

Научная статья

УДК 519.24

doi: 10.17223/19988621/79/4

MSC: 60F05

Предельное распределение периметра выпуклой оболочки, порожденной пуассоновским точечным процессом в выпуклом многоугольнике

Исакжан Мамасалиевич Хамдамов¹, Зоя Сергеевна Чай²,
Лола Джавлановна Шарипова³

¹ *Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан*

² *Ташкентский университет информационных технологий, Ташкент, Узбекистан*

³ *Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан*

¹ *khamdamov.isakjan@gmail.com*

² *chay1526@mail.ru*

³ *lolaxon@gmail.com*

Аннотация. Работа посвящена изучению свойств выпуклых оболочек, порожденных реализацией однородного пуассоновского точечного процесса в многоугольнике на плоскости. Доказано, что разность периметров носителя распределения и выпуклой оболочки сходится по вероятности к некоторой случайной величине, которая имеет отличное от нормального распределение и асимптотически не зависит от числа вершин и площади выпуклой оболочки.

Ключевые слова: выпуклая оболочка, пуассоновский точечный процесс, функционалы от выпуклой оболочки, реализация точечного процесса

Для цитирования: Хамдамов И.М., Чай З.С., Шарипова Л.Д. Предельное распределение периметра выпуклой оболочки, порожденной пуассоновским точечным процессом в выпуклом многоугольнике // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 79. С. 44–57. doi: 10.17223/19988621/79/4

Original article

The limit distribution of the perimeter of a convex hull generated by a Poisson point process in a convex polygon

Isakjan M. Khamdamov¹, Zoya S. Chay², Lola D. Sharipova³

¹ *National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan*

² *Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan*

³ *Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan*

¹ *khamdamov.isakjan@gmail.com*

² *chay1526@mail.ru*

³ *lolaxon@gmail.com*

Abstract. In this paper, we study various functionals of convex hulls generated by the realization of a homogeneous Poisson point process in a polygon on a plane. The convex hull is a generalization of the extreme elements of the sample when estimating the carrier of the distribution; and in the multidimensional case, as an estimate of the carrier of the distribution, it retains many properties of one-dimensional estimates, such as consistency, asymptotic unbiasedness, and sufficiency. Works on the study of random convex hulls in polygons and various functionals of them are usually referred to the field of probabilistic geometry. It should be noted that studying the properties of even the simplest functionals of convex hulls, such as the number of vertices or the area, is not an easy problem (see, for example, [1-4]). This also explains the fact that before the appearance of the work of P. Groeneboom [6], the main progress in this field was achieved only in the study of the properties of the mean values of such functionals. In [6], he succeeded in proving the central limit theorem for the number of vertices of a convex hull in the case when the support of the original uniform distribution is either a convex polygon or an ellipse. The main result of this paper consists in proving that the difference between the perimeters of the distribution carrier and the convex hull converges in probability to a random variable that has a distribution different from normal, and it is asymptotically independent of the number of vertices and the area of the convex hull.

Keywords: convex hull, Poisson point process, functionals of convex hulls, realization of a point process

For citation: Khamdamov, I.M., Chay, Z.S., Sharipova, L.D. (2022) The limit distribution of the perimeter of a convex hull generated by a Poisson point process in a convex polygon. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 79. pp. 44–57. doi: 10.17223/19988621/79/4

Введение

Настоящая работа является продолжением работы [1] на двумерный случай. Здесь исследуются различные функционалы от выпуклой оболочки, являющейся обобщением крайних элементов выборки при оценивании носителя распределения в случае, когда носителем является выпуклое ограниченное множество. Выпуклая оболочка как оценка носителя распределения в многомерном случае сохраняет многие свойства одномерных оценок, такие как состоятельность, асимптотическая несмещенность и достаточность. Работы по изучению случайных выпуклых оболочек в многоугольниках и различных функционалов от них принято относить к области стохастической геометрии. Следует отметить, что изучение свойств даже простейших функционалов от выпуклых оболочек, таких как число вершин или площадь, является совсем не простой задачей (см., напр.: [2–4]). Этим и объясняется тот факт, что до появления работы Р. Groeneboom [5] основной прогресс в этой области был достигнут лишь в изучении свойств средних значений подобных функционалов. Ему удалось доказать центральную предельную теорему для числа вершин выпуклой оболочки в случае, когда носитель исходного равномерного распределения представляет собой либо выпуклый многоугольник, либо эллипс. Основное достижение Р. Groeneboom состоит в том, что он догадался использовать известное свойство однородных биномиальных точек

ных процессов, состоящее в том, что вблизи границы носителя такой процесс почти неотличим от однородного пуассоновского точечного процесса. Эта идея позволила ему уменьшить количество проблем, которые он собирался решить при исследовании асимптотических свойств биномиальных точечных процессов. Дальнейшая техника была связана с применением таких мощных аналитических аппаратов, как мартингалы, сильно перемешивающиеся стационарные процессы и т.д.

В работах [6–8], учитывая близость биномиальных точечных процессов к пуассоновскому, исследованы вершинные процессы выпуклой оболочки, порожденной пуассоновским точечным процессом. А именно, в работе [7] путем сочетания идеи [5, 9] и применения экспоненциального неравенства В.В. Петрова [10] для суммы случайных величин получена сходимость по вероятности разности между $2T$ и периметром выпуклой оболочки, находящейся внутри диска радиуса T , при $T \rightarrow \infty$ в конусе к некоторой случайной величине, имеющей распределение, отличное от нормального..

В данной работе получила свое развитие идея работ [5, 7, 9]: в каждой вершине выпуклой оболочки рассматривается некоторая ε -окрестность и доказывается асимптотическая независимость случайных величин, которые являются разностью между 2ε и периметром выпуклой оболочки, оказавшейся внутри диска радиуса ε , при $n \rightarrow \infty$.

Поэтому мы считаем, что достаточно рассматривать случайные точки $X_1, X_2, \dots, X_k, \dots$, заданные на одном и том же вероятностном пространстве, как реализации однородного пуассоновского точечного процесса (о.п.т.п.) $\Pi_n(\cdot)$ с интенсивностью $n\lambda(\cdot)$, где $\lambda(\cdot)$ – Лебегова мера на плоскости. Нетрудно заметить, что, обозначив $T_i = \sqrt{n}X_i$, можно считать $T_1, T_2, \dots, T_k, \dots$ случайными точками реализации о.п.т.п. $\Pi(\cdot)$ в $\sqrt{n}A$ с интенсивностью $\lambda(\cdot)$, где A – носитель распределения.

Рассмотрим C_n – выпуклую оболочку, натянутую на $X_1, X_2, \dots, X_k, \dots$. В этой работе мы исследуем предельное поведение периметра выпуклой оболочки в многоугольнике A при $n \rightarrow \infty$, и нас будет интересовать совместное предельное распределение следующих функционалов от C_n : общего числа вершин v_n , площади s_n и периметра l_n .

Прежде чем сформулировать основные результаты, введем необходимые обозначения. Пусть l_0 и s_0 – периметр и площадь многоугольника A соответственно. Положим

$$l_n^* = l_0 - l_n, \quad s_n^* = s_0 - s_n. \quad (1)$$

Справедлива следующая основная

Теорема 1. Если C_n – выпуклая оболочка, порожденная реализацией пуассоновского точечного процесса в выпуклом r -угольнике A с интенсивностью $n\lambda(\cdot)$, то случайная величина $\sqrt{n/s_0}l_n^*$ при $n \rightarrow \infty$ асимптотически независима от (v_n, s_n) . Более того, она сходится по вероятности к случайной величине, представимой в виде суммы независимых случайных величин, $\zeta_i = v_{0i}\sigma_i + v'_{0i}\sigma'_i$, где σ, σ' определяются далее равенством (43), а v_{0i} и v'_{0i} – равенством (45).

При доказательстве настоящей теоремы нет особой нужды в использовании мартингалов, сильно перемешивающихся стационарных процессов и т.п. Вполне достаточно аналитических и прямых вероятностных приемов.

1. Вспомогательные результаты

Пусть K – конус, образованный двумя лучами $\ell_i = (z : z = te_i, t > 0)$, $i = 1, 2$, где e_1 и e_2 – единичные векторы.

Обозначим через α угол между e_1 и e_2 и положим

$$e_0 = (e_1 + e_2)/2. \quad (2)$$

Ясно, что $(z, e_0) > 0$ для всех $z \in K$.

Пусть далее $\Pi(\cdot)$ – о.п.т.п. с интенсивностью $\lambda(\cdot)$. Обозначим через $\Pi(K)$ сужение этого процесса на K . Рассмотрим выпуклую оболочку C' , порожденную $\Pi(K)$, и множество ее вершин Z .

Обозначим через $z_0 \in Z$ ту из вершин, для которой $(e_0, z - z_0) \geq 0$ для всех $z \in Z$. Очевидно, что z_0 определена однозначно почти наверное. При этом прямая

$$(e_0, z - z_0) = 0 \quad (3)$$

является опорной для C' .

Рассмотрим треугольник, образованный лучами ℓ_i , $i = 1, 2$, и опорной прямой (3). Множество внутренних точек этого треугольника обозначим через δ_0 , а его площадь – через ξ_0 (рис. 1).

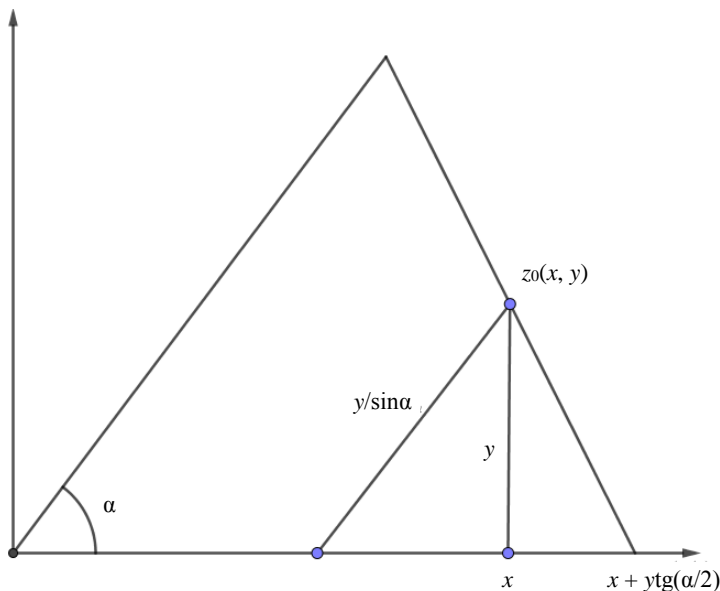


Рис. 1. Вершина z_0 , соответствующая опорной прямой $(e_0, z - z_0) = 0$
Fig. 1. The vertex z_0 corresponding to the support line $(e_0, z - z_0) = 0$

Из рис. 1 видно, что

$$\xi_0 = \frac{1}{2} \left(x + y \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right)^2 \sin \alpha, \quad (4)$$

где y – ордината z_0 .

Положим

$$\eta_0 = \frac{y}{\sin \alpha \left(x + y \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right)}, \quad (5)$$

где x – абсцисса точки z_0 .

Пронумеруем теперь вершины C' , обходя границу против часовой стрелки. Поскольку z_0 уже определена, то тем самым каждая из вершин получает свой номер j , $-\infty < j < \infty$. Выберем на луче l_1 последовательность точек $\gamma_j = x_j e_1$, $j \geq 1$, лежащих на пересечении l_1 и прямых, проходящих соответственно через вершины z_{j-1} и z_j . Точки $\gamma_j = y_j e_2$, $j \geq 1$, получаются аналогичным образом в результате пересечения l_2 и прямых, проходящих соответственно через вершины z_j и z_{j+1} .

Пусть δ_j , $j \neq 0$, – множество внутренних точек треугольника с вершинами z_{j-1} , γ_{j-1} , γ_j , если $j \geq 1$, и вершинами z_{j+1} , γ_{j+1} , γ_j , если $j \leq -1$. Обозначим через $\gamma_0 = x_0 e_1$, $\gamma'_0 = y_0 e_2$ вершины треугольника, множество внутренних точек которого мы ранее обозначили через δ_0 . Напомним, что третьей вершиной этого треугольника служит точка $(0,0)$. Отсюда (см. рис. 1) следует, что $x_0 = y_0 = x + y \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right)$.

Согласно определению, $\bigcup_j \delta_j$ содержится в полосе $K - C'$ и отличается от нее на множество меры нуль (имеется в виду Лебегова мера $\lambda(\cdot)$).

Положим

$$\xi_j = \lambda(\delta_j). \quad (6)$$

Пусть далее υ_j , $j \neq 0$, – расстояние от вершины z_j до луча l_1 , если $j \geq 1$, или до луча l_2 , если $j \leq -1$. Тогда

$$\xi_j = \begin{cases} \upsilon_{j-1}(x_j - x_{j-1})/2, & \text{если } j \geq 1, \\ \upsilon_{j+1}(y_j - y_{j+1})/2, & \text{если } j < -1. \end{cases} \quad (7)$$

Положим

$$\eta_j = \begin{cases} (1 - \upsilon_j / \upsilon_{j-1})^2, & \text{если } j \geq 1, \\ (1 - \upsilon_j / \upsilon_{j+1})^2, & \text{если } j < -1. \end{cases} \quad (8)$$

В формулах (7) и (8) можно считать, что $\xi_{-1} = \upsilon'_0(y_{-1} - y_0)/2$, $\eta_{-1} = (1 - \upsilon_{-1}/\upsilon'_0)^2$, где υ_0 и υ'_0 – расстояния от z_0 до оси l_1 и l_2 , соответственно.

Следующие утверждения доказываются аналогично леммам 1 и 2 из [6].

Лемма 1. Случайные величины ξ_0 и η_0 независимы, причем ξ_0 – стандартно экспоненциально распределенная величина, а η_0 – равномерно распределенная в $(0, 1)$ величина.

Лемма 2. Случайные величины $\xi_j, \eta_k, -\infty < j, k < \infty$, независимы в совокупности, причем

$$\overset{dis}{\xi_j} = \xi_0, \quad \overset{dis}{\eta_k} = \eta_0.$$

Следуя [6] (также см.: [8]), введем

$$\begin{aligned} \theta_T &= \inf \{j : x_j \geq T\}, \quad \theta'_T = \inf \{-j : y_j \geq T\}, \\ S_n &= \begin{cases} \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n, & \text{если } n \geq 1, \\ 0, & \text{если } n = 0, \end{cases} \quad S'_n = \begin{cases} \xi_{-1} + \xi_{-2} + \dots + \xi_{-n}, & \text{если } n \geq 1, \\ 0, & \text{если } n = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

Положим

$$\alpha(T) = \frac{2}{3} \log T, \quad \beta^2(T) = \frac{10}{27} \log T. \quad (10)$$

Справедлива следующая лемма (см. [6]):

Лемма 3 (Форманов–Хамдамов). В наших условиях при $T \rightarrow \infty$

$$(\beta(T))^{-1} (\theta_T - \alpha(T), S_T - \alpha(T)) \overset{d}{\Rightarrow} N(\vec{0}, B).$$

Здесь $\overset{d}{\Rightarrow}$ означает слабую сходимость, $N(\vec{0}, B)$ – нормально распределенный случайный вектор с нулевым вектором средних значений и ковариационной матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 14/5 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через l_{mn} длину участка границы C между точками z_{-m} и z_n .

Положим

$$d = \frac{1}{\sin \alpha} + \operatorname{ctg} \alpha. \quad (11)$$

Справедлива следующая

Лемма 4. Если $\min \{m, n\} \rightarrow \infty$, то случайная величина $t'_m + t_n - l_{mn}$ сходится почти наверное к случайной величине ζ , представимой в виде:

$$\zeta = v_0 \sigma + v'_0 \sigma',$$

где σ и σ' одинаково распределены и условно независимы при заданных v_0 и v'_0 , причем

$$\sigma = \sum_{j=1}^{\infty} \left(d + \rho_j - \sqrt{1 + \rho_j^2} \right) \cdot (1 - \tau_j) \prod_{k=1}^{j-1} \tau_k. \quad (12)$$

Лемма 4 доказывается аналогично теореме 1 из [7].

2. Разбиение границы выпуклой оболочки на условно независимые части

В отличие от [5], мы приведем подробное доказательство теоремы, которое в силу словесного описания геометрических объектов несколько усложняет изложение, но устраняет некоторые неясности, имеющиеся в указанной работе.

В соответствии с замечанием во введении нам достаточно получить предельное распределение для периметра l'_n и его связи с числом вершин v'_n и площадью s'_n выпуклой оболочки C'_n , порожденной точками $T_1, T_2, \dots, T_k, \dots$ реализации о.п.т.п. $\Pi(\cdot)$ на множестве $\sqrt{n}A$. Поясним схему дальнейших рассуждений. Сначала мы разобьем границу C'_n на $2r$ условно независимых частей таким образом, что каждому из r углов многоугольника A будет соответствовать два элемента этого разбиения. Тем самым каждый из интересующих нас функционалов v'_n и s'_n будет представлен в виде суммы $2r$ случайных величин. Затем воспользуемся результатами [6] (см. лемму 3), где установлена асимптотическая независимость и нормальность этих случайных величин в конусе.

Таким образом, общие принципы исследования проблемы у нас такие же, что и в работе [5], хотя их реализация совсем иная.

Обозначим через $a^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, r$, вершины r -угольника A – носителя исходного равномерного распределения. Пусть при некотором $\varepsilon > 0$

$$B_i = A \cap S(a^{(i)}, \varepsilon), \tag{13}$$

где $S(z, \varepsilon)$ – круг радиуса ε с центром в точке z . Пусть далее Π_{ni} – сужение $\Pi_n(\cdot)$ в конусе K_i с вершиной $a^{(i)}$ и образующими лучами l_{i1} и l_{i2} , проходящими через $a^{(i+1)}$ и $a^{(i-1)}$ соответственно, где $i = 1, 2, \dots, r$. Понятно, что $a^{(r+1)} = a^{(r)}$, $a^{(r+1)} = a^{(1)}$.

Пусть e_{oi} играет по отношению к K_i ту же роль, что играл вектор e_0 по отношению к K в разд. 1. Напомним, что e_0 определяется равенством (2), точнее

$$e_{oi} = 2^{-1} \left(\frac{a^{(i+1)} - a^{(i)}}{\|a^{(i+1)} - a^{(i)}\|} + \frac{a^{(i-1)} - a^{(i)}}{\|a^{(i-1)} - a^{(i)}\|} \right).$$

Обозначим через C_{ni} выпуклую оболочку, порожденную Π_{ni} . Условимся обозначать через Z_{ni} множество вершин C_{ni} . Далее, если множество вершин C'_n обозначим через W'_n , то выделим в Z_{ni} и W'_n элементы z_{oi} и w_{oi} , обладающие тем свойством, что прямые $(e_{oi}, w - z_{oi}) = 0$ и $(e_{oi}, w - w_{oi}) = 0$ являются опорными для C_{ni} и C'_n соответственно.

Положим

$$\mathfrak{X}_1 = \{ \pi : z_{oi} = w_{oi}, i = 1, 2, \dots, r \} \tag{14}$$

и

$$\mathfrak{X}_2 = \{ \pi : z_{oi} \in B_i, i = 1, 2, \dots, r \}, \tag{15}$$

где π – реализация Π_n , а B_i определяется равенством (13).

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$P(\mathfrak{X}_i) \rightarrow 1, i = 1, 2. \tag{16}$$

Из (14)–(16) следует, что с вероятностью, близкой к 1, граница каждой оболочки C_{ni} имеет непустое пересечение с C'_n . Заметим, что точки w_{oi} , $i = 1, 2, \dots, r$, делят границу C'_n на r частей. Каждую из них нам остается разбить еще на две

части. Пусть $w^{(i)}$ – та из вершин $W'_n \subset C'_n$, для которой прямая $(p_i, w - w^{(i)}) = 0$, где $p_i \perp (a^{(i+1)} - a^{(i)})$, является опорной к C'_n , т.е. $w^{(i)}$ есть ближайшая из вершин W'_n к лучу l_{i1} . Более того, с ростом n вершина $w^{(i)}$ неограниченно сближается с этим лучом, т.е. $(p_i, w^{(i)} - a^{(i)}) \rightarrow 0$. Поскольку условное распределение $w^{(i)}$ на отрезке опорной прямой $(p_i, w - w^{(i)}) = 0$, лежащем в A , при условии, что $(p_i, w^{(i)} - a^{(i)}) = t$, равномерно, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} P \left(w^{(i)} \in \bigcap_{j=1}^r \bar{B}_j \right) = 1. \quad (17)$$

Отсюда следует, что и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} P \left(\bar{w}_i \in \bigcap_{j=1}^r \bar{B}_j \right) = 1, \quad (18)$$

где \bar{w}_i – основание перпендикуляра, опущенного из w_i на l_{i1} .

Рассмотрим

$$\mathfrak{X}_3 = \left\{ \pi : \bar{w}_i \in \bigcap_{j=1}^r B_j, i = 1, 2, \dots, r \right\}.$$

Из (17) и (18) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $N > 0$ такое, что при всех достаточно больших $n > N$ будет выполняться неравенство

$$P(\mathfrak{X}_3) \geq 1 - \varepsilon.$$

В дальнейшем, не оговаривая специально, мы будем рассматривать только те реализации Π_n , которые содержатся в $\bigcap_{j=1}^3 \mathfrak{X}_j$. Для таких реализаций $w^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, r$, лежат между w_{0i} и $w_{0(i+1)}$.

Таким образом, граница C'_n поделена на $2r$ частей. При этом, согласно определению, эти части при заданных w_{0i} , $w^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, r$, условно независимы.

Теперь выбираем аппроксимирующие функционалы. Займемся участком границы C'_n между вершинами w_{01} и $w^{(1)}$. Участок между $w^{(r)}$ и w_{01} исследуется вполне аналогично. Пронумеруем вершины C'_n , обходя границу против часовой стрелки, начиная с w_{01} . В результате на рассматриваемом участке границы получим w_j , $j = 0, 1, 2, \dots, \mu$, где $w_0 = w_{01}$, $w_\mu = w^{(1)}$. Аналогичную операцию проделаем и с вершинами $z \in C'_{n1}$, получив в результате z_j , $j = 0, 1, 2, \dots$, где, согласно (14) и (16), $z_0 = w_{01} = w_0$.

Для того чтобы использовать свойства о.п.т.п., описанные в разд. 1, нам необходимо перейти от $\Pi(\cdot)$ к $\Pi_n(\cdot)$. При таком переходе линейные характеристики x_j , y_j , u_j , v_j , ρ_j перейдут в $x'_j = n^{-\frac{1}{2}}x_j$, $y'_j = n^{-\frac{1}{2}}y_j$, $u'_j = n^{-\frac{1}{2}}u_j$, $v'_j = n^{-\frac{1}{2}}v_j$ соответственно, тогда как площадь ξ_j треугольника δ_j перейдет в $\xi'_j = n^{-1}\xi_j$. Без-

размерные величины η_j, τ_j, ρ_j при таком переходе останутся без изменения. Образы z_j при таком преобразовании мы будем обозначать как z'_j .

Пусть $T = \varepsilon\sqrt{n}$, $T_1 = h\sqrt{n}$, где h – длина стороны A , соединяющей вершины $a^{(1)}$ и $a^{(2)}$. В соответствии с (9) положим

$$\theta = \theta_T, \chi = \theta_{T_1}.$$

Тогда

$$\theta = \inf \{ j : x'_j \geq \varepsilon \}, \quad (19)$$

а $\chi = \inf \{ j : x'_j \geq h \}$.

Напомним, что x_j и x'_j строятся по вершинам z_{j-1} , z_j и z'_{j-1} , z'_j соответственно. Также отметим, что $w_j = z'_j$, по крайней мере при $0 \leq j \leq \chi - 1$.

Пусть далее

$$p = \xi'_1 + \xi'_2 + \dots + \xi'_0, \quad (20)$$

а

$$q = \xi'_1 + \xi'_2 + \dots + \xi'_\chi. \quad (21)$$

Положим

$$\theta^* = \frac{\theta - \alpha}{\beta_1}, \quad p^* = \frac{np - \alpha}{\beta_2}, \quad (22)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{3} \log n, \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{5 \log n}{27}}, \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{14 \log n}{27}}. \quad (23)$$

Из (20), (21) и леммы 3 следует что

$$(\theta^*, p) \Rightarrow \omega, \quad (24)$$

где ω из леммы 3. Положим теперь

$$\chi^* = \frac{\chi - \alpha}{\beta_1}, \quad q^* = \frac{nq - \alpha}{\beta_2}. \quad (25)$$

Согласно следствию 3 из [6], учитывая (21) и (23), имеем

$$\frac{\theta - \chi}{\beta_1} \xrightarrow{p} 0, \quad \frac{n(p - q)}{\beta_1} \rightarrow 0. \quad (26)$$

Из (22)–(26) следует, что

$$(\chi^*, q^*) \Rightarrow \omega. \quad (27)$$

Характеристики (θ', p') , аналогичные (χ', q') , построенные по участку границы C'_n между вершинами $w^{(r)}$ и $w_{01} = w$, также обладают свойствами (24) и (27). При этом важно, что они асимптотически независимы от θ, χ, p и q . Не менее важно то, что θ, θ', p и p' полностью определяются по сужению Π_n на B_1 . Отсюда следует, что аналогичные характеристики $\theta_i, \theta'_i, p_i, p'_i$ независимы в совокупности для участков границы, отвечающих углам с вершинами $a^{(i)}, i = 1, 2, \dots, r$. Аналогично (22) и (25) имеем

$$\Theta^* = \frac{\Theta - 2r\alpha}{\beta_1 \sqrt{2r}}, \quad P^* = \frac{nP - 2r\alpha}{\beta_2 \sqrt{2r}}, \quad (28)$$

где

$$\Theta = \sum_{i=1}^r (\theta_i + \theta'_i), \quad P = \sum_{i=1}^r (p_i + p'_i). \quad (29)$$

В силу независимости слагаемых в $(\theta_i + \theta'_i, p_j + p'_j)$, $i, j = 1, 2, \dots, r$, из (24) получаем

$$(\Theta, P) \Rightarrow \omega.$$

Наконец, по аналогии с (28) введем

$$\mathbb{X}^* = \frac{\mathbb{X} - 2r\alpha}{\beta_1 \sqrt{2r}}, \quad \mathbb{Q}^* = \frac{\mathbb{Q} - 2r\alpha}{\beta_2 \sqrt{2r}}, \quad (30)$$

где

$$\mathbb{X} = \sum_{i=1}^r (\chi_i + \chi'_i), \quad \mathbb{Q} = \sum_{i=1}^r (q_i + q'_i).$$

Заметим, что $(\chi_i + \chi'_i, q_i + q'_i)$, $i = 1, 2, \dots, r$, вообще говоря, независимы. Однако, имея в виду (26) и (27), можно утверждать, что

$$(\mathbb{X}^*, \mathbb{Q}^*) \Rightarrow \omega. \quad (31)$$

Именно функционалы \mathbb{X}^* и \mathbb{Q}^* дают нам нужную аппроксимацию для v'_n и S'_n .

3. Доказательство теоремы 1

Пусть θ, θ', μ и μ' имеют тот же смысл, который мы придали им в разд. 2. Рассмотрим участок границы между вершинами $w_{-\mu} = w^{(r)}$ и $w_{\mu} = w^{(1)}$. Проведем через вершины $w_{-\mu'}$, $w_{\theta'}$ прямые, параллельные лучу l_{11} , а через вершины w_0 , w_{μ} – прямые, параллельные l_{1r} . Пусть $t_{\theta}e_{1r}$, $t'_{\mu'}e_{1r}$ – точки пересечения первых прямых с лучом l_{1r} , а t_0e_{11} , $t_{\mu}e_{11}$ – вторых прямых с лучом l_{11} . Напомним, что

$$e_{11} = \|a^{(2)} - a^{(1)}\| \cdot (a^{(2)} - a^{(1)}), \quad \text{а } e_{1r} = \|a^{(r)} - a^{(1)}\| \cdot (a^{(r)} - a^{(1)}).$$

Определим следующие функционалы:

$$\begin{cases} f = t_{\theta} + t'_{\theta'} - l_{\theta\theta'}, \\ g = t_{\mu} + t'_{\mu'} - l_{\mu\mu'}, \end{cases} \quad (32)$$

где $l_{\theta\theta'}$ – длина участка границы между вершинами w_0 и $w_{\theta'}$, $l_{\mu\mu'}$ имеет аналогичный смысл.

Поскольку при $-\chi \leq j \leq \chi$ мы имеем $w_j = z'_j$, то с помощью рассуждений, использованных при доказательстве леммы 4 из [7], получим, что

$$\sqrt{n}f \rightarrow \zeta \text{ п.н.} \quad (33)$$

Оценим теперь разность $g - f$. Этой цели служит следующая

Лемма 5. При $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n}(g - f) \xrightarrow{p} 0.$$

Доказательство. Положим

$$\varkappa = \sup \{ j : j \geq 1, z_j = w^{(1)} \},$$

$$\varkappa' = \sup \{ j : j \leq -1, z_j = w^{(r)} \} [].$$

Тогда $\theta \leq \varkappa \leq \mu$ и $\mu' \leq \varkappa' \leq \theta'$. Мы рассмотрим наиболее интересный случай, когда $\theta < \varkappa < \mu$. Для $\theta \leq i < j \leq \mu$ определим параллелограмм Δ_{ij} , стороны которого параллельны лучам l_{11} и l_{1r} , а одна из пар противоположных вершин есть w_i и w_j . Длину диагонали, соединяющей w_i и w_j , обозначим через c_{ij} . Для длин сторон, параллельных оси l_{11} , будем использовать обозначение a_{ij} , для длины двух других – b_{ij} .

По определению

$$a_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} a_{k,k+1}, \quad b_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} b_{k,k+1}. \quad (34)$$

Положим

$$\varepsilon_{ij} = a_{ij} + b_{ij} - c_{ij}. \quad (35)$$

В силу выпуклости границы C'_n из (34) и (35) будем иметь

$$\sum_{k=i}^{j-1} \varepsilon_{k,k+1} \leq \varepsilon_{ij}. \quad (36)$$

С помощью (32), (34)–(36) получаем

$$g - f = \frac{\sum_{0 < j \leq \varkappa} \varepsilon_j + \sum_{\varkappa' \leq j < \theta'} \varepsilon_j}{\sqrt{n}} + \sum_{\varkappa < k < \mu} \varepsilon_{k,k+1} + \sum_{\mu' < k < \varkappa'} \varepsilon_{k,k-1} + \frac{v'_0 + v'_{\theta'} - v'_\mu - v'_{\mu'}}{\sin \alpha}. \quad (37)$$

Заметим, что θ, θ', μ и μ' при $n \rightarrow \infty$ сходятся по вероятности к ∞ . Далее $v'_j = n^{-1/2} v_j$, причем $v_j \rightarrow 0$ п.н. при $j \rightarrow \infty$. Нетрудно видеть, что ряд

$$\sum_{i=0}^{-\infty} \varepsilon_{i,i-1} + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_{i,i+1} \leq v_0 + v'_0 < \infty \text{ п.н.}$$

Поэтому из (37) следует, что

$$\sqrt{n}(g - f) = \sum_{\varkappa < k < \mu} \varepsilon_{k,k+1} + \sum_{\mu' < k < \varkappa'} \varepsilon_{k,k-1} + o_p(1). \quad (38)$$

Обе суммы в (38) оцениваются совершенно одинаково. Оценим, например, первую из них. С этой целью примем для ε_{ij} при $i = \varkappa, j = \mu$ обозначение ε^* .

Ввиду (36) и (38) имеем

$$\sum_{\varkappa < k < \mu} \varepsilon_{k,k+1} \leq \varepsilon^*, \quad (39)$$

тогда из (35) получим

$$\varepsilon^* \leq n^{-1/2} v_\varkappa. \quad (40)$$

Остается объединить (38)–(40). Лемма доказана.

Из леммы 4 следует, что

$$\sqrt{ng} \xrightarrow{p} \zeta. \quad (41)$$

Обозначим через f_i и g_i , $i=1,2,\dots,r$, аналоги f и g для вершин $a^{(i)}$. Понятно, что $f_1 = f$, $g_1 = g$. Соответствующие пределы для f_i и g_i обозначим через ζ_i . Из (32), (41) и леммы 4 следует, что ζ_i , $i=1,2,\dots,r$, независимы в совокупности. Заметим, что по определению распределение ζ_i зависит от α_i – величины угла при вершине $a^{(i)}$.

Из леммы 4 имеем

$$\zeta_i = v_{0i}\sigma_i + v'_{0i}\sigma'_i, \quad (42)$$

где

$$\begin{cases} \sigma_i = \sum_{j=1}^{\infty} \left(d_i + \rho_{ij} - \sqrt{1 + \rho_{ij}^2} \right) (1 - \tau_{ij}) \prod_{k=1}^{j-1} \tau_{ik}, \\ \sigma'_i = \sum_{j=1}^{\infty} \left(d_i + \rho'_{ij} - \sqrt{1 + \rho'_{ij}{}^2} \right) (1 - \tau'_{ij}) \prod_{k=1}^{j-1} \tau'_{ik}, \end{cases} \quad (43)$$

$$\begin{cases} \rho_{ij} = tg \frac{\alpha_i}{2} + 2v_{0i}^{-2} \sum_{k=1}^j \xi_{ik} \prod_{l=1}^{k-1} \tau_{il}^{-2}, \\ \rho'_{ij} = tg \frac{\alpha_i}{2} + 2(v'_{0i})^{-2} \sum_{k=1}^j \xi'_{ik} \prod_{l=1}^{k-1} (\tau'_{il})^{-2}, \end{cases} \quad (44)$$

$$\begin{cases} v_{0i} = (1 - \eta_{0i}) \sqrt{2\xi_{0i} \sin \alpha_i}, \\ v'_{0i} = \eta_{0i} \sqrt{2\xi_{0i} \sin \alpha_i}. \end{cases} \quad (45)$$

Здесь

$$\eta_{0i}, \xi_{i_1j_1}, \xi'_{i_2j_2}, \tau_{i_3j_3}, \tau'_{i_4j_4} \quad (1 \leq i_s \leq r, j_s \geq 1, s=1,2,3,4)$$

являются независимыми случайными величинами, причем

$$\eta_{0i} \stackrel{d}{=} \eta_0, 1 \leq i \leq r, \text{ а } \xi_{ij} \stackrel{d}{=} \xi'_{i_1j_1} \stackrel{d}{=} \xi_0, \tau_{ij} \stackrel{d}{=} \tau'_{i_1j_1} \stackrel{d}{=} 1 - \sqrt{\eta_0}, 1 \leq i, i_1 \leq r, j, j_1 \geq 1,$$

где ξ_0, η_0 из леммы 3.

Наконец, в соответствии с (11)

$$d_i = \frac{1}{\sin \alpha_i} + \operatorname{ctg} \alpha_i. \quad (46)$$

Напомним, что l_n представляет собой сумму длин $l_{\mu\mu'}$, соответствующих каждой из вершин $a^{(i)}$. При этом сумма $t_i + t'_i$, отвечающая каждой из вершин $a^{(i)}$, сходится к l_0 – периметру A . Отсюда в силу (32), (33) и лемм 4 и 5 получаем

$$\sqrt{n}(l_0 - l_n) \xrightarrow{P} \zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_r.$$

Второе из утверждений теоремы доказано.

Остается показать, что l_n и (v_n, S_n) асимптотически независимы. Очевидно, достаточно установить независимость f от (θ, p) и (θ', p') . Для любого $m \geq 1$ положим

$$\begin{aligned} \theta_m &= \inf \{ j : j \geq m, x'_j \geq \varepsilon \}, \\ p_m &= \xi'_{m+1} + \dots + \xi'_{0m}. \end{aligned}$$

Из (19) и (20) следует, что

$$\frac{\theta_m - \theta}{\beta_1} \xrightarrow{p} 0, \quad \frac{n(p - p_m)}{\beta_1} \xrightarrow{p} 0. \quad (47)$$

Подобные свойства справедливы и для θ'_m, p'_m – аналогов θ_m и p_m , соответствующих θ' и p' .

Легко понять, что $t_m + t'_m - l_{mm}$ асимптотически независима от θ_m, p_m, θ'_m и p'_m . Из (24) и (47) получаем, что $t_m + t'_m - l_{mm}$ асимптотически независима от θ, p, θ' и p' .

Для завершения доказательства теоремы остается воспользоваться неотрицательностью ε_j , соотношением (33) и произвольностью n . Теорема доказана.

Авторы выражают благодарность рецензенту статьи, замечания которого улучшили качество данной работы.

Список источников

1. *Нагаев А.В., Хамдамов И.М.* О роли экстремальных слагаемых в сумме случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 2002. Т. 47, вып. 3. С. 575–583.
2. *Carnal H.* Die konvexe Hülle von n rotationen symmetrisch verteilte n Punkten // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete. 1970. V. 15. P. 168–176.
3. *Efron B.* The convex hull of a random set of points // Biometrika. 1965. V. 52. P. 331–343.
4. *Schneider R.* Random approximation of convex sets : Preprint Mathematical Institute. Freiburg im Breisgau : Albert-Ludwigs University, 1987. 180 S.
5. *Groeneboom P.* Limit theorems for convex hulls // Probab. Theory Related Fields. 1988. V. 79. P. 327–368.
6. *Formanov Sh.K., Khamdamov I.M.* On joint probability distribution of the number of vertices and area of the convex hulls generated by a Poisson point process // Statistics and Probability Letters. 2021. V. 169. Art. 108966. P. 1–7.
7. *Хамдамов И.М.* Предельное распределение периметра выпуклой оболочки, порожденной Пуассоновским точечным процессом в конусе // Бюллетень Института математики (АН РУз). 2021. Т. 4, № 2. С. 95–98.
8. *Khamdamov I.M., Chay Z.S.* Joint distribution of the number of vertices and the area of convex hulls generated by a uniform distribution in a convex polygon // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2021. V. 14 (2). P. 232–243.
9. *Nagaev A.V.* Some properties of convex hulls generated by homogeneous Poisson point processes in an unbounded convex domain // Ann. Inst. Statist. Math. 1995. V. 47. P. 21–29.
10. *Петров В.В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М. : Наука, 1987. 320 с.

References

1. *Nagaev A.V. and Khamdamov I.M.* (2003) On the role of extreme summands in sums of independent random variables. *Theory of Probability and Its Applications*. 47(3), pp. 533–541.
2. *Carnal H.* (1970) Die konvexe Hülle von n rotationssymmetrisch verteilten Punkten. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*. 15. pp. 168–176.
3. *Efron B.* (1965) The convex hull of a random set of points. *Biometrika*, 52(3-4), pp. 331–343.
4. *Schneider R.* (1987) *Random approximation of convex sets*. Preprint Mathematical Institute. Albert-Ludwigs-Universität Freiburg.
5. *Groeneboom P.* (1988) Limit theorems for convex hulls. *Probability Theory and Related Fields*. 79. pp. 327–368.

6. Formanov Sh.K., Khamdamov I.M. (2021) On joint probability distribution of the number of vertices and area of the convex hulls generated by a Poisson point process. *Statistics and Probability Letters*. 169. 108966. pp.1–7.
7. Khamdamov I.M. (2021) Predel'noye raspredeleniye perimetra vypukloy obolochki, porozhdennoy Puassonovskim tochechnym protsessom v konuse [Limit distribution of the perimeter of the convex hull generated by a Poisson point process in a cone]. *Bulletin of the Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences*. 4(2). pp. 95–98 [in Russian].
8. Khamdamov I.M., Чай З.С. (2021) Joint distribution of the number of vertices and the area of convex hulls generated by a uniform distribution in a convex polygon. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 14(2), pp. 232–243.
9. Nagaev A.V. (1995) Some properties of convex hulls generated by homogeneous Poisson point processes in an unbounded convex domain. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. 47, pp. 21–29.
10. Petrov V.V. (1975) *Sums of Independent Random Variables*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag.

Сведения об авторах:

Хамдамов Исакжан Мамасалиевич – доктор физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики Национального университета Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан. E-mail: khamdamov.isakjan@gmail.com
Чай Зоя Сергеевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Ташкентского университета информационных технологий, Ташкент, Узбекистан. E-mail: чай1526@mail.ru

Шарипова Лола Джавлановна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Ташкентского государственного транспортного университета, Ташкент, Узбекистан. E-mail: lolaxon@gmail.com

Information about the authors:

Khamdamov Isakjan M. (Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Probability Theory and Mathematical Statistics of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: khamdamov.isakjan@gmail.com

Chay Zoya S. (Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: чай1526@mail.ru

Sharipova Lola D. (Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: lolaxon@gmail.com

Статья поступила в редакцию 30.12.2021; принята к публикации 03.10.2022

The article was submitted 30.12.2021; accepted for publication 03.10.2022