – четная, а $f_1(\lambda)$, $f_3(\lambda)$ – нечетные целые функции

экспоненциального типа не выше π , суммируемые с квадратом на вещественной оси. Учитывая эти представления и используя теорему Пели–Винера [25, с. 47], из (3) получаем

$$\Delta(\lambda) = m\lambda \sin \lambda\pi + (2 - mA) \cos \lambda\pi + \alpha \sin \lambda\pi + f(\lambda) - 2, \quad (7)$$

где $f(\lambda) = \int_{-\pi}^\pi \tilde{f}(t) e^{i\lambda t} dt$, $\tilde{f}(t) \in L_2[-\pi, \pi]$.

С помощью представления (7) и теоремы Руше легко устанавливается, что краевая задача P имеет счетное множество собственных значений μ_k ($k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Для этих собственных значений при $|k| \rightarrow \infty$ имеет место следующая асимптотическая формула (см.: [26]):

$$\mu_k = k + \frac{2 \left[(-1)^k - 1 \right] + mA}{\pi m k} + \frac{\tau_k}{k}, \quad \{\tau_k\} \in l_2. \quad (8)$$

Обозначим

$$\sigma_n = \text{sign} \left[1 - |s'(\pi, \lambda_n)| \right], \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (9)$$

где λ_n – нули функции $s(\pi, \lambda)$, квадраты которых есть собственные значения краевой задачи, порожденной уравнением (1) и граничными условиями Дирихле

$$y(0) = y(\pi) = 0. \quad (10)$$

Обратная задача ставится следующим образом:

Обратная задача. Зная последовательности $\{\mu_k\}$, $\{\sigma_n\}$ и число β , восстановить краевую задачу P .

Справедлива следующая теорема единственности:

Теорема. Краевая задача P однозначно восстанавливается, если известны ее спектр $\{\mu_k\}$, число β и последовательность знаков $\{\sigma_n\}$.

Доказательство. Из асимптотической формулы (8) следует, что

$$\mu_{2k} = 2k + \frac{A}{2\pi k} + \frac{\tau_{2k}}{2k},$$

$$\mu_{2k+1} = 2k + 1 + \frac{mA - 4}{(2k + 1)\pi m} + \frac{\tau_{2k+1}}{2k + 1} = 2k + 1 + \frac{mA - 4}{2\pi mk} + \frac{\eta_k}{k}, \quad \{\eta_k\} \in l_2.$$

Отсюда параметр m можно определить по формуле

$$m = \frac{2}{\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k(\mu_{2k} - \mu_{2k+1} + 1)}. \quad (11)$$

Зная спектр $\{\mu_k\}$ и параметр m характеристическую функцию $\Delta(\lambda)$ как целую функцию экспоненциального типа можно восстановить в виде бесконечного произведения следующим образом (см.: [26]):

$$\Delta(\lambda) = m\pi(\mu_{-0} - \lambda)(\mu_{+0} - \lambda) \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\mu_k - \lambda}{k}. \quad (12)$$

Из представления (7) при $\lambda = 2k + \frac{1}{2}$ получаем

$$\Delta\left(2k + \frac{1}{2}\right) = \left(2k + \frac{1}{2}\right)m + \alpha + f\left(2k + \frac{1}{2}\right) - 2.$$

Поэтому параметр α определяется по формуле

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\Delta\left(2k + \frac{1}{2}\right) - \left(2k + \frac{1}{2}\right)m + 2 \right], \quad (13)$$

так как в силу леммы Римана–Лебега $\lim_{k \rightarrow \infty} f\left(2k + \frac{1}{2}\right) = 0$.

Поскольку функции $c(\pi, \lambda)$, $s(\pi, \lambda)$ и $s'(\pi, \lambda)$ являются четными, то, используя соотношение (3), функцию $s(\pi, \lambda)$ можно определить следующим образом:

$$s(\pi, \lambda) = \frac{\Delta(\lambda) - \Delta(-\lambda)}{2\alpha\lambda}. \quad (14)$$

Отсюда находим нули λ_n , $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, функции $s(\pi, \lambda)$. Из четности функции (14) следует, что $\lambda_{-n} = -\lambda_n$.

Рассмотрим функции

$$u_+(\lambda) = c(\pi, \lambda) + s'(\pi, \lambda), \quad (15)$$

$$u_-(\lambda) = c(\pi, \lambda) - s'(\pi, \lambda). \quad (16)$$

Ввиду (3) функция $u_+(\lambda)$ восстанавливается по формуле

$$u_+(\lambda) = \Delta(\lambda) - (m\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta)s(\pi, \lambda) + 2. \quad (17)$$

Покажем теперь, что кроме спектра $\{\mu_k\}$ и числа β (по которым, как было показано выше, однозначно восстанавливаются $u_+(\lambda)$, $s(\pi, \lambda)$, m , α) достаточно задать еще последовательность $\{\sigma_n\}$ для того, чтобы восстановить функцию $u_-(\lambda)$, а значит, и функцию

$$s'(\pi, \lambda) = \frac{1}{2}[u_+(\lambda) - u_-(\lambda)]. \quad (18)$$

Действительно, так как λ_n , $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, являются нулями функции $s(\pi, \lambda)$, то из тождества

$$c(\pi, \lambda)s'(\pi, \lambda) - c'(\pi, \lambda)s(\pi, \lambda) = 1$$

следует, что

$$c(\pi, \lambda_n)s'(\pi, \lambda_n) = 1. \quad (19)$$

Возведя в квадрат обе части каждого из соотношений (15) и (16) и вычитая полученные равенства, имеем

$$u_-^2(\lambda) - u_+^2(\lambda) = -4c(\pi, \lambda)s'(\pi, \lambda).$$

Полагая в этом равенстве $\lambda = \lambda_n$ и учитывая соотношение (19), получим

$$u_-^2(\lambda_n) - u_+^2(\lambda_n) = -4.$$

Поэтому

$$u_-(\lambda_n) = \text{sign} u_-(\lambda_n) \sqrt{u_+^2(\lambda_n) - 4}. \quad (20)$$

Принимая во внимание перемежаемость нулей функций $s(\pi, \lambda)$ и $s'(\pi, \lambda)$ и представление (6) функции $s'(\pi, \lambda)$, имеем

$$\text{sign} s'(\pi, \lambda_n) = (-1)^n.$$

Тогда согласно (9), (16) и (19)

$$\begin{aligned} \text{sign} u_-(\lambda_n) &= \text{sign} [c(\pi, \lambda_n) - s'(\pi, \lambda_n)] = \\ &= \text{sign} \left[\frac{1}{s'(\pi, \lambda_n)} - s'(\pi, \lambda_n) \right] = \text{sign} \frac{1 - [s'(\pi, \lambda_n)]^2}{s'(\pi, \lambda_n)} = \\ &= \text{sign} \frac{1 - |s'(\pi, \lambda_n)|}{(-1)^n} = (-1)^n \sigma_n. \end{aligned}$$

Подставляя это в (20), получаем

$$u_-(\lambda_n) = (-1)^n \sigma_n \sqrt{u_+^2(\lambda_n) - 4}. \quad (21)$$

Из представлений (4)–(6) видно, что функции $u_-(\lambda)$ и $s(\pi, \lambda)$ являются четными целыми функциями экспоненциального типа не выше π и

$$\lambda u_-(\lambda) = f_1(\lambda) - f_3(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty),$$

$$\lambda s(\pi, \lambda) = \sin \lambda \pi + o\left(\frac{1}{|\lambda|} e^{\pi |\operatorname{Im} \lambda|}\right), \lambda \rightarrow \infty.$$

Тогда согласно теореме 28 из книги [25] функция $u_-(\lambda)$ однозначно определяет последовательности $\{\lambda_n\}$, $\{\sigma_n\}$, $\{u_+(\lambda_n)\}$ по формуле

$$u_-(\lambda) = 2s(\pi, \lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda_n \sigma_n \sqrt{u_+(\lambda_n)^2 - 4}}{(\lambda^2 - \lambda_n^2) \frac{\partial s(\pi, \lambda_n)}{\partial \lambda}}. \quad (22)$$

Единственность построенной функции $u_-(\lambda)$ вытекает из того факта, что интерполяционная формула (22) задает взаимно однозначное соответствие между l_2 и пространством целых функций экспоненциального типа не выше π , принадлежащих $L_2(-\infty, \infty)$.

Значит, характеристическая функция $s'(\pi, \lambda)$ краевой задачи, порожденной уравнением (1) и граничными условиями

$$y(0) = y'(\pi) = 0, \quad (23)$$

восстанавливается по формуле (18), в которой функции $u_+(\lambda)$ и $u_-(\lambda)$ определяются соотношениями (17) и (22) соответственно.

Известно [20], что по нулям v_n , $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, ($v_{-n} = -v_n$) функции $s'(\pi, \lambda)$ и последовательности $\{\lambda_n\}$ однозначно определяется коэффициент $q(x)$ уравнения (1).

Таким образом, по заданным последовательностям $\{\mu_k\}$, $\{\sigma_n\}$ и числу β однозначно определяются как коэффициент $q(x)$ уравнения (1), так и параметры α , m граничных условий (2), т.е. полностью восстанавливается краевая задача P . Теорема доказана.

Алгоритм решения обратной задачи

Опираясь на доказательство теоремы единственности, приведем алгоритм решения обратной задачи.

Алгоритм. Даны последовательности $\{\mu_k\}$ (спектр задачи P), $\{\sigma_n\}$ (формула (9)) и число β .

1. Используя асимптотическую формулу (8), параметр m находим по формуле (11).

2. По последовательности $\{\mu_k\}$ и числу m строим функцию $\Delta(\lambda)$ в виде (12).

3. Определяем параметр α по формуле (13).

4. Восстанавливаем функцию $s(\pi, \lambda)$ – характеристическую функцию краевой задачи (1), (10) – с помощью (14) и находим нули λ_n этой функции.

5. Строим функцию (15) по (17).

6. Находим значения функции (16) в точках λ_n с помощью соотношения (21).
7. Восстанавливаем функцию (16) по интерполяционной формуле (22).
8. Характеристическую функцию $s'(\pi, \lambda)$ краевой задачи (1), (23) определяем по формуле (18).
9. По последовательностям $\{\lambda_n\}$ и $\{v_n\}$ нулей функций $s(\pi, \lambda)$ и $s'(\lambda, \pi)$ соответственно строим коэффициент $q(x)$ уравнения (1) по известной процедуре (см.: [18, 20]).

Список источников

1. Коллатц Л. Задачи на собственные значения : (с техническими приложениями). М. : Наука, 1968. 504 с.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М. : Изд-во Моск. гос. ун-та, 1999. 799 с.
3. Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. М. : Физматлит, 2009. 272 с.
4. Panakhov E.S., Koyunbakan H., Ic U. Reconstruction formula for the potential function of Sturm–Liouville problem with eigenparameter boundary condition // Inverse Probl. Sci. and Eng. 2010. V. 18 (1). P. 173–180. doi: 10.1080/17415970903234976
5. Эткин А.Е., Эткина Г.П. О единственности решения обратной задачи Штурма–Лиувилля со спектральным параметром, рационально входящим в граничное условие // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. 2011. Т. 4, № 3. С. 158–170. URL: <http://mi.mathnet.ru/iigum126>
6. Güldü Y., Amirov R.Kh., Topsakal N. On impulsive Sturm–Liouville operators with singularity and spectral parameter in boundary conditions // Украинский математический журнал. 2012. Т. 64, № 12. С. 1610–1629.
7. Möller M., Pivovarchik V. Spectral Theory of Operator Pencils, Hermite-Biehler Functions, and their Applications. Cham : Birkhauser, 2015. 412 p. doi: 10.1007/978-3-319-17070-1
8. Guliyev N.J. Schrödinger operators with distributional potentials and boundary conditions dependent on the eigenvalue parameter // J. Math. Phys. 2019. V. 60 (6). Art. 063501. P. 1–23. doi: 10.1063/1.5048692
9. Guliyev N.J. On two-spectra inverse problems // Proc. American Math. Soc. 2020. V. 148 (10). P. 4491–4502. doi: 10.1090/proc/15155
10. Guliyev N.J. Essentially isospectral transformations and their applications // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 2020. V. 199 (4). P. 1621–1648. doi: 10.1007/s10231-019-00934-w
11. Ala V., Mamedov Kh.R. On a discontinuous Sturm-Liouville problem with eigenvalue parameter in the boundary conditions // Dynamic Systems and Applications. 2020. V. 29. P. 182–191. URL: <http://www.dynamicpublishers.com/DSA/dsa2020pdf/11-DSA-20-A-11.pdf>
12. Yang Ch.-F., Bondarenko N.P., Xu X-Ch. An inverse problem for the Sturm Liouville pencil with arbitrary entire functions in the boundary condition // Inverse Problems and Imaging. 2020. V. 14 (1). P. 153–169. doi: 10.3934/ipi.2019068
13. Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М. Обратная задача для пучка операторов с нераспадающимися краевыми условиями // Доклады РАН. 2009. Т. 425, № 1. С. 31–33. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=11714202>
14. Yurko V.A. Inverse problems for nonselfadjoint quasi-periodic differential pencils // Anal. Math. Phys. 2012. V. 2. P. 215–230. doi: 10.1007/s13324-012-0030-9
15. Freiling G., Yurko V. Recovering nonselfadjoint differential pencils with nonseparated boundary conditions // Applicable Anal. 2015. V. 94 (8). P. 1649–1661. doi: 10.1080/00036811.2014.940918

16. *Ibadzadeh Ch.G., Mammadova L.I., Nabiev I.M.* Inverse problem of spectral analysis for diffusion operator with nonseparated boundary conditions and spectral parameter in boundary condition // *Azerbaijan Journal of Mathematics*. 2019. V. 9 (1). P. 171–189. URL: <http://azjm.org/volumes/0901/pdf/11.pdf>
17. *Mammadova L.I., Nabiev I.M., Rzayeva Ch.H.* Uniqueness of the solution of the inverse problem for differential operator with semiseparated boundary conditions // *Baku Mathematical Journal*. 2022. V. 1 (1). P. 47–52. doi: 10.32010/j.bmj.2022.05
18. *Nabiev I.M.* Reconstruction of the differential operator with spectral parameter in the boundary condition // *Mediterr. Journal of Mathematics*. 2022. V. 19 (3). Art. 124. P. 1–14. doi: 10.1007/s00009-022-02053-y
19. *Yurko V.A.* Inverse spectral problems for differential operators with non-separated boundary conditions // *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*. 2020. V. 28 (4). P. 567–616. doi: 10.1515/jiip-2019-0044
20. *Марченко В.А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев : Наукова думка, 1977. 332 с.
21. *Nabiev I.M.* Determination of the diffusion operator on an interval // *Colloquium Mathematicum*. 2014. V. 134 (2). P. 165–178. doi: 10.4064/cm134-2-2
22. *Юрко В.А.* Об обратной периодической задаче для центрально-симметричных потенциалов // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2016. Т. 16, вып. 1. С. 68–75. doi: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-68-75
23. *Гусейнов И.М., Набиев И.М.* Решение одного класса обратных краевых задач Штурма–Лиувилля // *Математический сборник*. 1995. Т. 186, № 5. С. 35–48. doi: 10.1070/SM1995v186n05ABEH000035
24. *Макин А.С.* Обратная задача для оператора Штурма–Лиувилля с регулярными краевыми условиями // *Доклады РАН*. 2006. Т. 408, № 3. С. 305–308. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=9226960>
25. *Левин Б.Я.* Целые функции. М. : Изд-во Моск. гос. ун-та, 1971. 124 с.
26. *Маммадова Л.И., Набиев И.М.* Спектральные свойства оператора Штурма–Лиувилля со спектральным параметром, квадратично входящим в граничное условие // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2020. Т. 30, вып. 2. С. 237–248. doi: 10.35634/vm200207

References

1. Collatz L. (1968) *Zadachi na sobstvennyye znacheniya s tekhnicheskimi prilozheniyami* [Tasks on eigenvalues (with technical applications)]. Moscow: Nauka.
2. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. (1999) *Uraveneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow: MGU.
3. Akhtyamov A.M. (2009) *Teoriya identifikatsii krayevykh usloviy i eye prilozheniya* [Theory of identification of boundary conditions and its applications]. Moscow: Fizmatlit.
4. Panakhov E.S., Koyunbakan H., Ic U. (2010) Reconstruction formula for the potential function of Sturm–Liouville problem with eigenparameter boundary condition. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 18(1). pp. 173–180. doi: 10.1080/17415970903234976.
5. Atkin A.E., Atkina G.P. (2011) A uniqueness theorem for Sturm–Liouville equations with a spectral parameter rationally contained in the boundary condition. *Izvestiya Irkutskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Matematika*. 4(3). pp. 158–170. Access mode: <http://mi.mathnet.ru/iigum126>.
6. Guldu Y., Amirov, R.K., Topsakal N. (2013) On impulsive Sturm–Liouville operators with singularity and spectral parameter in boundary conditions. *Ukrainian Mathematical Journal*. 64(12). pp. 1816–1838. doi: 10.1007/s11253-013-0754-1
7. Möller M., Pivovarchik V. (2015) *Spectral Theory of Operator Pencils, Hermite–Biehler Functions, and Their Applications*. Birkhauser: Cham. doi: 10.1007/978-3-319-17070-1.

8. Guliyev N.J. (2019) Schrödinger operators with distributional potentials and boundary conditions dependent on the eigenvalue parameter. *Journal of Mathematical Physics*. 60(6). 063501 doi: 10.1063/1.5048692.
9. Guliyev N.J. (2020) On two-spectra inverse problems. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 148(10). pp. 4491–4502. doi: 10.1090/proc/15155.
10. Guliyev N.J. (2020) Essentially isospectral transformations and their applications. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. 199(4). pp. 1621–1648. doi: 10.1007/s10231-019-00934-w.
11. Ala V., Mamedov Kh.R. (2020) On a discontinuous Sturm–Liouville problem with eigenvalue parameter in the boundary conditions. *Dynamic Systems and Applications*. 29. pp. 182–191. Access mode: <http://www.dynamicpublishers.com/DSA/dsa2020pdf/11-DSA-20-A-11.pdf>
12. Yang Ch.-F., Bondarenko N.P., Xu X.-Ch. (2020) An inverse problem for the Sturm–Liouville pencil with arbitrary entire functions in the boundary condition. *Inverse Problems and Imaging*. 14(1). pp. 153–169. doi: 10.3934/ipi.2019068.
13. Sadovnichii V.A., Sultanaev Y.T., Akhtyamov A.M. (2009) Inverse Problem for an Operator Pencil with Nonseparated Boundary Conditions. *Doklady Mathematics*. 279(2). pp. 169–171. Access mode: <https://elibrary.ru/item.asp?id=11714202>
14. Yurko V.A. (2012) Inverse problems for nonselfadjoint quasi-periodic differential pencils. *Analysis and Mathematical Physics*. 2. pp. 215–230. doi: 10.1007/s13324-012-0030-9.
15. Freiling G., Yurko V. (2015) Recovering nonselfadjoint differential pencils with nonseparated boundary conditions. *Applicable Analysis*. 94(8). pp. 1649–1661. doi: 10.1080/00036811.2014.940918.
16. Ibadzadeh Ch.G., Mammadova L.I., Nabiev I.M. (2019) Inverse problem of spectral analysis for diffusion operator with nonseparated boundary conditions and spectral parameter in boundary condition. *Azerbaijan Journal of Mathematics*. 9(1). pp. 171–189. Access mode: <http://azjm.org/volumes/0901/pdf/11.pdf>
17. Mammadova L.I., Nabiev I.M., Rzayeva Ch.H. (2022) Uniqueness of the solution of the inverse problem for differential operator with semiseparated boundary conditions. *Baku Mathematical Journal*. 1(1). pp. 47–52. doi: 10.32010/j.bmj.2022.05.
18. Nabiev I.M. (2022) Reconstruction of the differential operator with spectral parameter in the boundary condition. *Mediterranean Journal of Mathematics*. 19(3). art. 124. pp. 1–14. doi: 10.1007/s00009-022-02053-y.
19. Yurko V.A. (2020) Inverse spectral problems for differential operators with non-separated boundary conditions. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 28(4). pp. 567–616.
20. Marchenko V.A. (1977) *Operatornyy Shurma – Liuvillya i ikh prilozheniya* [Sturm–Liouville operators and their applications]. Kiev: Naukova Dumka.
21. Nabiev I.M. (2014) Determination of the diffusion operator on an interval. *Colloquium Mathematicum*. 134(2). pp. 165–178. doi: 10.4064/cm134-2-2.
22. Yurko V.A. (2016) Ob obratnoy periodicheskoy zadache dlya tsentral'no-simmetrichnykh potentsialov [On Inverse Periodic Problem for Central Symmetric Potentials]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika – Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 16(1). pp. 68–75. doi: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-68-75.
23. Guseinov I.M., Nabiev I.M. (1995) Solution of a class of inverse boundary-value Sturm–Liouville problems. *Sbornik: Mathematics*. 186(5). pp. 661–674. doi: 10.1070/SM1995v186n05ABEH000035.
24. Makin A.S. (2006) An inverse problem for the Sturm–Liouville operator with regular boundary conditions. *Doklady Mathematics*. 73. pp. 372–375. doi: 10.1134/S106456240603015X.
25. Levin B.Ya. (1971) *Tselyye funktsii* [Entire functions]. Moscow: MGU.
26. Mammadova L. I., Nabiev I.M. (2020) Spektral'nyye svoystva operatora Shurma–Liuvillya so spektral'nyim parametrom, kvadraticallyno vkhodyashchim v granichnoye usloviye [Spectral properties of the Sturm–Liouville operator with a spectral parameter quadratically included

in the boundary condition]. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki.* 30(2). pp. 237–248. doi: 10.35634/vm200207.

Сведения об авторах:

Маммадова Лейла Ибрагим кызы – доктор философии по математике, старший преподаватель кафедры общей и прикладной математики Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности, Баку, Азербайджан. E-mail: leylaimae@yahoo.com
Набиев Ибрагим Маил оглы – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Бакинского государственного университета; главный научный сотрудник отдела функционального анализа Института математики и механики НАН Азербайджана; профессор кафедры математики Университета Хазар, Баку, Азербайджан. E-mail: nabievim@yahoo.com

Information about the authors:

Mammadova Leyla I. (Senior Teacher, Doctor of Philosophy in Mathematics, Department of General and Applied Mathematics, Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan). E-mail: leylaimae@yahoo.com

Nabiev Ibrahim M. (Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Department of Applied Mathematics, Baku State University; Chief Researcher, Department of Functional Analysis, Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan; Professor, Department of Mathematics, Khazar University, Baku, Azerbaijan). E-mail: nabievim@yahoo.com

Статья поступила в редакцию 28.07.2020; принята к публикации 03.10.2022

The article was submitted 28.07.2020; accepted for publication 03.10.2022

Научная статья

УДК 519.6

doi: 10.17223/19988621/79/3

MSC: 65M08, 86A10

Численное моделирование качества воздуха над городом Томском при слабом ветре

Александр Васильевич Старченко¹, Елена Александровна Шельмина²,
Любовь Ильинична Кижнер³, Сергей Леонидович Одинцов⁴

^{1, 2, 3} Томский государственный университет, Томск, Россия

² Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники,
Томск, Россия

⁴ Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева Сибирского отделения РАН, Томск, Россия

¹ starch@math.tsu.ru

² eashelmina@mail.ru

³ kdm@mail.tsu.ru

⁴ odintsov@iao.ru

Аннотация. Представлены математическая модель и численный метод расчета метеорологических параметров и величин, характеризующих качество атмосферного воздуха в городе, полученные с использованием мезомасштабных моделей численного прогноза погоды и переноса примеси. Результаты численных расчетов сравнивались с данными наблюдений, выполненных с помощью приборов ЦКП «Атмосфера» ИОА СО РАН. Проведенные исследования показали, что наиболее неблагоприятные метеорологические условия, приводящие к накоплению примеси вблизи земной поверхности, наблюдаются в утренние и вечерние часы, – это слабый ветер переменного направления и устойчивая или нейтральная стратификация приземного слоя воздуха.

Ключевые слова: математическое моделирование, качество воздуха, полуневянные разностные схемы, параллельные вычисления, слабый ветер, устойчивая стратификация

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 19-71-20042).

Для цитирования: Старченко А.В., Шельмина Е.А., Кижнер Л.И., Одинцов С.Л. Численное моделирование качества воздуха над городом Томском при слабом ветре // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 79. С. 25–43. doi: 10.17223/19988621/79/3

Numerical simulation of air quality over a Tomsk city in light wind

Alexander V. Starchenko¹, Elena A. Shelmina²,
Lyubov I. Kizhner³, Sergej L. Odintsov⁴

^{1, 2, 3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

² Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, Russian Federation

⁴ Institute of Atmospheric Optics of V.E. Zuev, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation

¹ starch@math.tsu.ru

² eashelmina@mail.ru

³ kdm@mail.tsu.ru

⁴ odintsov@iao.ru

Abstract. The article presents a mathematical model and a numerical method for calculating meteorological parameters and parameters characterizing the quality of atmospheric air in the city. The model and the method are obtained using mesoscale models of numerical weather forecasting and impurity transport.

The equations of the applied mathematical model, along with the non-stationary term, include terms describing horizontal and vertical advection, turbulent diffusion, sedimentation, the influx of primary atmospheric air pollutants, and chemical reactions between the active components of the impurity:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C_i}{\partial t} + \frac{\partial UC_i}{\partial x} + \frac{\partial VC_i}{\partial y} + \frac{\partial WC_i}{\partial z} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xy} \frac{\partial C_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{xy} \frac{\partial C_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial C_i}{\partial z} \right) - \sigma_i C_i + S_i + R_i, \quad i = 1, \dots, n_s. \end{aligned} \quad (1)$$

$$-L/2 \leq x \leq L/2; \quad -L/2 \leq y \leq L/2; \quad h(x, y) \leq z \leq H; \quad 0 \leq t \leq T.$$

Here, C_i is concentration of the i th impurity component; U , V are the components of the horizontal wind velocity vector; W_i is the impurity velocity vertical component; K_{xy} , K_z are the coefficients of horizontal and vertical diffusion; S_i is the source term representing emissions of pollutant components into the atmosphere due to elevated and ground sources; R_i describes the formation and transformation of a substance due to chemical and photochemical reactions involving impurity components; σ_i is the rate rate of wet deposition of an impurity due to precipitation; n_s is the amount of chemical components of the impurity; x , y are the horizontal coordinates, the Ox axis is directed to the east and the Oy axis to the north; z is the vertical coordinate; t is time; T is the simulation period; L is the horizontal dimension of the area; H is the height of the studied area; and $h(x, y)$ is the height of surface topography above the sea level. The upper boundary of the area under study is set at a height of 1 km; the horizontal dimension $L = 50$ km.

Equations of the form (1) are solved numerically using semi-implicit difference schemes and the finite volume method by grids with a uniform step along the horizontal directions Ox and Oy and condensing towards the Earth's surface along the vertical direction Oz . When approximating the differential equation (1), the finite volume method with the second order of approximation in spatial variables is used. Efficient parallel programs have been developed with an efficiency of at least 70% when using up to 100 processes of the Cyberia computing cluster at Tomsk State University.

The results of numerical calculations were compared with the experimental data obtained using the instruments of the Atmosphere Research Equipment Sharing Center, Zuev Institute of Atmospheric Optics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences. Good agreement of results obtained. In addition, the studies performed have shown that the most unfavorable meteorological conditions leading to the accumulation of impurities near the Earth's surface in the morning and evening hours are a weak wind of variable direction and stable or neutral stratification of the surface air layer.

Keywords: mathematical modeling, air quality, semi-implicit difference schemes, parallel computing, weak wind, stable stratification

Acknowledgments: The study was supported by the Russian Science Foundation (project No.19-71-20042).

For citation: Starchenko, A.V., Shelmina, E.A., Kizhner, L.I., Odintsov, S.L. (2022) Numerical simulation of air quality over a Tomsk city in light wind. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 79. pp. 25–43. doi: 10.17223/19988621/79/3

Введение

Формирование загрязнения атмосферного воздуха в городах зависит от многих факторов. Наиболее важными из них являются выбросы промышленных предприятий, автотранспорта и метеорологические условия: направление и скорость ветра, температура воздуха, стратификация атмосферы, туманы, осадки и др. [1]. Кроме этого, существенное влияние на рассеивание примесей оказывают физико-географические условия местности, а также характеристики урбанизированной территории, зеленые массивы и водные объекты, которые образуют разные формы наземных препятствий воздушному потоку и приводят к возникновению особых метеорологических условий в городе [2].

За последние несколько десятилетий мезомасштабное (горизонтальный масштаб от 2 до 2 000 км) моделирование метеорологических процессов и загрязнения воздуха стало надежным способом проведения научных и практических исследований атмосферных процессов с целью оценки и регулирования вредных выбросов, оказывающих влияние на здоровье людей и окружающую среду [3]. Развитие вычислительных методов и параллельных компьютерных технологий в численном прогнозе погоды дало возможность эффективно использовать подходы математического моделирования для оперативных приложений и приложений, позволяющих на основе результатов моделирования принимать административные решения, регулирующие антропогенные выбросы в городах.

В настоящее время в мире существует большое количество информационно-вычислительных систем краткосрочного численного прогноза качества атмосферного воздуха в городах [3]. Эти системы в основном позволяют прогнозировать погодные условия, в первую очередь ветровые характеристики, температуру и влажность в нижней части пограничного слоя. Целью прогноза являются возможные неблагоприятные метеоусловия, которые могут привести к высокому уровню загрязнения воздуха. Передовые технологии прогнозирования загрязнения воздуха основываются на создании региональных моделей атмосферы, учитывающих состояние атмосферы, рассеяние и осаждение основных загрязняющих примесей, включая влияние автомобильного транспорта. Например, в Европе

используется система Enviro-HIRLAM [4] (Environment – High Resolution Limited Area Model), которая разработана как сопряженная модель численного прогноза погоды и атмосферного химического переноса для исследования и прогнозирования совместной метеорологической, химической и биологической погоды. Модель учитывает перенос и рассеивание загрязняющих веществ, химию, динамику и осаждение аэрозолей, метеопараметры. В настоящее время Enviro-HIRLAM используется для различных исследований, включая оперативное прогнозирование пыльцы для Дании и состава атмосферы для Китая. Во многих странах широкое распространение получила разработанная в США система моделирования WRF-Chem (Weather Research and Forecasting), которая активно применяется для решения многих практических задач исследования и прогноза погоды и качества атмосферного воздуха [5]. WRF-Chem моделирует выбросы, перенос, смешивание и химическое преобразование газовых примесей и аэрозолей одновременно с метеорологией.

В Гидрометцентре России созданы и функционируют в режиме регулярного счета комплексы мезомасштабных моделей WRF/CHIMERE, COSMO-Ru7-ART, COSMO-Ru7/CHIMERE [6, 7]. Модель численного прогноза погоды COSMO-Ru создана в рамках международного сотрудничества стран Европы и России. Расчеты выполняются для центральных областей европейской части России. Для Европейской территории РФ реализованы версии модели COSMO с шагом сетки от 1,1 до 13,2 км, а для Сибирского региона функционирует технология COSMO-Ru-Sib с разрешением от 2,2 до 13,2 км. Модель химического переноса CHIMERE позволяет количественно предсказывать эволюцию шлейфа загрязняющих веществ с учетом химических реакций в зависимости от времени. С помощью комплексов COSMO-Ru7-ART, COSMO-Ru7/CHIMERE оценивается содержание в атмосфере различных компонентов примеси (CO , NO_x , O_3 и ряда других) на 2–3 суток вперед (с дискретностью по времени 1 ч) и составляются прогностические карты приземной концентрации некоторых компонент примеси с указанием температуры воздуха, скорости и направления ветра. Тестирование рассмотренных численных моделей прогноза загрязнения воздуха показало, что их погрешность соответствует погрешности существующих физико-статистических методов и обусловлена ошибками в прогнозе температуры и ветра в пограничном слое атмосферы [6, 7]. Точность прогноза температурно-влажностных характеристик определяет возможность численного предсказания условий для загрязнения атмосферы и его интенсивности. При неблагоприятных для загрязнения условиях требуется особо точное предвычисление температурно-ветровых характеристик.

В этой связи являются актуальными создание новых гидродинамических моделей атмосферы и усовершенствование существующих для прогноза метеорологических условий атмосферы и уровня ее загрязнения различными компонентами с необходимой заблаговременностью и достаточной дискретностью.

В Томском университете для решения такой задачи разрабатывается вычислительный комплекс, включающий мезомасштабную негидростатическую модель TSUNM3 [8], которая позволяет прогнозировать с горизонтальным разрешением 1 км метеорологические поля, а также фотохимическую модель переноса [9], в которой на основе рассчитанных метеорологических полей с разрешением 500 м оценивается распространение примесей от антропогенных и биогенных источников, расположенных в окрестностях города.

Целью данного исследования является описание математической модели переноса примеси, численного метода и некоторых результатов применения разрабатываемого вычислительного комплекса для исследования особенностей изменения метеорологической обстановки и качества атмосферного воздуха в городе Томске в условиях слабого ветра.

Описание математической модели переноса примеси

Для математического описания динамики химического состава приземного слоя атмосферы вследствие эмиссии примеси и химических реакций между ее компонентами используется эйлерова континуальная модель турбулентной диффузии [10, 11]. Уравнения этой математической модели наряду с нестационарным членом включают слагаемые, описывающие горизонтальную и вертикальную адвекцию, турбулентную диффузию, осаждение, поступление первичных загрязнителей атмосферного воздуха и химические реакции между активными компонентами примеси:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \frac{\partial UC_i}{\partial x} + \frac{\partial VC_i}{\partial y} + \frac{\partial WC_i}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xy} \frac{\partial C_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{xy} \frac{\partial C_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial C_i}{\partial z} \right) - \sigma_i C_i + S_i + R_i, \quad i = 1, \dots, n_s. \quad (1)$$

$$-L/2 \leq x \leq L/2; \quad -L/2 \leq y \leq L/2; \quad h(x, y) \leq z \leq H; \quad 0 \leq t \leq T.$$

Здесь C_i – концентрация i -й компоненты примеси; U, V – составляющие вектора горизонтальной скорости ветра; W – вертикальная компонента скорости примеси; K_{xy}, K_z – коэффициенты горизонтальной и вертикальной диффузии; S_i – источниковый член, представляющий выбросы компонентов примеси в атмосферу за счет как приподнятых, так и наземных источников; R_i описывает образование и трансформацию вещества за счет химических и фотохимических реакций с участием компонентов примеси; σ_i – скорость осаждения примеси за счет осадков; n_s – количество химических компонентов примеси; x, y – горизонтальные координаты, ось Ox направлена на восток, Oy – на север; z – вертикальная координата; t – время, T – период моделирования. L – горизонтальные размеры области, H – высота области исследования, $h(x, y)$ – высота рельефа поверхности над уровнем моря. Верхняя граница области исследования задается на высоте 1 км, горизонтальные размеры $L = 50$ км.

Для системы уравнений (1) в качестве начальных условий используются фоновые значения концентраций компонентов примеси, которые для рассматриваемой области исследования могут быть получены из расчетов глобальной модели переноса примеси. На верхней границе применяются простые градиентные условия для концентраций. На боковых границах для входящего потока используются фоновые значения концентраций примеси, для выходящего – равенство нулю производной по направлению внешней нормали к границе. На нижней границе области исследования задаются условия сухого осаждения примеси за счет аэродинамического сопротивления r_a , сопротивления вязкого подслоя r_b и сопротивления, обусловленного распределением растительности r_c [12]:

$$-K_z \frac{\partial C_i}{\partial z} = Vd_i C_i, \quad Vd_i = \frac{1}{r_a + r_b + r_c};$$

$$r_a = \frac{\Psi(z/z_0, z/L_0)}{\kappa v_*}; \quad r_b = \frac{2(Sc_i/0,72)^{\frac{2}{3}}}{\kappa v_*}, \quad i = 1, \dots, n_s \quad (2)$$

Здесь Vd_i – скорость осаждения i -й компоненты примеси; z_0 – высота шероховатости; L_0 – масштаб турбулентности Обухова; Sc_i – число Шмидта для i -й компоненты примеси; $\kappa = 0.41$; v_* – динамическая скорость; Ψ – функция устойчивости [11].

Поступление первичных загрязнителей атмосферного воздуха (частицы, CO, NO_x, SO₂, летучие органические соединения) рассматривается от наземных источников – автомобильного транспорта, движущегося по автомобильным дорогам города, и от приподнятых источников – труб промышленных предприятий и объектов теплоэнергетики. При задании интенсивности поступления примеси учитываются такие параметры, как скорость, температура, расход и элементный состав эмиссии. Для приподнятых источников эти параметры имели постоянные значения в течение суток. Для наземных линейных источников нормированный расход эмиссии задавался по следующему закону [11]:

$$I_{\text{vehicle}}(t_h) = \begin{cases} 0.05 + 0.95 \sin(\pi(t_h - 6)/18), & t_h \in [6, 24], \\ 0.05, & t_h \notin [6, 24]. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь t_h – местное время в часах.

Суммарное количество примеси, поступившей в атмосферу города за сутки от наземных и приподнятых источников, может быть рассчитано на основе информации о годовых объемах антропогенных выбросов вредных веществ в атмосферу для рассматриваемой территории. Например, для г. Томска такая информация доступна в отчетах Департамента природных ресурсов и охраны окружающей среды Томской области [13].

Наряду с антропогенными источниками загрязнения в данной работе рассматриваются выбросы природного происхождения, называемые биогенными [14]. Одним из биогенных прекурсоров озона является изопрен – биогенный углеводород, который в больших количествах выбрасывается в атмосферу растительностью. Изопрен составляет практически половину всех источников поступления летучих органических соединений в атмосферу. Объем таких выбросов зависит от типа растительности, интенсивности света и значительно возрастает с ростом температуры листьев растений. После выброса в атмосферу изопрен окисляется, что способствует образованию вторичных органических аэрозолей, а при высоком уровне оксидов азота – образованию озона. Для моделирования поступления изопрена от лесных массивов используется математическая параметризация [14], предложенная в модели MEGAN [15].

Для описания химических и фотохимических реакций (R_i в (1)) в данной работе предлагается использовать кинетическую схему, полученную с использованием двух хорошо апробированных сокращенных химических механизмов реакций [16, 17]. Модификация в основном коснулась полуэмпирического механизма General Reaction Set (GRS) [16], в котором компактно описывается образование вторичных загрязнителей воздуха (O₃, NO, NO₂, RP, H₂O₂, PM_{2.5} и др.). Такая модификация механизма GRS [16] дает возможность детально описывать процесс образования приземного озона и достаточно компактно моделировать эмиссию и дополнительную генерацию частиц размером 2,5 и 10 мкм в атмосфере города. В табл. 1 приведены итоговые химические реакции модифицированного химического механизма GRS.

**Химические реакции модифицированного сокращенного
кинетического механизма GRS**

Реакции	Скорости реакций
$R_{smog} + hv \rightarrow RP + R_{smog} + \eta SNGOC$	$r_1 = k_1 C_{R_{smog}}$
$RP + NO \rightarrow NO_2$	$r_2 = k_2 C_{RP} C_{NO}$
$RP + RP \rightarrow RP + \alpha H_2O_2$	$r_3 = k_3 C_{RP} C_{RP}$
$RP + NO_2 \rightarrow SGN$	$r_4 = k_4 C_{RP} C_{NO_2}$
$RP + NO_2 \rightarrow SNGN$	$r_5 = k_7 C_{RP} C_{NO_2}$
$RP + SO_2 \rightarrow SNGS$	$r_6 = k_6 C_{RP} C_{SO_2}$
$H_2O_2 + SO_2 \rightarrow SNGS$	$r_7 = k_7 C_{H_2O_2} C_{SO_2}$
$O_3 + SO_2 \rightarrow SNGS$	$r_8 = k_8 C_{O_3} C_{SO_2}$
$NO_2 + hv \rightarrow O(^3P) + NO$	$r_9 = k_9 C_{NO_2}$
$O_3 + hv \rightarrow O(^1D) + O_2$	$r_{10} = k_{10} C_{O_3}$
$O(^3P) + O_2 \rightarrow O_3$	$r_{11} = k_{11} C_{O(^3P)} C_{O_2}$
$O(^1D) + N_2 \rightarrow O(^3P) + N_2$	$r_{12} = k_{12} C_{O(^1D)} C_{N_2}$
$O(^1D) + O_2 \rightarrow O(^3P) + O_2$	$r_{13} = k_{13} C_{O(^1D)} C_{O_2}$
$O_3 + NO \rightarrow NO_2 + O_2$	$r_{14} = k_{14} C_{O_3} C_{NO}$

Примечания. R_{smog} – реагирующая часть выбрасываемого транспортом и точечными источниками смога (летучих органических соединений), RP – органические радикалы, $O(^1D)$ – возбужденное состояние атомарного кислорода, $O(^3P)$ – основное состояние атомарного кислорода. $SNGOC$, $SNGN$, $SNGS$ – инертные негазообразные соединения углерода, азота и серы, представляющие собой составляющие образовавшихся в воздухе частиц PM2.5 и PM10 [16]. Константы скоростей реакций приведены в [16, 17].

Для расчета трехмерных полей скорости ветра и коэффициентов турбулентной диффузии для (1) привлекалась негидростатическая мезомасштабная метеорологическая модель TSUNM3 [8], которая прогнозирует составляющие скорости ветра и температурно-влажностные характеристики в пограничном слое атмосферы на 50 вертикальных уровнях (до 10 000 м) для территории 150×150 км и вложенной в нее области с основанием 50×50 км (с центром в г. Томске, 85° в.д. и $56,5^\circ$ с.ш.). Инициализация модели TSUNM3 и обеспечение ее боковыми граничными условиями проводятся на основе результатов численного прогноза погоды оперативной глобальной моделью SL-AV [18] Гидрометцентра РФ. При проведении расчетов в метеорологической модели используется горизонтальное разрешение 1 км. При задании свойств подстилающей поверхности рассматриваются такие категории землепользования: водная поверхность, поверхность с незначительной растительностью, сельскохозяйственные угодья, лиственный, смешанный и хвойный лес, городская застройка. Эти категории отличаются по следующим параметрам: высота шероховатости, альbedo, теплофизические свойства почвы, параметр испарения, степень черноты, температура на глубине 2 м (для почвы).

Численный метод решения

Для численного решения уравнений вида (1) в данной работе применяются полунявные разностные схемы и метод конечного объема с использованием сеток с равномерным шагом по горизонтальным направлениям Ox и Oy и сгущающихся к поверхности Земли по вертикальному направлению Oz . Нижний расчетный уровень находится на высоте 10 м над поверхностью. При аппроксимации дифференциального уравнения (1) используется метод конечного объема со вторым порядком аппроксимации по пространственным переменным и полунявные схемы вида:

$$\frac{(C_i)_h^{n+1} - (C_i)_h^n}{\Delta t_n} = L_h \left[(C_i)_h^n \right] + \Lambda_h \left[(C_i)_h^{n+1} \right] - \sigma (C_i)_h^{n+1} + (S_i)_h^n + (P_i)_h^n - (L_i)_h^n (C_i)_h^{n+1}, \quad i = 1, \dots, n_s, \quad (4)$$

где $(C_i)_h^n$ – сеточная функция i -й концентрации примеси; n – номер временного слоя; L_h – конечно-разностный аналог адвективно-диффузионного оператора уравнения (1) за исключением вертикальной диффузии; Λ_h – разностный аналог дифференциального оператора вертикальной диффузии $\frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial}{\partial z} \right)$. Неявная

аппроксимация для вертикального диффузионного переноса, который имеет важное значение в пограничном слое атмосферы, позволяет уйти от более жесткого ограничения на шаг интегрирования по времени. При аппроксимации конвективных членов уравнения (1) используются монотонизированные линейные противопотоковые схемы MLU Ван Лира [19]. Для диффузионных членов (1) применяются обычные аппроксимации второго порядка точности. Для скоростей химических реакций R_i используется следующее представление [20]:

$$(R_i)_h^{n+1} = (P_i)_h^n - (L_i)_h^n (C_i)_h^{n+1}, \quad (5)$$

где $P_i(C)$ и $L_i(C)$ – коэффициенты образования и деструкции ($P_i \geq 0$ и $L_i \geq 0$) в линейном разложении скорости химической реакции $(R_i)_h^{n+1}$ (5). Такой способ аппроксимации слагаемого уравнения (1), отвечающего за химические реакции, дает возможность не использовать схемы расщепления по физическим процессам и при соответствующем выборе шага Δt_n эффективно интегрировать уравнения вида (1) для химических компонентов с различными временами химических превращений $\tau_i = 1/L_i$.

В результате таких аппроксимаций получается разностная схема, в которой для вычисления значений сеточной функции $(C_i)_h^{n+1}$ на новом временном слое $(n + 1)$ можно использовать метод прогонки для решения систем линейных уравнений с трехдиагональными матрицами независимо вдоль вертикальных сеточных линий. Такой способ конструирования разностной схемы (4) наделяет ее свойством линейной зависимости количества арифметических операций от размера сетки задачи и создает предпосылки идеального параллелизма вычислений.

Для модели переноса примеси с химическими реакциями (1) были разработаны параллельный алгоритм и программа, в основе которых лежит численный

метод (4), технология параллельного программирования MPI с двумерной декомпозицией сеточной области по горизонтальным направлениям [21]. В расчетах рассматривается 12 уравнений вида (1), и они решаются на сетке $100 \times 100 \times 50$ с горизонтальным шагом 500 м и шагом по времени ~ 15 с на области размером 50×50 км. В табл. 2 представлены значения ускорения параллельной программы для модели переноса примеси (1).

Таблица 2

Значения ускорения параллельной программы переноса примеси для различного числа процессов

Процессы	4	16	25	100
Ускорение	3.9	13.6	19.4	70.8

Из таблицы видно, что эффективность параллельных вычислений для рассматриваемой модели не опускается ниже 70%.

Выбор метеорологических ситуаций со слабым ветром и результаты моделирования

Рассматриваемая математическая модель и численный метод были применены для условий г. Томска. В 2019 г. здесь в течение первых десяти месяцев с помощью ультразвуковых метеостанций «Метео-2» и температурных профиломеров МТР-5 Центра коллективного пользования «Атмосфера», расположенных на территории лабораторного корпуса (пункт ИАО) и Базового экспериментального комплекса (пункт ВЕС) Института оптики атмосферы СО РАН, проводились наблюдения за изменением приземных характеристик воздуха и вертикальных профилей температуры. Метеостанции измеряли скорость и направление ветра, температуру, влажность и давление. Температурный профиломер МТР-5 восстанавливал с разрешением 50 м вертикальные профили температуры.

Выбор эпизодов со «слабым ветром» («штилей») проводился путем выделения тех случаев, когда в сопоставимых 10-минутных интервалах времени скорость горизонтального ветра одновременно была менее 1 м/с в точках наблюдения ИАО и ВЕС. При этом продолжительность таких периодов должна быть не меньше 3 ч. За рассматриваемый в работе период с 1 января по 31 октября 2019 г. таких эпизодов было 17. Они случались в основном в теплое время года (март–май, июль–сентябрь). В результате в соответствии с принятыми условиями были выделены интервалы времени, относящиеся к разряду «длительных штилей». Наиболее яркие случаи наблюдались 18 марта (03:35–09:35), 23 июля (03:05–08:55), 8 августа (01:55–07:35), 12 августа (02:35–07:15), 20 августа (03:15–08:45), 5 сентября (05:35–08:25). В скобках указаны начало и конец «длительных штилей» (часы, минуты). Из различных периодов года наибольшая повторяемость «штилей» для обоих пунктов отмечается в июле и августе. Минимальная длительность «штилей» характерна для января–апреля.

На рис. 1 представлены графики изменения измеренного в пунктах наблюдения ИАО и ВЕС модуля горизонтальной скорости V_h и рассчитанные значения этой характеристики на высоте 10 м с помощью модели TSUNM3 [8] для указанных выше дат моделирования. Из рис. 1 и табл. 3 видно, что модельные расчеты достаточно хорошо соответствуют результатам наблюдений (в [22, 23] указыва-

ется, что средняя абсолютная погрешность $MAE < 1-2$ м/с является хорошим критерием согласования предсказанных значений приземной скорости наблюдением), хотя модель TSUNM3 в отдельные сроки незначительно завышает скорость ветра.

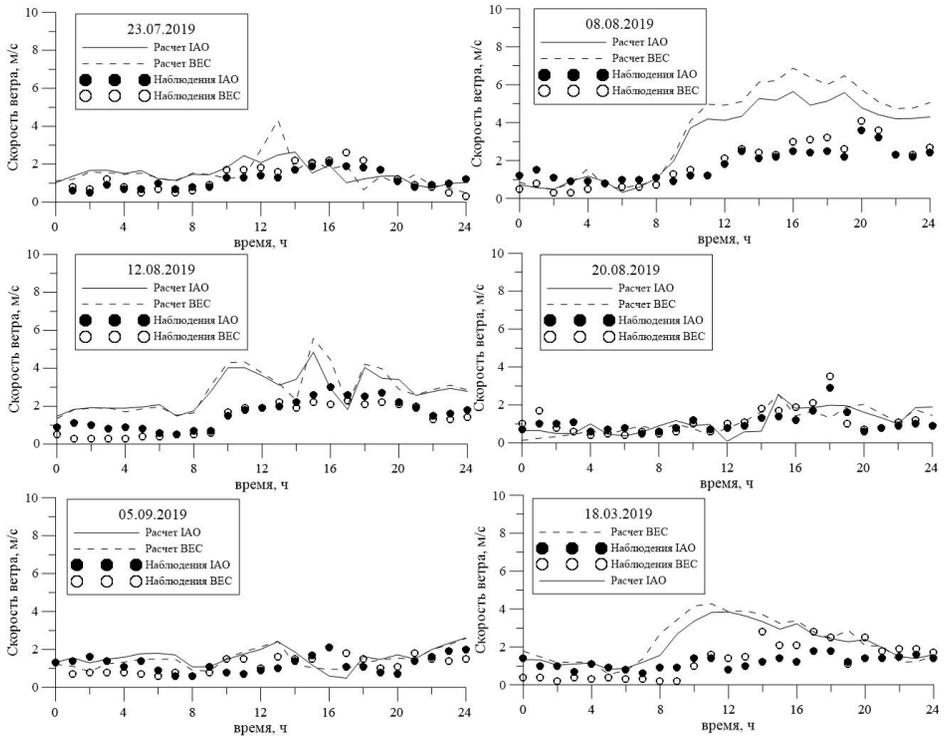


Рис. 1. Рассчитанные и измеренные значения приземной скорости ветра для указанных дат
Fig. 1. Calculated and measured values of surface wind speed for the selected dates

Таблица 3

Средняя абсолютная (MAE) и средняя квадратическая (RMSE) погрешности для предсказанных и измеренных значений приземной скорости ветра, изображенных на рис. 1

Date	18.03.2019	23.07.2019	08.08.2019	12.08.2019	20.08.2019	05.09.2019
MAE IAO	1.01	0.58	1.66	1.26	0.51	0.62
RMSE IAO	1.09	0.68	1.99	1.36	0.59	0.74
MAE BEC	1.22	0.64	1.96	1.59	0.51	0.55
RMSE BEC	1.57	0.84	2.40	1.75	0.72	0.64

Действительно, отмеченные в наблюдениях периоды времени в течение рассматриваемых суток, когда отмечался «слабый» ветер, практически во всех случаях подтверждаются расчетами. Так, 23 июля 2019 г. это наблюдалось в 03:05–08:55; 8 августа 2019 г. – 01:55–07:35; 20 августа 2019 г. – 03:15–08:45; 5 сентября 2019 г. – 05:35–08:25; 18 марта 2019 г. – 03:35–09:35. Время указано местное.

В темное время суток 12 августа 2019 г. с 02:35 до 07:15 модель также предсказала небольшой ветер, но завышение скорости в данном случае оказалось примерно 1 м/с. Поэтому прогнозируемые значения скорости на этот период времени имели значения 2 м/с. Можно отметить, что различие в значениях скорости ветра в двух пунктах измерений сопоставимо с погрешностью расчета.

Для демонстрации влияния «слабого» ветра на качество воздуха в городе были проведены расчеты по развиваемой модели переноса примеси (1)–(3) [9]. Расчеты проводились при одной и той же интенсивности приподнятых точечных (трубы) и линейных источников (автомобильные дороги), расположенных в рассматриваемой области. При использовании результатов расчетов, полученных по модели переноса примеси (1)–(3), для оценки качества воздуха в моделируемом населенном пункте рассматривался качественный показатель – Индекс загрязнения атмосферы (Air Pollution Index; API), который вычислялся на основе рассчитанных концентраций основных компонентов загрязняющих воздух примесей – CO, SO₂, NO₂, NO, O₃ – по следующей формуле:

$$API = \sum_{i=1}^5 \left(\frac{C_i}{C_{i\infty}} \right)^{a_i}, \quad (6)$$

где $C_i = C(t, x, y, 10)$ – рассчитанная концентрация i -го вещества, мг/м³, на высоте 10 м от поверхности; $C_{i\infty}$ – его среднесуточная предельно допустимая концентрация, мг/м³; a_i – безразмерная константа, позволяющая привести степень вредности i -го загрязняющего вещества к степени вредности диоксида серы (для диоксида серы $a_i = 1$) [24]. Значения констант $C_{i\infty}$, a_i приведены в табл. 4. Из анализа данных регулярно проводимых наблюдений за загрязнением атмосферы городов России было установлено 4–5 газообразных примесей, которые вносят основной вклад в создание высокого уровня загрязнения, поэтому в (6) учитывается 5 загрязняющих веществ.

Таблица 4

Значения констант для расчета индекса API

	CO	SO ₂	NO ₂	NO	O ₃
$C_{i\infty}$	5.0	0.5	0.2	0.4	0.16
a_i	0.9	1.0	1.3	1.0	1.7

Индекс API, рассчитанный по (6), показывает, во сколько раз суммарный уровень загрязнения атмосферы превышает допустимое значение по рассматриваемой совокупности примесей в целом. Уровень загрязнения атмосферы считается повышенным при API от 5 до 6, высоким – при API от 7 до 13, очень высоким – при API не менее 14 [24].

На рис. 2 представлены рассчитанные с помощью модели численного прогноза погоды TSUNM3 и модели переноса примеси (1) значения API. Для выбранных дат отмечалась однотипная ясная или малооблачная погода, в отдельные даты и сроки – дымка или туман.

Из рис. 1 и 2 видно, что модельные расчеты подтвердили взаимосвязь уровня загрязнения атмосферы со скоростью приземного ветра. Коэффициент корреляции R между значениями индекса API и скоростью ветра в условиях слабого ветра для рассмотренных дат составил $-0,58$ и является значимым.

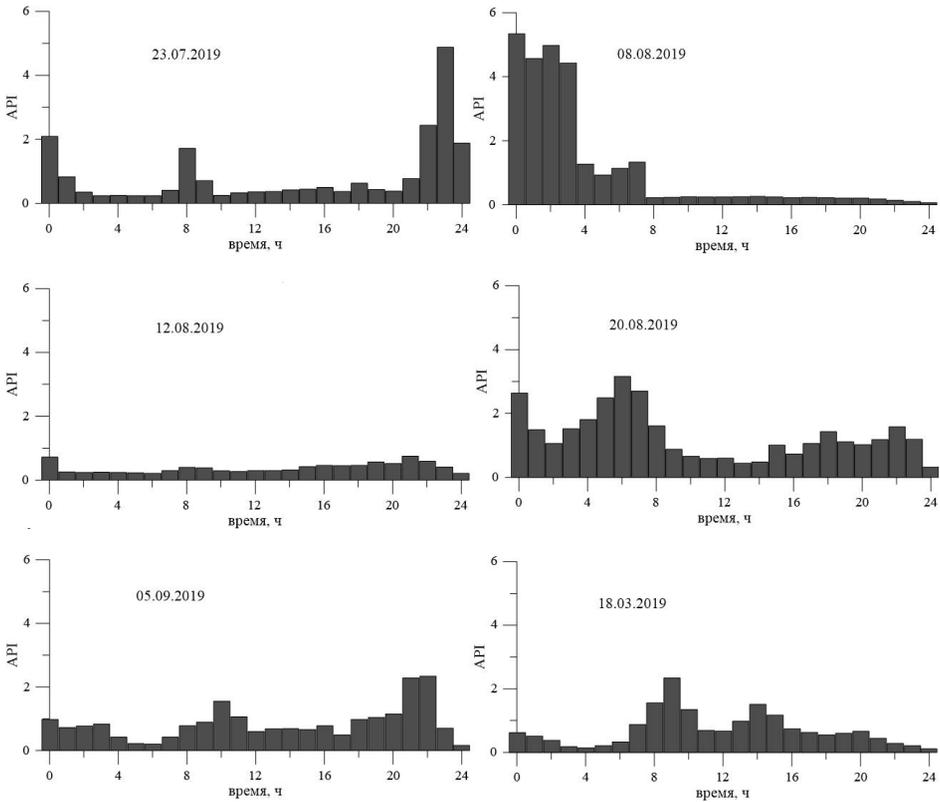


Рис. 2. Рассчитанные значения Индекса загрязнения воздуха для центра города для выбранных дат
Fig. 2. Calculated values of the Air Pollution Index for the city center for the selected dates

Кроме того, были численно получены увеличения значений API выше двух не только для указанных промежутков времени тихого ветра, но и для других моментов времени моделируемых суток, когда расчеты по мезомасштабной метеорологической модели показывали низкие значения скорости ветра на высоте 10 м. Особенно ярко ухудшение качества воздуха при снижении скорости ветра проявилось от 0 до 4 часов 8 августа, с 4 до 8 часов 20 августа, более слабо около 8 часов 23 июля, в 9 часов 5 сентября и 18 марта 2019 г. 12 августа 2019 г. расчеты не показали роста API в течение всего времени суток, поскольку в этот день модель TSUNM3 прогнозировала на рассматриваемых пунктах скорость приземного ветра от 2 до 4 м/с. Интересно, что расчеты модели переноса примеси предсказали повышенные значения API в периоды времени, не вошедшие в рекомендованную выборку промежутков времени со штилем: например, от 22 до 24 часов 23 июля, с 00 до 02 часов 8 августа и около 22 часов 5 сентября 2019 г. В первые две даты отмечались наиболее высокие значения индекса ($API \geq 5$). Результаты расчетов и анализ погоды в этих случаях указывают на наличие «слабого» ветра и в период, предшествующий повышению уровня загрязнения (например, штилевые условия отмечались 7 августа со второй половины суток), что способствова-

ло накоплению примесей. Заметим, что, помимо «слабого» ветра, на повышение уровня загрязнения приземного воздуха могла оказать дополнительное влияние устойчивая стратификация атмосферы, приводящая к накоплению примеси вблизи поверхности земли [1, 2]. Интересно еще и то, что из шести рассмотренных дат в трех повышение АРІ сопровождалось наличием дымки или тумана, а также наблюдалась высокая относительная влажность (23 июля дымка в 01–04 ч, туман в 03–05 ч; 20 августа дымка в 04 ч, туман 07–10 ч; 18 марта дымка в 07–10 ч). Как известно, образование туманов является дополнительным фактором, приводящим к повышению концентраций примесей в воздухе [2].

Для оценки влияния устойчивости атмосферы на повышение уровня загрязнения были выполнены расчеты вертикального профиля температуры в слое 0–600 м. В качестве примера на рис. 3, 4 представлены измеренные и рассчитанные температурные профили для двух случаев. Оценка вертикального профиля температуры показала, что для всех рассмотренных дат характерно наличие приземной инверсии или изотермии в сроки 00, 04, 24 ч, приземной или приподнятой – в 08 ч. В сроки 12, 16, 20 ч инверсия не наблюдалась. При наличии инверсии или изотермии повышения АРІ отмечались либо синхронно, либо повышение загрязнения отмечалось через некоторое время после появления инверсии (например, последние часы суток 23 июля и период 00–04 ч 8 августа). На рисунках сплошные линии – это расчеты по модели, кружки – измерения с помощью температурного профилера МТП-5.

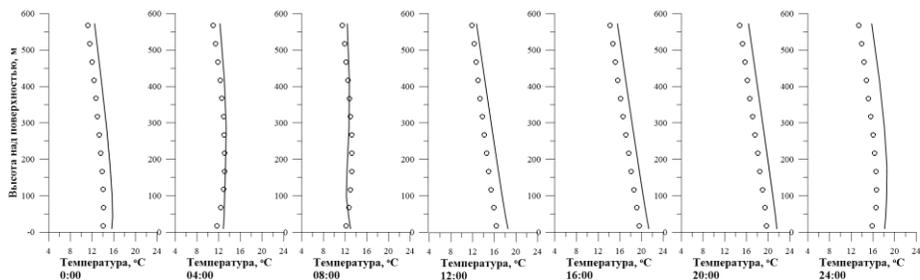


Рис. 3. Вертикальные температурные профили рассчитанные TSUNM3 и измеренные МТП-5 для 23.07.2019 для пункта ИАО. Время местное
Fig. 3. Vertical temperature profiles calculated by TSUNM3 and measured by MTP-5 for July 23, 2019 for the IAO state position. Local time

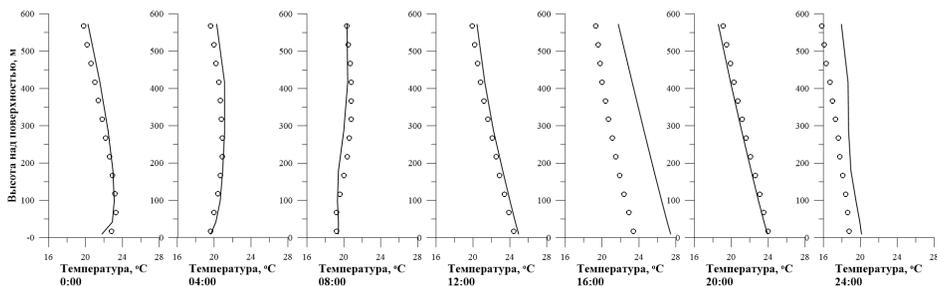


Рис. 4. Вертикальные температурные профили рассчитанные TSUNM3 и измеренные МТП-5 для 08.08.2019 для пункта ИАО. Время местное
Fig. 4. Vertical temperature profiles calculated by TSUNM3 and measured by MTP-5 for Aug. 8, 2019 for the IAO state position. Local time

Была составлена табл. 5, показывающая соотношение между наличием инверсии (изотермии) и повышенными значениями Индекса загрязнения воздуха. Каждый случай соответствует сроку, когда были рассчитаны индекс API и вертикальный профиль температуры.

Таблица 5

Соответствие между рассчитанными характером вертикального профиля температуры и API (число случаев, в скобках проценты)

Инверсия	Ход API		Всего
	Повышен (повышение)	Не повышен (не повышается)	
Есть инверсия, изотермия	13 (31)	7 (17)	20 (48)
Нет инверсии, изотермии	0 (0)	22 (52)	22 (52)
Всего	13 (31)	29 (69)	42 (100)

Таким образом, в 83% случаев существует прямая связь между наличием (отсутствием) инверсии и повышением (не повышением) индекса API. В 17% случаев при наличии инверсии уровень API не повышался. При отсутствии инверсии повышение API не отмечено.

По результатам расчетов для выбранных дат теплого периода 2019 г. было получено, что для всех рассмотренных случаев наибольший вклад в API вносят угарный газ (до 40%) и диоксид азота (до 35%). Несколько меньший вклад дают оксид азота (до 27%) и диоксид серы (до 19%). Роль озона как вторичного загрязнителя в нашем случае оказалась небольшой, его вклад в API не превысил 6%. В суточном ходе наибольшая концентрация CO отмечалась ночью и рано утром, в период с 22 до 7 часов (его содержание достигало 2,3 ПДК). Повышенное содержание NO₂, NO, SO₂ также зафиксировано в ночное время (22–03 ч), а концентрация первых двух загрязнителей может превышать ПДК в 1,7 и 1,5 раза соответственно. Содержание SO₂ не превышает половины предельно допустимой концентрации. В отличие от рассмотренных примесей содержание O₃ больше днем (10–17 ч), а концентрация его не превышает 0,2 ПДК.

Было выполнено сравнение результатов расчетов для двух участков города, расположенных на расстоянии 4 км и находящихся в разных условиях (центр города и пересечение транспортных магистралей). Получено, что по всем загрязнителям имеются общие временные тенденции их изменений: периоды увеличения или уменьшения концентрации, время наступления максимальных значений сохраняются. Однако концентрация веществ выше в условиях, где отмечается большое скопление транспорта. Больше и средние, и разовые значения всех примесей, за исключением NO: среднесуточные значения выше примерно в 1,5 раза (по O₃ – в 2 раза), а часовые значения в этих точках могут различаться в 3 раза. Концентрация NO мало изменяется по территории.

Заключение

С помощью ультразвуковых метеостанций «Метео-2», температурного профилера МТР-5 ЦКП «Атмосфера» и мезомасштабной модели численного прогноза погоды с горизонтальным разрешением 1 км TSUNM3 исследованы метеорологические ситуации над г. Томском, сопровождающиеся проявлением

«слабого» (< 1 м/с) ветра. Постоянное использование метеостанций с 1 января по 31 октября 2019 г. позволило выявить периоды, когда скорость приземного ветра на протяжении 5–6 ч во всех пунктах наблюдений была менее 1 м/с. Для этих дат 2019 г. было проведено численное моделирование погодных условий и качества атмосферного воздуха в городе. Сравнение расчетов с наблюдениями показало, что модель TSUNM3 в большинстве случаев подтверждает расчетами продолжительность и сам факт условий «слабого» ветра. Однако в ряде случаев модель TSUNM3 завышает значения скорости приземного ветра по сравнению с данными наблюдений. Применение развиваемой модели качества атмосферного воздуха подтвердило взаимосвязь «слабого» приземного ветра с ухудшением качества воздуха в городе. Особенно это проявляется в комбинации «слабого» ветра с условиями устойчивой стратификации приземного слоя воздуха. При оценке степени качества атмосферного воздуха с использованием индекса загрязнения атмосферы очень важен точный прогноз скорости ветра.

Выполненные расчеты по пяти загрязнителям атмосферы подтвердили важную роль метеорологических условий, в частности слабого ветра, а также роль антропогенного фактора в экологическом состоянии атмосферы Томска. Отметим, что для рассмотренных условий слабого ветра достоверно существует обратная корреляционная связь между уровнем загрязнения (значениями индекса API) и скоростью ветра ($R = -0,58$). А по данным наблюдений для реализаций, включающих разные скорости ветра, для разных загрязнителей (за исключением озона) коэффициент корреляции составил от $-0,59$ до $-0,89$.

Предложенные в работе методы расчета метеорологических параметров и концентрации основных загрязнителей показали, что полученные по моделям результаты адекватно отражают основные закономерности пространственно-временной изменчивости рассчитанных характеристик.

Анализ результатов метеорологических наблюдений, выполненных с помощью комплекса приборов ЦКП «Атмосфера», показал, что для района Томска наиболее неблагоприятные экологические условия, обусловленные низкой скоростью ветра и инверсиями температуры, складываются в летний период. Однако нужно иметь в виду, что в работе получены результаты по «длительным штормам», непрерывная продолжительность которых превышает 3 ч. Такие ситуации оказались преобладающими в теплое время года. «Слабый» ветер, имеющий меньшую непрерывную продолжительность, отмечался и в другое время года. Зимой, при преобладании над территорией Западной Сибири Азиатского антициклона, также могут отмечаться «слабые» ветры в сочетании с инверсионным распределением температуры, что тоже способствует повышенному загрязнению атмосферы. Условия в переходные сезоны способствуют лучшему очищению атмосферы.

Список источников

1. Берлянд М.Е. Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы. Л. : Гидрометеоздат, 1991. 267 с.
2. Безуглая Э.Ю., Расторгуева Г.П., Смирнова И.В. Чем дышит промышленный город. Л. : Гидрометеоздат, 1991. 251 с.
3. Sokhi R.S., Baklanov A.A., Shlunzen K.H. Mesoscale modelling for meteorological and air pollution application. Anthem Press, 2018. 376 p.

4. Baklanov A., Korsholm U., Nuterman R., Mahura A., Nielsen K.P., Sass B.H., Rasmussen A., Zakey A., Kaas E., Kurganskiy A., Sørensen B., González-Aparicio I. Enviro-HIRLAM online integrated meteorology–chemistry modelling system: strategy, methodology, developments and applications (v7.2) // *Geosci. Model Dev.* 2017. V. 10. P. 2971–2999. doi: 10.5194/gmd-10-2971-2017
5. Srivastava I., Yarragunta S., Kumar R., Mitra D. Distribution of surface carbon monoxide over the Indian subcontinent: Investigation of source contributions using WRF-Chem // *Atmospheric Environment*, 2020. V. 243. Art. 117838. doi: 10.1016/j.atmosenv.2020.117838
6. Нахаев М.И., Березин Е.В., Шалыгина И.Ю., Кузнецова И.Н. и др. Экспериментальные расчеты концентрации PM10 и CO комплексом моделей CHIMERE и COSMO-Ru7 // *Оптика атмосферы и океана*. 2015. Т. 25, № 6. С. 485–492.
7. Шалыгина И.Ю., Нахаев М.И., Кузнецова И.Н., Березин Е.В., Коновалов И.Б., Блинов Д.В., Курсанов А.А. Сравнение рассчитанных с помощью химических транспортных моделей приземных концентраций загрязняющих веществ с данными измерений в Московском регионе // *Оптика атмосферы и океана*. 2017. Т. 30, № 01. С. 53–59. doi: 10.15372/AOO20170107.
8. Старченко А.В., Барт А.А., Кижнер Л.И., Данилкин Е.А. Мезомасштабная метеорологическая модель TSUNM3 для исследования и прогнозирования состояния метеопараметров приземного слоя атмосферы над крупным населенным пунктом // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*, 2020. № 66. С. 35–55. doi: 10.17223/19988621/66/3
9. Starchenko A., Shelmina E., Kizhner L. Numerical Simulation of Meteorological Conditions and Air Quality above Tomsk, West Siberia // *Atmosphere*. 2020. V. 11 (11). Art. 1148. doi: 10.3390/atmos11111148
10. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М. : Наука, 1982. 319 с.
11. Пененко В.В., Алоян А.Е. Модели и методы для задач охраны окружающей среды. Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1985. 256 с.
12. Wesley M.L. Parameterisation of surface resistances to gaseous dry deposition in regional-scale numerical models // *Atmospheric Environment*. 1989. V. 23 (6). P. 1293–1304. doi: 10.1016/0004-6981(89)90153-4
13. *Об экологической ситуации в Томской области в 2020 году : государственный доклад / Департамент природных ресурсов и охраны окружающей среды Томской области.* Томск, 2021. 134 с.
14. Bart A.A., Starchenko A.V. Modelling of urban air pollution by anthropogenic and biogenic source emissions // *Proc. SPIE*. 2014. Vol. 9292. P. 929248-1–929248-8.
15. Guenrther A.B., Jiang X., Heald C.L., Sakulyanontvittaya T., Duhl T., Emmons L.K., Wang X. The Model of Emissions of Gases and Aerosols from Nature version 2.1 (MEGAN2.1): an extended and updated framework for modeling biogenic emissions // *Geosci. Model Dev.* 2010. V. 5. P. 1471–1492.
16. Hurley P. TAPM V4. Part 1: Technical Description : CSIRO Marine and Atmospheric Research Paper No. 25. 2008. 59 p.
17. Stockwell W.R., Goliff W.S. Comment on «Simulation of a reacting pollutant puff using an adaptive grid algorithm» by R.K. Srivastava et al. // *J. Geophys. Res.* 2002. V. 107. P. 4643–4650.
18. Толстых М.А., Фадеев Р.Ю., Шашкин В.В., Гойман Г.С., Заринов Р.Б., Киктев Д.Б., Махнорылова С.В., Мизяк В.Г., Рогутов В.С. Многомасштабная глобальная модель атмосферы ПЛАВ: результаты среднесрочных прогнозов погоды // *Метеорология и гидрология*. 2018. № 11. С. 90–99.
19. Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme // *Journal of Computational Physics*. 1974. V. 14. P. 361–370.

20. Shen J., Zhao Q. Comparison of some atmospheric chemical modelling schemes // Journal of Environmental Sciences. 1997. V. 9 (2). P. 183–201.
21. Старченко А.В., Беруин В.Н. Методы параллельных вычислений. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2013. 223 с.
22. Rife D.L., Davis C.A., Liu Y., Warner T.T. Predictability of Low-Level Winds by Mesoscale Meteorological Models // Monthly Weather Review. 2004. V. 132. P. 2553–2569. doi: 10.1175/MWR2801.1
23. Olauson J., Samuelsson J., Bergström H., Bergkvist M. Using the MIUU Model for Prediction of Mean Wind Speed At Low Height // Wind engineering. 2015. V. 39 (5). P. 507–518. doi: 10.1260/0309-524X.39.5.507
24. Электронный фонд правовых и нормативно-технических документов. Руководящий документ. Документы о состоянии загрязнения атмосферы в городах для информирования государственных органов, общественности и населения : дата введения 01.02.2006. URL: <https://docs.cntd.ru/document/1200067118> (дата обращения 16.02.2022)

References

1. Berlyand M.E. (1991) *Prognoz i regulirovaniye zagryazneniya atmosfery* [Prediction and Regulation of Atmosphere Pollution]. Leningrad: Gidrometeoizdat.
2. Bezuglaya E.Yu., Rastorgueva G.P., Smirnova, I.V. (1991) *Chem dyshit promyshlennyi gorod?* [What does an industrial city breathe in?], Leningrad: Gidrometeoizdat.
3. Sokhi R.S., Baklanov A.A., Shlunzen K.H. (2018) *Mesoscale Modelling for Meteorological and Air Pollution Application*. ANTHEM PRESS.
4. Baklanov A., Korsholm U., Nuterman R., Mahura A., Nielsen K.P., Sass B.H., Rasmussen A., Zakey A., Kaas E., Kurganskiy A., Sørensen B., González-Aparicio I. (2017) Enviro-HIRLAM online integrated meteorology–chemistry modelling system: strategy, methodology, developments and applications (v7.2). *Geoscientific Model Development*. 10. pp. 2971–2999. doi: 10.5194/gmd-10-2971-2017.
5. Srivastava I., Yarragunta S., Kumar R., Mitra D. (2020) Distribution of surface carbon monoxide over the Indian subcontinent: Investigation of source contributions using WRF-Chem. *Atmospheric Environment*. 243(15), p. 117838. doi: 10.1016/j.atmosenv.2020.117838.
6. Nakhaev M.I., Berezin E.V., Shalygina I.Yu., Kuznetsova I.N., Konovalov I.B., Blinov D.V., Lesina E.A. (2015) Eksperimental'nyye raschety kontsentratsii RM10 i SO kompleksom modeley CHIMERE i COSMO-Ru7 [Pilot calculations of PM10 and CO concentrations with complex models CHIMERE and COSMO-Ru7]. *Optika Atmosfery i Okeana*. 28(6). pp. 569–578. doi: 10.15372/AOO20150613.
7. Shalygina I.Yu., Nahaev M.I., Kuznetsova I.N., Berezin E.V., Konovalov I.B., Blinov D.V., Kirsanov A.A. (2017) Svrnveniye rasschitannykh s pomoshch'yu khimicheskikh transportnykh modeley prizemnykh kontsentratsiy zagryaznyayushchikh veshchestv s dannymi izmereniy v Moskovskom regione [Comparison of the ground concentration of polluting substances calculated by means of chemical transport models with data of measurements in the Moscow region]. *Optika Atmosfery i Okeana*. 30(1). pp. 53–59. doi: 10.15372/AOO20170107.
8. Starchenko A.V., Bart A.A., Kizhner L.I., Danilkin E.A. (2020) Mezomasshtabnaya meteorologicheskaya model' TSUNM3 dlya issledovaniya i prognozirovaniya sostoyaniya meteoparametrov prizemnogo sloya atmosfery nad krupnym naselelym punktom [The TSUNM3 mesoscale meteorological model for the study and forecast of meteorological parameters of the atmospheric surface layer over a major population center]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 66. pp. 35–55. doi: 10.17223/19988621/66/3.
9. Starchenko A., Shelmina E., Kizhner L. (2020) Numerical Simulation of Meteorological Conditions and Air Quality above Tomsk, West Siberia. *Atmosphere*. 11(11). p. 1148.

10. Marchuk G.I. (1986) *Mathematical Models in Environmental Problems*. Elsevier Science.
11. Penenko V.V., Aloyan A.E. (1985) *Modeli i metody dlya zadach okhrany okruzhayushchey sredy* [Models and methods for environmental problems]. Novosibirsk: Nauka.
12. Wesley M.L. (1989) Parameterization of surface resistances to gaseous dry deposition in regional-scale numerical models. *Atmospheric Environment*. 23(6). pp. 1293–1304. doi: 10.1016/0004-6981(89)90153-4.
13. *Gosudarstvennyy doklad “Ob ekologicheskoy situatsii v Tomskoy oblasti v 2020 godu”* [State report “On the Environmental Situation in Tomsk Oblast in 2020” (2021) Tomsk. Department of Natural Resources and Environmental Protection of the Tomsk Region.
14. Bart A.A., Starchenko A.V. (2014) Modelling of urban air pollution by anthropogenic and biogenic source emissions *Proceedings of SPIE*. 9292. pp. 929248-1-929248-8. doi: 10.1117/12.2075132.
15. Guenther A.B., Jiang X., Heald C.L., Sakulyanontvittaya T., Duhl T., Emmons L.K., Wang X. (2010) The Model of Emissions of Gases and Aerosols from Nature version 2.1 (MEGAN2.1): an extended and updated framework for modeling biogenic emissions. *Geoscientific Model Development*. 5. pp. 1471–1492.
16. Hurlley P. (2008) TAPM V4. Part 1: Technical Description. *CSIRO Marine and Atmospheric Research Paper no. 25*.
17. Stockwell W.R., Goliff W.S. (2002) Comment on “Simulation of a reacting pollutant puff using an adaptive grid algorithm” by R. K. Srivastava et al. *Journal of Geophysical Research*. 107(D22). pp. 4643–4650.
18. Tolstykh M.A., Fadeev R.Yu., Shashkin V.V., Goyman G.S., Zaripov R.B., Kiktev D.B., Makhnorylova S.V., Mizyak V.G., Rogutov V.S. (2018) Multiscale global atmosphere model SL-AV: the results of medium-range weather forecasts. *Russian Meteorology and Hydrology*. 43(11), pp. 773–779. doi: 10.3103/S1068373918110080.
19. Van Leer B. (1974) Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme. *Journal of Computational Physics*. 14. pp. 361–370.
20. Shen J., Zhao Q. (1997) Comparison of some atmospheric chemical modelling schemes. *Journal of Environmental Sciences*. 9(2). pp. 183–201.
21. Starchenko A.V., Bertsun V.N. (2013) *Metody parallel’nykh vychisleniy* [Parallel Computing Methods]. Tomsk: Tomsk State University.
22. Rife D.L., Davis C.A., Liu Y., Warner T.T. (2004) Predictability of low-level Wwinds by mesoscale meteorological models. *Monthly Weather Review*. 132. pp. 2553–2569. doi: 10.1175/MWR2801.1.
23. Olauson J., Samuelsson J., Bergström H., Bergkvist M. (2015) Using the MIUU model for prediction of mean wind speed at low height. *Wind Engineering*. 39(5). pp. 507–518. doi: 10.1260/0309-524X.39.5.507.
24. Electronic fund of legal and normative-technical documents. Documents on the state of air pollution in cities to inform state bodies, the public, and the population. Guidance document 52.04.667-2005. Access mode: <https://docs.cntd.ru/document/1200067118>.

Сведения об авторах:

Старченко Александр Васильевич – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой вычислительной математики и компьютерного моделирования Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: starch@math.tsu.ru

Шельмина Елена Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования Томского государственного университета; доцент кафедры экономической математики, информатики и статистики Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники, Томск, Россия. E-mail: eashelmina@mail.ru

Кижнер Любовь Ильинична – доцент, кандидат географических наук, доцент кафедры метеорологии и климатологии Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: kdm@mail.tsu.ru

Одинцов Сергей Леонидович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института оптики атмосферы им. В.Е. Зуева Сибирского отделения РАН, Томск, Россия. E-mail: odintsov@iao.ru

Information about the authors:

Starchenko Alexander V. (Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department of Computational Mathematics and Computer Modelling, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: starch@math.tsu.ru

Shelmina Elena A. (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Computational Mathematics and Computer Modeling, Tomsk State University; Associate Professor of the Department of Economic Mathematics, Informatics and Statistics, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, Russian Federation). E-mail: eashelmina@mail.ru

Kizhner Lyubov I. (Associate Professor, Candidate of Geographical Sciences, Associate Professor of the Department of Meteorology and Climatology, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kdm@mail.tsu.ru

Odintsov Sergey L. (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, Institute of Atmospheric Optics of V.E. Zuev, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: odintsov@iao.ru

Статья поступила в редакцию 21.02.2022; принята к публикации 03.10.2022

The article was submitted 21.02.2022; accepted for publication 03.10.2022

Научная статья

УДК 519.24

doi: 10.17223/19988621/79/4

MSC: 60F05

Предельное распределение периметра выпуклой оболочки, порожденной пуассоновским точечным процессом в выпуклом многоугольнике

Исакжан Мамасалиевич Хамдамов¹, Зоя Сергеевна Чай²,
Лола Джавлановна Шарипова³

¹ *Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан*

² *Ташкентский университет информационных технологий, Ташкент, Узбекистан*

³ *Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан*

¹ *khamdamov.isakjan@gmail.com*

² *chay1526@mail.ru*

³ *lolaxon@gmail.com*

Аннотация. Работа посвящена изучению свойств выпуклых оболочек, порожденных реализацией однородного пуассоновского точечного процесса в многоугольнике на плоскости. Доказано, что разность периметров носителя распределения и выпуклой оболочки сходится по вероятности к некоторой случайной величине, которая имеет отличное от нормального распределение и асимптотически не зависит от числа вершин и площади выпуклой оболочки.

Ключевые слова: выпуклая оболочка, пуассоновский точечный процесс, функционалы от выпуклой оболочки, реализация точечного процесса

Для цитирования: Хамдамов И.М., Чай З.С., Шарипова Л.Д. Предельное распределение периметра выпуклой оболочки, порожденной пуассоновским точечным процессом в выпуклом многоугольнике // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 79. С. 44–57. doi: 10.17223/19988621/79/4

Original article

The limit distribution of the perimeter of a convex hull generated by a Poisson point process in a convex polygon

Isakjan M. Khamdamov¹, Zoya S. Chay², Lola D. Sharipova³

¹ *National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan*

² *Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan*

³ *Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan*

¹ *khamdamov.isakjan@gmail.com*

² *chay1526@mail.ru*

³ *lolaxon@gmail.com*

Abstract. In this paper, we study various functionals of convex hulls generated by the realization of a homogeneous Poisson point process in a polygon on a plane. The convex hull is a generalization of the extreme elements of the sample when estimating the carrier of the distribution; and in the multidimensional case, as an estimate of the carrier of the distribution, it retains many properties of one-dimensional estimates, such as consistency, asymptotic unbiasedness, and sufficiency. Works on the study of random convex hulls in polygons and various functionals of them are usually referred to the field of probabilistic geometry. It should be noted that studying the properties of even the simplest functionals of convex hulls, such as the number of vertices or the area, is not an easy problem (see, for example, [1-4]). This also explains the fact that before the appearance of the work of P. Groeneboom [6], the main progress in this field was achieved only in the study of the properties of the mean values of such functionals. In [6], he succeeded in proving the central limit theorem for the number of vertices of a convex hull in the case when the support of the original uniform distribution is either a convex polygon or an ellipse. The main result of this paper consists in proving that the difference between the perimeters of the distribution carrier and the convex hull converges in probability to a random variable that has a distribution different from normal, and it is asymptotically independent of the number of vertices and the area of the convex hull.

Keywords: convex hull, Poisson point process, functionals of convex hulls, realization of a point process

For citation: Khamdamov, I.M., Chay, Z.S., Sharipova, L.D. (2022) The limit distribution of the perimeter of a convex hull generated by a Poisson point process in a convex polygon. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 79. pp. 44–57. doi: 10.17223/19988621/79/4

Введение

Настоящая работа является продолжением работы [1] на двумерный случай. Здесь исследуются различные функционалы от выпуклой оболочки, являющейся обобщением крайних элементов выборки при оценивании носителя распределения в случае, когда носителем является выпуклое ограниченное множество. Выпуклая оболочка как оценка носителя распределения в многомерном случае сохраняет многие свойства одномерных оценок, такие как состоятельность, асимптотическая несмещенность и достаточность. Работы по изучению случайных выпуклых оболочек в многоугольниках и различных функционалов от них принято относить к области стохастической геометрии. Следует отметить, что изучение свойств даже простейших функционалов от выпуклых оболочек, таких как число вершин или площадь, является совсем не простой задачей (см., напр.: [2–4]). Этим и объясняется тот факт, что до появления работы Р. Groeneboom [5] основной прогресс в этой области был достигнут лишь в изучении свойств средних значений подобных функционалов. Ему удалось доказать центральную предельную теорему для числа вершин выпуклой оболочки в случае, когда носитель исходного равномерного распределения представляет собой либо выпуклый многоугольник, либо эллипс. Основное достижение Р. Groeneboom состоит в том, что он догадался использовать известное свойство однородных биномиальных точек

ных процессов, состоящее в том, что вблизи границы носителя такой процесс почти неотличим от однородного пуассоновского точечного процесса. Эта идея позволила ему уменьшить количество проблем, которые он собирался решить при исследовании асимптотических свойств биномиальных точечных процессов. Дальнейшая техника была связана с применением таких мощных аналитических аппаратов, как мартингалы, сильно перемешивающиеся стационарные процессы и т.д.

В работах [6–8], учитывая близость биномиальных точечных процессов к пуассоновскому, исследованы вершинные процессы выпуклой оболочки, порожденной пуассоновским точечным процессом. А именно, в работе [7] путем сочетания идеи [5, 9] и применения экспоненциального неравенства В.В. Петрова [10] для суммы случайных величин получена сходимость по вероятности разности между $2T$ и периметром выпуклой оболочки, находящейся внутри диска радиуса T , при $T \rightarrow \infty$ в конусе к некоторой случайной величине, имеющей распределение, отличное от нормального..

В данной работе получила свое развитие идея работ [5, 7, 9]: в каждой вершине выпуклой оболочки рассматривается некоторая ε -окрестность и доказывается асимптотическая независимость случайных величин, которые являются разностью между 2ε и периметром выпуклой оболочки, оказавшейся внутри диска радиуса ε , при $n \rightarrow \infty$.

Поэтому мы считаем, что достаточно рассматривать случайные точки $X_1, X_2, \dots, X_k, \dots$, заданные на одном и том же вероятностном пространстве, как реализации однородного пуассоновского точечного процесса (о.п.т.п.) $\Pi_n(\cdot)$ с интенсивностью $n\lambda(\cdot)$, где $\lambda(\cdot)$ – Лебегова мера на плоскости. Нетрудно заметить, что, обозначив $T_i = \sqrt{n}X_i$, можно считать $T_1, T_2, \dots, T_k, \dots$ случайными точками реализации о.п.т.п. $\Pi(\cdot)$ в $\sqrt{n}A$ с интенсивностью $\lambda(\cdot)$, где A – носитель распределения.

Рассмотрим C_n – выпуклую оболочку, натянутую на $X_1, X_2, \dots, X_k, \dots$. В этой работе мы исследуем предельное поведение периметра выпуклой оболочки в многоугольнике A при $n \rightarrow \infty$, и нас будет интересовать совместное предельное распределение следующих функционалов от C_n : общего числа вершин v_n , площади s_n и периметра l_n .

Прежде чем сформулировать основные результаты, введем необходимые обозначения. Пусть l_0 и s_0 – периметр и площадь многоугольника A соответственно. Положим

$$l_n^* = l_0 - l_n, \quad s_n^* = s_0 - s_n. \quad (1)$$

Справедлива следующая основная

Теорема 1. Если C_n – выпуклая оболочка, порожденная реализацией пуассоновского точечного процесса в выпуклом r -угольнике A с интенсивностью $n\lambda(\cdot)$, то случайная величина $\sqrt{n/s_0}l_n^*$ при $n \rightarrow \infty$ асимптотически независима от (v_n, s_n) . Более того, она сходится по вероятности к случайной величине, представимой в виде суммы независимых случайных величин, $\zeta_i = v_{0i}\sigma_i + v'_{0i}\sigma'_i$, где σ, σ' определяются далее равенством (43), а v_{0i} и v'_{0i} – равенством (45).

При доказательстве настоящей теоремы нет особой нужды в использовании мартингалов, сильно перемешивающихся стационарных процессов и т.п. Вполне достаточно аналитических и прямых вероятностных приемов.

1. Вспомогательные результаты

Пусть K – конус, образованный двумя лучами $\ell_i = (z : z = te_i, t > 0)$, $i = 1, 2$, где e_1 и e_2 – единичные векторы.

Обозначим через α угол между e_1 и e_2 и положим

$$e_0 = (e_1 + e_2)/2. \tag{2}$$

Ясно, что $(z, e_0) > 0$ для всех $z \in K$.

Пусть далее $\Pi(\cdot)$ – о.п.т.п. с интенсивностью $\lambda(\cdot)$. Обозначим через $\Pi(K)$ сужение этого процесса на K . Рассмотрим выпуклую оболочку C' , порожденную $\Pi(K)$, и множество ее вершин Z .

Обозначим через $z_0 \in Z$ ту из вершин, для которой $(e_0, z - z_0) \geq 0$ для всех $z \in Z$. Очевидно, что z_0 определена однозначно почти наверное. При этом прямая

$$(e_0, z - z_0) = 0 \tag{3}$$

является опорной для C' .

Рассмотрим треугольник, образованный лучами ℓ_i , $i = 1, 2$, и опорной прямой (3). Множество внутренних точек этого треугольника обозначим через δ_0 , а его площадь – через ξ_0 (рис. 1).

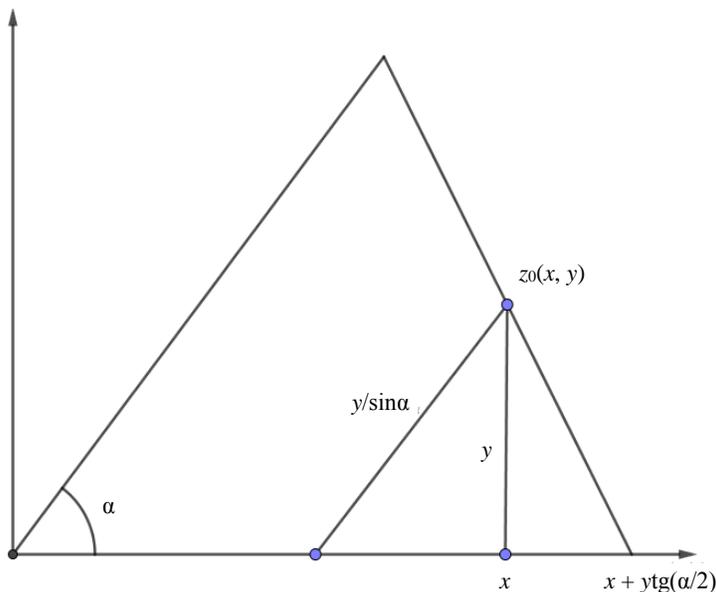


Рис. 1. Вершина z_0 , соответствующая опорной прямой $(e_0, z - z_0) = 0$
Fig. 1. The vertex z_0 corresponding to the support line $(e_0, z - z_0) = 0$

Из рис. 1 видно, что

$$\xi_0 = \frac{1}{2} \left(x + y \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right)^2 \sin \alpha, \quad (4)$$

где y – ордината z_0 .

Положим

$$\eta_0 = \frac{y}{\sin \alpha \left(x + y \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right)}, \quad (5)$$

где x – абсцисса точки z_0 .

Пронумеруем теперь вершины C' , обходя границу против часовой стрелки. Поскольку z_0 уже определена, то тем самым каждая из вершин получает свой номер j , $-\infty < j < \infty$. Выберем на луче l_1 последовательность точек $\gamma_j = x_j e_1$, $j \geq 1$, лежащих на пересечении l_1 и прямых, проходящих соответственно через вершины z_{j-1} и z_j . Точки $\gamma_j = y_j e_2$, $j \geq 1$, получаются аналогичным образом в результате пересечения l_2 и прямых, проходящих соответственно через вершины z_j и z_{j+1} .

Пусть δ_j , $j \neq 0$, – множество внутренних точек треугольника с вершинами z_{j-1} , γ_{j-1} , γ_j , если $j \geq 1$, и вершинами z_{j+1} , γ_{j+1} , γ_j , если $j \leq -1$. Обозначим через $\gamma_0 = x_0 e_1$, $\gamma'_0 = y_0 e_2$ вершины треугольника, множество внутренних точек которого мы ранее обозначили через δ_0 . Напомним, что третьей вершиной этого треугольника служит точка $(0,0)$. Отсюда (см. рис. 1) следует, что $x_0 = y_0 = x + y \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right)$.

Согласно определению, $\bigcup_j \delta_j$ содержится в полосе $K - C'$ и отличается от нее на множество меры нуль (имеется в виду Лебегова мера $\lambda(\cdot)$).

Положим

$$\xi_j = \lambda(\delta_j). \quad (6)$$

Пусть далее υ_j , $j \neq 0$, – расстояние от вершины z_j до луча l_1 , если $j \geq 1$, или до луча l_2 , если $j \leq -1$. Тогда

$$\xi_j = \begin{cases} \upsilon_{j-1}(x_j - x_{j-1})/2, & \text{если } j \geq 1, \\ \upsilon_{j+1}(y_j - y_{j+1})/2, & \text{если } j < -1. \end{cases} \quad (7)$$

Положим

$$\eta_j = \begin{cases} (1 - \upsilon_j / \upsilon_{j-1})^2, & \text{если } j \geq 1, \\ (1 - \upsilon_j / \upsilon_{j+1})^2, & \text{если } j < -1. \end{cases} \quad (8)$$

В формулах (7) и (8) можно считать, что $\xi_{-1} = \upsilon'_0(y_{-1} - y_0)/2$, $\eta_{-1} = (1 - \upsilon_{-1}/\upsilon'_0)^2$, где υ_0 и υ'_0 – расстояния от z_0 до оси l_1 и l_2 , соответственно.

Следующие утверждения доказываются аналогично леммам 1 и 2 из [6].

Лемма 1. Случайные величины ξ_0 и η_0 независимы, причем ξ_0 – стандартно экспоненциально распределенная величина, а η_0 – равномерно распределенная в $(0, 1)$ величина.

Лемма 2. Случайные величины $\xi_j, \eta_k, -\infty < j, k < \infty$, независимы в совокупности, причем

$$\overset{dis}{\xi_j} = \xi_0, \quad \overset{dis}{\eta_k} = \eta_0.$$

Следуя [6] (также см.: [8]), введем

$$\begin{aligned} \theta_T &= \inf \{j : x_j \geq T\}, \quad \theta'_T = \inf \{-j : y_j \geq T\}, \\ S_n &= \begin{cases} \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n, & \text{если } n \geq 1, \\ 0, & \text{если } n = 0, \end{cases} \quad S'_n = \begin{cases} \xi_{-1} + \xi_{-2} + \dots + \xi_{-n}, & \text{если } n \geq 1, \\ 0, & \text{если } n = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

Положим

$$\alpha(T) = \frac{2}{3} \log T, \quad \beta^2(T) = \frac{10}{27} \log T. \quad (10)$$

Справедлива следующая лемма (см. [6]):

Лемма 3 (Форманов–Хамдамов). В наших условиях при $T \rightarrow \infty$

$$(\beta(T))^{-1} (\theta_T - \alpha(T), S_T - \alpha(T)) \overset{d}{\Rightarrow} N(\vec{0}, B).$$

Здесь $\overset{d}{\Rightarrow}$ означает слабую сходимость, $N(\vec{0}, B)$ – нормально распределенный случайный вектор с нулевым вектором средних значений и ковариационной матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 14/5 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через l_{mn} длину участка границы C между точками z_{-m} и z_n .

Положим

$$d = \frac{1}{\sin \alpha} + \operatorname{ctg} \alpha. \quad (11)$$

Справедлива следующая

Лемма 4. Если $\min \{m, n\} \rightarrow \infty$, то случайная величина $t'_m + t_n - l_{mn}$ сходится почти наверное к случайной величине ζ , представимой в виде:

$$\zeta = v_0 \sigma + v'_0 \sigma',$$

где σ и σ' одинаково распределены и условно независимы при заданных v_0 и v'_0 , причем

$$\sigma = \sum_{j=1}^{\infty} \left(d + \rho_j - \sqrt{1 + \rho_j^2} \right) \cdot (1 - \tau_j) \prod_{k=1}^{j-1} \tau_k. \quad (12)$$

Лемма 4 доказывается аналогично теореме 1 из [7].

2. Разбиение границы выпуклой оболочки на условно независимые части

В отличие от [5], мы приведем подробное доказательство теоремы, которое в силу словесного описания геометрических объектов несколько усложняет изложение, но устраняет некоторые неясности, имеющиеся в указанной работе.

В соответствии с замечанием во введении нам достаточно получить предельное распределение для периметра l'_n и его связи с числом вершин v'_n и площадью s'_n выпуклой оболочки C'_n , порожденной точками $T_1, T_2, \dots, T_k, \dots$ реализации о.п.т.п. $\Pi(\cdot)$ на множестве $\sqrt{n}A$. Поясним схему дальнейших рассуждений. Сначала мы разобьем границу C'_n на $2r$ условно независимых частей таким образом, что каждому из r углов многоугольника A будет соответствовать два элемента этого разбиения. Тем самым каждый из интересующих нас функционалов v'_n и s'_n будет представлен в виде суммы $2r$ случайных величин. Затем воспользуемся результатами [6] (см. лемму 3), где установлена асимптотическая независимость и нормальность этих случайных величин в конусе.

Таким образом, общие принципы исследования проблемы у нас такие же, что и в работе [5], хотя их реализация совсем иная.

Обозначим через $a^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, r$, вершины r -угольника A – носителя исходного равномерного распределения. Пусть при некотором $\varepsilon > 0$

$$B_i = A \cap S(a^{(i)}, \varepsilon), \tag{13}$$

где $S(z, \varepsilon)$ – круг радиуса ε с центром в точке z . Пусть далее Π_{ni} – сужение $\Pi_n(\cdot)$ в конусе K_i с вершиной $a^{(i)}$ и образующими лучами l_{i1} и l_{i2} , проходящими через $a^{(i+1)}$ и $a^{(i-1)}$ соответственно, где $i = 1, 2, \dots, r$. Понятно, что $a^{(r-1)} = a^{(r)}$, $a^{(r+1)} = a^{(1)}$.

Пусть e_{oi} играет по отношению к K_i ту же роль, что играл вектор e_0 по отношению к K в разд. 1. Напомним, что e_0 определяется равенством (2), точнее

$$e_{oi} = 2^{-1} \left(\frac{a^{(i+1)} - a^{(i)}}{\|a^{(i+1)} - a^{(i)}\|} + \frac{a^{(i-1)} - a^{(i)}}{\|a^{(i-1)} - a^{(i)}\|} \right).$$

Обозначим через C_{ni} выпуклую оболочку, порожденную Π_{ni} . Условимся обозначать через Z_{ni} множество вершин C_{ni} . Далее, если множество вершин C'_n обозначим через W'_n , то выделим в Z_{ni} и W'_n элементы z_{oi} и w_{oi} , обладающие тем свойством, что прямые $(e_{oi}, w - z_{oi}) = 0$ и $(e_{oi}, w - w_{oi}) = 0$ являются опорными для C_{ni} и C'_n соответственно.

Положим

$$\mathfrak{X}_1 = \{ \pi : z_{oi} = w_{oi}, i = 1, 2, \dots, r \} \tag{14}$$

и

$$\mathfrak{X}_2 = \{ \pi : z_{oi} \in B_i, i = 1, 2, \dots, r \}, \tag{15}$$

где π – реализация Π_n , а B_i определяется равенством (13).

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$P(\mathfrak{X}_i) \rightarrow 1, i = 1, 2. \tag{16}$$

Из (14)–(16) следует, что с вероятностью, близкой к 1, граница каждой оболочки C_{ni} имеет непустое пересечение с C'_n . Заметим, что точки w_{oi} , $i = 1, 2, \dots, r$, делят границу C'_n на r частей. Каждую из них нам остается разбить еще на две

части. Пусть $w^{(i)}$ – та из вершин $W'_n \subset C'_n$, для которой прямая $(p_i, w - w^{(i)}) = 0$, где $p_i \perp (a^{(i+1)} - a^{(i)})$, является опорной к C'_n , т.е. $w^{(i)}$ есть ближайшая из вершин W'_n к лучу l_{i1} . Более того, с ростом n вершина $w^{(i)}$ неограниченно сближается с этим лучом, т.е. $(p_i, w^{(i)} - a^{(i)}) \rightarrow 0$. Поскольку условное распределение $w^{(i)}$ на отрезке опорной прямой $(p_i, w - w^{(i)}) = 0$, лежащем в A , при условии, что $(p_i, w^{(i)} - a^{(i)}) = t$, равномерно, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} P \left(w^{(i)} \in \bigcap_{j=1}^r \bar{B}_j \right) = 1. \quad (17)$$

Отсюда следует, что и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} P \left(\bar{w}_i \in \bigcap_{j=1}^r \bar{B}_j \right) = 1, \quad (18)$$

где \bar{w}_i – основание перпендикуляра, опущенного из w_i на l_{i1} .

Рассмотрим

$$\mathfrak{X}_3 = \left\{ \pi : \bar{w}_i \in \bigcap_{j=1}^r B_j, i = 1, 2, \dots, r \right\}.$$

Из (17) и (18) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $N > 0$ такое, что при всех достаточно больших $n > N$ будет выполняться неравенство

$$P(\mathfrak{X}_3) \geq 1 - \varepsilon.$$

В дальнейшем, не оговаривая специально, мы будем рассматривать только те реализации Π_n , которые содержатся в $\bigcap_{j=1}^3 \mathfrak{X}_j$. Для таких реализаций $w^{(i)}$,

$i = 1, 2, \dots, r$, лежат между w_{0i} и $w_{0(i+1)}$.

Таким образом, граница C'_n поделена на $2r$ частей. При этом, согласно определению, эти части при заданных w_{0i} , $w^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, r$, условно независимы.

Теперь выбираем аппроксимирующие функционалы. Займемся участком границы C'_n между вершинами w_{01} и $w^{(1)}$. Участок между $w^{(r)}$ и w_{01} исследуется вполне аналогично. Пронумеруем вершины C'_n , обходя границу против часовой стрелки, начиная с w_{01} . В результате на рассматриваемом участке границы получим w_j , $j = 0, 1, 2, \dots, \mu$, где $w_0 = w_{01}$, $w_\mu = w^{(1)}$. Аналогичную операцию проделаем и с вершинами $z \in C'_{n1}$, получив в результате z_j , $j = 0, 1, 2, \dots$, где, согласно (14) и (16), $z_0 = w_{01} = w_0$.

Для того чтобы использовать свойства о.п.т.п., описанные в разд. 1, нам необходимо перейти от $\Pi(\cdot)$ к $\Pi_n(\cdot)$. При таком переходе линейные характеристики x_j , y_j , u_j , v_j , ρ_j перейдут в $x'_j = n^{-\frac{1}{2}}x_j$, $y'_j = n^{-\frac{1}{2}}y_j$, $u'_j = n^{-\frac{1}{2}}u_j$, $v'_j = n^{-\frac{1}{2}}v_j$ соответственно, тогда как площадь ξ_j треугольника δ_j перейдет в $\xi'_j = n^{-1}\xi_j$. Без-

размерные величины η_j, τ_j, ρ_j при таком переходе останутся без изменения. Образы z_j при таком преобразовании мы будем обозначать как z'_j .

Пусть $T = \varepsilon\sqrt{n}$, $T_1 = h\sqrt{n}$, где h – длина стороны A , соединяющей вершины $a^{(1)}$ и $a^{(2)}$. В соответствии с (9) положим

$$\theta = \theta_T, \chi = \theta_{T_1}.$$

Тогда

$$\theta = \inf \{j : x'_j \geq \varepsilon\}, \quad (19)$$

$$\text{а } \chi = \inf \{j : x'_j \geq h\}.$$

Напомним, что x_j и x'_j строятся по вершинам z_{j-1} , z_j и z'_{j-1} , z'_j соответственно. Также отметим, что $w_j = z'_j$, по крайней мере при $0 \leq j \leq \chi - 1$.

Пусть далее

$$p = \xi'_1 + \xi'_2 + \dots + \xi'_0, \quad (20)$$

а

$$q = \xi'_1 + \xi'_2 + \dots + \xi'_\chi. \quad (21)$$

Положим

$$\theta^* = \frac{\theta - \alpha}{\beta_1}, \quad p^* = \frac{np - \alpha}{\beta_2}, \quad (22)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{3} \log n, \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{5 \log n}{27}}, \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{14 \log n}{27}}. \quad (23)$$

Из (20), (21) и леммы 3 следует что

$$(\theta^*, p) \Rightarrow \omega, \quad (24)$$

где ω из леммы 3. Положим теперь

$$\chi^* = \frac{\chi - \alpha}{\beta_1}, \quad q^* = \frac{nq - \alpha}{\beta_2}. \quad (25)$$

Согласно следствию 3 из [6], учитывая (21) и (23), имеем

$$\frac{\theta - \chi}{\beta_1} \xrightarrow{p} 0, \quad \frac{n(p - q)}{\beta_1} \rightarrow 0. \quad (26)$$

Из (22)–(26) следует, что

$$(\chi^*, q^*) \Rightarrow \omega. \quad (27)$$

Характеристики (θ', p') , аналогичные (χ', q') , построенные по участку границы C'_n между вершинами $w^{(r)}$ и $w_{01} = w$, также обладают свойствами (24) и (27). При этом важно, что они асимптотически независимы от θ, χ, p и q . Не менее важно то, что θ, θ', p и p' полностью определяются по сужению Π_n на B_1 . Отсюда следует, что аналогичные характеристики $\theta_i, \theta'_i, p_i, p'_i$ независимы в совокупности для участков границы, отвечающих углам с вершинами $a^{(i)}, i = 1, 2, \dots, r$. Аналогично (22) и (25) имеем

$$\Theta^* = \frac{\Theta - 2r\alpha}{\beta_1 \sqrt{2r}}, \quad P^* = \frac{nP - 2r\alpha}{\beta_2 \sqrt{2r}}, \quad (28)$$

где

$$\Theta = \sum_{i=1}^r (\theta_i + \theta'_i), \quad P = \sum_{i=1}^r (p_i + p'_i). \quad (29)$$

В силу независимости слагаемых в $(\theta_i + \theta'_i, p_j + p'_j)$, $i, j = 1, 2, \dots, r$, из (24) получаем

$$(\Theta, P) \Rightarrow \omega.$$

Наконец, по аналогии с (28) введем

$$\mathbb{X}^* = \frac{\mathbb{X} - 2r\alpha}{\beta_1 \sqrt{2r}}, \quad \mathbb{Q}^* = \frac{\mathbb{Q} - 2r\alpha}{\beta_2 \sqrt{2r}}, \quad (30)$$

где

$$\mathbb{X} = \sum_{i=1}^r (\chi_i + \chi'_i), \quad \mathbb{Q} = \sum_{i=1}^r (q_i + q'_i).$$

Заметим, что $(\chi_i + \chi'_i, q_i + q'_i)$, $i = 1, 2, \dots, r$, вообще говоря, независимы. Однако, имея в виду (26) и (27), можно утверждать, что

$$(\mathbb{X}^*, \mathbb{Q}^*) \Rightarrow \omega. \quad (31)$$

Именно функционалы \mathbb{X}^* и \mathbb{Q}^* дают нам нужную аппроксимацию для v'_n и S'_n .

3. Доказательство теоремы 1

Пусть θ, θ', μ и μ' имеют тот же смысл, который мы придали им в разд. 2. Рассмотрим участок границы между вершинами $w_{-\mu} = w^{(r)}$ и $w_{\mu} = w^{(1)}$. Проведем через вершины $w_{-\mu'}$, $w_{\theta'}$ прямые, параллельные лучу l_{11} , а через вершины w_0 , w_{μ} — прямые, параллельные l_{1r} . Пусть $t_{\theta}e_{1r}$, $t'_{\mu'}e_{1r}$ — точки пересечения первых прямых с лучом l_{1r} , а t_0e_{11} , $t_{\mu}e_{11}$ — вторых прямых с лучом l_{11} . Напомним, что

$$e_{11} = \|a^{(2)} - a^{(1)}\| \cdot (a^{(2)} - a^{(1)}), \quad \text{а } e_{1r} = \|a^{(r)} - a^{(1)}\| \cdot (a^{(r)} - a^{(1)}).$$

Определим следующие функционалы:

$$\begin{cases} f = t_{\theta} + t'_{\mu'} - l_{\theta\theta'}, \\ g = t_{\mu} + t'_{\mu'} - l_{\mu\mu'}, \end{cases} \quad (32)$$

где $l_{\theta\theta'}$ — длина участка границы между вершинами w_0 и $w_{\theta'}$, $l_{\mu\mu'}$ имеет аналогичный смысл.

Поскольку при $-\chi \leq j \leq \chi$ мы имеем $w_j = z'_j$, то с помощью рассуждений, использованных при доказательстве леммы 4 из [7], получим, что

$$\sqrt{n}f \rightarrow \zeta \text{ п.н.} \quad (33)$$

Оценим теперь разность $g - f$. Этой цели служит следующая

Лемма 5. При $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n}(g - f) \xrightarrow{p} 0.$$

Доказательство. Положим

$$\varkappa = \sup \{ j : j \geq 1, z_j = w^{(1)} \},$$

$$\varkappa' = \sup \{ j : j \leq -1, z_j = w^{(r)} \} [].$$

Тогда $\theta \leq \varkappa \leq \mu$ и $\mu' \leq \varkappa' \leq \theta'$. Мы рассмотрим наиболее интересный случай, когда $\theta < \varkappa < \mu$. Для $\theta \leq i < j \leq \mu$ определим параллелограмм Δ_{ij} , стороны которого параллельны лучам l_{11} и l_{1r} , а одна из пар противоположных вершин есть w_i и w_j . Длину диагонали, соединяющей w_i и w_j , обозначим через c_{ij} . Для длин сторон, параллельных оси l_{11} , будем использовать обозначение a_{ij} , для длины двух других – b_{ij} .

По определению

$$a_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} a_{k,k+1}, \quad b_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} b_{k,k+1}. \quad (34)$$

Положим

$$\varepsilon_{ij} = a_{ij} + b_{ij} - c_{ij}. \quad (35)$$

В силу выпуклости границы C'_n из (34) и (35) будем иметь

$$\sum_{k=i}^{j-1} \varepsilon_{k,k+1} \leq \varepsilon_{ij}. \quad (36)$$

С помощью (32), (34)–(36) получаем

$$g - f = \frac{\sum_{\theta < j \leq \varkappa} \varepsilon_j + \sum_{\varkappa' \leq j < \theta'} \varepsilon_j}{\sqrt{n}} + \sum_{\varkappa < k < \mu} \varepsilon_{k,k+1} + \sum_{\mu' < k < \varkappa'} \varepsilon_{k,k-1} + \frac{v'_0 + v'_{\theta'} - v'_\mu - v'_{\mu'}}{\sin \alpha}. \quad (37)$$

Заметим, что θ, θ', μ и μ' при $n \rightarrow \infty$ сходятся по вероятности к ∞ . Далее $v'_j = n^{-1/2} v_j$, причем $v_j \rightarrow 0$ п.н. при $j \rightarrow \infty$. Нетрудно видеть, что ряд

$$\sum_{i=0}^{-\infty} \varepsilon_{i,i-1} + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_{i,i+1} \leq v_0 + v'_0 < \infty \text{ п.н.}$$

Поэтому из (37) следует, что

$$\sqrt{n}(g - f) = \sum_{\varkappa < k < \mu} \varepsilon_{k,k+1} + \sum_{\mu' < k < \varkappa'} \varepsilon_{k,k-1} + o_p(1). \quad (38)$$

Обе суммы в (38) оцениваются совершенно одинаково. Оценим, например, первую из них. С этой целью примем для ε_{ij} при $i = \varkappa, j = \mu$ обозначение ε^* .

Ввиду (36) и (38) имеем

$$\sum_{\varkappa < k < \mu} \varepsilon_{k,k+1} \leq \varepsilon^*, \quad (39)$$

тогда из (35) получим

$$\varepsilon^* \leq n^{-1/2} v_\varkappa. \quad (40)$$

Остается объединить (38)–(40). Лемма доказана.

Из леммы 4 следует, что

$$\sqrt{ng} \xrightarrow{p} \zeta. \quad (41)$$

Обозначим через f_i и g_i , $i=1,2,\dots,r$, аналоги f и g для вершин $a^{(i)}$. Понятно, что $f_1 = f$, $g_1 = g$. Соответствующие пределы для f_i и g_i обозначим через ζ_i . Из (32), (41) и леммы 4 следует, что ζ_i , $i=1,2,\dots,r$, независимы в совокупности. Заметим, что по определению распределение ζ_i зависит от α_i – величины угла при вершине $a^{(i)}$.

Из леммы 4 имеем

$$\zeta_i = v_{0i}\sigma_i + v'_{0i}\sigma'_i, \quad (42)$$

где

$$\begin{cases} \sigma_i = \sum_{j=1}^{\infty} \left(d_i + \rho_{ij} - \sqrt{1 + \rho_{ij}^2} \right) (1 - \tau_{ij}) \prod_{k=1}^{j-1} \tau_{ik}, \\ \sigma'_i = \sum_{j=1}^{\infty} \left(d_i + \rho'_{ij} - \sqrt{1 + \rho'_{ij}{}^2} \right) (1 - \tau'_{ij}) \prod_{k=1}^{j-1} \tau'_{ik}, \end{cases} \quad (43)$$

$$\begin{cases} \rho_{ij} = tg \frac{\alpha_i}{2} + 2v_{0i}^{-2} \sum_{k=1}^j \xi_{ik} \prod_{l=1}^{k-1} \tau_{il}^{-2}, \\ \rho'_{ij} = tg \frac{\alpha_i}{2} + 2(v'_{0i})^{-2} \sum_{k=1}^j \xi'_{ik} \prod_{l=1}^{k-1} (\tau'_{il})^{-2}, \end{cases} \quad (44)$$

$$\begin{cases} v_{0i} = (1 - \eta_{0i}) \sqrt{2\xi_{0i} \sin \alpha_i}, \\ v'_{0i} = \eta_{0i} \sqrt{2\xi_{0i} \sin \alpha_i}. \end{cases} \quad (45)$$

Здесь

$$\eta_{0i}, \xi_{i_1j_1}, \xi'_{i_2j_2}, \tau_{i_3j_3}, \tau'_{i_4j_4} \quad (1 \leq i_s \leq r, j_s \geq 1, s=1,2,3,4)$$

являются независимыми случайными величинами, причем

$$\eta_{0i} \stackrel{d}{=} \eta_0, 1 \leq i \leq r, \text{ а } \xi_{ij} \stackrel{d}{=} \xi'_{i_1j_1} \stackrel{d}{=} \xi_0, \tau_{ij} \stackrel{d}{=} \tau'_{i_1j_1} \stackrel{d}{=} 1 - \sqrt{\eta_0}, 1 \leq i, i_1 \leq r, j, j_1 \geq 1,$$

где ξ_0, η_0 из леммы 3.

Наконец, в соответствии с (11)

$$d_i = \frac{1}{\sin \alpha_i} + \operatorname{ctg} \alpha_i. \quad (46)$$

Напомним, что l_n представляет собой сумму длин $l_{\mu\mu'}$, соответствующих каждой из вершин $a^{(i)}$. При этом сумма $t_i + t'_i$, отвечающая каждой из вершин $a^{(i)}$, сходится к l_0 – периметру A . Отсюда в силу (32), (33) и лемм 4 и 5 получаем

$$\sqrt{n}(l_0 - l_n) \xrightarrow{P} \zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_r.$$

Второе из утверждений теоремы доказано.

Остается показать, что l_n и (v_n, S_n) асимптотически независимы. Очевидно, достаточно установить независимость f от (θ, p) и (θ', p') . Для любого $m \geq 1$ положим

$$\begin{aligned} \theta_m &= \inf \{ j : j \geq m, x'_j \geq \varepsilon \}, \\ p_m &= \xi'_{m+1} + \dots + \xi'_{0m}. \end{aligned}$$

Из (19) и (20) следует, что

$$\frac{\theta_m - \theta}{\beta_1} \xrightarrow{p} 0, \quad \frac{n(p - p_m)}{\beta_1} \xrightarrow{p} 0. \quad (47)$$

Подобные свойства справедливы и для θ'_m, p'_m – аналогов θ_m и p_m , соответствующих θ' и p' .

Легко понять, что $t_m + t'_m - l_{mm}$ асимптотически независима от θ_m, p_m, θ'_m и p'_m . Из (24) и (47) получаем, что $t_m + t'_m - l_{mm}$ асимптотически независима от θ, p, θ' и p' .

Для завершения доказательства теоремы остается воспользоваться неотрицательностью ε_j , соотношением (33) и произвольностью n . Теорема доказана.

Авторы выражают благодарность рецензенту статьи, замечания которого улучшили качество данной работы.

Список источников

1. *Нагаев А.В., Хамдамов И.М.* О роли экстремальных слагаемых в сумме случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 2002. Т. 47, вып. 3. С. 575–583.
2. *Carnal H.* Die konvexe Hülle von n rotations symmetrisch verteilte n Punkten // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete. 1970. V. 15. P. 168–176.
3. *Efron B.* The convex hull of a random set of points // Biometrika. 1965. V. 52. P. 331–343.
4. *Schneider R.* Random approximation of convex sets : Preprint Mathematical Institute. Freiburg im Breisgau : Albert-Ludwigs University, 1987. 180 S.
5. *Groeneboom P.* Limit theorems for convex hulls // Probab. Theory Related Fields. 1988. V. 79. P. 327–368.
6. *Formanov Sh.K., Khamdamov I.M.* On joint probability distribution of the number of vertices and area of the convex hulls generated by a Poisson point process // Statistics and Probability Letters. 2021. V. 169. Art. 108966. P. 1–7.
7. *Хамдамов И.М.* Предельное распределение периметра выпуклой оболочки, порожденной Пуассоновским точечным процессом в конусе // Бюллетень Института математики (АН РУз). 2021. Т. 4, № 2. С. 95–98.
8. *Khamdamov I.M., Chay Z.S.* Joint distribution of the number of vertices and the area of convex hulls generated by a uniform distribution in a convex polygon // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2021. V. 14 (2). P. 232–243.
9. *Nagaev A.V.* Some properties of convex hulls generated by homogeneous Poisson point processes in an unbounded convex domain // Ann. Inst. Statist. Math. 1995. V. 47. P. 21–29.
10. *Петров В.В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М. : Наука, 1987. 320 с.

References

1. *Nagaev A.V. and Khamdamov I.M.* (2003) On the role of extreme summands in sums of independent random variables. *Theory of Probability and Its Applications*. 47(3), pp. 533–541.
2. *Carnal H.* (1970) Die konvexe Hülle von n rotationssymmetrisch verteilten Punkten. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*. 15. pp. 168–176.
3. *Efron B.* (1965) The convex hull of a random set of points. *Biometrika*, 52(3-4), pp. 331–343.
4. *Schneider R.* (1987) *Random approximation of convex sets*. Preprint Mathematical Institute. Albert-Ludwigs-Universität Freiburg.
5. *Groeneboom P.* (1988) Limit theorems for convex hulls. *Probability Theory and Related Fields*. 79. pp. 327–368.

6. Formanov Sh.K., Khamdamov I.M. (2021) On joint probability distribution of the number of vertices and area of the convex hulls generated by a Poisson point process. *Statistics and Probability Letters*. 169. 108966. pp.1–7.
7. Khamdamov I.M. (2021) Predel'noye raspredeleniye perimetra vypukloy obolochki, porozhdennoy Puassonovskim tochechnym protsessom v konuse [Limit distribution of the perimeter of the convex hull generated by a Poisson point process in a cone]. *Bulletin of the Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences*. 4(2). pp. 95–98 [in Russian].
8. Khamdamov I.M., Чай З.С. (2021) Joint distribution of the number of vertices and the area of convex hulls generated by a uniform distribution in a convex polygon. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 14(2), pp. 232–243.
9. Nagaev A.V. (1995) Some properties of convex hulls generated by homogeneous Poisson point processes in an unbounded convex domain. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. 47, pp. 21–29.
10. Petrov V.V. (1975) *Sums of Independent Random Variables*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag.

Сведения об авторах:

Хамдамов Исакжан Мамасалиевич – доктор физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики Национального университета Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан. E-mail: khamdamov.isakjan@gmail.com
Чай Зоя Сергеевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Ташкентского университета информационных технологий, Ташкент, Узбекистан. E-mail: чай1526@mail.ru

Шарипова Лола Джавлановна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Ташкентского государственного транспортного университета, Ташкент, Узбекистан. E-mail: lolaxon@gmail.com

Information about the authors:

Khamdamov Isakjan M. (Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Probability Theory and Mathematical Statistics of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: khamdamov.isakjan@gmail.com

Chay Zoya S. (Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: чай1526@mail.ru

Sharipova Lola D. (Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: lolaxon@gmail.com

Статья поступила в редакцию 30.12.2021; принята к публикации 03.10.2022

The article was submitted 30.12.2021; accepted for publication 03.10.2022

МЕХАНИКА

MECHANICS

Научная статья

УДК 512.54

doi: 10.17223/19988621/79/5

Исследование динамики области орбитальных резонансов высоких порядков

Евгения Владимировна Блинкова¹,
Татьяна Валентиновна Бордовицына²

^{1,2} *Томский государственный университет, Томск, Россия*

¹ *zbizk322@mail.ru*

² *tvbord@sibmail.com*

Аннотация. Рассматриваются области орбитальных резонансов 1:5, 1:7, 1:9, 1:10 и 1:11 со скоростью вращения Земли. Моделирование движения объектов осуществляется с помощью усовершенствованного программного комплекса «Численная модель движения систем ИСЗ» на кластере «СКИФ Cyberia» Национального исследовательского Томского государственного университета. В процессе моделирования учитываются влияние гармоник геопотенциала до 10-х степени и порядка, притяжение Луны и Солнца. В результате получены карты распределения мультиплетов орбитальных резонансов и карты MEGNO для каждой области. Сравнение полученных карт говорит о том, что хаотизация движения объектов происходит в областях наложения резонансов различных типов.

Ключевые слова: орбитальные резонансы, MEGNO-карта, динамика, хаотизация движения

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 20-32-90095).

Для цитирования: Блинкова Е.В., Бордовицына Т.В. Исследование динамики области орбитальных резонансов высоких порядков // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 79. С. 58–68. doi: 10.17223/19988621/79/5

Original article

Investigation of dynamics of a region with high-order orbital resonances

Evgeniya V. Blinkova¹, Tat'yana V. Bordovitsyna²

^{1,2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ zbizk322@mail.ru

² tvbord@sibmail.com

Abstract. In this paper, the regions of orbital resonances 1:5, 1:7, 1:9, 1:10, and 1:11 at the Earth's rotation speed are considered. The motion of objects is simulated using the improved software package "Numerical Model of the Motion of AES Systems" on the SKIF Cyberia cluster of the National Research Tomsk State University. The modeling is performed with account for the effect of geopotential harmonics up to a degree and order of 10, as well as the attraction of the Moon and Sun. As a result, the maps of the distribution of orbital resonance multiplets and the MEGNO maps have been obtained for each region. All the regions are examined for the presence of real objects. The obtained data show that the chaotization of motion in the regions 1:5, 1:7, and 1:9 occurs due to the superposition of other different resonances on the second component of the orbital resonance. In the regions 1:10 and 1:11, the orbital resonance does not affect the chaotization of motion. All real objects located in the regions under consideration are not exposed to the effect of orbital resonances.

Keywords: orbital resonances, MEGNO-map, dynamics, chaotization of motion

Acknowledgments: This work is financially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 20-32-90095).

For citation: Blinkova, E.V., Bordovitsyna, T.V. (2022) Investigation of dynamics of a region with high-order orbital resonances. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 79. pp. 58–68. doi: 10.17223/19988621/79/5

Введение

Низкая околоземная орбита отличается наличием большого количества орбитальных резонансов высоких порядков. Как было показано в наших предыдущих работах [1, 2], а также в работах других авторов [3–6], орбитальные резонансы существенно влияют на динамику космических объектов. Целями данной работы являются определение положения орбитальных резонансов 1:5, 1:7, 1:9, 1:10, 1:11 со скоростью вращения Земли и выявление характера их влияния на космические аппараты (КА).

Для достижения поставленных целей решены следующие задачи:

- построены карты распределения орбитальных резонансов и соответствующие карты значений быстрой ляпуновской характеристики MEGNO [7];
- нанесены на карты положения реальных объектов, взятых из каталога NORAD [8];
- исследованы особенности динамической эволюции орбит, в том числе с использованием MEGNO-параметра.

Методика исследования

Численное моделирование движения всех объектов, так же как и в работах [1, 2], осуществляется на кластере «СКИФ Cybergia» Томского государственного университета с использованием программного комплекса «Численная модель движения систем ИСЗ» [9], построенного с использованием высокоточного интегратора Гаусса–Эверхарта [10]. В процессе моделирования учитываются возмущения от гармоник геопотенциала до 10-х порядка и степени, а также возмущения от Луны и Солнца.

Совместно с уравнениями движения интегрируются уравнения для вычисления текущего и усредненного параметров MEGNO. Эволюция во времени усредненного параметра MEGNO показывает степень хаотизации движения объекта. Так, известно, что для квазипериодических (регулярных) орбит параметр MEGNO осциллирует около 2, для таких орбит усредненное значение MEGNO всегда стремится к 2, а для устойчивых орбит типа гармонического осциллятора он равен нулю. При значении усредненного параметра MEGNO больше 2 и наличии линейного роста имеет место хаотизация движения, что не позволяет точно прогнозировать эволюцию элементов орбиты.

Методика выявления орбитальных резонансов была описана R. Allan [11, 12] и уточнена Э.Д. Кузнецовым [3]. В результате определено, что орбитальные резонансы имеют пятикомпонентную структуру.

Критические аргументы для орбитальных резонансов записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= u(M + \Omega + \omega) - v\theta, \quad \Phi_2 = u(M + \omega) + v(\Omega - \theta), \quad \Phi_3 = uM + v(\Omega + \omega - \theta), \\ \Phi_4 &= \Phi_1 - v\Omega, \quad \Phi_5 = \Phi_3 + v\Omega - 2v\omega, \end{aligned} \quad (1)$$

а соответствующие им резонансные соотношения в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_1 &= u(\dot{M} + \dot{\Omega} + \dot{\omega}) - v\dot{\theta}, \quad \dot{\Phi}_2 = u(\dot{M} + \dot{\omega}) + v(\dot{\Omega} - \dot{\theta}), \quad \dot{\Phi}_3 = u\dot{M} + v(\dot{\Omega} + \dot{\omega} - \dot{\theta}), \\ \dot{\Phi}_4 &= \dot{\Phi}_1 - v\dot{\Omega}, \quad \dot{\Phi}_5 = \dot{\Phi}_3 + v\dot{\Omega} - 2v\dot{\omega}, \end{aligned} \quad (2)$$

где u и v – целые числа, которые соответствуют порядку резонанса, M , Ω , ω – стандартные обозначения кеплеровых элементов: средняя аномалия, долгота восходящего узла и аргумент перицентра соответственно. θ – звездное время.

В процессе моделирования оценивается близость к нулю резонансных соотношений. Это условие является необходимым для возникновения резонанса, но не достаточным. О наличии резонанса свидетельствует поведение критического аргумента: если он либрирует возле определенного значения, то резонанс является устойчивым, если циркулирует – резонанса нет. О неустойчивом резонансе говорит смена циркуляции и либрации.

После определения структуры резонансов были получены положения реальных объектов, населяющих области исследования, из каталога NORAD. В каталоге координаты всех наблюдаемых объектов представлены в виде двухстрочных TLE-элементов (Two-Line Element set). Строки представляют собой стандартный формат двухстрочного набора орбитальных элементов, идентичный тому, который используется NORAD и NASA. Для перевода их в прямоугольные координаты и скорости была использована модель SGP4 [13]. Данная модель разработана К. Крэнфордом в 1970 г. для околоземных объектов, период которых составляет менее 225 мин.

Численные результаты

Проведен численный эксперимент по исследованию областей орбитальных резонансов 1:5, 1:7, 1:9, 1:10 и 1:11. В таблице представлен диапазон больших полуосей, в которых располагаются интересующие нас резонансы.

Диапазоны резонансных областей по большой полуоси

Тип орбитального резонанса	Диапазон по большой полуоси, км	Тип орбитального резонанса	Диапазон по большой полуоси, км
1:5	14 400–14 480	1:10	9 040–9 150
1:7	11 500–11 570	1:11	8 475–8 600
1:9	9 700–9 800		

Диапазон наклонений для каждой области был выбран от 0 до 180°. Модельные объекты распределены равномерно по исследуемому пространству с шагом 200 м по большой полуоси и 5° по наклонению. Временной интервал прогнозирования составляет 3 года. Этого времени достаточно, чтобы выявить действия резонансов. Орбиты модельных объектов близки к круговым, эксцентриситет равен 0.001.

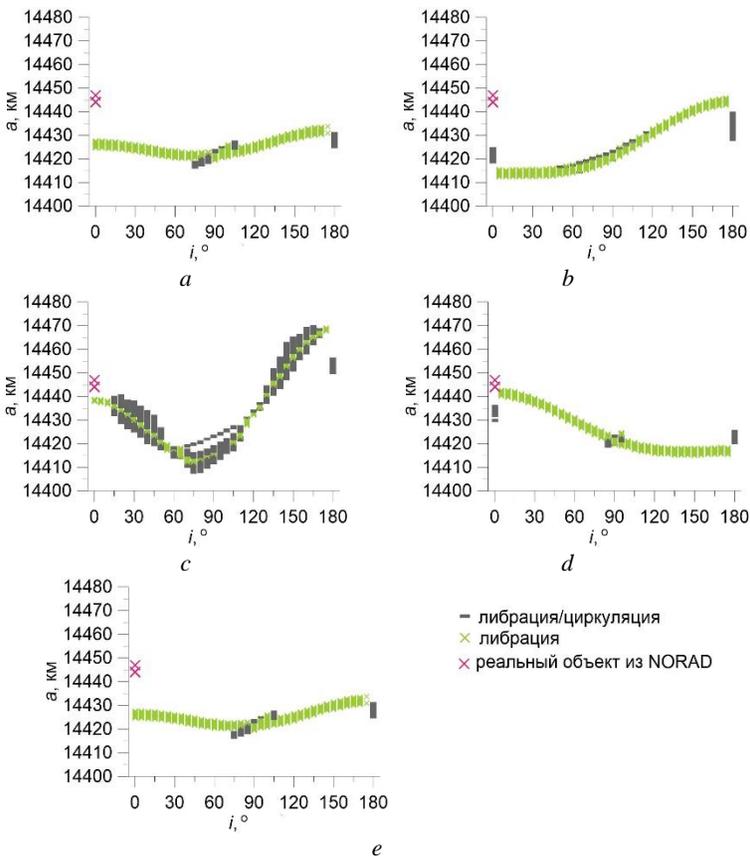


Рис. 1. Карта компонент орбитального резонанса 1:5 (a–e): $\Phi_1-\Phi_5$
 Fig. 1. Map of orbital resonance components 1:5 (a–e): $\Phi_1-\Phi_5$

Первоначально были получены карты пяти компонент орбитального резонанса 1:5 со скоростью вращения Земли (рис. 1). Полосы первой, второй и четвертой компонент расположены в области 14 410–14 445 км по большой полуоси. Третья и пятая компоненты имеют большую площадь покрытия, но в основном это неустойчивые резонансы.

Кроме того, на карту компонент орбитального резонанса были нанесены реальные объекты, взятые из каталога NORAD. В данной области располагается 20 спутников связи группировки ОЗб. Они имеют наклонение, приближенное к 0° , один спутник имеет большую полуось 14 447 км, а остальные 14 444 км. Все КА располагаются выше линий действия орбитального резонанса и не подвержены его влиянию.

На рис. 2 представлено сопоставление орбитальной эволюции объектов, на один из которых не действуют резонансы, а другой, наоборот, подвержен действию резонанса 1:5.

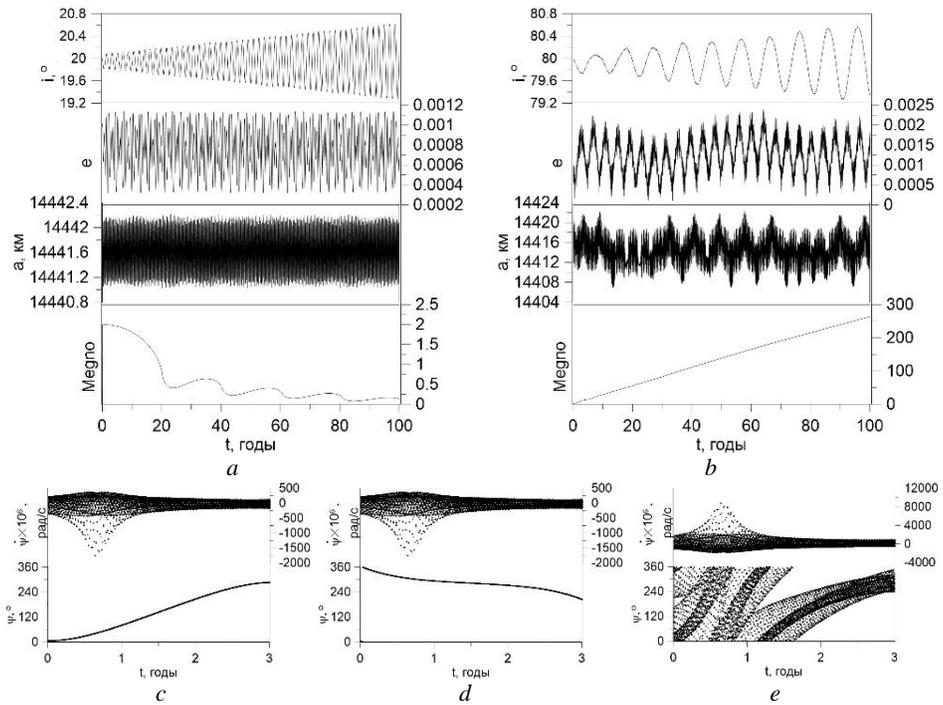


Рис. 2. Эволюция элементов орбиты объекта, на который не действует резонанс (a) и объекта с действующим резонансом (b); характеристики компонент: Φ_1 (c), Φ_2 (d), Φ_5 (e)

Fig. 2. Evolution of orbital elements for the object that (a) is not exposed to a resonance and (b) is exposed to an active resonance; the characteristics of components: (c) Φ_1 , (d) Φ_2 , and (e) Φ_5

Движение объекта *a* устойчиво, об этом свидетельствуют и поведение элементов орбиты, и параметр MEGNO, который стремится к нулю. На объект *b* действуют три компоненты орбитального резонанса 1:5, в том числе одна неустойчивая. Эволюция элементов показывает неустойчивое движение. Это отражается в поведении большой полуоси, и параметр MEGNO быстро растет.

Рассмотрим следующий орбитальный резонанс 1:7 со скоростью вращения Земли. Расположение его компонент представлено на рис. 3.

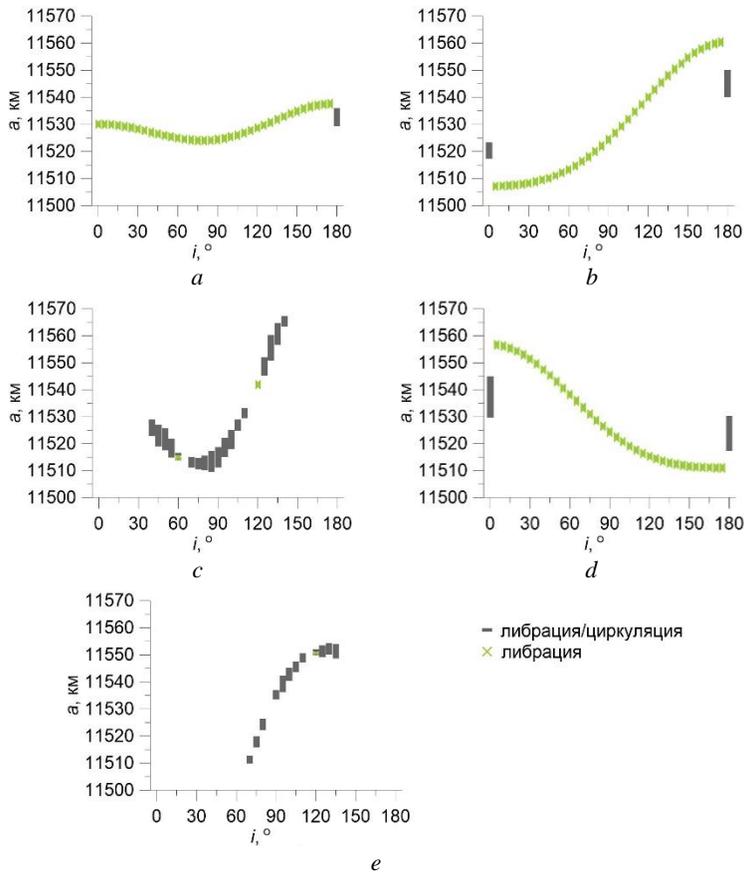


Рис. 3. Карта компонент орбитального резонанса 1:7 (a–e): Φ_1 – Φ_5
Fig. 3. Map of orbital resonance components 1:7 (a–e): Φ_1 – Φ_5

Четкие устойчивые линии действия резонанса имеют только компоненты Φ_1 , Φ_2 и Φ_4 . Они расположены в области от 11 505 км по большой полуоси вверх на 60 км. Размах линий почти в 2 раза больше, чем у предыдущего рассмотренного резонанса. Третья (рис. 3, c) и пятая (рис. 3, e) компоненты в основном неустойчивы и имеют небольшую площадь покрытия по сравнению с соответствующими компонентами орбитального резонанса 1:5 (см. рис. 1, c, e). В данной области не расположено никаких реальных объектов.

Следующий рассмотренный резонанс 1:9 со скоростью вращения Земли (рис. 4). Как и для предыдущих двух областей, первая, вторая и четвертая компоненты устойчивы. Третья и пятая компоненты в этой области практически исчезают. Ширина размаха линий резонанса достигает 80 км, что на 20 км больше, чем у резонанса 1:7. Реальных объектов в данной области нет.

Для того чтобы определить, как орбитальные резонансы могут влиять на гипотетические объекты, которые в будущем могут оказаться внутри зоны действия

этих резонансов, были построены соответствующие MEGNO-карты (рис. 5). Они показывают расположение области хаотизации движения объектов, в которой невозможно прогнозирование неуправляемых КА.

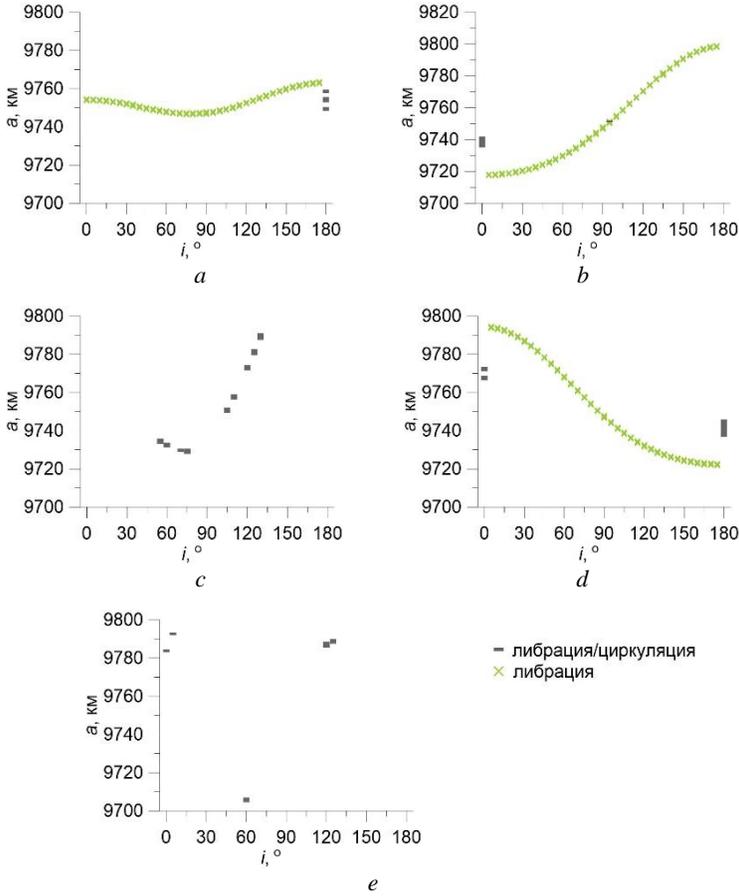


Рис. 4. Карта компонент орбитального резонанса 1:9 (a–e): Φ_1 – Φ_5
 Fig. 4. Map of orbital resonance components 1:9 (a–e): Φ_1 – Φ_5

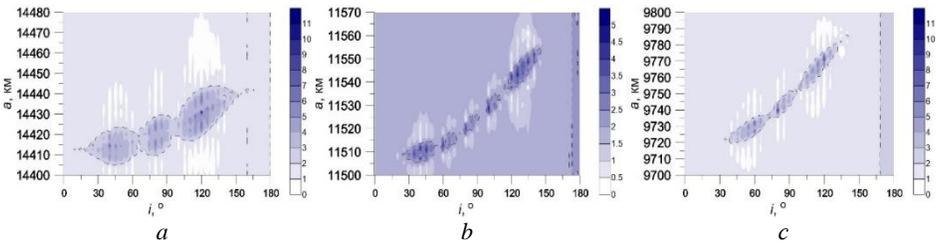


Рис. 5. MEGNO-карта областей орбитального резонанса 1:5 (a), 1:7 (b), 1:9 (c)
 Fig. 5. MEGNO map of orbital resonance regions (a) 1:5, (b) 1:7, and (c) 1:9

Сравнивая рис. 1, 3 и 4 с соответствующими им MEGNO-картами (см. рис. 5) можно сказать, что хаотизация движения происходит по линии действия второй компоненты орбитального резонанса путем наложения на нее других резонансов различных типов.

Следующие две области – 1:10 и 1:11 – имеют похожую картину (рис. 6). Третья и пятая компоненты у резонансов исчезают. Размах компонент у резонанса 1:10 составляет около 110 км, у резонанса 1:11 – около 120 км.

Присутствующие в данных областях реальные объекты не попадают на действующий резонанс. Единственный объект в области резонанса 1:10 является космическим мусором. На рис. 6, *c* видно, что объект расположен в области четвертой компоненты резонанса. Однако анализ показал, что четвертая компонента для этого объекта циркулирует. Это означает отсутствие резонанса.

В области резонанса 1:11 расположено пять спутников Globalstar. Их положение близко к действующему резонансу, но все же они не попадают в область его действия.

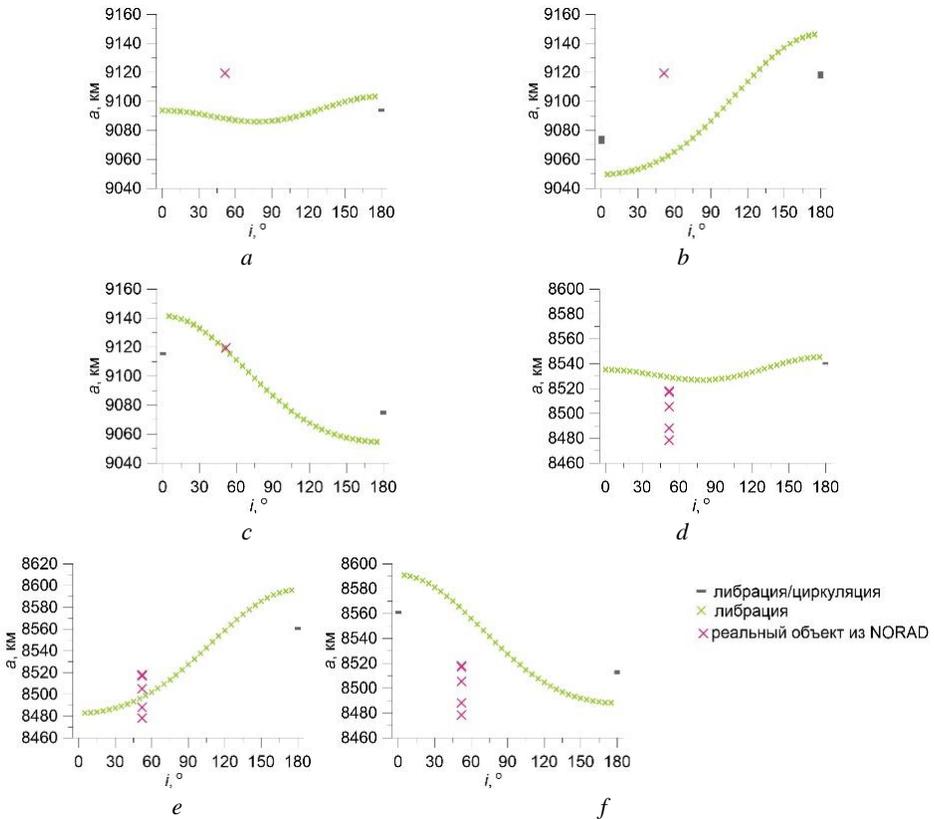


Рис. 6. Карта компонент для орбитального резонанса 1:10: Φ_1 (a), Φ_2 (b), Φ_4 (c), для орбитального резонанса 1:11: Φ_1 (d), Φ_2 (e), Φ_4 (f)

Fig. 6. Map of components for an orbital resonance 1:10: (a) Φ_1 , (b) Φ_2 , and (c) Φ_4 ; and for an orbital resonance 1:11: (d) Φ_1 , (e) Φ_2 , and (f) Φ_4

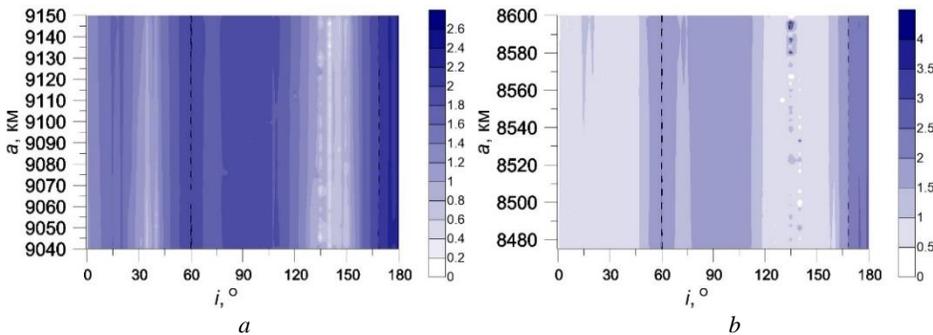


Рис. 7. MEGNO-карта областей орбитальных резонансов 1:10 (a), 1:11 (b)
Fig. 7. MEGNO map of orbital resonance regions (a) 1:10 and (b) 1:11

MEGNO-карта для резонансов 1:10 и 1:11 (рис. 7) отличается от карт резонансов, рассмотренных выше. Орбитальные резонансы здесь не влияют на хаотизацию движения; по всей видимости, в этой области преобладает действие вековых резонансов, которое, как показано в [14], распространяется и на области орбитальных резонансов.

Заключение

Представленные в данной работе результаты по исследованию областей орбитальных резонансов высоких порядков позволяют сделать ряд выводов.

Структуры всех орбитальных резонансов похожи между собой. Четкие устойчивые линии действия резонансов имеют первая, вторая и четвертые компоненты. Третья и пятая в большинстве своем неустойчивы, имеют нечеткую структуру, а для резонансов 1:10 и 1:11 вообще исчезают.

Для орбитальных резонансов 1:5, 1:7 и 1:9 хаотизация движения происходит по линии действия второй компоненты резонанса в результате наложения на нее других компонент резонансов. Для резонансов 1:10 и 1:11 зоны хаотизации не зависят от положения орбитальных резонансов. Они имеют структуру вертикальных полос, что коррелирует с положением вековых резонансов, которые пронизывают орбитальное пространство.

Существуют некоторые реальные объекты, которые находятся в областях резонансов 1:5, 1:10 и 1:11, но ни один из них не попадает под их влияние.

Список источников

1. Томилова И.В., Блинкова Е.В., Бордовицына Т.В. Особенности динамики объектов, движущихся в окрестности резонанса 1:3 с вращением Земли // *Астрономический вестник*. 2019. Т. 53, № 5. С. 323–338.
2. Томилова И.В., Блинкова Е.В., Бордовицына Т.В. Особенности динамики объектов, движущихся в зонах орбитальных резонансов 1:4, 1:6 и 1:8 с вращением Земли // *Астрономический вестник*. 2021. Т. 55, № 5. С. 427–443.
3. Кузнецов Э.Д., Захарова П.Е., Гламазда Д.В., Шагабутдинов А.И., Кудрявцев С.О. О влиянии светового давления на орбитальную эволюцию объектов, движущихся в окрестности резонансов низких порядков // *Астрономический вестник*. 2012. Т. 46, № 6. С. 480–488.

4. *Celletti A., Gales C.* Dynamical investigation of minor resonances for space debris // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2015. V. 123. P. 203–222.
5. *Celletti A., Gales C.* Dynamics of resonances and equilibria of Low Earth Objects // *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. 2018. V. 17. P. 203–235.
6. *Celletti A., Gales C., Lhotka C.* Resonances in the Earth's space environment // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2020. V. 84. P. 105–185.
7. *Cincotta P.M., Girdano C.M., Simo C.* Phase space structure of multi-dimensional systems by means of the mean exponential growth factor of nearby orbits // *Physica. D.* 2003. V. 182. P. 151–178.
8. *Каталог элементов NORAD*. URL: <https://celestrak.org/NORAD/elements/>
9. *Александрова А.Г., Бордовицына Т.В., Чувашов И.Н.* Численное моделирование в задачах динамики околоземных объектов // *Известия вузов. Физика*. 2017. Т. 60. С. 69–76.
10. *Авдюшев В.А.* Интегратор Гаусса–Эверхарта // *Вычислительные технологии*. 2010. Т. 15, № 4. С. 31–47.
11. *Allan R.R.* Resonance effects due to the longitude dependence of the gravitational field of a rotating primary // *Planetary and Space Science*. 1967. V. 15. P. 53–76.
12. *Allan R.R.* Satellites resonance with the longitude dependent gravity. II. Effects involving the eccentricity // *Planetary and Space Science*. 1967. V. 15. P. 1829–1845.
13. *Lane M., Hoots F.* Project Space Track Report No. 2 / Aerospace Defense Command. 1979.
14. *Александрова А.Г., Блинкова Е.В., Бордовицына Т.В., Понандопуло Н.А. Томилова И.В.* Вековые резонансы в динамике объектов, движущихся в областях LEO–MEO околоземного орбитального пространства // *Астрономический вестник*. 2021. Т. 55, № 3. С. 272–287.

References

1. Tomilova I.V., Blinkova E.V., Bordovitsyna T.V. (2019) Features of the dynamics of objects moving in the neighborhood of the 1:3 resonance with the Earth's rotation. *Solar System Research*. 53(5). pp. 307–321. doi: 10.1134/S0038094619050071
2. Tomilova I.V., Blinkova E.V., Bordovitsyna T.V. (2021) Features of the dynamics of objects moving in the zones of orbital resonances 1:4, 1:6, and 1:8 with the Earth's rotation. *Solar System Research*. 55(5). pp. 420–436. doi: 10.1134/S0038094621040092
3. Kuznetsov E.D., Zakharova P.E., Glamazda D.V., Shagabutdinov A.I., Kudryavtsev S.O. (2012) Light pressure effect on the orbital evolution of objects moving in the neighborhood of low-order resonances. *Solar System Research*. 46(6). pp. 442–449. doi: 10.1134/S0038094612050073
4. Celletti A., Gales C. (2015) Dynamical investigation of minor resonances for space debris. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 123. pp. 203–222. doi: 10.1007/s10569-015-9636-1
5. Celletti A., Gales C. (2018) Dynamics of resonances and equilibria of Low Earth Objects. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. 17. pp. 203–235. doi: 10.48550/arXiv.1710.02519
6. Celletti A., Gales C., Lhotka C. (2020) Resonances in the Earth's space environment. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 84. pp. 105–185. doi: 10.1016/j.cnsns.2020.105185
7. Cincotta P.M., Girdano C.M., Simo C. (2003) Phase space structure of multi-dimensional systems by means of the mean exponential growth factor of nearby orbits. *Physica. D.* 182. pp. 151–178. doi: 10.1016/S0167-2789(03)00103-9
8. Catalog of NORAD elements. URL: <https://celestrak.org/NORAD/elements/>
9. Aleksandrova A.G., Bordovitsyna T.V., Chuvashov I.N. (2017) Numerical modeling in problems of near-Earth object dynamics. *Russian Physics Journal*. 60. pp. 80–89. doi: 10.1007/s11182-017-1045-3

10. Avdyushev V.A. (2010) Integrator Gaussa–Everkharta [Gauss–Everhart integrator]. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 15(4). pp. 31–47.
11. Allan R.R. (1967) Resonance effects due to the longitude dependence of the gravitational field of a rotating primary. *Planetary and Space Science*. 15(1). pp. 53–76. doi: 10.1016/0032-0633(67)90067-0
12. Allan R.R. (1967) Satellites resonance with the longitude dependent gravity. II. Effects involving the eccentricity. *Planetary and Space Science*. 15(12). pp. 1829–1845. doi: 10.1016/0032-0633(67)90020-7
13. Lane M., Hoots F. (1979) *Project Space Track Report No. 2*. Aerospace Defense Command.
14. Aleksandrova A.G., Blinkova E.V., Bordovitsyna T.V., Popandopulo N.A. Tomilova I.V. (2021) Secular resonances in the dynamics of objects moving in LEO–MEO regions of near-earth orbital space. *Solar System Research*. 55(3). pp. 266–281. doi: 10.1134/S0038094621030011

Сведения об авторах:

Блиноква Евгения Владимировна – младший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета; аспирант кафедры астрономии и космической геодезии физического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: zbizk322@mail.ru

Бордовицына Татьяна Валентиновна – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета; профессор кафедры астрономии и космической геодезии физического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: tvbord@sibmail.com

Information about the authors:

Blinkova Evgeniya V. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: zbizk322@mail.ru

Bordovitsyna Tat'yana V. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tvbord@sibmail.com

Статья поступила в редакцию 01.06.2022; принята к публикации 03.10.2022

The article was submitted 01.06.2022; accepted for publication 03.10.2022

Научная статья

УДК 532.516.5

doi: 10.17223/19988621/79/6

Определение давления при течении жидкости в плоском клиновидном слое с учетом сил инерции

Павел Викторович Кауров

Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна, Санкт-Петербург, Россия, pismo@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются вопросы ламинарного течения вязкой жидкости в плоском клиновидном слое. Решены обобщенные уравнения Рейнольдса для слоя по методу Слэзкина–Тарга. Предложен метод расчета гидродинамического давления, развиваемого в плоском клиновидном слое, с учетом сил инерции. Приведена зависимость результирующей силы гидродинамического давления от безразмерной величины начального зазора, угла наклона клина и числа Рейнольдса.

Ключевые слова: вязкая жидкость, клиновидный слой, силы инерции, гидродинамическое давление, тонкий зазор

Для цитирования: Кауров П.В. Определение давления при течении жидкости в плоском клиновидном слое с учетом сил инерции // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 79. С. 69–77. doi: 10.17223/19988621/79/6

Original article

Pressure calculation for a fluid flowing in a plane wedge-shaped layer with account for inertial forces

Pavel V. Kaurov

*Saint Petersburg State University of Industrial Technology and Design,
Saint Petersburg, Russian Federation, pismo@mail.ru*

Abstract. The Reynolds equations are solved with account for inertial forces in a plane wedge-shaped layer using the Slezkin-Targ method. The analytical expressions determining the dimensionless longitudinal velocity, hydrodynamic pressure, and total pressure force as functions of the lubricating Reynolds number and dimensionless parameter of the problem are obtained. A new method for solving the Reynolds equations is proposed accounting for inertial forces and avoiding averaging the inertial terms with respect to the gap height. The numerical analysis of the proposed method shows that in the first and second approximations, the deviations for the total hydrodynamic pressure force in a plane wedge-shaped layer differ little from each other in the considered range of the

lubricating Reynolds number for varying dimensionless parameter of the problem, but exceed the deviation obtained using the Slezkin-Targ method. The coincidence of the first approximation with the second one gives ground to believe that the proposed method is more accurate for calculating the total hydrodynamic pressure force in the fluid flow occurring in a plane wedge-shaped layer.

Keywords: viscous fluid, wedge-shaped layer, inertial forces, hydrodynamic pressure, thin gap

For citation: Kaurov, P.V. (2022) Pressure calculation for a fluid flowing in a plane wedge-shaped layer with account for inertial forces. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 79. pp. 69–77. doi: 10.17223/19988621/79/6

Введение

Для математического описания ламинарного течения несжимаемой вязкой жидкости в тонком зазоре, как известно [1–3], применяются уравнения Рейнольдса, называемые теорией смазки.

Библиографические обзоры публикаций, посвященных учету инерции при расчете параметров течения смазочного слоя, приведены в [4, 5], из них следует, что для решения уравнений Рейнольдса с учетом инерции преимущественно используется метод Слэзкина–Тарга.

Вопросы учета сил инерции при решении уравнений Рейнольдса для расчета течения смазочной жидкости в подшипнике скольжения также освещены в публикациях [6–9]. В работах [10–12] проводился гидродинамический расчет с учетом инерции по методу Слэзкина–Тарга.

В публикациях [4–11] отмечается существенное влияние инерции на получаемые расчетом результаты, особенно на несущую способность тонкого слоя.

В работах [13, 14] изучалась гидродинамическая модель клиновидной опоры скольжения, но без учета инерции смазочного слоя.

Таким образом, уточнение широко используемого метода Слэзкина–Тарга – актуальная задача, и получение решения системы уравнений Рейнольдса с учетом инерции для плоского клиновидного слоя является целью данной работы.

Постановка задачи: уравнения Рейнольдса

Для жидкости в плоском клиновидном слое (рис. 1) система уравнений Рейнольдса с учетом сил инерции в прямоугольной системе координат в безразмерной форме имеет вид [1–3]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \text{Re} \frac{dp}{dx} + \text{Re} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$
(1)

где (штрихом обозначены размерные величины) u' и v' – проекции скорости жидкости на горизонтальную x' и вертикальную y' координатные оси соответственно; $u = u'/U'$ – безразмерная продольная скорость жидкости; U' – скорость подвижной границы зазора; $v = v'/U'$ – безразмерная поперечная скорость жидкости; $x = x'/L'$ – относительная продольная координата; L' – длина зазора; $y = y'/L'$ – относительная поперечная координата; $Re = U'L'/\nu'$ – число Рейнольдса; ν' – кинематический коэффициент вязкости; p' – гидродинамическое давление; $p = p'/(\rho U'^2)$ – безразмерное гидродинамическое давление; ρ' – плотность жидкости.

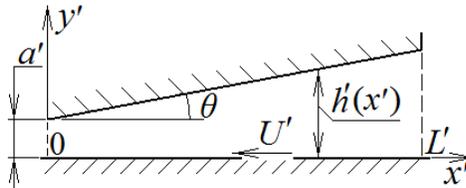


Рис. 1. Схема плоского клиновидного слоя
Fig. 1. Schematic representation of a wedge-shaped layer

Безразмерная форма зазора для клиновидного слоя (см. рис. 1) имеет вид:

$$h(x) = h'/L' = a(1 + Zx), \quad (2)$$

где a – безразмерная величина начального зазора, $a = a'/L'$; Z – безразмерный параметр задачи, $Z = \text{tg}(\theta)/a$; θ – угол наклона клина.

Граничные условия для безразмерных скоростей и давления имеют вид:

$$u(x, 0) = -1, \quad u(x, h(x)) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad v(x, h(x)) = 0, \quad p(0) = 0, \quad p(1) = 0. \quad (3)$$

Решение системы уравнений Рейнольдса (1) без учета сил инерции для плоского клиновидного слоя, зазор в котором изменяется согласно формуле (2), полученное при использовании граничных условий (3), имеет вид:

безразмерное гидродинамическое давление:

$$p_0(x) = \frac{6Zx(1-x)}{Re_a(2+Z)(1+Zx)^2},$$

где Re_a – смазочное число Рейнольдса, $Re_a = Re a^2$;

безразмерная продольная скорость:

$$u_0 = Re_a \frac{dp_0}{dx} \frac{(1+Zx)^2}{2} \left[\frac{y^2}{h^2(x)} - \frac{y}{h(x)} \right] + \frac{y}{h(x)} - 1;$$

безразмерная результирующая сила гидродинамического давления:

$$P_0 = \int_0^1 p_0 dx = \frac{6[(2+Z)\ln(1+Z) - 2Z]}{Re_a Z^2(2+Z)}.$$

Решение уравнений Рейнольдса методом Слэзкина–Тарга

По методу Слэзкина–Тарга [1] вместо проекции действительного ускорения на горизонтальную ось x вводится его осредненное по высоте слоя значение, равное

$$W = \frac{1}{h(x)} \int_0^{h(x)} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy. \quad (4)$$

Решение уравнений (1) и (4) с использованием граничных условий (3) для плоского клиновидного слоя в данной работе получено в виде:

безразмерная продольная скорость:

$$u_w = u_0 + \text{Re}W \left[\frac{y^2}{h^2(x)} - \frac{y}{h(x)} \right],$$

$$W = \frac{1}{h(x)} \frac{d}{dx} \int_0^{h(x)} u_0^2 dy = \frac{f_1 + Zx f_2 + (Zx)^2 f_3}{15 [(2+Z)(1+Zx)]^2},$$

$$f_1 = 20 + 35Z + 17Z^2, \quad f_2 = 10 + 7Z + Z^2, \quad f_3 = 8 + 8Z + 2Z^2;$$

безразмерное гидродинамическое давление: $p_w(x) = p_0(x) + p_{w0}(x)$,

$$P_{w0} = \frac{Z^3 x \ln(1+Z)}{7.5(2+Z)(1+Zx)^2} \left(x + \frac{2+2x}{Z} + \frac{4+x}{Z^2} + \frac{2}{Z^3} \right) - \frac{\ln(1+Zx)}{7.5(2+Z)(1+Zx)^2} (Z^3 x^2 + 2Z^2 x^2 + 2Z^3 x + 4Zx + Z + 2);$$

безразмерная результирующая сила давления: $P_w = P_0 + P_{w0}$,

$$P_{w0} = \int_0^1 p_{w0} dx = \frac{2Z + Z^2 - (2Z + 2) \ln(1+Z)}{7.5Z(2+Z)}.$$

Для оценки влияния инерционных членов, получаемого решением системы уравнений Рейнольдса с учетом сил инерции по методу Слэзкина–Тарга, представим выражение для результирующей силы гидродинамического давления в виде: $P_w = P_0[1 + (P_{w0}/P_0)] = P_0(1 + \Delta_{P,w})$, где величина относительного отклонения $\Delta_{P,w}$ от линейного решения уравнений Рейнольдса без учета сил инерции для результирующей силы имеет вид: $\Delta_{P,w} = k_w(Z)\text{Re}_a$.

Зависимость величины $\Delta_{P,w}$ от смазочного числа Рейнольдса Re_a при разных значениях параметра Z графически показана ниже.

Решение уравнений Рейнольдса с учетом сил инерции по предлагаемому методу

В предлагаемом методе в качестве нулевого приближения используются результаты решения уравнений Рейнольдса без учета сил инерции, т.е. выражения для u_0 и p_0 , полученные ранее.

Для первого приближения с учетом сил инерции решается уравнение Рейнольдса, записанное в виде:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = \text{Re} \frac{dp_1}{dx} + \text{Re} A_0, \quad (5)$$

где выражение для A_0 , полученное с использованием уравнения неразрывности, имеет вид:

$$A_0 = u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u_0}{\partial x} dy. \quad (6)$$

Решение уравнений (5) и (6) с использованием граничных условий (3), будет иметь вид:

безразмерная продольная скорость:

$$u_1 = \operatorname{Re} \left[\frac{dp_1}{dx} \frac{(y^2 - h(x)y)}{2} + u_{A0} \right] + \frac{y}{h(x)} - 1,$$

$$u_{A0} = \iint A_0 dy dy - \frac{y}{h(x)} \iint A_0 dy dy \Big|_{h(x)}; \quad (7)$$

безразмерное гидродинамическое давление: $p_1(x) = p_0(x) + p_{01}(x)$,

$$p_{01} = 12 \left[I_{01}(x) + f_p(x) I_{01}(1) \right],$$

$$I_{01} = \int_0^x \left[\frac{1}{h^3(x)} \int_0^{h(x)} u_{A0} dy \right] dx, \quad (8)$$

$$f_p(x) = \frac{x(2 + Zx)(1 + Z)^2}{(1 + Zx)^2(2 + Z)};$$

безразмерная результирующая сила:

$$P_1 = P_0 + P_{01}, \quad P_{01} = \int_0^1 p_{01} dx. \quad (9)$$

Для оценки влияния инерционных членов в первом приближении запишем выражение для результирующей силы гидродинамического давления в виде: $P_1 = P_0[1 + (P_{01}/P_0)] = P_0(1 + \Delta_{P,1})$, где величина относительного отклонения $\Delta_{P,1}$ от линейного решения уравнений Рейнольдса без учета сил инерции для результирующей силы гидродинамического давления, имеет вид: $\Delta_{P,1} = k_{P,1}(Z) \operatorname{Re}_a$.

Зависимость величины $\Delta_{P,1}$ от смазочного числа Рейнольдса Re_a при различных значениях безразмерного параметра задачи Z показана на рис. 2 линией 2 с серыми кружками.

После вычисления первого приближения аналогичным образом производится второе приближение, т.е. решаются уравнения

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \operatorname{Re} \frac{dp_2}{dx} + \operatorname{Re} A_1,$$

$$A_1 = u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u_1}{\partial x} dy. \quad (10)$$

Решение во втором приближении будет иметь вид:

безразмерная продольная скорость:

$$u_2 = \operatorname{Re} \left[\frac{dp_2}{dx} \frac{(y^2 - h(x)y)}{2} + u_{A1} \right] + \frac{y}{h(x)} - 1,$$

$$u_{A1} = \iint A_1 dy dy - \frac{y}{h(x)} \iint A_1 dy dy \Big|_{h(x)}; \quad (11)$$

безразмерное гидродинамическое давление: $p_2(x) = p_0(x) + p_{02}(x)$,

$$p_{02} = 12 \left[I_{02}(x) + f_p(x) I_{02}(1) \right],$$

$$I_{02} = \int_0^x \left[\frac{1}{h^3(x)} \int_0^{h(x)} u_{A1} dy \right] dx; \quad (12)$$

безразмерная результирующая сила:

$$P_2 = P_0 + P_{02}, \quad P_{02} = \int_0^1 p_{02} dx. \quad (13)$$

При вычислении интегралов в формулах (6)–(13) использовался метод трапеций на равномерной сетке с шагом в 0.01.

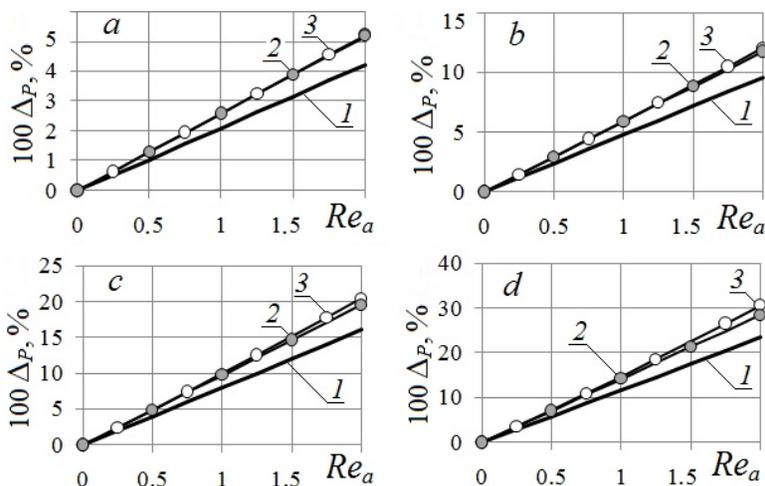


Рис. 2. Зависимость относительного отклонения ΔP от смазочного числа Рейнольдса Re_a при значениях безразмерного параметра задачи: $Z = 0.4$ (a), $Z = 0.8$ (b), $Z = 1.2$ (c), $Z = 1.6$ (d); 1 – $\Delta_{P,w}$, 2 – $\Delta_{P,1}$, 3 – $\Delta_{P,2}$

Fig. 2. Relative deviation ΔP as a function of the lubricating Reynolds number Re_a at dimensionless parameters of the problem: $Z =$ (a) 0.4, (b) 0.8, (c) 1.2, and (d) 1.6; 1 – $\Delta_{P,w}$, 2 – $\Delta_{P,1}$, and 3 – $\Delta_{P,2}$

Для оценки влияния инерционных членов во втором приближении запишем выражение для результирующей силы гидродинамического давления в виде: $P_2 = P_0[1 + (P_{02}/P_0)] = P_0(1 + \Delta_{P,2})$, где величина относительного отклонения $\Delta_{P,2}$ во втором приближении имеет вид: $\Delta_{P,2} = k_{P,1}(Z)Re_a + k_{P,2}(Z)Re_a^2 + k_{P,3}(Z)Re_a^3$.

Зависимость величины относительного отклонения $\Delta_{P,2}$ от смазочного числа Рейнольдса Re_a при различных значениях безразмерного параметра задачи Z показана на рис. 2 линией 3 с белыми кружками.

Заключение

Решены уравнения Рейнольдса с учетом сил инерции для плоского клиновидного слоя по методу Слэзкина–Тарга относительно безразмерных величин: продольной скорости, гидродинамического давления и результирующей силы давления, в результате чего получены аналитические выражения для их определения в зависимости от смазочного числа Рейнольдса Re_a и безразмерного параметра задачи Z .

Предложен новый способ решения уравнений Рейнольдса с учетом сил инерции без осреднения инерционных членов по высоте зазора, результаты по которому достигаются расчетом путем простого численного интегрирования.

Проведенный численный анализ предлагаемого метода показал, что величины отклонений для результирующей силы гидродинамического давления в плоском клиновидном слое в первом и во втором приближениях, во-первых, мало отличаются друг от друга на рассматриваемом интервале изменения смазочного числа Рейнольдса Re_a при различных значениях безразмерного параметра задачи Z и, во-вторых, превышают величину отклонения, полученную по методу Слэзкина–Тарга при $Re_a > 0.5$.

Таким образом, совпадение первого приближения со вторым дает основание считать, что предлагаемый метод является более точным для расчетного определения результирующей силы гидродинамического давления при течении жидкости в плоском клиновидном слое.

Список источников

1. Слэзкин *Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М. : ГИТТЛ, 1955. 521 с.
2. *Pozrikidis C.* Fluid Dynamics. Theory, Computation, and Numerical Simulation. 3th ed. New York : Springer, 2017. 912 p. doi: 10.1007/978-1-4899-7991-9
3. *Huterr K., Wang Y.* Fluid and Thermodynamics. New York : Springer, 2016. V. 1: Basic Fluid Mechanics. 652 p. doi: 10.1007/978-3-319-33633-6
4. *Deng X., Watson C.* Lubricant Inertia in Water Lubricated Bearings // Proceedings of the 29th Symposium on Fluid Machinery. 2017. P. 1–8. doi: 10.1115/FEDSM2017-69110
5. *Javorova J.G.* On the method of averaged inertia at hydrodynamic lubrication with fluid inertia effects: a review // Вестник Северо-Казахстанского Университета им. М. Козыбаева. Сер. Технические науки. 2017. Т. 3, № 36. С. 5–10.
6. *Singh U.P.* Effects of surface roughness and supply inertia on steady performance of hydrostatic thrust bearings lubricated with non-newtonian fluids // Journal of Mechanical Engineering. 2021. V. 71 (2). P. 317–328. doi: 10.2478/scjme-2021-0038.
7. *Ghosh K.C., Mazumder S.K.* Steady State Performance Characteristics of Isoviscous Finite Flexible Oil Journal Bearings Including Fluid Inertia Effect // International Journal of Engineering Research & Technology. 2017. V. 6 (7). P. 318–326. doi: 10.17577/IJERTV6IS070223
8. *Tieshu F., Sina H.* The effect of lubricant inertia on fluid cavitation for high-speed squeeze film dampers // Journal of Vibroengineering. 2017. V. 19 (8). P. 6122–6134. doi: 10.21595/jve.2017.19314
9. *Sina H., Kamran B.* A Study of Lubricant Inertia Effects for Squeeze Film Dampers Incorporated into High-Speed Turbomachinery // Lubricants. 2017. V. 5 (4). P. 1–29. doi: 10.3390/lubricants5040043
10. *Singh U.P., Sinha P.* Analysis of hydrostatic rough thrust bearing lubricated with Rabinowitsch fluid considering fluid inertia in supply region // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology. 2020. V. 235 (2). P. 386–395. doi: 10.1177/1350650120945887
11. *Walicka A., Jurczak P.* Influence of total inertia effects in a thrust curvilinear bearing lubricated with Newtonian Lubricants // Int. J. of Applied Mechanics and Engineering. 2017. V. 22 (4). P. 1045–1058. doi: 10.1515/ijame-2017-0067
12. *Борисевич В.Д., Потанин Е.П.* Использование преобразования Дородницына для анализа тепло- и массопереноса во вращающихся потоках // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85, № 6. С. 758–771. doi: 10.31857/S0032823521060035
13. *Ахвердиев К.С., Болгова Е.А.* Гидродинамический расчет клиновидной системы «ползун–направляющая», работающей на сжимаемом смазочном материале в условиях наличия расплава на поверхности направляющей // Омский научный вестник. 2021. Т. 2, № 176. С. 10–14. doi: 10.25206/1813-8225-2021-176-10-14

14. Мукутадзе М.А., Хасьянова Д.У. Гидродинамическая модель клиновидной опоры скольжения с легкоплавким металлическим покрытием // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2020. № 4. С. 51–58. doi: 10.31857/S0235711920040100

References

1. Slyozkin N.A. (1955) *Dinamika вязкой несжимаемой жидкости* [Viscous incompressible fluid dynamics]. Moscow: GITTL.
2. Pozrikidis C. (2017) *Fluid Dynamics. Theory, Computation, and Numerical Simulation, 3th ed.* New York: Springer. doi: 10.1007/978-1-4899-7991-9
3. Hutterer K., Wang Y. (2016) *Fluid and Thermodynamics, Volume 1: Basic Fluid Mechanics.* New York: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-33633-6
4. Deng X., Watson C. (2017) Lubricant inertia in water lubricated bearings. *Proceedings of the 29th Symposium on Fluid Machinery.* pp. 1–8. doi: 10.1115/FEDSM2017-69110
5. Javorova J.G. (2017) On the method of averaged inertia at hydrodynamic lubrication with fluid inertia effects: a review. *Vestnik of the North Kazakhstan University named after M. Kozhayev. Engineering Sciences.* 3(36). pp. 5–10.
6. Singh U.P. (2021) Effects of surface roughness and supply inertia on steady performance of hydrostatic thrust bearings lubricated with non-Newtonian fluids. *Journal of Mechanical Engineering.* 71(2). pp. 317–328. doi: 10.2478/scjme-2021-0038
7. Ghosh K.C., Mazumder S.K. (2017) Steady state performance characteristics of isoviscous finite flexible oil journal bearings including fluid inertia effect. *International Journal of Engineering Research & Technology.* 6(7). pp. 318–326. doi: 10.17577/IJERTV6IS070223
8. Tieshu F., Sina H. (2017) The effect of lubricant inertia on fluid cavitation for high-speed squeeze film dampers. *Journal of Vibroengineering.* 19(8). pp. 6122–6134. doi: 10.21595/jve.2017.19314
9. Sina H., Kamran B. (2017) A study of lubricant inertia effects for squeeze film dampers incorporated into high-speed turbomachinery. *Lubricants.* 5(4). pp. 1–29. doi: 10.3390/lubricants5040043
10. Singh U.P., Sinha P. (2020) Analysis of hydrostatic rough thrust bearing lubricated with Rabinowitsch fluid considering fluid inertia in supply region. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology.* 235(2). pp. 386–395. doi: 10.1177/1350650120945887
11. Walicka A., Jurczak P. (2017) Influence of total inertia effects in a thrust curvilinear bearing lubricated with Newtonian lubricants. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering.* 22(4). pp. 1045–1058. doi: 10.1515/ijame-2017-0067
12. Borisevich V.D., Potanin E.P. (2021) Ispol'zovanie preobrazovaniya Dorodnitsyna dlya analiza teplo- i massoperenosa vo vrashchayushchikhsya potokakh [Application of the Dorodnitsyn transformation for analysis of heat and mass transfer in rotating flows]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Applied Mathematics and Mechanics.* 85(6). pp. 758–771. doi: 10.31857/S0032823521060035
13. Akhverdiev K.S., Bolgova E.A. (2021) Gidrodinamicheskiy raschet klinovidnoy sistemy «polzun–napravlyayushchaya», rabotayushchey na szhimaemom smazochnom materiale v usloviyakh nalichiya rasplava na poverkhnosti napravlyayushchey [Hydrodynamic calculation of wedge-shaped system «slider-guide» operating on compressible lubricant in presence of melt on surface of guide]. *Omskiy nauchnyy vestnik – Omsk Scientific Bulletin.* 2(176). pp. 10–14. doi: 10.25206/1813-8225-2021-176-10-14
14. Mukutadze M.A., Khas'yanova D.U. (2020) Gidrodinamicheskaya model' klinovidnoy opory skol'zheniya s legkoplavkim metallicheskim pokrytiem [Hydrodynamic model of a wedge-shaped sliding support with an easy-melting metal coating]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin – Journal of Machinery Manufacture and Reliability.* 4. pp. 51–58. doi: 10.31857/S0235711920040100

Сведения об авторе:

Кауров Павел Викторович – кандидат технических наук, доцент кафедры основ конструирования машин Высшей школы технологии и энергетики Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: pucmo@mail.ru

Information about the author:

Kaurov Pavel V. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Saint Petersburg State University of Industrial Technology and Design, Saint Petersburg, Russian Federation). E-mail: pucmo@mail.ru

Статья поступила в редакцию 11.11.2021; принята к публикации 03.10.2022

The article was submitted 11.11.2021; accepted for publication 03.10.2022

Научная статья

УДК 533.6:622.4

doi: 10.17223/19988621/79/7

Моделирование вентиляции угольных шахт с учетом выработанных пространств

Григорий Александрович Колегов¹, Алексей Юрьевич Крайнов²

^{1, 2} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ zergferr@gmail.com

² akrainov@ftf.tsu.ru

Аннотация. Выработанные пространства угольных шахт являются важным элементом шахтных вентиляционных сетей. В статье представлены результаты расчетов аэродинамики проветривания выработанных пространств с использованием разработанного метода включения выработанных пространств угольных шахт в математические модели шахтных вентиляционных систем посредством представления пористой среды сетью фиктивных ветвей, учитывающих свойства элементарных репрезентативных объемов. Аэродинамические параметры фиктивных ветвей вычисляются с использованием квадратичных сопротивлений, соблюдая законы Кирхгофа. Используется адаптированная формула Эргуна для расчета сопротивлений ветвей выработанных пространств. Разработанный метод задания аэродинамического сопротивления выработанного пространства был применен для оценки градиентов давления в выбранном выработанном пространстве шахты «Распадская». Проведено моделирование различных сценариев изменения аэродинамических параметров вентиляционной системы с оценкой распределения избыточных давлений в выработанном пространстве.

Ключевые слова: вентиляция, вентиляционная сеть, математическая модель, выработанное пространство, аэродинамическое сопротивление

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 21-71-10034.

Для цитирования: Колегов Г.А., Крайнов А.Ю. Моделирование вентиляции угольных шахт с учетом выработанных пространств // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 79. С. 78–88. doi: 10.17223/19988621/79/7

Original article

Simulation of the coal mine ventilation with account for gob areas

Grigoriy A. Kolegov¹, Aleksey Yu. Krainov²

^{1,2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ zergferr@gmail.com

² akrainov@ff.tsu.ru

Abstract. Mine ventilation network models are widely used in underground coal mining in Russia. The models cover a variety of practical problems ranging from simple air distribution in active mine workings to changes in the static air pressure gradient associated with complex technological or hazardous processes occurring in mines. Isolated gob areas are integral parts of ventilation networks in coal mines. The most commonly used underground coal extraction technology in Russia is the longwall mining. A gob forms when a coal seam is extracted, and the upper layers of the rock cave in. Gobs are isolated from active mine entries with seals, but there is always air leakages from active faces inducing the air circulation in isolated areas. Gobs join different coal seams and often become the sources of underground fires. Therefore, the inclusion of gobs in mine ventilation network models would help contain accidents and eliminate the caused damage. The study uses the method of representative elementary volumes to incorporate a porous medium into mine ventilation network models. Quadratic resistances are assigned to the edges of the model, where Kirchhoff's laws are valid. The aerodynamic resistances of the gob edges are calculated using the Ergun equation. The proposed method has been used to evaluate pressure gradients in the gob area of the Rapsadskaya mine. Several scenarios of the aerodynamic resistance variation in the active mine workings surrounding the gob area, such as partial flooding and drilling of boreholes from the surface, have been simulated, and the corresponding changes in pressure gradients have been analyzed.

Keywords: ventilation, mine ventilation network, mathematical model, gob, aerodynamic resistance

Acknowledgments: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 21-71-10034).

For citation: Kolegov, G.A., Krainov, A.Yu. (2022) Simulation of the coal mine ventilation with account for gob areas. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 79. pp. 78–88. doi: 10.17223/19988621/79/7

Введение

Математическое моделирование является неотъемлемой частью современных производственных процессов. Моделирование шахтовой вентиляции позволяет организовать проветривание рабочих участков угольных шахт, дегазацию рудничной атмосферы, решает задачи обеспечения объектов проветривания требуемыми расходами воздуха, разработки планов ликвидации аварий. От качества моделей зависит эффективность мероприятий, разрабатываемых на их основе. В настоящее время выработанные обрушенные пространства угольных шахт не учитываются в моделях шахтной вентиляционной сети (ШВС). Однако разрабо-

танные пространства угольных шахт являются постоянными источниками метана, и учет их в некоторых ситуациях организации добычи угля критически важен.

Настоящая работа посвящена теме применения метода включения выработанных пространств в модели шахтных вентиляционных систем. Выработанные пространства представляют собой пористые среды, проветриваемые в основном в фильтрационном режиме. В работах [1–3] проводится моделирование выработанных пространств методами вычислительной гидродинамики, и постулируется неверность применения квадратичных сопротивлений для описания свойств этих сред. Тем не менее единственным применяющимся в инженерной практике инструментом моделирования ШВС являются программные комплексы, в частности наиболее распространенный на предприятиях угледобычи «Вентиляция 2» [4]. Сеть выработок шахты и вентиляционные системы представляются связными графами, в которых соблюдаются законы сетей (нулевая сумма входящих в узел и исходящих из него объемных расходов и нулевая сумма депрессий замкнутого контура), а также закон сохранения энергии (суммарная потеря энергии в контуре равна поступающей энергии источников).

При этом депрессия i -й ветви в контуре определяется в соответствии с выражением

$$h_i = R_i Q_i^2, \quad (1)$$

где Q_i – объемный расход в ветви i , м³/с; R_i – аэродинамическое сопротивление ветви i , н·с²/м⁸; h_i – перепад давления (депрессия) в ветви i , Па.

В работе [5] используется формула Эргуна для определения аэродинамического сопротивления в обрушенном выработанном пространстве. В [5] оценивается влияние ламинарной и турбулентной составляющих при определении аэродинамического сопротивления, делается вывод о возможности расчета удельных сопротивлений ветвей в виде:

$$R_{уд} = \frac{28\rho(1-\varepsilon)}{\pi^2 d_s^5 \varepsilon^3} \quad (2)$$

где ρ – плотность газа, кг/м³, ε – пористость среды, дол. ед., d_s – эквивалентный диаметр структурных элементов среды выработанного обрушенного пространства, м, $R_{уд}$ – удельное сопротивление ветви на 1 м, н·с²/м⁹.

В [5] дано описание метода учета аэродинамических параметров выработанных пространств в моделях ШВС, представлены результаты верификации этого подхода с использованием перепадов давлений на изолирующих выемочный участок перемычках в качестве контрольных параметров.

Настоящая работа посвящена применению метода [5] к включению выработанных пространств угольных шахт в математические модели ШВС и анализу результатов решения практических задач рудничной аэродинамики.

Учет изменения распределения пористости в выработанном обрушенном пространстве

В [5] представлено распределение пористостей и давлений в выработанном пространстве лавы 5а-7-34 шахты «Распадская» (рис. 1, 2). Пористость изменялась от 0.6 до 0.2 по направлению от очистного забоя к монтажной камере, а эквивалентный диаметр структурных элементов варьировал соответственно от 2.5

до 2 м. Выработанное пространство формируется при движении очистного забоя от монтажной камеры возле фланговых уклонов блока 5 (левая часть рисунков) к уклонам блока 4 (правая часть), на рисунках приведена горизонтальная проекция выработок шахты. Ширина выемочного столба составляет 305 м, а длина зоны выработанного пространства (расстояние монтажной камеры до очистного забоя) составляет 1 664 м.

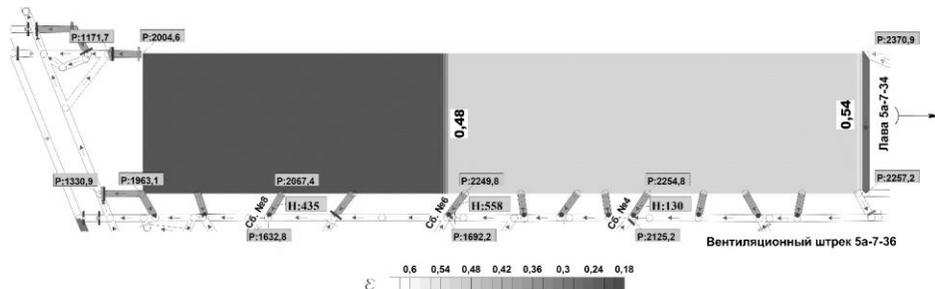


Рис. 1. Распределение пористости вдоль выемочного столба
 Fig. 1. Porosity distribution in a gob

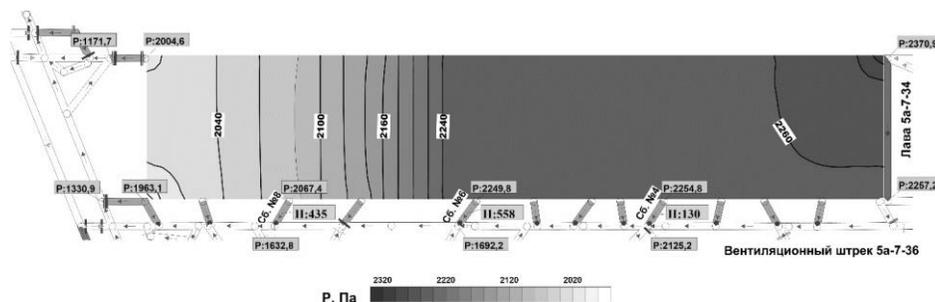


Рис. 2. Распределение избыточных давлений вдоль выемочного столба
 Fig. 2. Excess pressure distribution in a gob

В работе [1] приведено распределение коэффициента проницаемости в выработанном пространстве выемочного столба, полученное на основании моделирования геомеханических процессов. Используя уравнение Кармана–Козени [6] для расчета коэффициента проницаемости разрыхленных пород с учетом их постепенного уплотнения, вычислим распределение пористости по длине выемочного столба:

$$K = \frac{K_0}{0,241} \left(\frac{\varepsilon^3}{(1-\varepsilon)^2} \right), \quad (3)$$

где K – коэффициент проницаемости, Д, K_0 – коэффициент проницаемости обрушенных и уплотненных пород, Д. Приняв максимальный коэффициент проницаемости в [1] за проницаемость уплотненных пород, полагаем $K_0 = 1\ 000$. В табл. 1 приведены значения коэффициентов проницаемости, принятых в соответствии с [1], и соответствующие им значения пористости.

Значения коэффициентов проницаемости и соответствующая им пористость

Коэффициент проницаемости, Д	Пористость, дол. ед.
100	0.24
170	0.28
240	0.30
310	0.32
380	0.34
450	0.36
520	0.37
590	0.38
660	0.39
730	0.40
800	0.41

На рис. 3 представлено распределение пористости в выработанном обрушенном пространстве, рассчитанное по данным [1] с использованием формулы (3). Эквивалентные диаметры структурных элементов принимались в соответствии с [5].

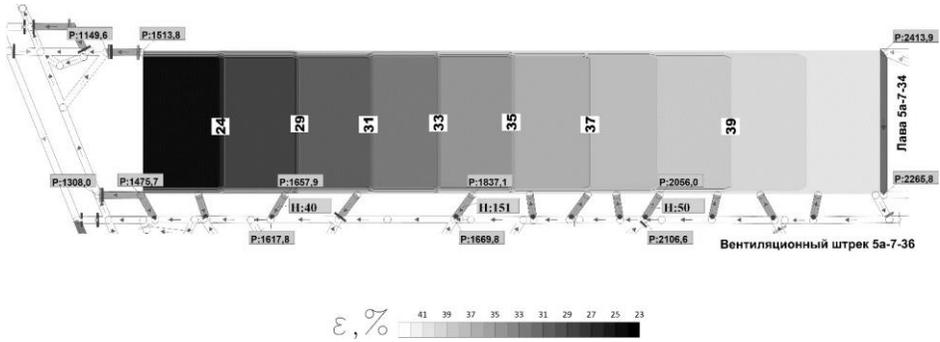


Рис. 3. Распределение пористости вдоль выемочного столба на основании геомеханического моделирования
 Fig. 3. Geomechanical model-based gob porosity distribution

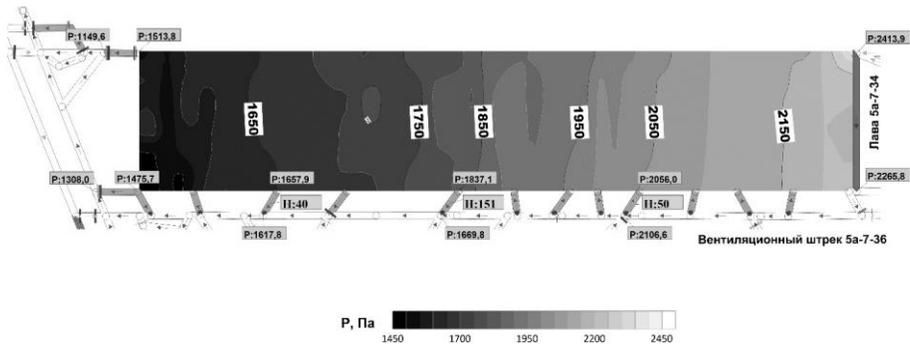


Рис. 4. Распределение избыточных давлений при расчете пористости на основании геомеханического моделирования
 Fig. 4. Excess pressure distribution in a gob corresponding to a geomechanical model-based porosity distribution

По выражению (2) были вычислены удельные аэродинамические сопротивления ветвей выработанного пространства. С использованием метода [5] и программы «Вентиляция 2» [4], полагая расход воздуха в вентиляционном штреке 5а-7-34 перед сопряжением с лавой равным $50.5 \text{ м}^3/\text{с}$ и сопротивления действующих выработок известными, было рассчитано распределение давления в выработанном обрушенном пространстве, представленное на рис. 4. Будем этот вариант проветривания называть «штатным».

Расчетное распределение давлений, представленное на рис. 4, соответствует распределению давления в пределах выемочного участка, полученного авторами в [1].

Моделирование сценариев изменений в ШВС

1. Увеличение аэродинамического сопротивления сквозной выработки в результате ее подтопления

Рассмотрим вариант увеличения сопротивления ветви вентиляционного штрека 5а-7-36 до $1 \text{ н} \cdot \text{с}^2/\text{м}^8$, что соответствует уменьшению свободного поперечного сечения до 1.3 м^2 . Подобная ситуация может возникнуть в результате обрушения либо затопления части выработки, повторяющей чашеобразное залегание пласта (мульдовой части), при неисправности насосных установок и переполнении водосборника. На рис. 5 продемонстрировано расположение частично подтопленного участка относительно выемочного столба 5а-7-34. На рис. 6 показано привносимое в модель дополнительное сопротивление в виде перемычки в ветви № 6246.

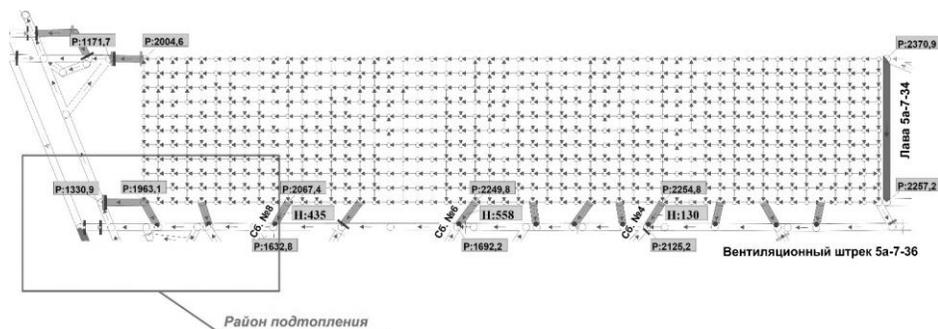


Рис. 5. Расположение участка подтопления

Fig. 5. Partially flooded area location

Данный сценарий частично имитирует ход аварии, произошедшей на шахте «Распадская» 10 мая 2018 г, когда произошло возгорание метана в очистном забое 5а-7-32. После снятия электроэнергии с аварийного участка была нарушена работа участков водотлифов по лаве 5а-7-32(2), в результате чего произошло частичное подтопление вентиляционного штрека 5а-7-34 между сбойками № 6 и № 9. Вычисление распределения градиента избыточного давления в выработанном пространстве и действующих выработках требовалось для разработки рациональных мероприятий по организации проветривания аварийного участка.

В моделируемом варианте распределение избыточных давлений в выработанном пространстве выемочного столба 5а-7-34, установившееся после подтопления

мульдовой части вентиляционного штрека 5а-7-36, приведено на рис. 7. Избыточное давление в действующих выработках в моделируемой ситуации изменяется с 3 166 до 307 Па, при этом в выработанном пространстве выемочного столба избыточное давление варьирует от 3 147 до 285 даПа. Как видно из рис. 7, возрастает абсолютное значение избыточного давления в выработанном пространстве, при этом распределение падений давления вдоль выемочного столба остается неизменным. Распределение перепадов давлений и утечек через изоляционные перемычки в сбойках, отделяющих выработанное пространство от действующих выработок, приведено в табл. 2.

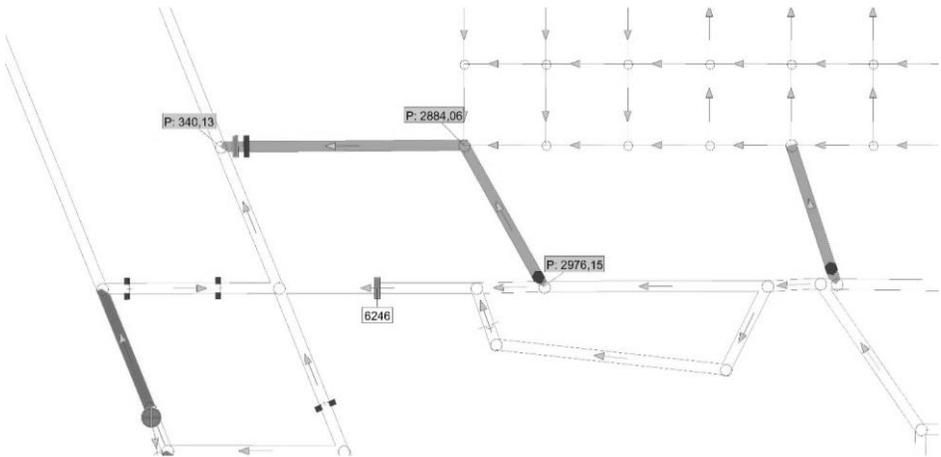


Рис. 6. Моделирование изменения сопротивления в действующей выработке
Fig. 6. Modeling of the resistance variation in an active airway

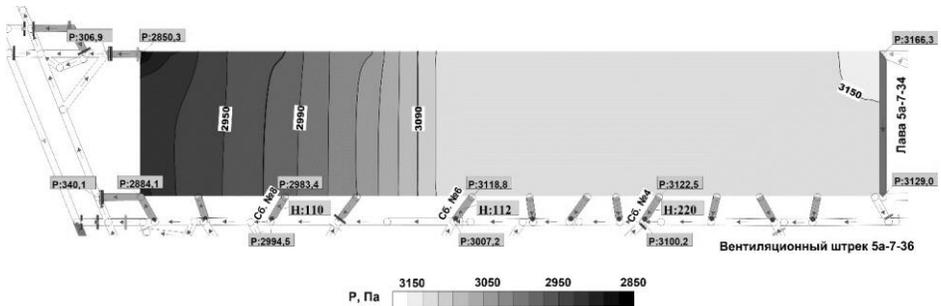


Рис. 7. Распределение давления в изолированном пространстве выемочного столба после подтопления вентиляционного штрека 5а-7-36
Fig. 7. Pressure distribution in an insulated gob after partial flooding of a ventilation entry 5а-7-36

Результаты моделирования показывают, что максимальное избыточное давление в выработанном пространстве лавы 5а-7-34 в результате частичного подтопления вентиляционного штрека 5а-7-36 возрастет на 39%, при этом перепады давления по длине столба снизятся на 68%. Утечка через перемычку в сбойке № 8 изменит свое направление, утечки через остальные перемычки снизятся на 80%, что позволяет говорить о вероятности изменения направления всех утечек при

увеличении зоны подтопления, и это в сочетании со снижающимся количеством воздуха, поступающего для проветривания выемочного участка, может быть условием формирования взрывоопасных метановоздушных концентраций в изолированных пространствах.

Таблица 2

Распределение перепадов давлений и расходов на изоляционных перемычках, обконтуривающих выемочный столб после подтопления части вентиляционного штрека 5а-7-36

Название	Расход, м ³ /с	Депрессия, Па	Изменение относительно «штатного» варианта, Па	Изменение относительно «штатного» варианта, %
Сбойка № 4	0.10	22	108	83%
Сбойка № 6	0.23	112	446	80%
Сбойка № 8	-0.07	11	446	103%

Такое предположение формируется исходя из факта активного поступления кислорода из действующих выработок через сбойки, в которых утечки изменили свои направления, а также из-за потери возможности контроля состава атмосферы в выработанном пространстве, поскольку на датчиках системы станций контроля параметров атмосферы (СКПА) начинает отображаться состав рудничного воздуха в действующем контуре. Полученная модель ШВС, включающая в себя выработанное пространство, может быть использована для разработки мероприятий по снижению вентиляционных напоров в действующих выработках до значений, позволяющих контролировать состав атмосферы в выработанном пространстве посредством утечек через изоляционные перемычки в сбойках.

2. Учет аэродинамической связи с атмосферой через контрольно-профилактические скважины

Рассмотрим вариант возникновения аэродинамической связи с поверхностью через контрольно-профилактические скважины, пробуренные в выработанное пространство лавы 5а-7-34. Расположение скважин представлено на рис. 8.

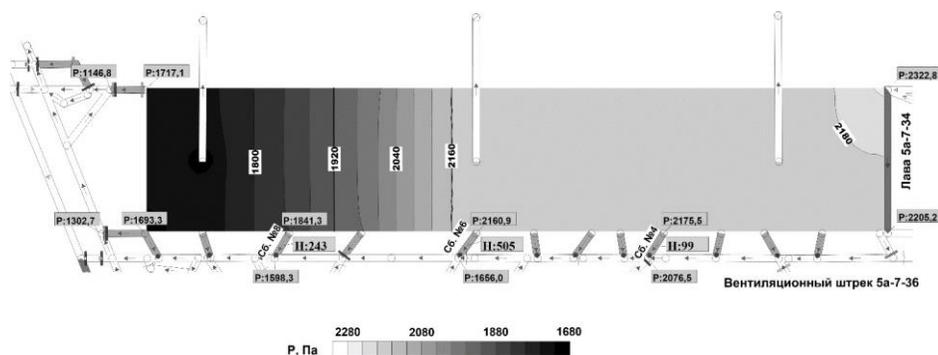


Рис. 8. Распределение давления в изолированном пространстве выемочного столба 5а-7-34 после пробуривания трех контрольно-профилактических скважин
Fig. 8. Pressure distribution in an insulated gob 5а-7-34 after three control boreholes drilling

Для скважин диаметром 0.5 м были рассчитаны суммарные сопротивления на основании справочных удельных значений, учитываемых в комплексе «Вентиляция 2». На рис. 8 приведено распределение избыточных давлений, устанавливающихся в выработанном пространстве лавы 5а-7-34 после добавления в модель «штатного» варианта трех контрольно-профилактических скважин.

В рассматриваемом варианте избыточное давление в действующих выработках, оконтуривающих выемочный столб, уменьшилось и стало изменяться в пределах от 2 323 до 1 147 Па. Избыточное давление внутри изолированного выработанного пространства изменяется в пределах от 2 260 до 1 693 Па, что на 359 Па, или на 39%, меньше значений давлений в «штатном». Распределение перепадов давлений и утечек через изоляционные перемычки в сбоях, отделяющих выработанное пространство от действующих выработок, приведено в табл. 3.

Таблица 3

Распределение перепадов давлений и расходов на изоляционных перемычках, оконтуривающих выемочный столб после пробуривания контрольно-профилактических скважин в выработанное пространство

Название	Расход, м ³ /с	Депрессия, Па	Изменение относительно «штатного» варианта, Па	Изменение относительно «штатного» варианта, %
Сбойка № 4	0.21	99	31	24%
Сбойка № 6	0.48	505	53	9%
Сбойка № 8	0.33	243	192	44%

Из анализа результатов расчетов можно сделать вывод, что наличие связи с атмосферой незначительно снижает избыточные давления внутри выработанного пространства с характеристикой пористости 0.5. Проведенные расчеты показали, что обустройство скважин в выработанное пространство с пористостью 0.2 снижает избыточное давление на 40%. Этот результат позволяет предполагать, что при известных характеристиках формирования выработанного пространства возможно моделирование оптимального расположения скважин. Другим возможным применением может быть моделирование связей с выработками выше- и нижележащих пластов с целью регулирования избыточных давлений в выработанных обрушенных пространствах.

Заключение

Выполненные расчеты вариантов изменения вентиляционной сети, предполагавшие подтопление части действующей выработки в непосредственной близости от изолированного пространства, бурение контрольно-профилактических скважин, продемонстрировали соответствующие увеличения и снижения избыточных давлений в выработанном пространстве при сохранении направления градиента, определяемого распределением пористости вдоль выемочного столба.

Разработанный метод учета выработанных пространств в моделях шахтных вентиляционных систем при расчете проветривания угольных шахт можно использовать для моделирования возможных причин фактического изменения направлений и значений перепадов давлений на перемычках, изолирующих выработанное пространство. Показано, что распределение пористости в выработанном

обрушенном пространстве возможно определять с использованием геомеханического моделирования, позволяющего определить коэффициенты проницаемости.

Список источников

1. Говорухин Ю.М., Фрянов В.Н., Палеев Д.Ю. Численное моделирование взаимодействующих геомеханических и аэродинамических процессов на выемочном участке // Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. 2019. Вып. 2. С. 288–299.
2. Домрачев А.Н., Криволапов В.Г., Палеев Д.Ю., Балаганский М.Ю. Методология моделирования фильтрации газозвудушных смесей в выработанном пространстве // Вестник научного центра по безопасности работ в угольной промышленности. 2011 № 1. С. 72–76.
3. Палеев Д.Ю., Балаганский М.Ю., Кнышенко А.Н. О численном методе решения стационарной задачи проветривания горных выработок и выработанного пространства шахты // Вестник Научного центра по безопасности работ в угольной промышленности. 2010. № 1. С. 31–34.
4. Палеев Д.Ю., Лукашов О.Ю. Программа расчета вентиляционных режимов в шахтах и рудниках // Горная промышленность. 2007. № 6. С. 20–23.
5. Колегов Г.А., Крайнов А.Ю. Метод учета аэродинамических пространств в моделях шахтных вентиляционных систем // Уголь. 2021 № 7. С. 33–38
6. Говорухин Ю.М. Разработка метода оценки параметров воздухо-распределения для снижения скорости окислительных процессов в выработанном пространстве угольных шахт : автореф. дис. ... канд. техн. наук. Кемерово, 2012. 21 с

References

1. Govorukhin Yu.M., Fryanov V.N., Paleev D.Yu. (2019) Chislennoe modelirovanie vzaimodeystvuyushchikh geomekhanicheskikh i aerodinamicheskikh protsessov na vyemochnom uchastke [Numerical modeling of geomechanical and aerodynamical interacting processes in longwall panel]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Nauki o Zemle. – News of the Tula State University. Sciences of Earth.* 2. pp. 288–299.
2. Domrachev A.N., Krivolapov V.G., Paleev D.Yu., Balaganskiy M.Yu. (2011) Metodologiya modelirovaniya fil'tratsii gazovozdushnykh smesey v vyrabotannom prostranstve vyemochnogo uchastka [Modeling methods of air-gas mixtures filtration in the gob area of a coal extraction section]. *Vestnik Nauchnogo tsentra po bezopasnosti rabot v ugol'noy promyshlennosti – Industrial Safety.* 1. pp. 72–76.
3. Paleev D.Yu., Balaganskiy M.Yu., Knyshenko A.N. (2010) O chislennom metode resheniya statsionarnoy zadachi provetrivaniya gornyx vyrabotok i vyrabotannogo prostranstva shakhty [About numerical method of mine gob and working area ventilation stationary problem solution]. *Vestnik Nauchnogo tsentra po bezopasnosti rabot v ugol'noy promyshlennosti – Industrial Safety.* 1. pp. 31–34.
4. Paleev D.Yu., Lukashov O.Yu. (2007) Programma rascheta ventilyatsionnykh rezhimov v shakhtakh i rudnikakh [Program for calculation of mine ventilation conditions]. *Gornaya promyshlennost' – Russian Mining Industry.* 6. pp. 20–23.
5. Kolegov G.A., Krainov A.Yu. (2021) Metod ucheta aerodinamicheskikh prostranstv v modelyakh shakhtnykh ventilyatsionnykh sistem [Method to account for aerodynamic parameters of mined-out spaces in models of mine ventilation systems]. *Ugol' – Russian Coal Journal.* 7. pp. 33–38. doi: 10.18796/0041-5790-2021-7-33-38
6. Govorukhin Yu.M. (2012) *Razrabotka metoda otsenki parametrov vozdukhoraspredeleniya dlya snizheniya skorosti okislitel'nykh protsessov v vyrabotannom prostranstve ugol'nykh shakht* [Development of a method for estimating air distribution parameters to reduce the oxidization rate in a gob of coal mines]. Extended abstract of dissertation, Kemerovo.

Сведения об авторах:

Колегов Григорий Александрович – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: zergferr@gmail.com

Крайнов Алексей Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

Information about the authors:

Kolegov Grigoriy A. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: zergferr@gmail.com

Krainov Aleksey Yu. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 23.06.2022; принята к публикации 03.10.2022

The article was submitted 23.06.2022; accepted for publication 03.10.2022

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/79/8

Моделирование напряженного состояния в преградах из анизотропных материалов

Марина Николаевна Кривошеина

*Институт физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН,
Томский государственный университет, Томск, Россия, marina@ispms.ru*

Аннотация. Приведены результаты численного моделирования в трехмерной постановке процесса деформирования преграды из ГПУ-монокристалла при ее ударном нагружении. Материал преграды характеризуется анизотропией упругих и пластических свойств. Приведены результаты моделирования напряжения с учетом анизотропии холодной и тепловой частей давления. Анизотропия девиатора напряжений в области упругих деформаций моделируется с помощью обобщенного закона Гука, в области пластических деформаций – с использованием функции пластичности Мизеса–Хилла (1948). В области пластических деформаций анизотропия холодной части давления определяется с помощью учета анизотропии упругих свойств, а тепловой части давления – за счет учета анизотропии коэффициента Грюнайзена. Сравниваются профили скоростей тыльных поверхностей преград из монокристаллического цинка при их откольном разрушении, полученные в натуральных экспериментах и численно, по предложенной модели. Показано, что в случае совпадения направления ударного нагружения с осью [0001] в монокристаллическом цинке на профиле скорости тыльной поверхности преграды отсутствует выход упругого предвестника в численном расчете, как и в натурном эксперименте.

Ключевые слова: коэффициент Грюнайзена, анизотропия свойств, уравнение состояния, монокристалл, динамическое нагружение

Благодарности: Работа выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН, тема номер FWRW-2021-0011.

Для цитирования: Кривошеина М.Н. Моделирование напряженного состояния в преградах из анизотропных материалов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 79. С. 89–99. doi: 10.17223/19988621/79/8

Simulation of the stress state in barriers made of anisotropic materials

Marina N. Krivosheina

*Institute of Strength Physics and Materials Science
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, marina@ispms.ru*

Abstract. To study the properties of anisotropic materials, a mathematical model is proposed that accounts for the anisotropy of elastic and plastic properties, as well as the anisotropy of “thermal” and “cold” components of pressure. The model is applied in a three-dimensional simulation of the deformation of an HCP-single-crystal barrier under impact loading by an aluminum impactor. The numerical simulation results are obtained using the dynamic finite element method with a difference scheme modified to account for the anisotropy of “cold” and “thermal” pressure components. To simulate the anisotropy of the stress deviator in the region of elastic deformations, generalized Hooke's law is used, while in the region of plastic deformations, the Mises-Hill plasticity function (Hill48) is used with account for the anisotropy of elastic properties and anisotropy of the Grüneisen coefficient. The experimentally and numerically obtained velocity profiles of the back surfaces of single-crystal zinc barriers during the spall fracture are compared with each other. When the impact loading direction coincides with [0001] axis, the elastic precursor is not observed on the velocity profile calculated numerically, which is the same for the one derived experimentally. This effect may be explained only with the use of anisotropic pressure.

Keywords: Grüneisen coefficient, anisotropy of properties, equation of state, single crystal, dynamic loading

Acknowledgments: The work is carried out within the framework of the State Assignment of the ISPMS SB RAS (project No. FWRW-2021-0011).

For citation: Krivosheina, M.N. (2022) Simulation of the stress state in barriers made of anisotropic materials. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 79. pp. 89–99. doi: 10.17223/19988621/79/8

Введение

Исследование упругопластических и прочностных свойств анизотропных материалов сопряжено с преодолением ряда сложностей. В случае исследования свойств в субмикросекундном диапазоне важную роль играют зависимости величин всех регистрируемых скоростей распространения волн (упругих, пластических) от направления [1–3]. Сложной задачей является определение связи зарегистрированных в натуральных экспериментах профилей скоростей распространения волн как интегральных характеристик напряженного состояния материала преграды и механических характеристик анизотропных материалов. При распространении волн в области упругих деформаций связь скоростей распространения волн с упругими постоянными анизотропных материалов однозначна. В области

пластических деформаций нелинейность зависимости давления от степени сжатия, а также от направления приводит к необходимости создания новых математических моделей, позволяющих устанавливать связи механических характеристик анизотропных материалов. Создание новых математических моделей, пригодных для численного моделирования процессов деформирования материалов, характеризующихся анизотропией различных механических свойств, является актуальной задачей. Такие математические модели логично адаптировать для апробации в новых численных методиках. Для апробации таких математических моделей удобно рассматривать процессы деформирования и разрушения в монокристаллах, характеризующихся существенной анизотропией упругих, пластических и прочностных свойств, например в цинке, обладающем трансверсальной анизотропией упругих свойств и заметной анизотропией пластических и прочностных свойств, в частности откольной прочности.

В натуральных экспериментах, проводимых для исследования упругих, пластических и прочностных свойств монокристалла цинка, авторами серии работ [1–3] наблюдались эффекты, делающие невозможным определение динамического предела текучести независимо от скорости ударного нагружения преграды из монокристаллического цинка в направлении [0001]. В рамках математических моделей, в которых равномерной объемной деформации соответствует шаровая часть тензора напряжений (давление), эти эффекты невозможно объяснить. Но возможно объяснить при использовании математической модели, в которой объемной деформации соответствует давление, зависящее от направления. В области упругих деформаций сжатия в качестве свойства материала, характеризующего величину анизотропии возникающего напряжения, можно использовать величину, обратную линейной сжимаемости – модуль линейного сжатия. В области пластических деформаций напряжение, соответствующее объемной деформации, зависит не только от степени сжатия материала, но и от процессов, описываемых тепловой частью давления. Из-за анизотропии механических свойств монокристаллического цинка появляется необходимость учета анизотропии линейной сжимаемости и коэффициентов Грюнайзена в уравнениях состояния при определении напряжений в каждом из направлений трех расчетных осей координат. Часть давления, называемая холодной, определяется с использованием различных значений линейных характеристик сжимаемостей в зависимости от направления. По мере роста уровня напряжений возрастает роль тепловой части напряжения, определяемой с помощью коэффициентов Грюнайзена. Коэффициенты Грюнайзена также имеют некоторую анизотропию для ряда материалов. В частности, у монокристаллического цинка минимальные значения холодной и тепловой частей напряжения совпадают в направлении оси шестого порядка [4, 5].

С помощью коэффициентов Грюнайзена определяют тепловую часть давления, которое обусловлено тепловыми колебательными движениями атомов около узлов кристаллической решетки и пропорционально плотности энергии этих колебаний [6]. Особый интерес представляют функции Грюнайзена для анизотропных материалов, ауссетиков, а также материалов, имеющих в некоторых температурных диапазонах отрицательные значения модулей линейного либо всестороннего температурного расширения. С ростом температуры вклад тепловой части давления растет и может сравняться с холодной частью давления и даже превзойти ее [5]. Применение математической модели, позволяющей учитывать

анизотропию холодной и тепловой частей давления для определения напряженного состояния преград, будет полезным в случаях, когда максимальные и минимальные значения коэффициентов Грюнайзена и модулей линейного сжатия совпадают по направлениям. В работе методом конечных элементов в трехмерной постановке проведены исследования напряженного состояния преграды из монокристалла цинка в условиях ударного нагружения с учетом анизотропии упругих, пластических свойств и анизотропии коэффициента Грюнайзена. Цель работы – исследование влияния учета анизотропии в холодной и тепловой частях давления на скорость тыльной поверхности преграды при численном моделировании процесса ударного нагружения преграды из анизотропного материала.

Анизотропия коэффициентов Грюнайзена

Величины коэффициента Грюнайзена вдоль и перпендикулярно оси шестого порядка для материалов, характеризующихся трансверсальной изотропией упругих свойств, определяются по формулам [4, 5]

$$\gamma_{\parallel} = \frac{V}{C_p} [C_{33}\alpha_{\parallel} + 2C_{13}\alpha_{\perp}], \quad (1)$$

$$\gamma_{\perp} = \frac{V}{C_p} [(C_{11} + C_{12})\alpha_{\perp} + C_{13}\alpha_{\parallel}], \quad (2)$$

где γ_{\parallel} , γ_{\perp} – коэффициенты Грюнайзена, α_{\parallel} , α_{\perp} – коэффициенты теплового расширения вдоль и перпендикулярно оси шестого порядка, C_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, V – объем, C_{ij} – коэффициенты матрицы упругих постоянных [4].

Существует зависимость величин коэффициентов Грюнайзена от температуры. Для монокристаллического цинка при температуре ниже 120 К $\gamma_{\perp} < \gamma_{\parallel}$ и $\alpha_{\perp} < \alpha_{\parallel}$, при температуре 120 К $\gamma_{\perp} = \gamma_{\parallel}$, а при температуре выше 120 К $\gamma_{\perp} > \gamma_{\parallel}$. При температуре Дебая для цинка (300 К) сохраняется значительная анизотропия значений коэффициентов теплового расширения: $\alpha_{\perp} = 13.2 \cdot 10^{-6}$ град $^{-1}$, $\alpha_{\parallel} = 63.5 \cdot 10^{-6}$ град $^{-1}$. Значения коэффициентов Грюнайзена для монокристалла цинка в этих направлениях составляют: $\gamma_{\perp} = 2.15$, $\gamma_{\parallel} = 1.9$ [5].

Анизотропия линейной сжимаемости

При моделировании процесса упругих деформаций используется обобщенный закон Гука, записанный в полных напряжениях и деформациях. При моделировании упругопластических деформаций для определения границы перехода необходимо обеспечить разложение тензора полных напряжений на части, соответствующие изменению объема и изменению формы. Тензор полных напряжений в случае упругих деформаций раскладывается на части, соответствующие девиаторной и сферической частям тензора полных деформаций, т.е. на девиаторную часть и анизотропное давление [7]:

$$\sigma_{ij} = S_{ij} - P_{ij}, \quad (3)$$

где S_{ij} – компоненты девиаторов напряжений; P_{ij} – анизотропное давление.

В области упругих деформаций

$$S_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}, \text{ где } i, j, k, l = 1, 2, 3. \quad (4)$$

$$P_{ij} = P_e \lambda_{ij}, \quad (5)$$

$$\lambda_{ij} = C_{ijkl} \delta_{kl} / 3K_\alpha, \quad (6)$$

$$K_\alpha = C_{ijkl} \delta_{ij} \delta_{kl} / 9, \quad (7)$$

$$P_e = \varepsilon_V C_{ijkl} \delta_{ij} \delta_{kl} / 3. \quad (8)$$

Здесь K_α – модуль объемного сжатия; δ_{kl} – символ Кронекера; e_{kl} – компоненты девиатора деформаций; C_{ijkl} – компоненты тензора упругих постоянных 4-го ранга, ε_V – объемные деформации. В области упругих деформаций $\varepsilon_V = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$. Сумма обобщенных символов Кронекера λ_{ij} всегда равна трем, поэтому $P_{11} + P_{22} + P_{33} = 3P_e$.

Применение обобщенных символов Кронекера позволяет вычислять анизотропное давление, этот прием эквивалентен использованию в направлении каждой расчетной оси координат величину, обратную линейной сжимаемости [8, 9]. Моделирование упругих деформаций с использованием разложения тензора полных напряжений (3) эквивалентно вычислениям в полных напряжениях.

В области пластических деформаций используется разложение тензора полных напряжений в виде (3). Для определения изотропной величины давления всестороннего сжатия P_e используется уравнение состояния в форме Ми-Грюнайзена, в котором суммируются холодная и тепловая части:

$$P_e = \sum_{n=1}^3 K_n \left(\frac{V}{V_0} - 1 \right)^n \left[1 - \frac{K_0 \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right)}{2} \right] + K_0 \rho E. \quad (9)$$

Здесь K_1, K_2, K_3 – характеристики материала, K_0 – коэффициент Грюнайзена, E – энергия упругой деформации, ρ – плотность, $\varepsilon_V = \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right)$, где V, V_0 – текущий и начальный объемы.

Для обеспечения непрерывности функции давления при переходе от упругих деформаций к пластическим полагалось, что анизотропия холодной части давления в области пластических деформаций совпадает с анизотропией давления в области упругих деформаций; величина тепловой части давления при переходе от упругой деформации к пластической мала и ею можно пренебречь. Учет анизотропии тепловой части давления происходит за счет замены K_0 на $\gamma_{||}$ и γ_{\perp} .

Постановка задачи ударного нагружения преграды из анизотропного материала

На рис. 1 представлена постановка задачи для численного моделирования ударного нагружения изотропным алюминиевым ударником D_1 преграды из монокристалла цинка D_2 , которая соответствует граничным условиям в натуральных экспериментах [3]. Дискретизация объемных конфигураций ударника (D_1) и преграды (D_2) выполнена с помощью тетраэдров, количество тетраэдров в ударнике 25 920, в преграде – 227 430.

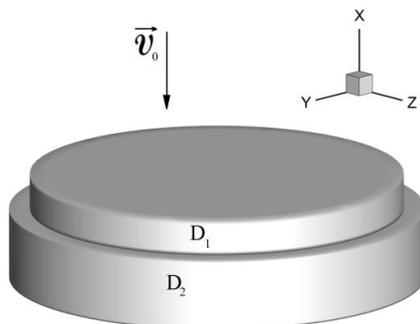


Рис. 1. Начальная конфигурация ударника и преграды
Fig. 1. Initial configuration of the impactor and barrier

При численном моделировании процесса ударного нагружения преграды используются компоненты матрицы упругих постоянных монокристалла цинка из [10]. Их значения: $C_{11} = 61\,042$ МПа, $C_{22} = C_{33} = 161\,018$ МПа, $C_{12} = 49\,988$ МПа, $C_{23} = 34\,129$ МПа, $C_{66} = 38\,292$ МПа.

Для моделирования процессов деформации в анизотропных материалах используется система уравнений, описывающая нестационарные адиабатные движения сжимаемой анизотропной среды: уравнение неразрывности, уравнения движения сплошной среды и уравнение энергии [11].

Цинк характеризуется минимальными значениями коэффициента Грюнайзена и величины, обратной линейной сжимаемости в направлении оси шестого порядка, а в плоскости изотропии – максимальными. В области пластических деформаций значения тепловой части давления определяются отдельно с учетом анизотропии коэффициентов Грюнайзена. Величина анизотропного давления вдоль каждой расчетной оси состоит из суммы холодной и тепловой частей давления.

Анизотропия девиатора напряжений в области пластических деформаций моделируется с использованием функции пластичности Мизеса–Хилла 1948 г. После выполнения условия выхода на эллипсоид текучести компоненты девиатора полных напряжений вычисляются по теории пластического течения с изотропным упрочнением [11]. Моделируется процесс упругопластического деформирования и разрушения [12].

Упругопластическое деформирование изотропного материала ударника проводилось с использованием модели Прандтля–Рейсса [12]. Напряжения, определенные в конечных элементах ударника или преграды, жестко повернутых в пространстве, пересчитываются с помощью производной Яуманна [12, 13]. В расче-

тах, как и в натуральных экспериментах, начальная скорость алюминиевого ударника составляет 650 м/с, толщина ударника – 0.85 мм, толщина преграды из монокристалла цинка – 1.7 мм [1].

Результаты

Использование изотропного давления, вычисленного с помощью величины модуля объемного сжатия, приводит к отсутствию анизотропии в величинах скоростей распространения пластических волн в анизотропных материалах в любых направлениях. Вычисление анизотропного давления на основе модулей линейного сжатия позволяет получить различные скорости распространения объемных волн в зависимости от направления благодаря замене в формуле для определения скорости распространения волны величины модуля объемного сжатия на величину, обратную линейной сжимаемости в направлении оси симметрии цинка. Использование анизотропного давления позволило вычислить близкие значения скоростей распространения продольной и объемной волн в направлении $[0001]$ – 2 742 и 2 923 м/с. В натуральных экспериментах столь близкие значения не позволяют выявить отличия во времени выхода упругой и пластической волн сжатия на тыльную поверхность преграды [1–3]. На рис. 2 показаны полученные в натуральных экспериментах профили скоростей волн сжатия, вышедших на тыльные поверхности преграды, для случаев нагружения, совпадающих с направлениями $[0001]$ или $[10\bar{1}0]$ монокристалла цинка. Регистрация скоростей распространения волн начинается с момента их выхода на тыльную поверхность преграды. В направлении $[0001]$ скорость распространения упругой продольной волны выше скорости распространения объемной волны сжатия на 181 м/с, и столь малое отличие не позволяет наблюдать выход упругого предвестника отдельно от пластической волны сжатия. В направлении $[10\bar{1}0]$ скорость распространения упругой продольной волны превышает скорость распространения упругой объемной волны на 1 367 м/с. На кривой $(10\bar{1}0)$ отчетливо виден выход упругого предвестника и более поздний выход пластической волны сжатия со скоростью объемной волны.

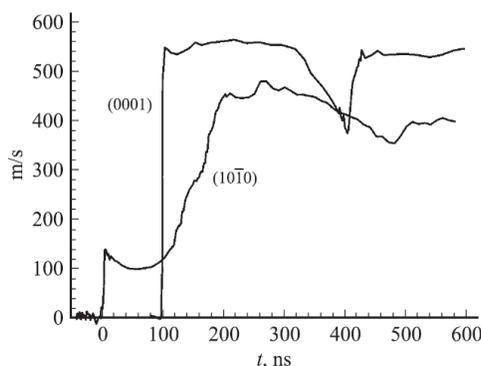


Рис. 2. Профили скоростей свободных поверхностей образцов монокристаллов цинка при нагружении в направлении $[0001]$ и $[10\bar{1}0]$ ударом алюминиевых пластин с начальной скоростью удара 650 м/с [2]

Fig. 2. Velocity profiles for free surfaces of single crystals of zinc samples under loading in the direction of $[0001]$ and $[10\bar{1}0]$ by an impact of aluminum plates with an initial impact velocity of 650 m/s [2]

На рис. 3 представлены аналогичные профили скоростей тыльных поверхностей преград, полученные численно в трехмерной постановке методом конечных элементов [14] с использованием предложенной математической модели. При ударном нагружении в направлении $[0001]$ откольное разрушение преграды моделировалось как хрупкое по достижении предельных значений напряжений. Предельные значения напряжений вдоль оси шестого порядка (9 ГПа) и в плоскости изотропии (15 ГПа) подбирались численно из условия соответствия экспериментальному профилю скорости волны сжатия. При ударном нагружении в направлении $[10\bar{1}0]$ откольное разрушение преграды моделировалось как вязкое на основе подхода [12, 15] по достижении пористости материала преграды предельного значения. Моделирование процесса вязкого разрушения отражает процесс накопления микропор в волнах растяжения, их слияния, объединения в единую магистральную трещину. Процесс накопления пористости в анизотропном материале преграды зависит от величин анизотропного давления, соответствующих различным направлениям осей координат [12]. Для монокристаллического цинка $\lambda_{11} = 0.742$ (вдоль оси шестого порядка), $\lambda_{22} = \lambda_{33} = 1.13$ (перпендикулярно оси шестого порядка), т.е. анизотропия холодной части давления в области упругих и начальных пластических деформаций, определяемая согласно уравнению (5), составляет 1.5. На рис. 3 отличия времен выходов волн сжатия на тыльную поверхность преград определяются различиями величин скоростей распространения упругих продольных волн в направлениях $[0001]$ и $[10\bar{1}0]$. В случае ударного нагружения вдоль направления $[10\bar{1}0]$ характерно наличие полочки упругого предвестника (показано стрелкой), которое наблюдается в натуральных экспериментах при исследовании свойств в абсолютном большинстве изотропных и анизотропных материалов из-за превышения скоростью распространения продольной волны скорости распространения пластической волны сжатия в рассматриваемом направлении.

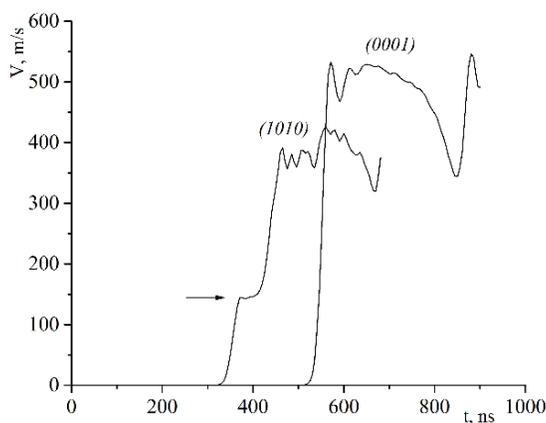


Рис. 3. Вычисленные профили скоростей свободных поверхностей преград из монокристаллов цинка при ударном нагружении алюминиевой пластиной с начальной скоростью 650 м/с: в направлении $[0001]$ и в направлении $[10\bar{1}0]$

Fig. 3. Calculated velocity profiles for free surfaces of the barriers made of zinc single crystals under impact loading by an aluminum plate with an initial velocity of 650 m/s in the direction of $[0001]$ and $[10\bar{1}0]$

Обсуждение

Получены результаты расчетов ударного нагружения преград из монокристаллического цинка с использованием математической модели, включающей в себя анизотропное давление, состоящее из двух частей с учетом анизотропии каждой части. Постановка задачи с ударным нагружением преграды из исследуемого материала с помощью сравнения результатов натуральных и численных экспериментов позволяет обрабатывать математические модели для моделирования высокоэнергетических воздействий на новые материалы, в том числе на ауксетики. Это особенно важно из-за повышения роли тепловой части давления по мере роста степени сжатия материала при высокоэнергетических нагрузках.

Заключение

Учет анизотропии давления при моделировании упругопластических деформаций анизотропных материалов включает учет анизотропии холодной и тепловой частей давления отдельно. Анизотропия холодной части давления определяется заменой в уравнении состояния величины модуля объемного сжатия величиной, обратной линейной сжимаемости в направлении осей симметрии материала, тепловой части – использованием различных значений коэффициентов Грюнайзена в зависимости от направления.

Список источников

1. Bogach A.A., Kanel' G.I., Razorenov S.V., Utkin A.V. Resistance of zinc crystals to shock deformation and fracture at elevated temperatures // *Phys. Solid State*. 1998. V. 40 (10). P. 1676–1680. doi: 10.1134/1.1130633
2. Безручко Г.С., Канель Г.И., Разоренов С.В. О пределе текучести монокристаллов цинка при одномерном сжатии в плоской ударной волне // *Журнал технической физики*. 2005. Т. 75, вып. 5. С. 92–95. doi: 10.1134/1.1927218
3. Безручко Г.С., Канель Г.И., Разоренов С.В. Сжимаемость монокристаллов цинка в области положительных и отрицательных давлений // *Теплофизика высоких температур*. 2004. Т. 42, № 2. С. 262–268. doi: 10.1023/B:НПТЕ.0000026158.05820.1B
4. Абдуллаев Н.А. Параметры Грюнайзена в слоистых кристаллах // *Физика твердого тела*. 2001. Т. 43, вып. 4. С. 697–700.
5. Новикова С.И. Тепловое расширение твердых тел. М. : Наука, 1974. 292 с.
6. Беломестных В.Н., Теслева Е.П., Соболева Э.Г. Максимальный параметр Грюнайзена при полиморфных превращениях в кристаллах // *Журнал технической физики* 2009. Т. 79, вып. 2. С. 153–154. doi: 10.1134/S1063784209020273
7. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред. М. : Мир, 1974. 304 с.
8. Cairns A.B., Goodwin A.L. Negative linear compressibility // *Physical Chemistry Chemical Physics*. 2015. V. 17 (32). P. 20449–21020. doi: 10.1039/c5cp00442j
9. Vignjevic R., Djordjevic N., Panov V. Modelling of Dynamic Behaviour of Orthotropic Metals Including Damage and Failure // *Int. J. Plasticity*. 2012. V. 38. P. 47–85. doi: 10.1016/j.ijplas.2012.04.006
10. Mason W.P. *Physical Acoustics: Principles and methods*. New York–London : Academic Press, , 1965. V. III, pt. B: Lattice Dynamics. xix, 336 p.
11. Седов Л.И. Механика сплошных сред. М. : Наука, 1976. Т. 2. 574 с.

12. Krivosheina M.N., Tuch E.V., Kobenko S.V. Simulation of the Crack Distribution at the “Viscous” of the Destruction of the HCP-Single Crystals in the Plane (10 $\bar{1}0$) // AIP Conference Proceedings. 2018. V. 2051. Art. 020153. doi: 10.1063/1.5083396
13. Wilkins M.L. Computer Simulation of Dynamic Phenomena. Springer Verlag, 1999. 247 p.
14. Anderson Ch.E., Cox P.A., Johnson G.R., Maudlin P.J. A Constitutive Formulation for Anisotropic Materials Suitable for Wave Propagation Computer program-II // Computational Mechanics. 1994. V. 15. P. 201–223. doi: 10.1007/BF00375030
15. Johnson J.N. Dynamic fracture and spallation in ductile solids // J. Appl. Phys. 1981. V. 52 (4). P. 2812–2825.

References

1. Bogach A.A., Kanel' G.I., Razorenov S.V., Utkin A.V. (1998) Resistance of zinc crystals to shock deformation and fracture at elevated temperatures. *Physics of the Solid State*. 40(10). pp. 1676–1680. doi: 10.1134/1.1130633
2. Bezruchko G.S., Kanel' G.I., Razorenov S.V. (2005) O predele tekuchesti monokristallov tsinka pri odnomernom szhatii v ploskoy udarnoy volne [On the yield strength of single-crystal zinc under uniaxial compression in a plane shock wave]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki – Technical Physics*. 50(5). pp. 621–624. doi: 10.1134/1.1927218
3. Bezruchko G.S., Kanel' G.I., Razorenov S.V. (2004) Szhimaemost' monokristallov tsinka v oblasti polozhitel'nykh i otritsatel'nykh davleniy [The compressibility of single crystals of zinc in the region of positive and negative pressures]. *Teplofizika vysokikh temperatur – High Temperature*. 42(2). pp. 259–266. doi: 10.1023/B:HITE.0000026158.05820.1B
4. Abdullaev N.A. (2001) Parametry Gryunayzena v sloistyykh kristallakh [Grüneisen parameters for layered crystals]. *Fizika tverdogo tela – Physics of the Solid State*. 43(4). pp. 727–731. doi: 10.1134/1.1366002
5. Novikova S.I. (1974) *Teplovoe rasshirenie tverdykh tel* [Thermal expansion of solids]. Moscow: Nauka.
6. Belomestnykh V.N., Tesleva E.P., Soboleva E.G. (2009) Maksimal'nyy parametr Gryunayzena pri polimorfnykh prevrashcheniyakh v kristallakh [Maximal Grüneisen parameter at polymorphic transformations in crystals]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki – Technical Physics*. 54(2). pp. 320–322. doi: 10.1134/S1063784209020273
7. Kolarov D., Baltov A., Boncheva N. (1979) *Mekhanika plasticheskikh sred* [Plastic medium mechanics]. Moscow: Mir.
8. Cairns A.B., Goodwin A.L. (2015) Negative linear compressibility. *Physical Chemistry Chemical Physics*. 17(32). pp. 20449–21020. doi: 10.1039/c5cp00442j
9. Vignjevic R., Djordjevic N., Panov V. (2012) Modelling of dynamic behaviour of orthotropic metals including damage and failure. *International Journal of Plasticity*. 38. pp. 47–85. doi: 10.1016/j.ijplas.2012.04.006
10. Mason W.P. (1965) *Physical Acoustics: Principles and Methods. Lattice Dynamics*. New York–London: Academic Press.
11. Sedov L.I. (1976) *Mekhanika sploshnykh sred* [Continuum mechanics]. Singapore: World Scientific. doi: 10.1142/0712-vol1
12. Krivosheina M.N., Tuch E.V., Kobenko S.V. (2018) Simulation of the crack distribution at the “viscous” of the destruction of the HCP-single crystals in the plane (10 $\bar{1}0$). *AIP Conference Proceedings*. 2051. Article 020153. doi: 10.1063/1.5083396
13. Wilkins M.L. (1999) *Computer Simulation of Dynamic Phenomena*. Springer–Verlag.
14. Anderson Ch.E., Cox P.A., Johnson G.R., Maudlin P.J. (1994) A constitutive formulation for anisotropic materials suitable for wave propagation computer program-II. *Computational Mechanics*. 15. doi: 10.1007/BF00375030
15. Johnson J.N. (1981) Dynamic fracture and spallation in ductile solids. *Journal of Applied Physics*. 52(4). doi: 10.1063/1.329011

Сведения об авторе:

Кривошеина Марина Николаевна – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН, профессор кафедры физической и вычислительной механики механико-математического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: marina@ispms.ru

Information about the author:

Krivosheina Marina N. (Doctor of Physics and Mathematics, Institute of Strength Physics and Materials Science, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: marina_nkr@mail.ru

Статья поступила в редакцию 31.05.2022; принята к публикации 03.10.2022

The article was submitted 31.05.2022; accepted for publication 03.10.2022

Научная статья

УДК 620.171.5; 004.932

doi: 10.17223/19988621/79/9

Новый алгоритм обработки данных метода фотоупругости

Алексей Валерьевич Лихачев¹, М. В. Табанюхова²

¹ *Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения РАН,
Новосибирск, Россия*

² *Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет
(Сибстрин), Новосибирск, Россия*

¹ *ipm1@iae.nsk.su*

² *m.tabanyukhova@sibstrin.ru*

Аннотация. Метод фотоупругости является надежным способом исследования плоского напряженного состояния материалов. Регистрируемые данные представляют собой иртерферограммы. Ставится цель автоматизировать процесс их расшифровки. Настоящая работа в основном посвящена формированию набора задач, которые предстоит решить для ее достижения. Некоторые из них авторами уже решены, и здесь представлены полученные результаты. Наибольшее внимание уделено описанию алгоритма трассировки интерференционных полос, основанного на анализе градиента изображения яркости.

Ключевые слова: метод фотоупругости, обработка изображений, трассировка интерференционных полос

Для цитирования: Лихачев А.В., Табанюхова М.В. Новый алгоритм обработки данных метода фотоупругости // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 79. С. 100–110. doi: 10.17223/19988621/79/9

Original article

A new processing algorithm for photoelasticity method data

Aleksey V. Likhachev¹, Marina V. Tabanyukhova²

¹ *Institute of Automation and Electrometry, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
Novosibirsk, Russian Federation*

² *Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering,
Novosibirsk, Russian Federation*

¹ *ipm1@iae.nsk.su*

² *m.tabanyukhova@sibstrin.ru*

Abstract. The photoelasticity method is a reliable tool for studying the stress state of flat elements in building structures using the models made of optically sensitive materials. In this paper, the classical photoelasticity is considered. The experimental data obtained with the use of the method are presented as interferograms. A decoding procedure implies the obtaining of some normal and tangential stress values in the plane of the model.

The polarization-projection installations that are used in optical methods are rather simple. However, the digital processing of the images obtained during the loaded model transmission requires high-intelligent software. Nowadays, national and international laboratories, working with polarization-optical methods, strive to develop digital photoelasticity. For some reasons, the authors of the presented work needed to develop their own algorithms for decoding experimental data of the photoelasticity method. This work is mainly devoted to a formulation of the problems to be solved. Some of them have already been solved, and the results obtained are presented here. The authors place special emphasis on the description of the algorithm for tracing of interference fringes based on the analysis of the image gradient.

Keywords: photoelasticity method, image processing, tracing of interference fringes

For citation: Likhachev, A.V., Tabanyukhova, M.V. (2022) A new processing algorithm for photoelasticity method data. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 79. pp. 100–110. doi: 10.17223/19988621/79/9

Введение

Метод фотоупругости – один из экспериментальных методов исследования напряжений, отличающийся высокой наглядностью результатов. В настоящее время он используется как нашими соотечественниками, так и зарубежными учеными в различных областях науки, а также в медицине. В частности, в стоматологии фотоупругий анализ позволяет выполнять качественную и количественную оценку распределения напряжений в моделях зубных протезов [1, 2], в офтальмологии его применяют для исследования роговицы глаза [3], в сосудистой хирургии с его помощью определяют напряжения в моделях кровеносной сети сосудов [4, 5]. Этим же методом изучают напряжения в массивах горных пород [6]. Его используют в машиностроении, для измерения деформаций в схемах пьезооптических датчиков [7], а также для исследования напряженного состояния деталей [8]; в авиационной промышленности – при расчете и проектировании элементов летательных аппаратов [9]. Особенно широко представлены исследования с применением метода фотоупругости в строительстве: при изучении напряженно-деформированного состояния строительных сооружений и их элементов как с помощью моделей из пьезооптических материалов [10–13], так и путем нанесения на участки натуральных конструкций фотоупругих покрытий [14, 15].

Основой метода фотоупругости является эффект двойного лучепреломления, возникающий в прозрачных материалах, приобретающих под действием деформаций оптическую анизотропию [16]. Методика решения плоских линейно-упругих задач хорошо развита и детально проработана [16–18]. Поляризационно-оптические методы в двумерной постановке разработаны еще более века назад, а в наши дни обработка экспериментальных данных метода фотоупругости развита настолько хорошо, что этот метод можно применять не только при проведении научных исследований, но и в строительной практике. Высока эффективность численных методов разделения напряжений за счет использования компьютеров [18]. В последнее время ученые предпринимают шаги по автоматизации обработки и расшифровки данных метода фотоупругости [19]. Было бы удобно, располагая цифровым изображением изохром и изоклин, автоматически получать поля нормальных и касательных напряжений. Авторы настоящей работы занимаются исследованием в этом направлении.

Плоская задача

Теория. Значения пьезооптических величин, связанных с тензором диэлектрической проницаемости, можно определить посредством использования поляризационно-проекционной установки (рис. 1). При просвечивании нагруженной прозрачной модели поляризованным светом на экране отображается интерферограмма, имеющая связь с напряженно-деформированным состоянием образца. Просвечивание вдоль нормали к плоскости модели позволяет узнать оптическую разность хода, а также определить направления главных осей тензора диэлектрической проницаемости.

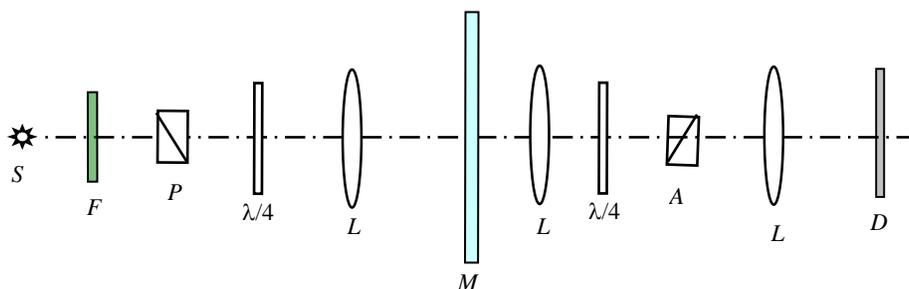


Рис. 1. Схема установки ППУ-7: S – источник света, F – светофильтр, P – поляризатор, A – анализатор, M – исследуемая модель, $\lambda/4$ – четвертьволновая пластинка, L – линзы, D – экран

Fig. 1. Scheme of the PPU-7 installation: S is the light source, F is the light filter, P is the polarizer, A is the analyzer, M is the model under study, $\lambda/4$ is the quarter-wave plate, L is the lens, and D is the screen

Зондирование образца под нагрузкой белым плоско поляризованным светом приводит к появлению темных полос, хорошо видных на цветной интерферограмме (они соответствуют тем областям, где направление одной из главных осей диэлектрического тензора совпадает с направлением плоскости поляризации). Их принято называть оптическими изоклинами. Поскольку в случае упругого деформирования изначально изотропного материала углы наклона главных осей диэлектрического тензора совпадают с углами наклона главных напряжений, то и оптические и механические изоклины совпадают. Механическая изоклина – это линия, соединяющая точки с одинаковым направлением главных напряжений.

Интерферограмма, занимающая все поле образца, как правило, снимается в монохроматическом свете, обычно зеленом, имеющем длину волны $\lambda = 541$ нм [18]. Полоса интерференции – это геометрическое место точек, в которых оптическая разность хода одинакова и может быть записана как $\delta = m\lambda$, здесь m – порядок полосы. В классической теории фотоупругости оптическая разность хода имеет линейную связь с разностью главных в плоскости напряжений σ_1 и σ_2 . Эту зависимость называют законом Вертгейма: $\delta = C_\sigma d(\sigma_1 - \sigma_2)$. Здесь C_σ – оптическая постоянная по напряжениям, d – толщина модели [18]. При расшифровке интерференционной картины важным параметром является цена полосы материала по напряжениям $\sigma_0^{1,0}$, имеющая размерность МПа·см на одну полосу. Она равна разности главных напряжений, вызывающей в модели толщиной $d = 1$ см воз-

никновение одной полосы. Ее находят путем тарировочных испытаний [18] по формуле $\sigma_0^{1,0} = d(\sigma_1 - \sigma_2)/m$.

Для изготовления моделей при решении упругих задач используют прозрачные полимеры [17], характеристики нескольких представлены в таблице.

Характеристики оптически-чувствительных материалов

№ п/п	Название оптически чувствительного материала	Модуль Юнга E , МПа	Цена полосы материала по напряжениям $\sigma_0^{1,0}$, кПа·см	Коэффициент Пуассона ν
1	Оргстекло марки Э2	3 500	1 650	0.4
2	Эпоксидная смола	3 000–4 000	1 300–1 800	0.38
3	СКУ-6	4.0	22	0.5
4	Солитан-113	2.7	19	0.47
5	Хизол-4485	3.0–4.0	16	0.46
6	СКУ-ПФЛ	30.0	600	0.46
7	СКУ-7Л	11.0	160	0.48

По результатам поляризационно-оптических исследований в случае упругого линейного деформирования по картине полос интерференции можно оценить прочность конструкции или ее элементов. В том случае, когда есть необходимость выделения напряжений (нормальных и касательных), выполняют процедуру их разделения. Классическая теория фотоупругости располагает некоторым количеством методов раздельного получения напряжений, к ним относят экспериментальные и численные [18]. В случае выполнения условия Леви–Мичелла исследования упругих задач при плоской деформации производят на моделях, претерпевающих плоское напряженное состояние, этому сопутствует пересчет упругих постоянных [18].

Получение раздельных значений напряжений ведут посредством численного интегрирования одного из двух уравнений равновесия (для оси X или оси Y). В случае отсутствия объемных сил они имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

По интерферограммам, представляющим собой поля изохром и изоклин, зная цену полосы материала по напряжениям $\sigma_0^{1,0}$, получают разность главных в плоскости модели напряжений ($\sigma_1 - \sigma_2$), далее разность нормальных напряжений ($\sigma_x - \sigma_y$) и касательные напряжения τ_{xy} . Интегрировать уравнения (1) начинают, как правило, с незагруженного контура, так как там реализуется линейное напряженное состояние. Для проверки правильности полученных результатов рассматривают равновесие отсеченной части образца, а также сопоставляют значения напряжений при выходе на противоположный свободный контур.

Техника эксперимента. Фотоупругий анализ моделей, выполненных из прозрачных оптически чувствительных материалов, реализуют посредством их просвечивания на оптических установках. На рис. 1 представлена схема поляризационно-проекционной установки ППУ-7 [18], которую используют авторы данной работы в своих экспериментах. Образцы были изготовлены из оргстекла марки Э2 отечественного производства. Выпиливали их вручную, чтобы избежать воз-

никновения остаточных деформаций. Пример получаемой картины полос интерференции приведен на рис. 2.

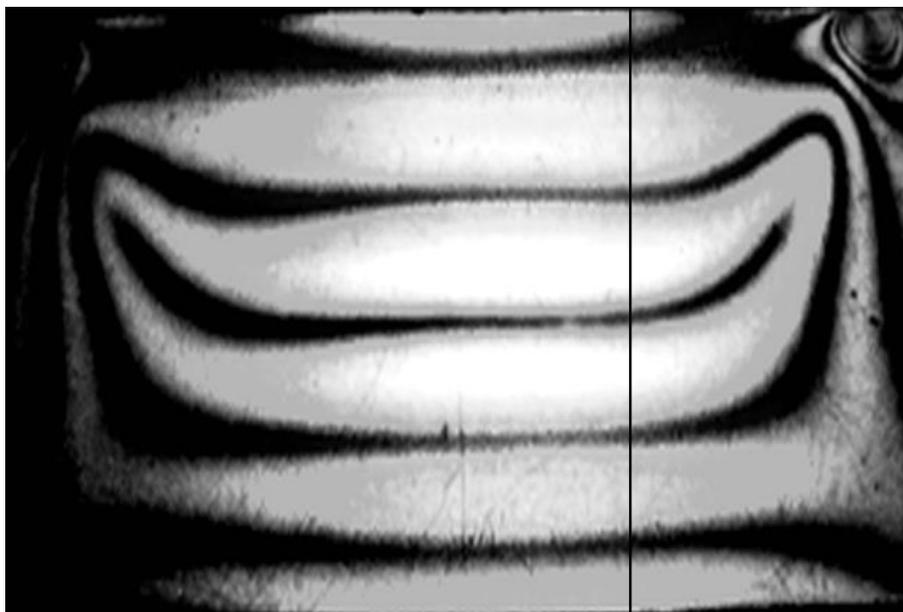


Рис. 2. Исходное изображение
Fig. 2. Original image

Предлагаемый алгоритм

Для решения проблемы автоматической расшифровки интерференционной картины в первую очередь требуется нумерация полос. Однако эта задача до сих пор не решена в полном объеме. В частности, применяемая для этой цели трассировка [20, 21] в общем случае позволяет лишь установить принадлежность точки рассматриваемой области. Другим подходом является исследование особенностей изображения [22], но их привязка к опорным пунктам интерферограммы, как правило, не производится. Это было проделано в недавней работе авторов [23], где разработан алгоритм оценки расстояния от произвольной точки до центра полосы. Предлагаемый здесь метод использует изменение яркости в направлении, перпендикулярном полосам.

Пусть имеющаяся интерференционная картина представляет собой оцифрованное полутоновое изображение размером $N \times M$ пикселей. Ставится следующая задача: автоматически найти интерференционные полосы и для каждой из них определить изменения ее направления. Сопоставим изображению неотрицательную функцию $f(i, j)$ ($0 \leq i \leq N - 1$; $0 \leq j \leq M - 1$), заданную на сетке, узлы которой находятся в центрах пикселей. Для определенности предположим, что изображение имеет однобайтовый формат, тогда естественно считать, что $f(i, j)$ принимает целочисленные значения от 0 до 255. При этом для наиболее темных пикселей $f(i, j) = f_{\min} = 0$, а для самых светлых $f(i, j) = f_{\max} = 255$.

Ситуация осложняется тем, что зарегистрированные данные всегда содержат случайные искажения, называемые шумом. В настоящее время наиболее распространённой является аддитивная модель [24]:

$$f(i, j) = f^0(i, j) + \xi(i, j), \quad (2)$$

где $f^0(i, j)$ – функция, соответствующая неискаженному изображению; $\xi(i, j)$ – двумерное случайное поле. Пусть D – дисперсия шума, а $D^{1/2}$ – его стандартное отклонение. Если $D^{1/2}$ сравнимо с разностью амплитуд деталей, которые нужно различить, требуются специальные процедуры для подавления шума. Чаще всего это низкочастотная фильтрация, в том числе адаптивная [24, 25]. Однако иногда она приводит к потере важной информации. Предложенный в [26] метод, основанный на разложении по вейвлетам, может обеспечить меньшие искажения распознаваемой структуры.

Сориентируем изображение так, чтобы интерференционные полосы были преимущественно направлены по горизонтали (см. рис. 2). Строки будем нумеровать индексом i . Рассмотрим функции

$$F_j(k) = \sum_{i=kn}^{(k+1)n-1} f(i, j), \quad k = 0, 1, \dots, [N/n]. \quad (3)$$

В (3) квадратные скобки означают целую часть числа; при $k = [N/n]$ верхним пределом суммирования является $N - 1$. Обозначим через Δ_k интервал целых чисел от kn до $(k + 1)n - 1$ (включительно), а через ΔF_j^k – разность $F_j(k + 1) - F_j(k)$; здесь $k = 1, 2, \dots, [n/N]$. Зафиксируем произвольный индекс $j = j_c$. Предположим, что при некотором $i_{\max}^{0k} \in \Delta_k$ функция $f^0(i, j_c)$ имеет локальный максимум, а на следующем интервале Δ_{k+1} его не имеет. Тогда если $f^0(i, j_c)$ достаточно гладкая, и имеет место $D^{1/2}f_{av} \ll 1$, где f_{av} – среднее значение функции $f(i, j)$ по изображению, то с большой вероятностью $\Delta F_j^k > \Delta F_j^{k+1}$. В разработанном методе выполнение этого неравенства рассматривается как условие принадлежности окрестности пикселя (i_{\max}^{0k}, j_c) внутренней области интерференционной полосы.

Пусть

$$f(i_{\max}^k, j) = \max_{i \in \Delta_k} f(i, j_c). \quad (4)$$

Таким образом, i_{\max}^k – это аргумент, при котором функция $f(i, j_c)$ имеет максимальное значение на интервале Δ_k . Он и берется в качестве оценки для i_{\max}^{0k} . Поскольку j_c принимает любое значение от 0 до $M - 1$, пиксели (i_{\max}^k, j) , где $j \in [0; M - 1]$, могут служить маркерами для интерференционных полос на всем их протяжении. При этом возможны случаи, когда $i_{\max}^{0k} \neq i_{\max}^k$, т.е. метка не совпадает с локальным максимумом. Однако очевидно, что пиксель (i_{\max}^k, j_c) тоже лежит на интерференционной полосе. Отметим, что описанным способом находятся также локальные минимумы функций $f^0(i, j_c)$, которые легко можно отличить от максимумов по яркости. Следовательно, разработанный подход может быть применен и для трассировки темных полос.

Тестирование метода показало, что его эффективность существенно зависит от величины параметра n . По результатам проведенных исследований оптимальное значение оказалось приблизительно равным средней полуширине полос. Исходя из этого n определялось следующим образом. Пусть K – число пересечений полос с вертикальной прямой, проходящей через центр изображения, причем считается,

что для каждой замкнутой полосы таких пересечений два, как, например, на рис. 2, для которого $K = 6$.

Обозначим через n_w и n_b количества пикселей, составляющих светлые полосы и разделяющие их темные области соответственно. Причем полагается, что каждый пиксель относится либо к первой, либо ко второй группе, поэтому сумма $n_w + n_b$ равняется NM . Оценим n_w аналогично тому, как это было сделано в работе [27]:

$$n_w = \left[\frac{f_{av} - f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}} NM \right] = \left[\frac{f_{av}}{255} NM \right]. \quad (5)$$

Предположим, что полосы представляют собой прямоугольники размером $2n \times M$; тогда $n_w = 2nMK$, откуда

$$n_w = \left[\frac{n_w}{2MK} \right] = \left[\frac{f_{av}}{510K} \right]. \quad (6)$$

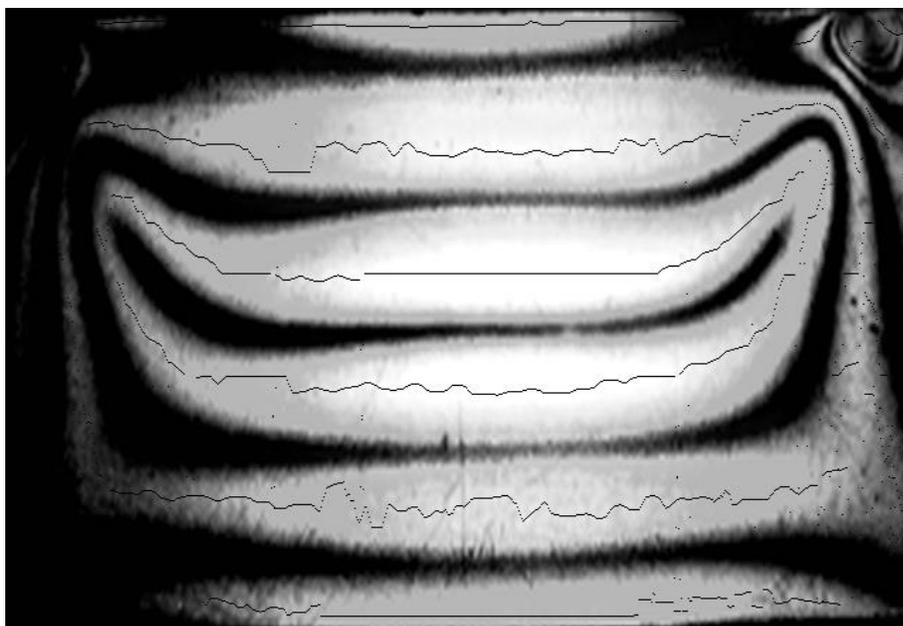


Рис. 3. Изображение с нанесенной трассировкой интерференционных полос
Fig. 3. Image with applied tracing of interference fringes

На рис. 3 представлено изображение, полученное в результате применения разработанного метода к интерференционной картине на рис. 2. Видно, что там, где функция $f(i, j)$, характеризующая изображение, обладает указанными выше свойствами, полосы почти полностью трассированы, включая те места, где они меняют направление. Артефакты наблюдаются лишь в областях существования разрывов $f(i, j)$ или ее производных. В связи с этим на следующем этапе исследования планируется разработка методов повышения гладкости функции $f(i, j)$, основанных на адаптивной фильтрации.

Заключение

В работе предложен простой, но тем не менее достаточно эффективный алгоритм трассировки интерференционных полос, основанный на анализе распределения градиента яркости полутонового изображения. Он не требует большого количества априорной информации и способен работать без участия оператора. Алгоритм был опробован на экспериментальных данных метода фотоупругости. Найденные трассы визуально хорошо повторяют изменения направлений полос.

Список источников

1. Демидова И.И. Фотоупругость и стоматология // Российский журнал биомеханики. 1999. № 2. С. 26–27.
2. Котенко М.В., Раздорский В.В., Леявин А.Б. Поляризационно-оптический метод в исследовании напряженно-деформированного состояния моделей с дентальными имплантатами из нитинола // Сибирский медицинский журнал. 2018. № 8. С. 34–38.
3. Кочина М.Л., Демин Ю.А., Каплин И.В., Ковтун Н.М. Модель напряженно-деформированного состояния роговицы глаза // Восточно-европейский научный журнал. 2017. № 2-2. С. 62–67.
4. Matsushima M., Tercero C., Ikeda S., Fukuda T., Negoro M. Three-dimensional visualization of photoelastic stress analysis for catheter insertion robot // Proceedings of 23rd IEEE/RSJ 2010 International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). Taipei, 2010. P. 879–884. doi: 10.1109/IROS.2010.5650275
5. Matsushima M., Tercero C., Ikeda S., Fukuda T., Arai F., Negoro M., Takahashi I. Photoelastic stress analysis in blood vessel phantoms: three-dimensional visualization and saccular aneurysm with bleb // International Journal of Medical Robotics and Computer Assisted Surgery. 2011. V. 7 (1). P. 33–41. doi: 10.1002/rcs.365
6. Feng W., Laishou L., Junhua Z., Chun Y., Yue W. Research on the effect of bedrock upon the stress of a gravity dam bulk by the photoelastic method // Journal of Materials Processing Technology. 2002. V. 123 (2). P. 236–240. doi: 10.1016/S0924-0136(01)01185-2
7. Паулиш А.Г., Сидоров В.И., Федоринин В.Н., Шатов В.А. Пьезооптический датчик деформации и метод контроля параметров движения подъемных механизмов // Известия высших учебных заведений // Приборостроение. 2018. № 6. С. 530–538.
8. Xi X., Wong G.K.L., Weiss T., Russell P.S.J. Measuring mechanical strain and twist using helical photonic crystal fiber // Optics Letters. 2013. V. 38 (24). P. 5401–5404. doi: 10.1364/OL.38.005401
9. Волков И.В. Внестендовая спекл-голография. Использование голографической и спекл-интерферометрии при измерении деформаций натуральных конструкций // Компьютерная оптика. 2010. № 1. С. 82–89.
10. Морозова Д.В., Серова Е.А. Исследование влияния конструктивного решения узлов металлических конструкций при вариантном проектировании // Экология и строительство. 2015. № 2. С. 4–8.
11. Попова М.В., Шохин П.Б., Глебова Т.О., Шабардина Н.Д. Особенности инженерного расчета деревокомпозитных конструкций // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2018. № 8. С. 36–43.
12. Zerkal S.M., Kharinova N.V., Tabanyukhova M.V. Investigation of stress state in plane truss nodes // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. XIII International Scientific Conference Architecture and Construction 2020. Bristol : IOP Publishing Ltd., 2020. Art. 012008. doi: 10.1088/1757-899X/953/1/012008.
13. Албаут Г.Н., Матус Е.П., Табанохова М.В. Исследование напряженного состояния дисперсно-армированных балок с привлечением метода фотоупругости // Деформация и разрушение материалов. 2009. № 4. С. 46–48.

14. Ахметзянов Ф.Х. Влияние поверхности бетонных и железобетонных элементов на повреждаемость (часть 2) // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. 2010. № 1. С. 96–101.
15. Маковецкая-Абрамова О.В., Хлопова А.В., Маковецкий В.А. Исследование концентрации напряжений при сварке трубопроводов // Технико-технологические проблемы сервиса. 2014. № 2. С. 25–27.
16. Дюрелли А., Райли У. Введение в фотомеханику (поляризационно-оптический метод) : пер. с англ. М. : Мир, 1970. 576 с.
17. Метод фотоупругости : в 3 т. / ред. Г.Л. Хесин. М. : Стройиздат, 1975. Т. 1: Решение задач статики сооружений. Метод оптически чувствительных покрытий. Оптически чувствительные материалы. 460 с.
18. Александров А.Я., Ахметзянов М.Х. Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела. М. : Наука, 1973. 576 с.
19. Степанова Л.В., Долгих В.С. Цифровая обработка результатов оптоэлектронных измерений. Метод фотоупругости и его применение для определения коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. 2017. № 4. С. 717–735.
20. Vaek T.H., Kim M.S., Hong D.P. Fringe analysis for photoelasticity using image processing techniques // International Journal of Software Engineering and its Applications. 2014. V. 8 (4). P. 91–102. doi: 10.14257/ijseia.2014.8.4.11
21. Косыгин А.Н., Косыгина Л.Н. Цифровая обработка экспериментальных интерферограмм, полученных методом фотоупругости // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. № 2. С. 75–91.
22. Surendra K.V.N., Simha K.R.Y. Digital image analysis around isotropic points for photoelastic pattern recognition // Optic Engineering. 2015. V. 54 (8). Art. 081209. doi: 10.1117/1.OE.54.8.081209
23. Лихачев А.В., Табанюхова М.В. Оценка расстояния от заданной точки до максимума интерференционной полосы // Автометрия. 2021. № 3. С. 30–38. doi: 10.15372/AUT20210304
24. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. 2-е изд. СПб. : Питер, 2007. 751 с.
25. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений : пер. с англ. 3-е изд. М. : Техносфера, 2012. 1072 с.
26. Лихачев А.В. Новый алгоритм повышения контраста мелкомасштабных деталей изображения на основе разложения по вейвлетам // Цифровая обработка сигналов. 2018. № 3. С. 44–48.
27. Лихачев А.В. Модифицированный метод обнаружения мелких структур на зашумленных изображениях // Автометрия. 2019. № 6. С. 55–63. doi: 10.15372/AUT20190607

References

1. Demidova I.I. (1999) Photoelasticity and dentistry. *Russian Journal of Biomechanics*. 3(2). pp. 9–10.
2. Kotenko M.V., Razdorskiy V.V., Lelyavin A.B. (2018) Polarizatsionno-opticheskiy metod v issledovanii napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya modeley s dental'nymi implantatami iz ninitola [Use of photoelasticity for stress-strain analysis of models with dental implants made of nitinol]. *Sibirskiy meditsinskiy zhurnal (Irkutsk) – Siberian Medical Journal (Irkutsk)*. 147(8). pp. 34–38.
3. Kochina M.L., Demin Yu.A., Kaplin I.V., Kovtun N.M. (2017) Model' napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya rogovitsy glaza [Model of stress-deformed status of the eye cornea]. *Vostochno-evropeyskiy nauchnyy zhurnal – East European Scientific Journal*. 2(18). pp. 62–67.
4. Matsushima M., Tercero C., Ikeda S., Fukuda T., Negoro M. (2010) Three-dimensional visualization of photoelastic stress analysis for catheter insertion robot. *Proceedings of the*

- 23rd IEEE/RSJ 2010 International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), Taipei. pp. 879–884. doi: 10.1109/IROS.2010.5650275
5. Matsushima M., Tercero C., Ikeda S., Fukuda T., Arai F., Negoro M., Takahashi I. (2011) Photoelastic stress analysis in blood vessel phantoms: three-dimensional visualization and saccular aneurysm with bleb. *International Journal of Medical Robotics and Computer Assisted Surgery*. 7(1). pp. 33–41. doi: 10.1002/rcs.365
 6. Feng W., Laishou L., Junhua Z., Chun Y., Yue W. (2002) Research on the effect of bedrock upon the stress of a gravity dam bulk by the photoelastic method. *Journal of Materials Processing Technology*. 123(2). pp. 236–240. doi: 10.1016/S0924-0136(01)01185-2
 7. Paulish A.G., Sidorov V.I., Fedorinin V.N., Shatov V.A. (2018) P'ezoopticheskiy datchik deformatsii i metod kontrolya parametrov dvizheniya pod"iomnykh mekhanizmov [Piezo-optical deformation sensor and method for monitoring movement parameters of lifting mechanisms]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Priborostroenie – Journal of Instrument Engineering*. 61(6). pp. 530–538. doi: 10.17586/0021-3454-2018-61-6-530-538
 8. Xi X., Wong G.K.L., Weiss T., Russell P.S.J. (2013) Measuring mechanical strain and twist using helical photonic crystal fiber. *Optics Letters*. 38(24). pp. 5401–5404. doi: 10.1364/OL.38.005401
 9. Volkov I.V. (2010) Vnestendovaya spekl-golografiya. Ispol'zovanie golograficheskoy i spekl-interferometrii pri izmerenii deformatsiy naturnykh konstruksiy [Using of holography and speckle interferometry for measuring full-scale construction]. *Komp'yuternaya optika – Computer Optics*. 34(1). pp. 82–89.
 10. Morozova D.V., Serova E.A. (2015) Issledovanie vliyaniya konstruktivnogo resheniya uzlov metallicheskikh konstruksiy pri variantnom proektirovanii [Research of influence of constructive solutions to the nodes of metal structures under random design]. *Ekologiya i stroitel'stvo*. 2. pp. 4–8.
 11. Popova M.V., Shokhin P.B., Glebova T.O., Shabardina N.D. (2018) Osobennosti inzhernernogo raschiota derevokompozitnykh konstruksiy [Engineering calculation features of wood-composite designs]. *Vestnik Belgorodskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta im. V.G. Shukhova – Bulletin of BSTU named after V.G. Shukhov*. 8. pp. 36–43. doi: 10.12737/article_5b6d5846d16d19.35588118
 12. Zerkal S.M., Kharinova N.V., Tabanyukhova M.V. (2020) Investigation of stress state in plane truss nodes. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. XIII International Scientific Conference Architecture and Construction. BRISTOL*. 953. Article 012008. doi: 10.1088/1757-899X/953/1/012008
 13. Albaut G.N., Matus E.P., Tabanyukhova M.V. (2009) Issledovanie napryazhennogo sostoyaniya dispersno-armirovannykh balok s privilecheniem metoda fotouprugosti [Investigation of the stress state of dispersed-reinforced beams using the photoelasticity method]. *Deformatsiya i razrushenie materialov – Russian Metallurgy (Metally)*. 4. pp. 46–48.
 14. Akhmetzyanov F.Kh. (2010) Vliyanie poverkhnosti betonnykh i zhelezobetonnnykh elementov na povrezhdaemost' (chast' 2) [Influence of surface the concretes and reinforced concretes elements on the damage (Part 2)]. *Izvestiya Kazanskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta – News of the Kazan State University of Architecture and Engineering*. 1. pp. 96–101.
 15. Makovetskaya-Abramova O.V., Khlopova A.V., Makovetsky V.A. Issledovanie kontsentratsii napryazheniy pri svarke truboprovodov [Research of concentration of tensions at welding of pipelines]. *Tekhniko-tekhnologicheskie problemy servisa*. 2. pp. 25–27.
 16. Durelli A.J., Riley W.F. (1965) *Introduction to Photomechanics*. New York: Prentice-Hall.
 17. Khesin G.L. (ed.) (1975) *Metod fotouprugosti. T. 1: Reshenie zadach statiki sooruzheniy. Metod opticheski chuvstvitel'nykh pokrytiy. Opticheski chuvstvitel'nye materialy* [Photoelasticity method. Vol. 1: Solving problems of static structures. Method of optically sensitive coatings. Optically sensitive materials]. Moscow: Stroyizdat.
 18. Aleksandrov A.Ya., Akhmetzyanov M.Kh. (1973) *Polyarizatsionno-opticheskie metody mekhaniki deformiruemogo tela* [Polarization-optical methods of deformable body mechanics]. Moscow: Nauka.

19. Stepanova L.V., Dolgich V.S. (2017) Tsifrovaya obrabotka rezul'tatov optoelektronnykh izmereniy. Metod fotouprugosti i ego primeneniye dlya opredeleniya koeffitsientov mnogo-parametricheskogo asimptoticheskogo razlozheniya M. Uil'yamsa polya napryazheniy [Digital processing of the results of optoelectronic measurement. The photoelasticity method and its application for determination of coefficients of the multiparameter asymptotic Williams expansion of the stress field]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki – Journal of Samara State Technical University. Physical and Mathematical Sciences*. 21(4). pp. 717–735. doi: 10.14498/vsgtu1544
20. Baek T.H., Kim M.S., Hong D.P. (2014) Fringe analysis for photoelasticity using image processing techniques. *International Journal of Software Engineering and its Applications*. 8(4). pp. 91–102. doi: 10.14257/ijseia.2014.8.4.11
21. Kosygin A.N., Kosygina L.N. (2019) Tsifrovaya obrabotka eksperimental'nykh interferogramm, poluchennykh metodom fotouprugosti. [Digital processing of interferograms obtained by the photoelasticity method]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya – Vestnik of Samara University. Natural Science Series*. 25(2). pp. 75–91. doi: 10.18287/2541-7525-2019-25-2-75-91
22. Surendra K.V.N., Simha K.R.Y. (2015) Digital image analysis around isotropic points for photoelastic pattern recognition. *Optic Engineering*. 54(8). Article 081209. doi: 10.1117/1.OE.54.8.081209
23. Likhachev A.V., Tabanyukhova M.V. (2021) Assessing the distance from a given point to the maximum of interference band. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 57(3). pp. 250–256. doi: 10.3103/S8756699021030109
24. Sergienko A.B. (2007) *Tsifrovaya obrabotka signalov* [Digital signal processing]. Saint-Petersburg: Piter.
25. Gonzalez R.C., Woods R.E. (2008) *Digital Image Processing*. New York: Prentice-Hall.
26. Likhachev A.V. (2018) Novyy algoritm povysheniya kontrasta melkomasshtabnykh detaley izobrazheniya na osnove razlozheniya po veyvletam [A new algorithm for increasing contrast in small image details based on the decomposition on wavelets]. *Tsifrovaya obrabotka signalov – Digital Signal Processing*. 3. pp. 44–48.
27. Likhachev A.V. (2019) Modified method for detection small structures in noisy images. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 55(6). pp. 580–586. doi: 10.3103/S8756699019060074

Сведения об авторах:

Лихачев Алексей Валерьевич – доктор технических наук, старший научный сотрудник Института автоматизации и электрометрии Сибирского отделения РАН, Новосибирск, Россия. E-mail: ipml@iae.nsk.su

Табанюхова Марина Владимировна – кандидат технических наук, заведующая кафедрой строительной механики Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета (Сибстрин), Новосибирск, Россия. E-mail: m.tabanyukhova@sibstrin.ru

Information about the authors:

Likhachev Aleksey V. (Doctor of Technical Sciences, Institute of Automation and Electrometry of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: ipml@iae.nsk.su

Tabanyukhova Marina V. (Candidate of Technical Sciences, Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: m.tabanyukhova@sibstrin.ru

Статья поступила в редакцию 09.12.2021; принята к публикации 03.10.2022

The article was submitted 09.12.2021; accepted for publication 03.10.2022

Научная статья

УДК 539.89

doi: 10.17223/19988621/79/10

Силикаты магния при высоких динамических нагрузках

Константин Константинович Маевский

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия,
konstantinm@hydro.nsc.ru*

Аннотация. Представлены результаты численных экспериментов по моделированию высокоэнергетического воздействия на силикаты магния на примере энстатита $Mg_2[Si_2O_6]$ и форстерита Mg_2SiO_4 , рассматриваемых как смесь кварца SiO_2 и периклаза MgO . Авторская модель предполагает, что все компоненты, составляющие исследуемый материал, в том числе и газ в порах, при ударно-волновом воздействии имеют равные значения давления и температуры (термодинамическое равновесие). Исследуемый образец в области фазового перехода описывается как смесь фазы низкого давления и фазы высокого давления. Такой подход рассматриваемой модели позволяет рассчитывать термодинамические параметры в области полиморфных фазовых переходов. При расчетах учитывается фазовый переход кварца и периклаза. Результаты верифицированы по экспериментальным данным, полученным в динамических экспериментах.

Ключевые слова: уравнение состояния вещества, фазовый переход, силикаты магния, кварц, периклаз

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Бюджетного проекта III.22.3.1.

Для цитирования: Маевский К.К. Силикаты магния при высоких динамических нагрузках // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 79. С. 111–119. doi: 10.17223/19988621/79/10

Original article

Magnesium silicates at high dynamic loading

Konstantin K. Maevskiy

*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation,
konstantinm@hydro.nsc.ru*

Abstract. Research on the dynamic compression of geological materials is important for understanding composition and physical condition of the deep interior of the Earth and other planets. It also provides some data on the interaction processes related to the formation and evolution of planets. Magnesium silicates dominate in Earth's mantle and, thus, are expected to become the major phases in rocky exoplanets. In particular, enstatite

$Mg_2[Si_2O_6]$ and forsterite Mg_2SiO_4 are essential constituents of Earth's mantles. Strong emphasis is put on the phase transition possibility for magnesium silicates under study. A remarkable fact is the dissociation of Mg_2SiO_4 into the following oxides: MgO and SiO_2 (stishovite). The experiments have been carried out at a pressure value of 33 GPa, which corresponds to that in Earth's mantle at a depth of 1000 km.

In this paper, the results of modeling the shock-wave loading of enstatite and forsterite as the mixtures of quartz SiO_2 and periclase MgO are presented. The proposed model assumes that the components of the mixture under shock-wave loading are in thermodynamic equilibrium. The components of the material under study are considered in a phase transition region as a mixture of low- and high-pressure phases. The model is also valid for a polymorphic phase transition region. The calculations of magnesium silicates are performed with account for the polymorphic phase transition of quartz and periclase. The results are validated using the data obtained in dynamic experiments.

Keywords: equation of state, phase transition, magnesium silicates, quartz, periclase

Acknowledgments: This work is partially supported by the State Assignment of LIH SB RAS (project III.22.3.1).

For citation: Maevskiy, K.K. (2022) Magnesium silicates at high dynamic loading. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 79. pp. 111–119. doi: 10.17223/19988621/79/10

Введение

Исследования по динамическому сжатию геологических материалов важны для понимания состава и физического состояния глубинных недр Земли и других планет. Растет интерес к применению экспериментальных исследований геологических материалов в условиях сверхвысоких значений давления и температуры для решения многих задач науки о Земле и планетах. Эти работы также дают представление о процессах воздействия, имеющих отношение к формированию и эволюции планет. Повышается внимание к применению экспериментальных исследований геологических материалов в условиях сверхвысокого давления и температуры как к новым, так и к давним вопросам науки о Земле и планетах [1, 2]. Силикаты магния доминируют в мантии Земли и, как ожидается, станут основными фазами в скалистых экзопланетах [3]. Энстатит $Mg_2[Si_2O_6]$ и форстерит Mg_2SiO_4 являются одними из важнейших компонентов мантии Земли. Традиционные исследования этих материалов с использованием ударного волнового сжатия обобщены в [4].

Большое внимание уделяется возможности фазового перехода исследуемых силикатов магния. Это связано с тем, что силикаты, как и многие другие материалы, в случае приложения высокого давления испытывают фазовые превращения. Было отмечено, что наблюдалась диссоциация Mg_2SiO_4 в окислы MgO и SiO_2 (стишовит). Данные эксперименты проводились при значении давления 33 ГПа, что соответствует давлению в мантии Земли на глубине 1 000 км [5].

Термодинамически равновесная модель [6] позволяет рассчитывать параметры исследуемых образцов – давление, сжатие, температуру, и в области полиморфных фазовых переходов. Таким образом, появляется возможность оценить вклад фазовых переходов в изменение значения плотности слоев мантии Земли, что позволит точнее определять состав и термодинамические параметры мантии (давление и температуру). Цель данной работы заключается в описании результа-

тов ударно-волновых экспериментов силикатов магния для определения достоверности результатов моделирования по авторской методике.

В настоящей работе моделируется поведение энстатита и форстерита, которые рассматриваются как смесь кварца и периклаза. Чтобы получить представление о том, как изменяются значения давления и температуры исследуемых образцов в области фазовых переходов, при расчетах учитываются фазовые переходы компонентов.

Методика расчета

Моделирование ударно-волнового нагружения энстатита и форстерита как смесей кварца SiO_2 и периклаза MgO выполняется по модели, предполагающей, что для всех компонентов исследуемого материала выполняется равенство значений давления и температуры при ударно-волновом нагружении, что означает термодинамическое равновесие составляющих смеси [6]. Для расчета поведения твердых фаз применяется уравнение состояния (УРС) Ми–Грюнайзена

$$P(\rho, T) = P_C(\rho) + P_T(T), \quad (1)$$

$$P_T(\rho, T) = \Gamma \rho E_T(T), \quad (2)$$

$$E_T(T) = c_V(T - T_0). \quad (3)$$

Здесь P_C – потенциальный, а P_T – тепловой компонент давления; E_T – тепловая составляющая удельной энергии; c_V – теплоемкость; температура $T_0 = 300$ К, что соответствует начальным условиям. Для газа используется УРС идеального газа. Условия сохранения выписываются для массы каждого компонента, а для импульса и энергии – для смеси в целом на фронте волны в виде соотношений Рэнкина–Гюгонио [7]:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{D}{D - U}, \quad (4)$$

$$P = \rho_0 U D, \quad (5)$$

$$E = \frac{1}{2} P \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} \right), \quad (6)$$

где ρ – текущая, а ρ_0 – начальная плотность твердого компонента, U – массовая скорость, D – волновая скорость. Авторская модель работает при значениях давления более 3 ГПа. С учетом этого диапазона давления значением начальной энергии, как и значением давления при нормальных условиях, пренебрегаем. Подход, при котором для потока массы законы сохранения рассматриваются для каждого компонента отдельно, позволяет не только моделировать сжатие исследуемого образца в целом, но также рассчитывать сжатия каждого компонента. Для образца, который состоит из n твердых компонентов, имеющих начальные объемные доли μ_{i0} , получена следующая зависимость давления от сжатия компонентов:

$$P = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \frac{\mu_{i0}}{\sigma_i} \left[\left(h_i - \frac{k_i + 1}{k_i - 1} \right) \sigma_i^{k_i} + \frac{2k_i \sigma_i}{k_i - 1} h_i - 1 \right]}{\sum_{i=1}^n \frac{\mu_{i0}}{\sigma_i} h_i + \left(\frac{h_g}{\sigma_g} \right) \left(1 - \sum_{i=1}^n \mu_{i0} \right) - 1}. \quad (7)$$

При этом $h_i = 2/\Gamma_i + 1$; $h_g = 2/(\gamma - 1) + 1$; $\sigma_i = \rho_i/\rho_{i0}$ – степени сжатия твердых компонентов с индексом $i = 1, \dots, n$, $\sigma_g = \rho_g/\rho_{g0}$ – степень сжатия газа; ρ_g, ρ_{g0} – текущая и начальная плотности для газа в порах. Показатель адиабаты газа $\gamma = 1.41$. A, k – коэффициенты в соответствующих УРС. Зависимость $\Gamma = P_T V/E_T$ выражает влияние тепловых компонент [8]. Выписывая условия равенства для значений температур компонент, а также УРС для каждого компонента, вместе с (7) можно построить ударные адиабаты исследуемого материала.

При описании фазового перехода (ФП) используется следующий подход: материал в данной области моделируется как смесь фаз низкого и высокого давления. При таком подходе используемая модель позволяет достоверно описывать область полиморфного ФП. При моделировании в области ФП объемные доли фаз определяются следующим образом: фаза высокого давления образуется из фазы низкого давления, объем которой определяется как α . По данным экспериментов определяется значение давления, соответствующее началу процесса ФП. Зависимость доли α от приращения внутренней энергии близка к линейной: $\alpha = \Delta E/kf$, при этом используются коэффициент $kf = E_f - E_b$ и разница значений энергии $\Delta E = E - E_b$. Здесь вводятся обозначения: E – текущая внутренняя энергия, E_b – энергия в начале ФП, E_f – внутренняя энергия в конце ФП, когда весь материал трансформировался в фазу высокого давления. Параметр kf позволяет описать данные экспериментов для исследуемых образцов, имеющих различные значения пористости [9]. При расчетах ударной адиабаты для материалов, испытывающих полиморфный фазовый переход, задается три участка в зависимости от значения α :

$$\begin{cases} E \leq E_b & \alpha = 0, \\ E_b \leq E \leq E_f & \alpha = \Delta E / kf, \\ E \geq E_f & \alpha = 1, \end{cases} \quad (8)$$

При расчетах поведения энстатита и форстерита учитывается полиморфный фазовый переход кварца и периклаза. Для SiO_2 и MgO определены следующие значения: параметр kf равен 2.5 и 15.0 кДж/г, давление начала фазового перехода 11 и 250 ГПа соответственно.

Результаты верифицированы по экспериментальным данным, полученным в динамических экспериментах. Параметры модели, которые использовались в расчетах для оксидов SiO_2 и MgO , отражены в таблице. Фаза низкого давления обозначена a , фаза высокого давления – b .

Фазовый состав размариваемых образцов

Параметр	MgO (a)	MgO (b)	SiO ₂ (a)	SiO ₂ (b)
A, ГПа	39.62	40.0	14.5	130
ρ , г/см ³	3.584	4.050	2.204	4.310
n	4	3.99	4.05	3.00
c_v , Дж/кг·К	937.2	937.2	1 100	1 100

Результаты моделирования

Исходя из предположения о возможной диссоциации силикатов магния под давлением, выполнены расчеты для энстатита и форстерита как смеси оксидов SiO_2 и MgO . Стехиометрические соотношения исследуемых образцов определяют объемные доли данных оксидов как 1:1 для энстатита и 1:2 для форстерита. Ре-

зультаты моделирования для энстатита $\rho_0 = 3.01 \text{ г/см}^3$ представлены на рис. 1. Здесь же показаны данные двух групп экспериментов [10] с образцами, имеющими среднюю плотность 3.01 и 2.95 г/см³ соответственно. Отклонение объясняется, в частности, разбросом значений плотности.

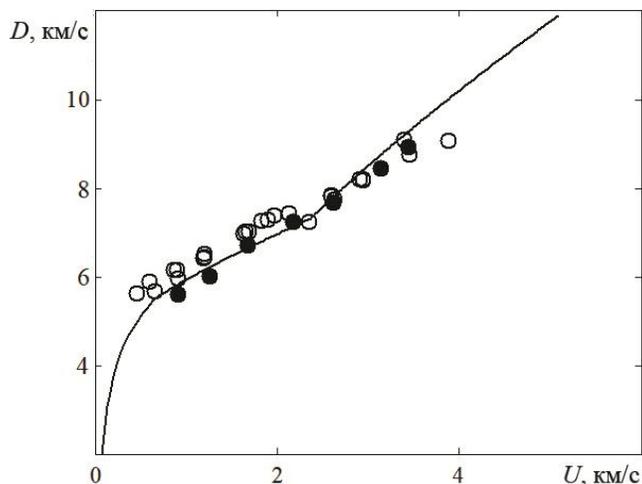


Рис. 1. Ударная адиабата энстатита. Расчет в переменных волновая–массовая скорости. Экспериментальные данные: [10]

Fig. 1. Hugoniot curve for enstatite. The calculation is performed in terms of wave velocity and mass velocity. Experimental data are from [10]

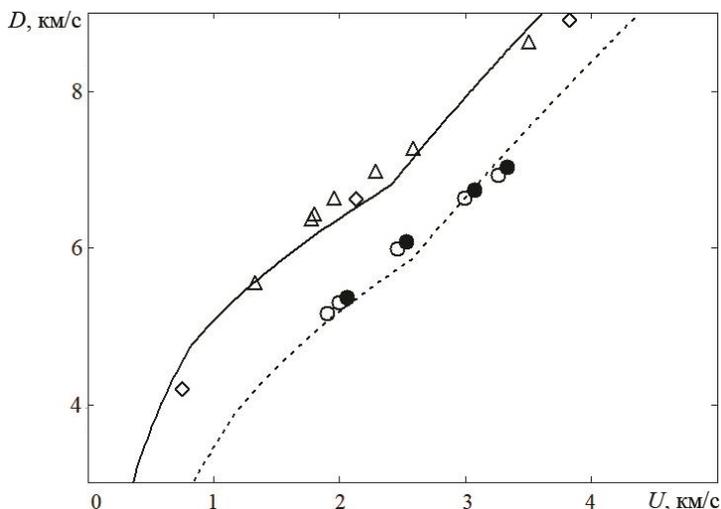


Рис. 2. Ударная адиабата пористого энстатита. Расчет: сплошная линия $\rho_0 = 2.361 \text{ г/см}^3$, пунктирная линия $\rho_0 = 2.836 \text{ г/см}^3$. Данные: треугольники, ромбы и светлые кружки [10]; темные кружки [11]

Fig. 2. Hugoniot curve for porous enstatite. The solid line indicates $\rho_0 = 2.361 \text{ g/cm}^3$; the dashed line, $\rho_0 = 2.836 \text{ g/cm}^3$; triangles, diamonds, and open circles, data from [10]; solid circles, data from [11]

Результаты моделирования для пористых образцов энстатита, имеющих значения плотности $\rho_0 = 2.836 \text{ г/см}^3$ и $\rho_0 = 2.361 \text{ г/см}^3$ показаны на рис. 2. На этом же рисунке приведены данные, которые получены в экспериментах для исследуемых образцов [10, 11]. Получено описание поведения пористых образцов энстатита в пределах точности эксперимента.

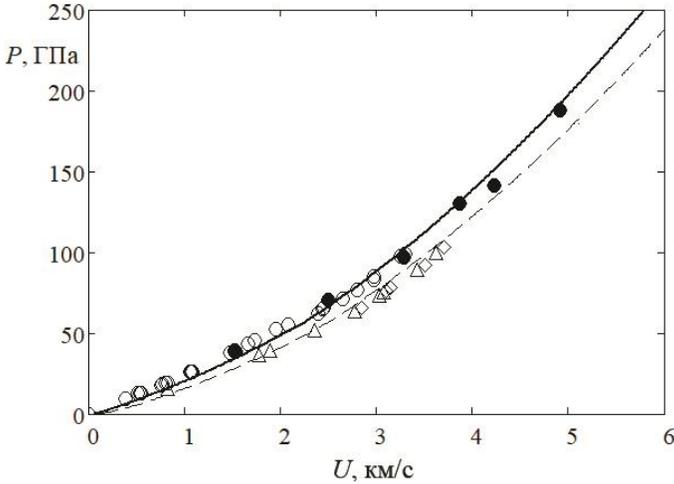


Рис. 3. Ударная адиабата форстерита $\rho_0 = 3.273 \text{ г/см}^3$. Расчет в переменных давление–массовая скорость. Расчет: сплошная линия $m = 1.03$, пунктирная линия $m = 1.08$; данные: светлые кружки, ромбы [10]; темные кружки, треугольники [11]

Fig. 3. Hugoniot curve for forsterite with $\rho_0 = 3.273 \text{ g/cm}^3$. The calculation is performed in terms of pressure and mass velocity. The solid line indicates $m = 1.03$; the dashed line, $m = 1.08$; open circles and diamonds, data from [10]; solid circles and triangles, data from [11]

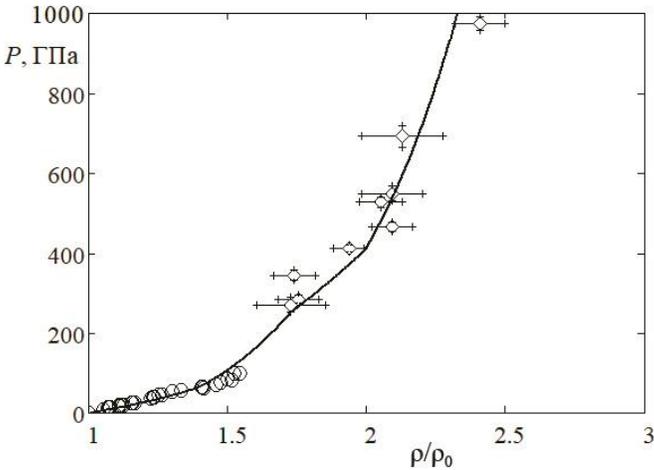


Рис. 4. Ударная адиабата форстерита $\rho_0 = 3.273 \text{ г/см}^3$. Расчет в переменных давление–сжатие. Расчет – сплошная кривая 1; данные: светлые кружки [10], ромбы [12]

Fig. 4. Hugoniot curve for forsterite with $\rho_0 = 3.273 \text{ g/cm}^3$. The calculation is performed in terms of pressure and compression. The solid line indicates the calculated data; open circles, data from [10]; diamonds, data from [12]

Результаты моделирования для форстерита $\rho_0 = 3.273 \text{ г/см}^3$ показаны на рис. 3. Значение пористости, определяемое как отношение плотностей сплошного и пористого образца, рассчитывалось по среднему значению исследованных образцов $m = 1.03, 1.08$. Данные, полученные в расчетах, соответствуют экспериментальным результатам по измерению значений волновой и массовой скоростей, полученных для пористых образцов энстатита.

Для верификации расчетов при более высоких значениях давления использовались экспериментальные данные, которые приведены в [12]. Результаты моделирования для форстерита в диапазоне значений давления до 1 ТПа и данные [10, 12] показаны на рис. 4 с учетом фазовых переходов SiO_2 и MgO . Для SiO_2 область фазового перехода определена в диапазоне 11–40 ГПа, для MgO – в диапазоне 250–400 ГПа. Получено достоверное описание имеющихся данных, при этом параметры, определенные для оксидов, позволили непротиворечиво описать данные для исследуемых образцов на уровне точности экспериментов.

Заключение

Хорошее соответствие модельных расчетов результатам, полученным для энстатита и форстерита на основании экспериментов, позволяет предположить, что используемая методика позволит достоверно моделировать термодинамические параметры, такие как давление, сжатие, температура, и для других сложных материалов, которые содержат компоненты, претерпевающие фазовые переходы при интенсивных динамических нагрузках. Проведено сравнение результатов моделирования с данными, полученными в экспериментах по ударно-волновому воздействию на исследуемые образцы. Рассматриваемая методика может быть полезна при расчетах для аналогичных сложных по составу материалов, таких как, в частности, андалузит Al_2SiO_5 , волластонит $\text{Ca}_3[\text{Si}_3\text{O}_9]$. Данный подход позволяет оценить вклад фазовых переходов материалов в изменение плотности мантии Земли в областях давлений, соответствующих фазовым переходам исследуемых материалов.

Список источников

1. *Borucki W.J.* Kepler mission: development and overview // Reports on Progress in Physics. 2016. V. 79. Art. 036901. doi:10.1088/0034-4885/79/3/036901
2. *Driscoll P.E.* Planetary interiors, magnetic fields and habitability // Handbook of Exoplanets / H.J. Deeg, J.A. Belmonte (eds.). Cham : Springer International Publishing, 2018. P. 1–18. doi: 10.1007/978-3-319-55333-7_76
3. *Duffy T.S., Smith R.F.* Ultra-high pressure dynamic compression of geological materials // Front. Earth Sci. 2019. V. 7 (23). P. 1–20. doi: 10.3389/feart.2019.00023
4. *Mosenfelder J.L., Asimow P.D., Ahrens T.J.* Thermodynamic properties of Mg_2SiO_4 liquid at ultra-high pressures from shock measurements to 200 GPa on forsterite and wadsleyite // Journal of Geophysical Research. 2007. V. 112. Art. B06208. doi: 10.1029/2006JB004364
5. *Kumazawa M., Sawamoto H., Ohtani E., Mazaki K.* Postspinel Phase of Forsterite and Evolution of the Earth's Mantle // Nature. 1974. V. 247. P. 356–358. doi: 10.17223/19988621/68/2
6. *Маевский К.К.* Численное исследование ударно-волнового нагружения металлических композитов на базе W и WC // Журнал технической физики. 2021. Т. 91, № 5. С. 815–820. doi: 10.21883/JTF.2021.05.50694.293-20

7. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. 3-е изд., испр. М. : Физматлит, 2008. 656 с.
8. Maevskii K.K., Kinelovskii S.A. Thermodynamic parameters of mixtures with epoxy as a component under shock wave loading // *Journal of Physics: IOP Conf. Series.* 2018. V. 946. Art. 012113. doi: 10.1088/1742-6596/946/1/012113
9. Маевский К.К., Кинеловский С.А. Термодинамические параметры смесей с нитридом кремния при ударно-волновом воздействии в представлениях равновесной модели // *Теплофизика высоких температур.* 2018. Т. 56, № 6. С. 876–881. doi: 10.31857/S004036440003564-4
10. *LASL Shock Hugoniot Data* / S.P. Marsh (ed.). Berkeley : Univ. California Press, 1980. 658 p.
11. Levashov P.R., Khishchenko K.V., Lomonosov I.V., Fortov V.E. Database on shock-wave experiments and equations of state available via Internet // *AIP Conf. Proc.* 2004. V. 706. P. 87–90. URL: <http://www.ihed.ras.ru/rusbank/>
12. Sekine T., Ozaki N., Miyanishi K., Asaumi Y., Kimura T., Albertazzi B. et al. Shock compression response of forsterite above 250 GPa // *Sci. Adv.* 2016. V. 2. Art. e1600157. doi: 10.1126/sciadv.1600157

References

1. Borucki W.J. (2016) Kepler mission: development and overview. *Reports on Progress in Physics.* 79. Article 036901. doi: 10.1088/0034-4885/79/3/036901
2. Driscoll P.E. (2018) Planetary interiors, magnetic fields and habitability. *Handbook of Exoplanets.* pp. 1–18. doi: 10.1007/978-3-319-55333-7_76
3. Duffy T.S., Smith R.F. (2019) Ultra-high pressure dynamic compression of geological materials. *Frontiers in Earth Science.* 7(23). pp. 1–20. doi: 10.3389/feart.2019.00023
4. Mosenfelder J.L., Asimow P.D., Ahrens T.J. (2007) Thermodynamic properties of Mg₂SiO₄ liquid at ultra-high pressures from shock measurements to 200 GPa on forsterite and wadsleyite. *Journal of Geophysical Research.* 112. Article B06208. doi: 10.1029/2006JB004364
5. Kumazawa M., Sawamoto H., Ohtani E, Mazaki K. (1974) Postspinel phase of forsterite and evolution of the Earth's mantle. *Nature.* 247. pp. 356–358. doi: 10.17223/19988621/68/2
6. Maevskii K.K. (2021) Numerical study of shock-wave loading of the W- and WC-based metal composites. *Technical Physics.* 66(6). pp. 749–754. doi: 10.1134/S1063784221050145
7. Zel'dovich Ya.B., Raizer Yu.P. (1967) *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena.* New York: Academic Press.
8. Maevskii K.K., Kinelovskii S.A. (2018) Thermodynamic parameters of mixtures with epoxy as a component under shock wave loading. *Journal of Physics: IOP Conference Series.* 946. Article 012113. doi: 10.1088/1742-6596/946/1/012113
9. Maevskii K.K., Kinelovskii S.A. (2018) Thermodynamic parameters of mixtures with silicon nitride under shock-wave impact in terms of equilibrium model. *High Temperature.* 56(6). pp. 853–858. doi: 10.1134/S0018151X18060172
10. Marsh S.P. (ed.) (1980) *LASL Shock Hugoniot Data.* London: Univ. California Press.
11. Levashov P.R., Khishchenko K.V., Lomonosov I.V., Fortov V.E. (2004) Database on shock-wave experiments and equations of state available via Internet. *AIP Conference Proceedings.* 706. pp. 87–90. doi: 10.1063/1.1780190
12. Sekine T., Ozaki N., Miyanishi K., Asaumi Y., Kimura T., Albertazzi B., Sato Y., Sakawa Y., Sano T., Sugita S., Matsui T., Kodama R. (2016) Shock compression response of forsterite above 250 GPa. *Science Advances.* 2(8). Article 1600157. pp. 1–7. doi: 10.1126/sciadv.1600157

Сведения об авторе:

Маевский Константин Константинович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения РАН; старший преподаватель кафедры теоретической механики механико-математического

факультета Новосибирского государственного университета, Новосибирск, Россия. E-mail: konstantinm@hydro.nsc.ru

Information about the author:

Maevskiy Konstantin K. (PhD in Physics and Mathematics, Senior Researcher, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS; Senior Lecturer, Department of Theoretical Mechanics of MMF, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: konstantinm@hydro.nsc.ru

Статья поступила в редакцию 31.05.2022; принята к публикации 03.10.2022

The article was submitted 31.05.2022; accepted for publication 03.10.2022

Научная статья

УДК 532.556.2

doi: 10.17223/19988621/79/11

Численное исследование влияния неізотермичности на характеристики течения степенной жидкости в трубе с резким расширением

Дилара Абдурасуловна Мамазова¹, Кира Евгеньевна Рыльцева²,
Геннадий Рафаилович Шрагер³

^{1, 2, 3} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ mamazova.dilara@mail.ru

² kiraworkst@gmail.com

³ shg@jf.tsu.ru

Аннотация. Рассматривается неізотермическое установившееся течение степенной жидкости в цилиндрической трубе с резким расширением. Реологическое поведение жидкой среды описывается модифицированным законом Оствальда–де Ваале. Уравнения записываются в переменных функция тока–вихрь–температура в безразмерной форме. Сформулированная задача решается численно. Проведены тестовые расчеты для подтверждения адекватности используемой математической модели и аппроксимационной сходимости метода. Выполнены параметрические расчеты, в результате которых определены структура потока и характеристики течения в зависимости от основных параметров задачи.

Ключевые слова: неізотермическое течение, модель Оствальда–де Ваале, степенная жидкость, осесимметричное течение, расширение, циркуляционная зона, число Рейнольдса, число Пекле

Благодарности: Работа выполнена за счет гранта РНФ (проект №18-19-00021-П).

Для цитирования: Мамазова Д.А., Рыльцева К.Е., Шрагер Г.П. Численное исследование влияния неізотермичности на характеристики течения степенной жидкости в трубе с резким расширением // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 79. С. 120–134. doi: 10.17223/19988621/79/11

Original article

A numerical study of the effect of nonisothermality on the power-law fluid flow characteristics in a sudden pipe expansion

Dilara A. Mamazova¹, Kira E. Ryltseva², Gennady R. Shragher³

^{1, 2, 3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ mamazova.dilara@mail.ru

² kiraworkst@gmail.com

³ shg@ff.tsu.ru

Abstract. In this paper, a steady laminar non-isothermal flow of a power-law fluid in an axisymmetric sudden pipe expansion is numerically simulated. The rheological behavior of the fluid is described by the modified Ostwald-de Waele law; the apparent viscosity is an exponential function of temperature. The equations are written in terms of dimensionless stream function – vortex – temperature. No-slip conditions and zero temperature are used on the solid wall. At the inlet boundary, the velocity and temperature profiles correspond to a one-dimensional steady non-isothermal flow of the considered fluid. “Soft” boundary conditions are assigned at the outlet boundary. The formulated problem is solved using the finite-difference method.

The structure of the flow through a sudden pipe expansion is shown to include one- and two-dimensional flow zones with a recirculation region occurring in the inner corner vicinity. The variation in the two-dimensional flow zone length is analyzed with respect to a power-law index and dimensionless criteria of the problem. Distributions of the velocity, temperature, and apparent viscosity are presented at various Peclet and Reynolds numbers for dilatant and pseudoplastic fluids.

Keywords: non-isothermal flow, Ostwald-de Waale model, power-law fluid, axisymmetric flow, expansion, circulation zone, Reynolds number, Peclet number

Acknowledgments: The research is implemented at the expenses of the Russian Science Foundation (project No. 18-19-00021-II).

For citation: Mamazova, D.A., Ryltseva, K.E., Shragger, G.R. (2022) A numerical study of the effect of nonisothermality on the power-law fluid flow characteristics in a sudden pipe expansion. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 79. pp. 120–134. doi: 10.17223/19988621/79/11

Введение

Решение задач о течении жидкости в трубах, имеющих особенность в виде резкого изменения радиуса, представляет фундаментальный интерес и имеет практическое значение. В частности, такое течение часто встречается в инженерных сооружениях при транспортировке жидкой среды. При этом необходимо учитывать ряд особенностей, возникающих при перестройке потока, приводящих к дополнительным энергетическим потерям в неизотермических условиях.

Область течения характеризуется резким изменением радиусов составляющих частей трубы, вызывающим разделение потока. При этом формируется следующая структура: в скачке сечения происходит отрыв потока, который на некотором расстоянии от скачка присоединяется к стенке, создавая тороидальную область с циркуляционным движением, вне этой зоны реализуется область одномерного течения вверх и вниз по потоку.

Исследования движения жидкости в трубах рассматривают зависимость размеров различных областей течения от параметров задачи, изменение характеристик потока, устойчивость осесимметричного течения и т.п. Важно заметить, что большинство работ посвящено течению ньютоновской жидкости. В технических приложениях, связанных с транспортом нефти, переработкой полимерных жидкостей, пищевой промышленностью, жидкая среда проявляет неньютоновские

свойства – вязкость сильно зависит от скорости деформации сдвига и температуры. Работы в этом направлении в основном направлены на изучение изотермических течений [1–16].

В работах [1–3] экспериментально исследуется стационарное ламинарное течение в трубе с расширением, переход ламинарного режима в турбулентный рассматривается в [4]. Результаты работы [3] демонстрируют увеличение длины циркуляционной зоны для жидкостей с показателем нелинейности меньше единицы в трубе с расширением 1:2. Результаты расчетов в работах [5, 6, 16] подтверждают увеличение длины циркуляционной зоны с ростом показателя нелинейности жидкости. В работе [7] численно изучается устойчивость осесимметричного течения в трубе с расширением и показано, что критическое значение числа Рейнольдса падает с уменьшением показателя нелинейности. В [9] экспериментально наблюдаются бифуркационные явления, а в [10–12] численно показан рост нестационарных возмущений, возникающих вследствие геометрической особенности трубы, где по мере продвижения вниз по потоку данные возмущения затухают. В работах [13, 14] численно исследуется осесимметричное течение в трубах с переменным радиусом. Также существуют работы, посвященные экспериментальному изучению течения жидкости в осесимметричных микроканалах [15].

Количество работ, в которых рассматривается течение с учетом вязкой диссипации и зависимости эффективной вязкости от температуры, ограничено. В работе [17] численно исследуется течение степенной жидкости в канале с прямоугольными полостями при вынужденной конвекции. Получены изолинии функции тока и распределение температуры при варьировании числа Рейнольдса, показателя нелинейности, степени расширения и сужения трубы. Способность вычислительной схемы описывать течение неньютоновской жидкости внутри плоских каналов, а также в трубах переменного радиуса, была ранее продемонстрирована в работах [18–20]. Эти результаты указывают на сильную зависимость характеристик потока от температуры.

Цель данной работы состоит в анализе особенностей установившегося ламинарного течения степенной жидкости в цилиндрической трубе с резким расширением.

Постановка задачи

В работе исследуется движение степенной несжимаемой жидкости в трубе с резким изменением радиуса поперечного сечения в условиях неизотермического ламинарного установившегося течения. На рис. 1 представлена схема движения жидкости по трубе в цилиндрической системе координат (r, z) .

Математическая постановка задачи о течении жидкости описывается системой уравнений, состоящей из уравнения переноса вихря, уравнения Пуассона для функции тока и уравнения энергии, которые в безразмерном виде в переменных функция тока–вихрь–температура записываются следующим образом [20]:

$$\frac{\partial(u\omega)}{\partial z} + \frac{\partial(v\omega)}{\partial r} = \frac{2^n \cdot B}{\text{Re}} \left(\Delta\omega - \frac{\omega}{r^2} \right) + \frac{2^n \cdot S}{\text{Re}}, \quad (1)$$

$$\Delta\psi - \frac{2}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} = -r\omega, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(u\theta)}{\partial z} + \frac{\partial(v\theta)}{\partial r} + \frac{v\theta}{r} = \frac{2}{\text{Pe}} (\Delta\theta + 2^{n-1} \text{Gr} \cdot A^2 B), \quad (3)$$

где переменные ω - вихрь и ψ - функция тока определяются формулами

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -vr, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = ur.$$

Здесь введены следующие обозначения: u, v – аксиальная и радиальная компоненты вектора скорости, n - показатель нелинейности жидкости, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа, S - источник, A – интенсивность тензора скоростей деформаций, где

$$S = 2 \frac{\partial^2 B}{\partial r \partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) + 2 \frac{\partial B}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial z} + 2 \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\omega}{r} \frac{\partial B}{\partial r},$$

$$A = \sqrt{2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{v}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2}.$$

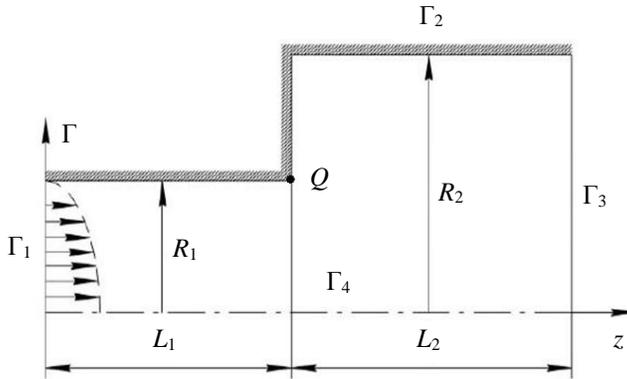


Рис. 1. Область решения задачи
Fig. 1. Problem solution region

В качестве масштабов обезразмеривания скорости, длины, вязкости и давления принимаются следующие величины соответственно: $U, R_1, k_1 (U/R_1)^{n-1}, \rho U^2 / 2$, где U – среднерасходная скорость в трубе с радиусом R_1 , R_1 – радиус узкой части трубы, $k_1 = k_0 \exp[-\beta_2 (T_1 - T_0)]$ - показатель консистенции при температуре T_1 , T_1 – размерная температура жидкости на твердой стенке, T – размерная температура жидкости в потоке, β_2 - температурный коэффициент вязкости. Безразмерная температура определяется выражением $\theta = \beta_1 (T - T_1)$.

Реологическое поведение жидкой среды описывается модифицированным законом Оствальда–де Ваале, при этом формула для эффективной вязкости зависит от температуры по экспоненциальному закону

$$B = e^{-\theta} A^{n-1}. \quad (4)$$

Уравнения (1)–(3) содержат безразмерные параметры, определяющиеся по формулам

$$\begin{aligned} \text{Re} &= \frac{\rho U^{2-n} (2R_1)^n}{k_1}, \\ \text{Pe} &= \frac{2c\rho UR_1}{\lambda}, \\ \text{Br} &= \frac{k_1 U^{n+1} (2R_1)^{1-n} \beta_1}{\lambda}. \end{aligned}$$

где Re – число Рейнольдса, Pe – число Пекле, Br – число Бринкмана, ρ – плотность жидкой среды, c – теплоемкость, λ – коэффициент теплопроводности.

На входной границе Γ_1 заданы профили скорости и температуры, которые соответствуют одномерному неизотермическому течению рассматриваемой жидкости. На твердой стенке Γ_2 используются условия прилипания и задана нулевая безразмерная температура. На выходной границе Γ_3 реализуются мягкие граничные условия. Стоит отметить, что входная и выходная границы находятся на таком расстоянии от сечения, где происходит резкое расширение, чтобы на входе и выходе было сформировано одномерное установившееся течение. На оси симметрии Γ_4 применяются условия симметрии. Введем обозначение β , которое в дальнейшем будем называть степенью расширения, β равно отношению радиусов широкой и узкой частей трубы ($\beta = R_2/R_1$). Таким образом, граничные условия записываются в следующем виде:

$$\Gamma_1 : u = f_1(r), v = 0, \psi = \int_0^r u r dr, \omega = -\frac{\partial u}{\partial r}, \theta = f_2(r), 0 \leq r \leq 1, z = 0; \quad (5)$$

$$\Gamma_2 : \psi = \text{const}, \omega = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}, \theta = 0, r = 1, 0 < z \leq L_1; \quad (6)$$

$$\psi = \text{const}, \omega = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \theta = 0, 1 < r \leq \beta, z = L_1; \quad (7)$$

$$\psi = \text{const}, \omega = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}, \theta = 0, r = \beta, L_1 \leq z < L_1 + L_2; \quad (8)$$

$$\Gamma_3 : \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0, \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, 0 \leq r \leq \beta, z = L_1 + L_2; \quad (9)$$

$$\Gamma_4 : \psi = 0, \omega = 0, \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0, r = 0, 0 < z < L_1 + L_2, \quad (10)$$

где $f_1(r)$ и $f_2(r)$ – распределения аксиальной скорости и температуры, соответствующие установившемуся одномерному течению жидкости в бесконечной трубе постоянного радиуса в неизотермических условиях.

Методика решения

Сформулированная задача решается методом установления на основе конечно-разностной схемы переменных направлений. Метод прогонки используется для вычисления значений искомых функций.

При исследовании псевдопластичной жидкости ($n < 1$) на оси трубы возникает особенность в виде «бесконечной» эффективной вязкости, в связи с этим проводится регуляризация выражения для эффективной вязкости, заключающаяся во введении малого параметра регуляризации (ϵ). Таким образом, выражение (4) можно переписать в следующем виде:

$$B = e^{-\theta} (A + \epsilon)^{n-1}.$$

Согласно методу регуляризации, ϵ подбирается в ходе численного эксперимента так, чтобы картина течения не испытывала значимых искажений на всем промежутке изменения значений эффективной вязкости.

Для подтверждения адекватности используемой математической модели и аппроксимационной сходимости метода выполнены тестовые расчеты. В табл. 1 представлены максимальные значения u и θ при $Pe = 10$, $Br = 1$, $Re = 1$, $n = 0.8$, $\beta = 2$, полученные в скачке сечения и на выходе из трубы при изменении шага квадратной сетки h .

Таблица 1

Максимальные значения аксиальной скорости и температуры в скачке сечения и на выходе из трубы при различных значениях шага сетки

h	u_{\max} (скачок)	θ_{\max} (скачок)	u_{\max} (ВЫХОД)	θ_{\max} (ВЫХОД)
1/10	1.8778280	0.5393691	0.4774394	0.0604494
1/20	1.9017048	0.5618190	0.4779066	0.0609200
1/40	1.9114402	0.5693235	0.4778725	0.0610123
1/80	1.9158958	0.5720442	0.4778485	0.0610303

Результаты расчетов

Параметрические расчеты выполнены при изменении числа Рейнольдса ($1 \leq Re \leq 20$), числа Пекле ($1 \leq Pe \leq 100$) и показателя нелинейности жидкости ($0.6 \leq n \leq 1.4$) при фиксированном числе Бринкмана ($Br = 1$).

На рис. 2 продемонстрированы линии тока для дилатантной и псевдопластичной жидкостей, которые характеризуют структуру потока. Для обоих классов жидкостей в окрестности внутреннего угла формируется циркуляционная зона, а на некотором удалении от скачка сечения – зоны одномерного движения жидкости. По данному распределению видно, что размер циркуляционной зоны в случае неизотермического течения увеличивается с ростом показателя нелинейности жидкости n , что аналогично результатам, полученным для изотермического случая [21].

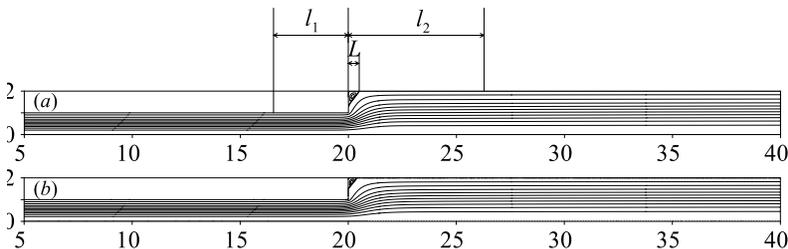


Рис. 2. Структура потока при $Pe = 100$, $Re = 1$, $Br = 1$, $\beta = 2$: $n = 1.2$ (a), $n = 0.8$ (b)
Fig. 2. Flow structure at $Pe = 100$, $Re = 1$, $Br = 1$, $\beta = 2$: $n =$ (a) 1.2 and (b) 0.8

На рис. 3 и 4 представлены изолинии температуры и эффективной вязкости с изменением числа Пекле. Распределения показывают, что увеличение данного параметра приводит к росту температуры в узкой части трубы и распространению прогретой зоны к выходному сечению. Анализ полей вязкости показывает, что большие значения наблюдаются в случае псевдопластичной жидкости в зоне циркуляционного движения и в окрестности угловой точки, тогда как для дилатантной жидкости максимальные значения вязкости сосредоточены в угловой точке. Значения вязкости уменьшаются с ростом температуры. Подобное поведение можно объяснить одновременным влиянием реологии жидкости, диссипативного эффекта и зависимости вязкости от температуры, что согласуется с более интенсивной диссипацией в узкой части и доминированием конвективного переноса тепла с ростом Pe .

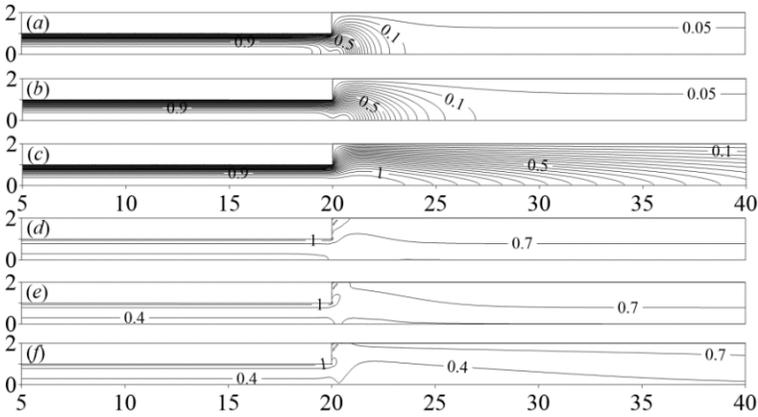


Рис. 3. Распределения температуры (a–c) и эффективной вязкости (d–f) при $Re = 1$, $Br = 1$, $n = 1.2$, $\beta = 2$: a, d – $Pe = 1$; b, e – $Pe = 10$; c, f – $Pe = 100$

Fig. 3. Distributions of (a–c) temperature and (d–f) apparent viscosity at $Re = 1$, $Br = 1$, $n = 1.2$, $\beta = 2$: $Pe = (a, d) 1$; (b, e) 10; and (c, f) 100

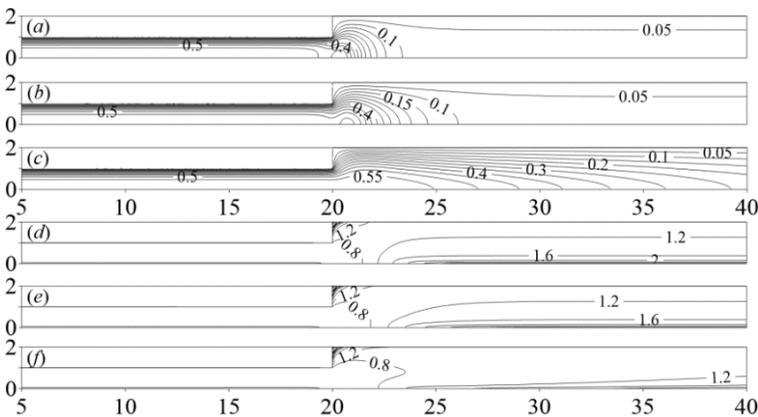


Рис. 4. Распределения температуры (a–c) и эффективной вязкости (d–f) при $Re = 1$, $Br = 1$, $n = 0.8$, $\beta = 2$: a, d – $Pe = 1$; b, e – $Pe = 10$; c, f – $Pe = 100$

Fig. 4. Distributions of (a–c) temperature and (d–f) apparent viscosity at $Re = 1$, $Br = 1$, $n = 0.8$, $\beta = 2$: $Pe = (a, d) 1$; (b, e) 10; and (c, f) 100

На рис. 5 и 6 показаны распределения аксиальной и радиальной составляющих скорости для дилатантной и псевдопластичной жидкостей. По распределению скоростей для двух рассматриваемых типов жидкостей при прочих равных условиях течения существенных различий не наблюдается: максимальные значения радиальной скорости реализуются в окрестности скачка сечения; в случае дилатантной жидкости достигаются более высокие аксиальные скорости.

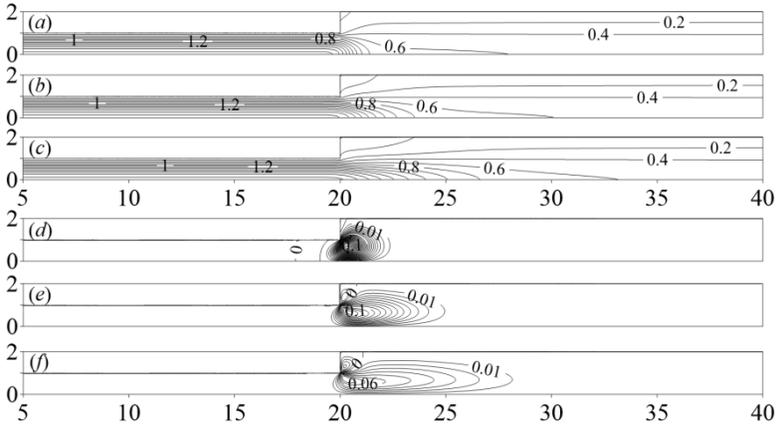


Рис. 5. Распределения аксиальной скорости (a–c) и радиальной скорости (d–f) при $Re = 1$, $Br = 1$, $n = 1.2$, $\beta = 2$: a, d – $Pe = 1$; b, e – $Pe = 10$; c, f – $Pe = 100$
Fig. 5. Distributions of (a–c) axial velocity and (d–f) radial velocity at $Re = 1$, $Br = 1$, $n = 1.2$, $\beta = 2$: $Pe = (a, d) 1$; (b, e) 10; and (c, f) 100

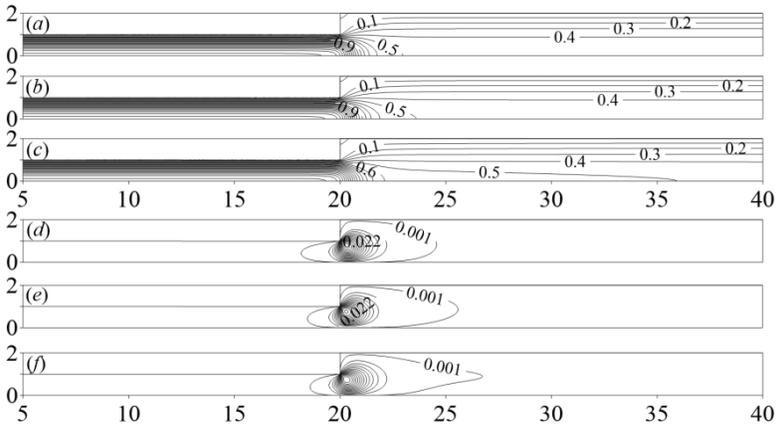


Рис. 6. Распределения аксиальной скорости (a–c) и радиальной скорости (d–f) при $Re = 1$, $Br = 1$, $n = 0.8$, $\beta = 2$: a, d – $Pe = 1$; b, e – $Pe = 10$; c, f – $Pe = 100$
Fig. 6. Distributions of (a–c) axial velocity and (d–f) radial velocity at $Re = 1$, $Br = 1$, $n = 0.8$, and $\beta = 2$: $Pe = (a, d) 1$; (b, e) 10; and (c, f) 100

На последующих рисунках представлены распределения температуры и эффективной вязкости с увеличением числа Рейнольдса. Можно заметить, что данный параметр также влияет на характер течения в трубе: с ростом Re наблюдает-

сы изменение зон двумерного течения за скачком сечения, а также зоны циркуляционного движения.

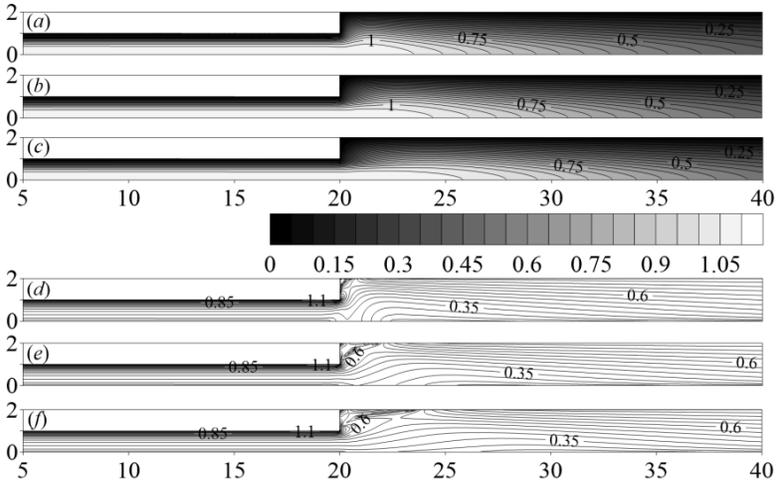


Рис. 7. Распределения температуры (a–c) и эффективной вязкости (d–f) при $Pe = 100$, $Br = 1$, $n = 1.2$, $\beta = 2$: a, d – $Re = 1$; b, e – $Re = 10$; c, f – $Re = 20$

Fig. 7. Distributions of (a–c) temperature and (d–f) apparent viscosity at $Pe = 100$, $Br = 1$, $n = 1.2$, $\beta = 2$: $Re = (a, d) 1$; (b, e) 10; and (c, f) 20

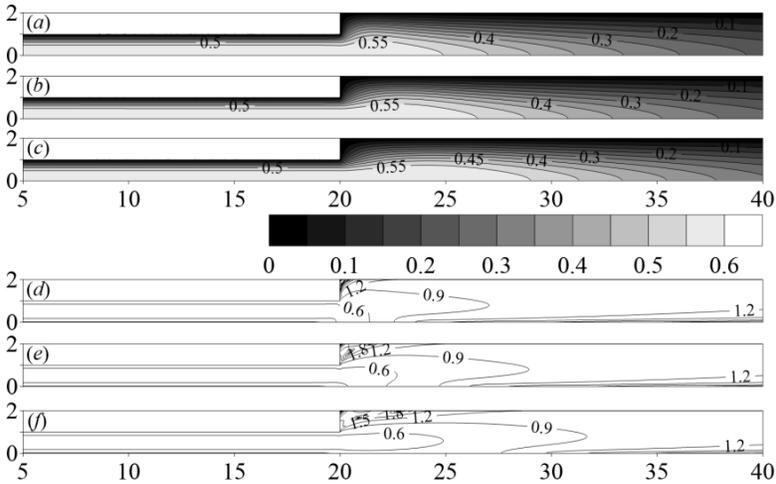


Рис. 8. Распределения температуры (a–c) и эффективной вязкости (d–f) при $Pe = 100$, $Br = 1$, $n = 0.8$, $\beta = 2$: a, d – $Re = 1$; b, e – $Re = 10$; c, f – $Re = 20$

Fig. 8. Distributions of (a–c) temperature and (d–f) apparent viscosity at $Pe = 100$, $Br = 1$, $n = 0.8$, $\beta = 2$: $Re = (a, d) 1$; (b, e) 10; and (c, f) 20

Как было отмечено ранее, структура потока при движении жидкости в трубе с режимом расширением состоит из областей одномерного и двумерного течения. Одномерные зоны течения наблюдаются вверх и вниз по потоку на некотором удалении от скачка сечения. Согласно схеме течения, изображенной на рис. 2,

в этих зонах линии тока параллельны оси трубы. На расстоянии l_1 вверх по потоку от скачка появляется радиальная составляющая скорости и реализуется двумерное течение. Сразу после резкого расширения в углу формируется область циркуляционного течения длиной L . Двумерная зона течения простирается вниз по потоку от скачка сечения на расстояние l_2 .

В табл. 2 представлены значения длин геометрических характеристик для изотермического и неизотермического случаев при $Re = 10$ и $Re = 100$ с разными значениями n . Сравнение характеристик показало, что во всех трех случаях увеличение n приводит к уменьшению l_1 и увеличению длины циркуляционной зоны L . С увеличением показателя нелинейности жидкости l_2 падает в изотермическом случае, а в неизотермическом наблюдается рост l_2 ; при этом чем выше Re , тем больше значение длины зоны двумерного течения за скачком трубы.

Таблица 2

Значения для длин зон двумерного течения при варьировании n ($Br = 1, Re = 1, \beta = 2$)

Длина зоны	Неизотермическое течение ($Pe = 10$)			Неизотермическое течение ($Pe = 100$)			Изотермическое течение		
	$n = 0.8$	$n = 1.0$	$n = 1.2$	$n = 0.8$	$n = 1.0$	$n = 1.2$	$n = 0.8$	$n = 1.0$	$n = 1.2$
l_1	0.777	0.659	0.581	0.719	0.601	0.535	0.605	0.552	0.526
l_2	6.029	6.083	6.231	35.897	39.602	42.880	3.656	2.932	2.415
L	0.372	0.431	0.482	0.391	0.450	0.495	0.453	0.559	0.647

На рис. 9 представлен график зависимости $l_2(n)$. Он демонстрирует уменьшение значения длины зоны двумерного течения за скачком сечения с ростом n для случая изотермического течения; для случая неизотермического течения при $Re = 100$ длина данной характерной структуры потока увеличивается, а при $Re = 10$ – остается почти неизменной.

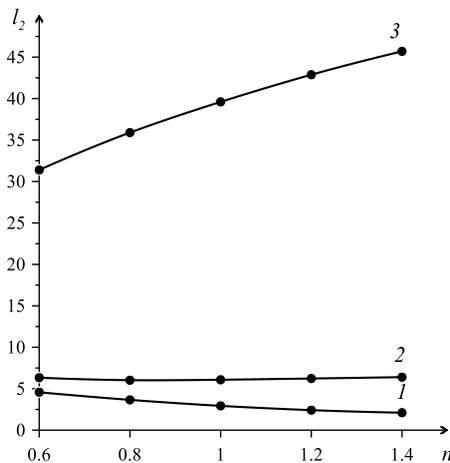


Рис. 9. Зависимость длины зоны двумерного течения после скачка сечения от показателя нелинейности жидкости для $Re = 1$: 1 – изотермический случай, 2 – неизотермический случай ($Pe = 10$), 3 – неизотермический случай ($Pe = 100$)

Fig. 9. The length of a two-dimensional flow zone after sudden expansion as a function of power-law index for $Re = 1$: 1, isothermal case; 2, non-isothermal case ($Pe = 10$); and 3, non-isothermal case ($Pe = 100$)

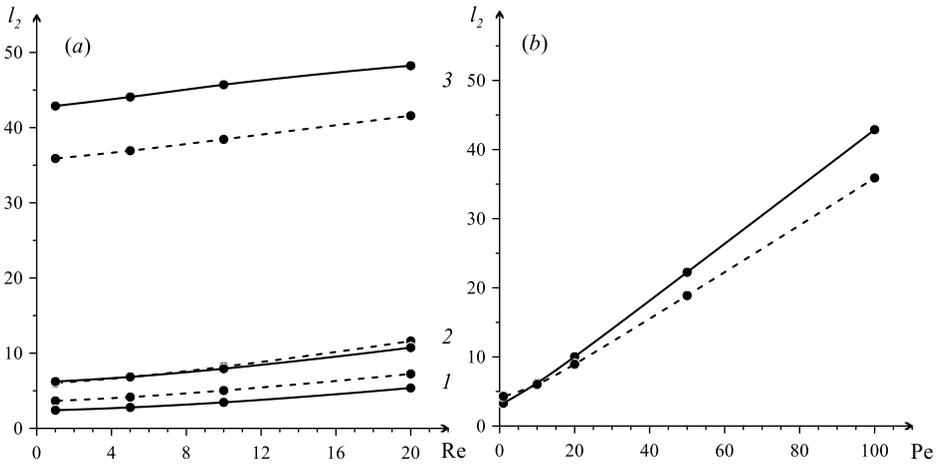


Рис. 10. Зависимость длины зоны двумерного течения за скачком сечения от Re (a) и Pe (для $Re = 1$) (b): 1 – изотермический случай, 2 – неізотермический случай ($Pe = 10$), 3 – неізотермический случай ($Pe = 100$); $n = 1.2$ (сплошная линия), $n = 0.8$ (пунктир)
Fig. 10. The length of a two-dimensional flow zone after sudden expansion as a function of (a) Re and (b) Pe (at $Re = 1$): 1, isothermal case; 2, non-isothermal case ($Pe = 10$); and 3, non-isothermal case ($Pe = 100$); $n = 1.2$ (the solid line) and $n = 0.8$ (the dashed line)

Из рис. 10, a видно, что с увеличением числа Re повышаются значения l_2 . На рис. 10, b изображен график зависимости l_2 от числа Pe . Значительное влияние этот параметр оказывает на l_2 , а именно способствует увеличению данной характеристики, что связано с преобладанием конвективного переноса тепла над кондуктивным, из-за чего происходит увеличение участка стабилизации течения после прохождения скачка сечения. При этом изменения l_1 и L в зависимости от числа Re незначительны.

Заключение

В ходе работы численно исследовано стационарное течение степенной жидкости в трубе с резким расширением в неізотермических условиях. Показано, что течение в трубах переменного радиуса формирует структуру потока, включающую в себя зоны одномерного течения, зону циркуляционного движения и зоны двумерного течения. Проведен анализ изменения зон двумерного течения в зависимости от числа Пекле, числа Рейнольдса и показателя нелинейности жидкости. Установлено, что увеличение показателя нелинейности приводит к уменьшению длины зоны двумерного течения перед скачком сечения и увеличению длины циркуляционной зоны и длины зоны двумерного течения за скачком сечения, причем более выраженный рост наблюдается при больших значениях числа Пекле.

Влияние вязкой диссипации на кинематику течения оценивалось путем сравнения неізотермического течения степенной жидкости с изотермическим течением. Для двух рассматриваемых случаев поведение зон двумерного течения при варьировании показателя нелинейности жидкости оказалось прямо противоположным. На основании полученных данных показано влияние механизмов переноса тепла и реологии жидкости на распределения температуры и эффективной

вязкости в окрестности расширения области течения. Вязкая диссипация способствует более интенсивному прогреву жидкости в узкой части трубы, а увеличение числа Re обеспечивает рост и смещение прогретой области к выходной границе. Исходя из этого, чтобы обеспечить одномерное установившееся течение вниз по потоку, необходимо удлинение широкой части трубы.

Список источников

1. *Feuerstein I.A., Pike G.K., Round G.F.* Flow in an abrupt expansion as a model for biological mass transfer experiments // *Journal of Biomechanics*. 1975. V. 8 (1). P. 41–51. doi: 10.1016/0021-9290(75)90041-x
2. *Hammad K.J., Ötügen M.V., Arik E.B.* A PIV study of the laminar axisymmetric sudden expansion flow // *Experiments in Fluids*. 1999. V. 26 (3). P. 266–272. doi: 10.1007/s003480050288
3. *Halmos A.L., Boger D.V.* The behavior of a power-law fluid flowing through a sudden expansion. Part II. Experimental verification // *AIChE Journal*. 1975. V. 21 (3). P. 550–553. doi: 10.1002/aic.690210317
4. *Furuichi N., Takeda Y., Kumada M.* Spatial structure of the flow through an axisymmetric sudden expansion // *Experiments in Fluids*. 2003. V. 34 (5). P. 643–650. doi: 10.1007/s00348-003-0612-2
5. *Perera M.G.N., Walters K.* Long range memory effects in flows involving abrupt changes in geometry // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 1977. V. 2 (2). P. 191–204. doi: 10.1016/0377-0257(77)80043-8
6. *Bell B.C., Surana K.S.* p-version least squares finite element formulation for two-dimensional, incompressible, non-Newtonian isothermal and non-isothermal fluid flow // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 1994. V. 18 (2). P. 127–162. doi: 10.1002/flid.1650180202
7. *Ternik P., Marn J., Žunič Z.* Non-Newtonian fluid flow through a planar symmetric expansion: Shear-thickening fluids // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2006. V. 135 (2-3). P. 136–148. doi: 10.1016/j.jnnfm.2006.01.003
8. *Back L.H., Roschke E.J.* Shear-Layer Flow Regimes and Wave Instabilities and Reattachment Lengths Downstream of an Abrupt Circular Channel Expansion // *Journal of Applied Mechanics*. 1972. V. 39 (3). P. 677–681. doi: 10.1115/1.3422772
9. *Mullin T., Seddon J.R.T., Mantle M.D., Sederman A.J.* Bifurcation phenomena in the flow through a sudden expansion in a circular pipe // *Physics of Fluids*. 2009. V. 21 (1). Art. 014110. doi: 10.1063/1.3065482
10. *Cantwell C.D., Barkley D., Blackburn H.M.* Transient growth analysis of flow through a sudden expansion in a circular pipe // *Physics of Fluids*. 2010. V. 22 (3). Art. 034101. doi: 10.1063/1.3313931
11. *Sanmiguel-Rojas E., del Pino C., Gutiérrez-Montes C.* Global mode analysis of a pipe flow through a 1:2 axisymmetric sudden expansion // *Physics of Fluids*. 2010. V. 22 (7). Art. 071702. doi: 10.1063/1.3458889
12. *Sanmiguel-Rojas E., Mullin T.* Finite-amplitude solutions in the flow through a sudden expansion in a circular pipe // *Journal of Fluid Mechanics*. 2011. V. 691. P. 201–213. doi: 10.1017/jfm.2011.469
13. *Macagno E.O., Hung T.-K.* Computational and experimental study of a captive annular eddy // *Journal of Fluid Mechanics*. 1967. V. 28 (01). P. 43–64. doi: 10.1017/s00222112067001892
14. *Fletcher D.F., Maskell S.J., Patrick M.A.* Heat and mass transfer computations for laminar flow in an axisymmetric sudden expansion // *Computers & Fluids*. 1985. V. 13 (2). P. 207–221. doi: 10.1016/0045-7930(85)90026-x
15. *Khodaparast S., Borhani N., Thome J.R.* Sudden expansions in circular microchannels: flow dynamics and pressure drop // *Microfluidics and Nanofluidics*. 2014. V. 17 (3). P. 561–572. doi: 10.1007/s10404-013-1321-7

16. Мамазова Д.А., Рыльцева К.Е., Шрагер Г.П. Структура потока и кинематика течения неньютоновской жидкости в трубе с внезапным расширением // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 74. С. 113–126. doi: 10.17223/19988621/74/12
17. Mirzaei Nejad M., Javaherdeh K. Numerical simulation of power-law fluids flow and heat transfer in a parallel-plate channel with transverse rectangular cavities // Case Studies in Thermal Engineering. 2014. V. 3. P. 68–78. doi: 10.1016/j.csite.2014.03.004
18. Vaz M., Zdanski P.S.B. A fully implicit finite difference scheme for velocity and temperature coupled solutions of polymer melt flow // Communications in Numerical Methods in Engineering. 2006. V. 23 (4). P. 285–294. doi: 10.1002/cnm.902
19. Zdanski P.S.B., Vaz M. Polymer melt flow in plane channels: Effects of the viscous dissipation and axial heat conduction // Numerical Heat Transfer, Part A: Applications. 2006. V. 49 (2). P. 159–174. doi: 10.1080/10407780500302059
20. Zdanski P.S.B., Vaz M. Polymer melt flow in plane channels: Hydrodynamic and thermal boundary layers // Journal of Materials Processing Technology. 2006. V. 179 (1-3). P. 207–211. doi: 10.1016/j.jmatprot.2006.03.087
21. Янков В.И., Глот И.О., Труфанова Н.М., Шакиров Н.В. Течение полимеров в отверстиях фильер. Теория, расчет, практика. М. ; Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2010. 368 с.

References

1. Feuerstein I.A., Pike G.K., Round G.F. (1975) Flow in an abrupt expansion as a model for biological mass transfer experiments. *Journal of Biomechanics*. 8(1). pp. 41–51. doi: 10.1016/0021-9290(75)90041-x
2. Hammad K.J., Ötügen M.V., Arik E.B. (1999) A PIV study of the laminar axisymmetric sudden expansion flow. *Experiments in Fluids*. 26(3). pp. 266–272. doi: 10.1007/s003480050288
3. Halmos A.L., Boger D.V. (1975) The behavior of a power-law fluid flowing through a sudden expansion. Part II. *Experimental verification*. *AIChE Journal*. 21(3). pp. 550–553. doi: 10.1002/aic.690210317
4. Furuichi N., Takeda Y., Kumada M. (2003) Spatial structure of the flow through an axisymmetric sudden expansion. *Experiments in Fluids*. 34(5). pp. 643–650. doi: 10.1007/s00348-003-0612-2
5. Perera M.G.N., Walters K. (1977) Long range memory effects in flows involving abrupt changes in geometry. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2(2). pp. 191–204. doi: 10.1016/0377-0257(77)80043-8
6. Bell B.C., Surana K.S. (1994) P-version least squares finite element formulation for two-dimensional, incompressible, non-Newtonian isothermal and non-isothermal fluid flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 18(2). pp. 127–162. doi: 10.1002/flid.1650180202
7. Ternik P., Marn J., Žunič Z. (2006) Non-Newtonian fluid flow through a planar symmetric expansion: Shear-thickening fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 135(2-3). pp. 136–148. doi: 10.1016/j.jnnfm.2006.01.003
8. Back L.H., Roschke E.J. (1972) Shear-layer flow regimes and wave instabilities and reattachment lengths downstream of an abrupt circular channel expansion. *Journal of Applied Mechanics*. 39(3). pp. 677–681. doi: 10.1115/1.3422772
9. Mullin T., Seddon J.R.T., Mantle M.D., Sederman A.J. (2009) Bifurcation phenomena in the flow through a sudden expansion in a circular pipe. *Physics of Fluids*. 21(1). Article 014110. doi: 10.1063/1.3065482
10. Cantwell C.D., Barkley D., Blackburn H.M. (2010) Transient growth analysis of flow through a sudden expansion in a circular pipe. *Physics of Fluids*. 22(3). Article 034101. doi: 10.1063/1.3313931

11. Sanmiguel-Rojas E., del Pino C., Gutiérrez-Montes C. (2010) Global mode analysis of a pipe flow through a 1:2 axisymmetric sudden expansion. *Physics of Fluids*. 22(7). Article 071702. doi: 10.1063/1.3458889
12. Sanmiguel-Rojas E., Mullin T. (2011) Finite-amplitude solutions in the flow through a sudden expansion in a circular pipe. *Journal of Fluid Mechanics*. 691. pp. 201–213. doi: 10.1017/jfm.2011.469
13. Macagno E.O., Hung T.-K. (1967) Computational and experimental study of a captive annular eddy. *Journal of Fluid Mechanics*. 28(1). pp. 43–64. doi: 10.1017/s0022112067001892
14. Fletcher D.F., Maskell S.J., Patrick M.A. (1985) Heat and mass transfer computations for laminar flow in an axisymmetric sudden expansion. *Computers & Fluids*. 13(2). pp. 207–221. doi: 10.1016/0045-7930(85)90026-x
15. Khodaparast S., Borhani N., Thome J.R. (2014) Sudden expansions in circular microchannels: flow dynamics and pressure drop. *Microfluidics and Nanofluidics*. 17(3). pp. 561–572. doi: 10.1007/s10404-013-1321-7
16. Mamazova D.A., Ryltseva K.E., Shragr G.R. (2021) Структура потока и кинематика течения не-ньютоновской жидкости в трубе с внезапным расширением [Axisymmetric flow of a non-Newtonian fluid in a channel with expansion]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika - Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 74. pp. 113-126. doi: 10.17223/19988621/74/12
17. Mirzaei N.M., Javaherdeh K. (2014) Numerical simulation of power-law fluids flow and heat transfer in a parallel-plate channel with transverse rectangular cavities. *Case Studies in Thermal Engineering*. 3. pp. 68–78. doi: 10.1016/j.csite.2014.03.004
18. Vaz M., Zdanski P.S.B. (2006). A fully implicit finite difference scheme for velocity and temperature coupled solutions of polymer melt flow. *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 23(4). pp. 285–294. doi: 10.1002/cnm.902
19. Zdanski P.S.B., Vaz M. (2006) Polymer melt flow in plane channels: Effects of the viscous dissipation and axial heat conduction. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*. 49(2). pp. 159–174. doi: 10.1080/10407780500302059
20. Zdanski P.S.B., Vaz M. (2006) Polymer melt flow in plane channels: Hydrodynamic and thermal boundary layers. *Journal of Materials Processing Technology*. 179(1-3). pp. 207–211. doi: 10.1016/j.jmatprotec.2006.03.087
21. Yankov V.I., Glot I.O., Trufanova N.M., Shakirov N.V. (2010) *Techenie polimerov v otverstiyakh fil'er. Teoriya, raschet, praktika* [Flow of polymers through spinneret holes. Theory, computation, and practice]. Moscow–Izhevsk: Regul'yarnaya i khaoticheskaya dinamika.

Сведения об авторах:

Мамазова Дилара Абдурасуловна – магистрант физико-технического факультета Томского государственного университета, лаборант ЛПОКО ФТФ, Томск, Россия. E-mail: mamazova.dilara@mail.ru

Рыльцева Кира Евгеньевна – кандидат физико-математических наук, инженер кафедры прикладной газовой динамики и горения физико-технического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: kiraworkst@gmail.com

Шрагер Геннадий Рафаилович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной газовой динамики и горения физико-технического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: shg@ftf.tsu.ru

Information about the authors:

Mamazova Dilara A. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mamazova.dilara@mail.ru

Ryltseva Kira E. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kiraworkst@gmail.com

Shrager Gennady R. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: shg@ff.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 21.06.2022; принята к публикации 03.10.2022

The article was submitted 21.06.2022; accepted for publication 03.10.2022

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/79/12

Ограниченные цилиндрическим отбойником изгибные колебания составного тяжелого горизонтального вращающегося вала

Валерий Михайлович Пестренин¹, Ирина Владимировна Пестренина²,
Олег Михайлович Перельман³, Александр Сергеевич Фадейкин⁴,
Николай Дмитриевич Деркач⁵

^{1,2} Пермский государственный национальный исследовательский университет,
Пермь, Россия

^{3,4,5} ООО «Новобур», Пермь, Россия

¹ pestreninvm@mail.ru

² ipestrenina@gmail.com

³ perelman@novobur.com

⁴ fadeikin.as@novobur.com

⁵ nikolaiderkach@gmail.com

Аннотация. На основе балочной модели горизонтального составного вала изучается влияние на характер его движения скорости вращения, сил тяжести, демпфирования и дисбаланса. Исследования проводятся численно. Показано, что силы тяжести приводят к смещению линии центров тяжести сечений вала, относительно которой он вращается, демпфирование обуславливает центрирование вала, наличие дисбаланса вызывает изгибные колебания. Изучены режимы движения вала внутри цилиндрического отбойника.

Ключевые слова: тяжелый вращающийся вал, изгибные колебания, ударное взаимодействие, волны ускорения, испытательный стенд, прямая и обратная прецессия

Для цитирования: Пестренин В.М., Пестренина И.В., Перельман О.М., Фадейкин А.С., Деркач Н.Д. Ограниченные цилиндрическим отбойником изгибные колебания составного тяжелого горизонтального вращающегося вала // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 79. С. 135–151. doi: 10.17223/19988621/79/12

Bending vibrations of a heavy horizontal composite rotating shaft limited by a cylindrical baffle

Valeriy M. Pestrenin¹, Irina V. Pestrenina², Oleg M. Perel'man³,
Aleksandr S. Fadeykin⁴, Nikolay D. Derkach⁵

^{1, 2} Perm State National Research University, Perm, Russian Federation

^{3, 4, 5} Novobur LLC, Perm, Russian Federation

¹ pestreninvm@mail.ru

² ipestrenina@gmail.com

³ perelman@novobur.com

⁴ fadeikin.as@novobur.com

⁵ nikolaiderkach@gmail.com

Abstract. Drilling of wells, especially inclined and horizontal ones, is accompanied by the intense interaction of drilling tools with the borehole walls. In-borehole impacts negatively affect the drill pipe connections, electrical connections, strength characteristics of downhole motor structural elements, etc. The impact interaction of a drilling tool with a well is experimentally studied using a test bench, where the drilling tool sample is fixed in the middle of a heavy composite shaft arranged in cylindrical roller bearings. The rotating shaft is involved in the impact interaction with a cylindrical baffle due to bending vibrations.

In this paper, a beam model of the described shaft is used to study the effect of the rotation speed, gravity forces, damping, and unbalance on the shaft motion. The research is carried out numerically using the ANSYS engineering software package. It is shown that the gravity forces shift the line of centers of gravity in shaft sections, relative to which it rotates. Damping, which is proportional to the speed, provides the shaft centering. The imbalance of the shaft causes bending vibrations. The possible modes of the shaft motion and the conditions for unstable motion are revealed. The mode of the shaft motion within a cylindrical baffle that ensures a steady periodic impact interaction is determined. This interaction induces elastic waves of the acceleration, transverse force and moments in the shaft.

Keywords: heavy rotating shaft, bending vibrations, impact interaction, acceleration waves, test bench, forward and backward whirl

For citation: Pestrenin, V.M., Pestrenina, I.V., Perelman, O.M., Fadeykin, A.S., Derkach, N.D. (2022) Bending vibrations of a heavy horizontal composite rotating shaft limited by a cylindrical baffle. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 79. pp. 135–151. doi: 10.17223/19988621/79/12

Введение

При бурении наклонных и горизонтальных скважин забойные двигатели и буровая колонна активно взаимодействуют как с забоем, так и со стенками скважины. Буровый инструмент испытывает продольные, поперечные и крутильные ударные нагрузки, которые обуславливают распространение соответствующих упругих волн в элементах конструкции. Такие динамические явления понижают

эффективность бурения, отрицательно влияют на прочностные характеристики элементов конструкции, работоспособность резьбовых соединений, электрических разъемов и пр. Вибрационные ударные воздействия на компоновку низа бурильной колонны (КНБК) с использованием современных телеметрических систем экспериментально изучались в работах [1–5]. В обзорной работе [4] по методам измерений вибраций КНБК показано, что в результате ударов уровень амплитуд ускорений может превышать значение 50g. Механическое поведение такой системы является нелинейным. Теоретическое изучение динамики КНБК, взаимодействующей со стенками скважины, проводится методами математического моделирования. В работах [6–9] строятся дискретные модели, описывающие динамику рассматриваемой системы. Изучаются возможные резонансные режимы, переходные процессы, движение колонны с прямой и обратной прецессией, влияние на эти явления параметров трения, дисбаланса, скорости вращения, механических свойств. Авторы статей [10–22] моделируют динамические процессы при бурении скважин распределенными механическими системами, как правило, составными стержнями различной жесткости. Такой подход представляется более предпочтительным, так как дает возможность устанавливать спектр собственных частот, изучать распространение упругих волн в элементах конструкции, исследовать движение буровой колонны в условиях прямой и обратной прецессии, оценивать влияние различных видов колебаний друг на друга.

Испытания бурового инструмента и элементов привода на взаимодействие со стенками скважины и ударную нагрузку обычно проводятся с использованием стендов, в которых горизонтально расположенные вращающиеся элементы бурильного инструмента подвергаются ударному взаимодействию с отбойником. В публикациях [18, 23–25] приводятся конструкции испытательных стендов, математические модели поведения испытываемого оборудования, измерительные средства. Для испытательного стенда актуальным является знание режимов его функционирования в зависимости от конструктивных параметров. Испытываемый объект обычно состоит из длинных (до 20 и более метров) цилиндрических элементов. Под действием сил тяжести такие элементы заметно прогибаются. Это обстоятельство оказывает существенное влияние на динамику объекта и в настоящее время мало изучено. Поэтому в данной работе на базе балочной модели [26] испытываемого элемента бурильного инструмента изучается влияние на его изгибные колебания скорости вращения, эксцентриситета, сил тяжести и диссипации. Формулируются условия перехода вращения вала к неустойчивому движению; устанавливаются режимы регулярного ударного взаимодействия вращающегося вала с цилиндрическим отбойником; определяются амплитуды упругих сдвиговых волн в элементах конструкции. Исследования проводятся численно с использованием инженерного пакета ANSYS.

1. Оценка влияния сил тяжести, диссипации и дисбаланса на изгибные колебания вращающегося горизонтального вала

1.1. Постановка задачи

Рассматривается прямолинейный тяжелый упругий вал, закрепленный по концам в цилиндрических подшипниках (рис. 1), имеющих общую горизонтальную

ось (ось x). В состоянии равновесия вал под действием сил тяжести прогибается. Линия центров тяжести поперечных сечений вала становится непрямолинейной.

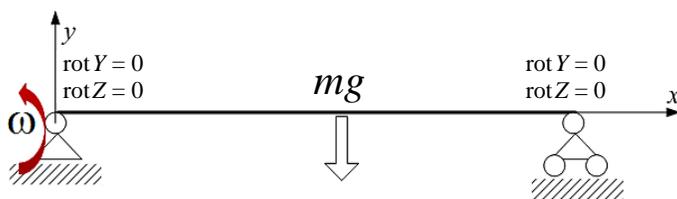


Рис. 1. Расчетная схема прямолинейного тяжелого упругого вала, вращающегося в цилиндрических подшипниках вокруг оси x

Fig. 1. Design scheme of a heavy rectilinear elastic shaft rotating in cylindrical roller bearings around the x -axis

Динамические явления, проявляющиеся во вращающемся вале, определяются частотами его собственных колебаний, условиями диссипации и наличием дисбаланса. Вращение вала осуществляется воздействием на левый его торец. Это воздействие может быть реализовано заданием во времени угла поворота торцевого сечения вала или заданием во времени крутящего момента в этом сечении. Указанные два способа приведения вала во вращение эквивалентны в следующем смысле: если вращение задано углом поворота $\varphi(t)$, в решении определяется момент, необходимый для реализации заданного угла, и наоборот.

Задача состоит в исследовании влияния прогиба вала вследствие силы тяжести, диссипации и дисбаланса на его изгибные колебания. В частности, следует ответить на вопрос: выполняет ли статический прогиб вала функцию эксцентриситета, за счет которого во вращающемся вале возникают изгибные колебания.

Исследование динамических явлений проводится методом конечных элементов с использованием балочного конечного элемента beam188 инженерного пакета ANSYS, версия 14.5 [27]. В каждом узле такого элемента рассматривается шесть независимых степеней свободы: три перемещения и три поворота, поэтому он описывает пространственное движение вала (в том числе продольные, крутильные и изгибные колебания). При расчете собственных частот колебаний используется физически и геометрически линейная модель упругого вала. При расчете переходных процессов используется физически линейная, а геометрически нелинейная упругая модель, т.е. гипотеза о малых поворотах и перемещениях не применяется. Решение нелинейных задач выполняется пошагово с использованием итерационного метода Ньютона–Рафсона средствами, реализованными в ANSYS [27]. Соответствующие выбранной модели матрицы масс и жесткости конечного элемента приведены в [28]. Конечно-элементное матрично-векторное разрешающее динамическое уравнение модели представляется в виде [27–30]:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\}, \quad (1)$$

здесь $\{u\}$ – глобальный вектор узловых перемещений; $[M]$, $[C]$, $[K]$ – «глобальные» матрицы масс, демпфирования и жесткости; $\{F\}$ – глобальный вектор нагрузки, точки над $\{u\}$ – дифференцирование по времени. Учитывается лишь жесткостное демпфирование, поэтому матрица демпфирования представляется в виде:

$$[C] = \beta[K] - . \quad (2)$$

Коэффициент демпфирования β характеризует рассеивание энергии во всех конструктивных элементах объекта – материале, подшипниках, элементах крепления, в соединениях, приводе вращения и т.д., и зависит от параметров станда и условий испытаний. В настоящей работе коэффициент β принимался варьируемым параметром.

1.2. Численный анализ движения вала в зависимости от сил тяжести, диссипации и дисбаланса

Вычисления показывают, что при отсутствии дисбаланса и диссипации вне зависимости от скорости вал вращается вокруг линии центров тяжести сечений в статически равновесном состоянии. То есть прогиб вала, обусловленный силами тяжести, не исполняет роль эксцентриситета, вызывающего его вынужденные изгибные колебания. Численные результаты в разд. 1 приводятся для вала – стальной трубы ($E = 2e11$ Па, $\nu = 0.3$, $\rho = 7800$ кг/м³) длиной 12 м (внутренний радиус 0,04 м; наружный 0,065 м). На рис. 2. показана зависимость прогиба средней точки вала в вертикальной плоскости XY от времени. За время t_0 вал из первоначально прямолинейного состояния приходит в равновесное состояние, обусловленное силами тяжести, с момента t_0 начинается вращение вала.

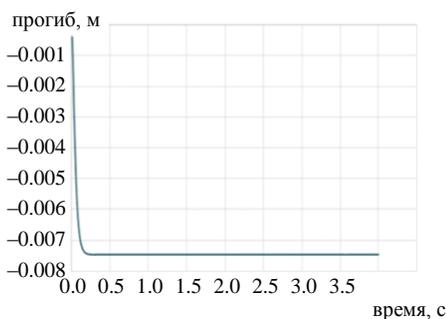


Рис. 2. Перемещение центральной точки вала в плоскости XY (диссипация и дисбаланс отсутствуют); $t_0 = 0.4$ с

Fig. 2. Displacement of a central shaft point in the XY-plane (dissipation and imbalance are absent); $t_0 = 0.4$ s

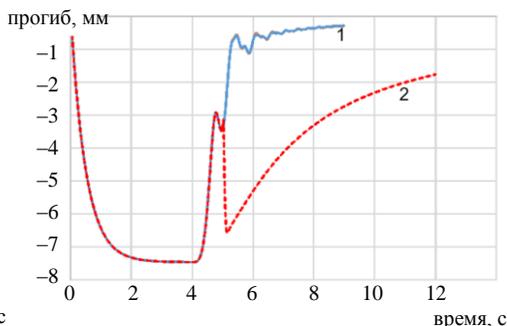


Рис. 3. Зависимость прогиба в средней точке вала от времени при линейно возрастающей угловой скорости его вращения и диссипации β : $1 - \beta = 0.5$; $2 - \beta = 0.05$; $t_0 = 4$ с

Fig. 3. Deflection at a shaft midpoint as a function of time with a linearly increasing angular velocity of the shaft and dissipation β : $\beta = (1) 0.5$ and (2) 0.05 ; $t_0 = 4$ s

Оценку влияния диссипации (сопротивления, пропорционального скорости) на характер движения тяжелого вращающегося вала дает рис. 3, из которого видно, что с увеличением частоты вращения вала прогиб уменьшается (вал центрируется) при любом коэффициенте диссипации. Причем чем больше коэффициент диссипации, тем быстрее с ростом частоты вращения вала происходит его центрирование. Вычисления показывают, что при постоянной скорости вращения вала ось центров тяжести сечений принимает стационарное состояние. Это обстоятельство можно использовать для управления изгибными колебаниями вала посредством изменения скорости его вращения.

Для оценки влияния дисбаланса на движение тяжелого горизонтального вала примем, что ось вала незначительно искривлена в плоскости XU по закону $y = \varepsilon \sin(\pi x / l)$. Искривление (заданный дисбаланс) вызывает при вращении вала центробежные силы инерции и, следовательно, изгибные колебания. Учитываются силы тяжести, действующие на вал, и описанная выше диссипация. При наличии дисбаланса возможны три вида движения вала: хаотическое, с прямой и обратной прецессией (chaotic whirl, forward whirl, backward whirl). При движении с прямой прецессией направление вращения линии центров тяжести сечений совпадает с направлением вращения сечений. Такое движение характерно при невысоких скоростях вращения вала.

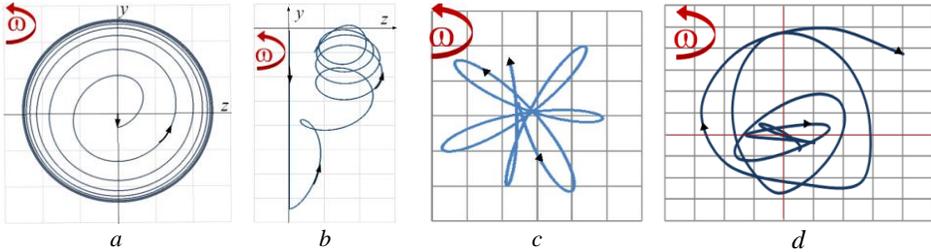


Рис. 4. Годограф радиуса-вектора средней точки вала при выходе на стационарную скорость вращения (a), при линейном возрастании скорости (b), в окрестности перехода движения от прямой прецессии к обратной при хаотическом движении (c) и с обратной прецессией (d)

Fig. 4. Hodograph of a radius-vector of the shaft midpoint: (a) while reaching the steady rotational speed, (b) at a linear speed increase, (c) in the vicinity of the forward-to-backward whirl transition during chaotic motion, and (d) at a backward whirl

На рис. 4, a приводится годограф радиуса-вектора средней точки вала при выходе скорости его вращения на постоянную околорезонансную частоту. Видно, что вал центрируется, центры сечений в предельном случае описывают окружности. Характер движения – прямая прецессия. Годограф радиуса-вектора на рис. 4, b отражает движение средней точки тяжелого вала с ростом скорости его вращения. Из рисунка видно, что вследствие центрирования ось вращения средней точки вала стремится к оси OX . Характер движения – прямая прецессия.

При дальнейшем увеличении скорости вращения вала достигается частота, начиная с которой прямая прецессия сменяется хаотическим движением (рис. 4, c), а затем обратной прецессией. Рисунок 4, d отражает это явление: движение средней точки вала против часовой стрелки сменяется на движение по часовой стрелке. Амплитуда изгибных колебаний возрастает.

1.3. Исследование устойчивости вращения вала

Не вращающийся и вращающийся вал представляют собой две различные механические системы. Они имеют различные спектры собственных частот, по-разному реагируют на возмущения. На рис. 5 показана совмещенная диаграмма Кэмпбелла для не вращающегося и вращающегося валов при отсутствии диссипации. По оси абсцисс для не вращающегося вала откладывается только частота возмущения, для вращающегося – и частота возмущения, и скорость вращения

вала Ω (рад/с); по оси ординат – собственная частота ω (Гц). Кривые на диаграмме подписаны двойным индексом: первый отвечает системе (не вращающийся вал – 1; вращающийся – 2), второй индекс обозначает номер собственной частоты. Пересечение кривых с прямой $\Omega = \omega$ определяет резонансные режимы.

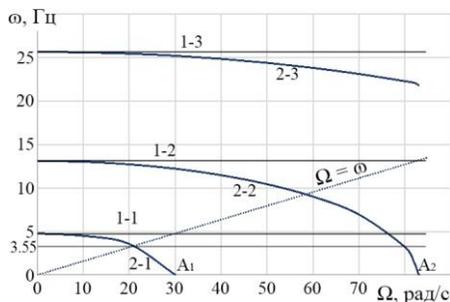


Рис. 5. Совмещенная диаграмма Кэмпбелла для не вращающегося и вращающегося вала
Fig. 5. The combined Campbell diagrams for non-rotating and rotating shafts



Рис. 6. Амплитудно-частотная характеристика средней точки вала: 1 – для не вращающегося; 2 – для вращающегося вала
Fig. 6. Amplitude-frequency response of the shaft midpoint for: 1, non-rotating and 2, rotating shaft

Для примера на рис. 6 представлена амплитудно-частотная характеристика в средней точке вала для обеих рассматриваемых систем. Возмущение осуществляется гармонической поперечной силой, приложенной в той же точке. Кривая 2 соответствует вращению вала с угловой скоростью 20 рад/с (вблизи резонансной частоты 3.55 Гц).

Рисунок 6 показывает, что диаграмма Кэмпбелла достоверно отражает резонансные явления. Не вращающийся вал откликается на возмущение на первой частоте 4.8 Гц, а вращающийся – на 3.6 Гц. Из диаграммы Кэмпбелла, построенной при отсутствии диссипации (см. рис. 5), видим, что с ростом скорости вращения первые собственные частоты колебаний вала последовательно обращаются в нуль. Обращение в нуль первой собственной частоты свидетельствует о потере устойчивости. Обращение в нуль первых двух собственных слагаемых приводит к появлению в решении задачи о свободных колебаниях динамической системы решений вида $t \sin \omega t$, амплитуда колебаний неограниченно возрастает [31].

Изучим влияние коэффициента диссипации β на устойчивость динамического состояния не вращающегося и вращающегося валов. Признаком неустойчивого состояния вала считается появление собственных частот с положительной вещественной частью. В табл. 1 приводятся значения собственных частот $\omega = \xi \pm i\eta$ не вращающегося вала для параметра β в диапазоне $0 \div 0,03$.

При ненулевых значениях коэффициента диссипации собственные частоты комплексные с отрицательной действительной частью. Каждому значению параметра β отвечает конечное число первых корней с ненулевой мнимой частью. С увеличением коэффициента демпфирования количество таких корней сокращается. Например, в рассматриваемом случае (см. табл. 1) для $\beta = 0.03$ имеется только один корень с ненулевой мнимой частью. Далее рассмотрим вращающийся вал. Влияние диссипации на состояние вращающегося вала характеризует табл. 2.

Таблица 1

Зависимость вещественной ξ и мнимой η частей собственных частот ($\Gamma\zeta$) не вращающегося вала от коэффициента демпфирования β

№ частоты	Коэффициент диссипации β									
	0.000		0.001		0.005		0.01		0.03	
	η	ξ	η	ξ	η	ξ	η	ξ	η	
1	4.77	-0.07	4.77	-0.36	4.76	-0.71	4.72	-2.14	4.26	
2	13.13	-0.54	13.11	-2.71	12.84	-5.41	11.96	-5.31	0.00	
3	25.,68	-2.07	25.59	-10.36	23.50	-15.92	0.00	-5.31	0.00	
4	42.33	-5.63	41.96	-31.83	0.00	-15.92	0.00	-5.31	0.00	

Таблица 2

Вещественные ξ и мнимые η части собственных частот вращающегося вала ($\Gamma\zeta$) в зависимости от параметра демпфирования β и скорости вращения вала Ω

	№ частоты	Скорость вращения вала Ω , рад/с									
		10		29.9		30		82		82.5	
		ξ	η	ξ	η	ξ	η	ξ	η	ξ	η
$\beta=0$	1	0	4.496	0	0.321	0	0	0	0	0	0
	2	0	13.03	0	12.233	0	12.23	0	1.419	0	0
	3	0	25.63	0	25.233	0	25.23	0	22.12	0	22.069
$\beta=0.001$	1	-0.064	4.495	-3E-04	0.321	0.220	0.000	12.620	0.000	12.804	0.000
						-0.221	0.000	-11.692	0.000	-11.851	0.000
	2	-0.533	13.018	-0.470	12.224	-0.470	12.218	-0.006	1.419	1.468	0.000
									-1.454	0.000	
3	-2.063	25.544	-2.000	25.153	-2.000	25.150	-1.537	22.06	-1.524	21.970	
$\beta=0.003$	1	-0.127	4.494	-1E-03	0.3209	0.221	0.000	13.617	0.000	13.308	0.000
						-0.22	0.000	-10.84	0.000	-11.401	0.000
	2	-1.067	12.99	-1.41	12.152	-0.409	12.15	-0.019	1.419	1.477	0.000
									-1.448	0.000	
3	-4.127	25.29	-6.000	24.510	-5.999	24.51	-4.608	21.63	-3.047	21.52	
$\beta=0.006$	1	-0.38	4.479	-0.002	0.3209	0.215	0.000	15.143	0.000	15.374	0.000
						-0.213	0.000	-9.68	0.000	-9.733	0.000
	2	-3.199	12.63	-2.821	11.903	-2.818	11.9	-0.038	1.419	0.200	0.000
									-0.198	0.000	
3	-12.38	22.44	-12.00	22.196	-11.998	22.19	-9.219	20.1	-10.711	19.30	

В рассматриваемом случае следует различать два механизма обращения в нуль мнимых частей собственных частот. Первый механизм связан с демпфированием. Вследствие демпфирования мнимые части высоких частот собственных колебаний обращаются в нуль (как и в случае не вращающегося вала).

Второй механизм связан с вращением вала. При возрастании скорости вращения мнимые части низких (первых) собственных частот обращаются в нуль (см. рис. 5). Из табл. 2 видно, что существуют скорости вращения вала, при которых одновременно действительная часть собственных корней становится положительной, а мнимая – нулем. Назовем такие скорости критическими. Таблица 2 показывает, что критические скорости не зависят от диссипации. Это означает, что они могут быть найдены для вращающегося вала с нулевым демпфированием, т.е. из диаграммы Кэмпбелла (см. рис. 5).

Демонстрацией неустойчивого движения вращающегося вала являются приведенные в п. 1.2 примеры хаотического движения и перехода к обратной прецессии.

2. Взаимодействие тяжелого горизонтального вращающегося вала с цилиндрическим отбойником

Влияние волновых процессов, возникающих вследствие ударного взаимодействия бурильного инструмента со стенками скважины, на его прочностные характеристики и эксплуатацию резьбовых и электрических разъемов экспериментально изучается, в частности, в горизонтальных стендах. При создании таких стендов должно быть реализовано устойчивое ударное взаимодействие испытуемого образца бурильного инструмента с отбойником. Эта механическая задача рассматривается в данном разделе. В п. 2.1 и 2.2 исследуются изгибные колебания элемента бурильного инструмента, закрепленного с помощью концевых штанг в горизонтальном стенде. Объект представляет собой составной вал из 11 участков общей длиной 18 м. В п. 2.3 рассматривается тот же элемент бурильного инструмента, закрепленный в стенде с помощью коротких искривленных штанг. Общая длина объекта 13 м.

2.1. Ударное взаимодействие с отбойником невесомого вала

Рассматривается задача о взаимодействии составного невесомого вращающегося вала с цилиндрическим отбойником. Вал моделируется закрепленной в цилиндрических шарнирах упругой составной балкой, вращающейся с угловой скоростью $\omega(t)$ вокруг своей оси (рис. 7). Вблизи средней точки балки ее прогиб ограничен отбойником в виде цилиндрической трубы с радиусом R и длиной a . Балка считается невесомой, труба – абсолютно жесткой и жестко закрепленной.

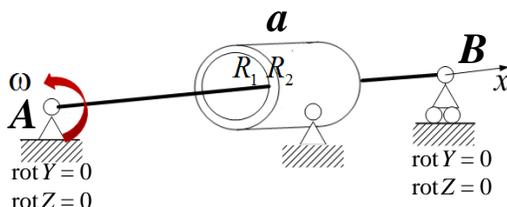


Рис. 7. Расчетная схема составного невесомого вращающегося вала с цилиндрическим отбойником

Fig. 7. Design scheme of a weightless composite rotating shaft with a cylindrical baffle

Примем, что ось балки незначительно искривлена по закону $y = \delta \sin(\pi x / l)$. Искривление оси обуславливает наличие сил инерции при ее вращении, вызывающих изгибные колебания. Когда частота вращения ω близка к первой собственной частоте изгибных колебаний балки, амплитуда колебаний становится значительной и балка взаимодействует с ограничивающим ее движение отбойником. Задача состоит в исследовании такого взаимодействия, в частности определении контактного усилия, влияния контакта на параметры состояния балки (ускорение, поперечные силы и моменты и т.п.), определении стационарного движения.

Рассматривается переходный режим из состояния покоя с линейно возрастающей скоростью вращения вала до близкой к первой резонансной частоте, затем скорость вращения поддерживается постоянной. На рис. 8 представлена траектория средней точки балки в плоскости, перпендикулярной ее оси, во времени. Из рисунка видно, что прогиб вала в этой точке с течением времени стремится к своему максимальному значению, равному радиусу трубы, при этом движение балки выходит на стационарное, в котором она практически скользит по поверхности отбойника.

Наибольшее воздействие отбойника на балку проявляется при первом контакте (рис. 8, точка A_1). Результаты этого взаимодействия представлены на рис. 8, 9.

Максимальное узловое контактное усилие достигается в средней точке. На рис. 9 представлена суммарная контактная реакция отбойника на балку во времени, ее максимальное значение в рассматриваемом примере 1.82 т (момент времени T^*). Время контакта 670 мкс.

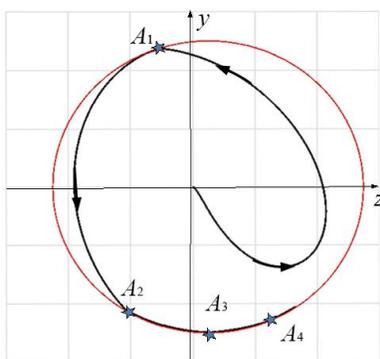


Рис. 8. Голограф радиуса-вектора центральной точки балки в переходном режиме движения

Fig. 8. Hodograph of a radius-vector of the central beam point in a transitional regime

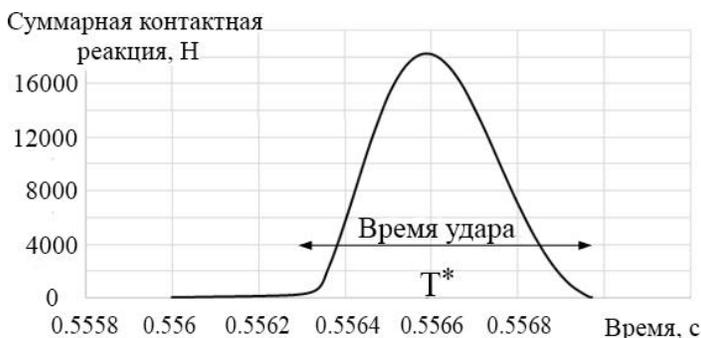


Рис. 9. Суммарная контактная реакция отбойника на балку во времени
Fig. 9. The total contact reaction of the baffle on the beam versus time

Возникающие в результате удара ускорения распространяются в виде упругой сдвиговой волны от точки контакта к концам балки. Максимальное значение ускорения достигает 71g.

2.2. Взаимодействие с отбойником тяжелого вала

Рассматривается движение тяжелого составного вала (см. разд. 1) с монотонно возрастающей скоростью вращения. В момент начала движения ($t = t_0$) вал, прогнувшись под действием сил тяжести, находится в состоянии статического равновесия в контакте с отбойником. Принимается, что силы трения отсутствуют (оценка показала, что влияние сил трения пренебрежимо мало), учитываются диссипация и дисбаланс, как в п. 2.1. На рис. 10 приведена траектория движения центральной точки вала. Анализируя эту траекторию, выделяем следующие участки движения вала:

- a) скольжение по отбойнику около точки контакта без отрыва;
- b) траектория рассматриваемой точки – семейство кривых с отрывом и ударом об отбойник с возрастающей амплитудой (прямая прецессия);
- c) семейство кривых – вал отрывается от отбойника (прекращается ударное взаимодействие вала и отбойника), амплитуда колебаний уменьшается, вал центрируется (прямая прецессия);
- d) хаотическое движение и смена прямой прецессии на обратную (окрестность критической скорости вращения);
- e) неустойчивое движение, затем движение в контакте с отбойником (обратная прецессия).

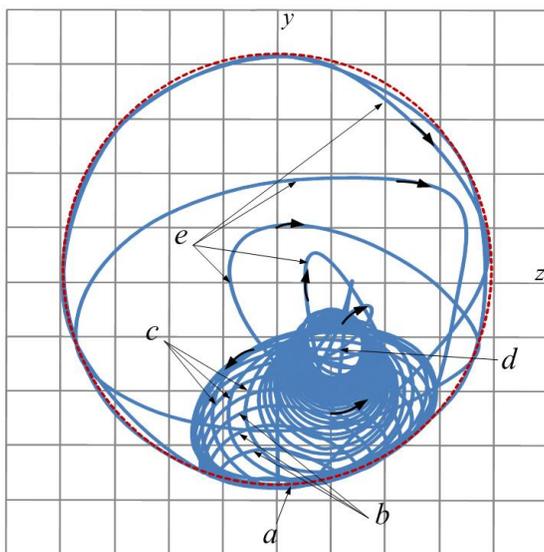


Рис. 10. Траектория средней точки вала при монотонном возрастании скорости его вращения
Fig. 10. Trajectory of the shaft midpoint at a monotonic rotation speed increase

Из приведенной картины движения вала видно, что ударное взаимодействие вала с отбойником может быть реализовано вблизи первой резонансной частоты при движении с прямой прецессией или со скоростью выше критической при движении с обратной прецессией. При этом заметим, что в первом случае движение устойчиво, а во втором – неустойчиво.

2.3. Устойчивое ударное взаимодействие вала с отбойником

Приведенное выше исследование показывает, что изгибные колебания тяжелого составного вращающегося вала, обеспечивающие ударное взаимодействие с отбойником, реализуются за счет его дисбаланса. Этот параметр испытываемого объекта не может обеспечить необходимый уровень изгибных колебаний, так как при изготовлении элементов бурильного инструмента дисбаланс минимизируется. Управление дисбалансом в стенде предлагается осуществлять во вспомогательных устройствах крепления.

В рассматриваемом ниже примере управление дисбалансом достигается за счет незначительного искривления штанг, несущих объект исследования (рис. 11). Такой прием позволяет обеспечить устойчивый режим ударного взаимодействия объекта исследования с отбойником.

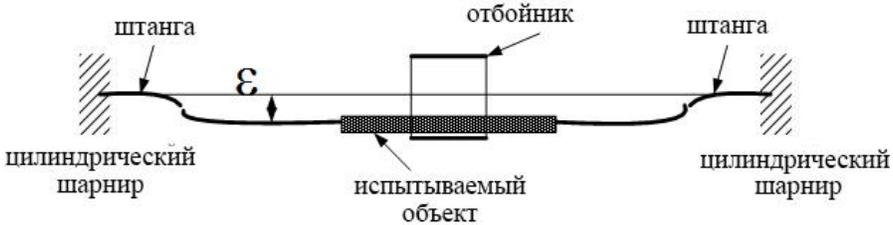


Рис. 11. Расчетная схема вращающегося вала с искривленными штангами и цилиндрическим отбойником

Fig. 11. Design scheme of the rotating shaft with curved rods and a cylindrical baffle

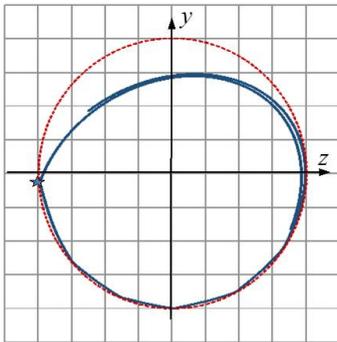


Рис. 12. Устойчивое стационарное движение на первой резонансной частоте

Fig. 12. Steady motion on the first resonant frequency

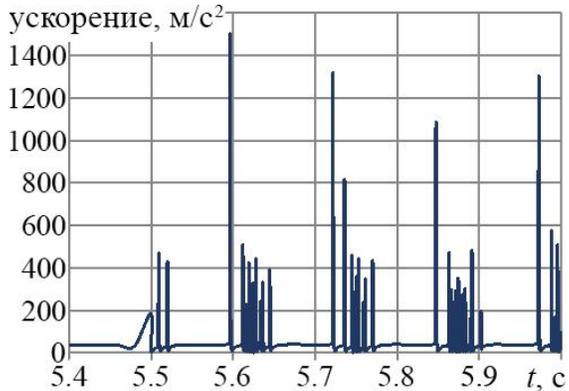


Рис. 13. Ускорения в средней точке вала. Шаг вывода по времени 0.0007 с

Fig. 13. Acceleration at the shaft midpoint. The output time step is 0.0007 s

Этот устойчивый режим реализуется при скорости вращения вала на околорезонансной частоте. При этом срединная точка вала совершает движение по траектории, представленной на рис. 12. В вале, периодически ударяющемся об отбойник, порождаются ускорения порядка 150 g (рис. 13).

Заключение

Проведено исследование условий устойчивого ударного взаимодействия с отбойником тяжелого вращающегося вала при его изгибных колебаниях. Причиной таких колебаний является его дисбаланс. Выявлены возможные режимы движения в зависимости от частоты вращения вала, сформулирован критерий перехода к неустойчивому движению. Показано, что вследствие ударного контактного взаимодействия в вале реализуются сдвиговые ускорения значительной амплитуды. Применительно к испытаниям ударного взаимодействия элементов бурового оборудования с отбойником предложено управление дисбалансом посредством незначительного искривления крепежных штанг. Результаты исследования найдут применение, в частности, при назначении параметров испытательных стендов.

Список источников

1. *Wolf S.F., Zacksenhouse M., Arian A.* Field Measurements of Downhole Drillstring Vibrations // Society of Petroleum Engineers. 1985. January. Art. 14330. doi: 10.2118/14330-MS
2. *Macpherson J.D., Mason J.S., Kingman J.E.E.* Surface Measurement and Analysis of Drillstring Vibrations While Drilling // Society of Petroleum Engineers. 1993. January. doi: 10.2118/25777-MS
3. *Heisig G., Neubert M.* Lateral Drillstring Vibrations in Extended-Reach Wells // Society of Petroleum Engineers. 2000. January. doi: 10.2118/59235-MS
4. *Wang Y., Shen Y., Charter M., Skoff G.* High Frequency Vibration Measurement Coupled with Time-Based Dynamic Simulations: New System to Predict/Solve Instability Issues // Society of Petroleum Engineers Annual Technical Conference and Exhibition, Amsterdam, The Netherlands, October 2014. SPE-170708-MS. doi: 10.2118/170708-MS
5. *Хузина Л.Б., Фаткуллин Р.Х., Шайхутдинова А.Ф., Фахрутдинов Ш.Х., Еромасов А.В.* Промысловые испытания компоновки низа бурильной колонны с усиленной динамической нагрузкой на долото // Территория «НЕФТЕГАЗ». 2016. № 12. С. 20–24.
6. *Xie D., Huang Z., Ma Y., ..., Kapitaniak M., Wiercigroch M.* Nonlinear dynamics of lump mass model of drill-string in horizontal well // International Journal of Mechanical Sciences. 2020. V. 174. Ary. 105450. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2020.105450
7. *Pabon J., Wicks N., Chang Y., Dow B., Harmer R.* Modeling transient vibrations while drilling using a finite rigid body approach // Society of Petroleum Engineers – SPE Deepwater Drilling and Completions Conference. 2010. P. 293–307. doi: 10.2118/137754-MS
8. *Yigit A.S., Christoforou A.P.* Coupled torsional and bending vibrations of actively controlled drillstrings // Journal of Sound and Vibration. 2000. V. 234 (1), P. 67–83. doi: 10.1006/jsvi.1999.2854
9. *Vijayan K., Vlajic N., Friswell M.I.* The influence of drillstring-borehole interaction on backward whirl // Proceedings of ISMA 2014 – International Conference on Noise and Vibration Engineering on Uncertainty in Structural Dynamics 2014. 2014. P. 1267–1280. URL: <https://www.researchgate.net/publication/267208240>
10. *Jansen J.D.* Nonlinear dynamics of oil well drill strings : Thesis for PhD. Delft : Delft University Press, 1993. 241 p.
11. *Сунцов В.В., Быков И.Ю., Заикин С.Ф.* Исследование динамики КНБК в процессе бурения скважины // Строительство нефтяных и газовых скважин на суше и на море. 2020. № 2 (326). С. 10–15.
12. *Деркач Н.Д., Пестренин В.М., Пестренина И.В.* Влияние КНБК на динамику винтового забойного двигателя ДР-240.NGT при бурении долотами большого диаметра // Нефть. Газ. Новации. 2017. № 11. С. 35–39.

13. Шадрина А.В. Теоретические и экспериментальные исследования волновых процессов в колонне труб при бурении скважин малого диаметра из подземных горных выработок : дис. ... д-ра техн. наук : 25.00.14. Томск, 2014. 272 с.
14. Хузина Л.Б., Шайхутдинова А.Ф., Габзалилова А.Х. Аналитические исследования работы элемента динамической компоновки низа буровой колонны // Нефтяная провинция. 2018. № 3 (15). С. 117–126. doi: 10.25689/NP.2018.3.117-126
15. Zhong W., Li S., Xiong Y., Fu J., Su Y. The Dynamics Characteristics and Strength Check of Drilling String in Ultra-deep Horizontal Well // Journal of Southwest Petroleum University. 2020. V. 42 (4). P. 135–143.
16. Li Z., Zhang C., Ren W., Ma J. Study of Radial Vibration Impact on Friction and Torque of Rotary Drill String // Shock and Vibration. 2020. Art. 8852530. doi: 10.1155/2020/8852530
17. Залаяев М.Ф. Исследование вибрации при бурении скважин на термокарстовом газоконденсатном месторождении // Нефтегазовое дело. Геология. Геофизика. Бурение. 2015. Т. 13 (4). С. 36–40.
18. Залаяев М.Ф., Ямалиев В.У. Исследования влияния искривления ствола скважины на колебательные процессы компоновки низа буровой колонны // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. Машиностроение и машиноведение. 2017. Т. 19, № 1 (2). С. 229–234.
19. Cunha A., Soize C., Sampaio R. Computational modeling of the nonlinear stochastic dynamics of horizontal drillstrings // Computational Mechanics. 2015. V. 56 (5). P. 849–878. doi: 10.1007/s00466-015-1206-6
20. Zhao D., Hovda S., Sangesland S. The effect of stick slip vibration on the backward whirl of bottom hole assembly in drillstring // Proceedings of the International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering. 2016. Art. OMAE 8, V008T11A042. doi: 10.1115/OMAEE2016-54478
21. Christoforou A.P., Yigit A.S. Fully coupled vibrations of actively controlled drillstrings // Journal of Sound and Vibration. 2003. V. 267 (5). P. 1029–1045. doi: 10.1016/S0022-460X(03)00359-6
22. Yamaliev V., Imaeva E., Salakhov T. About the deep drilling equipment technical condition recognition method // Oil and Gas Business. 2009. № 1. P. 1–7. doi: 10.1.1.611.4021
23. Малюгин А.А., Казунин Д.В. Расчет колебаний буровой колонны в режиме реального времени в составе тренажерных систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13 (1). С. 91–101. doi: 10.21638/11701/spbu10.2017.109
24. Li W., Huang G., Ni H., ..., Huang B., Jiang W. Experimental study and mechanism analysis of the motion states of bottom hole assembly during rotary drilling // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2020. V. 195. Art. 107859. doi: 10.1016/j.petrol.2020.107859
25. Муртазин И.Р., Лукин А.В., Попов И.А. Исследование изгибных колебаний вращающихся валов с распределенными инерционными, упругими и эксцентриситетными характеристиками // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2019. Т. 19 (4). С. 756–766. doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-4-756-766
26. Деркач Н.Д., Перельман О.М., Пестренин В.М., Пестренина И.В., Коротаев А.Ю., Ландик Л.В., Мингараев В.Г., Фадейкин А.С. Балочная модель роторно управляемой системы с электродвигателем // Булатовские чтения : сб. ст. Краснодар : Юг, 2020. Т. 6: Технические и технологические разработки. Электрооборудование в нефтегазовой отрасли. С. 92–102. URL: <http://id-yug.com/images/id-yug/Bulatov/2020/6/PDF/2020-6.pdf>
27. Басов К.А. ANSYS : справочник пользователя. М. : ДМК Пресс, 2005. 640 с.
28. Леонтьев Н.В. Применение системы ANSYS к решению задач модального и гармонического анализа : учеб.-метод. материал по программе повышения квалификации «Информационные системы в математике и механике». Н. Новгород, 2006. 101 с.
29. Дьяков И.Ф., Чернов С.А., Черный А.Н. Метод конечных элементов в расчетах стержневых систем : учеб. пособие. Ульяновск : УлГТУ, 2010. 133 с.

30. Сильченко П.Н., Кудрявцев И.В., Гоцелюк О.Б., Новиков Е.С. Способ расчета протяженных тонкостенных конструкций с не осесимметричным поперечным сечением // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана : электронный журнал. 2014. № 11. С. 724–747. doi: 10.7463/1114.0737276
31. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. 3-е изд. М. : Наука, 1991. 256 с.

References

1. Wolf S.F., Zacksenhouse M., Arian A. (1985) Field measurements of downhole drillstring vibrations. *Society of Petroleum Engineers*. Article 14330. doi: 10.2118/14330-MS
2. Macpherson J.D., Mason J.S., Kingman J.E.E. (1993) Surface measurement and analysis of drillstring vibrations while drilling. *Society of Petroleum Engineers*. doi:10.2118/25777-MS
3. Heisig G., Neubert M. (2000) Lateral drillstring vibrations in extended-reach wells. *Society of Petroleum Engineers*. doi: 10.2118/59235-MS
4. Wang Y., Shen Y., Charter M., Skoff G. (2014) High frequency vibration measurement coupled with time-based dynamic simulations: new system to predict/solve instability issues. *Society of Petroleum Engineers Annual Technical Conference and Exhibition*. Article SPE-170708-MS. doi: 10.2118/170708-MS
5. Khuzina L.B., Fatkullin R.Kh., Shaykhutdinova A.F., Fakhrutdinov Sh.Kh., Eromasov A.V. (2016) Promyslovye ispytaniya komponovki niza buril'noy kolonny s usilennoy dinamicheskoy nagruzkoy na doloto [Field tests of the bottom-hole assembly (BHA) with increased dynamic load on the orill bit]. *Territoriya «NEFTEGAZ» – Oil and Gas Territory*. pp. 20–24.
6. Xie D., Huang Z., Ma Y., Vaziri V., Kapitaniak, M., Wiercigroch, M. (2020) Nonlinear dynamics of lump mass model of drill-string in horizontal well. *International Journal of Mechanical Sciences*. 174. Article 105450. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2020.105450
7. Pabon J., Wicks N., Chang Y., Dow B., Harmer R. (2010) Modeling transient vibrations while drilling using a finite rigid body approach. *Society of Petroleum Engineers – SPE Deepwater Drilling and Completions Conference*. pp. 293–307. doi: 10.2118/137754-MS
8. Yigit A.S., Christoforou A.P. (2000) Coupled torsional and bending vibrations of actively controlled drillstrings. *Journal of Sound and Vibration*. 234(1). pp. 67–83. doi: 10.1006/jsvi.1999.2854
9. Vijayan K., Vlajic N., Friswell M.I. (2014) The influence of drillstring-borehole interaction on backward whirl. *Proceedings of ISMA 2014 – International Conference on Noise and Vibration Engineering and USD 2014 – International Conference on Uncertainty in Structural Dynamics*. pp. 1267–1280.
10. Jansen J.D. (1993) *Nonlinear Dynamics of Oil Well Drill Strings*. Ph.D. thesis, Delft University, Stevinweg.
11. Sunstzov V.V., Bykov I.Yu., Zaikin S.F.(2020) Issledovanie dinamiki KNBK v protsesse bureniya skvazhiny [Research of bha dynamics in the process of a well drilling]. *Stroitel'stvo neftyanykh i gazovykh skvazhin na sushe i na more – Construction of Oil and Gas Wells on Land and Sea*. 2(326). pp. 10–15.
12. Derkach N.D., Pestrenin V.M., Pestrenina I.V. (2017) Vliyanie KNBK na dinamiku vintovogo zaboynogo dvigatelya DR-240.NGT pri burenii dolotami bol'shogo diametra [Influence of the BHA on the dynamics of the DR-240.NGT downhole motor in drilling with large diameter bits]. *Neft'. Gaz. Novatsii*. 11. pp. 35–39.
13. Shadrina A.V. (2014) *Teoreticheskie i eksperimental'nye issledovaniya volnovykh protsessov v kolonne trub pri burenii skvazhin malogo diametra iz podzemnykh gornyykh vyrabotok* [Theoretical and experimental studies of wave processes in a pipe string when drilling small-diameter wells from underground mine workings]. Ph.D. thesis, Tomsk.
14. Khuzina L.B., SHaykhutdinova A.F., Gabzalilova A.Kh. (2018) Analiticheskie issledovaniya raboty elementa dinamicheskoy komponovki niza buril'noy kolonny [Analytical studies

- of BHA element operation]. *Neftyanaya provintsiya*. 3(15). pp. 117–126. doi: 10.25689/NP.2018.3.117–126
15. Zhong W., Li S., Xiong Y., Fu J., Su Y. (2020) The dynamics characteristics and strength check of drilling string in ultra-deep horizontal well. *Journal of Southwest Petroleum University*. 42(4). pp. 135–143.
 16. Li Z., Zhang C., Ren W., Ma J. (2020) study of radial vibration impact on friction and torque of rotary drill string. *Shock and Vibration*. Article 8852530. doi: 10.1155/2020/8852530
 17. Zalyaev M.F. (2015) Issledovanie vibratsii pri burenii skvazhin na termokarstovom gazo-kondensatnom mestorozhdenii [The exploration of vibration while drilling wells on Termokarstovoe gas deposit]. *Neftgazovoe delo – Petroleum Engineering*. 13(4). pp. 36–40.
 18. Zalyaev M.F., Yamaliev V.Yu. (2017) Issledovaniya vliyaniya iskruvleniya stvola skvazhini na kolebatel'nye protsessy komponovki niza buril'noy kolonny [Researches the influence of dogleg severity of the well trunk on oscillating processes of configuration of drillstring bottom]. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra Rossiyskoy akademii nauk. Mashinostroenie i mashinovedenie – Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*. 19(1-2). pp. 229–234.
 19. Cunha A., Soize C., Sampaio R. (2015) Computational modeling of the nonlinear stochastic dynamics of horizontal drillstrings. *Computational Mechanics*. 56(5). pp. 849–878. doi: 10.1007/s00466-015-1206-6
 20. Zhao D., Hovda S., Sangesland S. (2016) The effect of stick slip vibration on the backward whirl of bottom hole assembly in drillstring. *Proceedings of the International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*. Article OMAE 8, V008T11A042. doi: 10.1115/OMAE2016-54478
 21. Christoforou A.P., Yigit A.S. (2003) Fully coupled vibrations of actively controlled drillstrings. *Journal of Sound and Vibration*. 267(5). pp. 1029–1045. doi: 10.1016/S0022-460X(03)00359-6
 22. Yamaliev V., Imaeva E., Salakhov T. (2009) About the deep drilling equipment technical condition recognition method. *Oil and Gas Business*. pp. 1–7. doi: 10.1.1.611.4021
 23. Malyugin A.A., Kazunin D.V. (2017) Raschet kolebaniy buril'noy kolonny v rezhime real'nogo vremeni v sostave trenazhernykh sistem [Calculation of drillstring vibrations in real time as part of training system]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protessy upravleniya – Vestnik of Saint-Peterburg university. Applied Mathematics. Computer Sciences. Control Processes*. 13(1). pp. 91–101. doi: 10.21638/11701/spbu10.2017.109
 24. Li W., Huang G., Ni H., Yu F., Huang, B., Jiang, W. (2020) Experimental study and mechanism analysis of the motion states of bottom hole assembly during rotary drilling. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 195. Article 107859. doi: 10.1016/j.petrol. 107859
 25. Murtazin I.R., Lukin A.V., Popov I.A. (2019) Issledovanie izgibnykh kolebaniy vrashchayushchikhsya valov s raspredelennymi inertsionnymi, uprugimi i eksstentsitnymi kharakteristikami [Research of flexural vibrations of rotating shafts with distributed inertial, elastic and eccentricity propertie]. *Nauchno-tehnicheskiiy vestnik informatsionnykh tekhnologiy, mekhaniki i optiki – Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*. 19(4). pp. 756–766. doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-4-756-766
 26. Derkach N.D., Perel'man O.M., Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Korotaev A.Yu., Landik L.V., Mingaraev V.G., Fadeykin A.S. (2020) Balochnaya model' rotorno upravlyaemoy sistemy s elektrodvigatelem [Beam model of a rotary controlled system with an electric motor]. *Bulatovskie chteniya. Sbornik statey – The collected papers of the Readings of A.I. Bulatov*. pp. 92–102. URL: <http://id-yug.com/images/id-yug/Bulatov/2020/6/PDF/2020-6.pdf>
 27. Basov K.A. (2005) *ANSYS: spravochnik pol'zovatelya* [ANSYS: user guide]. Moscow: DMK Press.
 28. Leont'ev N.V. (2006) *Primenenie sistemy ANSYS k resheniyu zadach modal'nogo i garmonicheskogo analiza* [Application of the ANSYS system to solving problems of modal

- and harmonic analysis]. Uchebno-metodicheskiy material po programme povysheniya kvalifikatsii «Informatsionnye sistemy v matematike i mekhanike». Nizhniy Novgorod.
29. D'yakov I.F., Chernov S.A., Chernyy A.N. (2010) *Metod konechnykh elementov v raschetakh sterzhnevyykh sistem* [Finite element method in calculations of rod systems]. Ulyanovsk: UIGTU.
 30. Sil'chenko P.N., Kudryavtsev I.V., Gotselyuk O.B., Novikov E.S. (2014) Sposob rascheta protyazhennykh tonkostennykh konstruksiy s ne osesimmetrichnym poperechnym secheniem [Method of analysis of extended thin-walled constructions with not axisymmetric cross section]. *Nauka i Obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana. Elektronnyy zhurnal – Science & Education of the Bauman MSTU*. 11. pp. 724–747. doi: 10.7463/1114.0737276
 31. Panovko Ya.G. (1991) *Vvedenie v teoriyu mekhanicheskikh kolebaniy* [Introduction to the theory of mechanical vibrations]. Moscow: Nauka.

Сведения об авторах:

Пестренин Валерий Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экспериментальной и вычислительной механики Пермского государственного национального исследовательского университета, Пермь, Россия. E-mail: pestreninvm@mail.ru

Пестренина Ирина Владимировна – кандидат технических наук, доцент кафедры экспериментальной и вычислительной механики Пермского государственного национального исследовательского университета, Пермь, Россия. E-mail: ipestrenina@gmail.com

Перельман Олег Михайлович – генеральный директор ООО «Новобур», Пермь, Россия. E-mail: perelman@novobur.com

Фадейкин Александр Сергеевич – технический директор ООО «Новобур», Пермь, Россия. E-mail: fadeikin.as@novobur.com

Деркач Николай Дмитриевич – кандидат технических наук, консультант ООО «Новобур», Пермь, Россия. E-mail: nikolaiderkach@gmail.com

Information about the authors:

Pestrenin Valeriy M. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: pestreninvm@mail.ru

Pestrenina Irina V. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Perm State National Research University, Perm, Russian Federation). E-mail: ipestrenina@gmail.com

Perel'man Oleg M. (General Director, Novobur LLC, Perm, Russian Federation). E-mail: perelman@novobur.com

Fadeykin Aleksandr S. (Technical Director, Novobur LLC, Perm, Russian Federation). E-mail: fadeikin.as@novobur.com

Derkach Nikolay D. (Candidate of Technical Sciences, Consultant, Novobur LLC, Perm, Russian Federation). E-mail: nikolaiderkach@gmail.com

Статья поступила в редакцию 16.12.2021; принята к публикации 03.10.2022

The article was submitted 16.12.2021; accepted for publication 03.10.2022

Научная статья

УДК 669-1

doi: 10.17223/19988621/79/13

Исследование влияния наночастиц алмаза на структуру и механическое поведение сплава Mg–Ca–Zn

Михаил Александрович Селиховкин¹,
Анастасия Алексеевна Ахмадиева², Илья Александрович Жуков³,
Екатерина Сергеевна Марченко⁴, Антон Павлович Хрусталеv⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} *Томский государственный университет, Томск, Россия*

¹ *mishselikh@gmail.com*

² *nas99.9@yandex.ru*

³ *gofra930@gmail.com*

⁴ *89138641814@mail.ru*

⁵ *tofik0014@gmail.com*

Аннотация. Представлены исследования влияния наночастиц алмаза на магниевый сплав системы Mg–Ca–Zn. Исследованы структура и механическое поведение магниевоего сплава с содержанием наночастиц и без. Показано, что введение наночастиц алмаза в сплав магния системы Mg–Ca–Zn позволяет получить мелкозернистую структуру. При введении алмазных наночастиц в сплав увеличиваются предел текучести, предел прочности и пластичность. Показано, что значение твердости модифицированного сплава не изменяется.

Ключевые слова: магний, наноразмерные частицы, алмаз, структура, механические свойства

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2021-1384).

Для цитирования: Селиховкин М.А., Ахмадиева А.А., Жуков И.А., Марченко Е.С., Хрусталеv А.П. Исследование влияния наночастиц алмаза на структуру и механическое поведение сплава Mg–Ca–Zn // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 79. С. 152–161. doi: 10.17223/19988621/79/13

Original article

Investigation of the effect of diamond nanoparticles on the structure and mechanical behavior of Mg–Ca–Zn alloy

Mikhail A. Selikhovkin¹, Anastasia A. Akhmadieva², Ilya A. Zhukov³,
Ekaterina S. Marchenko⁴, Anton P. Khrustalev⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

¹ *mishselikh@gmail.com*

² nas99.9@yandex.ru

³ gofra930@gmail.com

⁴ 89138641814@mail.ru

⁵ tofik0014@gmail.com

Abstract. In this paper, the study of the effect of diamond nanoparticles on the structure and mechanical properties of the Mg-Ca-Zn magnesium alloy. The influence of diamond nanoparticles concentration amount of 0.1 wt. % in the structure of alloy Mg-Ca-Zn, the ultimate tensile strength increases from 294 up to 332 MPa, the elongation value increases from 22 % up to 27 % and the yield strength increases from 66 up to 75 MPa in the tested samples. Nanoparticles in magnesium alloy do not change the hardness of the alloy. The introduction of diamond nanoparticles into the magnesium alloy increased the Zn concentration from 4 % to 4.7 % and the Ca concentration from 1 % to 1.3 %. It is found that the introduction of the nanodiamond particles into a magnesium melt contributes to a decrease in the average grain size from ~ 100 to 64 μm in the obtained castings and, as a result, to an increase in the mechanical properties.

Keywords: magnesium, nanosized particles, diamond, structure, mechanics properties

Acknowledgments: This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement No. 075-15-2021-1384).

For citation: Selikhovkin, M.A., Akhmadieva, A.A., Zhukov, I.A., Marchenko, E.S., Khrustal'ov, A.P. (2022) Investigation of the effect of diamond nanoparticles on the structure and mechanical behavior of Mg-Ca-Zn alloy. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 79. pp. 152–161. doi: 10.17223/19988621/79/13

Введение

В настоящее время сплавы титана и стали используют как материал для создания медицинских имплантатов. Данные материалы зарекомендовали себя при замене поврежденных костных тканей, однако такие имплантаты имеют один значительный недостаток – необходимость в повторной операции для удаления конструкции из тела человека [1]. Одним из активно развивающихся направлений сердечно-сосудистой хирургии и ортопедии является создание биорезорбируемых имплантатов, которые после вживления в организм человека постепенно растворяются в нем и положительно влияют на восстановление костной ткани. Магний и его сплавы являются перспективными для создания на их основе биорезорбируемых имплантатов [2]. Однако существуют ограничения по применению данных материалов в медицине, связанные с недостаточными физико-механическими и эксплуатационными характеристиками чистого магния. Недостаточные показатели прочности и пластичности затрудняют применение магниевых сплавов на практике [3]. Ранее проводившиеся работы были направлены на получение ультрамелкозернистой структуры путем усложнения химического состава, добавления различных элементов [4]. Такой подход имеет свои трудности, связанные с ограниченным выбором легирующих элементов, которые должны являться биологически совместимыми со средой организма. В качестве легирующих элементов используются кальций, цинк, а также редкоземельные металлы [5].

Легирование цинком повышает коррозионную стойкость и прочностные свойства магниевых сплавов [6, 7], а введение кальция способствует измельчению зеренной структуры магниевых сплавов за счет образования мелкодисперсной фазы Mg_2Ca , которая является когерентной относительно магния, поэтому зарождение и рост кристаллов на этой фазе начинаются раньше, что обеспечивает создание новых центров кристаллизации и получение более мелкой структуры с увеличением механических свойств [8]. Кроме этого, для улучшения механических характеристик магниевых сплавов возможно использование дисперсного упрочнения неметаллическими частицами. Большой интерес вызывает использование в сплавах магния наночастиц нитрида алюминия, оксида алюминия и алмаза, которые характеризуются высокой удельной прочностью и низким коэффициентом теплового расширения [9]. Перспективным упрочнителем медицинского магния является наноразмерный алмаз, поскольку он биосовместим и нетоксичен для организма человека [10].

Цель работы – исследование влияния наночастиц алмаза на химический состав, структуру и механические свойства магниевого сплава $Mg-Ca-Zn$.

Методика получения сплавов

В качестве исходных материалов использованы магний (99.5%), цинк (99.8%), кальций (99.8%), а также лигатура $Mg - 5 \text{ мас. \% С}$. Для получения лигатуры была использована порошковая смесь, содержащая 95 мас. % микропорошка магния марки МПФ-4 и 5 мас. % наночастиц алмаза со средним размером 10 нм. Порошковая смесь прессовалась с использованием метода ударно-волнового компактирования под действием продуктов детонации контактных зарядов взрывчатого вещества. Два килограмма чистого металла магния (99.5%) помещались в стальной тигель и расплавлялись с использованием муфельной печи открытого типа при одновременном обдуве аргоном в качестве защитной среды. Обдув аргоном осуществлялся на протяжении всего процесса обработки расплава до его заливки в кокиль.

При температуре 720°C в расплав магния вводился металлический цинк с одновременным механическим перемешиванием. Для введения металлического кальция использовалась стальной погружной колокольчик с последующим механическим перемешиванием при температуре 760°C . Механическая обработка расплава производилась с использованием смесителя при скорости вращения 1 200 об/мин в течении 20 с после растворения цинка, кальция [11].

Лигатура $Mg - 5\%$ наноалмаз вводилась в расплав $Mg-Ca-Zn$ при температуре 710°C с использованием механического смесителя в течение 1 мин после полного растворения лигатуры в сплаве.

После введения лигатуры расплав заливался в стальной кокиль размером $200 \times 100 \times 10$ мм при температуре 720°C . Заливка и кристаллизация расплава сопровождалась одновременной вибрационной обработкой с применением вибростенда, на котором жестко крепился стальной кокиль. Вибрационная обработка расплава осуществлялась с частотой 60 Гц и амплитудой 0.5 мм.

Исходный сплав $Mg - 4\% \text{ Ca} - 1\% \text{ Zn}$ (здесь и далее по тексту мас. %) был получен с аналогичными параметрами без введения лигатуры. Содержание алмаза в модифицированном сплаве составило 0.1 %.

Методы исследования

Химический состав сплавов исследован с использованием рентгенофлуоресцентного волнодисперсионного спектрометра последовательного действия Shimadzu XRF-1800. Металлографический анализ проводили с помощью оптического микроскопа Olympus GX71. Исследование структуры выполнено на оборудовании Томского регионального центра коллективного пользования Национального исследовательского Томского государственного университета. Центр поддержан грантом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2021-693 (№ 13.ЦКП.21.0021). Структуру литых материалов изучали после механической шлифовки, полировки, до и после травления образцов пикриновой кислотой. Средний размер зерен определяли методом секущих по стандарту ASTM 112-13 по результатам не менее 500 измерений для каждого сплава. Пористость сплавов оценивали методом гидростатического взвешивания, а размер пор рассчитывали по изображениям микроструктуры аналогично среднему размеру зерна.

Измерения твердости по Бринеллю (НВ) проведены в соответствии со стандартом ASTM E103. Для проведения эксперимента использовался твердомер МЕТОЛАБ 703. Внедрение сферического индентора радиусом 2.5 мм проводили с усилием 62.5 кг и выдержкой 30 с, при этом контролировался размер отпечатков, который находился в пределах $0.2D < d < 0.6D$. Исследуемые поверхности подготавливались с помощью механической шлифовки. Эксперименты по сжатию проводились с использованием универсального электромеханического испытательного стенда Instron 3369 со скоростью нагружения 4.8 мм/мин. Образцы шириной 9 мм, длиной 9 мм и высотой 20 мм вырезались из отливок при помощи электроэрозионной резки. Результаты испытаний получены в виде диаграмм «напряжение–деформация», откуда найдены значения условного предела текучести, временного сопротивления и относительных удлинений.

Исследование структуры

Химический состав магниевых сплавов представлен в табл. 1. Исследования элементного состава показали, что содержание магния в полученных сплавах составило около 94 мас. %. При этом содержание цинка и кальция в исходном сплаве Mg–Ca–Zn составило 4 и 1 мас. % соответственно. Введение наночастиц алмаза привело к увеличению содержания цинка и кальция в сплаве до 4.7 и 1.3 мас. % соответственно. Более высокое содержание кальция и цинка в сплаве, содержащем наноалмаз, может быть связано с меньшим угаром легирующих компонентов в процессе литья с использованием лигатуры Mg–наноалмаз.

Таблица 1

Химический состав сплавов

Сплав	Mg	Zn	Ca	Si	Al	Fe
Mg–Ca–Zn	94.7 ± 0.06	4 ± 0.07	1 ± 0.02	0.12 ± 0.01	0.04 ± 0.05	0.03 ± 0.01
Mg–Ca–Zn- наноалмаз	93.6 ± 0.05	4.7 ± 0.07	1.3 ± 0.04	0.17 ± 0.04	0.02 ± 0.01	0.02 ± 0.01

Исследования микроструктуры полученных сплавов методом оптической микроскопии (рис. 1) показали, что введение наночастиц алмаза приводит к уменьшению значения среднего размера зерна со 100 ± 36 мкм для Mg–Ca–Zn до 64 ± 17 мкм для Mg–Ca–Zn–наноалмаз и получению более однородного распределения зерен в магниевом сплаве. Предположительно, это связано с формированием новых фаз мелкодисперсных частиц, таких как Mg_2Ca . Данные результаты подтверждают, что нахождение в расплаве частиц малого размера оказывает влияние на размеры зерен. Это связано с тем, что в процессе кристаллизации наночастицы сдерживают рост зерен, и тем самым структура модифицируется [12]. Таким образом, увеличение содержания кальция обеспечило образование новой фазы, которая выступила в качестве центра зарождения кристаллов, а введение наночастиц алмаза обеспечило сдерживание роста по границам зерен.

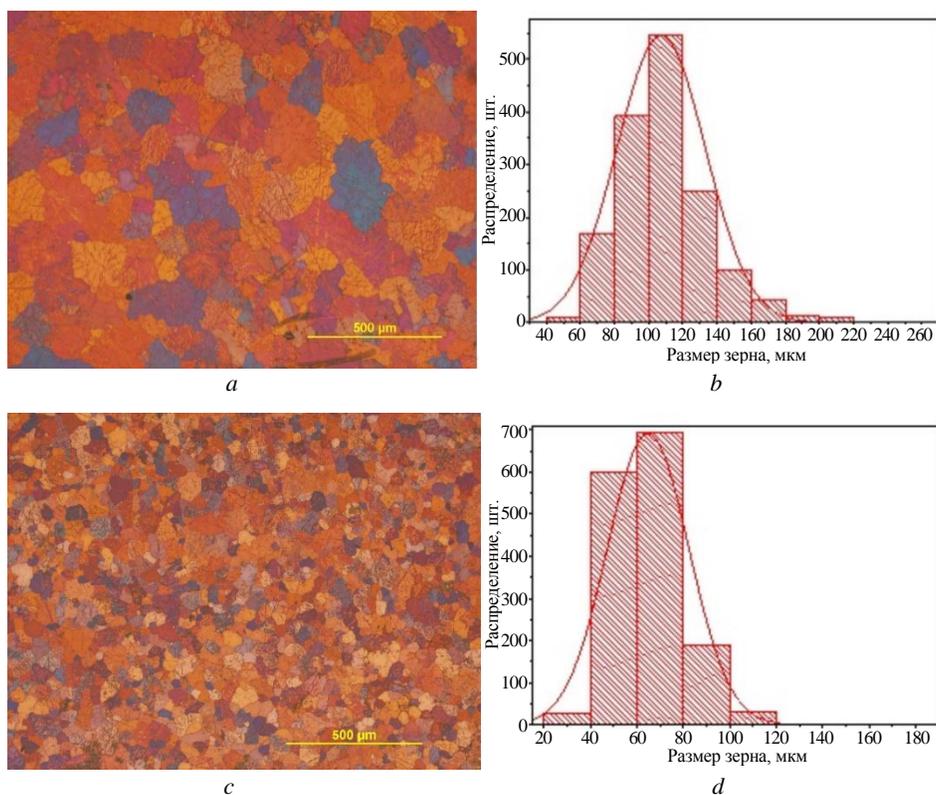


Рис. 1. Оптические изображения структуры магниевых сплавов в поляризованном свете (*a, c*) и гистограммы распределения зерен по размерам (*b, d*): *a, b* – Mg–Ca–Zn, *c, d* – Mg–Ca–Zn–наноалмаз

Fig. 1. Optical images of the structure of magnesium alloys in polarized light (*a, c*) and grain size distribution histograms (*b, d*): *a, b* – Mg–Ca–Zn, *c, d* – Mg–Ca–Zn–nanodiamond

Исходный сплав имеет поры размером до 50 мкм, при этом пористость составила 5% (см. рис. 1, *a, b*). Введение наночастиц алмаза позволило снизить размер пор до 15 мкм, пористость составила 3% (см. рис. 1, *c, d*). Такой результат связан

с процессом абсорбирования углеродными материалами растворенных в расплаве газов, которые после реакции удаляются из расплава в виде шлака.

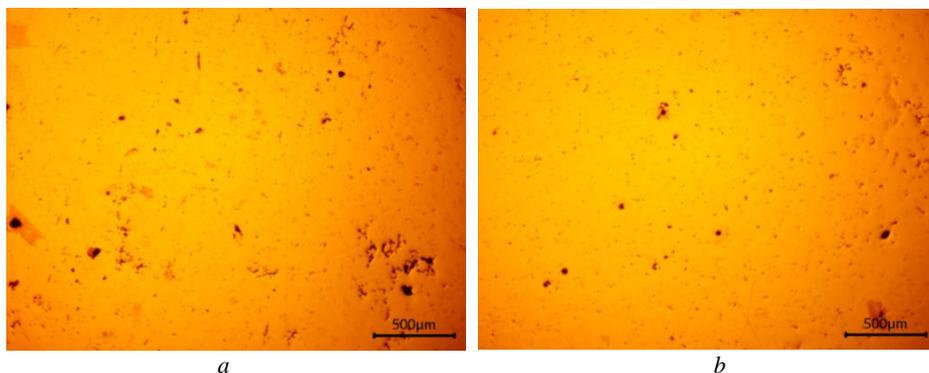


Рис. 2. Оптические изображения магниевых сплавов:
a – Mg–Ca–Zn, *b* – Mg–Ca–Zn–наноалмаз

Fig. 2. Optical images of magnesium alloys: *a* – Mg–Ca–Zn, *b* – Mg–Ca–Zn–nanodiamond

Исследование механических свойств

Твердость исходного сплава Mg–Ca–Zn составила 54 ± 3 НВ. Введение наночастиц алмаза не привело к изменению твердости сплава Mg–Ca–Zn, она составила 52 ± 2 НВ. По всей видимости, наночастицы алмаза не оказывают влияния на твердость сплава Mg–Ca–Zn из-за малого объемного содержания частиц, которое составляет 0.00007 об. %, и равномерного распределения упрочняющих частиц алмаза в составе сплава Mg–Ca–Zn.

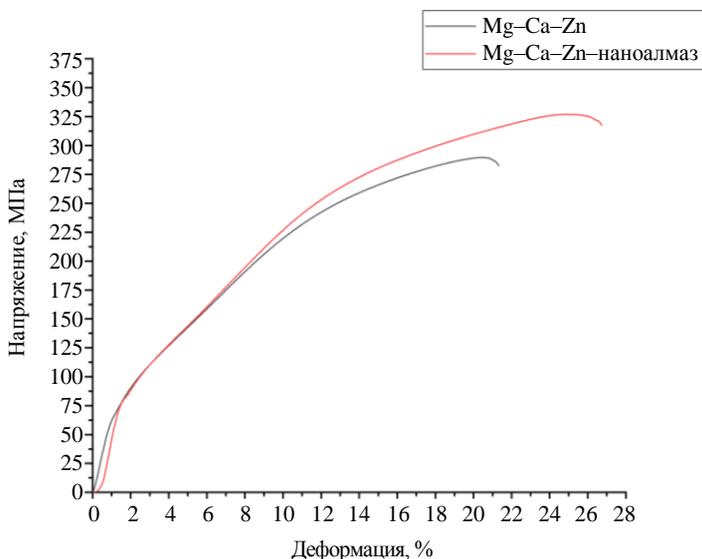


Рис. 3. Диаграммы сжатия магниевых сплавов
Fig. 3. Compression diagrams of magnesium alloys

Результаты экспериментов по сжатию в виде диаграмм напряжение–деформация представлены на рис. 3. Испытания на сжатие показали, что введение наночастиц алмаза способствует увеличению предела текучести ($\sigma_{0.2}$), предела прочности (σ_B) и пластичности (δ) сплава Mg–Ca–Zn. Исследование экспериментальных данных показало, что введение наночастиц алмаза приводит к увеличению предела текучести сплава с 66 ± 2 до 75 ± 2 МПа, предела прочности – с 294 ± 9 до 332 ± 4 МПа, максимальной деформации – с 22 ± 5 до $27 \pm 9\%$. Интервалы достоверности, являющиеся среднеквадратичным отклонением, характеризуют разброс экспериментальных данных, полученных на образцах, изготовленных из отливок одной партии.

По полученным результатам можно сделать вывод о том, как влияет средний размер зерна на параметры прочности и пластичности сплава: чем меньше средний размер зерна, тем выше прочностные характеристики и пластичность. Увеличение значения предела текучести сплава Mg–Ca–Zn после введения наноалмаза является результатом измельчения зерна сплава по закону Холла–Петча, который напрямую влияет на увеличение предела текучести материала. Вероятно, эффект одновременного упрочнения и улучшения пластичности магниевого сплава с добавлением наночастиц алмаза обусловлен равномерным деформированием материала и формированием однородной структуры по всему объему образцов. Подобный результат согласуется с ранее проведенными работами с использованием других наночастиц в магниевых [13] и алюминиевых сплавах [14, 15].

Заключение

Установлено, что для сплава Mg–Ca–Zn средний размер зерна составляет 100 ± 36 мкм. Введение наночастиц алмаза привело к снижению среднего размера зерна до 64 ± 17 мкм. Показано, что частицы распределены в структуре полученных сплавов равномерно благодаря обработке внешними полями при введении нанопорошка алмаза в расплав. Уменьшение среднего размера зерна во всем объеме отливок сплава Mg–Ca–Zn свидетельствует о равномерном распределении наночастиц алмаза, выступающих в роли инокуляторов при кристаллизации.

Выявлено, что введение частиц наноалмаза приводит к увеличению предела текучести с 66 до 75 МПа, предела прочности – с 294 до 332 МПа, максимальной деформации до разрушения сплава – с 22 до 27%.

Список источников

1. Hedayati R., Ahmadi S.M., Lietaert K., Tümer N., Li Y., Amin Yavari S., Zadpoor A.A. Fatigue and quasi-static mechanical behavior of bio-degradable porous biomaterials based on magnesium alloys // Journal of Biomedical Materials Research: A. 2018. V. 106 (7). P. 1798–1811. doi: 10.1002/jbm.a.36380
2. Sanz-Herrera J.A., Reina-Romo E., Boccaccini A.R. In silico design of magnesium implants: macroscopic modeling // Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials. 2018. V. 79. P. 181–188. doi: 10.1016/j.jmbbm.2017.12.016
3. Chino Y., Kobata M., Iwasaki H., Mabuchi M. Tensile Properties from Room Temperature to 673 K of Mg-0.9 mass% Ca Alloy // Materials Transactions. 2002. V. 43 (10). P. 2643–2646. doi: 10.2320/matertrans.43.2643

4. Meyer G., Caneiro A., Corso H., Ponce V., Azcona A. El Centro Atómico Bariloche y la Tecnología del Hidrógeno. Centro atomico de Bariloche, 2004.
5. Lü L., Lai M.O. Mechanical Alloying. Boston : Kluwer Academic Publishers, 1998.
6. Cha P.R., Han H.S., Yang G.F., Kim Y.C., Hong K.H., Lee S.C., Jung J.Y., Ahn J.P., Kim Y.Y., Cho S.Y., Byun J.Y., Lee K.S., Jung S.J., Seo H.K. Biodegradability engineering of biodegradable Mg alloys: Tailoring the electrochemical properties and microstructure of constituent phases // Scientific Reports. 2013. V. 3 (28). P. 2367–2375. doi: 10.1038/srep02367
7. Luo A., Pegguleryuz M.O. Cast magnesium alloys for elevated temperature applications // Journal of Materials Science. 1994. V. 29 (20). P. 5259–5271. doi: 10.1007/BF01171534
8. Peng T., Xuanyong L. Surface modification of biodegradable magnesium and its alloys for biomedical applications // Regenerative Biomaterials. 2015. V. 2. P. 135–151. doi: 10.1093/rb/rbu013
9. Кахидзе Н.И., Хрусталёв А.П., Ворожцов А.Б. Физико-механические свойства дисперсно-упрочненных сплавов системы алюминий–магний // Новые материалы и перспективные технологии : сб. материалов Пятого междисциплинарного научного форума с междунар. участием. М. : Интеллектуальные системы, 2019. С. 630–631.
10. Zhang Q., Mochalin V., Neitzel I., Knoke I., Han J., Klug C., Zhou J.G., Lelkes P., Gogotsi Y. Fluorescent PLLA-nanodiamond composites for bone tissue engineering // Biomaterials. 2011. V. 32 (1). P. 87–94. doi: 10.1016/j.biomaterials.2010.08.090
11. Красновейкин В.А., Скрипняк В.А., Козулин А.А. Численное моделирование процессов интенсивной пластической деформации тел при динамическом канальном прессовании // Известия вузов. Физика. 2012. Т. 55, № 9-3. С. 67–71.
12. Vorozhtsov S., Minkov L., Dammer V., Khrustalyov A., Zhukov I., Promakhov V., Khmeleva M. Ex situ introduction and distribution of nonmetallic particles in aluminum melt: Modeling and experiment // JOM. 2017. V. 69. P. 2653–2657. doi: 10.1007/s11837-017-2594-1
13. Mehranpour M., Heydarinia A., Emamy M., Mirzadeh H., Koushki A., Razi R. Enhanced mechanical properties of AZ91 magnesium alloy by inoculation and hot deformation // Materials Science and Engineering: A. 2021. V. 802. P.140667-1–140667-8. doi: 10.1016/j.msea.2020.140667.
14. Khrustalyov A.P., Garkushin G.V., Zhukov I.A., Razorenov S.V., Vorozhtsov A.B. Quasi-Static and Plate Impact Loading of Cast Magnesium Alloy ML5 Reinforced with Aluminum Nitride Nanoparticles // Metals. 2019. V. 9 (6). P. 715. doi: 10.3390/met9060715
15. Promakhov V.V., Khmeleva M.G., Zhukov I.A., Platov V.V., Khrustalyov A.P., Vorozhtsov A.B. Influence of Vibration Treatment and Modification of A356 Aluminum Alloy on Its Structure and Mechanical Properties // Metals. 2019. V. 9 (1). P. 87. doi: 10.3390/met9010087.

References

1. Hedayati R., Ahmadi S.M., Lietaert K., Tümer N., Li Y., Amin Yavari S., Zadpoor A.A. (2018) Fatigue and quasi-static mechanical behavior of bio-degradable porous biomaterials based on magnesium alloys. *Journal of Biomedical Materials Research Part A*. 106(7). pp. 1798–1811. DOI: 10.1002/jbm.a.36380.
2. Sanz-Herrera J.A., Reina-Romo E., Boccaccini A.R. (2018) In silico design of magnesium implants: Macroscopic modeling. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 79. pp. 181–188. doi: 10.1016/j.jmbm.2017.12.016.
3. Chino Y., Kobata M., Iwasaki H., Mabuchi M. (2002) Tensile properties from room temperature to 673 K of Mg-0.9 mass% Ca alloy containing lamella Mg₂Ca. *Materials Transactions*. 43(10). pp. 2643–2646. doi: 10.2320/matertrans.43.2643.
4. Meyer G., Caneiro A., Corso H., Ponce V., Azcona A. (2004) El Centro Atómico Bariloche y la Tecnología del Hidrógeno. Centro atomico de Bariloche.
5. Lü L., Lai M.O. Mechanical Alloying. Boston: Kluwer Academic Publishers. 1998.

6. Cha P.R., Han H.S., Yang G.F., Kim Y.C., Hong K.H., Lee S.C., Jung J.Y., Ahn J.P., Kim Y.Y., Cho S.Y., Byun J.Y., Lee K.S., Jung S.J., Seo, H.K. (2013) Biodegradability engineering of biodegradable Mg alloys: Tailoring the electrochemical properties and microstructure of constituent phases. *Scientific reports*. 3(1). pp. 1–6. doi: 10.1038/srep02367.
7. Luo A., Pekguleryuz M.O. (1994) Cast magnesium alloys for elevated temperature applications. *Journal of materials science*. 29(20). pp. 5259–5271. doi: 10.1007/BF01171534.
8. Peng T., Xuanyong L. (2015) Surface modification of biodegradable magnesium and its alloys for biomedical applications. *Regenerative biomaterials*. 2(2). pp. 135–151. doi: 10.1093/rb/rbu013.
9. Kahidze N.I., Hrustalyov A.P., Vorozhcov A.B. (2019) Fiziko-mekhanicheskie svoystva dispersno-uprochnennykh splavov sistemy alyuminij-magnij [Physical and mechanical properties of dispersion-strengthened alloys of the aluminum-magnesium system]. *Novye materialy i perspektivnye tekhnologii*. P. 630–631.
10. Zhang Q., Mochalin V., Neitzel I., Knoke I., Han J., Klug C., Zhou J. G., Lelkes P., Gogotsi Y. (2011) Fluorescent PLLA-nanodiamond composites for bone tissue engineering. *Biomaterials*. 32(1). pp. 87–94. doi: 10.1016/j.biomaterials.2010.08.090.
11. Krasnovejkin V.A., Skripnyak V.A., Kozulin A.A. (2012) Chislennoe modelirovanie processov intensivnoj plasticheskoj deformacii tel pri dinamicheskom kanal'nom pressovanii [Numerical modeling of processes of intense plastic deformation of bodies under dynamic channel pressing.]. *Izvestiya vysshih uchebnykh zavedenij. Fizika*. Vol. 55, No. 9–3. pp. 67–71.
12. Vorozhtsov S., Minkov L., Dammer V., Khrustalyov A., Zhukov I., Promakhov V., Khmeleva M. (2017) Ex situ introduction and distribution of nonmetallic particles in aluminum melt: modeling and experiment. *JOM*. 69(12). pp. 2653–2657. doi: 10.1007/s11837-017-2594-1.
13. Mehranpour M., Heydarinia A., Emamy M., Mirzadeh H., Koushki A., Razi R. (2021) Enhanced mechanical properties of AZ91 magnesium alloy by inoculation and hot deformation. *Materials Science and Engineering: A*. 802. pp. 140667. doi: 10.1016/j.msea.2020.140667.
14. Khrustalyov A.P., Garkushin G.V., Zhukov I.A., Razorenov S.V., Vorozhtsov A.B. (2019) Quasi-static and plate impact loading of cast magnesium alloy ML5 reinforced with aluminum nitride nanoparticles. *Metals*. 9(6). pp. 715. doi: 10.3390/met9060715.
15. Promakhov V.V., Khmeleva M.G., Zhukov I.A., Platov V.V., Khrustalyov A.P., Vorozhtsov A.B. (2019) Influence of vibration treatment and modification of A356 aluminum alloy on its structure and mechanical properties. *Metals*. 9(1). pp. 87. doi: 10.3390/met9010087.

Сведения об авторах:

Селиховкин Михаил Александрович – бакалавр физико-технического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: mishselikh@gmail.com

Ахмадиева Анастасия Алексеевна – магистрант физико-технического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: nas99.9@yandex.ru

Жуков Илья Александрович – кандидат технических наук, заведующий лабораторией нанотехнологий металлургии Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: gofra930@gmail.com

Марченко Екатерина Сергеевна – кандидат физико-математических наук, заведующая лабораторией медицинских сплавов и имплантатов с памятью формы Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: 89138641814@mail.ru

Хрусталёв Антон Павлович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории нанотехнологий металлургии Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: tofik0014@gmail.com

Information about the authors:

Selikhovkin Mikhail A. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mishselikh@gmail.com

Akhmadieva Anastasia A. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nas99.9@yandex.ru

Zhukov И'ya A. (Candidate of Technical Sciences, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gofra930@gmail.com

Marchenko Ekaterina S. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: 89138641814@mail.ru

Khrustalev Anton P. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tofik0014@gmail.com

Статья поступила в редакцию 31.05.2022; принята к публикации 03.10.2022

The article was submitted 31.05.2022; accepted for publication 03.10.2022

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/79/14

Задача устойчивости криволинейной арки малого подъема из пористого материала при случайном ее нагружении

Станислав Михайлович Шляхов¹, Эльвира Федоровна Кривулина²

^{1,2} *Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А., Саратов, Россия*

¹ *shlyakhovsm@yandex.ru*

² *orifelwi@mail.ru*

Аннотация. Получено вероятностное решение задачи устойчивости пористой пологой арки. Пористость распределяется по сечению по параболическому закону. Нагрузка на арку случайна. Решение представлено для стационарного воздействия. Проведен анализ надежности и материалоемкости арки в сплошном и пористом исполнении. Решение задачи устойчивости пористой арки основано на гипотезе сплошности материала, но со свойствами материала, учитывающими пористость.

Ключевые слова: арка, пористость, надежность, вероятность, устойчивость

Для цитирования: Шляхов С.М., Кривулина Э.Ф. Задача устойчивости криволинейной арки малого подъема из пористого материала при случайном ее нагружении // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 79. С. 162–169. doi: 10.17223/19988621/79/14

Original article

A stability problem for a low-height curvilinear porous arch under random loading

Stanislav M. Shlyakhov¹, Elvira F. Krivulina²

^{1,2} *Saratov State Technical University named after Yu.A. Gagarin, Saratov, Russian Federation*

¹ *shlyakhovsm@yandex.ru*

² *orifelwi@mail.ru*

Abstract. Classical mechanics of deformable bodies is based on the continuity hypothesis. However, many structural elements are made of porous materials. Porous natural materials (soil, rocks) have invariable porosity. Porous synthetic materials (ceramics, concrete, graphite, and pressed powder metals) have controlled porosity. To calculate the strength and hardness of the structure, the material is assumed to be conditionally continuous with

the adjusted porosity. Nowadays, there are many available works presenting mechanical characteristics of materials with different porosities. This paper proposes a new class of problems in mechanics of deformable solids. Considering a low arch stability problem, which is important in construction practice, the problem of optimal arch design is solved by controlling the properties of the material. The solution to the problem of stability of the low arch made of porous material is presented. The flat arch with a rectangular cross-section is exposed to equally distributed loading. The near-rational law of the porosity distribution over the cross-section is used. The load is considered as a random variable. The solution to the problem is obtained using the theory of stationary random processes. A comparative analysis of the reliability and material consumption is carried out for the arch with continuous and porous sections. The calculation shows that the porous structure of the arch reduces the material consumption by 13.3% without stability and reliability losses.

Keywords: arch, porosity, stability, probability, reliability

For citation: Shlyakhov, S.M., Krivulina, E.F. (2022) A stability problem for a low-height curvilinear porous arch under random loading. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 79. pp. 162–169. doi: 10.17223/19988621/79/14

В качестве несущих конструкций зданий используются арки различных конфигураций. Повышение надежности арок является актуальным в настоящее время. Решение задачи устойчивости пологой арки, выполненной из сплошного материала, было представлено в ряде работ. С позиций детерминистического нагружения данная проблема рассмотрена в [1, с. 671]. В случае стационарного случайного процесса нагружения устойчивость арки из сплошного материала исследована авторами статьи [2, с. 39]. Настоящая работа авторов является логическим продолжением их предыдущих исследований. В статье рассматривается пологая арка, выполненная из несплошного материала, дается оценка ее надежности и материалоемкости. Распределение пористости по сечению задано параболическим, что близко к рациональному [3, с. 122].

Рассмотрим пологую арку сечения $b \times h$ под воздействием равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q (рис. 1). Арка выполнена из пористого железа. Для модуля Юнга использована эмпирическая формула

$$E = a_1 + a_2 P + a_3 P^2, \quad (1)$$

где P – пористость, а коэффициенты a_1, a_2, a_3 на основе экспериментальных данных составили [4, с. 14]

$$\begin{aligned} a_1 &= 2,092857 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \\ a_2 &= -5,35 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \\ a_3 &= 3,21428 \cdot 10^5 \text{ МПа}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для сплошного материала модуль Юнга принят равным

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}. \quad (3)$$

Высота арки $Y(X)$ выражается функцией

$$Y = \frac{Y_0}{l^2} X(2l - X), \quad (4)$$

где $2l$ – расстояние между опорами, X меняется в пределах $0 \leq X \leq 2l$.

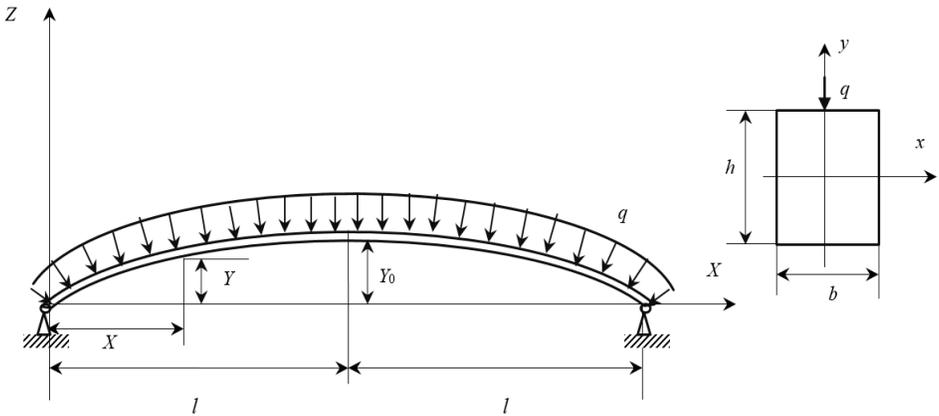


Рис. 1. Схемы нагружения арки (слева) и поперечного сечения арки (справа)
Fig. 1. Schemes of the arch loading (on the left) and arch cross-section (on the right)

Степень надежности арки соответствует вероятности того, что за время эксплуатации арки T нагрузка q ни разу не превысит критической. Под критической нагрузкой $q_{кр}$ понимаем нагрузку, при которой происходит скачкообразное изменение прогиба с выпуклостью арки в обратную сторону. Надежность при этом определяется формулой [5, с. 58]

$$H = \exp \left[- \int_0^T \int_0^\infty \dot{q} f \left(q_{кр}, \frac{\dot{q}}{t} \right) d\dot{q} dt \right], \quad (5)$$

где $f \left(q_{кр}, \frac{\dot{q}}{t} \right)$ – функция, связывающая критическую силу со скоростью изменения действующей силы, \dot{q} – производная действующей интенсивности нагрузки по времени.

Формула надежности в случае нормального стационарного процесса $q(t)$ имеет вид [5, с. 62]:

$$H = \exp \left[- \frac{T\sigma_{\dot{q}}}{2\pi\sigma_q} \exp \left[- \frac{(q_{кр} - m_q)^2}{2\sigma_q^2} \right] \right], \quad (6)$$

где $\sigma_{\dot{q}}$ – среднеквадратическое отклонение скорости изменения критической силы, σ_q – среднеквадратическое отклонение действующей силы.

На основе экспериментальных исследований корреляционная функция процесса может быть представлена формулой [5, с. 128]

$$K_q(\tau) = \sigma_q^2 e^{-\alpha_0 |\tau|} \left(\cos \beta_0 \tau + \frac{\alpha_0}{\beta_0} \sin \beta_0 |\tau| \right), \quad (7)$$

где α_0, β_0 – эмпирические коэффициенты.

Используя (7), запишем формулу надежности (6) в виде:

$$H = \exp \left[- \frac{T\sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2}}{2\pi} \exp \left[- \frac{(q_{кр} - m_q)^2}{2\sigma_q^2} \right] \right]. \quad (8)$$

После определения величины критической нагрузки $q_{кр}$ может быть найдена искомая надежность.

Гарантию надежности обеспечивает условие

$$H \geq H_{норм} . \quad (9)$$

Здесь $H_{норм}$ – нормативная надежность для конструкций заданного типа.

Для определения критической нагрузки $q_{кр}$ используем принцип минимума полной потенциальной энергии системы [1, с. 672].

Геометрия арки в деформированном состоянии отражена на рис. 2. Характеристики перемещений следующие: w – вертикальное перемещение, u – горизонтальное перемещение, ϑ – угол поворота сечения.

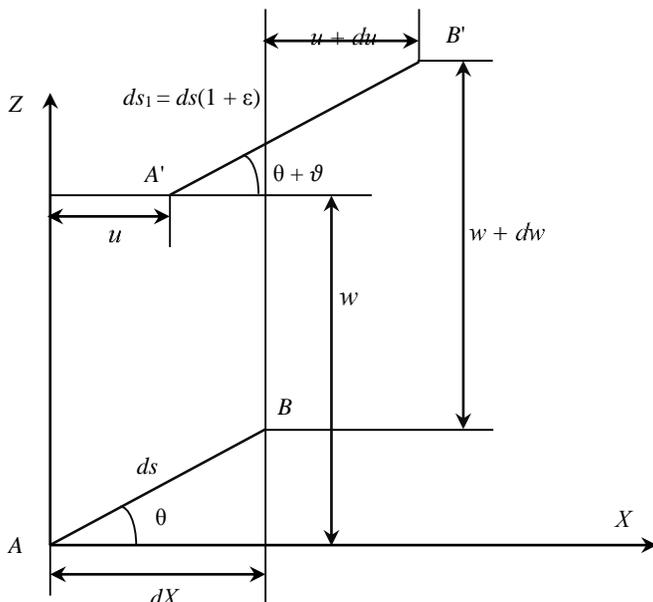


Рис. 2. Геометрия деформирования арки

Fig. 2. Arch deformation geometry

Для случая малых деформаций угол поворота ϑ и изменение кривизны κ представим в виде:

$$\vartheta = w' , \quad \kappa = \vartheta' = w'' . \quad (10)$$

В этом случае продольная деформация ϵ будет следующей:

$$\epsilon = \frac{du}{dx} + \vartheta \left(\theta + \frac{\vartheta}{2} \right) \quad (11)$$

Окончательно полная потенциальная энергия системы равна

$$U = \frac{1}{2} I_* \int_0^l \kappa^2 dx + \frac{F_*}{2} \int_0^l \epsilon^2 dx + q \int_0^l w dx . \quad (12)$$

Первое слагаемое в формуле (12) представляет собой энергию изгиба, второе является энергией растяжения-сжатия, а третье слагаемое соответствует потенциалу внешних сил:

$$I_* = 2b \int_0^{\frac{h}{2}} E(y) y^2 dy, \quad F_* = 2b \int_0^{\frac{h}{2}} E(y) dy. \quad (13)$$

Выразим перемещения u , w в виде формул [1, с. 672]

$$w = Ax(2l - x), \quad u = B \left[(l - x) - \frac{1}{l^2} (l - x)^3 \right], \quad (14)$$

где A – параметр, B – константа.

Учитывая (14), а также (4), (10) и (11), найдем

$$\kappa = \vartheta' = -2A, \quad \varepsilon = -B + \left[4A \frac{Y_0}{l^2} + 2A^2 + \frac{3}{l^2} B \right] (l - x)^2. \quad (15)$$

Выполняя интегрирование (12), получим

$$U = I_* 2A^2 l + \frac{F_*}{2} \left[B^2 l - \frac{2}{3} l^3 B \left(4A \frac{Y_0}{l^2} + 2A^2 + \frac{3}{l^2} B \right) \frac{l^2}{5} \right] + qA \frac{2}{3} l^3. \quad (16)$$

После преобразований из (16) следует

$$-ql^2 = 6I_* A + \frac{8}{3} F_* l^4 A \left(\frac{Y_0}{l^2} + A \right) \left(\frac{Y_0}{l^2} + \frac{1}{2} A \right). \quad (17)$$

Максимальный прогиб арки при $x = l$ равен

$$f = -Al^2. \quad (18)$$

Следовательно, $A = -f/l^2$.

Используя (17) и (18), находим зависимость между распределенной нагрузкой q и прогибом f в виде:

$$\frac{ql^4}{I_* h} = \frac{f}{h} \left[6 + \frac{8F_*}{3I_*} (Y_0 - f) \left(Y_0 - \frac{f}{2} \right) \right]. \quad (19)$$

Потеря устойчивости арки будет наблюдаться при условии $q = q_{кр}$, что соответствует первому экстремуму функции (19). Поскольку потеря устойчивости сопровождается изгибом арки, представляется целесообразным увеличить пористость в зоне малых нормальных напряжений при приближении к центру тяжести поперечного сечения.

Примем распределение пористости по сечению (рис. 3) в виде функции [6, с. 111]

$$P = P_0 \left(1 - \frac{4}{h^2} y^2 \right) \quad (20)$$

где P_0 – пористость в центре тяжести сечения.

В соответствии с (20), учитывая (1), получаем распределение модуля Юнга по высоте поперечного сечения

$$E(y) = a_1 + a_2 P_0 \left(1 - \frac{4}{h^2} y^2 \right) + a_3 P_0^2 \left(1 - \frac{4}{h^2} y^2 \right)^2. \quad (21)$$

Упруго-геометрические параметры I_* и F_* имеют вид:

$$I_* = \frac{bh^3}{12} (a_1 + 0.2a_2 P_0 + 0.114285a_3 P_0^2), \quad (22)$$

$$F_* = bh (a_1 + 0.6666a_2 P_0 + 0.53333a_3 P_0^2).$$

В качестве расчетного примера рассмотрим арку, для которой $b \times h = 5 \times 5$ см, $l = 3$ м, $Y_0 = 10$ см, $P_0 = 0.2$.

Соответственно, будем иметь

$$I_* = 0.098622 \text{ МН} \times \text{м}^2,$$

$$F_* = 362.022484 \text{ МН}.$$

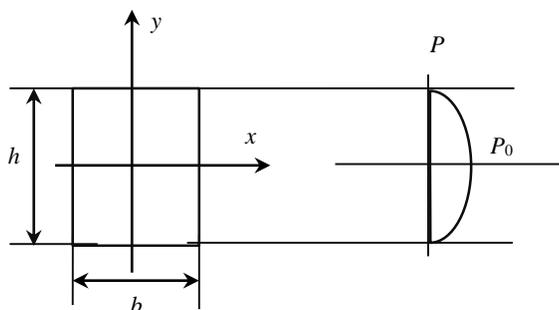


Рис. 3. Распределение пористости по высоте сечения

Fig. 3. Porosity distribution along the cross-section

Обозначим

$$\omega = \frac{ql^4}{I_*h}, \quad \lambda = \frac{f}{h} \quad (23)$$

На основании (22), (23) функция (19) примет вид:

$$\omega = \lambda(6 + 9788.7785(0.1 - \lambda 0.05)(0.1 - \lambda 0.025)). \quad (24)$$

Выполняя вычисления для сплошного и пористого сечений, получим следующую таблицу, из которой найдем экстремальное значение ω и, соответственно, значение $q_{кр}$.

Параметры сплошного и пористого сечений

		max	
λ	0.75	0.9	0.95
$\omega_{спл}$	53.25	54.504	54.378
$\omega_{пор}$	41.815	42.952	42.926

Для сплошного сечения арки получим

$$q_{кр\text{ спл}} = \frac{54,04Elh}{l^4} = 3679.86 \cdot 10^{-6} \text{ МН/м}.$$

Для пористого сечения будем иметь

$$q_{кр\text{ пор}} = \frac{42.952I_*h}{l^4} = 2614.83 \cdot 10^{-6} \text{ МН/м}.$$

Даны следующие параметры нагрузки:

– интенсивность распределенной нагрузки q с математическим ожиданием $m_q = 1530$ Н/м;

– среднее квадратичное отклонение нагрузки $\sigma_q = 150$ Н/м;

- срок эксплуатации арки $T = 10 \text{ лет} = 315 \cdot 10^6 \text{ с}$;
- параметры случайного процесса $\alpha_0 = 0.3 \text{ с}^{-1}$, $\beta_0 = 0.4 \text{ с}^{-1}$.
- нормативная надежность $H_{\text{норм}} = 0.999$.

По формуле (8) определим надежность арки пористой структуры:

$$H_{\text{пор}} = \exp\left(-\frac{315 \cdot 10^6 \cdot 0.5}{2 \cdot 3.14} \exp\left(-\left(\frac{2614.83 - 1530}{150}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\right)\right) = 0.999889 .$$

Полученная надежность больше нормативной: $H_{\text{пор}} = 0.999889 > H_{\text{норм}} = 0.999$, значит эксплуатационная надежность обеспечена.

Детерминистический коэффициент запаса устойчивости пористой арки равен

$$n_y = \frac{q_{\text{кр}}}{m_q} = \frac{2614.8}{1530} = 1.71 .$$

Оценим теперь надежность сплошной арки:

$$H_{\text{спл}} = \exp\left(-\frac{315 \cdot 10^6 \cdot 0.5}{2 \cdot 3.14} \exp\left(-\left(\frac{3679.86 - 1530}{150}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\right)\right) = 1 .$$

Как показало сравнение обеих надежностей, они практически равны. Пористая арка лишь незначительно уступает сплошной.

Выясним материалоемкость пористой и сплошной арок.

Для сплошной арки площадь поперечного сечения $A_{\text{спл}} = bh$.

Для пористой арки часть площади, занятая порами, равна

$$A_{\text{пор}} = 2b \int_0^{\frac{h}{2}} P(y) dy = 2b \int_0^{\frac{h}{2}} P_0 \left(1 - \frac{4}{h^2} y^2\right) dy = 0.666 P_0 hb .$$

Оценим рациональность конструкции:

$$\Delta = \frac{A_{\text{пор}}}{A_{\text{спл}}} \cdot 100\% = 0.666 \cdot 0.2 \cdot 100 = 13.3\% .$$

Таким образом, надежность пористой арки остается практически такой же, как у сплошной, однако материалоемкость снижается при этом на 13.3%.

Список источников

1. *Расчет на прочность в машиностроении* / ред. С.Д. Пономарев. М. : Машгиз, 1956. Т. 1. 884 с.
2. *Кривулина Э.Ф., Шляхов С.М.* Оценка надежности по устойчивости пологой арки на основе теории стационарных случайных процессов // *Научное обозрение*. 2015. № 9. С. 39–43.
3. *Шляхов С.М., Гаврилов Д.Ю.* Метод последовательных приближений в задаче рационального распределения пористости при чистом изгибе бруса прямоугольного сечения // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева*. Сер. Механика предельного состояния. 2016. № 3 (29). С. 122–127.
4. *Капиталин Ю.А.* Характеристики упругости материалов при высоких температурах. Киев : Наукова думка, 1970. 112 с.
5. *Арасланов А.М.* Расчет элементов конструкций заданной надежности при случайных воздействиях. М. : Машиностроение, 1987. 128 с.

6. Кривулина Э.Ф., Каневская И.Ю. Оценка надежности по устойчивости прямоугольной рамы, выполненной из пористого материала, на основе вероятностного подхода // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 53. С. 107–115.

References

1. Ponomarev S.D. (1956) *Raschet na prochnost' v mashinostroenii. Tom 1.* [Strength calculation in mechanical engineering. Volume 1.]. Moscow: Mashgiz.
2. Krivulina E.F., Shlyakhov S.M. (2015) Otsenka nadezhnosti po ustoychivosti pologoy arki na osnove teorii stacionarnykh sluchaynykh protsessov [Reliability assessment for the stability of a gentle arch based on the theory of stationary random processes]. *Nauchnoe obozrenie – Scientific Review*. 9. pp. 39–43.
3. Shlyakhov S.M., Gavrilov D.Yu. (2016) Metod posledovatel'nykh priblizheniy v zadache ratsional'nogo raspredeleniya poristosti pri chistom izgibe brusa pryamougol'nogo secheniya [The method of successive approximations in the problem of rational distribution of porosity with a bend of a beam of rectangular cross section]. *Vestnik ChGPU im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya – Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. 3(29). pp. 122–127.
4. Kashtalyan Yu.A. (1970) *Kharakteristiki uprugosti materialov pri vysokikh temperaturakh* [Elasticity characteristics of materials at high temperatures]. Kyiv: Naukova Dumka.
5. Araslanov A.M. (1987) *Raschet elementov konstruksiy zadannoy nadezhnosti pri sluchaynykh vozdeystviyakh* [Calculation of structural elements with a specified reliability under random influences]. Moscow: Mashinostroenie.
6. Krivulina E.F., Kanevskaya I.Yu. (2018) Otsenka nadezhnosti po ustoychivosti pryamougol'noy ramy, vypolnennoy iz poristogo materiala, na osnove veroyatnostnogo podkhoda [Estimation of the reliability of a rectangular frame made of the porous metal in terms of its rigidity on the basis of probabilistic approach]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 53(3). pp. 107–115. doi: 10.17223/19988621/53/10

Сведения об авторах:

Шляхов Станислав Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Строительные материалы, конструкции и технологии» (СМКТ) Саратовского государственного технического университета им. Гагарина Ю.А., Саратов, Россия. E-mail: shlyakhovsm@yandex.ru

Кривулина Эльвира Федоровна – кандидат технических наук, доцент кафедры «Теории сооружений и строительных конструкций» (ТСК) Саратовского государственного технического университета им. Гагарина Ю.А., Саратов, Россия. E-mail: orifelwi@mail.ru

Information about the authos:

Shlyakhov Stanislav M. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Saratov State Technical University named after Yu.A. Gagarin, Saratov, Russian Federation). E-mail: shlyakhovsm@yandex.ru

Krivulina Elvira F. (Candidate of Technical Sciences, Docent, Saratov State Technical University named after Yu.A. Gagarin, Saratov, Russian Federation). E-mail: orifelwi@mail.ru

Статья поступила в редакцию 23.11.2021; принята к публикации 03.10.2022

The article was submitted 23.11.2021; accepted for publication 03.10.2022

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

2022. № 79

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано в печать 21.10.2022 г. Формат 70×100¹/₁₆.
Печ. л. 10,6; усл. печ. л. 13,8. Цена свободная.
Тираж 250 экз. Заказ № 5188.

Дата выхода в свет 27.10.2022 г.

Адрес издателя и редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Томский государственный университет

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru