ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2022 Математика и механика № 79
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 517.984.5 MSC: 34A55, 34B24, 47E05
doi: 10.17223/19988621/79/2

Единственность восстановления оператора Штурма–Лиувилля со спектральным параметром, квадратично входящим в граничное условие

Лейла Ибрагим кызы Маммадова[1], Ибрагим Маил оглы Набиев[2]

[1] Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, Баку, Азербайджан
[2] Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан
[2] Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан
[2] Университет Хазар, Баку, Азербайджан
[1] leylaimae@yahoo.com
[2] nabievim@yahoo.com

Аннотация. Работа посвящена исследованию обратной задачи для оператора Штурма–Лиувилля с неразделенными граничными условиями, одно из которых квадратично зависит от спектрального параметра. Доказана теорема единственности, и построен алгоритм решения обратной задачи. В качестве спектральных данных используются спектр рассмотренной краевой задачи, свободный член квадратичной функции спектрального параметра, входящей в граничное условие, и некоторая специальная последовательность знаков.
Ключевые слова: оператор Штурма–Лиувилля, неразделенные граничные условия, обратная задача, теорема единственности, алгоритм решения

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития науки при Президенте Азербайджанской Республики, грант № EİF/MQM/Elm-Tehsil-1-2016-1(26)-71/05/1.

Для цитирования: Маммадова Л.И., Набиев И.М. Единственность восстановления оператора Штурма–Лиувилля со спектральным параметром, квадратично входящим в граничное условие // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 79. С. 14–24. doi: 10.17223/19988621/79/2

Original article

Uniqueness of recovery of the Sturm–Liouville operator with a spectral parameter quadratically entering the boundary condition

Leyla I. Mammadova[1], Ibrahim M. Nabiev[2]

[1] *Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan*
[2] *Baku State University, Baku, Azerbaijan*
[2] *Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan*
[2] *Khazar University, Baku, Azerbaijan*
[1] *leylaimae@yahoo.com*
[2] *nabievim@yahoo.com*

Abstract. The work is devoted to the study of the inverse problem for the Sturm–Liouville operator with a real square-integrable potential. The boundary conditions are non-separated. One of these boundary conditions includes a quadratic function of the spectral parameter. A uniqueness theorem is proved and an algorithm for solving the inverse problem is constructed. As spectral data, we use the spectrum of the considered boundary value problem, the constant term of the quadratic function of the spectral parameter included in the boundary condition, and some special sequence of signs. From these spectral data, the characteristic function of the boundary value problem is first reconstructed in the form of an infinite product and the parameters of the boundary conditions, and then the problem is reduced to the inverse problem of reconstructing the potential of the Sturm–Liouville operator from the spectra of two boundary value problems with separated boundary conditions.
The results of the article can be used for solving various versions of inverse problems of spectral analysis for differential operators, as well as for integrating some nonlinear equations of mathematical physics.
Keywords: Sturm–Liouville operator, nonseparated boundary conditions, inverse problem, uniqueness theorem, solution algorithm

Acknowledgments: This work was supported by the Science Development Foundation under the President of the Republic of Azerbaijan, Grant no. EİF/MQM/Elm-Tehsil-1-2016-1(26)-71/05/1.

For citation: Mammadova, L.I., Nabiev, I.M. (2022) Uniqueness of recovery of the Sturm–Liouville operator with a spectral parameter quadratically entering the boundary condition. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 79. pp. 14–24. doi: 10.17223/19988621/79/2

Введение

Во многих теоретических и прикладных задачах современной теории дифференциальных операторов весьма важную роль играют исследования, связанные с краевыми задачами со спектральным параметром в граничных условиях. Применение метода Фурье к смешанным задачам для уравнений в частных производных, в которых дифференцирование по времени входит в граничные условия, приводит к таким задачам. Подобные задачи довольно часто возникают при построении систем защиты приборов от ударного воздействия, исследованиях колебаний струны с грузом на конце, крутильных колебаний вала с маховиком на конце, колебаний антенн, нагруженных сосредоточенными емкостями и индуктивностями и др. (см.: [1, с. 45; 2, с. 161; 3, с. 215]).

Исследованию краевых задач со спектральным параметром в граничных условиях посвящено большое количество работ. Наиболее известным объектом при решении таких задач служит оператор Штурма–Лиувилля. Прямые и обратные задачи спектрального анализа для этого оператора с разделенными граничными условиями и со спектральным параметром в граничных условиях полностью решены во многих работах (см.: [4–12] и литературу в них). Задачи восстановления с неразделенными граничными условиями, зависящими от спектрального параметра, рассмотрены в [13–17], где для восстановления неизвестных коэффициентов дифференциального уравнения и граничных условий используются как минимум два спектра и некоторые дополнительные спектральные данные. В статье [18] подробно исследована задача восстановления оператора Штурма–Лиувилля с граничным условием, содержащим линейную функцию спектрального параметра. Отметим, что в работе [19] дан краткий обзор результатов по обратным спектральным задачам для дифференциальных операторов второго порядка на отрезке с неразделенными граничными условиями. Приведены основные результаты и методы, связанные с обратными задачами для операторов Штурма–Лиувилля и диффузии с неразделенными (в том числе периодическими и квазипериодическими) граничными условиями.

В настоящей работе исследуется обратная спектральная задача восстановления оператора Штурма–Лиувилля с неразделенными граничными условиями, одно из которых квадратично зависит от спектрального параметра. Доказана теорема единственности, и получен алгоритм решения обратной задачи. В качестве спектральных данных берутся спектр одной краевой задачи, некоторая последовательность знаков и некоторое число.

Рассмотрим краевую задачу, порожденную на отрезке $[0,\pi]$ уравнением Штурма–Лиувилля

$$-y''+q(x)y=\lambda^2 y \tag{1}$$

и граничными условиями вида:

$$\begin{gathered} y(0)-y(\pi)=0, \\ y'(0)-\left(m\lambda^2+\alpha\lambda+\beta\right)y(\pi)-y'(\pi)=0, \end{gathered} \tag{2}$$

где $q(x)$ – вещественная функция, принадлежащая пространству $L_2[0,\pi]$, λ – спектральный параметр, α, β, m – вещественные числа. Эту задачу будем обозначать через P.

При $m=\alpha=\beta=0$ граничные условия (2) оказываются периодическими. Обратные спектральные задачи в этом случае (а также в случаях антипериодических и квазипериодических граничных условий) разными методами полностью решены (см.: [20–22] и литературу в них). Характеристика спектра задачи P с граничными условиями без спектрального параметра ($m=\alpha=0$) подробно исследована в работе [23] (также см.: [24]). Имеется немного работ, относящихся к краевой задаче *P* в случае $m = 0$, т.е. когда граничные условия линейно зависят от спектрального параметра (см.: [13–18]). Отметим, что обратные задачи в случае $m \neq 0$ ранее не изучались.

В дальнейшем будем полагать, что $m\alpha \neq 0$.

Постановка обратной задачи. Теорема единственности

Спектр задачи *P* совпадает с множеством нулей целой функции экспоненциального типа

$$\Delta(\lambda) = c(\pi,\lambda) + \left(m\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta\right)s(\pi,\lambda) + s'(\pi,\lambda) - 2, \tag{3}$$

которая называется характеристической функцией краевой задачи *P*. Здесь $c(x,\lambda)$, $s(x,\lambda)$ – решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям $c(0,\lambda) = s'(0,\lambda) = 1$, $c'(0,\lambda) = s(0,\lambda) = 0$. Известно [20, с. 38], что для функций $c(\pi,\lambda)$, $s(\pi,\lambda)$ и $s'(\pi,\lambda)$ справедливы следующие представления:

$$c(\pi,\lambda) = \cos\lambda\pi + A\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda} + \frac{f_1(\lambda)}{\lambda}, \tag{4}$$

$$s(\pi,\lambda) = \frac{\sin\lambda\pi}{\lambda} - A\frac{\cos\lambda\pi}{\lambda^2} + \frac{f_2(\lambda)}{\lambda^2}, \tag{5}$$

$$s'(\pi,\lambda) = \cos\lambda\pi + A\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda} + \frac{f_3(\lambda)}{\lambda}, \tag{6}$$

где $A = \frac{1}{2}\int_0^\pi q(x)\,dx$, $f_2(\lambda)$ – четная, а $f_1(\lambda)$, $f_3(\lambda)$ – нечетные целые функции экспоненциального типа не выше π, суммируемые с квадратом на вещественной оси. Учитывая эти представления и используя теорему Пели–Винера [25, с. 47], из (3) получаем

$$\Delta(\lambda) = m\lambda\sin\lambda\pi + (2 - mA)\cos\lambda\pi + \alpha\sin\lambda\pi + f(\lambda) - 2, \tag{7}$$

где $f(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t)e^{i\lambda t}dt$, $\tilde{f}(t) \in L_2[-\pi,\pi]$.

С помощью представления (7) и теоремы Руше легко устанавливается, что краевая задача *P* имеет счетное множество собственных значений $\mu_k\left(k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$. Для этих собственных значений при $|k| \to \infty$ имеет место следующая асимптотическая формула (см.: [26]):

$$\mu_k = k + \frac{2\left[(-1)^k - 1\right] + mA}{\pi m k} + \frac{\tau_k}{k}, \quad \{\tau_k\} \in l_2. \tag{8}$$

Обозначим

$$\sigma_n = \operatorname{sign}\left[1 - \left|s'(\pi,\lambda_n)\right|\right], \; n = \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{9}$$

где λ_n – нули функции $s(\pi,\lambda)$, квадраты которых есть собственные значения краевой задачи, порожденной уравнением (1) и граничными условиями Дирихле

$$y(0) = y(\pi) = 0. \tag{10}$$

Обратная задача ставится следующим образом:

Обратная задача. Зная последовательности $\{\mu_k\}$, $\{\sigma_n\}$ и число β, восстановить краевую задачу *P*.

Справедлива следующая теорема единственности:

Теорема. Краевая задача *P* однозначно восстанавливается, если известны ее спектр $\{\mu_k\}$, число β и последовательность знаков $\{\sigma_n\}$.

Доказательство. Из асимптотической формулы (8) следует, что

$$\mu_{2k}=2k+\frac{A}{2\pi k}+\frac{\tau_{2k}}{2k},$$

$$\mu_{2k+1}=2k+1+\frac{mA-4}{(2k+1)\pi m}+\frac{\tau_{2k+1}}{2k+1}=2k+1+\frac{mA-4}{2\pi mk}+\frac{\eta_k}{k},\quad \{\eta_k\}\in l_2.$$

Отсюда параметр *m* можно определить по формуле

$$m=\frac{2}{\pi}\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k(\mu_{2k}-\mu_{2k+1}+1)}. \tag{11}$$

Зная спектр $\{\mu_k\}$ и параметр *m* характеристическую функцию $\Delta(\lambda)$ как целую функцию экспоненциального типа можно восстановить в виде бесконечного произведения следующим образом (см.: [26]):

$$\Delta(\lambda)=m\pi(\mu_{-0}-\lambda)(\mu_{+0}-\lambda)\prod_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\frac{\mu_k-\lambda}{k}. \tag{12}$$

Из представления (7) при $\lambda=2k+\frac{1}{2}$ получаем

$$\Delta\left(2k+\frac{1}{2}\right)=\left(2k+\frac{1}{2}\right)m+\alpha+f\left(2k+\frac{1}{2}\right)-2.$$

Поэтому параметр α определяется по формуле

$$\alpha=\lim_{k\to\infty}\left[\Delta\left(2k+\frac{1}{2}\right)-\left(2k+\frac{1}{2}\right)m+2\right], \tag{13}$$

так как в силу леммы Римана–Лебега $\lim\limits_{k\to\infty}f\left(2k+\frac{1}{2}\right)=0.$

Поскольку функции $c(\pi,\lambda)$, $s(\pi,\lambda)$ и $s'(\pi,\lambda)$ являются четными, то, используя соотношение (3), функцию $s(\pi,\lambda)$ можно определить следующим образом:

$$s(\pi,\lambda)=\frac{\Delta(\lambda)-\Delta(-\lambda)}{2\alpha\lambda}. \tag{14}$$

Отсюда находим нули λ_n, $n=\pm1,\pm2,\ldots$, функции $s(\pi,\lambda)$. Из четности функции (14) следует, что $\lambda_{-n}=-\lambda_n$.

Рассмотрим функции

$$u_+(\lambda)=c(\pi,\lambda)+s'(\pi,\lambda), \tag{15}$$

$$u_-(\lambda)=c(\pi,\lambda)-s'(\pi,\lambda). \tag{16}$$

Ввиду (3) функция $u_+(\lambda)$ восстанавливается по формуле

$$u_+(\lambda)=\Delta(\lambda)-\left(m\lambda^2+\alpha\lambda+\beta\right)s(\pi,\lambda)+2. \tag{17}$$

Покажем теперь, что кроме спектра $\{\mu_k\}$ и числа β (по которым, как было показано выше, однозначно восстанавливаются $u_+(\lambda)$, $s(\pi,\lambda)$, m, α) достаточно задать еще последовательность $\{\sigma_n\}$ для того, чтобы восстановить функцию $u_-(\lambda)$, а значит, и функцию

$$s'(\pi,\lambda)=\frac{1}{2}\left[u_+(\lambda)-u_-(\lambda)\right]. \tag{18}$$

Действительно, так как λ_n, $n=\pm1,\pm2,\ldots$, являются нулями функции $s(\pi,\lambda)$, то из тождества

$$c(\pi,\lambda)s'(\pi,\lambda)-c'(\pi,\lambda)s(\pi,\lambda)=1$$

следует, что

$$c(\pi,\lambda_n)s'(\pi,\lambda_n)=1. \tag{19}$$

Возведя в квадрат обе части каждого из соотношений (15) и (16) и вычитая полученные равенства, имеем

$$u_-^2(\lambda)-u_+^2(\lambda)=-4c(\pi,\lambda)s'(\pi,\lambda).$$

Полагая в этом равенстве $\lambda=\lambda_n$ и учитывая соотношение (19), получим

$$u_-^2(\lambda_n)-u_+^2(\lambda_n)=-4.$$

Поэтому

$$u_-(\lambda_n)=\operatorname{sign}u_-(\lambda_n)\sqrt{u_+^2(\lambda_n)-4}. \tag{20}$$

Принимая во внимание перемежаемость нулей функций $s(\pi,\lambda)$ и $s'(\pi,\lambda)$ и представление (6) функции $s'(\pi,\lambda)$, имеем

$$\operatorname{sign}s'(\pi,\lambda_n)=(-1)^n.$$

Тогда согласно (9), (16) и (19)

$$\operatorname{sign}u_-(\lambda_n)=\operatorname{sign}\left[c(\pi,\lambda_n)-s'(\pi,\lambda_n)\right]=$$

$$=\operatorname{sign}\left[\frac{1}{s'(\pi,\lambda_n)}-s'(\pi,\lambda_n)\right]=\operatorname{sign}\frac{1-\left[s'(\pi,\lambda_n)\right]^2}{s'(\pi,\lambda_n)}=$$

$$=\operatorname{sign}\frac{1-\left|s'(\pi,\lambda_n)\right|}{(-1)^n}=(-1)^n\sigma_n.$$

Подставляя это в (20), получаем

$$u_-(\lambda_n)=(-1)^n\sigma_n\sqrt{u_+^2(\lambda_n)-4}. \tag{21}$$

Из представлений (4)–(6) видно, что функции $u_-(\lambda)$ и $s(\pi,\lambda)$ являются четными целыми функциями экспоненциального типа не выше π и

$$\lambda u_-(\lambda)=f_1(\lambda)-f_3(\lambda)\in L_2(-\infty,\infty),$$

$$\lambda s(\pi,\lambda)=\sin\lambda\pi+o\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{\pi|\mathrm{Im}\lambda|}\right),\ \lambda\to\infty .$$

Тогда согласно теореме 28 из книги [25] функция $u_-(\lambda)$ однозначно определяется последовательностями $\{\lambda_n\}$, $\{\sigma_n\}$, $\{u_+(\lambda_n)\}$ по формуле

$$u_-(\lambda)=2s(\pi,\lambda)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\lambda_n\sigma_n\sqrt{u_+^2(\lambda_n)-4}}{\left(\lambda^2-\lambda_n^2\right)\dfrac{\partial s(\pi,\lambda_n)}{\partial\lambda}}. \tag{22}$$

Единственность построенной функции $u_-(\lambda)$ вытекает из того факта, что интерполяционная формула (22) задает взаимно однозначное соответствие между l_2 и пространством целых функций экспоненциального типа не выше π, принадлежащих $L_2(-\infty,\infty)$.

Значит, характеристическая функция $s'(\pi,\lambda)$ краевой задачи, порожденной уравнением (1) и граничными условиями

$$y(0)=y'(\pi)=0, \tag{23}$$

восстанавливается по формуле (18), в которой функции $u_+(\lambda)$ и $u_-(\lambda)$ определяются соотношениями (17) и (22) соответственно.

Известно [20], что по нулям ν_n, $n=\pm1,\pm2,\ldots$, ($\nu_{-n}=-\nu_n$) функции $s'(\pi,\lambda)$ и последовательности $\{\lambda_n\}$ однозначно определяется коэффициент $q(x)$ уравнения (1).

Таким образом, по заданным последовательностям $\{\mu_k\}$, $\{\sigma_n\}$ и числу β однозначно определяются как коэффициент $q(x)$ уравнения (1), так и параметры α, *m* граничных условий (2), т.е. полностью восстанавливается краевая задача *P*. Теорема доказана.

Алгоритм решения обратной задачи

Опираясь на доказательство теоремы единственности, приведем алгоритм решения обратной задачи.

Алгоритм. Даны последовательности $\{\mu_k\}$ (спектр задачи *P*), $\{\sigma_n\}$ (формула (9)) и число β.

1. Используя асимптотическую формулу (8), параметр *m* находим по формуле (11).
2. По последовательности $\{\mu_k\}$ и числу *m* строим функцию $\Delta(\lambda)$ в виде (12).
3. Определяем параметр α по формуле (13).
4. Восстанавливаем функцию $s(\pi,\lambda)$ – характеристическую функцию краевой задачи (1), (10) – с помощью (14) и находим нули λ_n этой функции.
5. Строим функцию (15) по (17).

6. Находим значения функции (16) в точках λ_n с помощью соотношения (21).

7. Восстанавливаем функцию (16) по интерполяционной формуле (22).

8. Характеристическую функцию $s'(\pi,\lambda)$ краевой задачи (1), (23) определяем по формуле (18).

9. По последовательностям $\{\lambda_n\}$ и $\{\nu_n\}$ нулей функций $s(\pi,\lambda)$ и $s'(\lambda,\pi)$ соответственно строим коэффициент $q(x)$ уравнения (1) по известной процедуре (см.: [18, 20]).

Список источников

1. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения : (с техническими приложениями). М. : Наука, 1968. 504 с.
2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М. : Изд-во Моск. гос. ун-та, 1999. 799 с.
3. *Ахтямов А.М.* Теория идентификации краевых условий и ее приложения. М. : Физматлит, 2009. 272 с.
4. *Panakhov E.S., Koyunbakan H., Ic U.* Reconstruction formula for the potential function of Sturm–Liouville problem with eigenparameter boundary condition // Inverse Probl. Sci. and Eng. 2010. V. 18 (1). P. 173–180. doi: 10.1080/17415970903234976
5. *Эткин А.Е., Эткина Г.П.* О единственности решения обратной задачи Штурма–Лиувилля со спектральным параметром, рационально входящим в граничное условие // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. 2011. Т. 4, № 3. С. 158–170. URL: http://mi.mathnet.ru/iigum126
6. *Güldü Y., Amirov R.Kh., Topsakal N.* On impulsive Sturm–Liouville operators with singularity and spectral parameter in boundary conditions // Украинский математический журнал. 2012. Т. 64, № 12. С. 1610–1629.
7. *Möller M., Pivovarchik V.* Spectral Theory of Operator Pencils, Hermite-Biehler Functions, and their Applications. Cham : Birkhauser, 2015. 412 p. doi: 10.1007/978-3-319-17070-1
8. *Guliyev N.J.* Schrödinger operators with distributional potentials and boundary conditions dependent on the eigenvalue parameter // J. Math. Phys. 2019. V. 60 (6). Art. 063501. P. 1–23. doi: 10.1063/1.5048692
9. *Guliyev N.J.* On two-spectra inverse problems // Proc. American Math. Soc. 2020. V. 148 (10). P. 4491–4502. doi: 10.1090/proc/15155
10. *Guliyev N.J.* Essentially isospectral transformations and their applications // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 2020. V. 199 (4). P. 1621–1648. doi: 10.1007/s10231-019-00934-w
11. *Ala V., Mamedov Kh.R.* On a discontinuous Sturm-Liouville problem with eigenvalue parameter in the boundary conditions // Dynamic Systems and Applications. 2020. V. 29. P. 182–191. URL: http://www.dynamicpublishers.com/DSA/dsa2020pdf/11-DSA-20-A-11.pdf
12. *Yang Ch.-F., Bondarenko N.P., Xu X-Ch.* An inverse problem for the Sturm Liouville pencil with arbitrary entire functions in the boundary condition // Inverse Problems and Imaging. 2020. V. 14 (1). P. 153–169. doi: 10.3934/ipi.2019068
13. *Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М.* Обратная задача для пучка операторов с нераспадающимися краевыми условиями // Доклады РАН. 2009. Т. 425, № 1. С. 31–33. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=11714202
14. *Yurko V.A.* Inverse problems for nonselfadjoint quasi-periodic differential pencils // Anal. Math. Phys. 2012. V. 2. P. 215–230. doi: 10.1007/s13324-012-0030-9
15. *Freiling G., Yurko V.* Recovering nonselfadjoint differential pencils with nonseparated boundary conditions // Applicable Anal. 2015. V. 94 (8). P. 1649–1661. doi: 10.1080/00036811.2014.940918

16. *Ibadzadeh Ch.G., Mammadova L.I., Nabiev I.M.* Inverse problem of spectral analysis for diffusion operator with nonseparated boundary conditions and spectral parameter in boundary condition // Azerbaijan Journal of Mathematics. 2019. V. 9 (1). P. 171–189. URL: http://azjm.org/volumes/0901/pdf/11.pdf
17. *Mammadova L.I., Nabiev I.M., Rzayeva Ch.H.* Uniqueness of the solution of the inverse problem for differential operator with semiseparated boundary conditions // Baku Mathematical Journal. 2022. V. 1 (1). P. 47–52. doi: 10.32010/j.bmj.2022.05
18. *Nabiev I.M.* Reconstruction of the differential operator with spectral parameter in the boundary condition // Mediterr. Journal of Mathematics. 2022. V. 19 (3). Art. 124. P. 1–14. doi: 10.1007/s00009-022-02053-y
19. *Yurko V.A.* Inverse spectral problems for differential operators with non-separated boundary conditions // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2020. V. 28 (4). P. 567–616. doi: 10.1515/jiip-2019-0044
20. *Марченко В.А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев : Наукова думка, 1977. 332 с.
21. *Nabiev I.M.* Determination of the diffusion operator on an interval // Colloquium Mathematicum. 2014. V. 134 (2). P. 165–178. doı: 10.4064/cm134-2-2
22. *Юрко В.А.* Об обратной периодической задаче для центрально-симметричных потенциалов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 1. С. 68–75. doi: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-68-75
23. *Гусейнов И.М., Набиев И.М.* Решение одного класса обратных краевых задач Штурма–Лиувилля // Математический сборник. 1995. Т. 186, № 5. С. 35-48. doi: 10.1070/SM1995v186n05ABEH000035
24. *Макин А.С.* Обратная задача для оператора Штурма-Лиувилля с регулярными краевыми условиями // Доклады РАН. 2006. Т. 408, № 3. С. 305–308. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=9226960
25. *Левин Б.Я.* Целые функции. М. : Изд-во Моск. гос. ун-та, 1971. 124 с.
26. *Маммадова Л.И., Набиев И.М.* Спектральные свойства оператора Штурма–Лиувилля со спектральным параметром, квадратично входящим в граничное условие // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30, вып. 2. С. 237–248. doi: 10.35634/vm200207

References

1. Collatz L. (1968) *Zadachi na sobstvennyye znacheniya s tekhnicheskimi prilozheniyami* [Tasks on eigenvalues (with technical applications)]. Moscow: Nauka.
2. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. (1999) *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow: MGU.
3. Akhtyamov A.M. (2009) *Teoriya identifikatsii krayevykh usloviy i eye prilozheniya* [Theory of identification of boundary conditions and its applications]. Moscow: Fizmatlit.
4. Panakhov E.S., Koyunbakan H., Ic U. (2010) Reconstruction formula for the potential function of Sturm–Liouville problem with eigenparameter boundary condition. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 18(1). pp. 173–180. doi: 10.1080/17415970903234976.
5. Atkin A.E., Atkina G.P. (2011) A uniqueness theorem for Sturm–Liouville equations with a spectral parameter rationally contained in the boundary condition. *Izvestiya Irkutskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Matematika*. 4(3). pp. 158–170. Access mode: http://mi.mathnet.ru/iigum126.
6. Guldu Y., Amirov, R.K., Topsakal N. (2013) On impulsive Sturm–Liouville operators with singularity and spectral parameter in boundary conditions. *Ukrainian Mathematical Journal*. 64(12). pp. 1816–1838. doi: 10.1007/s11253-013-0754-1
7. Möller M., Pivovarchik V. (2015) *Spectral Theory of Operator Pencils, Hermite–Biehler Functions, and Their Applications.* Birkhauser: Cham. doi: 10.1007/978-3-319-17070-1.

8. Guliyev N.J. (2019) Schrödinger operators with distributional potentials and boundary conditions dependent on the eigenvalue parameter. *Journal of Mathematical Physics*. 60(6). 063501 doi: 10.1063/1.5048692.
9. Guliyev N.J. (2020) On two-spectra inverse problems. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 148(10). pp. 4491–4502. doi: 10.1090/proc/15155.
10. Guliyev N.J. (2020) Essentially isospectral transformations and their applications. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. 199(4). pp. 1621–1648. doi: 10.1007/s10231-019-00934-w.
11. Ala V., Mamedov Kh.R. (2020) On a discontinuous Sturm–Liouville problem with eigenvalue parameter in the boundary conditions. *Dynamic Systems and Applications*. 29. pp. 182–191. Access mode: http://www.dynamicpublishers.com/DSA/dsa2020pdf/11-DSA-20-A-11.pdf
12. Yang Ch.-F., Bondarenko N.P., Xu X-Ch. (2020) An inverse problem for the Sturm–Liouville pencil with arbitrary entire functions in the boundary condition. *Inverse Problems and Imaging.* 14(1). pp. 153–169. doi: 10.3934/ipi.2019068.
13. Sadovnichii V.A., Sultanaev Y.T., Akhtyamov A.M. (2009) Inverse Problem for an Operator Pencil with Nonseparated Boundary Conditions. *Doklady Mathematics*. 279(2). pp. 169–171. Access mode: https://elibrary.ru/item.asp?id=11714202
14. Yurko V.A. (2012) Inverse problems for nonselfadjoint quasi-periodic differential pencils. *Analysis and Mathematical Physics*. 2. pp. 215–230. doi: 10.1007/s13324-012-0030-9.
15. Freiling G., Yurko V. (2015) Recovering nonselfadjoint differential pencils with nonseparated boundary conditions. *Applicable Analysis*. 94(8). pp. 1649–1661. doi: 10.1080/00036811.2014.940918.
16. Ibadzadeh Ch.G., Mammadova L.I., Nabiev I.M. (2019) Inverse problem of spectral analysis for diffusion operator with nonseparated boundary conditions and spectral parameter in boundary condition. *Azerbaijan Journal of Mathematics*. 9(1). pp. 171–189. Access mode: http://azjm.org/volumes/0901/pdf/11.pdf
17. Mammadova L.I., Nabiev I.M., Rzayeva Ch.H. (2022) Uniqueness of the solution of the inverse problem for differential operator with semiseparated boundary conditions. *Baku Mathematical Journal.* 1(1). pp. 47–52. doi: 10.32010/j.bmj.2022.05.
18. Nabiev I.M. (2022) Reconstruction of the differential operator with spectral parameter in the boundary condition. *Mediterranean Journal of Mathematics*. 19(3). art. 124. pp. 1–14. doı: 10.1007/s00009-022-02053-y.
19. Yurko V.A. (2020) Inverse spectral problems for differential operators with non-separated boundary conditions. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 28(4). pp. 567–616.
20. Marchenko V.A. (1977) *Operatory Shturma – Liuvillya i ikh prilozheniya* [Sturm–Liouville operators and their applications]. Kiev: Naukova Dumka.
21. Nabiev I.M. (2014) Determination of the diffusion operator on an interval. *Colloquium Mathematicum.* 134(2). pp. 165–178. doı: 10.4064/cm134-2-2.
22. Yurko V.A. (2016) Ob obratnoy periodicheskoy zadache dlya tsentral'no-simmetrichnykh potentsialov [On Inverse Periodic Problem for Central Symmetric Potentials]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika – Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 16(1). pp. 68–75. doi: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-68-75.
23. Guseinov I.M., Nabiev I.M. (1995) Solution of a class of inverse boundary-value Sturm–Liouville problems. *Sbornik: Mathematics*. 186(5). pp. 661–674. doi: 10.1070/SM1995v186n05ABEH000035.
24. Makin A.S. (2006) An inverse problem for the Sturm–Liouville operator with regular boundary conditions. *Doklady Mathematics*. 73. pp. 372–375. doi: 10.1134/S106456240603015X.
25. Levin B.Ya. (1971) *Tselyye funktsii* [Entire functions]. Moscow: MGU.
26. Mammadova L. I., Nabiev I.M. (2020) Spektral'nyye svoystva operatora Shturma–Liuvillya so spektral'nym parametrom, kvadratichno vkhodyashchim v granichnoye usloviye [Spectral properties of the Sturm–Liouville operator with a spectral parameter quadratically included

in the boundary condition]. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*. 30(2). pp. 237–248. doi: 10.35634/vm200207.

***Сведения об авторах*:**
Маммадова Лейла Ибрагим кызы – доктор философии по математике, старший преподаватель кафедры общей и прикладной математики Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности, Баку, Азербайджан. E-mail: leylaimae@yahoo.com
Набиев Ибрагим Маил оглы – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Бакинского государственного университета; главный научный сотрудник отдела функционального анализа Института математики и механики НАН Азербайджана; профессор кафедры математики Университета Хазар, Баку, Азербайджан. E-mail: nabievim@yahoo.com

***Information about the authors*:**
Mammadova Leyla I. (Senior Teacher, Doctor of Philosophy in Mathematics, Department of General and Applied Mathematics, Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan). E-mail: leylaimae@yahoo.com
Nabiev Ibrahim M. (Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Department of Applied Mathematics, Baku State University; Chief Researcher, Department of Functional Analysis, Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan; Professor, Department of Mathematics, Khazar University, Baku, Azerbaijan). E-mail: nabievim@yahoo.com

Статья поступила в редакцию 28.07.2020; принята к публикации 03.10.2022

The article was submitted 28.07.2020; accepted for publication 03.10.2022