

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/79/14

Задача устойчивости криволинейной арки малого подъема из пористого материала при случайном ее нагружении

Станислав Михайлович Шляхов¹, Эльвира Федоровна Кривулина²

^{1,2} *Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.,
Саратов, Россия*

¹ *shlyakhovsm@yandex.ru*

² *orifelwi@mail.ru*

Аннотация. Получено вероятностное решение задачи устойчивости пористой пологой арки. Пористость распределяется по сечению по параболическому закону. Нагрузка на арку случайна. Решение представлено для стационарного воздействия. Проведен анализ надежности и материалоемкости арки в сплошном и пористом исполнении. Решение задачи устойчивости пористой арки основано на гипотезе сплошности материала, но со свойствами материала, учитывающими пористость.

Ключевые слова: арка, пористость, надежность, вероятность, устойчивость

Для цитирования: Шляхов С.М., Кривулина Э.Ф. Задача устойчивости криволинейной арки малого подъема из пористого материала при случайном ее нагружении // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 79. С. 162–169. doi: 10.17223/19988621/79/14

Original article

A stability problem for a low-height curvilinear porous arch under random loading

Stanislav M. Shlyakhov¹, Elvira F. Krivulina²

^{1,2} *Saratov State Technical University named after Yu.A. Gagarin, Saratov, Russian Federation*

¹ *shlyakhovsm@yandex.ru*

² *orifelwi@mail.ru*

Abstract. Classical mechanics of deformable bodies is based on the continuity hypothesis. However, many structural elements are made of porous materials. Porous natural materials (soil, rocks) have invariable porosity. Porous synthetic materials (ceramics, concrete, graphite, and pressed powder metals) have controlled porosity. To calculate the strength and hardness of the structure, the material is assumed to be conditionally continuous with

the adjusted porosity. Nowadays, there are many available works presenting mechanical characteristics of materials with different porosities. This paper proposes a new class of problems in mechanics of deformable solids. Considering a low arch stability problem, which is important in construction practice, the problem of optimal arch design is solved by controlling the properties of the material. The solution to the problem of stability of the low arch made of porous material is presented. The flat arch with a rectangular cross-section is exposed to equally distributed loading. The near-rational law of the porosity distribution over the cross-section is used. The load is considered as a random variable. The solution to the problem is obtained using the theory of stationary random processes. A comparative analysis of the reliability and material consumption is carried out for the arch with continuous and porous sections. The calculation shows that the porous structure of the arch reduces the material consumption by 13.3% without stability and reliability losses.

Keywords: arch, porosity, stability, probability, reliability

For citation: Shlyakhov, S.M., Krivulina, E.F. (2022) A stability problem for a low-height curvilinear porous arch under random loading. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 79. pp. 162–169. doi: 10.17223/19988621/79/14

В качестве несущих конструкций зданий используются арки различных конфигураций. Повышение надежности арок является актуальным в настоящее время. Решение задачи устойчивости пологой арки, выполненной из сплошного материала, было представлено в ряде работ. С позиций детерминистического нагружения данная проблема рассмотрена в [1, с. 671]. В случае стационарного случайного процесса нагружения устойчивость арки из сплошного материала исследована авторами статьи [2, с. 39]. Настоящая работа авторов является логическим продолжением их предыдущих исследований. В статье рассматривается пологая арка, выполненная из несплошного материала, дается оценка ее надежности и материалоемкости. Распределение пористости по сечению задано параболическим, что близко к рациональному [3, с. 122].

Рассмотрим пологую арку сечения $b \times h$ под воздействием равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q (рис. 1). Арка выполнена из пористого железа. Для модуля Юнга использована эмпирическая формула

$$E = a_1 + a_2 P + a_3 P^2, \quad (1)$$

где P – пористость, а коэффициенты a_1, a_2, a_3 на основе экспериментальных данных составили [4, с. 14]

$$\begin{aligned} a_1 &= 2,092857 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \\ a_2 &= -5,35 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \\ a_3 &= 3,21428 \cdot 10^5 \text{ МПа}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для сплошного материала модуль Юнга принят равным

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}. \quad (3)$$

Высота арки $Y(X)$ выражается функцией

$$Y = \frac{Y_0}{l^2} X(2l - X), \quad (4)$$

где $2l$ – расстояние между опорами, X меняется в пределах $0 \leq X \leq 2l$.

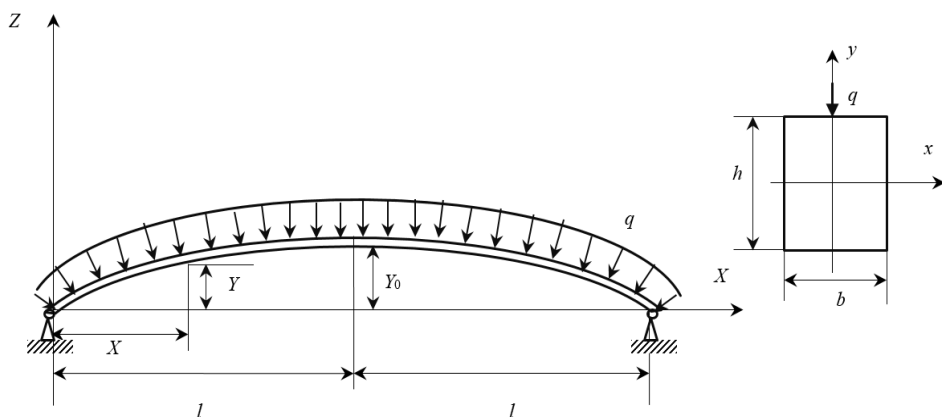


Рис. 1. Схемы нагружения арки (слева) и поперечного сечения арки (справа)
Fig. 1. Schemes of the arch loading (on the left) and arch cross-section (on the right)

Степень надежности арки соответствует вероятности того, что за время эксплуатации арки T нагрузка q ни разу не превысит критической. Под критической нагрузкой $q_{кр}$ понимаем нагрузку, при которой происходит скачкообразное изменение прогиба с выпуклостью арки в обратную сторону. Надежность при этом определяется формулой [5, с. 58]

$$H = \exp \left[- \int_0^T \int_0^\infty \dot{q} f \left(q_{кр}, \frac{\dot{q}}{t} \right) d\dot{q} dt \right], \quad (5)$$

где $f \left(q_{кр}, \frac{\dot{q}}{t} \right)$ – функция, связывающая критическую силу со скоростью изменения действующей силы, $\dot{q}$ – производная действующей интенсивности нагрузки по времени.

Формула надежности в случае нормального стационарного процесса $q(t)$ имеет вид [5, с. 62]:

$$H = \exp \left[- \frac{T \sigma_q}{2\pi \sigma_q} \exp \left[- \frac{(q_{кр} - m_q)^2}{2\sigma_q^2} \right] \right], \quad (6)$$

где σ_q – среднеквадратическое отклонение скорости изменения критической силы, σ_q – среднеквадратическое отклонение действующей силы.

На основе экспериментальных исследований корреляционная функция процесса может быть представлена формулой [5, с. 128]

$$K_q(\tau) = \sigma_q^2 e^{-\alpha_0 |\tau|} \left(\cos \beta_0 \tau + \frac{\alpha_0}{\beta_0} \sin \beta_0 |\tau| \right), \quad (7)$$

где α_0, β_0 – эмпирические коэффициенты.

Используя (7), запишем формулу надежности (6) в виде:

$$H = \exp \left[- \frac{T \sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2}}{2\pi} \exp \left[- \frac{(q_{кр} - m_q)^2}{2\sigma_q^2} \right] \right]. \quad (8)$$

После определения величины критической нагрузки $q_{кр}$ может быть найдена искомая надежность.

Гарантию надежности обеспечивает условие

$$H \geq H_{\text{норм}}. \quad (9)$$

Здесь $H_{\text{норм}}$ – нормативная надежность для конструкций заданного типа.

Для определения критической нагрузки $q_{кр}$ используем принцип минимума полной потенциальной энергии системы [1, с. 672].

Геометрия арки в деформированном состоянии отражена на рис. 2. Характеристики перемещений следующие: w – вертикальное перемещение, u – горизонтальное перемещение, ϑ – угол поворота сечения.

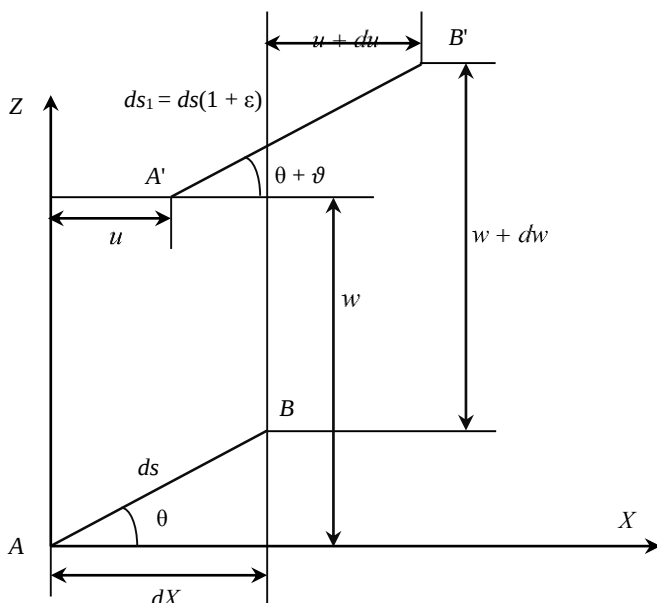


Рис. 2. Геометрия деформирования арки

Fig. 2. Arch deformation geometry

Для случая малых деформаций угол поворота ϑ и изменение кривизны κ представим в виде:

$$\vartheta = w', \quad \kappa = \vartheta' = w''. \quad (10)$$

В этом случае продольная деформация ϵ будет следующей:

$$\epsilon = \frac{du}{dx} + \vartheta \left(\theta + \frac{\vartheta}{2} \right) \quad (11)$$

Окончательно полная потенциальная энергия системы равна

$$U = \frac{1}{2} I_* \int_0^l \kappa^2 dx + \frac{F_*}{2} \int_0^l \epsilon^2 dx + q \int_0^l w dx. \quad (12)$$

Первое слагаемое в формуле (12) представляет собой энергию изгиба, второе является энергией растяжения-сжатия, а третье слагаемое соответствует потенциалу внешних сил:

$$I_* = 2b \int_0^{\frac{h}{2}} E(y) y^2 dy, \quad F_* = 2b \int_0^{\frac{h}{2}} E(y) dy. \quad (13)$$

Выразим перемещения u , w в виде формул [1, с. 672]

$$w = Ax(2l - x), \quad u = B \left[(l - x) - \frac{1}{l^2} (l - x)^3 \right], \quad (14)$$

где A – параметр, B – константа.

Учитывая (14), а также (4), (10) и (11), найдем

$$\kappa = \vartheta' = -2A, \quad \varepsilon = -B + \left[4A \frac{Y_0}{l^2} + 2A^2 + \frac{3}{l^2} B \right] (l - x)^2. \quad (15)$$

Выполняя интегрирование (12), получим

$$U = I_* 2A^2 l + \frac{F_*}{2} \left[B^2 l - \frac{2}{3} l^3 B \left(4A \frac{Y_0}{l^2} + 2A^2 + \frac{3}{l^2} B \right) \frac{l^2}{5} \right] + qA \frac{2}{3} l^3. \quad (16)$$

После преобразований из (16) следует

$$-ql^2 = 6I_* A + \frac{8}{3} F_* l^4 A \left(\frac{Y_0}{l^2} + A \right) \left(\frac{Y_0}{l^2} + \frac{1}{2} A \right). \quad (17)$$

Максимальный прогиб арки при $x = l$ равен

$$f = -Al^2. \quad (18)$$

Следовательно, $A = -f/l^2$.

Используя (17) и (18), находим зависимость между распределенной нагрузкой q и прогибом f в виде:

$$\frac{ql^4}{I_* h} = \frac{f}{h} \left[6 + \frac{8F_*}{3I_*} (Y_0 - f) \left(Y_0 - \frac{f}{2} \right) \right]. \quad (19)$$

Потеря устойчивости арки будет наблюдаться при условии $q = q_{кр}$, что соответствует первому экстремуму функции (19). Поскольку потеря устойчивости сопровождается изгибом арки, представляется целесообразным увеличить пористость в зоне малых нормальных напряжений при приближении к центру тяжести поперечного сечения.

Примем распределение пористости по сечению (рис. 3) в виде функции [6, с. 111]

$$P = P_0 \left(1 - \frac{4}{h^2} y^2 \right) \quad (20)$$

где P_0 – пористость в центре тяжести сечения.

В соответствии с (20), учитывая (1), получаем распределение модуля Юнга по высоте поперечного сечения

$$E(y) = a_1 + a_2 P_0 \left(1 - \frac{4}{h^2} y^2 \right) + a_3 P_0^2 \left(1 - \frac{4}{h^2} y^2 \right)^2. \quad (21)$$

Упруго-геометрические параметры I_* и F_* имеют вид:

$$I_* = \frac{bh^3}{12} (a_1 + 0.2a_2 P_0 + 0.114285a_3 P_0^2), \quad (22)$$

$$F_* = bh (a_1 + 0.6666a_2 P_0 + 0.53333a_3 P_0^2).$$

В качестве расчетного примера рассмотрим арку, для которой $b \times h = 5 \times 5$ см, $l = 3$ м, $Y_0 = 10$ см, $P_0 = 0.2$.

Соответственно, будем иметь

$$I_* = 0.098622 \text{ МН} \times \text{м}^2,$$

$$F_* = 362.022484 \text{ МН}.$$

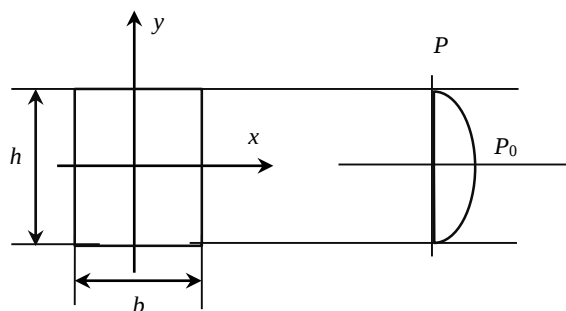


Рис. 3. Распределение пористости по высоте сечения

Fig. 3. Porosity distribution along the cross-section

Обозначим

$$\omega = \frac{ql^4}{I_*h}, \quad \lambda = \frac{f}{h} \quad (23)$$

На основании (22), (23) функция (19) примет вид:

$$\omega = \lambda(6 + 9788.7785(0.1 - \lambda 0.05)(0.1 - \lambda 0.025)). \quad (24)$$

Выполняя вычисления для сплошного и пористого сечений, получим следующую таблицу, из которой найдем экстремальное значение ω и, соответственно, значение $q_{кр}$.

Параметры сплошного и пористого сечений

		max	
λ	0.75	0.9	0.95
$\omega_{спл}$	53.25	54.504	54.378
$\omega_{пор}$	41.815	42.952	42.926

Для сплошного сечения арки получим

$$q_{кр\text{ спл}} = \frac{54,04Elh}{l^4} = 3679.86 \cdot 10^{-6} \text{ МН/м}.$$

Для пористого сечения будем иметь

$$q_{кр\text{ пор}} = \frac{42.952I_*h}{l^4} = 2614.83 \cdot 10^{-6} \text{ МН/м}.$$

Даны следующие параметры нагрузки:

- интенсивность распределенной нагрузки q с математическим ожиданием $m_q = 1530 \text{ Н/м}$;
- среднее квадратичное отклонение нагрузки $\sigma_q = 150 \text{ Н/м}$;

- срок эксплуатации арки $T = 10 \text{ лет} = 315 \cdot 10^6 \text{ с}$;
- параметры случайного процесса $\alpha_0 = 0.3 \text{ с}^{-1}$, $\beta_0 = 0.4 \text{ с}^{-1}$.
- нормативная надежность $H_{\text{норм}} = 0.999$.

По формуле (8) определим надежность арки пористой структуры:

$$H_{\text{пор}} = \exp \left(-\frac{315 \cdot 10^6 \cdot 0.5}{2 \cdot 3.14} \exp \left(-\left(\frac{2614.83 - 1530}{150} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \right) \right) = 0.999889.$$

Полученная надежность больше нормативной: $H_{\text{пор}} = 0.999889 > H_{\text{норм}} = 0.999$, значит эксплуатационная надежность обеспечена.

Детерминистический коэффициент запаса устойчивости пористой арки равен

$$n_y = \frac{q_{\text{кр}}}{m_q} = \frac{2614.8}{1530} = 1.71.$$

Оценим теперь надежность сплошной арки:

$$H_{\text{спл}} = \exp \left(-\frac{315 \cdot 10^6 \cdot 0.5}{2 \cdot 3.14} \exp \left(-\left(\frac{3679.86 - 1530}{150} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \right) \right) = 1.$$

Как показало сравнение обеих надежностей, они практически равны. Пористая арка лишь незначительно уступает сплошной.

Выясним материалоемкость пористой и сплошной арок.

Для сплошной арки площадь поперечного сечения $A_{\text{спл}} = bh$.

Для пористой арки часть площади, занятая порами, равна

$$A_{\text{пор}} = 2b \int_0^{\frac{h}{2}} P(y) dy = 2b \int_0^{\frac{h}{2}} P_0 \left(1 - \frac{4}{h^2} y^2 \right) dy = 0.666 P_0 hb.$$

Оценим рациональность конструкции:

$$\Delta = \frac{A_{\text{пор}}}{A_{\text{спл}}} \cdot 100\% = 0.666 \cdot 0.2 \cdot 100 = 13.3\%.$$

Таким образом, надежность пористой арки остается практически такой же, как у сплошной, однако материалоемкость снижается при этом на 13.3%.

Список источников

1. Расчет на прочность в машиностроении / ред. С.Д. Пономарев. М. : Машгиз, 1956. Т. 1. 884 с.
2. Кривулина Э.Ф., Шляхов С.М. Оценка надежности по устойчивости пологой арки на основе теории стационарных случайных процессов // Научное обозрение. 2015. № 9. С. 39–43.
3. Шляхов С.М., Гаврилов Д.Ю. Метод последовательных приближений в задаче рационального распределения пористости при чистом изгибе бруса прямоугольного сечения // Вестник Чувацкого государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2016. № 3 (29). С. 122–127.
4. Кашталян Ю.А. Характеристики упругости материалов при высоких температурах. Киев : Наукова думка, 1970. 112 с.
5. Арасланов А.М. Расчет элементов конструкций заданной надежности при случайных воздействиях. М. : Машиностроение, 1987. 128 с.

6. Кривулина Э.Ф., Каневская И.Ю. Оценка надежности по устойчивости прямоугольной рамы, выполненной из пористого материала, на основе вероятностного подхода // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 53. С. 107–115.

References

1. Ponomarev S.D. (1956) *Raschet na prochnost' v mashinostroenii. Tom 1.* [Strength calculation in mechanical engineering. Volume 1.]. Moscow: Mashgiz.
2. Krivulina E.F., Shlyakhov S.M. (2015) Otsenka nadezhnosti po ustoychivosti pologoy arki na osnove teorii statsionarnykh sluchaynykh protsessov [Reliability assessment for the stability of a gentle arch based on the theory of stationary random processes]. *Nauchnoe obozrenie – Scientific Review*. 9. pp. 39–43.
3. Shlyakhov S.M., Gavrilov D.Yu. (2016) Metod posledovatel'nykh priblizheniy v zadache ratsional'nogo raspredeleniya poristosti pri chistom izgibe brusa pryamougol'nogo secheniya [The method of successive approximations in the problem of rational distribution of porosity with a bend of a beam of rectangular cross section]. *Vestnik ChGPU im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya – Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. 3(29). pp. 122127.
4. Kashtalyan Yu.A. (1970) *Kharakteristiki uprugosti materialov pri vysokikh temperaturakh* [Elasticity characteristics of materials at high temperatures]. Kyiv: Naukova Dumka.
5. Araslanov A.M. (1987) *Raschet elementov konstruksiy zadannoy nadezhnosti pri sluchaynykh vozdeystviyakh* [Calculation of structural elements with a specified reliability under random influences]. Moscow: Mashinostroyeniye.
6. Krivulina E.F., Kanevskaya I.Yu. (2018) Otsenka nadezhnosti po ustoychivosti pryamougol'noy ramy, vypolnennoy iz poristogo materiala, na osnove veroyatnostnogo podkhoda [Estimation of the reliability of a rectangular frame made of the porous metal in terms of its rigidity on the basis of probabilistic approach]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 53(3). pp. 107–115. doi: 10.17223/19988621/53/10

Сведения об авторах:

Шляхов Станислав Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Строительные материалы, конструкции и технологии» (СМКТ) Саратовского государственного технического университета им. Гагарина Ю.А., Саратов, Россия. E-mail: shlyakhovsm@yandex.ru

Кривулина Эльвира Федоровна – кандидат технических наук, доцент кафедры «Теории сооружений и строительных конструкций» (ТСК) Саратовского государственного технического университета им. Гагарина Ю.А., Саратов, Россия. E-mail: orifelwi@mail.ru

Information about the authors:

Shlyakhov Stanislav M. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Saratov State Technical University named after Yu.A. Gagarin, Saratov, Russian Federation). E-mail: shlyakhovsm@yandex.ru

Krivulina Elvira F. (Candidate of Technical Sciences, Docent, Saratov State Technical University named after Yu.A. Gagarin, Saratov, Russian Federation). E-mail: orifelwi@mail.ru

Статья поступила в редакцию 23.11.2021; принята к публикации 03.10.2022

The article was submitted 23.11.2021; accepted for publication 03.10.2022