

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

Научная статья

УДК 517.9

doi: 10.17223/19988605/60/1

Метод синтеза модального регулятора для линейного дискретного объекта управления с интервальной неопределенностью коэффициентов

Андрей Николаевич Паршуков

Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия, anparshukov@mail.ru

Аннотация. Предложен метод синтеза дискретного робастного модального регулятора, получен критерий робастного качества управления в условиях интервальной неопределенности коэффициентов в модели объекта управления. Данный метод синтеза доведен до вычислительных процедур и может быть реализован на ЭВМ. Метод синтеза проиллюстрирован примером.

Ключевые слова: интервальная неопределенность коэффициентов; дискретный модальный регулятор; робастное управление; принцип исключения нуля

Для цитирования: Паршуков А.Н. Метод синтеза модального регулятора для линейного дискретного объекта управления с интервальной неопределенностью коэффициентов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 60. С. 4–12. doi: 10.17223/19988605/60/1

Original article

doi: 10.17223/19988605/60/1

Method of synthesis of a modal regulator for a linear discrete-time system with interval uncertainty of coefficients

Andrej N. Parshukov

Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation, anparshukov@mail.ru

Abstract. The article proposes a method for synthesizing a discrete robust modal controller, and obtains a criterion for the robust quality of control under conditions of interval uncertainty of the coefficients in the control plant model. This synthesis method has been brought to computational procedures and can be implemented on a computer. The synthesis method is illustrated by an example.

Keywords: interval uncertainty of coefficients; discrete-time modal regulator; robust control; zero exclusion principle

For citation: Parshukov, A.N. (2022) Method of synthesis of a modal regulator for a linear discrete-time system with interval uncertainty of coefficients . *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 60. pp. 4–12. doi: 10.17223/19988605/60/1

В результате идентификации технологических процессов модель объекта управления чаще всего восстанавливается в виде линейного дифференциального или разностного уравнения заданного порядка, коэффициенты которого определены с точностью до некоторых интервалов.

В большинстве классических схем синтеза регулятор рассчитывается для модели с точно заданными коэффициентами. В случае объекта управления с интервальной неопределенностью коэффициентов регулятор может быть рассчитан по классическим схемам для модели со средними значениями из заданных интервалов. При этом после замыкания объекта управления с интервальной неопределенностью коэффициентов модальным регулятором в характеристическом полиноме замкнутой системы появляется неопределенность. Поскольку свойства устойчивости и качества управления системы определяются расположением нулей ее характеристического полинома, возникает вопрос: при каких размерах интервальной неопределенности в объекте управления замкнутая система еще сохранит свойства устойчивости (робастная устойчивость) и качества управления (робастное качество управления)?

В схеме модального управления [1. С. 8–21, 2. С. 9–12] качество управления задается в виде области Ω на комплексной плоскости, определяющей желаемое расположение нулей характеристического полинома. Следовательно, вопросы исследования (проверки) робастной устойчивости и робастного качества управления могут быть рассмотрены с единых позиций: требуется проверить, принадлежат ли нули заданного семейства полиномов области Ω .

Для непрерывных систем управления проблема исследования робастной устойчивости и робастного качества управления широко представлена в литературе. Можно выделить три главных направления, в рамках которых решается данная задача: принцип исключения нуля [3–6]; теория H^∞ [7–9]; метод LMI [10–13]. В целом для непрерывных систем сформулированная задача исследования робастного качества управления является полностью решенной.

Следует отметить, что большинство из указанных методов и результатов не имеет аналогов для дискретных систем управления: так, например, в [14] показано, что для дискретных систем несправедлива теорема Харитонова. В настоящей статье в развитие результатов, изложенных в [14], разрабатывается методика исследования робастного качества управления для дискретных систем.

В статье приняты следующие обозначения: $\doteq$ – равно по определению; R^n – пространство n -мерных вещественных векторов $\mathbf{x} \doteq [x_1, \dots, x_n]$; C^1 – комплексная плоскость; j – мнимая единица; s – переменная (в общем случае комплексная); s^* – число, комплексно сопряженное числу s ; t – дискретное время ($t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); z – оператор опережения на один такт: $zx(t) = x(t+1)$; Ω – область на C^1 ; $\partial\Omega$ – граница области Ω ; $\text{int } \Omega$ – внутренняя часть области Ω .

Оператор вида

$$f(n, z) = \sum_{i=0}^n f_i \cdot z^i \quad (1)$$

назовем *полиномиальным оператором* степени n . Выполняя в (1) замену z на s , где s переменная, получаем алгебраический полином

$$f(n, s) = \sum_{i=0}^n f_i \cdot s^i.$$

Множество нулей полинома $f(n, s)$ обозначим $\Lambda(f)$:

$$\Lambda(f) \doteq \{\lambda_i \in C^1 : F(n, \lambda_i) = 0, \quad i \in \overline{1, n}\}.$$

Семейство операторов вида

$$f(n, F, z) = \left\{ f(n, \mathbf{f}, z) = \sum_{i=0}^n f_i \cdot z^i : \mathbf{f} \doteq [f_0, \dots, f_n] \in F \right\}, \quad (2)$$

$$F = \left\{ \mathbf{f} \in R^{n+1} : f_i \in [f_i^0 - \Delta f_i, f_i^0 + \Delta f_i], f_n^0 \neq 0, \Delta f \geq 0, i \in \overline{1, n} \right\}$$

назовем *интервальным полиномиальным оператором* степени n .

Выполняя в (2) замену z на s , получаем *интервальный полином*

$$f(n, F, s) = \left\{ f(l, \mathbf{f}, s) = \sum_{i=0}^n f_i \cdot s^i : \mathbf{f} \in F \right\}. \quad (3)$$

Интервальный полином (3) можно представить в виде:

$$f(n, F, s) = f^0(n, s) + \Delta f(n, \Delta F, s), \quad (4)$$

где

$$f^0(n, s) \doteq \sum_{i=0}^n f_i^0 \cdot s^i$$

обычный полином, а

$$\Delta f(n, \Delta F, s) = \left\{ f(n, \delta \mathbf{f}, s) = \sum_{i=0}^n \delta f_i \cdot s^i : \delta \mathbf{f} \doteq [\delta f_0, \dots, \delta f_n] \in \Delta F \right\},$$

$$\Delta F = \left\{ \delta \mathbf{f} \in R^{n+1} : \delta f_i \in [-\Delta f_i; \Delta f_i], i = \overline{0, n} \right\}$$

интервальный полином с симметричными интервалами неопределенности коэффициентов.

1. Схема синтеза робастного модального регулятора и задача исследования робастного качества управления

Пусть линейный одномерный дискретный объект управления задан разностным уравнением n -го порядка с интервальной неопределенностью коэффициентов

$$a(n, A, z)y(t) = b(m, B, z)u(t), \quad n > m, \quad a_n^0 = 1, \quad \Delta a_n = 0, \quad (5)$$

здесь u – входной (управляющий) сигнал, y – выходной (управляемый) сигнал, $a(n, A, z)$ и $b(m, B, z)$ – интервальные операторы вида (4). Модель

$$a^0(n, z)y(t) = b^0(m, z)u(t), \quad (6)$$

принадлежащую семейству моделей (5), назовем *номинальной*.

Качество управления назначается в виде области Ω , определяющей допустимое расположение нулей характеристического полинома на C^1 . Будем предполагать, что область Ω удовлетворяет следующим условиям: замкнута; расположена внутри окружности единичного радиуса; односвязна; для любой точки $\omega \in \Omega$ также выполняется $\omega^* \in \Omega$.

В технологии синтеза модального регулятора (изложенной, например, в [1. С. 8–21]) регулятор ищется в виде разностного уравнения $(n-1)$ -го порядка

$$w(n-1, z)u(t) = v(n-1, z)y(t) + h(q, z)g(t), \quad q \leq n-1, \quad w_{n-1} = 1, \quad (7)$$

здесь g – входной сигнал замкнутой системы управления. Коэффициенты операторов $w(n-1, z)$ и $v(n-1, z)$ регулятора (7) рассчитываются из условия обращения в тождество уравнения

$$a^{\text{et}}(2n-1, s) = a^0(n, s) \cdot w(n-1, s) - b^0(m, s) \cdot v(n-1, s), \quad a_{2n-1}^{\text{et}} = 1, \quad (8)$$

где $a^{\text{et}}(2n-1, s)$ – заданный характеристический полином эталонной системы управления (далее – эталон); выбор эталона ограничен условием

$$\Lambda(a^{\text{et}}) \subset \text{int } \Omega. \quad (9)$$

Выбор полинома $h(q, s)$ не влияет на свойства робастной устойчивости и робастного качества управления, поэтому вопрос расчета полинома $h(q, s)$ в настоящей работе не рассматривается.

В уравнении (8), приравняв коэффициенты при одинаковых степенях переменной s , получаем систему из $2n-1$ линейных алгебраических уравнений относительно $2n-1$ неизвестных коэффициентов полиномов $w(n-1, s)$ и $v(n-1, s)$ [1. С. 12–13]. Данная система однозначно разрешима, если нули полинома $a^0(n, s)$ не совпадают с нулями полинома $b^0(m, s)$ (см.: [2. С. 11]).

После замыкания исходного объекта (5) регулятором, синтезированным по схеме (7)–(9), получим уравнение замкнутой системы

$$a^c(2n-1, A, B, z)y(t) = b^c(m+q, B, z)g(t),$$

здесь

$$\begin{aligned} a^c(2n-1, A, B, s) &= a(n, A, s) \cdot w(n-1, s) - b(m, B, s) \cdot v(n-1, s), \\ b^c(m+q, B, s) &= b(m, B, s) \cdot h(q, s). \end{aligned}$$

Множество полиномов $a^c(2n-1, A, B, s)$ назовем семейством *характеристических полиномов* замкнутой системы. Это семейство может быть записано через свои элементы:

$$a^c(2n-1, A, B, s) = \{a^c(2n-1, \delta a, \delta b, s) : \delta a \in \Delta A, \delta b \in \Delta B\}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} a^c(2n-1, \delta a, \delta b, s) &\doteq a^{et}(2n-1, s) + a(n-1, \delta a, s) \cdot w(n-1, s) - \\ &- b(m, \delta b, s) \cdot v(n-1, s). \end{aligned}$$

Под нулями семейства характеристических полиномов (10) будем понимать совокупность всех нулей всех полиномов, входящих в семейство (10):

$$\Lambda(a^c) = \{\lambda_i : \exists \delta a \in \Delta A, \exists \delta b \in \Delta B, a^c(2n-1, \delta a, \delta b, \lambda_i) = 0, i = \overline{1, 2n-1}\}.$$

Будем считать, что замкнутая система с характеристическим полиномом (10) обладает *робастным качеством управления*, если множество $\Lambda(a^c)$ лежит внутри области Ω :

$$\Lambda(a^c) \subset \text{int } \Omega. \quad (11)$$

При наличии интервальной неопределенности коэффициентов в объекте управления нельзя заранее гарантировать, что модальный регулятор, рассчитанный по формулам (7)–(9), будет обеспечивать выполнение условия (11). Таким образом, задача синтеза модального регулятора в условиях неопределенности в объекте управления состоит из следующих этапов:

- 1) синтез модального регулятора для номинального объекта (6) (по формулам (7)–(9));
- 2) последующая проверка выполнения условия (11) для заданного семейства характеристических полиномов (10) (задача исследования робастного качества управления).

В следующем разделе разрабатывается вычислительная технология исследования робастного качества управления для семейства характеристических полиномов вида (10).

2. Вычислительная технология исследования робастного качества управления

2.1. Критерий робастного качества управления

Далее, чтобы упростить запись выражений, мы будем указывать не все аргументы функций, а только те из них, которые существенны для проводимых рассуждений. При этом при изменении контекста рассуждений будет изменяться и состав аргументов.

Множество полиномов (10) является аффинным семейством полиномов:

$$a^c(s) = \left\{ p(\mathbf{e}, s) = p_0(s) + \sum_{i=1}^{n+m+1} e_i \cdot p_i(s) : \mathbf{e} \doteq [e_1, \dots, e_{n+m+1}] \in E \right\}, \quad (12)$$

где $p_0(s), \dots, p_{n+m+1}(s)$ – полиномы

$$\begin{aligned} p_0(s) &= a^{et}(2n-1, s), \\ p_i(s) &= \begin{cases} \Delta a_{i-1} s^{i-1} \cdot w(n-1, s), & i \in \overline{1, n}, \\ \Delta b_{i-n-1} s^{i-n-1} \cdot v(n-1, s), & i \in \overline{n+1, n+m+1}, \end{cases} \end{aligned}$$

а область E представляет собой $(n+m+1)$ -мерный куб

$$E = \{\mathbf{e} \in R^{n+m+1} : |e_i| \leq 1, \forall i \in \overline{1, n+m+1}\}.$$

Рассмотрим две комплексные плоскости: $(\text{Re}(\omega), j\text{Im}(\omega))$ и $(\text{Re}(\xi), j\text{Im}(\xi))$. Полином $p_0(s)$ отображает точку ω на первой комплексной плоскости в точку $\xi_0 = p_0(\omega)$ второй. В указанном смысле

точку ξ_0 называют *геометрическим образом* полинома $p_0(s)$ для точки ω . Аналогично аффинное семейство полиномов (12) будет отображать точку ω в множество

$$\Xi(\omega) = \left\{ p_0(\omega) + \sum_{i=1}^{n+m+1} e_i \cdot p_i(\omega) : e \in E \right\}. \quad (13)$$

Множество $\Xi(\omega)$ является геометрическим образом семейства полиномов (12) для точки ω .

Доказано (см.: [6. С. 174]), что геометрический образ аффинного семейства полиномов (12) представляет выпуклый многоугольник на C^1 , вершины которого определяются вершинными полиномами $\{p_0(s) \pm p_i(s), i = 1, \dots, n + m + 1\}$. Общее число вершин многоугольника не превышает $2(n + m + 1)$. Точки $\{\xi_0(\omega) \pm \xi_i(\omega), i = 1, \dots, n + m + 1\}$ комплексной плоскости, соответствующие вершинным полиномам, называются *точками-кандидатами*.

Существует множество алгоритмов вычисления координат вершин выпуклого многоугольника по известным точкам-кандидатам (например, алгоритмы Грэхема, Джарвиса и др. [15. С. 106–112]). Многоугольник $\Xi(\omega)$, построенный по своим точкам-кандидатам, будем записывать в виде:

$$\Xi(\omega) = \text{Conv} \{ \xi_0(\omega) \pm \xi_i(\omega), i \in \overline{1, n + m + 1} \}.$$

На основе принципа аргумента и понятия геометрического образа семейства полиномов можем сформулировать критерий робастного качества управления.

Лемма 1. Пусть все нули полинома $p_0(s)$ лежат внутри заданной области Ω . Тогда для того, чтобы множество нулей семейства полиномов (12) также лежало внутри Ω , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$$0 \notin \Xi(\omega), \quad \forall \omega \in \partial\Omega. \quad (14)$$

Доказательство. Все полиномы, входящие в (12), имеют одинаковый порядок. По условию теоремы все нули полинома $p_0(s)$ лежат внутри Ω . Любой другой полином семейства (12) получается вариацией вектора параметров e . При вариации e изменение числа нулей, лежащих внутри Ω , может происходить только в том случае, когда хотя бы один из нулей выйдет на границу области Ω и условие (14) будет нарушено. Что и требовалось доказать.

Точка $\xi_0(\omega)$ является центром многоугольника (13), следовательно, множество (13) может быть записано в виде:

$$\Xi(\omega) = \xi_0(\omega) + \Delta\Xi(\omega),$$

где

$$\Delta\Xi(\omega) = \text{Conv} \{ \pm \xi_i(\omega), i \in \overline{1, n + m + 1} \}.$$

В результате условие (14) принимает вид:

$$-\xi_0(\omega) \notin \Delta\Xi(\omega), \quad \forall \omega \in \partial\Omega,$$

или, учитывая симметрию множества $\Delta\Xi(\omega)$, следующую из симметрии точек-кандидатов, получаем

$$\xi_0(\omega) \notin \Delta\Xi(\omega), \quad \forall \omega \in \partial\Omega. \quad (15)$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 1. Пусть все нули полинома $p_0(s)$ лежат внутри заданной области Ω . Тогда для того, чтобы множество нулей семейства полиномов (12) также лежало внутри Ω , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (15).

Основная сложность проверки условия (15) состоит в необходимости:

- 1) эффективно строить многоугольник $\Delta\Xi(\omega)$ для заданной точки $\omega \in \partial\Omega$;
- 2) эффективно проверять выполнение условия (15) для заданной точки $\omega \in \partial\Omega$.

Технология проверки условия (15) изложена ниже.

2.2. Методика проверки робастного качества управления

Множество точек на C^1 , являющихся вершинами многоугольника $\Delta\Xi(\omega)$, обозначим

$$\Theta = \{ \theta_k \in C^1, k = \overline{1, 2 \cdot r} \}, \quad r \leq n + m + 1.$$

Далее для определенности примем, что координаты вершин Θ рассчитаны по алгоритму Грэхема [15. С. 106–110]: алгоритм Грэхема формирует вершины θ_k в порядке их обхода против часовой стрелки.

Рассмотрим многоугольник

$$\Delta\Xi(\mu, \omega) \doteq \mu \cdot \Delta\Xi(\omega), \quad \mu \geq 0.$$

Очевидно, что многоугольник $\Delta\Xi(\mu, \omega)$ будет иметь вершины в точках

$$\{\mu \cdot \theta_k, \quad k = \overline{1, 2 \cdot r}\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что многоугольник $\Delta\Xi(\mu, \omega)$ является геометрическим образом семейства полиномов, полученных из (12) после умножения всех границ интервалов на μ .

Поставим следующую вспомогательную задачу: для точки $\omega \in \partial\Omega$ требуется найти значение

$$\mu(\omega) \doteq \min \{\mu \in R^1 : \xi_0(\omega) \in \partial\Delta\Xi(\mu, \omega), \mu \geq 0\}, \quad (16)$$

если оно существует. При решении задачи (16) будем выделять два возможных случая: $r = 1$ и $r > 1$.

В случае $r = 1$ многоугольник $\Delta\Xi(\mu, \omega)$ вырождается в отрезок на C^1 с границами в точках $\pm\mu \cdot \theta_1$. Точка $\xi_0(\omega)$ может принадлежать данному отрезку только в том случае, если она находится на линии

$$\alpha \cdot \operatorname{Re}(\xi) + \beta \cdot \operatorname{Im}(\xi) = 0, \quad \alpha = -\operatorname{Im}(\theta_1), \quad \beta = \operatorname{Re}(\theta_1), \quad \xi \in C^1, \quad (17)$$

проходящей через точки θ_1 и $-\theta_1$. Доопределяя $\mu(\omega) = +\infty$ в том случае, когда точка $\xi_0(\omega)$ не принадлежит линии (17), получаем следующее решение задачи (16):

$$\mu(\omega) = \begin{cases} |\xi_0(\omega)/\theta_1|, & \alpha \cdot \operatorname{Re}(\xi_0(\omega)) + \beta \cdot \operatorname{Im}(\xi_0(\omega)) = 0, \\ +\infty, & \alpha \cdot \operatorname{Re}(\xi_0(\omega)) + \beta \cdot \operatorname{Im}(\xi_0(\omega)) \neq 0, \end{cases} \quad (18)$$

в случае $r = 1$.

Рассмотрим случай $r > 1$. Многоугольник $\Delta\Xi(\mu, \omega)$ может быть задан системой линейных алгебраических неравенств

$$\alpha_k \cdot \operatorname{Re}(\xi) + \beta_k \cdot \operatorname{Im}(\xi) + \gamma_k \geq 0, \quad k = \overline{1, 2 \cdot r}, \quad \xi \in C^1, \quad (19)$$

коэффициенты $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} \psi_k &= \operatorname{Re}(\theta_{k+1} - \theta_k) \cdot \operatorname{Im}(\theta_k) - \operatorname{Im}(\theta_{k+1} - \theta_k) \cdot \operatorname{Re}(\theta_k), \quad \gamma_k = \mu \cdot |\psi_k|, \\ \alpha_k &= \begin{cases} \operatorname{Im}(\theta_{k+1} - \theta_k), & \psi_k \geq 0, \\ -\operatorname{Im}(\theta_{k+1} - \theta_k), & \psi_k < 0, \end{cases} \quad \beta_k = \begin{cases} -\operatorname{Re}(\theta_{k+1} - \theta_k), & \psi_k \geq 0, \\ \operatorname{Re}(\theta_{k+1} - \theta_k), & \psi_k < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

здесь для простоты записи формул (20) принимается $\theta_{2r+1} \equiv \theta_1$.

Точка $\xi_0(\omega)$ принадлежит границе $\Delta Z(\gamma)$ в следующих случаях.

Случай 1: точка $\xi_0(\omega)$ находится на k -й стороне многоугольника $\Delta\Xi(\mu, \omega)$. При этом в данной точке k -е неравенство системы (19)–(20) обратится в равенство; соответствующее значение параметра μ обозначим за μ_k :

$$\mu_k = -(\alpha_k \cdot \operatorname{Re}(\xi_0(\omega)) + \beta_k \cdot \operatorname{Im}(\xi_0(\omega))) / |\psi_k|;$$

Случай 2: точка $\xi_0(\omega)$ находится в k -й вершине многоугольника $\Delta\Xi(\mu, \omega)$. При этом k -е и $(k + 1)$ -е неравенства системы (19)–(20) обратятся в равенства. Сформируем множество

$$M_+(\omega) = \{\mu_k \doteq -(\alpha_k \cdot \operatorname{Re}(\xi_0(\omega)) + \beta_k \cdot \operatorname{Im}(\xi_0(\omega))) / |\psi_k| : \mu_k \geq 0, k = \overline{1, 2 \cdot r}\}$$

Отметим, что по смыслу задачи сразу все значения μ_k , ($k = \overline{1, 2 \cdot r}$) не могут быть отрицательны, следовательно, множество $M_+(\omega)$ непусто. Таким образом, искомое значение $\mu(\omega)$ при $r > 1$ находится по формуле

$$\begin{aligned} \mu(\omega) &= \max \{\mu_k \in M_+(\omega) : \\ &\alpha_i \cdot \operatorname{Re}(\xi_0(\omega)) + \beta_i \cdot \operatorname{Im}(\xi_0(\omega)) + \mu_k \cdot |\psi_i| \geq 0, \quad \forall i = \overline{1, 2 \cdot r}\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Изложенные рассуждения можно рассматривать как доказательство следующей леммы:

Лемма 2. Решение задачи (16) для точки $\omega \in \partial\Omega$ определяется формулами (18) в случае $r = 1$ и (21) в случае $r > 1$.

Основываясь на данной лемме, теорему 1 можем переформулировать следующим образом:

Теорема 2. Пусть полином $a^c(2n-1, s)$, принадлежащий семейству (10), удовлетворяет условию (9). Тогда для семейства полиномов (10) выполняется условие робастного качества управления (11) только в том случае, если

$$\mu_- \doteq \min_{\omega \in \partial\Omega} \mu(\omega) > 1, \quad (22)$$

где $\mu(\omega)$ – решение задачи (16).

Значение μ_- определяет, во сколько раз следует увеличить (при $\mu_- > 1$) или уменьшить (при $\mu_- < 1$) одновременно все интервалы в модели (5), чтобы для семейства характеристических полиномов (10) впервые было нарушено условие робастного качества управления (11).

Теорема 2 является обобщением известного в комплексном анализе «принципа аргумента». При этом принцип аргумента может быть сформулирован следующим образом: для того чтобы все нули семейства полиномов $a^c(2n-1, A, B, s)$ лежали внутри Ω , необходимо и достаточно, чтобы при обходе точки ω вдоль $\partial\Omega$ в положительном направлении приращение аргумента каждого полинома из семейства $a^c(2n-1, A, B, s)$ равнялось $2\pi(2n-1)$ рад.

Для того чтобы контролировать последовательность обхода квадрантов на комплексной плоскости, достаточно рассчитывать вариации аргумента в точках $\{\omega_i, i = 1, \dots, N\}$ на контуре $\partial\Omega$, таких что удовлетворяют условию

$$\Delta \arg a^c(2n-1, \delta a, \delta b, \omega) \Big|_{\omega=\omega_i}^{\omega=\omega_{i+1}} \leq \pi/2 \text{ рад},$$

$$\forall a^c(2n-1, \delta a, \delta b, s) \in a^c(2n-1, A, B, s).$$

Пользуясь оценками для вариации аргументов полиномов, последнее условие можно записать в виде:

$$\max_{s \in \Omega} \Delta \arg(\omega - s) \Big|_{\omega=\omega_i}^{\omega=\omega_{i+1}} \leq \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ рад}. \quad (23)$$

Учитывая изложенные рассуждения, далее принято, что на $\partial\Omega$ выбрано конечное множество точек $\{\omega_i, i = 1, \dots, N\}$, удовлетворяющих условию (23).

Алгоритм исследования робастного качества управления:

Шаг 1. Принять $i = 1$.

Шаг 2. Для точки $\omega_i \in \partial\Omega$ по алгоритму Грэхема рассчитать множество Θ вершин многоугольника (13).

Шаг 3. Проверить выполнение условия $r = 1$. Если оно выполняется, то рассчитать $\mu(\omega_i)$ по формуле (18), иначе рассчитать $\mu(\omega_i)$ по формуле (21). Принять $i = i + 1$. Перейти на следующий шаг.

Шаг 4. Проверить выполнение условия $i \leq N$. Если оно выполняется, то перейти на шаг 2, если нет – перейти на следующий шаг.

Шаг 5. Вычислить значение

$$\mu_- = \min_{\omega_i} \mu(\omega_i)$$

и проверить выполнение условия $\mu_- > 1$. Если это условие выполняется, то перейти на следующий шаг, в противном случае перейти на шаг 7.

Шаг 6. Сделать вывод: исследуемое семейство характеристических полиномов (10) обладает свойством робастного качества управления. Перейти на шаг 8.

Шаг 7. Сделать вывод: исследуемое семейство характеристических полиномов (10) не обладает свойством робастного качества управления. Перейти на следующий шаг.

Шаг 8. Останов.

3. Пример исследования робастного качества управления

Задан дискретный объект управления с интервальной неопределённостью коэффициентов

$$a^0(2, z) + \Delta a(1, z)y(t) = b^0(1, z) + \Delta b(1, z)u(t),$$

где

$$a^0(2, z) = z^2 - 1,918z + 0,923, \quad b^0(1, z) = 0,232z - 0,179, \\ \Delta a(1, z) = 10^{-4}[-1; 1]z + 10^{-4}[-2; 2], \quad \Delta b(1, z) = 10^{-2}[-1; 1]z + 10^{-2}[-1; 1]$$

Требования к качеству управления назовем в виде области

$$\Omega = \{\omega : \eta_2 \leq |\omega| \leq \eta_1, \quad |\arg(\omega)| \leq \varphi\},$$

где $\eta_1 = 0,607$, $\eta_2 = 0,961$, $\varphi = \pi/4$ рад. Характеристический полином эталона выберем

$$a^{\text{et}}(3, z) = z^3 - 2,715z^2 + 2,456z - 0,741.$$

Для номинальной модели

$$a^0(2, p)y(t) = b^0(1, p)u(t)$$

и эталона $a^{\text{et}}(3, z)$ рассчитан модальный регулятор

$$(z - 0,833)u(t) = (-0,156z + 0,156)y(t) + h_0g(t).$$

Семейство характеристических полиномов замкнутой системы

$$a^c(3, z) = a^{\text{et}}(3, z) + \Delta a(1, z) \cdot w(1, z) - \Delta b(1, z) \cdot v(1, z) \quad (24)$$

Требуется исследовать семейство полиномов (23) на робастное качество управления.

Решение. В результате расчетов функции $\mu(\omega)$ вдоль $\partial\Omega$ найдено наименьшее значение, равное 1,137. Следовательно, семейство (24) имеет робастное качество управления.

Заключение

В данной работе обоснована схема синтеза робастного модального регулятора. Важной частью процедуры расчета регулятора является задача исследования робастного качества управления. В статье получено обобщение принципа исключения нуля (теорема 2), на основе которого разработана вычислительная технология проверки робастного качества управления. Предложенная схема синтеза проиллюстрирована примером.

Список источников

1. Паршуков А.Н. Методы синтеза модальных регуляторов. Тюмень : ТюмГНГУ, 2009. 84 с.
2. Соловьев И.Г. Методы мажоризации в анализе и синтезе адаптивных систем. Новосибирск : Наука, 1992. 191 с.
3. Ackermann J.A., Bartlett D., Kaesbauer W.S., Steinhauser R. Robust control. Systems with uncertain physical parameters. London : Springer-Verlag, 1993. 413 p.
4. Barmish B.R. New tools for robustness of linear systems. New York : MacMillan, 1994. 394 p.
5. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем // Автоматика и телемеханика. 1990. № 9. С. 45–54.
6. Поляк Б.Т., Щербakov П.С. Робастная устойчивость и управление. М. : Наука, 2002. 303 с.
7. Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34, № 8. P. 831–847.
8. Khargonekar P.P., Rotea M.A. Mixed H_2/H_∞ Control: a Convex Optimization Approach // IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. 36, № 7. P. 824–831.
9. Kogan M.M. Optimal discrete-time H_∞/γ_0 filtering and control under unknown covariances // Int. J. Control. 2016. V. 89, № 4. P. 691–700.
10. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М. : Физматлит, 2007. 280 с.
11. Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. An LMI approach to structured sparse feedback design in linear control systems // Proc. 12th European Control Conference. Zurich, 2013. P. 833–838.
12. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербakov П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств. М. : Ленанд, 2014. 560 с.
13. Баландин Д.В., Коган М.М., Кривдина Л.Н., Федюков А.А. Синтез обобщенного H_∞ -оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах // Автоматика и телемеханика. 2014. № 1. С. 3–22.
14. Зубов В.И., Зубов И.В., Зубова А.Ф. Исследование робастного поведения семейств дискретных полиномов // Журнал Средневолжского математического общества. 2014. Т. 16, № 2. С. 114–117.
15. Preparata F., Shamos M. Computational Geometry. An Introduction. New York : Springer-Verlag, 1985. 411 p.

References

1. Parshukov, A.N. (2009) *Metody sinteza modal'nykh regulyatorov* [Methods of Synthesis of Modal Regulators]. Tyumen: TyumGNGU.
2. Soloviev, I.G. (1992) *Metody mazhorizatsii v analize i sinteze adaptivnykh sistem* [Methods of majorization in the analysis and synthesis of adaptive systems]. Novosibirsk: Nauka.
3. Ackermann, J.A., Bartlett, D., Kaesbauer, W.S. & Steinhauser, R. (1993) *Robust control. Systems with uncertain physical parameters*. London: Springer-Verlag.
4. Barmish, B.R. (1994) *New tools for robustness of linear systems*. New York: MacMillan.
5. Polyak, B.T. & Tsytkin, Ya.Z. (1990) Frequency criteria of robust stability and aperiodicity of linear systems. *Automation and Remote Control*. 51(9). pp. 1192–1201.
6. Polyak, B.T. & Shcherbakov, P.S. (2002) *Robustnaya ustoychivost' i upravlenie* [Robust Stability and Control]. Moscow: Nauka.
7. Doyle, J.C., Glover, K., Khargonekar, P.P. & Francis, B.A. (1989) State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 34(8). pp. 831–847.
8. Khargonekar, P.P. & Rotea, M.A. (1991) Mixed H_2/H_∞ control: a convex optimization approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 36(7). pp. 824–831.
9. Kogan, M.M. (2016) Optimal discrete-time H_∞/γ_0 filtering and control under unknown covariances. *International Journal of Control*. 89(4). pp. 691–700. DOI: 10.1080/00207179.2015.1091511
10. Balandin, D.V. & Kogan, M.M. (2007) *Sintez zakonov upravleniya na osnove lineynykh matrichnykh neravenstv* [Synthesis of control laws based on linear matrix inequalities]. Moscow: Fizmatlit.
11. Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V. & Shcherbakov, P.S. (2013) An LMI approach to structured sparse feedback design in linear control systems. *Proceedings 12th European Control Conference*. Zurich. pp. 833–838.
12. Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V. & Shcherbakov, P.S. (2014) *Upravlenie lineynymi sistemami pri vneshnikh vozmushcheniyakh: tekhnika lineynykh matrichnykh neravenstv* [Control of linear systems under external disturbances: technique of linear matrix inequalities]. Moscow: Lenand.
13. Balandin, D.V., Kogan, M.M., Krivdina, L.N. & Fedukov, A.A. (2014) Design of generalized discrete-time H_∞ -optimal control over finite and infinite intervals. *Automation and Remote Control*. 75(1). pp. 1–17.
14. Zubov, V.I. & Zubov, I.V. & Zubova, A.F. (2014) The investigation of robust behavior interval polynomials. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva – Middle Volga Mathematical Society Journal*. 16(2). pp. 114–117.
15. Preparata, F. & Shamos, M. (1985) *Computational Geometry. An Introduction*. New York: Springer-Verlag.

Информация об авторе:

Паршуков Андрей Николаевич – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры «Электроэнергетика» Тюменского индустриального университета (Тюмень, Россия). E-mail: anparshukov@mail.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Information about the author:

Parshukov Andrej N. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation). E-mail: anparshukov@mail.ru

The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 24.12.2021; принята к публикации 30.08.2022

Received 24.12.2021; accepted for publication 30.08.2022