

Exact solution of the fundamental equation of acoustics for a pressure wave developing in two directions

Vladislav I. Borodin¹, **Alexandr V. Lun-Fu²**, Mikhail A. Bubenchikov³, Alexey M. Bubenchikov⁴, Dmitriy V. Mamontov⁵

^{1, 2} Gazprom transgaz Tomsk LLC, Tomsk, Russian Federation

^{3, 4, 5} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ v.borodin@gtt.gazprom.ru

² a.Lun-Fu@gtt.gazprom.ru

³ michael121@mail.ru

⁴ bubenchikov_am@mail.ru

⁵ orevaore@mail.ru

Abstract. The authors proceed from the hyperbolic equation for acoustic pressure. Using the integral Fourier transform along the axial coordinate, an equation in partial derivatives for the kernel of this transformation is found. This equation contains only one spatial coordinate and time. Applying the integral Laplace transform in time to the last equation, we obtain an ordinary differential equation with respect to the radial coordinate for the corresponding image. It turns out that the solution of the last equation is the well-known Macdonald function. For this function, it was possible to find the original image according to Laplace. All this made it possible to write an integral formula for the pressure in a sound wave. If the function of the initial pressure distribution along the pipe axis is taken in the form of a Gaussian impulse, then the integrals included in the representation of the desired solution are taken explicitly. As a result, we obtain an explicit compact formula for the acoustic pressure distribution in the axisymmetric case. It is convenient to use this formula to analyze the distribution of sound disturbances both along the pipe axis and in the radial direction. Therefore, the results are presented as isobars in the (z, r) plane corresponding to different times.

Keywords: wave equation for pressure, non-periodic sound wave, operational calculus, exact solution

Acknowledgments: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement No. 075-02-2020-1479/1).

For citation: Borodin, V.I., Lun-Fu, A.V., Bubenchikov, M.A., Bubenchikov, A.M., Mamontov, D.V. (2022) Exact solution of the fundamental equation of acoustics for a pressure wave developing in two directions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 79. pp. 5–13. doi: 10.17223/19988621/79/1

Введение

В настоящее время фиксируется большой интерес к разработке теории прохождения звуковых волн через многослойные акустические системы.

В [1] исследовано распространение звука по каналу с двойными стенками в случае неоднородности импеданса стенки. Проанализировано влияние внешнего радиуса воздуховода и контраста импедансов футеровки, среднего расхода и

центральной перфорированной трубы. Учет облицовки стен потребовал факторизации матрицы Винера–Хопфа 3×3 . В [2] исследован звук из полубесконечного канала, содержащего внутренний канал. Условие Робина на одной из внутренних стен имитирует наличие второго акустического слоя. Все остальные поверхности используют условия Неймана. Представление решения краевой задачи через интегралы Фурье приводит к матричному уравнению Винера–Хопфа. Последнее уравнение сводится к форме, для которой применяются методы слабой факторизации. В результате были получены данные о выходе звука из раздвоенного круглого волновода.

Акустические модели сложной конструкции выхлопной трубы, содержащей звукопоглощающие вставки, обычно приводят к матричным уравнениям Винера–Хопфа, для которых авторами разрабатываются оригинальные методы численной факторизации [3, 4]. Однако есть и подходы, не относящиеся к этому методу.

В работе [5] описан метод согласования режимов колебаний. Численные результаты демонстрируют влияние радиуса волновода, длины части оболочки и свойств звукопоглощающей оболочки на распространение звуковых волн в бесконечно круглой цилиндрической трубе с вставленным перфорированным экраном. Исследования распространения звуковых волн в волноводах с композитными стенками или перфорированными вставками приводят к связанным матричным уравнениям, для которых все еще необходимо найти подходящие методы факторизации. В случае распространения монохроматической волны или выделения собственных мод колебаний задачи решить проще. В этом случае можно добиться вполне приличного согласия с результатами по методу Винера–Хопфа.

В работе [6] мы предлагаем новый подход, который позволяет аналитически оценить звукоизоляцию в результате отражения звуковых волн определенной частоты от многослойной стены. Подход основан на представлении решения уравнения для амплитуды монохроматической волны через базисные функции и нахождении всех коэффициентов линейных представлений в отдельных зонах композитной стенки из условий «сшивки» решения на границах отдельных слоев. Выполнение данных условий приводит к линейной системе алгебраических соотношений для коэффициентов представлений решений. Решая эту систему, мы находим коэффициенты отражения и пропускания через многослойную стенку, соответствующие заданной частоте. Анализ волновой динамики внутри многослойной структуры завершается перебором по всем частотам рассматриваемого спектра. Такой подход расширяет возможности всех имеющихся теоретических работ, проводимых в этом направлении. Кроме того, он позволяет детально описать характер распространения звуковых волн в направлении нормали к выбранным акустическим слоям и является альтернативой уже существующим подходам [3–5].

Цель настоящей работы – построение точного аналитического распределения для аperiодической звуковой волны, которое в дальнейшем используется для тестирования алгоритмов разложения на монохроматические волны, используемые в анализе многослойных осесимметричных конструкций.

Осесимметричное распределение для неperiодической звуковой волны

Неperiодические решения волнового уравнения обычно появляются под влиянием начальных условий. Пусть, например, избыточное звуковое давление

$P(r, z, t)$ удовлетворяет волновому дифференциальному уравнению с осевой симметрией

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Будем искать решение дифференциального уравнения (1) в форме интегрального преобразования Фурье по переменной z :

$$P(r, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz\lambda} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi} f(\xi) d\xi \right] G(\lambda, t, r) d\lambda. \quad (2)$$

Если в формуле (2) множитель $G(\lambda, t, r)$ положить равным единице, то эта формула превращается в тождество Фурье, т.е. функция $f(z) = p(0, z, 0)$ является распределением давления вдоль оси газовой трубы. Далее, для того чтобы давление $P(r, z, t)$ удовлетворяло дифференциальному уравнению (1), множитель $G(\lambda, t, r)$ должен удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных следующего вида:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} - \lambda^2 G - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

Применяя к уравнению (3) операционное исчисление по времени t , обозначим через $\bar{G}(\lambda, p, r)$ изображение по Лапласу для функции $G(\lambda, t, r)$, т.е. положим

$$\bar{G}(\lambda, p, r) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} G(\lambda, t, r) dt. \quad (4)$$

Из равенств (3) и (4) следует, что изображение $\bar{G}(\lambda, p, r)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 \bar{G}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{G}}{dr} - \left(\lambda^2 + \frac{p^2}{c^2} \right) \bar{G} = 0. \quad (5)$$

Одним из решений дифференциального уравнения (5), как известно из теории функций Бесселя [7], является функция Макдональда $K_0\left(r\sqrt{\lambda^2 + p^2/c^2}\right)$, поэтому изображение по Лапласу для множителя $G(\lambda, t, r)$ можно записать в виде:

$$\bar{G}(\lambda, p, r) = p K_0\left(\alpha\sqrt{p^2 + \beta^2}\right), \quad \text{где } \alpha = \frac{r}{c}, \quad \beta = \lambda c. \quad (6)$$

Дальнейший успех при применении операционного исчисления, как обычно, зависит от того, сможем ли мы в справочных таблицах найти оригинал для изображения вида (6).

В справочнике В.А. Диткина и А.П. Прудникова [8, с. 346] мы находим более общее операционное соответствие между оригиналом и изображением, чем это нужно для формулы (6):

$$\frac{p K_{\nu+1/2}\left(\alpha\sqrt{p^2 + \beta^2}\right)}{\left(\sqrt{p^2 + \beta^2}\right)^{\nu+1/2}} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 & t \leq \alpha, \\ (t-\alpha)\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \left(\frac{\sqrt{t^2 - \alpha^2}}{\alpha\beta}\right)^{\nu} J_{\nu}\left(\beta\sqrt{t^2 - \alpha^2}\right) & t > \alpha. \end{cases} \quad (7)$$

Оригинал здесь представляется в виде разрывной функции от времени t . Подставляя сюда $v = -1/2$, получим

$$pK_0\left(\alpha\sqrt{p^2+\beta^2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 & t \leq \alpha, \\ (t-\alpha)\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\sqrt{t^2-\alpha^2}}} J_{-1/2}\left(\beta\sqrt{t^2-\alpha^2}\right) & t > \alpha. \end{cases} \quad (8)$$

Функция Бесселя с полуцелым индексом, согласно справочнику [7], равна

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z. \quad (9)$$

Таким образом, после подстановки (9) в (8) и последующих сокращений получим простое выражение для множителя $G(\lambda, t, r)$, входящего в решение (2):

$$G(\lambda, t, r) = \begin{cases} 0 & ct \leq r, \\ \sqrt{\frac{ct-r}{ct+r}} \cos\left(\lambda\sqrt{c^2t^2-r^2}\right) & ct > r. \end{cases} \quad (10)$$

Само решение задачи об аperiодической звуковой волне будет представляться теперь формулой

$$P(r, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz\lambda} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi} f(\xi) d\xi \right] \sqrt{\frac{ct-r}{ct+r}} \cos\left(\lambda\sqrt{c^2t^2-r^2}\right) d\lambda. \quad (11)$$

Если рассматривать важный частный случай начального распределения давления вдоль оси трубы в виде импульса Гаусса, то интегралы в формуле (11) возьмются в явном виде, и в таком же явном виде получится и поле звукового давления $P(r, z, t)$. Возьмем, например, функцию начального распределения давления вдоль оси трубы в виде:

$$f(\xi) = P_0 e^{-\delta \xi^2}. \quad (12)$$

Здесь P_0 – амплитуда, а параметр δ определяет размер начального импульса по оси z . Тогда для интеграла в квадратных скобках формулы (11), имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi} f(\xi) d\xi = 2P_0 \int_0^{\infty} e^{-\delta \xi^2} \cos \lambda\xi d\xi = P_0 \sqrt{\frac{\pi}{\delta}} e^{-\frac{\lambda^2}{4\delta}}. \quad (13)$$

Аналогично можно вычислить и интеграл по переменной λ в формуле (11). В результате получим выражение для поля звукового давления:

$$P(r, z, t) = P_0 \sqrt{\frac{ct-r}{ct+r}} \frac{1}{2} \left[e^{-\delta \left(z + \sqrt{c^2t^2-r^2} \right)^2} + e^{-\delta \left(z - \sqrt{c^2t^2-r^2} \right)^2} \right]. \quad (14)$$

Полагая в этом решении $r = 0$, находим, что давление вдоль оси трубы меняется по закону

$$P(0, z, t) = P_0 \frac{1}{2} \left[e^{-\delta (z+ct)^2} + e^{-\delta (z-ct)^2} \right]. \quad (15)$$

Когда время $t = 0$, формула (15) дает начальное распределение давления (12), но благодаря наличию члена ct поле давления состоит из двух импульсов Гаусса, которые движутся в противоположные стороны. Аналогичным свойством обладает и полное решение (14), но здесь скорость движения импульсов Гаусса зависит от радиуса r .

Исходное уравнение (1) является однородным, поэтому оно будет справедливо для любой линейно преобразованной величины давления. Однако при этом начальный импульс давления P_0 должен быть представлен в соответствующем виде. Если же пространство заполнено воздухом при давлении 1 атм, то избыточное давление P_0 не должно превышать 5–6 атм. В противном случае в реальности возмущение давления будет распространяться не в виде звуковой, а в виде ударной волны. В результате мы получим другой режим движения среды, который описывается несколько иными уравнениями.

Нами проведены расчеты при $P_0 = 0,5$ атм и $\delta = 2$ м (рис. 1, 2).

На рис. 1 показаны линии постоянного давления (изобары), которые вычислены по формуле (14) в такой момент времени после начала движения акустической волны, когда расстояние ct равняется 10 м.

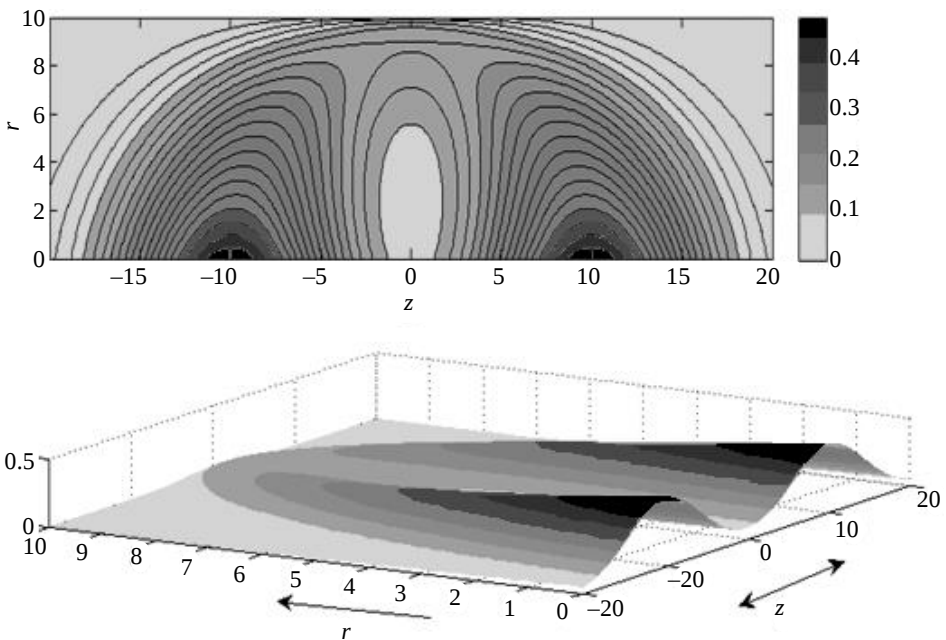


Рис. 1. Линии постоянного звукового давления вне газовой трубы, вычисленные по формуле (14). Момент времени таков, что $ct = 10$ м

Fig. 1. Lines of constant acoustic pressure calculated by formula (14) beyond the gas pipe. The time instant is such that $ct = 10$ m

В нижней части рис. 1 интенсивность давления показана графически как поверхность вида $P = P(r, z)$ в плоскости (r, z) при фиксированном значении расстояния ct .

На рис. 2 представлено распределение звукового давления вокруг газовой трубы при нескольких значениях расстояния ct , пройденного акустическим возмущением.

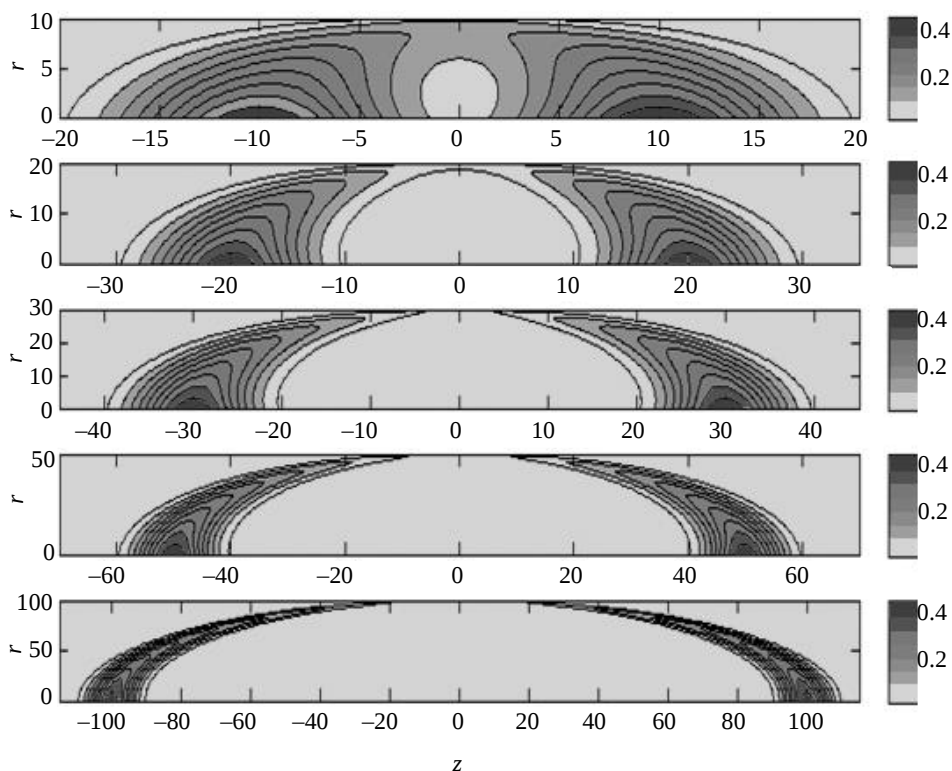


Рис. 2. Линии постоянного звукового давления в расширяющейся звуковой волне при различных значениях параметра ct : $ct = 10, 20, 30, 50, 100$ м

Fig. 2. Lines of constant acoustic pressure in an expanding acoustic wave at different values of the parameter ct : $ct = 10, 20, 30, 50$, and 100 m

Как видим, звуковая волна от местного локального возмущения внутри газовой трубы уходит в бесконечность, расширяясь одновременно как в радиальном, так и в осевом направлении.

Заключение

Основным результатом работы является построенное точное аналитическое решение задачи о распространении осесимметричного акустического возмущения в безграничном пространстве. Согласно этому решению форма аperiодической звуковой волны в автомодельных переменных $ct - r$ и $ct + r$ остается одинаковой во все время распространения начального возмущения $f(z)$. Таким образом, построенное решение справедливо лишь для однородной акустической среды. Тем не менее полученное распределение оказывается чрезвычайно полезным при тестировании алгоритмов разложения аperiодического сигнала на монохроматические волны и соединении этих волн после прохождения многослойных акустических конструкций.

Список источников

1. Demir A., Çinar Yanaz Ö. Propagation of sound in an infinite two-part duct carrying mean flow inserted axially into a larger infinite duct with wall impedance discontinuity // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2009. V. 89. P. 454–465. doi: 10.1002/zamm.200800145
2. Peake N., Abrahams I.D. Sound radiation from a semi-infinite lined duct // *Wave Motion*. 2019. V. 92. Art. 102407. doi: 10.1016/j.wavemoti.2019.102407
3. Tiryakioğlu B. Mode Matching Analysis of Sound Waves in an Infinite Pipe with Perforated Screen // *Acoustical Physics*. 2021. V. 66. P. 580–586. doi: 10.1134/S1063771020060135
4. Gabard G., Astley R.J. Theoretical model for sound radiation from annular jet pipes: Far- and near-field solutions // *Journal of Fluid Mechanics*. 2006. V. 549. P. 315–341.
5. Veitch B., Peake N. Acoustic propagation and scattering in the exhaust flow from coaxial cylinders // *Journal of Fluid Mechanics*. 2008. V. 613. P. 275–307.
6. Lun-Fu A.V., Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Mamontov D.V. Passage of Monochromatic Sound Through a Gas Pipeline Wall // *Acoustics Australia*. 2021. V. 50. P. 119–126. doi: 10.1007/s40857-021-00255-0
7. Градштейн И.С., Рыжик Н.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. : Физматгиз, 1963. 1100 с.
8. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. М. : Высшая школа, 1965. 466 с.

References

1. Demir A., Çinar Yanaz Ö. (2009) Propagation of sound in an infinite two-part duct carrying mean flow inserted axially into a larger infinite duct with wall impedance discontinuity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 89. pp. 454–465. doi: 10.1002/zamm.200800145.
2. Peake N., Abrahams I.D. (2019) Sound radiation from a semi-infinite lined duct. *Wave Motion*. 92. 102407. doi: 10.1016/j.wavemoti.2019.102407.
3. Tiryakioğlu B. (2021) Mode matching analysis of sound waves in an infinite pipe with perforated screen. *Acoustical Physics*. 66. pp. 580–586. doi: 10.1134/S1063771020060135.
4. Gabard G., Astley R.J. (2006) Theoretical model for sound radiation from annular jet pipes: Far- and near-field solutions. *Journal of Fluid Mechanics*. 549. pp. 315–341.
5. Veitch B., Peake N. (2008) Acoustic propagation and scattering in the exhaust flow from coaxial cylinders. *Journal of Fluid Mechanics*. 613. pp. 275–307.
6. Lun-Fu A.V., Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Mamontov D.V. (2021) Passage of monochromatic sound through a gas pipeline wall. *Acoustics Australia*. 50. pp. 119–126. doi: 10.1007/s40857-021-00255-0.
7. Gradshteyn I.S., Ryzhik N.M. (2007) *Table of Integrals, Series, and Products*. Amsterdam: Elsevier.
8. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. (1965) *Spravochnik po operacionnomu ischisleniyu* [Handbook of Operational Calculus]. Moscow: Vysshaya Shkola.

Сведения об авторах:

Бородин Владислав Иванович – генеральный директор ООО «Газпром трансгаз Томск», Томск, Россия. E-mail: v.borodin@gtt.gazprom.ru

Лун-Фу Александр Викторович – главный инженер ООО «Газпром трансгаз Томск», Томск, Россия. E-mail: a.Lun-Fu@gtt.gazprom.ru

Бубенчиков Михаил Алексеевич – доктор физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: michael121@mail.ru

Бубенчиков Алексей Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: bubenchikov_am@mail.ru

Мамонтов Дмитрий Владимирович – младший научный сотрудник регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: orevaore@mail.ru

Information about the authors:

Borodin Vladislav I. (CEO Lead engineer, Gazprom transgaz Tomsk LLC, Tomsk, Russian Federation). E-mail: v.Borodin@gtt.gazprom.ru

Lun-Fu Alexandr V. (Lead engineer, Gazprom transgaz Tomsk LLC). E-mail: a.Lun-Fu@gtt.gazprom.ru

Bubenchikov Mikhail A. (Doctor of Physics and Mathematics, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: michael121@mail.ru

Bubenchikov Alexey M. (Doctor of Physics and Mathematics, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bubenchikov_am@mail.ru

Mamontov Dmitriy V. (National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: orevaore@mail.ru

Статья поступила в редакцию 07.05.2022; принята к публикации 03.10.2022

The article was submitted 07.05.2022; accepted for publication 03.10.2022