

Научная статья

УДК 681.513

doi: 10.17223/19988605/60/2

Управление ляпуновским спектром дискретных систем с хаотической динамикой

Владимир Николаевич Шашихин*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия, shashihin@bk.ru*

Аннотация. Рассматривается методика синтеза стабилизирующих управлений для дискретных нелинейных систем с хаотической динамикой. Подавление хаоса основано на формировании спектра характеристических показателей Ляпунова путем введения обратной связи по фазовому вектору. Параметры регулятора, обеспечивающего устойчивость особых точек или предельного цикла, вычисляются с применением метода модального управления. Приведен пример использования предлагаемого метода для синтеза управления дискретным осциллятором Ресслера.

Ключевые слова: дискретные нелинейные системы; хаотическая динамика; синтез обратной связи; стабилизация особых точек

Для цитирования: Шашихин В.Н. Управление ляпуновским спектром дискретных систем с хаотической динамикой // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 60. С. 13–20. doi: 10.17223/19988605/60/2

Original article

doi: 10.17223/19988605/60/2

Control of the Lyapunov spectrum of discrete systems with chaotic dynamics

Vladimir N. Shashikhin*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation, shashihin@bk.ru*

Abstract. One of the most topical problems of the modern theory of nonlinear systems is the stabilization of chaotic regimes or the transformation of chaotic motion into regular motion (limit cycle or motion to a singular point). The search for a solution to this problem proceeds along different directions. One of the directions is connected with the application of programmed control based on external resonance perturbations or internal parametric perturbations. The second group of so-called combined control methods combines program control and feedback control.

The paper considers the problem of suppressing chaos by forming the required spectrum of characteristic Lyapunov exponents in a closed nonlinear discrete system. The spectrum is formed by introducing feedback with respect to the phase vector. The feedback parameters are calculated using the technique of the modal control synthesis.

The mathematical model of a nonlinear dynamic system is the difference equation:

$$x(k+1) = F(x(k)) + Bu(k), \quad x(k_0) = x_0.$$

When the components of the function $F(x(k)) = [f_i(x(k))]_{i=1}^n$ are differentiable in the neighborhood of the reference state x^* , this equation is reduced to the linear form: $\bar{x}(k+1) = J(x^*)(\bar{x}(k)) + Bu(k), \quad \bar{x}(k_0) = x_0.$

The problem of controlling the Lyapunov spectrum is to determine the feedback from the phase vector of a nonlinear discrete system such that the closed system has a spectrum equal to the required spectrum. The required spectrum is determined by the problem being solved: stabilization of a singular point or stabilization of a limit cycle. For hyperbolic systems, the Grobman--Hartman theorem holds that a linearized system provides comprehensive infor-

mation on the behavior of a nonlinear system and the stability of singular points of discrete nonlinear systems is determined by the eigenvalues of the Jacobi matrix, which must satisfy the condition: $|\mu_i(J(x^0))| < 1, i = \overline{1, n}$.

Calculation of the feedback coefficient using modal control makes it possible to ensure the equality of the eigenvalues of the matrix of the closed system to a given set of real (complex) numbers, the moduli of which are less than one. The work uses the modal control synthesis based on the reduction of the original system to the canonical Frobenius basis. For a discrete linear system, the parameters of the linear feedback control law: $u(k) = -l^T x(k)$, providing the given values of the roots of the characteristic equation of the closed system are calculated by the formula: $l = (Q^T)^{-1}(\bar{a} - \bar{a}^*)$, here $\bar{a}$ is the vector of the coefficients of the characteristic equation of the Jacobi matrix, whereas $\bar{a}^*$ is the vector of the coefficients of the required characteristic equation. The calculated parameters of the controller also determine the feedback in the original nonlinear system.

As an example, the problem of controlling the Lyapunov spectrum for stabilizing a singular point and a limit cycle of the discrete Ressler oscillator is considered. The spectrum of Lyapunov characteristic exponents of the initial nonlinear system contains positive, close to zero and negative Lyapunov characteristic exponents. Thus, the Ressler oscillator has a chaotic regime.

For the desired value of the highest characteristic Lyapunov exponent $\chi_1^* < 0$, the spectrum has only negative characteristic Lyapunov exponents and the attractor of the feedback system is a stable singular point.

If the desired value of the highest characteristic Lyapunov exponent $\chi_1^*(G) = 0$, then the spectrum of characteristic Lyapunov exponents of the closed system contains zero (close to zero) and two negative exponents, which testifies to the suppression of chaos and the transition to periodic motion, a limit cycle.

Thus, a technique for the synthesis of stabilizing control for a nonlinear discrete system is proposed, which ensures the suppression of chaos in the system and the formation of a regular regime in the form of a singular point or a limit cycle. The problem of suppressing chaos is solved by forming a given spectrum of Lyapunov characteristic exponents by introducing feedback with respect to the phase coordinates of the nonlinear system.

Keywords: discrete nonlinear systems; chaotic dynamics; feedback synthesis; stabilization of singular points

For citation: Shashikhin, V.N. (2022) Control of the Lyapunov spectrum of discrete systems with chaotic dynamics. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 60. pp. 13–20. doi: 10.17223/19988605/60/2

Одна из важнейших проблем современной теории нелинейных систем состоит в стабилизации хаотических режимов или преобразовании хаотического движения в регулярное движение (предельный цикл или движение к особой точке). Поиск решения данной проблемы идет по различным направлениям. Одно из направлений связано с применением программного управления, основанного на внешних резонансных возмущениях [1] либо внутренних параметрических возмущениях [2]. Вторая группа, так называемые методы комбинированного управления [3], сочетает в себе программное управление и управление с обратной связью.

Широкое развитие получили и методы на основе обратной связи, которые были исторически первыми, но остаются актуальными в настоящее время. К ним относится метод линеаризации Пуанкаре (OGY-метод [4]) и обратная связь с запаздыванием (метод Пирагаса [5]) для стабилизации периодической орбиты). Все эти методы имеют свои достоинства и недостатки, связанные с точностью модели системы, необходимостью подбора параметров обратной связи, неполным учетом специфических свойств хаотических процессов.

Для управления системами с хаотической динамикой в условиях действия параметрических и внешних возмущений в настоящее время используется достаточно большой спектр методов теории автоматического управления. К ним можно отнести: ПИД-регуляторы [6, 7]; регуляторы, обеспечивающие робастную устойчивость [8]; адаптивные регуляторы [9]. Широкое распространение получил синергетический подход на основе аналитического конструирования агрегированных регуляторов [10].

В работе рассматривается задача подавления хаоса путем формирования в замкнутой нелинейной дискретной системе требуемого спектра характеристических показателей Ляпунова, соответствующего стабилизации особых точек или предельного цикла. Ляпуновский спектр формируется введением обратной связи по фазовому вектору. Параметры обратной связи вычисляются с использованием методики синтеза модального управления [11].

1. Постановка задачи

В определенных ситуациях для моделирования системы достаточно указать ее состояние в заданные дискретные моменты времени. В этом случае в качестве эволюционного оператора можно использовать функцию, определяющую состояние системы в дискретные моменты времени через ее состояние в предыдущий момент. При этом математической моделью динамической системы служит разностное уравнение с заданным начальным условием

$$x(k+1) = F(x(k)) + Bu(k), \quad x(k_0) = x_0, \quad (1)$$

где $k \in Z$ – дискретное время; Z – множество целых чисел; $x(k) \in R^n$ – фазовый вектор в момент времени k ; $u(k) \in R^m$ – вектор управляющих воздействий в момент времени k ; $F(x(k)) = (f_1(x(k)), f_2(x(k)), \dots, f_n(x(k)))^T$ – вектор-функция $F(x(k)): Z \otimes R^n \rightarrow R^n$.

Для траекторий динамической системы (1) может выполняться одна из двух возможностей:

– либо при некотором $k \neq 0$ $\varphi(k, x_0) = x_0$, в этом случае существует наименьшее натуральное $k \neq 0$ такое, что $\varphi(k + k_0, x_0) = \varphi(k, x_0)$ для всех $k \in Z$, сама точка x_0 называется периодической точкой периода k_0 , а ее траектория состоит из k_0 различных точек (при $k_0 = 1$ точка x_0 называется неподвижной точкой);

– либо $\varphi(k, x_0) \neq x_0$ для всех $k \neq 0$, в этом случае траектория x_0 состоит из счетного множества различных точек.

Пусть уравнение (1) описывает отклонения фазовых координат нелинейного дискретного объекта от некоторого опорного состояния x^* . Используя формулу Тейлора в предположении дифференцируемости компонент функции $F(x(k)) = [f_i(x(k))]_{i=1}^n$ в окрестности опорного состояния x^* , преобразуем уравнение (1) к линейному виду:

$$\bar{x}(k+1) = J(x^*)(\bar{x}(k)) + Bu(k), \quad \bar{x}(k_0) = x_0, \quad (2)$$

где $J(x^*)$ – матрица Якоби векторной функции $F(x(k))$:

$$J(x^*) = \begin{bmatrix} \partial f_1(x(k)) / \partial x_1(k) & \dots & \partial f_1(x(k)) / \partial x_n(k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial f_n(x(k)) / \partial x_1(k) & \dots & \partial f_n(x(k)) / \partial x_n(k) \end{bmatrix}_{x(k)=x^*}. \quad (3)$$

Для произвольного решения дискретной системы характеристический показатель Ляпунова определяется формулой

$$\chi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} [k^{-1} \ln \|x(k)\|].$$

Спектр Ляпунова нелинейной дискретной системы (1)

$$\sigma(F) = \{\chi_i(F), i = \overline{1, n}\}$$

состоит из n различных упорядоченных по убыванию характеристических показателей Ляпунова

$$\chi_1(F) \geq \chi_2(F) \geq \dots \geq \chi_n(F).$$

Задача управления спектром Ляпунова состоит в определении обратной связи по фазовому вектору нелинейной дискретной системы

$$u(k) = -L^* x(k), \quad L^* \in R^{m \times n} \quad (4)$$

такой, чтобы замкнутая нелинейная система

$$x(k+1) = F(x(k)) - BL^* x(k), \quad x(k_0) = x_0 \quad (5)$$

имела спектр

$$\sigma(F - BL^*) = \{\chi_i(F - BL^*), i = \overline{1, n}\}, \quad (6)$$

равный требуемому спектру

$$\sigma(G) = \{\chi_i(G), i = \overline{1, n}\}. \quad (7)$$

Для нелинейной системы (5) линеаризованная система (2) при управлении (4) будет иметь вид:

$$\bar{x}(k+1) = (J(x^*) - BL^*)\bar{x}(k) = A_z \bar{x}(k), \quad \bar{x}(k_0) = \bar{x}_0, \quad (8)$$

где $A_z = (J(x^*) - BL^*)$ – матрица замкнутой системы.

2. Формирование спектра замкнутой системы

Требуемый (желаемый) спектр (7) определяется решаемой задачей – стабилизации особой точки или стабилизации предельного цикла.

Стабилизация особой точки. Особая точка дискретной нелинейной системы (1) удовлетворяет соотношению $x^0 = F(x^0)$. Особые точки, в которых у матрицы Якоби (3) нет собственных значений $\mu_i(J(x^0))$ таких, что $|\mu_i(J(x^0))| = 1$, называются гиперболическими, и для них, как и в случае непрерывных систем, справедлива теорема Гробмана–Хартмана [12] о том, что линеаризованная система (8) дает исчерпывающую информацию относительно поведения нелинейной системы (5) и устойчивость особых точек дискретных нелинейных систем определяется собственными значениями матрицы Якоби, которые должны удовлетворять условию

$$|\mu_i(J(x^0))| < 1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Вычисление коэффициента обратной связи с использованием модального управления позволяет обеспечить равенство собственных значений матрицы замкнутой системы (8) наперед заданному набору вещественных (комплексных) чисел, удовлетворяющих условию (9). В работе используется синтез модального управления на основе приведения исходной системы к каноническому базису Фробениуса [13].

Рассмотрим дискретную линейную систему

$$x(k+1) = Ax(k) - bu(k), \quad x(k_0) = x_0, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad (10)$$

для которой необходимо определить параметры линейного закона управления с обратной связью

$$u(k) = -l^T x(k), \quad (11)$$

обеспечивающего заданные значения корней характеристического уравнения замкнутой системы

$$x(k+1) = Ax(k) - bl^T x(k) = (A - bl^T)x(k), \quad x(k_0) = x_0, \quad (A - bl^T) = A_z \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (12)$$

т.е. равенство спектра матрицы A_z требуемому (желаемому) спектру

$$\rho(A_z) = \{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_{n-1}^*, \lambda_n^*\}.$$

Система (10) соответствует линеаризованной системе (8) исходной нелинейной системы. По требуемому спектру вычисляются коэффициенты характеристического уравнения, имеющего желаемые корни.

Коэффициент обратной связи (11) вычисляется по формуле

$$l^* = (Q^T)^{-1}(\vec{a} - \vec{a}^*). \quad (13)$$

Вычисленные параметры регулятора определяют обратную связь для системы, заданной соотношениями (12). Здесь $\vec{a}$ – вектор коэффициентов характеристического уравнения матрицы Якоби, а $\vec{a}^*$ – вектор коэффициентов требуемого характеристического уравнения, корни которого равны требуемым собственным значениям матрицы Якоби.

Коэффициент обратной связи (13) используется для управления спектром характеристических показателей Ляпунова нелинейной дискретной системы (5).

3. Исследование нелинейной системы

Рассмотрим задачу управления спектром Ляпунова для стабилизации особой точки и предельного цикла дискретного осциллятора Ресслера [14]

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= x_1(k) - \varepsilon[x_2(k) + x_3(k)], \\x_2(k+1) &= x_2(k) + \varepsilon[x_1(k) + ax_2(k)], \\x_3(k+1) &= x_3(k) + \varepsilon b + \varepsilon[x_1(k) - r]x_3(k).\end{aligned}\quad (14)$$

при значениях параметров: $a = 0,1042$; $b = 0,2000$; $r = 9,0000$; $\varepsilon = 0,1000$.

Дискретный осциллятор Ресслера имеет две особые точки:

$$x_1^* = (0,0070 \quad -0,0351 \quad 0,0351); \quad x_2^* = (5,6930 \quad -28,4649 \quad 28,4649),$$

а матрица Якоби равна

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z & 0 & x - c \end{bmatrix}.$$

Собственные числа матрицы Якоби в особых точках:

$$\rho(J(x_1^*)) = \begin{cases} \mu_1 = 0,0970 + 0,9952i, \\ \mu_2 = 0,0970 - 0,9952i, \\ \mu_3 = -5,6870, \end{cases} \quad \rho(J(x_2^*)) = \begin{cases} \mu_1 = 5,4280i, \\ \mu_2 = -5,4280i, \\ \mu_3 = 0,1930. \end{cases}$$

Модули собственных чисел матрицы Якоби в особых точках равны

$$\begin{aligned}|\mu_1| &= 0,9999 < 1, \quad |\mu_2| = 0,9999 < 1, \quad |\mu_3| = 5,6870 > 1, \\ |\mu_1| &= 5,4280 > 1, \quad |\mu_2| = 5,4280 > 1, \quad |\mu_3| = 0,193 < 1.\end{aligned}$$

Так как для каждой особой точки есть собственные числа матрицы Якоби, модуль которых больше единицы, то особые точки являются неустойчивыми. Спектр характеристических показателей Ляпунова системы (14) имеет вид:

$$\sigma(F) = \{\chi_1(F) = 0,07094, \chi_2(F) = 0,01841, \chi_3(F) = -5,44527\},$$

и содержит положительный, близкий к нулю и отрицательный характеристические показатели Ляпунова. Таким образом, система (14) является хаотической. На рис. 1 представлен аттрактор дискретного осциллятора Ресслера без управляющего воздействия.

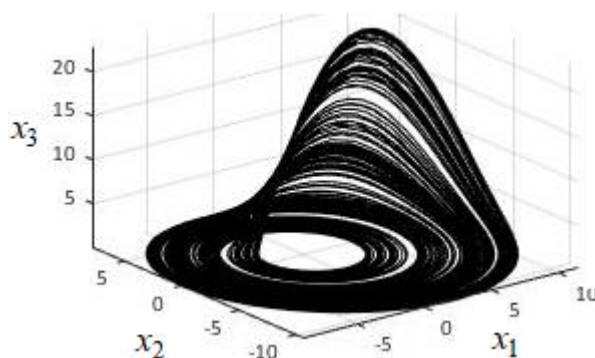


Рис. 1. Странный аттрактор дискретного осциллятора Ресслера
Fig. 1 The strange attractor of the discrete Ressler oscillator

Модель дискретного осциллятора Ресслера с управлением может быть представлена в виде системы (1).

Стабилизация особой точки. Стабилизируем дискретный осциллятор Ресслера так, чтобы его аттрактором была устойчивая особая точка. Для этого нужно выбрать старший характеристический показатель Ляпунова в области отрицательных значений. Выберем желаемое значение старшего ха-

рактического показателя Ляпунова $\chi_1^* < 0$. Задавая значение старшего показателя Ляпунова $\bar{\chi}_{1i} = -0,1$, вычисляется коэффициент обратной связи с использованием формулы (13):

$$l^* = (8,4509 \quad 2,1135 \quad -14,5473)$$

На рис. 2 представлен фазовый портрет замкнутой синтезированной управлением системы с начальной точкой $x_0 = [0 \quad 0 \quad 0]^T$. В данном случае аттрактором системы с обратной связью (11) является устойчивая особая точка.

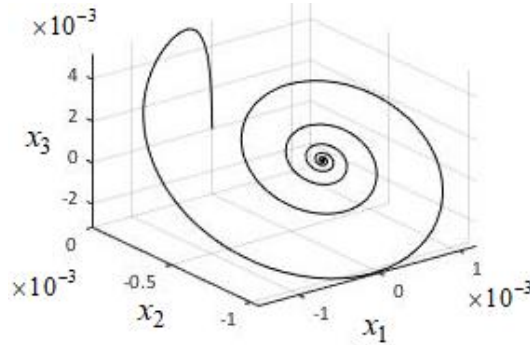


Рис. 2. Стабилизация особой точки дискретного осциллятора Ресслера
Fig. 2. Stabilization of a singular point of a discrete Ressler oscillator

Спектр характеристических показателей Ляпунова (6) системы (14) с управлением $u(t) = -l^* x(t)$ состоит из отрицательных характеристических показателей Ляпунова

$$\sigma(F - bl^*) = \{ \chi_1 = -0,11004, \chi_2 = -0,11022, \chi_3 = -19,82511 \},$$

что свидетельствует об отсутствии хаоса в системе.

Стабилизация предельного цикла. Выберем желаемое значение старшего характеристического показателя Ляпунова $\chi_1^*(G) = 0$ для того, чтобы аттрактором стабилизированной системы был предельный цикл.

Коэффициент обратной связи l^* , вычисленный по формуле (13), равен:

$$l^* = (0,0516 \quad -0,5543 \quad -0,8728).$$

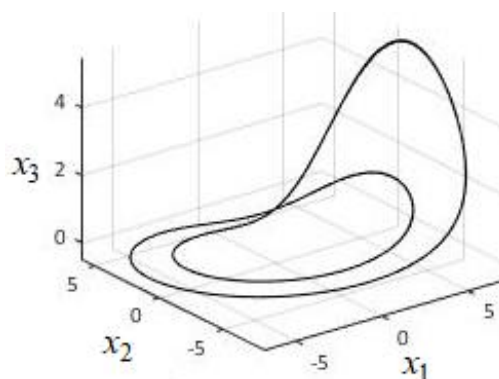


Рис. 3. Предельный цикл дискретного осциллятора Ресслера с обратной связью
Fig. 3. Limit cycle of a discrete Ressler oscillator with feedback

Спектр характеристических показателей Ляпунова замкнутой системы содержит нулевой (близкий к нулевому) и два отрицательных показателя:

$$\sigma(F - Bl^*) = \{ \chi_1 = -0,00067, \chi_2 = -0,13061, \chi_3 = -6,12021 \},$$

что свидетельствует о подавлении хаоса в системе с обратной связью и переходе к периодическому движению. На рис. 3 представлен аттрактор стабилизированной системы, являющийся предельным циклом.

Заключение

Предложена методика синтеза стабилизирующего управления для нелинейной дискретной системы, которая обеспечивает подавление хаоса в системе и формирование регулярного режима в виде особой точки или предельного цикла. Задача подавления хаоса решается за счет формирования заданного спектра характеристических показателей Ляпунова путем введения обратной связи по фазовым координатам нелинейной системы. Коэффициент обратной связи определяется с использованием метода модального управления на основе канонической формы Фробениуса. Рассмотренный пример стабилизации дискретного осциллятора Ресслера подтверждает работоспособность предложенного метода управления нелинейной системой с хаотической динамикой.

Список источников

1. Лоскутов А.Ю. Проблемы нелинейной динамики II. Подавление хаоса и управление динамическими системами // Вестник Московского университета. Сер. 3. Физика. Астрономия. 2001. № 3. С. 3–21.
2. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. М. : Едиториал УРСС, 2004. 320 с.
3. Jackson E.A., Grosu I. An OPCL control of complex dynamic system // Physica. D. 1995. V. 85. P. 1–9.
4. Ott E., Grebogi C., Yorke G. Controlling chaos // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64, № 11. P. 1196–1199.
5. Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback // Phys. Lett. A. 1992. V. 170. P. 421–428.
6. Ибатуллин А.А., Огудов А.А., Хакимов Р.А. Разработка модели нечеткого ПИД-регулятора контура управления температуры в колонне деизобутанизации // Омский научный вестник. 2017. Т. 151, № 1. С. 124–130.
7. Babu D.C., Kumar D.B.S., Sree R.P. Tuning of PID controllers for unstable systems using direct synthesis method // Int. Chem. Eng. 2017. V. 50, № 3. P. 215–241.
8. Ghaffari V. A robust control system scheme based on model predictive controller (MPC) for continuous-time systems // Opt. Control Applic. Meth. 2017. V. 38, № 6. P. 1032–1041.
9. Petre E., Selisteanu D., Roman M. Nonlinear robust adaptive control strategies for lactic fermentation process // J. Chem. Technol. Biotechnol. 2018. V. 93, № 2. P. 518–526.
10. Колесников А.А. Прикладная синергетика: основы системного синтеза. Таганрог : Изд-во ТТИ ЮФУ, 2007. 384 с.
11. Budnik S.V., Shashihin V.N. Stabilization of nonlinear systems with dynamic chaos // Automatic Control and Computer Sciences. 2021. V. 55, № 3. P. 213–221.
12. Гробман Д. Гомеоморфизм систем дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1959. Т. 128, № 5. С. 880–881.
13. Shashihin V.N., Budnik S.V. Synthesis of control for nonlinear systems // Automatic Control and Computer Sciences. 2019. V. 53, № 2. P. 97–106.
14. Адилова А.Б., Савин А.В. Удвоение и разрушение торов в дискретном аналоге системы Ресслера // Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика : тез. докл. VI конф. молодых ученых. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2011. С. 82–83.

References

1. Loskutov, A.Yu. (2001) Problems of nonlinear dynamics II. Suppression of chaos and control of dynamic systems. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 3. Fizika. Astronomiya – Moscow University Physics Bulletin*. 3. pp. 3–21. (In Russian).
2. Magnitsky, N.A. & Sidorov, S.V. (2004) *Novye metody khaoticheskoy dinamiki* [New Methods of Chaotic Dynamics]. Moscow: Editorial URSS.
3. Jackson, E.A. & Grosu, I. (1990) An OPCL control of complex dynamic system. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 85. pp. 1–9. DOI: 10.1016/0167-2789(95)00171-Y
4. Ott, E., Grebogi, C. & Yorke, G. (1990) Controlling chaos. *Physical Review Letters*. 64(11). pp. 1196–1199.
5. Pyragas, K. (1992) Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physical Letters A*. 170. pp. 421–428.
6. Ibatullin, A.A., Ogudov, A.A. & Khakimov, R.A. (2017) Application of fuzzy-logical PID-regulator temperature control loop in isostripper column. *Omskiy nauchnyy vestnik – Omsk Scientific Bulletin*. 151(1). pp. 124–130. (In Russian).
7. Babu, D.C., Kumar, D.B.S. & Sree, R.P. (2017) Tuning of PID controllers for unstable systems using direct synthesis method. *International Chemical Engineering*. 50(3). pp. 215–241. DOI: 10.1080/00194506.2016.1255570
8. Ghaffari, V. (2017) A robust control system scheme based on model predictive controller (MPC) for continuous-time systems. *Optimal Control Applications and Methods*. 38(6). pp. 1032–1041. DOI: 10.1002/oca.2310
9. Petre, E., Selisteanu, D. & Roman, M. Nonlinear robust adaptive control strategies for lactic fermentation process. *Journal of Chemical Technology & Biotechnology*. 93(2). pp. 518–526. DOI: 10.1002/jctb.5383
10. Kolesnikov, A.A. (2007) *Prikladnaya sinergetika: osnovy sistemnogo sinteza* [Applied Synergetics: Foundations of Systemic Synthesis]. Taganrog: TTI SFU.
11. Budnik, S.V. & Shashihin, V.N. (2021) Stabilization of nonlinear systems with dynamic chaos. *Automatic Control and Computer Sciences*. 55(3). pp. 213–221. DOI: 10.3103/S0146411621030032

12. Grobman, D. (1959) Gomeomorfizm sistem differentsial'nykh uravneniy [Homeomorphism of Systems of Differential Equations]. *DAN SSSR*. 128(5). pp. 880–881.
13. Shashihin, V.N. & Budnik, S.V. (2019) Synthesis of control for nonlinear systems. *Automatic Control and Computer Sciences*. 53(2). pp. 97–106. DOI: 10.3103/S0146411619020068
14. Adilova, A.B. & Savin, A.V. (2011) Udvoenie i razrushenie torov v diskretnom analoge sistemy Resslera [Doubling and destruction of tori in a discrete analogue of the Ressler system]. *Nanoelektronika, nanofotonika i nelineynaya fizika* [Nanoelectronics, Nanophotonics and Nonlinear Physics]. Abstracts of the 6th Conference of Young Scientists. Saratov: Saratov State University. pp. 82–83.

Информация об авторе:

Шашихин Владимир Николаевич – профессор, доктор технических наук, профессор Высшей школы киберфизических систем и управления Института компьютерных наук и технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (Санкт-Петербург, Россия). E-mail: shashihin@bk.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Information about the author:

Shashikhin Vladimir N. (Doctor of Technical Sciences, Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation). E-mail: shashihin@bk.ru

The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 18.01.2022; принята к публикации 30.08.2022

Received 18.01.2022; accepted for publication 30.08.2022