

**В Е С Т Н И К
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2022

№ 80

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), Е.Г. Лазарева (отв. секретарь по разделу «Математика»), К.С. Рогаев (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, И.М. Васенин, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, Е.Л. Лобода, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, М.А. Шеремет, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Elena G. Lazareva (Executive Editor of the Mathematics Section), Konstantin S. Rogaeв (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenchikov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Egor L. Loboda, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Mikhail A. Sheremet, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесён в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://journals.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Аметова В.С., Лазарев В.Р. О свойстве конечного носителя гомеоморфизма Гулько–Хмылёвой	5
Бозиев О.Л. О линеаризации гиперболических уравнений с интегральной нагрузкой в главной части с помощью априорной оценки их решений	16
Горбатова Ю.В. Конечные группы с перестановочными строгими обобщенно максимальными подгруппами	26

МЕХАНИКА

Батуев С.П., Дьячковский А.С., Радченко П.А., Радченко А.В., Саммель А.Ю., Чупашев А.В. Моделирование взаимодействия конических ударников с подводными преградами при наличии у ударников угла атаки	39
Бубенчиков М.А., Мамонтов Д.В., Ажеев С.А., Ажеев А.А. Вращение супермолекул вокруг промежуточной оси инерции	49
Глазунов А.С., Сизова А.А., Петрова И.Л. Оптимизация программы выведения полезной нагрузки на заданную траекторию	59
Григорьев А.С., Дмитриев А.И., Шилько Е.В. Оценка локальных механических свойств керамических огнеупоров на основе SiO ₂ с помощью микромасштабного моделирования	73
Зелепугин С.А., Толкачев В.Ф., Тырышкин И.М. Анализ эффективности противоударной стойкости двух групп керамических и композитных материалов	85
Подобная Е.Д., Попова О.П., Глазачев Д.О. Оценка траектории метеороидов по марсианским кластерам	97
Прокофьев В.Г. Периодические режимы горения термически сопряженных СВС-систем с термокапиллярным течением расплава	108
Рахимов А.А., Валиев А.А. Экспериментальное изучение влияния ультразвука на движение стеклянных шариков в ячейках Хеле-Шоу	117
Русяк И.Г., Суфиянов В.Г., Клюкин Д.А. Одномерная математическая модель колебаний ствола с поперечным сечением произвольной формы	133
Tastanov M.G., Utemissova A.A., Mayer F.F. Application of Monte Carlo methods for solving the regular and degenerate problem of two-phase filtration	147

CONTENTS

MATHEMATICS

Ametova V.S., Lazarev V.R. On the finite support property of Gul'ko–Khmyleva's homeomorphism	5
Boziev O.L. On linearization of hyperbolic equations with integral load in the main part using an a priori estimate of their solutions	16
Gorbatova Y.V. Finite groups with permuted strongly generalized maximal subgroups	26

MECHANICS

Batuev S.P., D'yachkovskiy A.S., Radchenko P.A., Radchenko A.V., Sammel' A.Yu., Chupashev A.V. Simulation of the interaction of conical impactors having an angle of attack with underwater barriers	39
Bubenchikov M.A., Mamontov D.V., Azheev S.A., Azheev A.A. Rotation of supermolecules around an intermediate axis of inertia	49
Glazunov A.S., Sizova A.A., Petrova I.L. Optimization of a program for launching the payload on a specified trajectory	59
Grigoriev A.S., Dmitriev A.I., Shil'ko E.V. Evaluation of local mechanical properties of SiO ₂ -based ceramic refractories using microscale modeling	73
Zelepugin S.A., Tolkachev V.F., Tyryshkin I.M. Analysis of impact resistance for two groups of ceramic and composite materials	85
Podobnaya E.D., Popova O.P., Glazachev D.O. Estimation of the trajectory of meteoroids from Martian clusters	97
Prokof'ev V.G. Periodic combustion regimes for thermally coupled SHS systems with a thermocapillary melt flow	108
Rakhimov A.A., Valiev A.A. An experimental study of the ultrasound effect on the motion of glass spherules in Hele-Shaw cells	117
Rusyak I.G., Sufiyarov V.G., Klyukin D.A. A one-dimensional mathematical model of barrel vibrations with arbitrary cross-sectional shapes	133
Tastanov M.G., Utemissova A.A., Mayer F.F. Application of Monte Carlo methods for solving the regular and degenerate problem of two-phase filtration	147

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 515.12

doi: 10.17223/19988621/80/1

MSC: 54C35

**О свойстве конечного носителя гомеоморфизма
Гулько–Хмылёвой****Валерия Серверовна Аметова¹, Вадим Ремирович Лазарев²**^{1, 2} *Томский государственный университет, Томск, Россия*¹ *ametovalera@gmail.com*² *lazarev@math.tsu.ru*

Аннотация. Установлено, что для гомеоморфизма пространств c_0 и $s \times c_0$, построенного С.П. Гулько и Т.Е. Хмылёвой, образ первого координатного функционала при сопряженном отображении не имеет конечного носителя. Как следствие получаем, что этот гомеоморфизм не имеет свойства конечного носителя. Кроме этого показано, что образы всех остальных координатных функционалов при сопряженном отображении имеют конечные носители.

Ключевые слова: топология поточечной сходимости, t -эквивалентность, функционал с конечным носителем, свойство конечного носителя

Благодарности: Авторы благодарят С.П. Гулько и Т.Е. Хмылёву, а также А.В. Осипова за благожелательное внимание к этой работе.

Для цитирования: Аметова В.С., Лазарев В.Р. О свойстве конечного носителя гомеоморфизма Гулько – Хмылёвой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 80. С. 5–15. doi: 10.17223/19988621/80/1

Original article

**On the finite support property of Gul'ko–Khmyleva's
homeomorphism**

Valeriya S. Ametova, Vadim R. Lazarev

^{1, 2} *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*¹ *ametovalera@gmail.com*² *lazarev@math.tsu.ru*

Abstract. This paper considers an example of a homeomorphism between spaces c_0 and $s \times c_0$ with the topology of pointwise convergence. This example was constructed by

Gul'ko and Khmyleva in 1986 to show that a compact space, namely, $\alpha\mathbb{N}$ can be t -equivalent to a non-compact space, namely, $\alpha\mathbb{N} \oplus \mathbb{N}$. The example of Gul'ko and Khmyleva cannot be uniform because Uspensky proved that compactness is preserved by uniform homeomorphisms of function spaces; moreover, it is not a linear homeomorphism.

In our paper, we study the question of whether the homeomorphism of Gul'ko and Khmyleva has the finite support property. Homeomorphisms with the finite support property are a broad generalization of linear homeomorphisms. However, they do not completely cover the class of uniform homeomorphisms. The main result of our work is the negative answer to the above question. It turned out that, to obtain this result, it suffices to consider the (continuous linear) functional $P_1 : C_p(\alpha\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ generated by the natural number 1 as an element of the Alexandroff compactification $\alpha\mathbb{N}$ of the natural series $\mathbb{N}$. We have proved that the image of the functional P_1 under the dual mapping in space $C_p C_p(\alpha\mathbb{N} \oplus \mathbb{N})$ does not have a finite support in the space $\alpha\mathbb{N} \oplus \mathbb{N}$, and the functional P_1 itself has a single-point support $\{1\}$. Thus, the interesting question of the preservation of compactness by homeomorphisms of spaces of continuous functions remains open.

As an additional result, it is established in this paper that the dual images of the remaining functionals P_n ($n > 1$) have finite supports in the space $\alpha\mathbb{N} \oplus \mathbb{N}$, similar to linear continuous functionals on the space $C_p(\alpha\mathbb{N} \oplus \mathbb{N})$.

Keywords: pointwise convergence topology, t -equivalence, functional with a finite support, finite support property

Acknowledgments: The authors thank S.P. Gul'ko and T.E. Khmyleva, as well as A.V. Osipov for their kind attention to this work.

For citation: Ametova, V.S., Lazarev, V.R. (2022) On the finite support property of Gul'ko–Khmyleva's homeomorphism. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 5–15. doi: 10.17223/19988621/80/1

1. Предварительные сведения и основные обозначения

Всюду в этой работе мы называем гомеоморфизмом Гулько–Хмылёвой пример гомеоморфного отображения

$$U : C_p(\alpha\mathbb{N} \oplus \mathbb{N}) \rightarrow C_p(\alpha\mathbb{N}), \quad (1.1)$$

построенный в 1986 г. С.П. Гулько и Т.Е. Хмылёвой в статье [1]. Этот пример показал, что результат В.В. Успенского [2] о сохранении компактности равномерными гомеоморфизмами пространств непрерывных функций нельзя обобщить на случай произвольного гомеоморфизма.

Данный результат, замечательный сам по себе, приобретает дополнительный интерес в связи с тем, что В.Р. Лазарев (см., напр.: [3]) выделил новый класс гомеоморфизмов пространств функций – так называемые гомеоморфизмы со свойством конечного носителя. Этот класс намного шире, чем линейные гомеоморфизмы, и несравним с классом равномерных гомеоморфизмов. Таким образом, возникает естественный вопрос: имеет ли гомеоморфизм (1.1) свойство конечного носителя. Ответу на этот вопрос и посвящена настоящая работа. Мы доказы-

ваем (теорема 4.1, следствие 4.2), что гомеоморфизм (1.1) не обладает свойством конечного носителя.

Для тихоновского топологического пространства X символ $C_p(X)$ означает множество всех непрерывных функций $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$, наделенное топологией поточечной сходимости. Таким образом, в частном случае, когда X – это компактификация $\alpha\mathbb{N}$ натурального ряда $\mathbb{N}$ одной точкой α , мы получаем известное пространство s сходящихся последовательностей, наделенное топологией покоординатной сходимости. Это пространство s топологически изоморфно (линейно гомеоморфно) пространству бесконечно малых последовательностей c_0 , поэтому, следуя статье [1], мы не различаем эти пространства. Аналогично, пространство $C_p(\alpha\mathbb{N} \oplus \mathbb{N})$ может рассматриваться как произведение $s \times c_0$ с топологией покоординатной сходимости. В [1] также используется известный факт, что c_0 линейно гомеоморфно своей счетной c_0 -степени, взятой относительно стандартной нормы $\|x\| = \|(x_1, \dots, x_n, \dots)\| = \max \{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Однако для других целей эта норма в [1] и в данной работе не используется.

В настоящей работе все топологические пространства заранее предполагаются тихоновскими, и поэтому, как известно, можно отождествить каждое такое пространство X с некоторым (замкнутым) подпространством в $C_p(C_p(X)) = C_p C_p(X)$. В силу этого каждая точка $x \in X$ рассматривается одновременно и как (линейный непрерывный) функционал $x: C_p(X) \rightarrow \mathbb{R}$, $x(\varphi) = \varphi(x)$. Говоря о непрерывных отображениях вида $f: C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$, мы по умолчанию предполагаем, что $f(0^X) = 0^Y$, где 0^X , 0^Y – функции, тождественно равные нулю на пространствах X , Y соответственно. (Это предположение справедливо, как легко убедиться, и для всех гомеоморфизмов, описанных в разд. 3.) В частности, если пространство Y состоит из одной точки, $Y = \{y\}$, то $C_p(Y)$ есть вещественная прямая $\mathbb{R}$, и мы имеем $f(0^X) = 0$. Запись $f = 0$ означает, что $f(\varphi) = 0$ для всех $\varphi \in C_p(X)$. Отображение, сопряженное к $u: C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$, – это отображение $u^*: C_p C_p(Y) \rightarrow C_p C_p(X)$, $u^*(f) = f \circ u$. Хорошо известно, что если u – гомеоморфизм, то u^* – изоморфизм топологических колец и, в частности, $u^*(0) = 0$.

За дополнительной информацией по терминам общей топологии можно обратиться к [4], а по специальным вопросам теории пространств непрерывных функций – к [5].

2. Отображения со свойством конечного носителя

В этом разделе мы описываем класс гомеоморфизмов со свойством конечного носителя и нужные для дальнейшего свойства этого класса.

Определение 2.1. Говорят, что функция $f: C_p(X) \rightarrow \mathbb{R}$ – функционал с конечным носителем, если существует конечное $K \subset X$ такое, что:

1. Для каждого $\varepsilon > 0$ и $\varphi \in C_p(X)$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\max\{|\varphi(x) - \psi(x)| : x \in K\} < \delta$, то $|f(\varphi) - f(\psi)| < \varepsilon$.

2. Для каждого $x_0 \in K$ множество $K \setminus \{x_0\}$ не удовлетворяет пункту 1.

При этом множество K называют носителем функционала f .

Из определения 2.1 легко вывести, что каждый линейный непрерывный функционал $f : C_p(X) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\varphi) = \lambda_1\varphi(x_1) + \dots + \lambda_n\varphi(x_n)$ имеет конечный носитель $\{x_1, \dots, x_n\}$. Справедливо следующее предложение, вытекающее непосредственно из определения 2.1.

Предложение 2.2. 1) $f = 0$ тогда и только тогда, когда носитель f пуст.

2) Каждый функционал с конечным носителем имеет единственный носитель.

Определение 2.3. Говорят, что отображение $f : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ имеет свойство конечного носителя, если $f^*(y)$ – функционал с конечным носителем для любого $y \in Y$.

Определение 2.4. Говорят, что гомеоморфизм $f : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ имеет свойство конечного носителя, если отображения f и f^{-1} имеют свойство конечного носителя.

Теорема 2.5. Пусть $f : C_p(Y) \rightarrow C_p(X)$, $g : C_p(Z) \rightarrow C_p(Y)$ – гомеоморфизмы со свойством конечного носителя. Тогда их композиция $h = f \circ g : C_p(Z) \rightarrow C_p(X)$ также имеет свойство конечного носителя.

Доказательство. Пусть $x \in X$, $K_x \subset Y$ – конечный носитель функционала $f^*(x)$ и $K_y \subset Z$ – конечные носители функционалов $g^*(y)$, где $y \in K_x$. Положим $K = \bigcup\{K_y : y \in K_x\}$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\varphi \in C_p(Z)$. Так как $f^*(x)$ – функционал с конечным носителем, то найдётся $\delta_1 > 0$ такое, что если $\psi \in C_p(Y)$ и $\max\{|g(\varphi)(y) - \psi(y)| : y \in K_x\} < \delta_1$, то

$$|f^*(x)(g(\varphi)) - f^*(x)(\psi)| = |f(g(\varphi))(x) - f(\psi)(x)| < \varepsilon.$$

Далее, так как каждый функционал $g^*(y)$ имеет конечный носитель, и множество $\{g^*(y) : y \in K_x\}$ конечно, то существует $\delta_2 > 0$ такое, что если $\eta \in C_p(Z)$ и $\max\{|\varphi(z) - \eta(z)| : z \in K\} < \delta_2$, то $|g^*(y)(\varphi) - g^*(y)(\eta)| = |g(\varphi)(y) - g(\eta)(y)| < \delta_1$ для всех $y \in K_x$. Следовательно,

$$|f(g(\varphi))(x) - f(g(\eta))(x)| = |(f \circ g)^*(x)(\varphi) - (f \circ g)^*(x)(\eta)| < \varepsilon,$$

что означает, что K удовлетворяет условию 1 определения 2.1. Если K удовлетворяет и условию 2, то доказательство завершено. Если же условие 2 не выполнено, то при некотором $z_0 \in K$ множество $K \setminus z_0$ удовлетворяет условию 1. Повторяя

это рассуждение, через конечное число шагов получим конечное множество $K' \subset Z$, удовлетворяющее условиям 1 и 2. Заметим, что множество $K' \subset Z$ не может оказаться пустым, так как если $x \in X$, то $x \neq 0$, а значит и $(f \circ g)^*(x) \neq 0$. По предположению 2.2, $K' \neq \emptyset$.

Ясно, что аналогичными рассуждениями можно доказать, что для каждого $z \in Z$ функционал $(g^{-1} \circ f^{-1})^*(z)$ также имеет конечный носитель. ■

Из доказательства теоремы 2.5 легко усмотреть справедливость следующего замечания.

Замечание 2.6. 1) Пусть в обозначениях и условиях теоремы 2.5 для некоторого $x \in X$ некоторое конечное множество $S(x) \subset Y$ удовлетворяет условию 1 из 2.1 (для функционала $f^*(x)$). Пусть также для каждого $y \in S(x)$ некоторое конечное множество $S(y) \subset Z$ удовлетворяет условию 1 из 2.1 (для функционала $g^*(y)$). Тогда (конечное) множество $S = \cup\{S(y) : y \in S(x)\}$ удовлетворяет условию 1 из 2.1 (для функционала $(g^* \circ f^*)(x) = (f \circ g)^*(x)$). Следовательно, S содержит (конечный, непустой) носитель функционала $(f \circ g)^*(x)$.

2) Ясно, что теорему 2.4 и пункт 1 данного замечания можно распространить на случай произвольного конечного числа непрерывных отображений со свойством конечного носителя.

3. Гомеоморфизм Гулько–Хмылёвой

В этом разделе для удобства читателя приводится краткое описание конструкции гомеоморфного отображения $U : s \times c_0 \rightarrow c_0$ из статьи [1]. Обратим внимание, что евклидова плоскость $\mathbb{R}^2$ рассматривается здесь с метрикой $\rho^+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0; +\infty)$, $\rho^+((r_1, r_2), (s_1, s_2)) = |s_1 - r_1| + |s_2 - r_2|$.

Выберем произвольное число $a > 0$ и положим $a_k = a \cdot (1 - 2^{-k})$, $k \in \mathbb{N}$. Для выбранного значения a зададим семейство гомеоморфизмов евклидовой плоскости $\varphi_{k,t} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ таких, что все отображения $\varphi_k : \mathbb{R}^2 \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi_k((r_1, r_2), t) = \varphi_{k,t}(r_1, r_2) = (\varphi_{k,t}^1(r_1, r_2); \varphi_{k,t}^2(r_1, r_2))$ непрерывны (т.е. являются автоизотопиями плоскости).

Итак, зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ и рассмотрим (очевидно, непрерывные) функции $z_k : c_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $z_k(x) = \min(x_2, \dots, x_k)$, и $t_k : c_0 \rightarrow [0; 1]$, где $t_1(x) \equiv 1$, а при $k > 1$

$$t_k(x) = \begin{cases} 0, & z_k(x) < a_k/2; \\ (2z_k(x) - a_k)/(a_{k+1} - a_k), & a_k/2 \leq z_k(x) \leq a_{k+1}/2; \\ 1, & z_k(x) > a_{k+1}/2. \end{cases} \quad (3.1)$$

Зададим значения $\varphi_{k,t}(r_1, r_2)$ при $r_1 > 0$, полагая затем $\varphi_{k,t}(-r_1, r_2) = \varphi_{k,t}(r_1, r_2)$, $\varphi_{k,t}(0, r_2) = (0, r_2)$. Пусть все отображения $\varphi_{k,t}$ тождественны при $r_2 \geq r_1 > 0$,

а также при $|r_1| < a_k$. При $r_1 \geq a_k$ и $r_2 < r_1$ каждая точка $r = (r_1, r_2)$ принадлежит единственному множеству $\Gamma_{b(r)} = [a_k; b(r)] \times \{-b(r)\} \cup \{b(r)\} \times [-b(r); b(r)]$, где

$$b(r) = b(r_1, r_2) = \max(r_1, -r_2). \quad (3.2)$$

Все отображения $\varphi_{k,t}$ определены так, что $\varphi_{k,t}(\Gamma_{b(r)}) = \Gamma_{b(r)}$. Действительно, пусть $J : (\Gamma_{b(r)}, \rho^+) \rightarrow [a_k; 3b(r)] \subset \mathbb{R}$ — такая изометрия, что $J([a_k; b(r)] \times \{-b(r)\}) = [a_k; b(r)]$, $J(\{b(r)\} \times [-b(r); b(r)]) = [b(r); 3b(r)]$. Рассмотрим функцию $\psi_{k1} : [a_k; 3b(r)] \rightarrow [a_k; 3b(r)]$ с графиком в виде ломаной с наименьшим возможным числом звеньев, такую, что $\psi_{k1}(a_k) = a_k$, $\psi_{k1}(3b(r)) = 3b(r)$, $\psi_{k1}(a_m) = 2b(r) + a_m/2$ при $a_k < a_m \leq b(r)$, $\psi_{k1}(b(r)) = 5b(r)/2$, $\psi_{k1}(a) = 2b(r) + a/2$ при $a \leq b(r)$. При $0 \leq t < 1$ полагаем $\psi_{kt}(s) = s + t \cdot (\psi_{k1}(s) - s)$, $s \in [a_k; 3b(r)]$. Наконец, пусть $\varphi_{k,t} = J^{-1} \circ \psi_{k,t} \circ J$ при всех $0 \leq t \leq 1$. Из такого определения $\varphi_{k,t}$ следует, что $\varphi_{k,0}$ — тождественное отображение, и при $a_k < a_m \leq b(r)$

$$\varphi_{k,t}(a_m, -b(r)) = (b(r), a_m/2). \quad (3.3)$$

Теперь для каждого $k \in \mathbb{N}$ зададим гомеоморфизм $u_k : c_0 \rightarrow c_0$ формулой

$$\begin{aligned} u_k(x) &= u_k(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots) = \\ &= \left(\varphi_{k,t_k}^1(x_1, x_{k+1}), x_2, \dots, x_k, \varphi_{k,t_k}^2(x_1, x_{k+1}), x_{k+2}, \dots \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Далее, определим гомеоморфизмы $v_n : c_0 \rightarrow c_0$ правилом $v_n = u_n \circ \dots \circ u_1$ и положим $v(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x)$ для всех $x \in c_0$. В статье [1] доказано (предложение 1 и лемма 2), что $v : G \rightarrow c_0$ — гомеоморфизм, где $G = \{x \in c_0 : x_1 < a\}$. Зададим еще отображение $u_0 : \mathbb{R} \times c_0 \rightarrow G$ правилом $u_0(r, x) = \left(\frac{2a}{\pi} \cdot \arctg r, x_1, \dots, x_n, \dots \right)$ и положим $u = v \circ u_0$. Понятно, что таким образом мы получили гомеоморфизм $u : \mathbb{R} \times c_0 \rightarrow c_0$. В [1] доказано, что при этом выполнено неравенство $\|u(r, x)\| - \|x\| < a$.

Полагая в описанном выше построении $a = 1/n$, получим гомеоморфизмы $U_n : \mathbb{R} \times c_0 \rightarrow c_0$ такие, что

$$\|U_n(r, x)\| - \|x\| < 1/n. \quad (3.5)$$

Наконец, зафиксируем некоторое разбиение множества $\mathbb{N}$ на бесконечные подмножества $N_1, N_2, \dots$, и для всякого $x \in c_0$ положим $x^n = x|_{N_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Легко проверить, что соответствие $x \leftrightarrow (x^1, \dots, x^n, \dots)$ задает топологический изоморфизм пространства c_0 на его счётную c_0 -степень $E = (c_0)_0^{\omega}$. Ввиду этого для $(r_1, \dots, r_n, \dots) \in s$ и $(x^1, \dots, x^n, \dots) \in E$ положим

$$U\left((r_1, \dots, r_n, \dots), (x^1, \dots, x^n, \dots)\right) = \left(U_1(r_1, x^1), \dots, U_n(r_n, x^n), \dots\right). \quad (3.6)$$

Неравенства (3.5) гарантируют, что каждое значение отображения U принадлежит $E \cong c_0$.

4. Основные результаты

В этом разделе мы рассматриваем проекционные (они же координатные) функционалы $P_n : C_p(\alpha\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ заданные формулой $P_n(x) = x_n$ для всех $x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in C_p(\alpha\mathbb{N})$. Как уже отмечалось в разд. 2, функционал такого вида имеет одноточечный носитель $\{n\}$. Так как мы условились не различать (линейно гомеоморфные) пространства $C_p(\alpha\mathbb{N})$ и c_0 , то проекционный функционал $P_\alpha : C_p(\alpha\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$, $P_\alpha(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ – нулевой функционал, и потому его носитель пуст (предложение 2.2). Так как при отображениях, сопряженных к гомеоморфизмам пространств функций, нулевой функционал переходит в нулевой функционал, это позволяет ниже не рассматривать функционал P_α и не следить за преобразованиями его носителя.

Ниже без изменений используются обозначения из предыдущего раздела.

Теорема 4.1. Функционал $u^*(P_1)$ не имеет конечного носителя.

Доказательство. Пусть, напротив, $K \subset \alpha\mathbb{N}$ – конечный носитель функционала $u^*(P_1)$. Тогда $K \setminus \{\alpha\}$ – конечное подмножество в $\mathbb{N} \cup \{0\}$, и потому существует натуральное число $n > 2$ такое, что $K \setminus \{\alpha\} \subset \{0, 1, \dots, n\}$. Покажем, что условие 1 определения 2.1 не выполняется.

Пусть $\varepsilon = 1/2$. Рассмотрим последовательности $y^1, y^2 \in \mathbb{R} \times c_0$, совпадающие на множестве K , а именно

$$y^1 = \left(\operatorname{tg} \frac{\pi a_n}{2a}, (0, \dots, 0, -(a+1), 0, \dots) \right), \quad y^2 = \left(\operatorname{tg} \frac{\pi a_n}{2a}, (0, \dots, 0, a_n, 0, \dots) \right),$$

где нули в начале последовательностей повторяются $n-2$ раза. По определению отображений u, u_0 (см. предыдущий раздел)

$$u^*(P_1)(y^1) = P_1(v(u_0(y^1))) = P_1(v(a_n, 0, \dots, 0, -(a+1), 0, \dots)),$$

$$u^*(P_1)(y^2) = P_1(v(u_0(y^2))) = P_1(v(a_n, 0, \dots, 0, a_n, 0, \dots)).$$

Для последовательностей $x^1 = (a_n, 0, \dots, 0, -(a+1), 0, \dots)$, $x^2 = (a_n, 0, \dots, 0, a_n, 0, \dots)$ имеем $x^1, x^2 \in \overline{G_n} \subset G_{n+1}$, где $G_k = \{x \in c_0 : x_1 < a_k\}$. Поэтому ([1. Лемма 2])

$$v(x^1) = v_n(x^1) = u_n(v_{n-1}(x^1)), \quad v(x^2) = v_n(x^2) = u_n(v_{n-1}(x^2)). \quad (4.1)$$

Дальнейшее рассуждение распадается на n шагов, начиная с последовательностей x^1, x^2 . На j -м шаге ($j > 1$) рассматриваются последовательности, полученные на шаге $j-1$. По формуле (3.1) для них находим значения функций

z_j, t_j . Затем рассматриваем точки плоскости, определяемые 1-й и $j+1$ -й координатами этих последовательностей, и по формулам (3.2), (3.3) находим значения гомеоморфизма φ_{j,t_j} в этих точках плоскости. Наконец, по формуле (3.4) находим значения гомеоморфизма u_j (новые последовательности) и переходим к шагу $j+1$.

На первом шаге, по определению, $t_1(x^1) = t_1(x^2) = 1$. По формулам (3.3) получаем $\varphi_{1,1}(a_n, 0) = (a_n, a_n/2)$. Подставляя эти координаты в формулу (3.4), получим $u_1(x^1) = (a_n, a_n/2, 0, \dots, 0, -(a+1), 0, \dots)$. После $n-2$ -го шага, учитывая равенство $v_{n-2} = u_{n-2} \circ \dots \circ u_1$, можем записать

$$v_{n-2}(x^1) = (a_n, a_n/2, \dots, a_n/2, -(a+1), 0, \dots),$$

$$v_{n-2}(x^2) = (a_n, a_n/2, \dots, a_n/2, a_n, 0, \dots).$$

Применим теперь u_{n-1} . Так как $z_{n-1}(a_n, a_n/2, \dots, a_n/2, -(a+1), 0, \dots) = z_{n-1}(v_{n-2}(x^1)) = a_n/2 = a_{(n-1)+1}/2$, то $t_{n-1}(v_{n-2}(x^1)) = 1$. Аналогично, из $z_{n-1} \times (a_n, a_n/2, \dots, a_n/2, a_n, 0, \dots) = a_n/2$ и формулы (3.1) следует, что $t_{n-1}(v_{n-2}(x^2)) = 1$. Поэтому $\varphi_{n-1,1}(a_n, -(a+1)) = (a+1, a_n/2)$, $\varphi_{n-1,1}(a_n, a_n) = (a_n, a_n)$ и, таким образом,

$$v_{n-1}(x^1) = u_{n-1}(v_{n-2}(x^1)) = (a+1, a_n/2, \dots, a_n/2, a_n/2, 0, \dots),$$

$$v_{n-1}(x^2) = (a_n, a_n/2, \dots, a_n/2, a_n, 0, \dots) = v_{n-2}(x^2).$$

Далее, для $i=1, 2$ имеем $z_n(v_{n-1}(x^i)) = a_n/2 < a_{n+1}/2$, что влечет $t_n(v_{n-1}(x^i)) = 0$, а это, в свою очередь означает, что отображение u_n оставляет точки $v_{n-1}(x^i)$, $i=1, 2$, неподвижными:

$$v_n(x^i) = u_n(v_{n-1}(x^i)) = v_{n-1}(x^i), \quad i=1, 2.$$

Учитывая (4.1), заключаем, что

$$v(x^1) = v(u_0(y^1)) = u(y^1) = (a+1, a_n/2, \dots, a_n/2, a_n/2, 0, \dots),$$

$$v(x^2) = v(u_0(y^2)) = u(y^2) = (a_n, a_n/2, \dots, a_n/2, a_n, 0, \dots).$$

Таким образом,

$$|u^*(P_1)(y^1) - u^*(P_1)(y^2)| = |P_1(u(y^1)) - P_1(u(y^2))| = a+1-a_n > 1 > \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Следствие 4.2. Гомеоморфизм u не имеет свойства конечного носителя.

Доказательство. Утверждение прямо следует из определений 2.3, 2.4 и теоремы 4.1. $\blacksquare$

Следствие 4.2 означает, что ни один гомеоморфизм U_n не имеет свойства конечного носителя.

Следствие 4.3. Гомеоморфизм U не имеет свойства конечного носителя.

Доказательство. Определение отображения U позволяет без потери общности считать, что $1 \in N_1$. Следовательно, для $r \in s$ и $x \in c_0$ имеем

$$\begin{aligned} U^*(P_1)(r, x) &= P_1(U(r, x)) = P_1(U_1(r_1, x^1), U_2(r_2, x^2), \dots) = \\ &= P_1(U_1(r_1, x^1)) = U_1^*(P_1)(r_1, x^1). \end{aligned}$$

По теореме 4.1, функционал $U_1^*(P_1)$ не имеет конечного носителя, следовательно, таков же функционал $U^*(P_1)$. Осталось применить определения 2.3, 2.4. ■

Замечательно, что остальные функционалы $u^*(P_n)$, $n > 1$, имеют конечные носители. При установлении этого факта мы будем опираться на замечание 2.6.

Лемма 4.4. При $n > 1$ носитель функционала $u_{n-1}^*(P_n)$ содержится в множестве $K(n) = \{1, \dots, n\}$.

Доказательство. Достаточно показать, что множество $K(n) = \{1, \dots, n\}$ удовлетворяет условию 1 определения 2.1. Пусть $\varepsilon > 0$, $x \in c_0$. Так как функции $z_{n-1}: c_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $t_{n-1}: c_0 \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно зависят от координат $x_2, \dots, x_{n-1}$ точки x (см. разд. 3), то отображение $\varphi_{n-1, t_{n-1}}: c_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ непрерывно зависит от координат $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ этой точки (см. там же). Поэтому, существует $\delta > 0$ такое, что для любого $x' \in W(x; 1, \dots, n; \delta)$ выполняется неравенство

$$\rho^+(\varphi_{n-1, t_{n-1}}(x')(x'_1, x'_n), \varphi_{n-1, t_{n-1}}(x)(x_1, x_n)) < \varepsilon.$$

Из формулы (3.4) теперь следует, что

$$\begin{aligned} |u_{n-1}^*(P_n)(x) - u_{n-1}^*(P_n)(x')| &= |P_n(u_{n-1}(x)) - P_n(u_{n-1}(x'))| = \\ &= |\varphi_{n-1, t_{n-1}}^2(x')(x'_1, x'_n) - \varphi_{n-1, t_{n-1}}^2(x)(x_1, x_n)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Это завершает доказательство. ■

Доказательства следующих двух лемм аналогичны доказательству леммы 4.4, и поэтому опускаются.

Лемма 4.5. Носитель функционала $u_{n-1}^*(P_1)$ содержится в множестве $K(1) = \{1, n\}$.

Лемма 4.6. При любом n и при любом $i \neq 1$, $i \neq n+1$ носитель функционала $u_n^*(P_i)$ содержится в множестве $K(i) = \{i\}$.

Замечание 4.7. Можно доказать, что в леммах 4.2–4.5 носители функционалов равны указанным множествам.

Теорема 4.8. При $m > 1$ функционалы $v^*(P_m)$ имеют конечные носители.

Доказательство. Фиксируем произвольное $m > 1$. Согласно замечанию 2.6, достаточно указать конечное подмножество S в $\alpha\mathbb{N}$, содержащее носитель $v^*(P_m)$, т.е. удовлетворяющее условию 1 определения 2.1. По определению отображения v , для всякого $x \in c_0$, $v(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \circ \dots \circ u_1)(x)$. Следо-

вательно, в силу непрерывности функционала P_m и определения гомеоморфизмов u_n при $n \geq m$, можем записать

$$\begin{aligned} v^*(P_m)(x) &= P_m(v(x)) = P_m\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \circ \dots \circ u_1)(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_m((u_n \circ \dots \circ u_1)(x)) = \\ &= P_m((u_{m-1} \circ \dots \circ u_1)(x)) = u_1^*\left(\dots u_{m-1}^*(P_m)\right)(x), \end{aligned}$$

т.е. $v^*(P_m) = u_1^*\left(\dots u_{m-1}^*(P_m)\right)$. Таким образом, по лемме 4.4 и замечанию 2.6, доста-

точно рассмотреть функционалы $u_1^*\left(\dots u_{m-2}^*(P_k)\right)$, где $k=1, \dots, m$, и для каждого из этих функционалов указать конечное множество, удовлетворяющее условию 1 определения 2.1. Леммы 4.4–4.6 показывают, что на втором шаге рассуждения придется рассмотреть функционалы $u_1^*\left(\dots u_{m-3}^*(P_k)\right)$, где по-прежнему $k=1, \dots, m$.

Леммы 4.4–4.6 гарантируют, что на следующих шагах набор функционалов $P_1, \dots, P_m$, к которым применяются сопряженные гомеоморфизмы, не изменится.

Стало быть, по замечанию 2.6, носитель функционала $v^*(P_m)$ содержится в объединении (конечных) множеств, каждое из которых удовлетворяет условию 1 определения 2.1 для функционала $u_1^*(P_k)$, $k=1, \dots, m$. Снова по леммам 4.4–4.6 заключаем, что достаточно взять объединение носителей функционалов $P_1, \dots, P_m$.

Таким образом, искомое множество – $S = \{1, \dots, m\}$. ■

Так как носители функционалов $u_0^*(P_k)$, $k=1, \dots, m$, в пространстве $\alpha\mathbb{N} \cup \{0\}$ отличаются от носителей $P_1, \dots, P_m$ в $\alpha\mathbb{N}$ самое большее присоединением точки 0, то получаем

Следствие 4.9. При $m > 1$ функционалы $u^*(P_m)$ имеют конечные носители.

5. Заключительные замечания

Итак, в предыдущем разделе мы установили, что гомеоморфизм Гулько–Хмылёвой не имеет свойства конечного носителя. Этот результат оставляет открытым следующий интересный

Вопрос 5.1. Пусть $u: C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ – гомеоморфизм со свойством конечного носителя. Верно ли, что если пространство X компактно, то и Y компактно?

Список источников

1. Гулько С.П., Хмылёва Т.Е. Компактность не сохраняется отношением t -эквивалентности // Математические заметки. 1986. Т. 39, № 6. С. 895–903.
2. Успенский В.В. Характеризация компактности в терминах равномерной структуры в пространстве функций // Успехи математических наук. 1982. Т. 37, № 4 С. 183–184.
3. Lazarev V.R. On the weak finite support property of homeomorphisms of function spaces on ordinals // Topology and Its Applications. 2020. V. 275. Art. 107012. doi: 10.1016/j.topol.2019.107012

4. Engelking R. General Topology. Warszawa : PWN, 1977. 626 p.
5. Tkachuk V.V. A C_p -Theory Problem Book : Topological and Function Spaces. New York : Springer, 2011. xv, 485 p. (Problem Books in Mathematics).

References

1. Gul'ko S.P., Khmyleva T.E. (1986) Compactness is not preserved by the t -equivalence relation. *Mathematical Notes*. 39(6). pp. 484–488. DOI: 10.1007/BF01157037.
2. Uspenskii V.V. (1982) A characterization of compactness in terms of uniform structure in a function space. *Russian Mathematical Surveys*. 37(4). pp. 143–144.
3. Lazarev V.R. (2020) On the weak finite support property of homeomorphisms of function spaces on ordinals. *Topology and Its Applications*. 275. p. 107012. DOI: 10.1016/j.topol.2019.107012.
4. Engelking R. (1977) *General Topology*. Warsaw: PWN.
5. Tkachuk V.V. (2011) *A C_p -Theory Problem Book*. *Topological and Function Spaces*. New York: Springer.

Сведения об авторах:

Аметова Валерия Серверовна – студент механико-математического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: ametovalera@gmail.com

Лазарев Вадим Ремирович – доцент кафедры математического анализа и теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: lazarev@math.tsu.ru

Information about the authors:

Ametova Valerya S. (Student, Faculty of Mechanics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ametovalera@gmail.com

Lazarev Vadim R. (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis and Theory of Functions, Faculty of Mechanics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lazarev@math.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 13.07.2022; принята к публикации 01.12.2022

The article was submitted 13.07.2022; accepted for publication 01.12.2022

Научная статья

УДК 517.956.35

MSC: 35L20, 35L72, 35D30

doi: 10.17223/19988621/80/2

О линеаризации гиперболических уравнений с интегральной нагрузкой в главной части с помощью априорной оценки их решений

Олег Людинович Бозиев

*Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-
Балкарского научного центра РАН, Нальчик, Россия, boziev@yandex.ru*

Аннотация. Устанавливаются априорные оценки решений одномерных неоднородных гиперболических уравнений с интегральной нагрузкой в главной части, имеющей вид $a(s) = s^p$, при $p = 1, 0.5$ и -1 , с неоднородными начальными и однородными граничными условиями. Здесь s – интеграл по пространственной переменной от квадрата модуля производной решения уравнения по x . Приводятся примеры линеаризации нагруженных уравнений подстановкой правых частей оценок вместо $a(s)$.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, интегральная нагрузка, априорная оценка, линеаризация

Для цитирования: Бозиев О.Л. О линеаризации гиперболических уравнений с интегральной нагрузкой в главной части с помощью априорной оценки их решений // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 80. С. 16–25. doi: 10.17223/19988621/80/2

Original article

On linearization of hyperbolic equations with integral load in the main part using an a priori estimate of their solutions

Oleg L. Boziev

*Kabardino-Balkarian State University, Institute of Computer Science and Problems of Regional
Management of Kabardino-Balkarian Science Center of the Russian Academy of Sciences,
Nalchik, Russian Federation, boziev@yandex.ru*

Abstract. This article describes a method for the linearization of one-dimensional inhomogeneous hyperbolic equations with an integral load in the main part. The integral load here is a function $a(s)$, where s is the integral of the squared modulus of the derivative of the solution of the equation in x over the spatial variable. It is noted that s is the norm

of the derivative of the desired solution in the Lebesgue space L_2 . This allows using an a priori estimate of the specified derivative to linearize the original loaded equation. To do this, the integral load $a(s)$ is replaced in the equation by the right side of the estimate established a priori. A priori estimates are established for the case of a linear function $a(s)$, as well as in two cases when $a(s)$ is not linear. In all cases, inhomogeneous initial and homogeneous boundary conditions of the second kind are considered. Examples of linearization of loaded equations by this method are given. The exact or approximate solution of the linearized equation found under the initial and boundary conditions of the loaded problem can be taken as an approximate solution of the original loaded equation.

Keywords: hyperbolic equation, integral load, a priori estimation, linearization

For citation: Bozиеv, O.L. (2022) On linearization of hyperbolic equations with integral load in the main part using an a priori estimate of their solutions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 16–25. doi: 10.17223/19988621/80/2

Введение

Моделирование ряда физических, биологических, экологических процессов приводит к начально-краевым задачам для уравнений гиперболического типа, содержащих в главной части интегральную нагрузку, под которой понимается некоторая функция $a(s)$, содержащая интеграл некоторой степени искомого решения или его производной. Таким является, например, уравнение

$$u_{tt} - a(s)u_{xx} = 0, \quad s = \int_{\Omega} |u_x|^2 dx.$$

Одним из первых исследований этого уравнения была работа [1], в которой при $\Omega = [0, l]$ «указывается прием решения некоторых краевых задач при помощи бесконечных систем дифференциальных уравнений». К числу более поздних работ, связанных с данным уравнением, относятся [2, 3]. В статьях [4, 5] и других исследуются вопросы однозначной разрешимости начально-краевых задач в многомерном случае, при этом в [5] уравнение дополнено младшими членами, один из которых является нелинейным.

Многомерное неоднородное уравнение

$$u_{tt} - a(s)u_{xx} = f, \quad s = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \quad \Omega \subset R^n,$$

рассматривалось в работах [6, 7]. В настоящее время подобное уравнение с младшими членами интенсивно исследуется. Среди большого количества последних работ можно указать [8–10]. В этих и других источниках практически важные нагруженные уравнения содержат функцию $a(s)$, аргумент которой, как нетрудно заметить, представляет собой норму производной искомого решения в пространстве $L_2(\Omega)$. Это приводит к мысли о возможности использования априорной оценки производной решения задачи в указанной норме для линеаризации исходного уравнения. Такой подход был использован в [11, 12] и некоторых других работах автора, в которых интегральная нагрузка содержится в младших членах уравнения и является нормой его решения в пространстве $L_p(\Omega)$, $p > 3$.

Целью настоящей работы является установление априорных оценок второй смешанной задачи с однородными граничными условиями для неоднородного

гиперболического уравнения с интегральной нагрузкой в главной части. Рассматривается линейный случай $a(s) = s$, а также нелинейные случаи $a(s) = \sqrt{s}$ и $a(s) = s^{-1}$. Приводятся примеры, в которых с целью линеаризации первоначального уравнения интегральная нагрузка заменяется некоторой известной функцией от t , определяемой посредством правой части априорной оценки.

1. Линейная интегральная нагрузка $a(s) = s$

Рассмотрим уравнение с линейной интегральной нагрузкой

$$u_{tt} - \|u_x\|_{2,\Omega}^2 u_{xx} = f(x, t), \quad (1)$$

в котором

$$\|u_x\|_{2,\Omega}^2 = \int_{\Omega} |u_x|^2 dx = s, \quad \Omega = [0, l],$$

при условиях

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2)$$

Теорема 1. Пусть функция $u \in H^1(\Omega)$ такая, что $u_t \in L_2(\Omega)$ является решением задачи (1), (2), $\varphi_1, \varphi_2, f \in L_2(\Omega)$. Тогда функция $\|u_x\|_{2,\Omega}^4$ ограничена константой, зависящей только от t .

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение (1) и функции u_t :

$$(u_{tt}, u_t) - \|u_x\|_{2,\Omega}^2 (u_{xx}, u_t) = (f, u_t).$$

Для отдельных членов имеем

$$\begin{aligned} (u_{tt}, u_t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (u_t)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|_{2,\Omega}^2, \quad (f, u_t) = \int_{\Omega} f u_t dx, \\ -(u_{xx}, u_t) &= - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} (u_x u_t) dx + \int_{\Omega} u_x u_{tx} dx = -(u_x u_t)|_{x=0}^{x=l} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} u_x^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x\|_{2,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Заметим также, что

$$-\|u_x\|_{2,\Omega}^2 (u_{xx}, u_t) = \|u_x\|_{2,\Omega}^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x\|_{2,\Omega}^2 = \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \left(\|u_x\|_{2,\Omega}^2 \right)^2 = \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|u_x\|_{2,\Omega}^4.$$

Приведенные преобразования приводят к равенству

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|u_x\|_{2,\Omega}^4 = \int_{\Omega} f u_t dx,$$

интегрируя которое получаем

$$2\|u_t\|_{2,\Omega}^2 + \|u_x\|_{2,\Omega}^4 = 4 \int_0^t \int_{\Omega} f u_t dx d\tau + 2\|u_t(x, 0)\|_{2,\Omega}^2 + \|u_x(x, 0)\|_{2,\Omega}^4.$$

Функцию под интегралом в правой части оценим по модулю и воспользуемся неравенством Коши с $\varepsilon = 0.5$:

$$4 \int_{\Omega} |f u_t| dx \leq 2 \left(\varepsilon \int_{\Omega} |f|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \right) = \|f\|_{2,\Omega}^2 + 2\|u_t\|_{2,\Omega}^2,$$

что позволяет перейти к неравенству

$$2\|u_t\|_{2,\Omega}^2 + \|u_x\|_{2,\Omega}^4 \leq 2\int_0^t \|u_t\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau + 2\|\varphi_2\|_{2,\Omega}^2 + \|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^4. \quad (3)$$

Опуская второе слагаемое левой части, получим

$$\|u_t\|_{2,\Omega}^2 \leq \int_0^t \|u_t\|_{2,\Omega}^2 d\tau + 0.5\int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \|\varphi_2\|_{2,\Omega}^2 + 0.5\|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^4.$$

Применяя к последнему одно из обобщений неравенства Гронуолла [13. С. 11], имеем

$$\begin{aligned} \|u_t\|_{2,\Omega}^2 &\leq 0.5\int_0^t e^\tau \int_0^\tau \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau_0 d\tau + \left(\|\varphi_2\|_{2,\Omega}^2 + 0.5\|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^4\right)(e^t - 1) + \\ &+ 0.5\int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \|\varphi_2\|_{2,\Omega}^2 + 0.5\|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^4. \end{aligned}$$

Это означает, что

$$\begin{aligned} \|u_t\|_{2,\Omega}^2 &\leq K_0(t), \\ K_0(t) &= 0.5\int_0^t \left(e^\tau \int_0^\tau \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau_0 + \|f\|_{2,\Omega}^2 \right) d\tau + \left(\|\varphi_2\|_{2,\Omega}^2 + 0.5\|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^4\right)e^t. \end{aligned}$$

Возвращаясь к неравенству (3), опустим в левой части первое слагаемое, а в правой части заменим $\|u_t\|_{2,\Omega}^2$ на $K_0(t)$. В результате получим оценку

$$\begin{aligned} \|u_x\|_{2,\Omega}^4 &\leq K(t), \\ K(t) &= 2\int_0^t K_0(\tau) d\tau + \int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau + 2\|\varphi_2\|_{2,\Omega}^2 + \|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^4, \end{aligned} \quad (4)$$

выполняющуюся для всех $t \in [0, T]$. Теорема 1 доказана.

Из (4) следует, что

$$\|u_x\|_{2,\Omega}^2 \leq \sqrt{K(t)}.$$

Выбирая равенство в данном выражении, подставим его правую часть в (1) и получим линейное уравнение

$$u_{tt} - \sqrt{K(t)}u_{xx} = f(x, t). \quad (5)$$

Пример 1. Пусть в условиях (2)

$$l = 1, \quad \varphi_1(x) = x(x-1), \quad \varphi_2(x) = x, \quad f(x, t) = xt. \quad (6)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^4 &= \left(\int_0^1 (2x-1)^2 dx\right)^2 = \frac{1}{9}, \quad \|\varphi_2\|_{2,\Omega}^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, \quad \int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau = \int_0^t \int_0^1 \tau^2 x^2 dx d\tau = \frac{t^3}{9}, \\ \int_0^t e^\tau \int_0^\tau \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau_0 d\tau + \int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau &= \frac{1}{9} \left((t^3 - 3t^2 + 6t - 6)e^t + t^3 + 6 \right), \end{aligned} \quad (7)$$

$$K_0(t) = \frac{1}{18} \left((t^3 - 3t^2 + 6t + 1)e^t + t^3 + 6 \right),$$

$$\int_0^t K_0(\tau) d\tau = \frac{1}{18} \left((t^3 - 6t^2 + 18t - 17)e^t + 0.25t^4 + 6t + 17 \right),$$

$$K(t) = \frac{1}{9} \left((t^3 - 6t^2 + 18t - 17)e^t + 0.25t^4 + t^3 + 6t + 24 \right).$$

Отметим, что $K(t) > 0$ при $t \geq 0$.

Подставляя в (5), переходим к линеаризованному уравнению

$$u_{tt} - \frac{1}{3} \sqrt{(t^3 - 6t^2 + 18t - 17)e^t + 0.25t^4 + t^3 + 6t + 24} u_{xx} = xt.$$

2. Нелинейная интегральная нагрузка $a(s) = \sqrt{s}$

При условиях (2) рассмотрим уравнение с нелинейной интегральной нагрузкой

$$u_{tt} - \|u_x\|_{2,\Omega} u_{xx} = f(x, t). \quad (8)$$

Теорема 2. Пусть функция $u \in H^1(\Omega)$ такая, что $u_t \in L_2(\Omega)$ является решением задачи (8), (2), $\varphi_{1x}, \varphi_2, f \in L_2(\Omega)$. Тогда функция $\|u_x\|_{2,\Omega}^3$ ограничена константой, зависящей только от t .

Доказательство. Запишем скалярное произведение (8) с u_t :

$$(u_{tt}, u_t) - \|u_x\|_{2,\Omega} (u_{xx}, u_t) = (f, u_t)$$

и заметим, что

$$-\|u_x\|_{2,\Omega} (u_{xx}, u_t) = \|u_x\|_{2,\Omega} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x\|_{2,\Omega}^2 = \|u_x\|_{2,\Omega}^2 \frac{d}{dt} \|u_x\|_{2,\Omega} = \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \|u_x\|_{2,\Omega}^3,$$

что приводит к соотношению

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \|u_x\|_{2,\Omega}^3 = \int_{\Omega} f u_t dx.$$

Интегрирование последнего дает

$$3\|u_t\|_{2,\Omega}^2 + 2\|u_x\|_{2,\Omega}^3 = 6 \int_0^t \int_{\Omega} f u_t dx d\tau + 3\|u_t(x, 0)\|_{2,\Omega}^2 + 2\|u_x(x, 0)\|_{2,\Omega}^3.$$

Функцию под интегралом в правой части оценим по модулю и применим к нему неравенство Коши с $\varepsilon = 0,5$:

$$6 \int_{\Omega} |f u_t| dx \leq 3 \left(\varepsilon \int_{\Omega} |f|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \right) = 1.5 \|f\|_{2,\Omega}^2 + 3\|u_t\|_{2,\Omega}^2.$$

Это позволяет перейти к неравенству

$$3\|u_t\|_{2,\Omega}^2 + 2\|u_x\|_{2,\Omega}^3 \leq 3 \int_0^t \|u_t\|_{2,\Omega}^2 d\tau + 1.5 \int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau + 3\|\varphi_2(x)\|_{2,\Omega}^2 + 2\|\varphi_{1x}(x)\|_{2,\Omega}^3. \quad (9)$$

Опуская второе слагаемое левой части, получим

$$\|u_t\|_{2,\Omega}^2 \leq \int_0^t \|u_t\|_{2,\Omega}^2 d\tau + 0.5 \int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \|\varphi_2\|_{2,\Omega}^2 + \frac{2}{3} \|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^3.$$

Применяя к последнему неравенство [13, С. 11], имеем

$$\|u_t\|_{2,\Omega}^2 \leq K_0(t).$$

$$K_0(t) = 0.5 \int_0^t \left(e^\tau \int_0^\tau \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau_0 + \|f\|_{2,\Omega}^2 \right) d\tau + \left(\|\varphi_2\|_{2,\Omega}^2 + \frac{2}{3} \|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^3 \right) e^t.$$

Возвращаясь к (9), опустим в левой части первое слагаемое, а в правой части заменим $\|u_t\|_{2,\Omega}^2$ на $K_0(t)$. Это приводит к оценке

$$\|u_x\|_{2,\Omega}^3 \leq K(t), \quad (10)$$

$$K(t) = 1.5 \left(\int_0^t \left(K_0(\tau) + 0.5 \|f\|_{2,\Omega}^2 \right) d\tau + \|\varphi_2\|_{2,\Omega}^2 \right) + \frac{2}{3} \|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^3,$$

выполняющейся для всех $t \in [0, T]$. Теорема 2 доказана.

Из (10) следует, что

$$\|u_x\|_{2,\Omega} \leq \sqrt[3]{K(t)}.$$

Выбор равенства в данном выражении позволяет перейти от (8) к линейному уравнению

$$u_{tt} - \sqrt[3]{K(t)} u_{xx} = f(x, t). \quad (11)$$

Пример 2. Пусть имеет место (6). Воспользовавшись (7), получаем

$$\|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^3 = \sqrt{27^{-1}} \approx 0.19245, \quad K_0(t) = \frac{1}{18} \left((t^3 - 3t^2 + 6t + 2.3094)e^t + t^3 + 6 \right),$$

$$\int_0^t K_0(\tau) d\tau = \frac{1}{18} \left((t^3 - 6t^2 + 18t - 15.69)e^t + 0.25t^4 + 6t + 17 \right),$$

$$K(t) = \frac{1}{12} \left((t^3 - 6t^2 + 18t - 15.69)e^t + 0.25t^4 + 0.6667t^3 + 6t + 24.5396 \right).$$

Подстановка в (10) приводит к линейному уравнению

$$u_{tt} - 0.4368 \sqrt[3]{(t^3 - 6t^2 + 18t - 15.69)e^t + 0.25t^4 + 0.6667t^3 + 6t + 24.5396} u_{xx} = xt.$$

3. Нелинейная интегральная нагрузка $a(s) = s^{-1}$

При условиях (2) рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - \|u_x\|_{2,\Omega}^{-2} u_{xx} = f(x, t). \quad (12)$$

Теорема 3. Пусть функция $u \in H^1(\Omega)$ такая, что $u_t \in L_2(\Omega)$, $\|u_x\|_{2,\Omega}^2 > 0$, является решением задачи (12), (2). Пусть, кроме того, $\varphi_{1x}, \varphi_2, f \in L_2(\Omega)$, $\|\varphi_{1x}(x)\|_{2,\Omega}^2 > 0$.

Тогда функция $\|u_x\|_{2,\Omega}^2$ ограничена константой, зависящей только от t .

Доказательство. Заметим, что в скалярном произведении (12) и функции u_t

$$(u_{tt}, u_t) - \|u_x\|_{2,\Omega}^{-2} (u_{xx}, u_t) = (f, u_t)$$

имеет место равенство

$$-\|u_x\|_{2,\Omega}^{-2} (u_{xx}, u_t) = \|u_x\|_{2,\Omega}^{-2} \frac{d}{dt} \|u_x\|_{2,\Omega}^2 = \frac{d}{dt} \ln \|u_x\|_{2,\Omega}^2.$$

Это позволяет записать уравнение

$$\frac{d}{dt} \left(\|u_t\|_{2,\Omega}^2 + \ln \|u_x\|_{2,\Omega}^2 \right) = 2 \int_{\Omega} f u_t dx,$$

интегрируя которое получим

$$\|u_t\|_{2,\Omega}^2 + \ln \|u_x\|_{2,\Omega}^2 = 2 \int_0^t \int_{\Omega} f u_t dx d\tau + \|u_t(x, 0)\|_{2,\Omega}^2 + \ln \|u_x(x, 0)\|_{2,\Omega}^4.$$

Применяя неравенство Коши, перейдем к неравенству

$$\|u_t\|_{2,\Omega}^2 + \ln \|u_x\|_{2,\Omega}^2 \leq \int_0^t \|u_t\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \|\varphi_2(x)\|_{2,\Omega}^2 + \ln \|\varphi_{1x}(x)\|_{2,\Omega}^2. \quad (13)$$

Опуская второе слагаемое левой части, получим

$$\|u_t\|_{2,\Omega}^2 \leq \int_0^t \|u_t\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \|\varphi_2\|_{2,\Omega}^2 + \ln \|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^2.$$

Очередное применение неравенства [13. С. 11] дает

$$\|u_t\|_{2,\Omega}^2 \leq K_0(t),$$

$$K_0(t) = \int_0^t \left(e^{\tau} \int_0^{\tau} \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau_0 + \|f\|_{2,\Omega}^2 \right) d\tau + \left(\|\varphi_2\|_{2,\Omega}^2 + \ln \|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^2 \right) e^t.$$

Возвращаясь к (13), опустим в левой части член $\|u_t\|_{2,\Omega}^2$, а в правой части заменим его на $K_0(t)$. В результате получим соотношение

$$\ln \|u_x\|_{2,\Omega}^2 \leq \int_0^t K_0(\tau) d\tau + \int_0^t \|f\|_{2,\Omega}^2 d\tau + \|\varphi_2(x)\|_{2,\Omega}^2 + \ln \|\varphi_{1x}(x)\|_{2,\Omega}^2.$$

Из него следует оценка

$$\|u_x\|_{2,\Omega}^2 \leq K(t), \quad (14)$$

$$K(t) = \exp \left(\int_0^t \left(K_0(\tau) + \|f\|_{2,\Omega}^2 \right) d\tau + \|\varphi_2(x)\|_{2,\Omega}^2 + \ln \|\varphi_{1x}(x)\|_{2,\Omega}^2 \right),$$

выполняющаяся для всех $t \in [0, T]$. Теорема 3 доказана.

Выберем в (14) верхнюю границу оценки и подставим в (12), получим

$$u_{tt} - K^{-1}(t) u_{xx} = f(x, t). \quad (15)$$

Пример 3. Пусть имеет место (6). С помощью (7) имеем

$$\ln \|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^2 = -1.0986, \quad K_0(t) = \frac{1}{9} \left((t^3 - 3t^2 + 6t - 12.8875)e^t + t^3 + 6 \right),$$

$$\int_0^t K_0(\tau) d\tau = \frac{1}{9} \left((t^3 - 6t^2 + 18t - 30.8875)e^t + 0.25t^4 + 6t + 24.8875 \right),$$

$$K(t) = \frac{1}{9} \left((t^3 - 6t^2 + 18t - 17)e^t + 0.25t^4 + t^3 + 6t + 24.1222 \right).$$

Отметим, что $K(t) \neq 0$ при $t \geq 0$.

Подстановка в (15) приводит к линейному уравнению

$$u_{tt} - 9 \left((t^3 - 6t^2 + 18t - 17)e^t + 0.25t^4 + t^3 + 6t + 24.1222 \right)^{-1} u_{xx} = xt.$$

Заключение

В работе установлены априорные оценки (4), (10) и (14) производных решений начально-краевых задач для одномерных неоднородных уравнений гиперболического типа с интегральной нагрузкой $a(s) = s^p$ в главной части при $p = 1, 0,5$ и -1 соответственно. Во всех случаях граничные условия второго рода являются однородными. Полученные оценки предназначены для линеаризации первоначальных уравнений путем замены интегральной нагрузки некоторыми функциями от t , полученными из правых частей соответствующих оценок. Данный способ линеаризации позволяет аппроксимировать исходное нагруженное уравнение ассоциированным с ним линейным уравнением с сохранением в основном физического смысла процесса, моделируемого нагруженным уравнением. Точное или приближенное решение линеаризованного уравнения, найденное при исходных начальных и граничных условиях, можно принять за приближенное решение исходного нагруженного уравнения. Это решение также может быть использовано для запуска итерационного процесса последовательных приближений к точному решению нагруженной задачи.

Список источников

1. Бернштейн С.Н. Об одном классе функциональных уравнений с частными производными // Известия АН СССР. Сер. математическая. 1940. Вып. 1. С. 17–26.
2. Woinowsky-Krieger S. The effect of axial forces on the vibrations of hinged bars // J. Appl. Mech. 1950. № 17. P. 35–36.
3. Dickey R.W. Infinite systems of nonlinear oscillation equations related to the string // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. № 23. P. 459–468.
4. Crippa H.R. On local solutions of some mildly degenerate Hyperbolic equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 1993. V. 21 (8). P. 565–574.
5. Frota C.L., Medeiros L.A., Vicente A. Wave equation in domains with nonlocally reacting boundary // Differential and Integral Equations. 2011. V. 24 (11/12). P. 1001–1020.
6. Похожаев С.И. Об одном классе квазилинейных гиперболических уравнений // Математический сборник. 1975. Т. 96 (138), № 1. С. 152–166.
7. Похожаев С.И. Об одном квазилинейном гиперболическом уравнении Кирхгофа // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21, № 1. С. 101–108.
8. Nishihara K. Exponential decay of solutions of some quasilinear hyperbolic equations with linear damping // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 1984. V. 8 (6). P. 623–636.

9. Ngoc L.T.P., Long N.T. Linear Approximation and Asymptotic Expansion of Solutions in Many Small Parameters for a Nonlinear Kirchhoff Wave Equation with Mixed Nonhomogeneous Conditions // *Acta Appl Math.* 2010. V. 112. P. 137–169. doi: 10.1007/s10440-009-9555-9
10. Ono K. Global solvability for mildly degenerate Kirchhoff type dissipative wave equations in Bounded Domains // *J. Math. Tokushima Univ.* 2021. V. 55. P. 11–18.
11. Бозиев О.Л. Приближенное решение нагруженного гиперболического уравнения с однородными краевыми условиями // *Вестник Южноуральского государственного университета. Сер. Математика, физика, механика.* 2016. Т. 8, № 2. С. 14–18. doi: 10.14529/mmph160202
12. Бозиев О.Л. Решение нелинейного гиперболического уравнения приближенно-аналитическим методом // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2018. № 51. С. 5–14. doi: 10.17223/19988621/51/1
13. Филатов А.Н., Шарова Л.В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М. : Наука, 1976. 151 с.

References

1. Bernshtein S.N. (1940) Ob odnom klasse funktsional'nykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi [On a class of partial differential functional equations]. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya* [News of the USSR Academy of Sciences. Mathematical series]. 4(1). pp. 17–26.
2. Woinowsky-Krieger S. (1950) The effect of axial forces on the vibrations of hinged bars. *Journal of Applied Mechanics, American Society of Mechanical Engineers.* 17. pp. 35–36.
3. Dickey R.W. (1969) Infinite systems of nonlinear oscillation equations related to the string. *Proceedings of the American Mathematical Society.* 23(3). pp. 459–468.
4. Crippa H.R. (1993) On local solutions of some mildly degenerate hyperbolic equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications.* 21(8). pp. 565–574.
5. Frota C. L., Medeiros L.A., Vicente A. (2011) Wave equation in domains with non-locally reacting boundary. *Differential and Integral Equations.* 24(11/12). pp. 1001–1020.
6. Pokhozhaev S.I. (1975) Ob odnom klasse kvazilineynykh giperbolicheskikh uravneniy [On a class of quasi-linear hyperbolic equations]. *Matematicheskii Sbornik* [Mathematical collection]. 138(1). pp. 152–166.
7. Pokhozhaev S.I. (1985) Ob odnom kvazilineynom giperbolicheskom uravnenii Kirkgofa [On a quasi-linear hyperbolic Kirchhoff equation] *Differentsial'nyye uravneniya* [Differential equations]. 21(1). pp. 101–108.
8. Nishihara K. (1984) Exponential decay of solutions of some quasilinear hyperbolic equations with linear damping. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications.* 8(6). pp. 623–636.
9. Ngoc L.T.P., Long N.T. (2010). Linear approximation and asymptotic expansion of solutions in many small parameters for a nonlinear Kirchhoff wave equation with mixed nonhomogeneous conditions. *Acta Applicandae Mathematicae.* 112. pp. 137–169. DOI: 10.1007/s10440-009-9555-9.
10. Ono K. (2021) Global solvability for mildly degenerate Kirchhoff type dissipative wave equations in bounded domains. *Journal of Mathematics, Tokushima University.* 55. pp. 11–18.
11. Boziev O.L. (2016) Priblizhennoye resheniye nagruzhennogo giperbolicheskogo uravneniya s odnorodnymi kravevymi usloviyami [Approximate solution of a loaded hyperbolic equation with homogeneous boundary conditions]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika» – Bulletin of the South Ural State University. Mathematics. Mechanics. Physics.* 8(2). pp. 14–18. DOI: 10.14529/mmph160202.
12. Boziev O.L. (2019) Resheniye nelineynogo giperbolicheskogo uravneniya priblizhenno-analiticheskim metodom [Solution of nonlinear hyperbolic equations by an approximate analytical method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika –*

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 51. pp. 5–14. DOI: 10.17223/19988621/51/1.

13. Filatov A.N., Sharova L.V. (1976) *Integral'nyye neravenstva i teoriya nelineynykh kolebaniy* [Integral inequalities and theory of nonlinear oscillations]. Moscow: Nauka.

Сведения об авторе:

Бозиев Олег Людинович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры компьютерных технологий и информационной безопасности Института искусственного интеллекта и цифровых технологий Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова; старший научный сотрудник Института информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Нальчик, Россия. E-mail: boziev@yandex.ru

Information about the author:

Boziev Oleg L. (Candidate of in Physical and Mathematical sciences, associate professor at the Computer Technologies and Information Security Department, Institute of Artificial Intelligence and Digital Technologies, Kabardino-Balkarian State University; senior staff scientist of Institute of Computer Science and Problems of Regional Management, Kabardino-Balkarian Science Center of the Russian Academy of Sciences, Nalchik, Russian Federation). E-mail: boziev@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 15.05.2022; принята к публикации 01.12.2022

The article was submitted 15.05.2022; accepted for publication 01.12.2022

Научная статья

УДК 512.542

MSC: 20E28

doi: 10.17223/19988621/80/3

Конечные группы с перестановочными строго обобщенно максимальными подгруппами

Юлия Владимировна Горбатова

*Российская академия народного хозяйства и государственной службы
при Президенте РФ (Брянский филиал), Брянск, Россия, g.julia32@yandex.ru*

Аннотация. Описана структура конечных групп, в которых любая строго 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной строго 3-максимальной подгруппой. Показано, что класс групп с указанным свойством совпадает с классом групп, в которых любая 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной 3-максимальной подгруппой, и, как следствие, такие группы являются разрешимыми. В качестве вспомогательных результатов в работе описано строение групп, в которых любая строго 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной максимальной подгруппой. В частности, показано, что класс таких групп совпадает с классом групп, в которых любая 2-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами, и, как следствие, такие группы являются сверхразрешимыми.

Ключевые слова: разрешимая группа, i -максимальная подгруппа; строго i -максимальная подгруппа, нормальная подгруппа, нильпотентная группа, сверхразрешимая группа, группа Шмидта

Для цитирования: Горбатова Ю.В. Конечные группы с перестановочными строго обобщенно максимальными подгруппами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 80. С. 26–38. doi: 10.17223/19988621/80/3

Original article

Finite groups with permuted strongly generalized maximal subgroups

Yulia V. Gorbatoва

*Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
(Bryansk Branch), Bryansk, Russian Federation, g.julia32@yandex.ru*

Abstract. Let G be a finite group. If there is a maximal subgroup M in G such that $H \leq M$ and H is a maximal subgroup of M , then H is called the 2-maximal subgroup of G . The 3-maximal subgroups can be defined similarly. Note that the n -maximal subgroup

of the group G is called strongly the n -maximal if it is not the n -maximal subgroup in any proper subgroup of the group G .

This paper is devoted to describing the structure of the groups in which any strongly 2-maximal subgroup is permutable with the arbitrary strongly 3-maximal subgroup. The class of groups with this property is proved to coincide with the class of groups in which any 2-maximal subgroup is permuted with the arbitrary 3-maximal subgroup, and, as a consequence, such groups are solvable. As an auxiliary result, this work presents a description of groups in which any strongly 2-maximal subgroup is permutable with an arbitrary maximal subgroup. The class of such groups is shown to coincide with the class of the groups in which any 2-maximal subgroup is permutable with all maximal subgroups and, as a consequence, such groups are supersolvable.

Keywords: solvable group, i -maximal subgroup, strongly i -maximal subgroup, normal subgroup, nilpotent group, supersolvable group, Schmidt group

For citation: Gorbatova, Y.V. (2022) Finite groups with permuted strongly generalized maximal subgroups. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 26–38. doi: 10.17223/19988621/80/3

Введение

Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными. Напомним ряд основных понятий, используемых в работе.

Подгруппа A перестановочна с подгруппой B в группе G , если $AB = BA$.

Группа Шмидта – это ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны.

Рассмотрим ряд подгрупп вида $G_3 \leq G_2 \leq G_1 \leq G$, где G_1 – максимальная подгруппа в G , G_2 – максимальная подгруппа в G_1 , G_3 – максимальная подгруппа в G_2 . Тогда G_2 и G_3 называются 2-максимальной подгруппой и 3-максимальной подгруппой в G соответственно.

Кроме того, некоторая подгруппа группы G называется строго i -максимальной, если она i -максимальна в G , но при этом не является i -максимальной ни в одной собственной подгруппе группы G для $i \geq 2$.

В данной статье рассматривается одно из направлений теории групп, связанное с анализом вопроса: как на строение группы влияет наличие в ней некоторых систем перестановочных подгрупп? Отметим, в частности, работы [1, 2], в которых получено строение групп, в которых любая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми 2-максимальными подгруппами или со всеми максимальными подгруппами. Опираясь на эти результаты, на Гомельском алгебраическом семинаре (2005) В.С. Монаховым и О.И. Тавгеном были сформулированы задачи описания точного строения групп с перестановочными 2-максимальными подгруппами, а также групп с перестановочными 3-максимальными подгруппами. Эти две задачи в ненильпотентном случае были решены в работе автора [3]. В связи с последним результатом возникает вопрос описания ненильпотентных групп с перестановочными строго i -максимальными подгруппами, который был решен автором в классе разрешимых групп для $i = 2, 3$ в недавней работе [4]. В частности, было доказано, что класс ненильпотентных разрешимых групп с перестановочными i -максимальными подгруппами совпадает с классом ненильпотентных разрешимых групп с перестановочными строго i -максимальными подгруппами ($i = 2, 3$).

Данная работа посвящена описанию структуры групп, в которых любая строго 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной строго 3-максимальной подгруппой. Доказано, что класс групп с указанным свойством совпадает с классом групп, в которых любая 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной 3-максимальной подгруппой, и, как следствие, такие группы являются разрешимыми. Данный результат позволяет усилить формулировки основных теорем более ранней работы [1], заменив условие перестановочности всех 3-максимальных и 2-максимальных подгрупп на условие перестановочности только строго 3-максимальных и строго 2-максимальных подгрупп. В качестве вспомогательных результатов в работе описано также строение групп, в которых каждая строго 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной максимальной подгруппой. Показано, что класс таких групп совпадает с классом групп, в которых любая 2-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами, и, как следствие, такие группы являются сверхразрешимыми.

1. Вспомогательные результаты и условные обозначение

Приведем основные обозначения и результаты, используемые в работе. Пусть G – группа. Тогда:

$|G|$ – порядок группы G ;

$F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G , т.е. произведение всех нормальных нильпотентных подгрупп группы G ;

$O_p(G)$ – наибольшая нормальная p -подгруппа группы G ;

$|G : H|$ – индекс подгруппы H в группе G ;

$M_G = \text{Core}_G(H)$ – ядро подгруппы M в группе G , т.е. пересечение всех подгрупп, сопряженных с M в группе G ;

$[N]M$ – полупрямое произведение нормальной подгруппы N группы G и подгруппы M группы G ;

G' – коммутант группы G , т.е. подгруппа, порожденная коммутаторами всех элементов группы G ;

$Z(G)$ – центр группы G ;

$\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G , т.е. пересечение всех максимальных подгрупп группы G ;

$\langle x \rangle$ – циклическая подгруппа, порожденная элементом x .

Лемма 1.1 [5. Леммы 1.43, 1.44]. Пусть A и B – собственные подгруппы группы G . Тогда:

(1) Если $G = AB$, то $G = AB^x$ для всех $x \in G$;

(2) $G \neq AA^x$ для всех $x \in G$.

Лемма 1.2 [6. Гл. VI, теоремы 26.1, 26.2]. Если G – группа Шмидта, тогда:

(1) $G = [P]\langle a \rangle$, где P и $\langle a \rangle$ – силовские p -подгруппа и q -подгруппа группы G , соответственно;

(2) G имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются группы $P\langle a^q \rangle$ и $P'\langle a \rangle$;

(3) $G' = P$;

$$(4) \Phi(G) = Z(G) = P' \times \langle a^q \rangle;$$

(5) $P/\Phi(P)$ – главный фактор группы G , причем если $|P/\Phi(P)| = p^\alpha$, то p^α сравнимо с единицей по модулю q ;

(6) Наибольшая нормальная подгруппа группы G , строго содержащаяся в P , совпадает с $\Phi(P) = P' = C_P(a)$;

(7) Если P абелева, то она элементарна;

(8) Если P неабелева, то ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют экспоненту p .

Лемма 1.3 [7. Следствие 2.5]. Предположим, что группа G не является нильпотентной. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) в группе G каждая 2-максимальная подгруппа нормальна;

(2) в группе G каждая строго 2-максимальная подгруппа нормальна;

(3) в группе G каждая 2-максимальная подгруппа S -квазинормальна;

(4) в группе G каждая строго 2-максимальная подгруппа S -квазинормальна.

Лемма 1.4 [7. Теорема 2.1]. Пусть G – ненильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) G является группой Шмидта, нормальная силовская подгруппа которой имеет простой порядок;

(2) каждая 2-максимальная подгруппа группы G нормальна;

(3) каждая строго 2-максимальная подгруппа группы G S -квазинормальна.

Теорема 1.1 [1. Теорема 2.4]. Каждая максимальная подгруппа группы G перестановочна с каждой 2-максимальной подгруппой из G в том и только в том случае, когда G либо нильпотентна, либо G является сверхразрешимой группой порядка $|G| = p^a q^b$ такой, что силовская q -подгруппа $Q = \langle x \rangle$ из G является циклической и $Q_G = \langle x^{q-1} \rangle$.

Теорема 1.2 [1. Теорема 3.5]. Пусть G – конечная ненильпотентная группа. Тогда каждая 2-максимальная подгруппа из G перестановочна со всеми 3-максимальными подгруппами из G в том и только в том случае, когда либо $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где p, q, r – различные простые числа и $\alpha + \beta + \gamma \leq 3$, либо G является группой одного из следующих типов:

(1) G – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами и $|G| = p^a q^b$, где $a + b > 3$;

(2) $G = [P]Q$ – группа Шмидта, где P – группа кватернионов порядка 8 и Q – группа порядка 3,

либо G – сверхразрешимая группа одного из типов:

(3) $G = [P]Q$ и $|Q:C_Q(P)| = q$, где P – группа простого порядка $p \neq q$, Q – нециклическая группа с порядком $|Q| = q^a$ ($a > 2$) и все максимальные подгруппы из Q , отличные от $C_Q(P)$, являются циклическими;

(4) $G = [P]Q$, где P – группа порядка p^2 (p – простое число), все максимальные подгруппы из P нормальны в G , $Q = \langle a \rangle$ – циклическая q -группа ($q \neq p$) с порядком $|Q| > q$ и $C_Q(P) = \langle a^q \rangle$;

(5) $G = [P]Q$, где $P = \langle a \rangle$ – циклическая группа порядка p^3 (p – простое число), Q – группа простого порядка $q \neq p$ и $C_G(a^2) = P$;

(6) $G = [P \times Q]R$, где P – группа простого порядка p , Q – группа простого порядка $q \neq p$, R – циклическая группа порядка $|R| = r^a$ ($a > 1$), R не является нормальной в G , но всякая максимальная подгруппа из R нормальна в G .

2. Структура групп, для которых любая строго 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной максимальной подгруппой

Лемма 2.1. Пусть G – примитивная разрешимая группа. Тогда и только тогда в группе G любая строго 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной максимальной подгруппой, когда $G = [N]M$, причем N и M – группы различных простых порядков.

Доказательство. Необходимость. Пусть G – примитивная разрешимая группа, в которой любая строго 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной максимальной подгруппой. Тогда, в силу строения примитивных групп (см.: [8. Ch. A, 15.6 Theorem]), имеем $G = [N]M$, где $N = F(G) = O_p(G) = C_G(N)$ и M – максимальная подгруппа из G с единичным ядром.

Пусть M_1 – максимальная подгруппа в M . Тогда M_1 является 2-максимальной подгруппой в G . Предположим вначале, что M_1 – строго 2-максимальная подгруппа в G . Тогда, в силу условия леммы, получаем $M_1^x M \leq G$ для всех элементов $x \in G$. Следовательно, имеет место ряд подгрупп $M \leq M_1^x M \leq G$. В силу максимальной M в G , имеем либо $M_1^x M = M$, либо $M_1^x M = G$. Если $M_1^x M = G$, то $M^x M = G$, что противоречит лемме 1.1 (2). Следовательно, $M_1^x M = M$. Это влечет $M_1^x \leq M$ для всех $x \in G$. Следовательно, $M_1 \leq M_G = 1$.

Предположим теперь, что M_1 не является строго 2-максимальной подгруппой в G . Это означает, что в группе G существует некоторая строго 2-максимальная подгруппа T , содержащая M_1 . Тогда $M_1 \leq M \cap T$ и имеет место ряд подгрупп $M_1 \leq M \cap T \leq M$. В силу максимальной M_1 в M имеем либо $M_1 = M \cap T$, либо $M \cap T = M$. Если $M \cap T = M$, то $M \leq T$, что противоречит максимальной M в G . Следовательно, $M_1 = M \cap T$. Так как T – строго 2-максимальная подгруппа в G , то, по условию, $T^x M \leq G$ для всех элементов $x \in G$. Следовательно, имеет место ряд подгрупп $M \leq T^x M \leq G$. В силу максимальной подгруппы M в G , имеем либо $T^x M = M$, либо $T^x M = G$. Если $T^x M = M$, то $T^x \leq M$ для всех $x \in G$. Следовательно, $M_1 < T \leq M_G = 1$. Пусть теперь $T^x M = G$. Тогда

$$|G : M| = \frac{|G|}{|M|} = \frac{|T||M|}{|T \cap M||M|} = \frac{|T|}{|T \cap M|} = \frac{|T|}{|M_1|} = |N|.$$

Следовательно, $T = [N]M_1$. Так как при этом T является строго 2-максимальной подгруппой в G и $G = [N]M$, то M_1 является строго 2-максимальной подгруппой

в M , что противоречит максимальнойности M_1 в M . Следовательно, случай $T^*M = G$ не имеет места.

Итак, мы показали, что для произвольной максимальной подгруппы M_1 из M верно $M_1 \leq M_G = 1$. Это означает, что M является группой простого порядка, например $|M| = q$. Поэтому N является максимальной подгруппой в G .

Предположим далее, что N имеет неединичную максимальную подгруппу, например N_1 . Тогда N_1 является строго 2-максимальной подгруппой в G с $|G : N_1| = pq$ и, в силу условия, $N_1M \leq G$. Снова ввиду максимальнойности подгруппы M в G получаем $N_1M = M$. Поэтому $N_1 \leq M$ и, следовательно, $N_1 = 1$. Полученное противоречие показывает, что $|N| = p$. Таким образом, $G = [N]M$, где $|N| = p$, $|M| = q$ и $p \neq q$.

Достаточность. Пусть $G = [N]M$, где $|N| = p$, $|M| = q$ и $p \neq q$. Тогда, очевидно, единичная 2-максимальная подгруппа из G перестановочна с любой ее максимальной подгруппой. *Лемма доказана.*

Лемма 2.2. Пусть G – группа, в которой любая строго 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной максимальной подгруппой. Тогда G разрешима.

Доказательство. Предположим, что группа G является контрпримером минимального порядка, т.е. всякая группа, удовлетворяющая условию леммы, порядок которой меньше порядка G , является разрешимой. Тогда, очевидно, G не может быть нильпотентной группой, а значит, она содержит некоторую максимальную подгруппу M , причем M не является нормальной в группе G . Тогда $M \neq M_G$.

Таким образом, мы можем рассмотреть примитивную фактор-группу G/M_G . Так как для фактор-групп сохраняется условие перестановочности подгрупп, то в G/M_G любая строго 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной максимальной подгруппой, и в силу допущения G/M_G разрешима. Тогда по лемме 2.1 имеем:

$$G/M_G = \left[NM_G/M_G \right] \left(M/M_G \right), \text{ где } \left| NM_G/M_G \right| = p \text{ и } \left| M/M_G \right| = q \ (p \neq q).$$

Таким образом, M_G является единственной неединичной максимальной подгруппой в группе M . Следовательно, M – циклическая примарная группа (см.: [9. Kapitel III, 8.3 Satz]). Заметим также, что

$$\left| G/M \right| = \left| G/M_G / M/M_G \right| = \left| NM_G/M_G \right| = p.$$

Последнее означает сверхразрешимость фактор-группы G/M_G . При этом в силу цикличности M ядро M_G является циклической q -группой, следовательно, G сверхразрешима в силу [5. Лемма 4.46 (1)], что противоречит нашему предположению о группе G . Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 2.1. *Тогда и только тогда любая максимальная подгруппа группы G перестановочна с произвольной ее строго 2-максимальной подгруппой, когда группа G либо нильпотентна, либо является сверхразрешимой группой Шмидта.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G не является нильпотентной группой и в G любая строго 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной максимальной подгруппой. Тогда, согласно лемме 2.2, G разрешима. Если в группе G каждая максимальная подгруппа является нормальной, то G нильпотентна (см. [5. Теорема 3.13]), что противоречит допущению. Следовательно, группа G имеет максимальную подгруппу M , которая не является нормальной в G . Тогда в силу разрешимости G справедливо $|G : M| = p^a$ для некоторого простого числа p .

Рассмотрим произвольную максимальную подгруппу M_1 в группе M . Очевидно, что M_1 является 2-максимальной подгруппой в G . Предположим, что M_1 – строго 2-максимальная подгруппа в G . Тогда, по условию, $M_1^x M \leq G$ для всех элементов $x \in G$. Следовательно, имеет место ряд подгрупп $M \leq M_1^x M \leq G$. В силу максимальности M в M имеем либо $M_1^x M = M$, либо $M_1^x M = G$. Если $M_1^x M = G$, то $M^x M = G$, что противоречит лемме 1.1 (2). Следовательно, $M_1^x M = M$. Это влечет $M_1^x \leq M$ для всех $x \in G$, значит, $M_1 \leq M_G$. В силу максимальности подгруппы M_1 в M это означает, что $M_1 = M_G$ является нормальной подгруппой в G .

Предположим теперь, что M_1 не является строго 2-максимальной подгруппой в G . В этом случае существует ряд подгрупп $M_1 \leq G_2 \leq G_1 \leq G$, где G_1 – максимальная подгруппа в G , G_2 – максимальная подгруппа в G_1 , причем G_2 является строго 2-максимальной подгруппой в G . По условию имеем $G_2^x G_1 \leq G$ для всех элементов $x \in G$. Следовательно, $G_1 \leq G_2^x G_1 \leq G$, что в силу максимальности подгруппы G_1 в G влечет либо $G_2^x G_1 = G_1$, либо $G_2^x G_1 = G$. Если $G_2^x G_1 = G$, то $G_1^x G_1 = G$, что противоречит лемме 1.1 (2). Следовательно, $G_2^x G_1 = G_1$. Это влечет $G_2^x \leq G_1$ для всех $x \in G$, следовательно, $G_2 \leq (G_1)_G$. В силу максимальности подгруппы G_2 в G_1 это означает, что $G_2 = (G_1)_G$ является нормальной подгруппой в G .

Таким образом, произвольная 2-максимальная подгруппа M_1 группы G либо является строго 2-максимальной нормальной подгруппой в G , либо содержится в некоторой нормальной строго 2-максимальной подгруппе из G . Следовательно, произвольная строго 2-максимальная подгруппа нормальна в группе G , и, в силу леммы 1.3, произвольная 2-максимальная подгруппа нормальна в группе G . Тогда, согласно лемме 1.4, G является группой Шмидта, нормальная силовская подгруппа которой имеет простой порядок. Тогда, согласно лемме 1.2 (1), (2), максимальные подгруппы группы G имеют простые индексы, а значит, по теореме Хупперта, G является сверхразрешимой группой.

Достаточность. Если группа G нильпотентна, то каждая ее максимальная подгруппа нормальна в G , а значит, перестановочна с произвольной ее 2-максимальной подгруппой, в том числе и строго 2-максимальной подгруппой.

Предположим, что G – сверхразрешимая группа Шмидта. Согласно лемме 1.2 (1), (4), $G = [P]Q$, где P – силовская p -подгруппа, $Q = \langle a \rangle$ – циклическая q -группа,

причем $\langle a^q \rangle \leq Z(G)$. По лемме 1.2 (2), подгруппа $P'\langle a \rangle$ максимальна в G и $F(G)$ не содержится в $P'\langle a \rangle$ (так как $F(G) = P\langle a^q \rangle$). Тогда, согласно [5. Теорема 4.56, следствие 2], $|G : P'\langle a \rangle| = p$, что влечет $|P : P'| = p$. Предположим, что P не является абелевой группой. В этом случае, по лемме 1.2 (8), $P' = \Phi(P)$ и, следовательно, $\Phi(P)$ является единственной максимальной подгруппой в P . Тогда, в силу [9. Kapitel III, 8.3 Satz], P является циклической, а значит, и абелевой группой, – противоречие. Следовательно, P – абелева группа, что влечет $P' = 1$. Так как при этом P' – максимальная подгруппа в P , то $|P| = p$. Тогда, в силу леммы 1.2 (2), каждая 2-максимальная подгруппа группы G является нормальной, а следовательно, перестановочной с любой максимальной подгруппой из G . Теорема доказана.

Теорема 2.1 позволяет усилить формулировку более ранней теоремы 1.1, заменив условие перестановочности всех 2-максимальных подгрупп на перестановочность только строго 2-максимальных подгрупп, что отражено в следствии 2.1.

Следствие 2.1. *Следующие условия равносильны:*

(а) *любая максимальная подгруппа группы перестановочна с произвольной ее 2-максимальной подгруппой;*

(б) *любая максимальная подгруппа группы перестановочна с произвольной ее строго 2-максимальной подгруппой.*

Доказательство. Пусть G – произвольная группа. Если G нильпотентна, то каждая ее максимальная подгруппа нормальна в G , а значит, перестановочна с произвольной ее 2-максимальной подгруппой, в том числе и строго 2-максимальной подгруппой, что влечет равносильность условий (а) и (б).

Предположим, что группа G не является нильпотентной и верно условие (а), т.е. любая максимальная подгруппа из G перестановочна с произвольной ее 2-максимальной подгруппой, в том числе и со строго 2-максимальной подгруппой. Следовательно, верно условие (б).

Предположим, что группа G не является нильпотентной и верно условие (б), т.е. любая максимальная подгруппа из G перестановочна с произвольной ее строго 2-максимальной подгруппой. Согласно теореме 2.1, G является сверхразрешимой группой Шмидта. Покажем, что в этом случае G удовлетворяет условию теоремы 1.1, т.е. $|G| = pq^a$, силовская q -подгруппа $Q = \langle x \rangle$ из G является циклической и $Q_G = \langle x^{q^{a-1}} \rangle$. Согласно лемме 1.2 (1), (4), $G = [P]Q$, где P – силовская p -подгруппа и $Q = \langle a \rangle$ – циклическая q -группа. Рассуждая аналогично, как и при доказательстве достаточности в теореме 2.1, можно показать, что $|P| = p$. Осталось показать, что $Q_G = \langle a^{q^{a-1}} \rangle$, т.е. ядро подгруппы Q в G совпадает с максимальной подгруппой из Q . Согласно лемме 1.2 (4), максимальная подгруппа из Q содержится в центре группы G , а значит, является наибольшей нормальной подгруппой группы G , содержащейся в Q . Тогда, по [5. Лемма 3.18 (1)], Q_G совпадает с максимальной подгруппой из Q . Таким образом, G является группой, описанной в теореме 1.1, и, согласно этой теореме, каждая максимальная подгруппа группы G перестановочна с каждой 2-максимальной подгруппой из G . Следовательно, верно условие (а). Следствие доказано.

Следствие 2.2. Пусть G – произвольная группа. Если любая максимальная подгруппа группы G перестановочна с произвольной строго 2-максимальной подгруппой, и порядок группы G делится более чем на два простых числа, то G нильпотентна.

Доказательство. Предположим обратное, т.е. G – ненильпотентная группа. Так как в группе G любая максимальная подгруппа перестановочна с произвольной строго 2-максимальной подгруппой, то, по теореме 2.1, G является сверхразрешимой группой Шмидта. Тогда, в силу леммы 1.2 (1), порядок группы G делится в точности на два простых числа, – противоречие с условием. Следовательно, группа G нильпотентна. *Следствие доказано.*

Следствие 2.3. Пусть G – произвольная группа. Если любая максимальная подгруппа группы G перестановочна с произвольной ее строго 2-максимальной подгруппой, то G сверхразрешима.

Доказательство. Согласно теореме 2.1, группа G , в которой любая максимальная подгруппа перестановочна с произвольной строго 2-максимальной подгруппой, либо нильпотентна, либо является сверхразрешимой группой Шмидта. Так как нильпотентные группы сверхразрешимы, то группа G сверхразрешима в каждом из двух возможных вариантов. *Следствие доказано.*

3. Структура групп, для которых любая строго 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной строго 3-максимальной подгруппой

Лемма 3.1. Пусть G – произвольная группа. Если любая строго 2-максимальная подгруппа из G перестановочна с произвольной ее строго 3-максимальной подгруппой, то G разрешима.

Доказательство. Предположим, что M – произвольная максимальная подгруппа группы G . Ввиду условия любая максимальная подгруппа из M перестановочна со всеми ее строго 2-максимальными подгруппами. Следовательно, по следствию 2.3, M сверхразрешима. Но тогда группа G является разрешимой в силу теоремы Хупперта о разрешимых группах со сверхразрешимыми максимальными подгруппами (см.: [7. Гл. VI, теорема 9.6]). *Лемма доказана.*

Лемма 3.2. Если G – сверхразрешимая группа, то все ее n -максимальные подгруппы являются строго n -максимальными.

Доказательство. Предположим, что K – произвольная n -максимальная подгруппа группы G . Тогда в группе G существует ряд максимальных подгрупп вида:

$$K = K_n \leq K_{n-1} \leq \dots \leq K_2 \leq K_1 \leq G,$$

где K_1 – максимальная подгруппа в G , K_2 – максимальная подгруппа в K_1 , K_n – максимальная подгруппа в K_{n-1} . Согласно теореме Хупперта о сверхразрешимых группах, индекс $|G : K|$ делится в точности на n необязательно различных простых чисел.

Предположим, что M – произвольная максимальная подгруппа группы G , содержащая K . Покажем, что при этом K является $(n - 1)$ -максимальной подгруппой в M . Так как $|G : K|$ делится на n простых чисел, и $|G : K|$ также является простым

числом в силу сверхразрешимости группы G , то индекс $|M : K| = \frac{|G : K|}{|G : M|}$ делится на $(n - 1)$ необязательно различных простых чисел. Это означает, что K является

$(n - 1)$ -максимальной подгруппой в M . Произвольность выбора подгруппы M означает, что K является строго n -максимальной подгруппой в G . Лемма доказана.

Следующая теорема позволяет усилить результат, полученный авторами в теореме 1.2, заменив условие перестановочности всех 2-максимальных и 3-максимальных подгрупп на перестановочность только строго 2-максимальных и строго 3-максимальных подгрупп.

Теорема 3.1. *Для нильпотентной группы следующие условия равносильны:*

(а) *любая 2-максимальная подгруппа группы перестановочна с каждой ее 3-максимальной подгруппой;*

(б) *любая строго 2-максимальная подгруппа группы перестановочна с произвольной ее строго 3-максимальной подгруппой.*

Доказательство. Пусть G – нильпотентная группа, и $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где p, q, r – различные простые числа и $\alpha + \beta + \gamma \leq 3$. Тогда теорема, очевидно, верна, так как в этом случае 3-максимальные подгруппы в G единичны. Поэтому далее будем считать, что $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где p, q, r – различные простые числа и $\alpha + \beta + \gamma \geq 4$.

(а) $\Rightarrow$ (б). Пусть верно условие (а) теоремы. Тогда оно распространяется также на все строго 2-максимальные и строго 3-максимальные подгруппы. Таким образом, верно условие (б).

(б) $\Rightarrow$ (а). Пусть верно условие (б) теоремы. Тогда, согласно лемме 3.1, G является разрешимой группой. Кроме того, для каждой максимальной подгруппы из G выполняется условие теоремы 2.1, следовательно, в группе G каждая максимальная подгруппа либо нильпотентна, либо является сверхразрешимой группой Шмидта.

Если допустить, что все максимальные подгруппы из G нильпотентны, то G является группой Шмидта. Тогда, в силу леммы 1.2 (1), имеем $G = [P]Q$, где P – нормальная силовская p -подгруппа в G , Q – циклическая силовская q -подгруппа в G . Покажем, что в этом случае для G выполняется одно из двух условий: либо ее подгруппа P абелева, либо P – группа кватернионов порядка 8 и Q – группа порядка 3. С этой целью предположим, что группа G – контрпример минимального порядка.

Предположим вначале, что силовская q -подгруппа Q имеет собственную неединичную подгруппу Q_1 такую, что $|Q_1| = q$. В силу леммы 1.2 (4) подгруппа Q_1 содержится в центре группы G , следовательно, Q_1 является нормальной в G , и мы можем рассмотреть фактор-группу $G/Q_1 = \left[\frac{PQ_1}{Q_1} \right] \left(\frac{Q}{Q_1} \right)$, которая также является группой Шмидта. Так как для фактор-групп сохраняется условие перестановочности подгрупп, то любая строго 2-максимальная подгруппа из G/Q_1 перестановочна с произвольной строго 3-максимальной подгруппой из G/Q_1 . Таким образом, в силу выбора G либо G/Q_1 является полупрямым произведением группы кватернионов порядка 8 на группу порядка 3, либо фактор-группа $\frac{PQ_1}{Q_1}$ абелева.

В последнем случае подгруппа P , изоморфная фактор-группе PQ_1/Q_1 , также является абелевой, что невозможно в силу выбора G .

Значит $G/Q_1 = [PQ_1/Q_1](Q/Q_1)$ является группой Шмидта, в которой PQ_1/Q_1 – группа кватернионов порядка 8, и Q/Q_1 – группа порядка 3. Это означает, что подгруппа P , изоморфная фактор-группе PQ_1/Q_1 , также является группой кватернионов порядка 8, и Q является циклической группой порядка 9. Тогда, в силу леммы 1.2 (2), (8), максимальными подгруппами в группе Шмидта $G = [P]Q$ являются подгруппы вида $P'Q = \Phi(P)Q$ и PQ_1 , где $|P'| = 2$ и $|Q_1| = 3$. Тогда подгруппа Q является строго 2-максимальной в группе G , и подгруппа P_1 является строго 3-максимальной в группе G , где P_1 – максимальная подгруппа в P порядка 4. По условию Q и P_1 перестановочны, следовательно, P_1Q является подгруппой в G . Тогда в силу максимальной подгруппы $P'Q$ в группе G имеем $P_1 = P' = \Phi(P)$. Это означает, что P имеет единственную максимальную подгруппу порядка 2, что противоречит строению группы кватернионов порядка 8. Полученные противоречия показывают, что подгруппа Q не имеет собственной неединичной подгруппы Q_1 такой, что $|Q_1| = q$. Следовательно, $|Q| = q$.

Далее осталось показать, что P либо абелева, либо группа кватернионов порядка 8 и $q = 3$. Предположим, что P не является абелевой группой. В этом случае, в силу леммы 1.2 (2), максимальными подгруппами в G являются группы вида $P'Q$ и P , т.к. $|Q| = q$. Значит, подгруппа $P_1'Q$ является строго 2-максимальной в группе G , где P_1' – максимальная подгруппа в P' . Также, очевидно, подгруппа P_2 является строго 3-максимальной в группе G , где P_2 – произвольная 2-максимальная подгруппа в P . Согласно условию, $P_1'Q$ и P_1 перестановочны, следовательно, $P_2P_1'Q$ – подгруппа в G . Тогда в силу максимальной подгруппы $P'Q$ в группе G имеем $P_1'P_2 \leq P'$. Следовательно, $P_2 \leq P'$, т.е. любая 2-максимальная подгруппа из P содержится в P' . Это означает, что либо P является циклической, либо подгруппа P' является единственной 2-максимальной подгруппой в P . Если P циклическая, то она абелева, что невозможно в силу выбора P . Значит, P является группой кватернионов порядка 8 согласно [7. Гл. III, теорема 8.2]. В силу леммы 1.2 (5), (8), порядок фактор-группы $|P/P'| = 4$ сравним с единицей по модулю q , что влечет $q = 3$.

Итак, мы показали, что группа Шмидта G является либо полупрямым произведением группы кватернионов порядка 8 на группу порядка 3 (т.е. G изоморфна группе $SL(2, 3)$), либо группой с абелевыми силовскими подгруппами (т.е. группой Миллера–Морена). Значит, G – группа одного из типов (1)–(2), описанных в теореме 1.2.

Допустим теперь, что не все максимальные подгруппы из G нильпотентны, т.е. G не является группой Шмидта. Покажем, что тогда G является группой одного из типов (3)–(6), описанных в теореме 1.2. Заметим, что условия (3)–(6) из

теоремы 1.2 справедливы в случае, когда G является сверхразрешимой группой. Согласно лемме 3.2, в сверхразрешимой группе все ее n -максимальные подгруппы являются строго n -максимальными. Это означает, что случаи (3)–(6) из теоремы 1.2 справедливы также при условии перестановочности каждой строго 2-максимальной подгруппы с любой строго 3-максимальной подгруппой. Следовательно, G удовлетворяет одному из типов групп (3)–(6), описанных в теореме 1.2.

Таким образом, группа G удовлетворяет условию теоремы 1.2, что, в свою очередь влечет, справедливость условия (а). *Теорема доказана.*

Следствие 3.1. Пусть G – группа, в которой любая строго 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной ее строго 3-максимальной подгруппой, и порядок группы G делится более чем на три простых числа. Тогда G нильпотентна.

Следствие 3.2. Пусть G – группа, в которой любая строго 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной ее строго 3-максимальной подгруппой. Тогда G либо сверхразрешима, либо является группой Миллера–Морена, либо изоморфна группе $SL(2, 3)$.

Доказательство следствий 3.1 и 3.2 проводится аналогично доказательству следствий 2.2 и 2.3.

Заключение

Основным результатом работы является описание структуры групп, для которых любая строго 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной строго 3-максимальной подгруппой. Отметим также, что полученные в работе результаты и методы доказательств могут быть использованы для получения точного строения групп, для которых любая строго 3-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной строго 4-максимальной подгруппой.

В заключение приведем ряд открытых вопросов, которые естественным образом возникают из результатов, полученных в данной работе.

Вопрос 1. Какое строение имеют группы, в которых любая строго 3-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной строго 4-максимальной подгруппой?

Вопрос 2. Верно ли, что класс групп, в которых любая n -максимальная подгруппа перестановочна с произвольной $(n + 1)$ -максимальной подгруппой, совпадает с классом групп, в которых любая строго n -максимальная подгруппа перестановочна с произвольной строго $(n + 1)$ -максимальной подгруппой для $n \geq 3$?

Список источников

1. Guo W., Legchekowa H.V., Skiba A.N. The structure of finite non-nilpotent groups in which every 2-maximal subgroup permutes with all 3-maximal subgroups // Communications in Algebra. 2009. V. 37 (7). P. 2446–2456. doi: 10.1080/00927870802334330
2. Го В., Легчекова Е.В., Скиба А.Н. Конечные группы, в которых любая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами // Математические заметки. 2009. Т. 86, № 3. С. 350–359. doi: 10.4213/mzm8499
3. Луценко (Горбатова) Ю.В., Го В., Скиба А.Н. О ненильпотентных группах, любые две 3-максимальные подгруппы которых перестановочны // Сибирский математический журнал. 2009. Т. 50, № 6. С. 1255–1268. doi: 10.1007/s11202-009-0109-1

4. Горбатова Ю.В. О перестановочных строго 2-максимальных и строго 3-максимальных подгруппах // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26, № 134. С. 121–129. doi: 10.20310/2686-9667-2021-26-134-121-129
5. Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск : Вышэйшая школа, 2006. 207 с.
6. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М. : Наука, 1978. 272 с.
7. Луценко Ю.В., Скиба А.Н. Конечные ненильпотентные группы с нормальными или S-квазинормальными n-максимальными подгруппами // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. 2009. Т. 52, № 1. С. 134–138.
8. Doerk K., Hawkes T. Finite Soluble Groups. Berlin–New York : Walter de Gruyter, 1992. 889 p.
9. Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin–Heidelberg–New York : Springer, 1967. 793 S.

References

1. Guo W., Legchekowa H.V., Skiba A.N. (2009) The structure of finite non-nilpotent groups in which every 2-maximal subgroup permutes with all 3-maximal subgroups. *Communications in Algebra*. 37(7). pp. 2446–2456. DOI: 10.1080/00927870802334330.
2. Guo W., Legchekowa H.V., Skiba A.N. (2009) Finite groups in which any 3-maximal subgroup is permutable with all maximal subgroups. *Mathematical Notes*. 86(3). pp. 350–359. DOI: 10.4213/mzm8499.
3. Guo W., Lutsenko (Gorbatova) Yu.V., Skiba A.N. (2009) On nonnilpotent groups in which every two 3-maximal subgroups are permutable. *Siberian Mathematical Journal*. 50(6). pp. 988–997. DOI: 10.1007/s11202-009-0109-1.
4. Gorbatova Yu.V. (2021) On permutable strongly 2-maximal and strongly 3-maximal subgroups. *Bulletin of Russian Universities. Mathematics*. 26(134). pp. 121–129. DOI: 10.20310/2686-9667-2021-26-134-121-129.
5. Monakhov V.S. (2006) *Vvedeniye v teoriyu konechnykh grupp i ikh klassov* [Introduction to the theory of finite groups and their classes]. Minsk: Vysheyschaya shkola.
6. Shemetkov L.A. (1978) *Formatsii konechnykh grupp* [Formations of finite groups]. Moscow: Nauka.
7. Lutsenko Yu.V., Skiba A.N. (2009) Konechnyye nenil'potentnyye gruppy s normal'nymi ili S-kvazinormal'nymi n-maksimal'nymi podgruppami [Finite nonnilpotent groups with normal or S-quasinormal n-maximal subgroups]. *Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta*. 52(1). pp. 134–138.
8. Doerk K., Hawkes T. (1992) *Finite Soluble Groups*. Berlin–New York: Walter de Gruyter.
9. Huppert B. (1967) *Endliche Gruppen I*. Berlin–Heidelberg–New York: Springer.

Сведения об авторе:

Горбатова Юлия Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент Российской академии народного хозяйства и государственной службы при президенте РФ (Брянский филиал), Брянск, Россия. E-mail: g.julia32@yandex.ru

Information about the author:

Gorbatova Yulia V. (Cand. Sci (Phys. and Math.), associate professor at the Social-humanitarian and Natural-scientific Disciplines Department, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Bryansk Branch), Bryansk, Russian Federation). E-mail: g.julia32@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 16.09.2021; принята к публикации 01.12.2022

The article was submitted 16.09.2021; accepted for publication 01.12.2022

МЕХАНИКА

MECHANICS

Научная статья

УДК 539.4

doi: 10.17223/19988621/80/4

**Моделирование взаимодействия конических ударников
с подводными преградами при наличии у ударников
угла атаки**

**Станислав Павлович Батуев¹, Алексей Сергеевич Дьячковский²,
Павел Андреевич Радченко³, Андрей Васильевич Радченко⁴,
Антон Юрьевич Саммель⁵, Андрей Владимирович Чупашев⁶**

*^{1, 3, 4} Институт физики прочности и материаловедения
Сибирского отделения РАН, Томск, Россия*

*^{2, 5, 6} Научно-исследовательский институт прикладной математики и механики
Томского государственного университета, Томск, Россия*

¹ spbatuev@gmail.com

² Lex_Okha@mail.ru

³ pavel@radchenko.site

⁴ andrey@radchenko.site

⁵ anton_sammel@mail.ru

⁶ ChupashevAV@Gmail.com

Аннотация. С использованием математического моделирования исследуется влияние угла встречи и угла атаки на процесс взаимодействия ударников из сплава ВНЖ-95 в виде усеченных конусов с подводными преградами из алюминиевого сплава. Экспериментальная часть выполнялась на гидробаллистическом комплексе с применением высокоскоростной видеосъемки. Моделирование осуществлялось с использованием авторского программного комплекса EFES. Исследовано влияние угла атаки на процесс взаимодействия ударника с преградой. Установлено, что положительный угол атаки приводит к нормализации ударника, уменьшению эффективной толщины преграды и ее перфорации; отрицательный угол атаки, напротив, способствует рикошету ударника от преграды.

Ключевые слова: конический ударник, высокоскоростное взаимодействие, модель, деформация, удар, рикошет, угол атаки

Благодарности: Экспериментально-теоретические результаты работы получены в рамках Программы развития Томского государственного университета «Приоритет 2030». Разработка математической модели выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН, тема номер FWRW-2021-0002.

Для цитирования: Батуев С.П., Дьячковский А.С., Радченко П.А., Радченко А.В., Саммель А.Ю., Чупашев А.В. Моделирование взаимодействия конических ударников с подводными преградами при наличии у ударников угла атаки // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 80. С. 39–48. doi: 10.17223/19988621/80/4

Original article

Simulation of the interaction of conical impactors having an angle of attack with underwater barriers

Stanislav P. Batuev¹, Aleksey S. D'yachkovskiy², Pavel A. Radchenko³, Andrey V. Radchenko⁴, Anton Yu. Sammel⁵, Andrey V. Chupashev⁶

^{1, 3, 4} *Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation*

^{2, 5, 6} *Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

¹ *spbatuev@gmail.com*

² *Lex_Okha@mail.ru*

³ *pavel@radchenko.site*

⁴ *andrey@radchenko.site*

⁵ *anton_sammel@mail.ru*

⁶ *ChupashevAV@Gmail.com*

Abstract. In this paper, the effect of the angle of impact and the angle of attack on the interaction between truncated cone-shaped impactors made of BHZh-95 alloy and underwater barriers made of aluminum alloy is studied using experimental and computational methods. When such an impactor enters water, a supercavern appears around the impactor and minimizes the fluid friction. During the motion, the impactor afterbody periodically experiences impermanent contact with the walls of the supercavern, which maintains the steady motion. Note that the center of mass of the impactor is located closer to its afterbody, which can induce the angle of attack appearance during the motion. The experimental study is conducted using a hydroballistic track with high-speed video recording. The speed range of 250–350 m/s is considered. Mathematical modeling is carried out using the EFES original software package. It is revealed that a positive angle of attack $\beta \leq 10^\circ$ leads to the normalization of the impactor and a decrease in the effective thickness of the barrier with its perforation. In contrast, at a negative angle of attack, the impactor rebounds from the barrier.

Keywords: conical impactor, high-speed interaction, model, deformation, impact, rebound, angle of attack

Acknowledgments: Experimental and theoretical results of the work were obtained within the Tomsk State University Development Program “Priority 2030”. The mathematical model was developed within the state assignment for ISPMS SB RAS (project No. FWRW-2021-0002).

For citation: Batuev, S.P., D'yachkovskiy, A.S., Radchenko, P.A., Radchenko, A.V., Sammel, A.Yu., Chupashev, A.V. (2022) Simulation of the interaction of conical impactors having an angle of attack with underwater barriers. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 39–48. doi: 10.17223/19988621/80/4

Введение

Для реализации устойчивого высокоскоростного движения в воде [1–6] применяются ударники в виде усеченного конуса (рис. 1) [7]. При входе в воду такой ударник образует суперкаверну [8–11], охватывающую его, тем самым минимизируется трение о воду. Кормовая часть ударника во время его движения временно периодически контактирует со стенками суперкаверны, поддерживая устойчивый режим его движения. Отметим, что центр масс рассматриваемого ударника находится ближе к его корме, что может спровоцировать возникновение угла атаки при его движении. Если вектор скорости центра масс ударника совпадает с направлением траектории его движения, то в зависимости от угла встречи с преградой (при одной и той же скорости) происходит либо прокалывание преграды, либо рикошет [12, 13]. Если отмеченные условия взаимодействия дополняются наличием угла атаки у ударника, что обусловлено смещенным к его корме центром масс, то условия безрикошетного взаимодействия существенно усложняются. В этом случае применение математического моделирования для исследования рассматриваемых процессов является практически единственным методом корректной интерпретации и прогнозирования экспериментальных результатов.



Рис. 1. Внешний вид ударника в виде усеченного конуса
Fig. 1. Design of a truncated cone-shaped impactor

В данной работе с использованием авторского конечно-элементного программного комплекса EFES [14] и привлечением экспериментальных данных для верификации математической модели выполнены оценки величин углов атаки ударника, при которых обеспечивается безрикошетное взаимодействие суперкавитирующих ударников с преградами.

Результаты исследований

Экспериментальные исследования проводились на гидробаллистическом комплексе [15]. С помощью высокоскоростной видеосъемки фиксировался процесс взаимодействия ударника с преградой и измерялась его скорость до и после взаимодействия с преградой. Диапазон скоростей взаимодействия составил 250–350 м/с.

Численное моделирование проводилось в трехмерной постановке с использованием программного комплекса EFES. Поведение материалов ударника и преграды описывалось упругопластической моделью, в качестве критерия разрушения использовалась предельная величина интенсивности пластических деформаций [16]:

$$e_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{3T_2 - T_1^2}, \quad (1)$$

где T_1 , T_2 – первый и второй инварианты тензора деформаций.

Верификация программного комплекса EFES проводилась при решении динамических задач различного уровня [16]. Применительно к исследуемым процессам также выполнено сравнение расчетных и экспериментальных данных.

На рис. 2, *a* ударник из ВНЖ-95 взаимодействует с преградой в воздухе со скоростью встречи 333 м/с в нормаль. После пробития преграды ударник продолжает движение, а его скорость составляет 301 м/с.

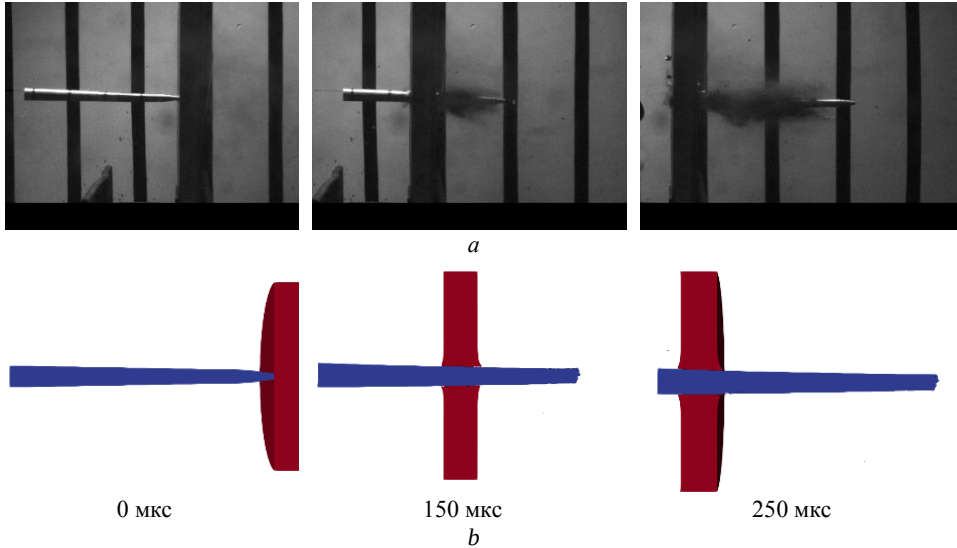


Рис. 2. Взаимодействие ударника из ВНЖ-95 с преградой на воздухе в нормаль (*a*); расчетная хронограмма взаимодействия ударника с преградой (*b*)

Fig. 2. Interaction of the impactor made of BHZh-95 with a barrier in the normal direction in the air (*a*); calculated chronogram of the impactor interaction with the barrier (*b*)

Сравнение расчетных данных с результатами эксперимента показало, что, как и в эксперименте, произошло пробитие преграды. При этом расчетная скорость ударника после пробития практически совпадает с измеренной экспериментально и составляет 292 м/с.

Верифицированная математическая модель в дальнейшем использовалась для определения условий, при которых происходит рикошет ударника от преграды. В таблице приведены результаты численных экспериментов по взаимодействию ударников с преградами при различных углах α и скоростях встречи.

Результаты численного моделирования

№ расчета	Скорость встречи v_0 , м/с	Угол встречи α	Расчетная скорость после взаимодействия v_r , м/с, результат	Экспериментальная скорость после взаимодействия v_z , м/с, результат
1	333	0°	292, пробитие	301, пробитие
2	330	30°	236, пробитие	239, пробитие
3	250	30°	182, пробитие	—
4	250	45°	163, пробитие	—
6	250	50°	88, пробитие	—
7	250	55°	115, рикошет	—
8	250	60°	187, рикошет	—

Выполненные расчеты показали, что рикошет ударника происходит при $\alpha \geq 55^\circ$. Рисунки 3–5 иллюстрируют процесс взаимодействия ударников с преградой при встрече под углом. В рассматриваемом случае напряженно-деформированное состояние в ударнике несимметрично относительно продольной оси, что приводит к возникновению изгибных моментов. Наличие при этом смещенного к кормовой части ударника центра тяжести дополнительно увеличивает тенденцию к изгибу ударника.

При взаимодействии ударника с преградой под углом увеличивается эффективная толщина преграды h_{ef} , определяемая соотношением:

$$h_{ef} = h / \cos \alpha, \quad (2)$$

где h – толщина преграды.

Увеличение эффективной толщины преграды приводит к увеличению времени контакта ударника с преградой и интенсифицирует деформирование и срабатывание ударника. При $\alpha = 50^\circ$ эффективная толщина преграды увеличивается в 1.5 раза, при этом наблюдается существенное увеличение срабатывания ударника за счет эрозии и пластического деформирования по сравнению с взаимодействием под углом $\alpha = 30^\circ$.

В представленных численных экспериментах рассмотрены случаи, когда в момент начала взаимодействия ударника с преградой угол атаки $\beta = 0^\circ$. Под углом атаки будем понимать угол

$$\beta = \alpha_0 - \alpha, \quad (3)$$

где α_0 – угол между вектором скорости ударника и нормалью к преграде, α – введенный ранее угол встречи (взаимодействия).

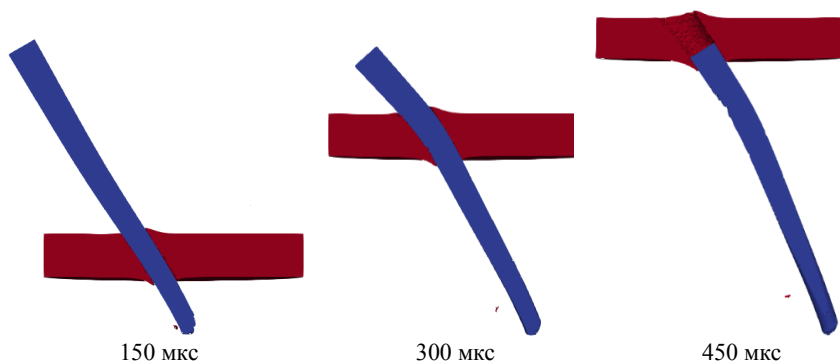


Рис. 3. Хронограмма процесса взаимодействия (сечение ZX, $v_0 = 251$ м/с, $\alpha = 30^\circ$)

Fig. 3. Chronogram of the interaction process (section ZX, $v_0 = 251$ m/s, $\alpha = 30^\circ$)

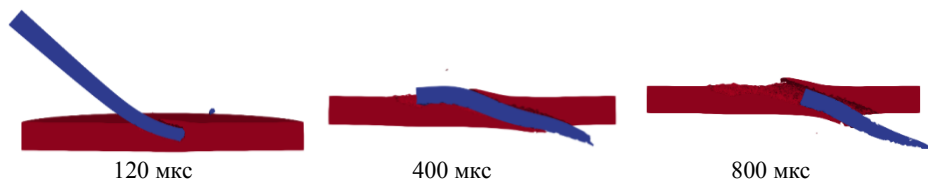


Рис. 4. Хронограмма процесса взаимодействия (сечение ZX, $v_0 = 250$ м/с, $\alpha = 50^\circ$)

Fig. 4. Chronogram of the interaction process (section ZX, $v_0 = 250$ m/s, $\alpha = 50^\circ$)

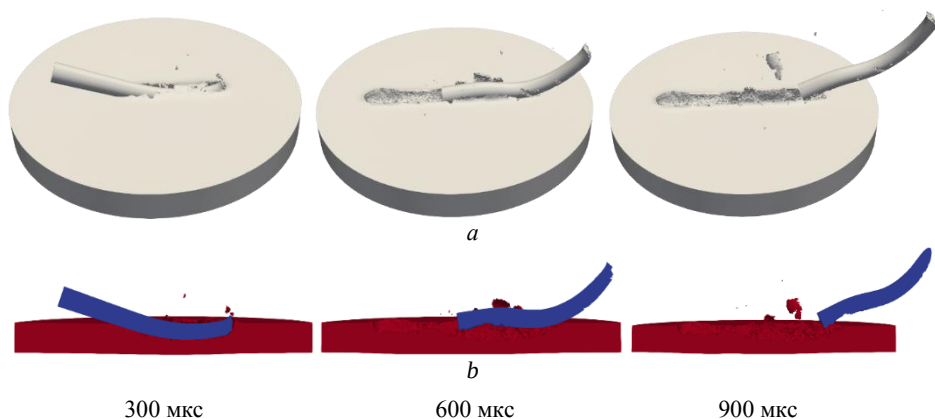


Рис. 5. Хронограмма процесса взаимодействия: *a* – в объеме, *b* – в сечении ZX ($v_0 = 250$ м/с, $\alpha = 55^\circ$)

Fig. 5. Chronogram of the interaction process: (*a*) in the volume and (*b*) in section ZX ($v_0 = 250$ m/s, $\alpha = 55^\circ$)

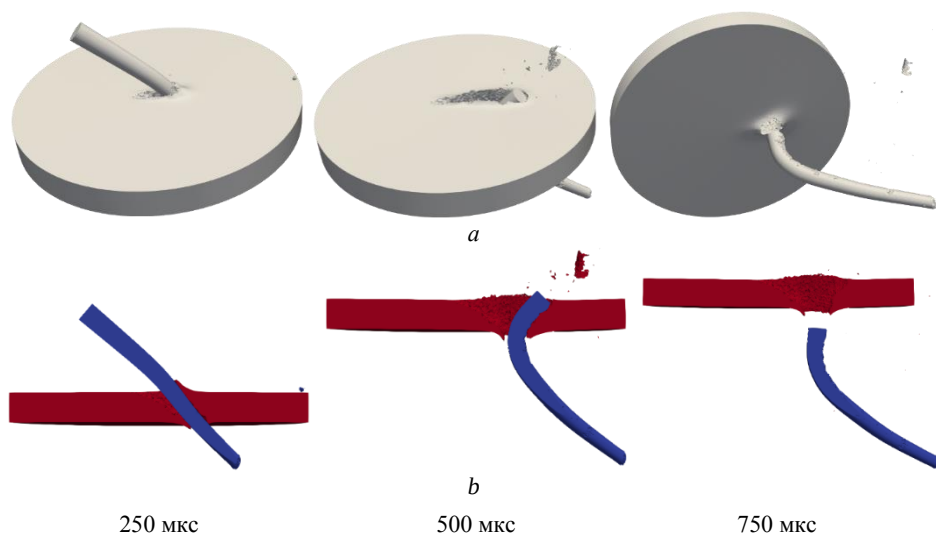


Рис. 6. Хронограмма процесса взаимодействия: *a* – в объеме, *b* – в сечении ZX ($v_0 = 250$ м/с, $\alpha = 50^\circ$, $\alpha_0 = 60^\circ$, $v_r = 93$ м/с)

Fig. 6. Chronogram of the interaction process: (*a*) in the volume, (*b*) in section ZX ($v_0 = 250$ m/s, $\alpha = 50^\circ$, $\alpha_0 = 60^\circ$, $v_r = 93$ m/s)

На рис. 6 представлена расчетная хронограмма проникания ударника для условий, когда вектор скорости не совпадает с продольной осью ударника: $\alpha = 50^\circ$, $\alpha_0 = 60^\circ$. Угол атаки при этом будет положительным: $\beta = 10^\circ$. В этом случае процесс взаимодействия ударника с преградой будет существенно отличаться от случая с $\beta = 0^\circ$ (см. рис. 4). При $\beta = 10^\circ$ наблюдается процесс нормализации ударника – угол α в процессе проникания уменьшается, что приводит к уменьшению эффективной толщины преграды, уменьшению объема разрушений в ударнике

и увеличению остаточной скорости ударника φ . Следует отметить, что кормовая часть ударника из-за смещенного к ней центра тяжести является более «тяжелой» и будет обладать большей инерцией, что усиливает тенденцию к нормализации ударника.

Заключение

Таким образом, проведенные исследования позволили определить условия возникновения рикошета удлинённого ударника в форме усеченного конуса из тяжелого сплава ВНЖ-95 при высокоскоростном взаимодействии с преградой из алюминиевого сплава. При этом установлено, что при рассмотренных кинематических и геометрических параметрах ударника и преграды положительный угол атаки $\beta \leq 10^\circ$ приводит к нормализации ударника, уменьшению эффективной толщины преграды и ее перфорации, отрицательный угол атаки, напротив, способствует рикошету ударника от преграды.

Список источников

1. Логвинович Г.В. Некоторые вопросы глиссирования и кавитации // Труды ЦАГИ. 1980. Вып. 2052. 271 с.
2. Савченко Ю.Н., Семенов В.Н., Путилин С.И. Нестационарные процессы при суперкавитационном движении тел // Прикладная гидромеханика. 1999. Т. 73, № 1, С. 79–97.
3. Федоров С.В., Велданов В.А. К определению размеров кавитационной полости в воде за движущимся с высокой скоростью цилиндрическим телом // Журнал технической физики. 2013. Т. 83, вып. 2. С. 15–20. URL: <https://journals.ioffe.ru/articles/10815>
4. Фомин Н.А. Диагностика быстропротекающих процессов в механике жидкости, газа и плазмы // Инженерно-физический журнал. 2008. Т. 81, № 1. С. 68–80.
5. Добросельский К.Г. Применение $\rho\text{-v}$ метода для исследования течения вблизи поперечно обтекаемого цилиндра // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89, № 3. С. 687–693.
6. Логвинович Г.В. Гидродинамика тонкого гибкого тела (оценка гидродинамики рыб) // Ученые записки ЦАГИ. 1970. Т. 1, № 2. С. 11–17.
7. Афанасьева С.А., Бондарчук И.С., Буркин В.В., Дьячковский А.С., Ищенко А.Н., Рогаев К.С., Саммель А.Ю., Сидоров А.Д., Степанов Е.Ю., Чупашев А.В. Экспериментально-теоретические исследования особенностей высокоскоростного движения в воде суперкавитирующих ударников, изготовленных из разных материалов // Инженерно-физический журнал. 2021. Т. 94, № 6. С. 1528–1537.
8. Byoung-Kwon Ahn, Tae-Kwon Lee, Hyoung-Tae Kim, Chang-Sup Lee. Experimental investigation of supercavitating flows // Int. J. Nav. Archit. Ocean Eng. 2012. V. 4. P. 123–131.
9. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М. –Л. : Гостехиздат, 1951. 444 с.
10. Савченко Ю.Н. Моделирование суперкавитационных процессов // Прикладна гідромеханіка. 2000. № 2 (74). С. 75–86.
11. Шахтин А.А. Численный метод расчета суперкаверн // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 2 (22). С. 105–109.
12. Герасимов А.В. Численное моделирование высокоскоростного взаимодействия ударников с преградами конечной толщины: рикошет, внедрение, пробитие // Известия Алтайского государственного университета. 2014. № 1-1 (81). С. 140–143.
13. Бивин, Ю.К. Проникание, пробивание, рикошет // Актуальные проблемы механики. 50 лет Институту проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН / Ин-т проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. М. : Наука, 2015. С. 406–425.

14. Государственная регистрация программы для ЭВМ № 2019664836. Трехмерное моделирование деформации и разрушения гетерогенных материалов и конструкций при динамических нагрузках (EFES 2.0) / Радченко П.А., Батуев С.П., Радченко А.В., 2019.
15. Буркин В.В., Иценко А.Н., Майстренко И.В., Фуфацев В.М., Дьяковский А.С., Бураков В.А., Корольков Л.В., Степанов Е.Ю., Чупашев А.В.; Рогов К.С., Саммель А.Ю., Сидоров А.Д. заяв. 09.10.2017; Патент 2683148 РФ. Гидробаллистический стенд, опубл. 26.03.2019.
16. Radchenko P.A., Radchenko A.V., Batuev S.P. Effect of Projectile Rotation on High-Velocity Impact Fracture // *Physical Mesomechanics*. 2022. V. 25. P. 119–228. doi: 10.1134/S1029959922020035

References

1. Logvinovich G.V. (1980) Nekotorye voprosy glissirovaniya i kavitatsii [Some issues of planing and cavitation]. *Trudy TSAGI*. 2052. pp. 250–270.
2. Savchenko Yu.N., Semenenko V.N., Putilin S.I. (1999) Nestatsionarnye protsessy pri superkavitatsionnom dvizhenii tel [Non-stationary processes during supercavitation motion of bodies]. *Prikladnaya gidromekhanika*. 73(1). pp. 79–97.
3. Fedorov S.V., Veldanov V.A. (2013) Determination of the dimension of a cavity in water behind a fast-moving cylindrical body. *Technical Physics*. 58(2). pp. 165–169. doi: 10.1134/S1063784213020072
4. Fomin N.A. (2008) Diagnostics of rapidly proceeding processes in fluid and plasma mechanics. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 81(1). Article 68. pp. 68–81. doi: 10.1007/s10891-008-0010-y
5. Dobrosel'skii K.G. (2016) Use of the PIV method for investigation of motion near a cylinder in transverse flow. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 89(3). pp. 695–701. doi: 10.1007/s10891-016-1428-2
6. Logvinovich G.V. (1970) Gidrodinamika tonkogo gibkogo tela (Otsenka gidrodinamiki ryb) [Hydrodynamics of a thin flexible body (Assessment of fish hydrodynamics)]. *Uchenye zapiski TSAGI – TsAGI Science Journal*. 1(2). pp. 11–17.
7. Afanas'eva S.A., Bondarchuk I.S., Burkin V.V., D'yachkovskii A.S., Ishchenko A.N., Rogaev K.S., Sammel' A.Yu., Sidorov A.D., Stepanov E.Ya., Chupashev A.V. (2021) Experimental and theoretical investigations of the specific features of high-velocity motion of supercavitating strikers made of various materials in water. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 94(6). pp. 1494–1503. doi: 10.1007/s10891-021-02429-z
8. Ahn B.-K., Lee T.-K., Kim H.-T., Lee Ch.-S. (2012) Experimental investigation of supercavitating flows. *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering*. 4(2). pp. 123–131. doi: 10.2478/IJNAOE-2013-0083
9. Sedov L.I. (1951) *Ploskie zadachi gidrodinamiki i aerodinamiki* [Plane problems of hydrodynamics and aerodynamics]. Moscow–Leningrad: Gostekhizdat.
10. Savchenko Yu.N. (2000) Modelirovanie superkavitatsionnykh protsessov [Modeling of supercavitation processes]. *Prikladnaya gidromekhanika*. 74(2). pp. 75–86.
11. Shakhtin A.A. (2013) Chislennyi metod rascheta superkavern [Numerical method for calculating supercaverns]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 22(2). pp. 105–109.
12. Gerasimov A.V. (2014) Chislennoe modelirovanie vysokoskorostnogo vzaimodeystviya udarnikov s pregradami konechnoy tolshchiny: rikoshet, vnedrenie, probitie [Numerical simulation of high-velocity interaction of projectiles with a barrier of finite thickness: ricochet, penetration, perforation]. *Izvestiya Altayskogo gosudarstvennogo universiteta – Izvestiya of Altai State University*. 81(1-1). pp. 140–143.
13. Bivin Yu.K. (2015) Pronikanie, probivanie, rikoshet [Penetration, perforation, rebound]. *Advanced Problems in Mechanics. 50 years of the Institute of Problems of Mechanics named after A.Yu. Ishlinsky RAS, Moscow*. pp. 406–425.

14. Radchenko P.A., Batuev S.P., Radchenko A.V. (2019) *Trekhmernoe modelirovanie deformatsii i razrusheniya geterogennykh materialov i konstruksiy pri dinamicheskikh nagruzkakh (EFES 2.0)* [Three-dimensional modeling of the deformation and destruction of heterogeneous materials and structures under dynamic loads (EFES 2.0)]. State registration of the software No. 2019664836.
15. Burkin V.V., Ishchenko A.N., Maystrenko I.V., Fufachev V.M., D'achkovskiy A.S., Burakov V.A., Korol'kov L.V., Stepanov E.Yu., Chupashev A.V., Rogaev K.S., Sammel' A.Yu., Sidorov A.D. (2019) *Gidrobolisticheskiy stend* [A hydroballistic track]. RF Patent 2683148.
16. Radchenko P.A., Radchenko A.V., Batuev S.P. (2022) Effect of projectile rotation on high-velocity impact fracture. *Physical Mesomechanics*. 25. pp. 119–228. doi: 10.1134/S1029959922020035

Сведения об авторах:

Батуев Станислав Павлович – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории механики структурно-неоднородных сред Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН, Томск, Россия. E-mail: spbatuev@gmail.com

Дьячковский Алексей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела быстропротекающих процессов Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: Lex_Okha@mail.ru

Радченко Павел Андреевич – кандидат физико-математических наук, доцент, научный сотрудник лаборатории механики структурно-неоднородных сред Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН, Томск, Россия. E-mail: pavel@radchenko.site

Радченко Андрей Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник лаборатории механики структурно-неоднородных сред Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН, Томск, Россия. E-mail: andrey@radchenko.site

Саммель Антон Юрьевич – младший научный сотрудник отдела быстропротекающих процессов Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: anton_sammel@mail.ru

Чупашев Андрей Владимирович – младший научный сотрудник отдела быстропротекающих процессов Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: ChupashevAV@Gmail.com

Information about the authors:

Batuev Stanislav P. (Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Laboratory of Mechanics of Heterogeneous Media, Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: spbatuev@gmail.com

D'yachkovskiy Aleksey S. (Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of High-Speed Processes, Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lex_okha@mail.ru

Radchenko Pavel A. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Researcher, Laboratory of Mechanics of Heterogeneous Media, Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: pavel@radchenko.site

Radchenko Andrey V. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Senior Official, Laboratory of Mechanics of Heterogeneous Media, Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: andrey@radchenko.site

Sammel' Anton Yu. (Junior Researcher, Department of High-Speed Processes, Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: anton_sammel@mail.ru

Chupashev Andrey V. (Junior Researcher, Department of High-Speed Processes, Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: chupashevav@gmail.ru

Статья поступила в редакцию 21.07.2022; принята к публикации 01.12.2022

The article was submitted 21.07.2022; accepted for publication 01.12.2022

Научная статья

УДК 531.352

doi: 10.17223/19988621/80/5

Вращение супермолекул вокруг промежуточной оси инерции

Михаил Алексеевич Бубенчиков¹, Дмитрий Владимирович Мамонтов²,
Сергей Андреевич Ажеев³, Александр Андреевич Ажеев⁴

^{1, 2, 3, 4} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ michael121@mail.ru

² orevaore@mail.ru

³ sazheev72@yandex.ru

⁴ sazheev@gmail.com

Аннотация. Предложена вычислительная схема численного интегрирования уравнений инерционного вращения высокомолекулярных углеродных конструкций неизменной формы. Рассмотрено вращение супермолекулы вокруг промежуточной оси инерции. Приведенные точные численные расчеты позволили построить полную картину развития неустойчивости, являющейся ничем иным как проявлением теоремы о промежуточной оси.

Ключевые слова: численное моделирование, молекулярная динамика, фуллерены

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 075-02-2020-1479/1.

Для цитирования: Бубенчиков М.А., Мамонтов Д.В., Ажеев С.А., Ажеев А.А. Вращение супермолекул вокруг промежуточной оси инерции // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 80. С. 49–58. doi: 10.17223/19988621/80/5

Original article

Rotation of supermolecules around an intermediate axis of inertia

Mikhail A. Bubenchikov¹, Dmitriy V. Mamontov²,
Sergey A. Azheev³, Aleksandr A. Azheev⁴

^{1, 2, 3, 4} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ michael121@mail.ru

² orevaore@mail.ru

³ sazheev72@yandex.ru

⁴ sazheev@gmail.com

Abstract. In the problem of the inertial rotation of molecular objects, only kinematic relations for the nodes of the molecular structure are evolutionary. These relations determine the position of the atoms of a supermolecule depending on the instantaneous angular velocity

of the object in inertial motion. All other relations are algebraic, since they are integrals of the equations of rotational motion. The latter relations include both the projections of the angular velocities of the molecule and the instantaneous coordinates of the atoms. Within the framework of the fourth-order Runge-Kutta scheme, each time step is divided into four positions. Initially, in each of these positions, new values of coordinates are determined or the initial coordinates of atoms at the first position of the first time step are used. After the coordinates are found, in the same position, the projections of angular velocities of the supermolecule are obtained from conservation relations for the projections of the angular momentum. Based on the values of the coordinates in four positions, the coordinates on a new time layer are recalculated. After that, solving the system of three linear algebraic equations according to Cramer's rule, the projections of angular velocities at a new time step are determined. Then, the cycle is repeated. During the inertial rotation, the kinetic energy of an object is conserved. Verification of the calculated kinetic energy shows that the result is obtained with machine accuracy. Further, the constructed calculation scheme is used to study the Louis Poincaré instability. The full range of the considered instability for a fullerene C_{100} (C_1 symmetry) is presented.

Keywords: numerical modeling, molecular dynamics, fullerenes

Acknowledgments: This work was partially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. 075-02-2020-1479/1).

For citation: Bubenchikov, M.A., Mamontov, D.V., Azheev, S.A., Azheev, A.A. (2022) Rotation of supermolecules around an intermediate axis of inertia. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 49–58. doi: 10.17223/19988621/80/5

Введение

Существует два основных подхода в описании вращательного движения тел, в частности супермолекул. Первый – подход Эйлера. В этом подходе уравнения теоремы о кинетическом моменте рассматриваются в подвижных осях, и вводятся в рассмотрение углы Эйлера (углы, определяющие взаимное расположение подвижного и неподвижного базисов). Причем углы Эйлера находятся из так называемых кинематических соотношений Эйлера, которые имеют координатную особенность при значениях углов нутации, кратных π . Кроме того, подход Эйлера имеет такое свойство, как «блокировка осей», и результат будет зависеть от выбора порядка осей, вокруг которых осуществляются повороты. Общий случай этого подхода описан в [1]. В работах [2–5] представлены примеры применения этого подхода в молекулярной динамике. Второй способ описания вращательного движения можно назвать подходом Гамильтона [6]. Он опирается на использование гиперкомплексных чисел в четырехмерном пространстве, т.е. кватернионов. Эти числа позволяют проще комбинировать вращения и избежать проблем с особенностями представления поворотов в пространстве. Однако при практической реализации требуется использование в вычислительных системах встроеной алгебры гиперкомплексных чисел. Кроме того, кватернионы могут становиться недействительными из-за ошибки округления чисел с плавающей запятой (эту «вкравшуюся ошибку» можно устранить ренормализацией кватерниона). Еще одним препятствием для применения кватернионов может быть высокая сложность их понимания. В работах [7–11] кватернионы использовались в расчетах

молекулярной динамики. В настоящей работе представлен способ расчета вращения супермолекул без использования кватернионов и углов Эйлера.

Вполне сформировавшейся к настоящему времени является проблема расчета инерциального вращения объектов с применением высокоточных алгоритмов, использующих идею пересчета на каждом шаге по времени. Надежный метод Рунге–Кутты разработан и применяется лишь для решения эволюционных задач. В рассматриваемой ситуации основное уравнение вращательного движения не имеет формы, содержащей производную по времени, поскольку записывается в виде алгебраических соотношений, определяющих постоянство проекций кинетического момента на оси абсолютного базиса. Эволюционными являются лишь кинематические соотношения для скоростей узлов супермолекулы. Эти уравнения мы интегрируем на каждой четвертой шага стандартного метода Рунге–Кутты четвертого порядка точности и находим новые значения координат узлов. В то же время в каждой промежуточной позиции отдельного шага по времени из решения алгебраической системы уравнений постоянства кинетического момента мы определяем новые проекции мгновенной угловой скорости супермолекулы. После этого по новым значениям проекций скорости поворота и координат узлов находятся значения величин на полном шаге по времени.

Математическое описание вращательной динамики супермолекулы

Рассмотрим уравнение для кинетического момента $\mathbf{K}$ в абсолютном базисе. Согласно теореме об изменении момента количества движения для неизменяемого тела

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{L}^{(e)}. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{L}^{(e)}$ – главный момент внешних сил. В задачах об инерционном движении супермолекул $\mathbf{L}^{(e)} = 0$.

По определению

$$\mathbf{K} = \sum \mathbf{r}_i \times m\mathbf{v}_i, \quad (2)$$

где $\mathbf{r}_i$ – радиус точки тела (в углеродных супермолекулах это радиус атома углерода), $\mathbf{v}_i$ – скорость этой точки, m – масса атома углерода. Если супермолекула вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, то скорость ее отдельной точки будет определена следующим соотношением:

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i. \quad (3)$$

Раскрывая векторное произведение, можно записать:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = \mathbf{i}(\omega_y z_i - \omega_z y_i) + \mathbf{j}(\omega_z x_i - \omega_x z_i) + \mathbf{k}(\omega_x y_i - \omega_y x_i).$$

Здесь использовано, что вектор угловой скорости и радиус-вектор атома углерода в углеродной конструкции имеют следующие проекции на оси абсолютного базиса:

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z), \quad \mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i).$$

Если подставить (3) в (2), то кинетический момент $\mathbf{K}$ будет определяться двойным векторным произведением векторов $\mathbf{r}_i$, $\boldsymbol{\omega}_i$, $\mathbf{r}_i$. Раскрывая это произве-

дение по известной формуле и заменяя скалярные произведения через координаты, получим

$$\mathbf{K} = m \left[\boldsymbol{\omega} \sum (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \sum \mathbf{r}_i (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i) \right]. \quad (4)$$

Проецируя полученное выражение на неподвижные оси, найдем

$$K_x = m \left[\omega_x \sum (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum x_i y_i - \omega_z \sum z_i x_i \right], \quad (5)$$

$$K_y = m \left[-\omega_x \sum x_i y_i + \omega_y \sum (z_i^2 + x_i^2) - \omega_z \sum y_i z_i \right], \quad (6)$$

$$K_z = m \left[-\omega_x \sum z_i x_i - \omega_y \sum y_i z_i + \omega_z \sum (x_i^2 + y_i^2) \right]. \quad (7)$$

Тогда более компактно можно записать:

$$K_x = A\omega_x + F\omega_y + E\omega_z, \quad (8)$$

$$K_y = F\omega_x + B\omega_y + D\omega_z, \quad (9)$$

$$K_z = E\omega_x + D\omega_y + C\omega_z. \quad (10)$$

Здесь A, B, C, D, E, F – компоненты симметричного тензора инерции супермолекулы, которые определяются следующими формулами:

$$A = m \sum (y_i^2 + z_i^2), B = m \sum (z_i^2 + x_i^2), C = m \sum (x_i^2 + y_i^2), \quad (11)$$

$$D = -m \sum y_i z_i, E = -m \sum z_i x_i, F = -m \sum x_i y_i. \quad (12)$$

Здесь x_i, y_i, z_i – координаты, для нахождения которых используются кинематические соотношения (19). Интегрируя (1), в случае инерционного движения $\mathbf{L}^{(e)} = 0$ получим:

$$K_x = K_x^0, K_y = K_y^0, K_z = K_z^0. \quad (13)$$

Здесь K_x^0, K_y^0, K_z^0 – проекции кинетического момента, отвечающие начальному моменту времени (константы). С учетом (8)–(10) последние соотношения можно переписать в виде:

$$A\omega_x + F\omega_y + E\omega_z = A^0\omega_x^0 + F^0\omega_y^0 + E^0\omega_z^0, \quad (14)$$

$$F\omega_x + B\omega_y + D\omega_z = F^0\omega_x^0 + B^0\omega_y^0 + D^0\omega_z^0, \quad (15)$$

$$E\omega_x + D\omega_y + C\omega_z = E^0\omega_x^0 + D^0\omega_y^0 + C^0\omega_z^0. \quad (16)$$

Индекс ‘ноль’ сверху определяет значения величин в начальный момент времени. Скорость каждого атома при вращении молекулы вокруг неподвижного центра масс определяется как скорость во вращательном движении:

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i. \quad (17)$$

Последнее уравнение интегрируется при следующих начальных условиях:

$$t = 0, \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i^0 \quad (i = \overline{1, N}). \quad (18)$$

Здесь $\mathbf{r}_i^0$ определяют начальные положения узлов рассматриваемой молекулярной конструкции, N – количество атомов в супермолекуле. Постановка (14)–(18) вместе с замыкающими соотношениями (11)–(12) определяет все инерционные вращения супермолекул, в частности неустойчивое движение вокруг промежуточной оси инерции.

В дальнейшем индекс ‘ i ’ у координат радиус-вектора будем опускать.

Векторное уравнение (17) эквивалентно трем скалярным уравнениям:

$$\frac{dx}{dt} = \omega_y z - \omega_z y, \quad \frac{dy}{dt} = \omega_z x - \omega_x z, \quad \frac{dz}{dt} = \omega_x y - \omega_y x. \quad (19)$$

Эти уравнения и будем интегрировать в первую очередь, решая задачи об инерционном вращении крупных молекул. Уравнения (19) позволяют найти новое значение декартовых координат силовых центров молекулы (координат атомов) при ее повороте на элементарный угол ωdt . Однако в рамках каждого шага по времени мы выделяем четыре позиции по времени (схема четвертого порядка точности). Эти позиции будут отвечать индексам 1, 2, 3, 4 (внизу). Пусть x^n, y^n, z^n – декартовы координаты атомов молекулы на n -слое по времени; в частности, при $n = 0$ это начальные значения координат. Тогда в качестве координат для первой позиции мы, очевидно, должны взять

$$x_1 = x^n, y_1 = y^n, z_1 = z^n. \quad (20)$$

Уравнения (14)–(16) являются уравнениями инерциального вращения. Подставляя в эти уравнения координаты силовых центров (на самом деле $x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}, i = 1, \dots, N$) и разрешая их относительно проекций угловых скоростей, находим $\omega_{x1}, \omega_{y1}, \omega_{z1}$. В результате мы можем вычислить правые части уравнений (18):

$$\xi_1 = \omega_{y1} z_1 - \omega_{z1} y_1, \quad \eta_1 = \omega_{z1} x_1 - \omega_{x1} z_1, \quad \zeta_1 = \omega_{x1} y_1 - \omega_{y1} x_1. \quad (21)$$

По формулам Рунге–Кутты четвертого порядка точности вычисляются значения координат во второй позиции шага по времени:

$$x_2 = x^n + \frac{\Delta t}{2} \xi_1, \quad y_2 = y^n + \frac{\Delta t}{2} \eta_1, \quad z_2 = z^n + \frac{\Delta t}{2} \zeta_1. \quad (22)$$

После этого из системы (14)–(16) находятся $\omega_{x2}, \omega_{y2}, \omega_{z2}$. Когда проекции угловой скорости во второй позиции найдены, можно вычислить ξ_2, η_2, ζ_2 :

$$\xi_2 = \omega_{y2} z_2 - \omega_{z2} y_2, \quad \eta_2 = \omega_{z2} x_2 - \omega_{x2} z_2, \quad \zeta_2 = \omega_{x2} y_2 - \omega_{y2} x_2. \quad (23)$$

Третья позиция по координатам определяется формулами

$$x_3 = x^n + \frac{\Delta t}{2} \xi_2, \quad y_3 = y^n + \frac{\Delta t}{2} \eta_2, \quad z_3 = z^n + \frac{\Delta t}{2} \zeta_2. \quad (24)$$

Далее из (14)–(16) находим $\omega_{x3}, \omega_{y3}, \omega_{z3}$ и вычисляем ξ_3, η_3, ζ_3 :

$$\xi_3 = \omega_{y3} z_3 - \omega_{z3} y_3, \quad \eta_3 = \omega_{z3} x_3 - \omega_{x3} z_3, \quad \zeta_3 = \omega_{x3} y_3 - \omega_{y3} x_3. \quad (25)$$

Тогда четвертая позиция по координатам будет следующей:

$$x_4 = x^n + \Delta t \xi_3, \quad y_4 = y^n + \Delta t \eta_3, \quad z_4 = z^n + \Delta t \zeta_3. \quad (26)$$

По значениям x_4, y_4, z_4 из (14)–(16) находим $\omega_{x4}, \omega_{y4}, \omega_{z4}$ и после этого

$$\xi_4 = \omega_{y4} z_4 - \omega_{z4} y_4, \quad \eta_4 = \omega_{z4} x_4 - \omega_{x4} z_4, \quad \zeta_4 = \omega_{x4} y_4 - \omega_{y4} x_4. \quad (27)$$

Теперь можно найти значения координат на следующем шаге по времени:

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n + \frac{\Delta t}{6} (\xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3 + \xi_4); \\ y^{n+1} &= y^n + \frac{\Delta t}{6} (\eta_1 + 2\eta_2 + 2\eta_3 + \eta_4); \\ z^{n+1} &= z^n + \frac{\Delta t}{6} (\zeta_1 + 2\zeta_2 + 2\zeta_3 + \zeta_4). \end{aligned} \quad (28)$$

Значения проекций угловых скоростей на очередном шаге по времени ω_x^{n+1} , ω_y^{n+1} , ω_z^{n+1} также определяются из уравнений (14)–(16) после подстановки значений координат из (28).

Направляющие косинусы вектора ω :

$$\alpha = \frac{\omega_x}{\omega}, \quad \beta = \frac{\omega_y}{\omega}, \quad \gamma = \frac{\omega_z}{\omega}. \quad (29)$$

Здесь $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$ – модуль вектора мгновенной угловой скорости.

Тогда момент инерции супермолекулы относительно мгновенной оси вращения будет

$$J = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2D\beta\gamma + 2E\gamma\alpha + 2F\alpha\beta. \quad (30)$$

Зная момент инерции, легко рассчитать мгновенное значение кинетической энергии:

$$T = J \frac{\omega^2}{2}. \quad (31)$$

Это значение должно оставаться постоянным во все время инерционного вращения около центра масс тела. Проверка закона сохранения кинетической энергии в инерционном движении может быть тестом, подтверждающим правильность выполненных расчетов. В процессе расчетов удобно отслеживать траекторию конца единичного вектора, имеющего координаты (29). В этом случае мы будем видеть только кувырки тела, а траектория участков постоянного вращения будет стянута в точку.

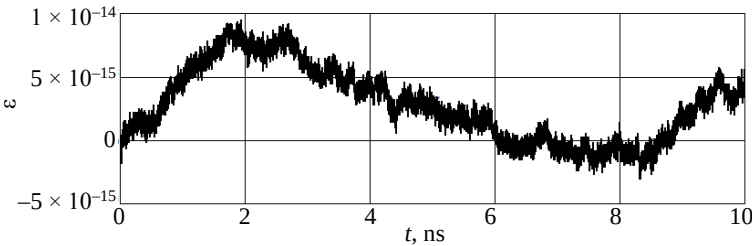


Рис. 1. Относительная погрешность вычислений

Fig. 1. Relative error in calculations

На рис. 1 представлен график относительной погрешности вычислений $\varepsilon = (T - T_0) / T_0$. Здесь T_0 – начальное значение энергии вращения объекта. Расчеты проведены при $\Delta t = 10^{-6}$ нс. Как видно, погрешность имеет порядок машинной точности. Таким образом, в рассматриваемом случае на промежутке времени, отвечающем нескольким кувыркам объекта, мы можем говорить о точном численном решении задачи.

Результаты расчетов

Описанная выше схема четвертого порядка точности относительно шага по времени позволяет получить блестящее соответствие расчетных значений с точными распределениями во всех тестовых задачах инерционного движения. Рассмотрим

теперь результаты расчета неустойчивого движения, инерционного вращения тела вокруг главной оси инерции, имеющей промежуточную величину момента инерции тела. В качестве супермолекулы мы использовали фуллерен C_{100} (C_1 симметрия), схематически представленный на рис. 2, 3.

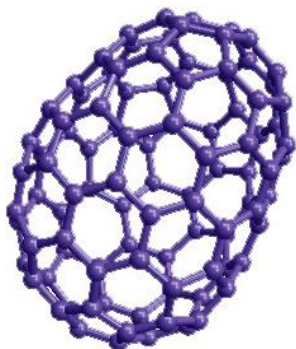


Рис. 2. Схематическое изображение фуллерена C_{100} (C_1)

Fig. 2. Schematic representation of a fullerene C_{100} (C_1)

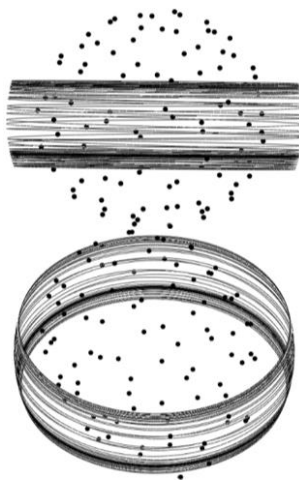


Рис. 3. Траектория одного из атомов углерода, принадлежащего фуллерену

Fig. 3. Trajectory of a carbon atom of the fullerene

Рис. 3 показывает, траекторию атома фуллерена во время вращения. На этом рисунке видны две наиболее жирно прорисованных окружности – это два положения вращения фуллерена. Данные окружности отвечают горизонтальным участкам частоты, показанной на рис. 4. Все остальные точки на рис. 3 являются переворотом фуллерена из-за неустойчивого вращения вокруг оси, имеющей промежуточный момент инерции.

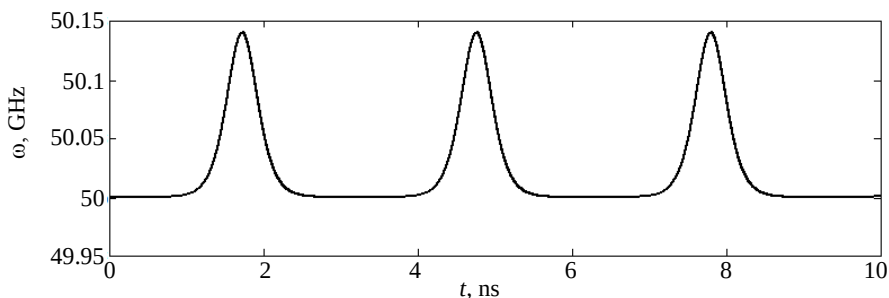


Рис. 4. Модуль вектора мгновенной частоты вращения

Fig. 4. Modulus of an instantaneous speed vector

На рис. 4., горизонтальные площадки отражают стабильное вращение фуллерена, в то время как пики – это перевороты фуллерена на 180° .

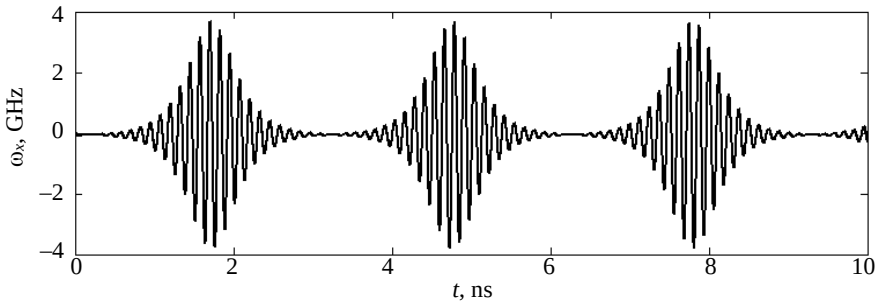


Рис. 5. Индуцированная x-компонента угловой скорости
Fig. 5. The induced x-component of the angular velocity

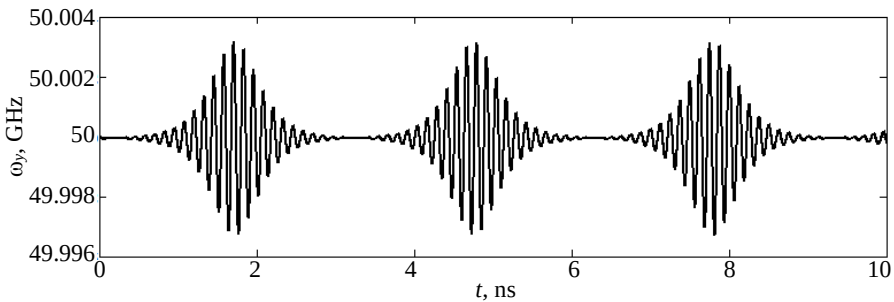


Рис. 6. Индуцированная y-компонента угловой скорости
Fig. 6. The induced y-component of the angular velocity

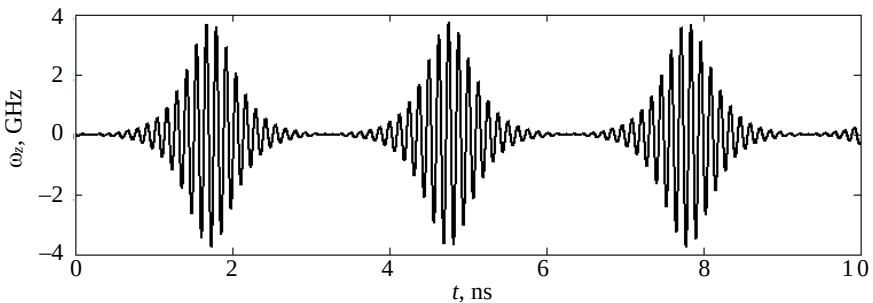


Рис. 7. Индуцированная z-компонента угловой скорости
Fig. 7. The induced z-component of the angular velocity

На рис. 3–7 мы имеем универсальный портрет неустойчивости вращения вокруг промежуточной оси инерции для фуллерена, вращающегося вокруг оси, имеющей промежуточный момент инерции.

Заключение

Математическая модель инерционного вращения супермолекул строится на основе теоремы о сохранении момента количества этих молекулярных конструкций и кинематических соотношений, определяющих координаты отдельных атомов. Несмотря на сохранение значений каждой из компонент кинетического момента,

изменение координат узлов молекулярной конструкции в случае вращения супермолекулы вокруг промежуточной оси инерции неизбежно приводит к изменению проекций ее угловых скоростей. В этом случае мгновенная ось вращения изменяет свое положение в пространстве. По траекториям, являющимся пересечением мгновенной оси вращения с единичной сферой, можно сделать заключение о характере рассматриваемой неустойчивости. Высокоточный алгоритм решения эволюционных задач был встроено в условия динамического равновесия рассматриваемой механической системы. Это позволило получить достоверный результат теоретического анализа.

Список источников

1. Goldstein H. Classical Mechanics. 2nd ed. USA: Addison–Wesley, 1980. 638 p.
2. Бубенчиков М.А., Бубенчиков А.М., Мамонтов Д.В. Вращения и вибрации торов в молекулярном комплексе $C_{20}@C_{80}$ // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 71. С. 35–48. doi: 10.17223/19988621/71/4
3. Бубенчиков М.А., Бубенчиков А.М., Мамонтов Д.В., Капарулин Д.С., Лун-Фу А.В. Вращение торов в структуре жидкого кристалла // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 73. С. 42–49. doi: 10.17223/19988621/73/4
4. Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Mamontov D.V., Kaparulin D.S., Lun-Fu A.V. Dynamic state of columnar structures formed on the basis of carbon nanotori // Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures. 2021. V. 29 (10). P. 1–7. doi: 10.1080/1536383X.2021.1908268
5. Lun-Fu A.V., Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Mamontov D.V., Borodin V.A. Interaction of molecular tori in columnar structures // Journal of Physics: Condensed Matter. 2021. V. 34 (12). doi: 10.1088/1361-648X/ac45b9
6. Hamilton R.W. On quaternions; or on a new system of imaginaries in Algebra // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1844. V. 25 (169). P. 489–495. doi: 10.1080/1478644408645047
7. Denis J.E., Sohail M. Singularity free algorithm for molecular dynamics simulation of rigid polyatomics // Molecular Physics. 1977. V. 34 (2). P. 327–331. doi: 10.1080/00268977700101761
8. Pawley G.S. Molecular dynamics simulation of the plastic phase; a model for SF_6 // Molecular Physics. 1981. V. 43 (6). P. 1321–1330. doi: 10.1080/00268978100102091
9. Karney Ch. Quaternions in molecular modeling // Journal of Molecular Graphics & Modelling. 2007. V. 25. P. 595–604. doi: 10.1016/j.jmglm.2006.04.002
10. Miller T.F. III, Eleftheriou M., Pattnaik P., Ndirango A., Newns D. Symplectic quaternion scheme for biophysical molecular dynamics // The Journal of Chemical Physics. 2002. V. 116 (20). P. 8649–8659. doi: 10.1063/1.1473654
11. Chen P.-c., Hologne M., Walker O. Computing the Rotational Diffusion of Biomolecules via Molecular Dynamics Simulation and Quaternion Orientations // The Journal of Physical Chemistry B. 2017. V. 121 (8). P. 1812–1823. doi: 10.1021/acs.jpcc.6b11703

References

1. Goldstein H. (1980) *Classical Mechanics* (2nd ed.). USA: Addison–Wesley.
2. Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Mamontov D.V. (2021) Vrashcheniya i vibratsii torov v molekulyarnom komplekse $C_{20}@C_{80}$ [Rotations and vibrations of fullerenes in the molecular complex $C_{20}@C_{80}$]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 71. pp. 35–48. doi: 10.17223/19988621/71/4
3. Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Mamontov D.V., Kaparulin D.S., Lun-Fu A.V. (2021) Vrashchenie torov v structure zhidkogo cristalla [Rotations of tori in a liquid crystal

- structure]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics* 73. pp. 42–49. doi: 10.17223/19988621/73/4
4. Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Mamontov D.V., Kaparulin D.S., Lun-Fu A.V. (2021) Dynamic state of columnar structures formed on the basis of carbon nanotori. *Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures*. 29(10). pp. 1–7. doi: 10.1080/1536383X.2021.1908268
 5. Lun-Fu A.V., Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Mamontov D.V., Borodin V.A. (2021) Interaction of molecular tori in columnar structures. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 34(12). doi: 10.1088/1361-648X/ac45b9
 6. Hamilton R.W. (1844) On quaternions; or on a new system of imaginaries in Algebra. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. 25(169). pp. 489–495. doi: 10.1080/14786444408645047
 7. Denis J.E., Sohail M. (1977) Singularity free algorithm for molecular dynamics simulation of rigid polyatomics. *Molecular Physics*. 34(2). pp. 327–331. doi: 10.1080/00268977700101761
 8. Pawley G.S. (1981) Molecular dynamics simulation of the plastic phase; a model for SF₆. *Molecular Physics*. 43(6). pp. 1321–1330. doi: 10.1080/00268978100102091
 9. Karney C. (2007) Quaternions in molecular modeling. *Journal of Molecular Graphics & Modelling*. 25. pp. 595–604. doi: 10.1016/j.jmgm.2006.04.002
 10. Miller T.F. III, Eleftheriou M., Pattnaik P., Ndirango A., Newns D. (2002) Symplectic quaternion scheme for biophysical molecular dynamics. *The Journal of Chemical Physics*. 116(20). pp. 8649–8659. doi: 10.1063/1.1473654
 11. Chen P.-C., Hologne M., Walker O. (2017) Computing the rotational diffusion of biomolecules via molecular dynamics simulation and quaternion orientations. *The Journal of Physical Chemistry B*. 121(8). pp. 1812–1823. doi: 10.1021/acs.jpccb.6b11703

Сведения об авторах:

Бубенчиков Михаил Алексеевич – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: michael121@mail.ru

Мамонтов Дмитрий Владимирович – младший научный сотрудник регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: orevaore@mail.ru

Ажеев Сергей Андреевич – магистрант механико-математического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: sazheev72@yandex.ru

Ажеев Александр Андреевич – магистрант механико-математического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: sazheev@gmail.com

Information about the authors:

Bubenchikov Mikhail A. (Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher of the Regional Scientific and Educational Mathematical Center, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: michael121@mail.ru

Mamontov Dmitriy V. (Junior Researcher of the Regional Scientific and Educational Mathematical Center, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: orevaore@mail.ru

Azheev Sergey A. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: sazheev72@yandex.ru

Azheev Aleksandr A. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: sazheev@gmail.com

Статья поступила в редакцию 20.01.2022; принята к публикации 01.12.2022

The article was submitted 20.01.2022; accepted for publication 01.12.2022

Научная статья

УДК 681.5.015.23: 629.7.05

doi: 10.17223/19988621/80/6

Оптимизация программы выведения полезной нагрузки на заданную траекторию

Александр Сергеевич Глазунов¹, Анастасия Александровна Сизова²,
Ирина Леонидовна Петрова³

*Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ»
им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург, Россия*

¹ ssan4ekk77@gmail.com

² sizova_aa@voenmeh.ru

³ petrova_il@voenmeh.ru

Аннотация. Исследована задача выбора и оптимизации программы выведения полезной нагрузки на заданную круговую орбиту. Рассмотрено как прямое выведение на круговую орбиту, так и выведение с использованием промежуточной эллиптической орбиты. Рассчитан диапазон массы полезной нагрузки, которую можно вывести на круговую орбиту с заданными параметрами при помощи ракеты-носителя среднего класса, в качестве которой используется снятая с вооружения баллистическая ракета.

Ключевые слова: ракета-носитель, баллистическая ракета, программа выведения полезной нагрузки, критерий оптимизации, выведение на орбиту

Для цитирования: Глазунов А.С., Сизова А.А., Петрова И.Л. Оптимизация программы выведения полезной нагрузки на заданную траекторию // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 80. С. 59–72. doi: 10.17223/19988621/80/6

Original article

Optimization of a program for launching the payload on a specified trajectory

Aleksandr S. Glazunov¹, Anastasiya A. Sizova², Irina L. Petrova³

*Baltic State Technical University “VOENMEKH” named after D.F. Ustinov,
Saint Petersburg, Russian Federation*

¹ ssan4ekk77@gmail.com

² sizova_aa@voenmeh.ru

³ petrova_il@voenmeh.ru

Abstract. In this paper, the problem of choosing and optimizing a program for launching the payload (PL) into a specified circular orbit is considered. Both direct insertion into

the circular orbit and the insertion using an intermediate elliptical orbit are examined. The mass range of the PL, which can be placed into the circular orbit with specified parameters, is calculated.

The PL is launched using a medium-class launch vehicle (LV), which is proposed to be a hypothetical ballistic missile withdrawn from service.

The LV movement program is divided into two sections: the escape from the atmosphere and the launch section. Both sections use a control program with the pitch angle as a parameter. The optimal parameters for the program are determined.

Direct insertion into the circular orbit is revealed to be possible for a very limited range of PL masses. It is shown that the range can be significantly extended if an intermediate elliptical orbit is used.

The study results prove that the use of the selected LV allows placing the PL in the specified circular and elliptical orbits. For the formation of the orbital trajectories of the PL launch, it is possible to use an almost invariable parametric class of LV flight control programs.

Keywords: launch vehicle, ballistic missile, payload launch program, optimization criterion, launch into orbit

For citation: Glazunov, A.S., Sizova, A.A., Petrova, I.L. (2022) Optimization of a program for launching the payload on a specified trajectory. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 59–72. doi: 10.17223/19988621/80/6

Введение

Постоянный рост заказов на выведение искусственных спутников Земли приводит к ежегодному дефициту ракетоносителей (РН) порядка нескольких десятков единиц. В литературе рассматривается идея использования в качестве РН баллистических ракет (БР), снятых с вооружения. К преимуществам использования БР в качестве РН следует отнести низкую стоимость и малые сроки их переоборудования, возможность обеспечения высокой надежности, широкие возможности варьирования траекториями выведения полезной нагрузки (ПН). Однако в связи с тем, что параметры траекторий выведения ПН отличаются от параметров баллистических траекторий, возникает необходимость доработки снимаемых с вооружения БР при переоборудовании их под РН; в частности, необходимо доработать логику функционирования их систем управления [1, 2].

Цель данной работы – исследование возможности выведения ПН на круговые орбиты при использовании в качестве РН гипотетической БР, снятой с вооружения, определение диапазона масс ПН, разработка и оптимизация программы выведения, позволяющей осуществить как прямой вывод ПН на круговую орбиту, так и вывод с использованием промежуточной эллиптической орбиты.

Постановка задачи

Следует представить вывод уравнений, описывающих движение РН в инерциальной геоцентрической системе координат. Рассматривается движение в плоскости стрельбы.

Кажущиеся ускорения РН в системе координат, связанной с продольной осью ракеты, описываются следующими уравнениями [3]:

$$\begin{cases} w_x = \left(P(t) - \frac{1}{2} c_{x0}(h, M) \rho(h) V^2 S_m \right) / m(t); \\ w_y = \left(\frac{1}{2} c_y^\alpha(M) \alpha \rho V^2 S_m \right) / m(t); \\ w_z = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $P(t)$ – сила тяги ракетного двигателя; $c_{x0}(h, M)$ – коэффициент лобового сопротивления; $\rho(h)$ – плотность воздуха; V – модуль скорости движения РН относительно атмосферы Земли; S_m – площадь миделового сечения РН; $m(t)$ – масса РН; $c_y^\alpha(M)$ – производная коэффициента подъемной силы по углу атаки α ; M – число Маха; h – высота полета РН.

Для перехода к стартовой системе координат необходимо сделать один поворот вокруг оси z_c стартовой системы координат на угол тангажа ϑ . Матрица перехода следующая:

$$B = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Чтобы получить проекции кажущегося ускорения в инерциальной геоцентрической системе координат, осуществляются три поворота в следующей последовательности: на угол широты φ , на угол долготы λ и на угол азимута A . Матрица перехода выглядит следующим образом:

$$C = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda \cos A - \sin \lambda \sin A & \cos \varphi \cos \lambda & \sin \varphi \cos \lambda \sin A - \sin \lambda \cos A \\ -\sin \varphi \sin \lambda \cos A + \cos \lambda \sin A & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \sin \lambda \sin A + \cos \lambda \cos A \\ \cos \varphi \cos A & \sin \varphi & -\cos \varphi \sin A \end{bmatrix}. \quad (3)$$

В результате проекции кажущегося ускорения в инерциальной геоцентрической системе координат

$$\bar{w}_u = C \cdot B \cdot \bar{w}. \quad (4)$$

Для получения абсолютных ускорений необходимо к кажущемуся ускорению добавить ускорение силы тяжести Земли. В качестве модели Земли выбран эллипсоид вращения, гравитационное поле которого описывается зональными гармониками до четвертой включительно. Гравитационное ускорение в соответствии с моделью нормального гравитационного поля Земли рассчитывается по формуле [3]

$$\bar{g} = -\frac{fM}{r^2} \left\{ (1+p) \frac{\bar{r}}{r} + \Delta p \cdot s \cdot \bar{e}_\omega \right\}, \quad (5)$$

здесь fM – произведение гравитационной постоянной на массу Земли, $\bar{r}$ – вектор координат центра масс ракеты, $\bar{e}_\omega = (0, 0, 1)$ – орт оси вращения Земли,

$$\begin{aligned} s = \frac{\bar{r}}{r} \bar{e}_\omega = \frac{z}{r}, \quad p = 1.5a_r^2 \{ J_{20}(1-5d) - 1.875J_{40}a_r^2(1-14d+21d^2) \}, \\ \Delta p = a_r^2 \{ 3J_{20} - 2.5J_{40}a_r^2(3-7d) \}, \quad a_r^2 = \left(\frac{a}{r} \right)^2, \quad d = s^2, \end{aligned} \quad (6)$$

где a – экваториальный радиус Земли, J_{20} и J_{40} – коэффициенты второй и четвертой гармоник потенциала гравитационного поля.

В результате система уравнений, описывающая движение РН в инерциальной геоцентрической системе координат, имеет вид [3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_x}{dt} = w_{xu} + g_x; \\ \frac{dV_y}{dt} = w_{yu} + g_y; \\ \frac{dV_z}{dt} = w_{zu} + g_z; \\ \frac{dx}{dt} = V_x; \\ \frac{dy}{dt} = V_y; \\ \frac{dz}{dt} = V_z, \end{array} \right. \quad (7)$$

где w_{xu} , w_{yu} , w_{zu} – проекции кажущегося ускорения на оси инерциальной геоцентрической системы координат, g_x , g_y , g_z – проекции гравитационного ускорения, V_x , V_y , V_z – проекции скорости РН в инерциальной геоцентрической системе координат.

Требуется определить и оптимизировать программу выведения ПН на заданную круговую орбиту.

Разработка и оптимизация программы выведения

Выведение РН условно разбивается на два участка: выход из атмосферы и участок выведения. На обоих участках используется программа управления, в которой параметром является угол тангажа ϑ .

Программа выхода из атмосферы выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vartheta = \pi / 2, \quad \text{если } 0 \leq T \leq t_{0z}; \\ \vartheta = \pi / 2 - dZ \cdot (T - t_{0z}), \quad \text{если } t_{0z} < T \leq t_{0z} + t_z; \\ \vartheta = \pi / 2 - dZ \cdot t_z, \quad \text{если } t_{0z} + t_z < T \leq t_{0z} + t_z + t_{y\theta}; \\ \vartheta = \theta + \alpha, \quad \text{где } \alpha = \alpha_{\text{стаб}} \cdot e^{-k \cdot (T - (t_{0z} + t_z + t_{y\theta}))}, \\ \quad \text{если } t_{0z} + t_z + t_{y\theta} < T \leq t_{0z} + t_z + t_{y\theta} + t_{\text{стаб}}; \\ \vartheta = \theta, \quad \text{если } t_{0z} + t_z + t_{y\theta} + t_{\text{стаб}} < T \leq t_{\text{атм}}. \end{array} \right. \quad (8)$$

Здесь T – время полета; t_{0z} – время вертикального взлета; t_z – время «заклона»; dZ – угловая скорость «заклона»; $t_{y\theta}$ – время удержания угла тангажа для стабилизации переходных процессов (задается жестко, не более одной секунды); θ – угол наклона вектора скорости к местному горизонту; $t_{\text{стаб}}$ – время специального управления, при котором происходит медленное уменьшение угла атаки α ; $\alpha_{\text{стаб}}$ – угол атаки на момент окончания удержания угла тангажа; k – коэффициент при управлении по углу атаки; $t_{\text{атм}}$ – момент выхода из атмосферы.

Во время полета в атмосфере в момент t_{k1} происходит разделение первой и второй ступеней. Здесь t_{k1} – время окончания работы первой ступени. Разделение происходит во время гравитационного разворота при небольших угловых скоростях вращения РН, при этом угол тангажа продолжает плавно изменяться.

Так как задачей является выведение ПН на орбиту, то вектор скорости при выходе из атмосферы должен быть направлен как можно ближе к касательной к Земле. Однако ограничение на величину скоростного напора при разделении первой и второй ступеней накладывает граничное условие «снизу» на угол наклона вектора скорости в момент выхода из атмосферы.

Таким образом, требуется определить время «заклона» t_z , обеспечивающее выведение на минимальный угол наклона вектора скорости, при котором соблюдается ограничение по скоростному напору. Данная задача решается с помощью метода Ньютона:

$$\frac{\partial Qa_{tk1}}{\partial t_z} \Delta t_z = \Delta Qa_{tk1}, \quad (9)$$

где Qa_{tk1} – величина скоростного напора в момент отделения первого разгонного блока.

После успешного выхода из атмосферы начинается участок выведения, в котором варьируемыми параметрами программы управления являются начальный угол тангажа ϑ_0 и скорость изменения угла тангажа $d\vartheta$. Граничными условиями, необходимыми для нахождения указанных параметров, являются угол наклона вектора скорости в конце работы третьей ступени (должен быть равен нулю) и конечное значение модуля вектора скорости. Данная задача является двухпараметрической и также решается методом Ньютона:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_{tk3}}{\partial \vartheta_0} \Delta \vartheta_0 + \frac{\partial \theta_{tk3}}{\partial (d\vartheta)} \Delta (d\vartheta) = \Delta \theta_{tk3}; \\ \frac{\partial V_{tk3}}{\partial \vartheta_0} \Delta \vartheta_0 + \frac{\partial V_{tk3}}{\partial (d\vartheta)} \Delta (d\vartheta) = \Delta V_{tk3}, \end{cases} \quad (10)$$

где θ_{tk3} – угол наклона вектора скорости в момент времени окончания работы третьей ступени t_{k3} , V_{tk3} – модуль скорости в момент времени окончания работы третьей ступени.

Программа управления для участка выведения с учетом найденных параметров ϑ_0 и $d\vartheta$ выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \vartheta = \vartheta_0 + d\vartheta \cdot (T - t_{\text{атм}}), & \text{если } t_{\text{атм}} < T \leq t_{k2} - t_{ks}; \\ \vartheta = \vartheta_0 + d\vartheta \cdot (t_{k2} - t_{ks} - t_{\text{атм}}), & \text{если } t_{k2} - t_{ks} < T \leq t_{k2}; \\ \vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_r + d\vartheta \cdot (T - t_{ks} - t_{\text{атм}}), & \text{если } t_{k2} < T \leq t_{k3} - t_{ks}; \\ \vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_r + d\vartheta \cdot (t_{k3} - 2 \cdot t_{ks} - t_{\text{атм}}), & \text{если } t_{k3} - t_{ks} < T \leq t_{k3}, \end{cases} \quad (11)$$

где t_{k2} – время окончания работы второй ступени, t_{k3} – время окончания работы третьей ступени, t_{ks} – время удержания угла тангажа, ϑ_r – добавка к углу тангажа.

Результаты моделирования

Расчеты производились для гипотетической РН со следующими параметрами: $m_0 = 60$ т – стартовая масса, $m_{c1} = 500$ кг/с – массовый расход первой ступени,

$m_{c2} = 150$ кг/с – массовый расход второй ступени, $m_{c3} = 50$ кг/с – массовый расход третьей ступени, $u_e = 2\,800$ м/с – эффективная скорость истечения газов, $S_m = 3$ м² – площадь миделевого сечения для всех ступеней, $c_x \approx 0.2$ – среднее значение коэффициента лобового сопротивления, $c_y^a = 0.04$ 1/рад – среднее значение производной коэффициента подъемной силы по углу атаки.

Моменты переключения программы управления были выбраны следующие: $t_{0z} = 0.5$ с, $t_{уд} = 0.6$ с, $t_{атм} = 90$ с, $t_{k1} = 60$ с, $t_{k2} = 133$ с, $t_{k3} = 176$ с, $t_{ks} = 10$ с.

При расчетах космическим пространством принималась высота выше 100 км, поэтому если конечная высота выведения оказывалась ниже 100 км, то задача считалась нерешенной.

Для определения массы ПН при решении задачи выведения на круговую орбиту использовался итеративный перебор, который заключался в следующем: некоторая начальная масса ПН постепенно уменьшалась на величину Δm_i ($\Delta m_1 = -100$ кг, $\Delta m_2 = -200$ кг и т.д.), и с ней решалась задача выведения. Сначала шаг изменения массы выбирался около 100 кг, затем границы уточнялись с шагом 10 кг и 1 кг. В результате были получены минимальная и максимальная масса ПН, которую РН сможет вывести на заданную круговую орбиту.

Для решения задачи выведения РН на круговую орбиту была написана программа на языке C++. Алгоритм программы заключается в следующем:

1. Задается вектор приращений Δm_i , которые по очереди подаются в алгоритм.
2. С заданными начальными условиями выполняется расчет вертикального участка движения РН.
3. С начальными условиями, полученными в конце вертикального участка, решается однопараметрическая задача Ньютона и определяется время «заклона» РН.
4. С полученным временем «заклона» выполняется расчет движения РН до момента выхода из атмосферы.
5. С начальными условиями, соответствующими моменту выхода из атмосферы, решается двухпараметрическая задача Ньютона и определяются параметры ϑ_0 и $d\vartheta$.
6. Если двухпараметрическая задача Ньютона сходится, то выполняется расчет участка выведения, запоминается масса полезной нагрузки, и работа программы возвращается к п. 2;
7. Если двухпараметрическая задача Ньютона не сходится, то возвращаемся к п. 2, выбирая следующее приращение.

Результат вычислений диапазона масс ПН, которую РН способна вывести на круговую орбиту, представлен в табл. 1–3.

Таблица 1

Вариация массы ПН с шагом 100 кг

Δm , кг	Задача Ньютона	Время заклона, с	Начальный тангаж, °	Производная тангажа, °/с	Высота на момент конца работы 3-й ступени, км
...	...	...	...	...	...
–700	Не сошлась	1.329	–	–	–
–800	Сошлась	1.322	–22.3	0.008	122.7
–900	Сошлась	1.318	–39.3	0.417	102.3
–1000	Не сошлась	1.311	–	–	–
...	...	...	...	...	...

Таблица 2

Вариация массы ПН с шагом 10 кг

Δm , кг	Задача Ньютона	Время заклона, с	Начальный тангаж, °	Производная тангажа, °/с	Высота на момент конца работы 3-й ступени, км
...	...	...	...	...	...
-780	Не сошлась	1.328	—	—	—
-790	Сошлась	1.326	-18.2	-0.092	127.8
...	...	...	...	...	...
-910	Сошлась	1.315	-40.5	0.446	100.9
-920	Не сошлась	1.312	—	—	—
...	...	...	...	...	...

Таблица 3

Вариация массы ПН с шагом 1 кг

Δm , кг	Задача Ньютона	Время заклона, с	Начальный тангаж, °	Производная тангажа, °/с	Высота на момент конца работы 3-й ступени, км
...	...	...	...	...	...
-784	Не сошлась	1.327	—	—	—
-785	Сошлась	1.326	-13.9	-0.191	133.1
...	...	...	...	...	...
-916	Сошлась	1.317	-41.3	0.463	100.1
-917	Не сошлась	1.317	—	—	—
...	...	...	...	...	...

На рис. 1–6 представлены результаты моделирования для максимальной и минимальной массы ПН при выведении на круговые орбиты.

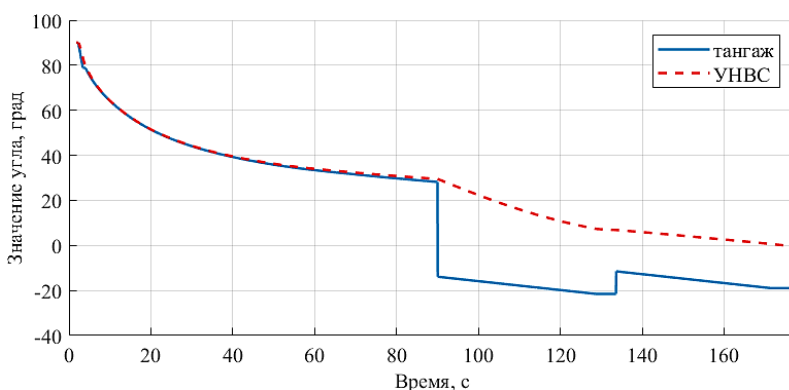


Рис. 1. Зависимость углов тангажа и наклона вектора скорости от времени для максимальной полезной нагрузки

Fig. 1. Dependence of the pitch angle and the velocity vector inclination angle on time for the maximum payload

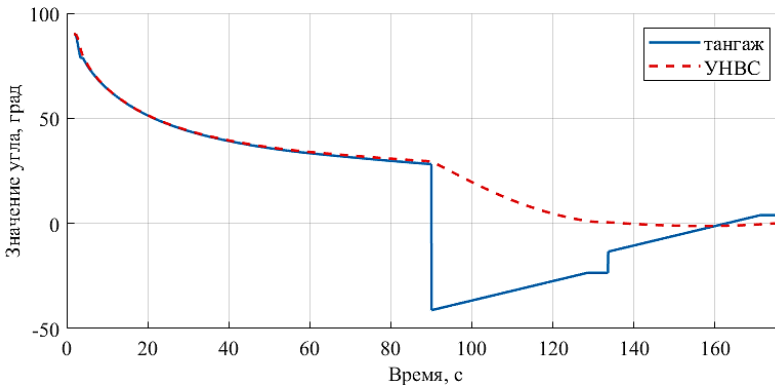


Рис. 2. Зависимость углов тангажа и наклона вектора скорости от времени для минимальной полезной нагрузки
Fig. 2. Dependence of the pitch angle and the velocity vector inclination angle on time for the minimum payload

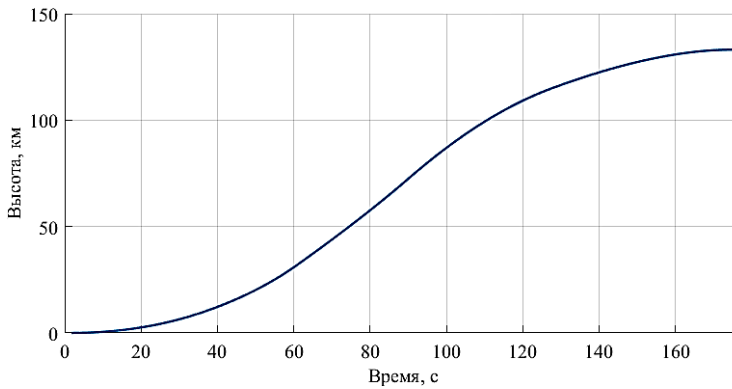


Рис. 3. Зависимость высоты от времени для максимальной полезной нагрузки
Fig. 3. Dependence of the altitude on time for the maximum payload

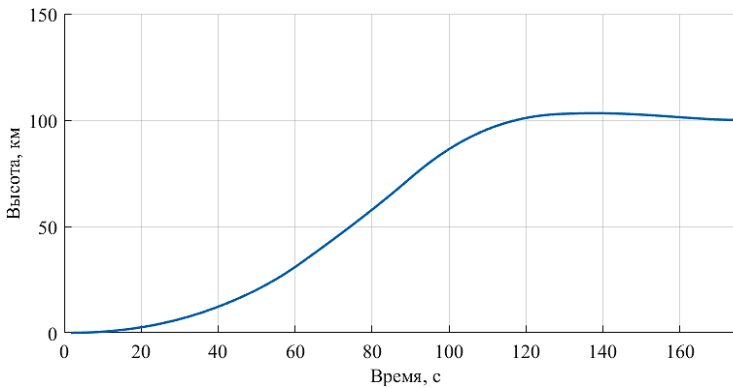


Рис. 4. Зависимость высоты от времени для минимальной полезной нагрузки
Fig. 4. Dependence of the altitude on time for the minimum payload

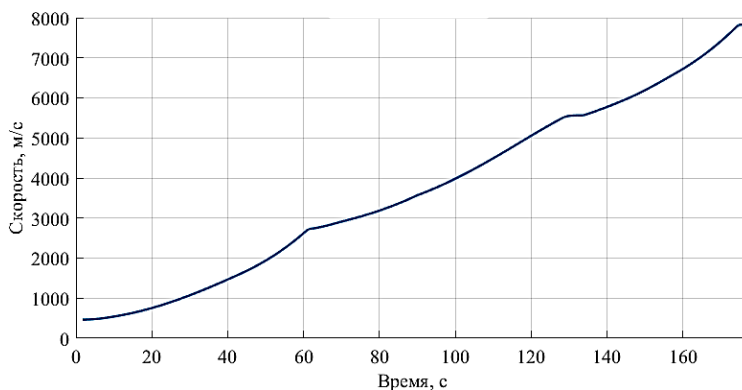


Рис. 5. Зависимость инерциальной скорости от времени для максимальной полезной нагрузки

Fig. 5. Dependence of the inertial velocity on time for the maximum payload

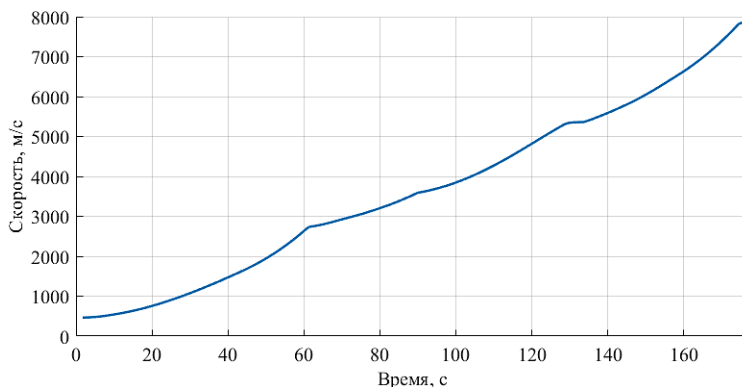


Рис. 6. Зависимость инерциальной скорости от времени для минимальной полезной нагрузки

Fig. 6. Dependence of the inertial velocity on time for the minimum payload

Исходя из результатов исследований, можно сделать вывод, что прямое выведение на круговую орбиту возможно для весьма ограниченного диапазона масс ПН.

Скорректируем предъявляемые граничные условия и поставим задачу следующим образом. Требуется определить программу управления, которая позволит вывести ПН на промежуточную эллиптическую орбиту, используя весь запас характеристической скорости РН. Далее ПН переводится на заданную круговую орбиту с помощью дополнительного импульса двигателя ступени разведения, приложенного в апогее эллиптической орбиты. При этом ограничение на конечную скорость выведения снимается, и ставится задача найти ее максимум.

Алгоритм поиска программы управления для вывода на промежуточную эллиптическую орбиту ПН заданной массы заключается в следующем:

1. Задается некоторое начальное ограничение на скорость РН в конце работы третьей ступени, к примеру первая космическая скорость, и проверяется сходимость описанной выше двухпараметрической задачи Ньютона.

2. Скорость увеличивается с шагом 100 м/с, и определяется максимальное значение скорости РН в конце работы третьей ступени, при котором двухпараметрическая задача Ньютона сходится.

3. Если конечная скорость на участке выведения начинает превышать вторую космическую, то расчет останавливается.

Для решения данной задачи была написана программа на языке C++.

В ходе решения задачи была также произведена оценка импульса ΔI двигателя ступени разведения для перевода ПН на круговую орбиту.

В табл. 4 приведены результаты моделирования выведения ПН различной массы на эллиптические орбиты. При расчетах некоторая начальная масса ПН постепенно уменьшалась на величину Δm_i .

Таблица 4

Влияние начальной массы ПН на конечную скорость

Δm , кг	Задача Ньютона	Высота апогея, км	ϑ_0 , °	$d\vartheta$, %/с	ΔI , м/с	Конечная скорость, м/с
-700	Не сошлась	—	—	—	—	—
-800	Сошлась	122.7	-22.3	0.007	-4.171	7 836.515
-900	Сошлась	456.4	-30.1	0.198	94.839	7 942.218
-1 000	Сошлась	1 223.2	-25.0	0.077	285.215	8 138.184
-1 100	Сошлась	2 106.6	-20.3	-0.034	465.135	8 334.230
-1 200	Сошлась	3 130.2	-17.6	-0.093	634.361	8 531.780
-1 300	Сошлась	4 319.0	-20.1	-0.033	792.433	8 733.519
-1 400	Сошлась	5 818.6	0.8	-0.514	938.019	8 914.746
-1 500	Сошлась	8 517.3	-9.4	-0.269	1 133.401	9 223.326
-1 600	Сошлась	11 010.2	5.9	-0.608	1 243.622	9 408.338
-1 700	Сошлась	17 928.5	-17.8	-0.071	1 415.705	9 830.243
-1 800	Сошлась	27 013.7	-28.3	0.158	1 482.248	10 140.170
-1 900	Сошлась	72 633.6	-1.3	-0.411	1 367.411	10 612.371
-2 000	Не сошлась	—	—	—	—	—

На рис. 7–12 представлены результаты моделирования для максимальной и минимальной массы ПН при выведении на эллиптические орбиты.

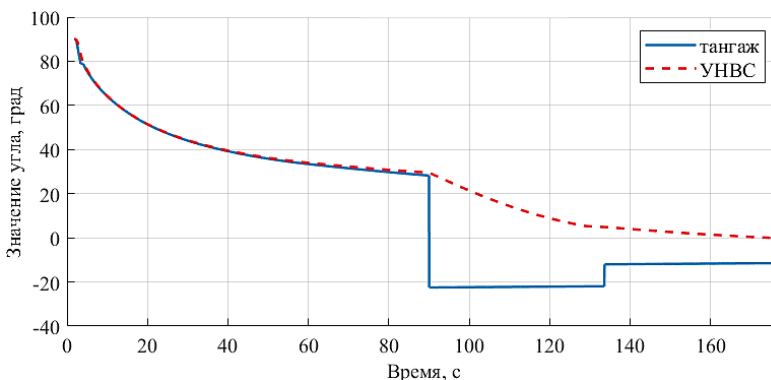


Рис. 7. Зависимость углов тангажа и наклона вектора скорости от времени для максимальной полезной нагрузки при эллиптической орбите
Fig. 7. Dependence of the pitch angle and the velocity vector inclination angle on time for the maximum payload in an elliptical orbit

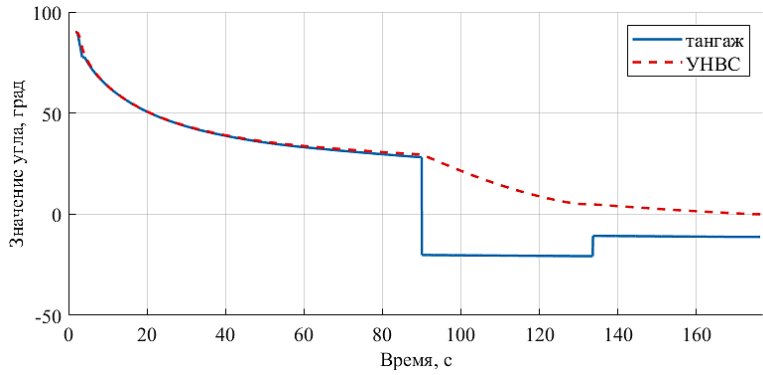


Рис. 8. Зависимость углов тангажа и наклона вектора скорости от времени для минимальной полезной нагрузки при эллиптической орбите
Fig. 8. Dependence of the pitch angle and the velocity vector inclination angle on time for the minimum payload in an elliptical orbit

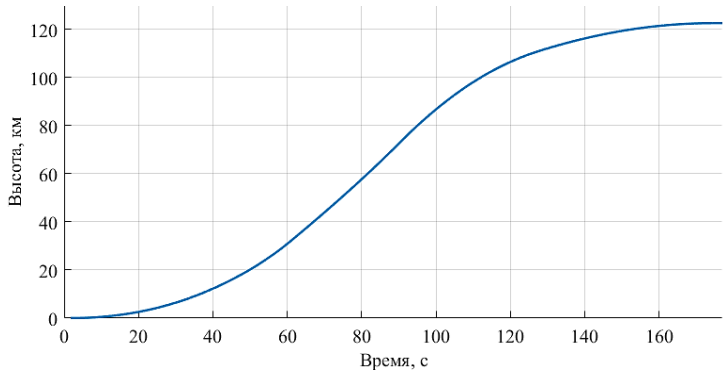


Рис. 9. Зависимость высоты от времени для максимальной полезной нагрузки при эллиптической орбите
Fig. 9. Dependence of the altitude on time for the maximum payload in an elliptical orbit

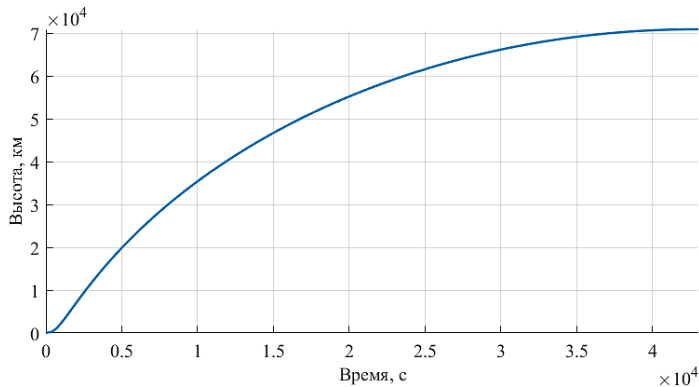


Рис. 10. Зависимость высоты от времени для минимальной полезной нагрузки при эллиптической орбите
Fig. 10. Dependence of the altitude on time for the minimum payload in an elliptical orbit

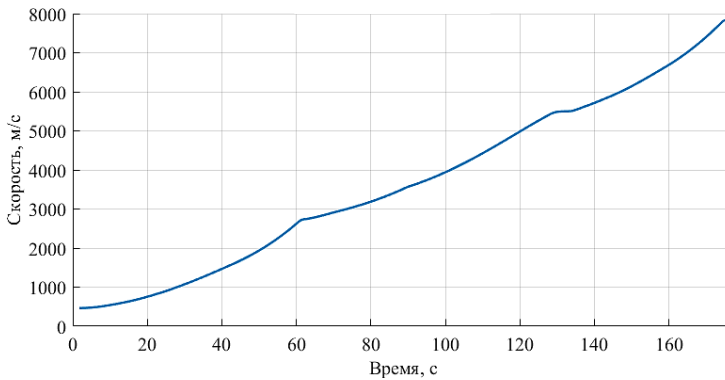


Рис. 11. Зависимость инерциальной скорости от времени для максимальной полезной нагрузки при эллиптической орбите

Fig. 11. Dependence of the inertial velocity on time for the maximum payload in an elliptical orbit

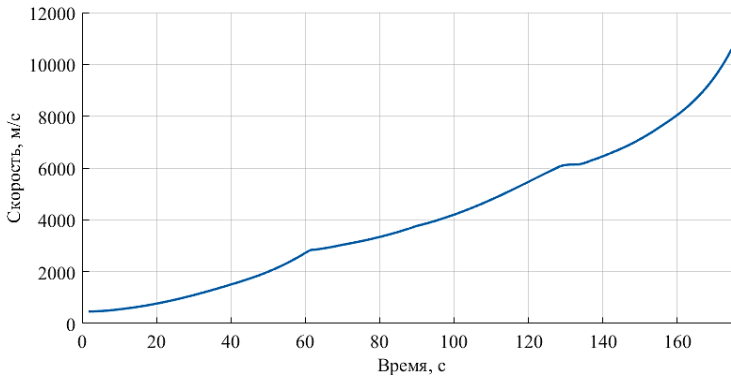


Рис. 12. Зависимость инерциальной скорости от времени для минимальной полезной нагрузки при эллиптической орбите

Fig. 12. Dependence of the inertial velocity on time for the minimum payload in an elliptical orbit

Закключение

Исходя из результатов исследований, можно сделать следующие выводы:

1. Если уменьшить массу полезной нагрузки БР, то снимаемые с вооружения ракеты можно использовать для выведения полезной нагрузки на круговые и эллиптические орбиты.
2. Диапазон масс, которые БР может вывести на круговую орбиту, довольно узкий, однако его можно значительно расширить, если использовать промежуточную эллиптическую орбиту.
3. При снижении массы полезной нагрузки хотя бы на 1.5 т можно получить достаточно высокие орбиты.
4. Для формирования траекторий выведения ПН на круговые и эллиптические орбиты можно использовать практически неизменный параметрический класс программ управления.

Список источников

1. Шевченко С.Н. Метод обоснования объемов экспериментальной отработки и количества запусков по программе выведения полезной нагрузки в космическое пространство при переоборудовании межконтинентальных баллистических ракет в ракеты космического назначения // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2018. № 1 (39). С. 51–54.
2. Кобелев В.Н., Милованов А.Г. Средства выведения космических аппаратов. М. : Рестарт, 2009. 528 с.
3. Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика и наведение летательных аппаратов : учеб. пособие. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. 413 с.
4. Костюсова Е.К., Починский В.И. О задачах выведения ракеты-носителя на заданные эллиптические орбиты // Труды института математики и механики УрО РАН. 2011. № 3. С. 201–216.

References

1. Shevchenko S.N. (2018) Metod obosnovaniya ob"iomov eksperimental'noy otrabotki i kolichestva zapuskov po programme vyvedeniya poleznoy nagruzki v kosmicheskoe prostranstvo pri pereoborudovanii mezhkontinental'nykh ballisticheskikh raket v rakety kosmicheskogo naznacheniya [Method of justification of experimental verification scope and number of launches within the program of payloads injection in space at retrofit of the strategic intercontinental ballistic missiles into integrated launch vehicles]. *Vestnik NPO im. S.A. Lavochkin*. 39(1). pp. 51–54.
2. Koblelev V.N., Milovanov A.G. (2009) *Sredstva vyvedeniya kosmicheskikh apparatov* [Spacecraft launch vehicles]. Moscow: Restart.
3. Sikharulidze Yu.G. (2011) *Ballistika i navedenie letatel'nykh apparatov. Uchebnoe posobie* [Ballistics and direction of aircrafts. A textbook]. Moscow: BINOM. Laboratoriya znaniy.
4. Kostousova E.K., Pochinskiy V.I. (2011) O zadachakh vyvedeniya rakety-nositelya na zadannye ellipticheskie orbity [On problems of putting a carrier rocket into specified elliptic orbits]. *Trudy instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN – Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences*. 3. pp. 201–216.

Сведения об авторах:

Глазунов Александр Сергеевич – студент кафедры «Динамика и управление полетом летательных аппаратов» Балтийского государственного технического университета «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: ssan4ekk77@gmail.com

Петрова Ирина Леонидовна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Динамика и управление полетом летательных аппаратов» Балтийского государственного технического университета «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: petrova_il@voenmeh.ru

Сизова Анастасия Александровна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Динамика и управление полетом летательных аппаратов» Балтийского государственного технического университета «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: sizova_aa@voenmeh.ru

Information about the authors:

Glazunov Aleksandr S. (Baltic State Technical University “VOENMEH” named after D.F. Ustinov, Saint Petersburg, Russian Federation). E-mail: ssan4ekk77@gmail.com

Petrova Irina L. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Baltic State Technical University “VOENMEKH” named after D.F. Ustinov, Saint Petersburg, Russian Federation). E-mail: petrova_il@voenmeh.ru

Sizova Anastasiya A. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Baltic State Technical University “VOENMEKH” named after D.F. Ustinov, Saint Petersburg, Russian Federation). E-mail: sizova_aa@voenmeh.ru

Статья поступила в редакцию 09.06.2022; принята к публикации 01.12.2022

The article was submitted 09.06.2022; accepted for publication 01.12.2022

Научная статья

УДК 51-72, 51-74, 539.411, 539.412

doi: 10.17223/19988621/80/7

Оценка локальных механических свойств керамических огнеупоров на основе SiO_2 с помощью микромасштабного моделирования

Александр Сергеевич Григорьев¹, Андрей Иванович Дмитриев²,
Евгений Викторович Шилько³

^{1, 2, 3} *Институт физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН,
Томск, Россия*

^{2, 3} *Томский государственный университет, Томск, Россия*

¹ *grigoriev@ispms.ru*

² *dmitr@ispms.ru*

³ *shilko@ispms.ru*

Аннотация. Работа посвящена численному изучению локальных механических свойств пористых керамических (на основе SiO_2) огнеупоров на микроскопическом структурном уровне. С использованием разработанной дискретно-элементной модели проведена оценка упругих и прочностных характеристик микромасштабных пористых образцов огнеупора в зависимости от величины пористости и морфологии порового пространства. Показано, что определяющий вклад в механические свойства огнеупора вносит пористость закрытого типа, хотя объемное содержание таких пор невелико в сравнении с содержанием протяженных пор канального типа.

Ключевые слова: огнеупоры на основе SiO_2 , пористость, прочность, численное моделирование, дискретные элементы

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-19-00688, <https://rscf.ru/project/22-19-00688>.

Для цитирования: Григорьев А.С., Дмитриев А.И., Шилько Е.В. Оценка локальных механических свойств керамических огнеупоров на основе SiO_2 с помощью микромасштабного моделирования // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 80. С. 73–84. doi: 10.17223/19988621/80/7

Evaluation of local mechanical properties of SiO₂-based ceramic refractories using microscale modeling

Aleksandr S. Grigoriev¹, Andrey I. Dmitriev², Evgeniy V. Shil'ko³

^{1, 2, 3} *Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation*

^{2, 3} *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

¹ *grigoriev@ispms.ru*

² *dmitr@ispms.ru*

³ *shilko@ispms.ru*

Abstract. The development of multiscale mechanical models of promising refractory materials is an urgent problem in the mechanics of solids. One of the reasons is the applicability of these models when creating digital twins of advanced refractories. The authors of this paper recently developed and validated a mesoscopic model of the SiO₂-based refractory material that is widely used in metallurgy. This model takes into account the characteristic structural features of SiO₂ refractory in the scale range of 10^{-5} – 10^{-2} m and the mechanical behavior features in a wide range of strain rates. However, the full use of the model requires knowledge of local mechanical properties of mesoscopic structural elements, in particular, the highly porous regions, which are formed by fine grains less than 10^2 μm in size. An experimental study of effective mechanical characteristics of such regions is an extremely difficult task. Therefore, the purpose of this work is to obtain the theoretical estimate using the microscale numerical simulation of highly porous regions of SiO₂ refractory material and to determine their integral mechanical characteristics. To study this problem, the two-dimensional model samples are developed that simulate fine-grained regions of the refractory and are characterized by different porosity and pore structure types (channel-like or closed type). The intervals of the variation of Young's modulus and strength characteristics of the samples are obtained depending on the porosity and morphology of the pore space. The contribution of the closed-type porosity to the integral mechanical characteristics of the refractory is determined; though, the volume fraction of such pores is low as compared to that of the channel-like pores. The obtained data will be used as input parameters of mesoscale refractory models for solving the urgent problems related to the study of the effect of microstructure parameters on the macroscopic mechanical and thermomechanical properties of SiO₂-based refractories.

Keywords: SiO₂-based refractory materials, porosity, strength, numerical modeling, discrete element method

Acknowledgments: This study was funded by the Russian Science Foundation (project No. 22-19-00688, <https://rscf.ru/project/22-19-00688>).

For citation: Grigoriev, A.S., Dmitriev, A.I., Shil'ko, E.V. (2022) Evaluation of local mechanical properties of SiO₂-based ceramic refractories using microscale modeling. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 73–84. doi: 10.17223/19988621/80/7

Введение

Изучение свойств и дизайн структуры являются одним из наиболее востребованных направлений в механике гетерогенных материалов. Ярким представителем класса гетерогенных материалов, характеризующимся многомасштабной структурой и широко применяемым в металлургии в качестве материала для футеровок теплозащитных элементов коксовых батарей и теплообменников доменных печей, является керамический огнеупор на основе SiO_2 [1, 2]. Такие огнеупоры производятся путем спекания частиц диоксида кремния, гранулометрический состав которых характеризуется наличием множества различных по размеру фракций (от нескольких микрометров до нескольких миллиметров) [3]. Спеченные образцы характеризуются относительно высокой пористостью (среднее значение превышает 20%), при этом локальные значения пористости могут превышать 60%. Важно отметить также значительное различие пор по размерам и форме, что является следствием широкого спектра размеров зерен SiO_2 . Сложность и многомасштабность структуры огнеупоров на основе SiO_2 определяет большое внимание исследователей к мезо- и микроструктурным аспектам их механического отклика и разрушения [2, 4], что связано, в частности, с решением задач оптимального дизайна внутренней структуры для достижения требуемых макроскопических свойств.

Помимо классического материаловедческого анализа, эффективным подходом к изучению закономерностей и особенностей разрушения огнеупоров является компьютерное моделирование. В последнее десятилетие развито большое количество мезомасштабных механических моделей огнеупорных материалов. Они, как правило, базируются на представлении многомасштабной структуры как композита с явным учетом крупных фракций частиц (и мезоскопических пор) и эффективным учетом мелких фракций и микромасштабных несплошностей на основе процедур гомогенизации [5–9]. Одним из ключевых вопросов при создании таких моделей является определение локальных свойств компонентов. Ввиду хорошо известных сложностей их экспериментального определения предложены различные алгоритмы «калибровки» локальных механических характеристик в мезомасштабных моделях [5, 9–12].

Несмотря на большой объем экспериментальных исследований огнеупоров на основе SiO_2 , до последнего времени компьютерное моделирование их поведения осуществлялось с применением макроскопических моделей. Недавно авторами данной работы была предложена оригинальная мезоскопическая модель огнеупора на основе SiO_2 [13]. Модель учитывает его характерные структурные особенности в интервале масштабов 10^{-5} – 10^{-2} м и механические характеристики мезомасштабных элементов структуры. В развитой мезоскопической модели материал представляется в виде дисперсно-упрочненного композиционного материала, состоящего из «мягкой» матрицы и «жестких» дисперсных включений. В качестве матрицы условно выделяется высокопористая часть материала, состоящая из мелкодисперсных зерен и связывающая крупные зерна SiO_2 размером более 10^{-4} м (включения). Микромасштабные поры в матрице учитываются неявно. Соответственно, эффективные (мезоскопические) механические характеристики матрицы должны учитывать ее пористую микроструктуру и квазихрупкий характер разрушения, связанный со способностью аккумулировать микроповреждения, возникающие при механических и термических воздействиях.

Актуальность развитой мезоскопической модели определяется перспективами ее использования для оценки прочностных характеристик и энергии разрушения огнеупора в сложных условиях нагружения, решения задач оптимизации внутренней структуры для конкретных условий эксплуатации, а также для разработки цифровых двойников применяемых в настоящее время и перспективных огнеупорных материалов. В то же время применение такой модели требует знания локальных механических свойств мезоскопических структурных элементов, в частности эффективных механических характеристик матрицы. Экспериментальное определение эффективных характеристик матрицы – крайне затруднительная задача ввиду малых линейных размеров этих областей. Привлекательной альтернативой является теоретическая оценка этих свойств, получаемая на основе прямого микромасштабного численного моделирования поровой структуры матрицы огнеупора и анализа интегральных механических характеристик.

Ключевыми параметрами пористой структуры, определяющими параметры механического отклика матрицы, являются величина пористости и морфология порового пространства. Локальные значения пористости мезоскопических областей матрицы могут варьировать в интервале десятков процентов (при характерном среднем значении около 50%). Кроме того, может различаться и морфология порового пространства различных мезоскопических областей.

Сказанное определило цель настоящей работы – численное изучение зависимости основных механических характеристик матрицы огнеупора на основе SiO_2 (прочности при сжатии / растяжении и упругого модуля) от величины пористости и особенностей структуры порового пространства. Исследования проводились с использованием численного метода однородно-деформируемых дискретных элементов. В рамках этого метода материал представляется набором связанных дискретных элементов. При описании напряженно-деформированного состояния элемента используется приближение однородного распределения всех компонентов тензоров напряжений и деформаций в его объеме. Локальное разрушение материала моделируется разрывом межэлементных связей согласно заданному критерию. В настоящей работе использовался критерий разрушения в форме Друкера–Прагера, дополненный критерием Ранкина. Детали метода и применяемой модели локально изотропных хрупких материалов приведены в работах авторов [13, 14].

Постановка задачи

В работе моделировались 2D образцы, моделирующие области пористой матрицы с различными характеристиками порового пространства. Пористая структура матрицы задавалась явным образом путем удаления дискретных элементов из образцов. Рассматривалась пористость двух типов: «закрытая» и «канальная» (рис. 1). Закрытый тип пористости задавался набором случайно расположенных круглых пор, каждая из которых изолирована от соседних пор стенкой из дискретных элементов. Минимальный размер поры был равен размеру дискретного элемента (3.5 мкм). Модельные образцы с закрытой пористостью характеризовались различными значениями ширины интервала распределения пор по размерам в зависимости от величины пористости: при значениях пористости 10% и 20% задавались моноразмерные поры; при пористости 30% размеры пор различались

в пределах трех раз; при пористости 40% – в пределах 6 раз; при пористости 50% – в пределах 8 раз; при пористости 60% – в пределах 10 раз. Во всех случаях использовалось равномерное распределение закрытых пор по размерам. Пористость канального типа задавалась ансамблем случайно размещенных круглых пор диаметром 3.5 мкм. При этом допускалось перекрытие двух и более пор, что позволяло реализовать нерегулярную канальную структуру и дисперсию размеров каналов. Отметим, что оба типа пористости (округлые и канальные поры) реализуются в матрице реальных элементов футеровок из SiO_2 , получаемых промышленным способом. Более того, характерные размеры пор и их распределение по размерам в модельных образцах также качественно соответствовали тем же в реальных образцах. Значение пористости модельных образцов варьировало в пределах от 10 до 60%.

Материал стенок пор полагался упруго-хрупким с механическими характеристиками, соответствующими характеристикам макроскопических беспористых образцов SiO_2 (модуль Юнга $E = 65$ ГПа, предел прочности на сжатие $\sigma_c = 680$ МПа, предел прочности на растяжение $\sigma_t = 68$ МПа).

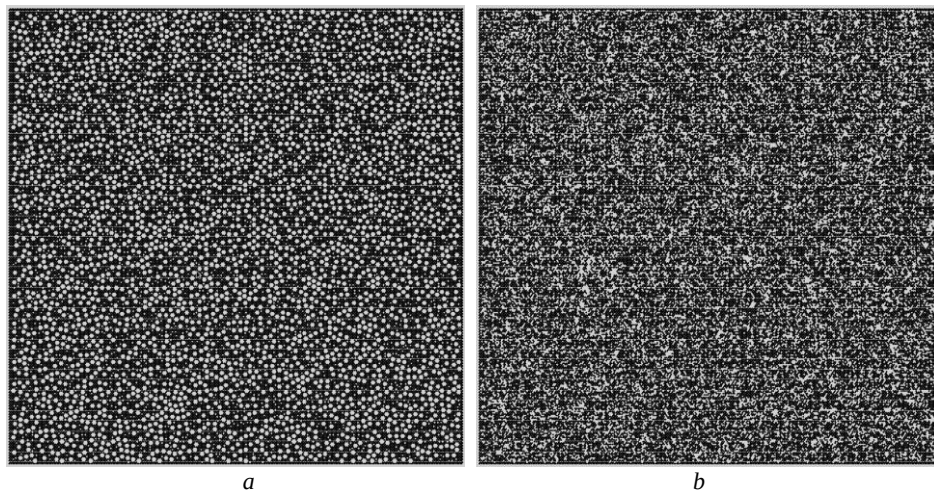


Рис. 1. Примеры структуры образцов модельного материала (пористость 30%):
a – закрытая структура пор; *b* – канальная структура пор

Fig. 1. Typical structure of model samples (30% porosity): (a) closed pores
 and (b) channel-like pores

Моделировались испытания на одноосное сжатие и растяжение двумерных пористых образцов в приближении плосконапряженного состояния. Нагружение осуществлялось путем задания элементам верхних и нижних поверхностей образца постоянной скорости. Величина скорости выбиралась достаточно малой, чтобы обеспечить квазистатический режим нагружения. Регистрировались величина предела прочности (предельное напряжение на диаграмме нагружения) и наклон начальной стадии диаграммы нагружения (модуль упругости). Анализировались зависимости модуля Юнга и пределов прочности пористых образцов SiO_2 на сжатие и растяжение от величины и типа пористости.

Результаты

Известно, что величина упругих модулей пористого образца существенно ниже соответствующих значений упругих модулей бездефектного материала. В частности, для диоксид-циркониевой керамики, которая характеризуется наличием округлых пор различного размера, известна типичная зависимость модуля Юнга от величины пористости [15]. Анализ данной зависимости показал, что, будучи представленной в безразмерном виде нормировкой на модуль Юнга беспористого материала, она близка к аналогичным зависимостям для многих технических и природных пористых материалов (включая огнеупорные керамики) [16, 17]. Поэтому в настоящей работе данная зависимость использовалась для верификации построенной структурно-механической модели матрицы огнеупора.

Результаты моделирования показали, что нормированный модуль Юнга, полученный путем численного моделирования испытаний на сжатие модельных образцов пористой матрицы огнеупора с закрытым типом пористости (см. рис. 1, а), показывает хорошее согласие с экспериментальными данными для диоксид-циркониевой керамики (рис. 2). В случае закрытой структуры пор зависимость для модельных образцов практически совпадает с экспериментальной. Данный факт указывает на то, что построенные образцы матрицы огнеупора являются представительными, а модель матрицы огнеупора адекватно описывает механический отклик материала в условиях механического нагружения.

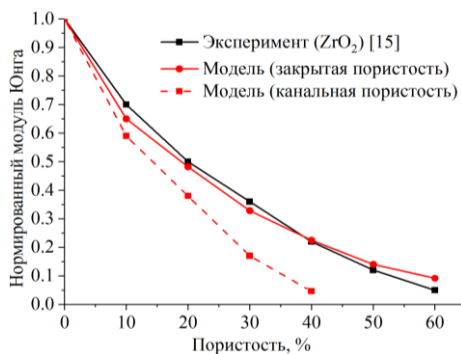


Рис. 2. Зависимости нормированного модуля Юнга матрицы огнеупора на основе SiO₂ от величины пористости

Fig. 2. Dependences of the normalized Young's modulus of SiO₂-based refractory matrix on the porosity

В то же время зависимость для канальной структуры пор имеет существенно более крутой наклон (см. рис. 2). Так, уже при значении пористости 40% и выше модуль Юнга образцов с канальным типом пористости снижается на 2 порядка величины. Это качественно согласуется с известными данными о пористых материалах, канальная поровая структура которых может быть аппроксимирована моделью перекрывающихся сфер [17].

Сопоставление полученных зависимостей с доступными экспериментальными in situ оценками для огнеупора на основе SiO₂ позволяет сделать вывод о преобладании в матрице огнеупора канальной пористости при одновременном содержании и пористости закрытого типа, что повышает жесткость несущего каркаса.

При этом существенная доля пористости канального типа обеспечивает достаточно низкие значения интегрального модуля упругости матрицы. Полученные зависимости также определяют характерные интервалы вариации локальных значений упругих модулей матрицы огнеупора при различных значениях локальной пористости. Полученные интервалы могут быть использованы для задания стохастического распределения локальных упругих модулей матрицы в мезоскопических представительных объемах огнеупора.

Помимо интегральной жесткости, параметры пористости в значительной степени влияют и на прочностные характеристики матрицы огнеупора, такие как значения прочности при одноосном сжатии, растяжении, изгибе и сдвиге. В настоящей работе рассмотрено влияние структуры пор и величины пористости на величину прочности модельного пористого материала при одноосном сжатии и растяжении (данные характеристики используются в мезоскопической модели огнеупора в качестве параметров критерия локального разрушения матрицы). На рис. 3, а представлены зависимости предела прочности на сжатие модельных образцов от величины пористости в случае округлых пор закрытого типа. Пределы прочности образцов в данном случае представлены в безразмерном виде, полученном путем нормирования на величину прочности на сжатие макроскопического беспористого образца SiO_2 . Следует отметить, что напряженно-деформированное состояние пористых образцов в условиях одноосного сжатия является сложным. В частности, различные области материала в окрестностях пор могут находиться в условиях локального растяжения, растяжения и сдвига, сжатия, сжатия и сдвига. Поэтому интегральная прочность пористых образцов определяется не только величиной прочности на сжатие материала стенок пор (σ_c), но и значением их прочности на растяжение (σ_t). Известно, что величина локальной прочности зерен на растяжение может многократно превышать аналогичное значение для макроскопических беспористых образцов. Непосредственное экспериментальное определение параметра σ_t для микромасштабных зерен является крайне затруднительным. Поэтому в работе параметр σ_t рассматривался как варьируемый в интервале от 68 МПа (макроскопическое значение) до 680 МПа (физически обоснованный верхний предел, равный величине прочности на сжатие). Приведенные на рис. 3 расчетные зависимости получены для различных значений отношения σ_c/σ_t .

Как видно из рис. 3, а, зависимость предела прочности от пористости является убывающей функцией, близкой к экспоненциальной. При этом уменьшение отношения прочностей стенок беспористого каркаса на сжатие и растяжение (σ_c/σ_t) сопровождается увеличением прочности образца на сжатие. Это свидетельствует о том, что локальные повреждения в пористых образцах формируются как по механизму сдвига, так и по механизму отрыва. Экспериментальные данные для диоксид-циркониевой керамики и огнеупорного материала, представленные на рисунке, хорошо соответствуют результатам численных исследований при $\sigma_c/\sigma_t < 3$. Это свидетельствует о том, что при задании механических характеристик стенок каркаса пористой структуры адекватным является приближение низкодефектного материала (дефекты, по-видимому, сконцентрированы на межзеренных интерфейсах), характеризующегося достаточно близкими значениями прочности при сжатии и растяжении. Отметим также, что зависимость нормированной прочности образцов на растяжение от пористости показывает крайне слабую чувствительность к отношению σ_c/σ_t для материала стенок пор (рис. 3, б). Это свидетель-

существует о преобладании локального разрушения по механизму отрыва. Видимое на рис. 3, *b* значимое различие экспериментальных и расчетных данных, по-видимому, связано с тем, что экспериментальные оценки прочности образцов на разрыв производятся на основе испытаний на трехточечный изгиб, в которых вид напряженного состояния образца существенно отличается от состояния образца при истинном одноосном растяжении.

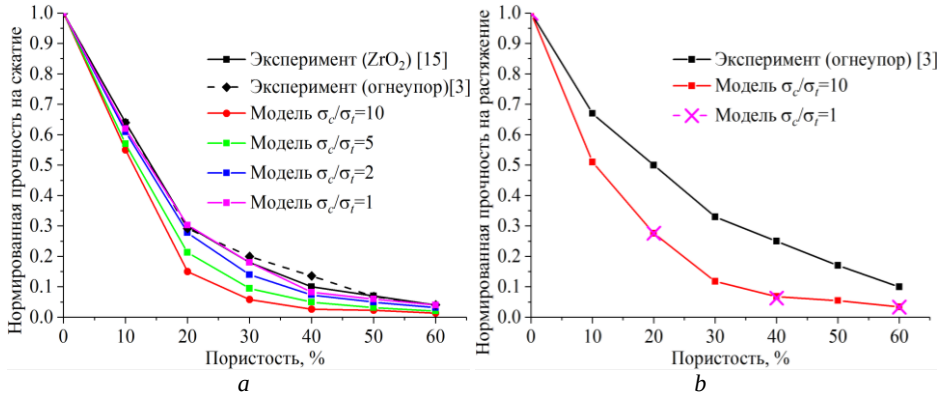


Рис. 3. Зависимости нормированного предела прочности образцов с порами закрытого типа от величины пористости: *a* – при сжатии; *b* – при растяжении
Fig. 3. Dependences of the normalized strength of the samples with closed pores on the porosity: under (a) compression and (b) tension

Характеризуя разрушение пористых образцов, отметим, что в интервале значений пористости от 10 до 30% разрушение образцов является хрупким, а по мере дальнейшего увеличения пористости характер разрушения постепенно трансформируется в квазихрупкий, связанный с формированием крупных внутренних трещин и их постепенным ростом и образованием магистральных трещин.

В случае пористости канального типа значения прочности образцов существенно ниже экспериментальных значений прочности макроскопических керамических образцов и прочности модельных образцов с закрытым типом пористости. На рис. 4 приведены зависимости нормированного предела прочности от величины пористости модельных образцов с порами канального типа при сжатии и растяжении. Можно видеть, в частности, что уже при пористости 40% прочность образцов на сжатие составляет около 1% величины прочности на сжатие материала стенок пор, а при растяжении – около 2% прочности стенок на растяжение. Данный эффект связан с тем, что канальная структура пор не обеспечивает достаточного количества стенок каркаса, на которые распределяется приложенная нагрузка. Увеличение количества таких стенок за счет частичной замены канальных пор замкнутыми позволяет повысить локальную прочность матрицы.

Важной составляющей численных исследований является анализ сходимости результатов моделирования, а именно влияния размера дискретного элемента на величину эффективных механических характеристик образцов. Для проведения такого анализа были рассмотрены модельные образцы, состоящие из дискретных элементов, диаметр которых в 3 и 9 раз меньше исходного значения 3.5 мкм. При этом размеры и расположение пор оставались неизменными.

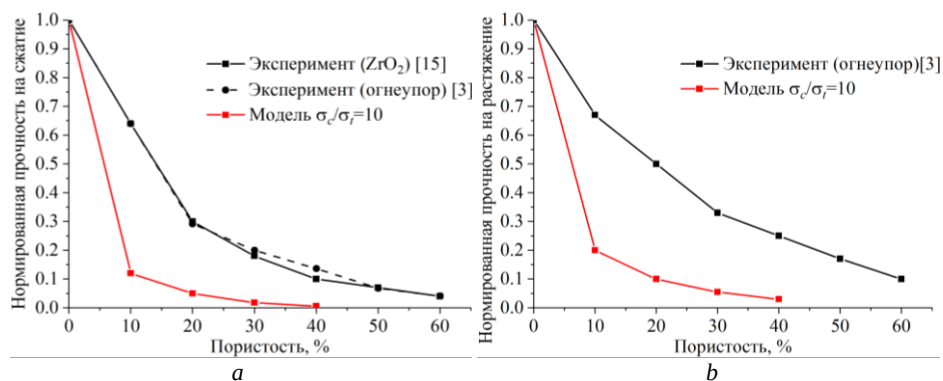


Рис. 4. Зависимости нормированного предела прочности образцов с порами канального типа от величины пористости: *a* – при сжатии; *b* – при растяжении
Fig. 4. Dependences of the normalized strength of the samples with channel-like pores on the porosity: under (*a*) compression and (*b*) tension

Результаты контрольных расчетов для нескольких значений пористости и отношения σ_c/σ_t показали, что уменьшение размера дискретных элементов приводит к незначительным изменениям эффективного модуля Юнга (менее 3%) и предела прочности (менее 5%). Таким образом, выбранный диаметр дискретного элемента (3.5 мкм) обеспечивает достаточную точность оценок эффективных свойств представительного объема матрицы огнеупора.

Заключение

Результаты численного моделирования показали, что развитая двумерная микромасштабная модель мезоскопического структурного элемента огнеупорного материала на основе SiO₂ (высокопористые области материала, связывающие крупные зерна) позволяет адекватно описывать механическое поведение данного ключевого элемента мезоструктуры и оценивать его локальные механические характеристики. Получены зависимости модуля Юнга и значений прочности на сжатие и растяжение таких высокопористых областей от величины и типа локальной пористости. Ключевым результатом исследования является вывод об определяющем вкладе закрытой пористости, образованной одиночными округлыми порами, в механические свойства огнеупора на основе SiO₂, хотя объемное содержание таких пор невелико в сравнении с протяженными порами канального типа. Полученные данные актуальны для развития двухмасштабных (микро-мезомасштабных) моделей огнеупорных керамических материалов с целью дизайна внутренней структуры для достижения требуемых макроскопических механических характеристик.

Список источников

1. Schacht C. Refractory Linings: Thermomechanical Design and Applications. Boca Raton, FL : CRC Press, 2019. 504 p.
2. Andreev K., Tadaion V., Zhu Q., Wang W., Yin Y., Tonnesen T. Thermal and mechanical cyclic tests and fracture mechanics parameters as indicators of thermal shock resistance – case

- study on silica refractories // J. Eur. Cer. Soc. 2019. V. 39. P. 1650–1659. doi: 10.1016/j.jeurceramsoc.2018.12.062
3. Кащеев И.Д., Стрелов К.К., Мамыкин П.С. Химическая технология огнеупоров. М. : Интермет Инжиниринг, 2007. 748 с.
 4. Andreev K., Yin Y., Luchini B., Sabirov I. Failure of refractory masonry material under monotonic and cyclic loading – Crack propagation analysis // Constr. Build. Mater. 2021. V. 299. Art. 124203. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2021.124203
 5. Özdemir I., Brekelmans W.A.M., Geers M.G.D. Modeling thermal shock damage in refractory materials via direct numerical simulation (DNS) // J. Eur. Ceram. Soc. 2010. V. 30. P. 1585–1597. doi: 10.1016/j.jeurceramsoc.2009.12.014
 6. Šavija B., Smith G.E., Liu D., Schlangen E., Flewitt P.E.J. Modelling of deformation and fracture for a model quasi-brittle material with controlled porosity: Synthetic versus real microstructure // Eng. Fract. Mech. 2019. V. 205. P. 399–417. doi: 10.1016/j.engfracmech.2018.11.008
 7. Andre D., Levraut B., Tessier-Doyen N., Huger M. A discrete element thermo-mechanical modelling of diffuse damage induced by thermal expansion mismatch of two-phase materials // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2017. V. 318. P. 898–916. doi: 10.1016/j.cma.2017.01.029
 8. Andreev K., Verstrynghe E., Wevers M. Compaction and shear failure of refractory mortars – effects of porosity and binder hardening // J. Eur. Ceram. Soc. 2017. V. 37. P. 841–848. doi: 10.1016/j.jeurceramsoc.2016.08.040
 9. Makarian K., Santhanam S. Micromechanical modeling of thermo-mechanical properties of high volume fraction particle-reinforced refractory composites using 3D Finite Element analysis // Ceram. Int. 2020. V. 46. P. 4381–4393. doi: 10.1016/j.ceramint.2019.10.162
 10. Henneberg D., Ricoeur A., Judt P. Multiscale modeling for the simulation of damage processes at refractory materials under thermal shock // Comput. Mater. Sci. 2013. V. 70. P. 187–195. doi: 10.1016/j.commatsci.2013.01.002
 11. Nguyen T.T., André D., Huger M. Analytical laws for direct calibration of discrete element modelling of brittle elastic media using cohesive beam model // Comput. Part. Mech. 2019. V. 6. P. 393–409. doi: 10.1007/s40571-018-00221-0
 12. Moreira M.H., Cunha T.M., Campos M.G.G., Santos M.F., Santos Jr. T., Andre D., Pandolfelli V.C. Discrete element modeling – A promising method for refractory microstructure design // Am. Ceram. Soc. Bull. 2020. V. 99 (2). P. 22–28.
 13. Grigoriev A.S., Zabolotskiy A.V., Shilko E.V., Dmitriev A.I., Andreev K. Analysis of the Quasi-Static and Dynamic Fracture of the Silica Refractory Using the Mesoscale Discrete Element Modelling // Materials. 2021. V. 14. Art. 7376. doi: 10.3390/ma14237376
 14. Psakhie S.G., Shilko E.V., Grigoriev A.S., Astafurov S.V., Dimaki A.V., Smolin A.Yu. A mathematical model of particle–particle interaction for discrete element based modeling of deformation and fracture of heterogeneous elastic–plastic materials // Eng. Fract. Mech. 2014. V. 130. P. 96–115. doi: 10.1016/j.engfracmech.2014.04.034
 15. Smolin A.Yu., Roman N.V., Konovalenko I.S., Eremina G.M., Buyakova S.P., Psakhie S.G. 3D simulation of dependence of mechanical properties of porous ceramics on porosity // Eng. Fract. Mech. 2014. V. 130. P. 53–64. doi: 10.1016/j.engfracmech.2014.04.001
 16. Pubst W., Uhlirova T., Gregorova E., Wiegmann A. Young’s modulus and thermal conductivity of model materials with convex or concave pores – from analytical predictions to numerical results // J. Eur. Cer. Soc. 2018. V. 38. P. 2694–2707. doi: 10.1016/j.jeurceramsoc.2018.01.040
 17. Roberts A.P., Garboczi E.J. Elastic properties of model porous ceramics // J. Am. Ceram. Soc. 2000. V. 83. P. 3041–3048. doi: 10.1111/j.1151-2916.2000.tb01680.x

References

1. Schacht C. (2019) *Refractory Linings: Thermomechanical Design and Applications*. Boca Raton: CRC Press.

2. Andreev K., Tadaion V., Zhu Q., Wang W., Yin Y., Tonnesen T. (2019) Thermal and mechanical cyclic tests and fracture mechanics parameters as indicators of thermal shock resistance – case study on silica refractories. *Journal of the European Ceramic Society*. 39. pp. 1650–1659. doi: 10.1016/j.jeurceramsoc.2018.12.062
3. Kashcheev I.D., Strelov K.K., Mamykin P.S. (2007) *Khimicheskaya tekhnologiya ogneporov* [Chemical technology of refractories]. Moscow: IntermetInzhiniring.
4. Andreev K., Yin Y., Luchini B., Sabirov I. (2021) Failure of refractory masonry material under monotonic and cyclic loading – Crack propagation analysis. *Construction and Building Materials*. 299. Article 124203. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2021.124203
5. Özdemir I., Brekelmans W.A.M., Geers M.G.D. (2010) Modeling thermal shock damage in refractory materials via direct numerical simulation (DNS). *Journal of the European Ceramic Society*. 30. pp. 1585–1597. doi: 10.1016/j.jeurceramsoc.2009.12.014
6. Šavija B., Smith G.E., Liu D., Schlangen E., Flewitt P.E.J. (2019) Modelling of deformation and fracture for a model quasi-brittle material with controlled porosity: Synthetic versus real microstructure. *Engineering Fracture Mechanics*. 205. pp. 399–417. doi: 10.1016/j.engfracmech.2018.11.008
7. Andre D., Levraut B., Tessier-Doyen N., Huger M. (2017) A discrete element thermo-mechanical modelling of diffuse damage induced by thermal expansion mismatch of two-phase materials. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*. 318. pp. 898–916. doi: 10.1016/j.cma.2017.01.029
8. Andreev K., Verstrynghe E., Wevers M. (2017) Compaction and shear failure of refractory mortars – effects of porosity and binder hardening. *Journal of the European Ceramic Society*. 37. pp. 841–848. doi: 10.1016/j.jeurceramsoc.2016.08.040
9. Makarian K., Santhanam S. (2020) Micromechanical modeling of thermo-mechanical properties of high volume fraction particle-reinforced refractory composites using 3D Finite Element analysis. *Ceramics International*. 46. pp. 4381–4393. doi: 10.1016/j.ceramint.2019.10.162
10. Henneberg D., Ricoeur A., Judt P. (2013) Multiscale modeling for the simulation of damage processes at refractory materials under thermal shock. *Computational Material Science*. 70. pp. 187–195. doi: 10.1016/j.commatsci.2013.01.002
11. Nguyen T.T., André D., Huger M. (2019) Analytical laws for direct calibration of discrete element modelling of brittle elastic media using cohesive beam model. *Computational Particle Mechanics*. 6. pp. 393–409. doi: 10.1007/s40571-018-00221-0
12. Moreira M.H., Cunha T.M., Campos M.G.G., Santos M.F., Santos Jr.T., Andre D., Pandolfelli V.C. (2020) Discrete element modeling – A promising method for refractory microstructure design. *American Ceramic Society Bulletin*. 99(2). pp. 22–28.
13. Grigoriev A.S., Zabolotskiy A.V., Shilko E.V., Dmitriev A.I., Andreev K. (2021) Analysis of the quasi-static and dynamic fracture of the silica refractory using the mesoscale discrete element modeling. *Materials*. 14. Article 7376. doi: 10.3390/ma14237376
14. Psakhie S.G., Shilko E.V., Grigoriev A.S., Astafurov S.V., Dimaki A.V., Smolin A.Yu. (2014) A mathematical model of particle–particle interaction for discrete element based modeling of deformation and fracture of heterogeneous elastic–plastic materials. *Engineering Fracture Mechanics*. 130. pp. 96–115. doi: 10.1016/j.engfracmech.2014.04.034
15. Smolin A.Yu., Roman N.V., Konovalenko I.S., Eremina G.M., Buyakova S.P., Psakhie S.G. (2014) 3D simulation of dependence of mechanical properties of porous ceramics on porosity. *Engineering Fracture Mechanics*. 130. pp. 53–64. doi: 10.1016/j.engfracmech.2014.04.001
16. Pubst W., Uhlirova T., Gregorova E., Wiegmann A. (2018) Young's modulus and thermal conductivity of model materials with convex or concave pores – from analytical predictions to numerical results. *Journal of the European Ceramic Society*. 38. pp. 2694–2707. doi: 10.1016/j.jeurceramsoc.2018.01.040
17. Roberts A.P., Garboczi E.J. (2000) Elastic properties of model porous ceramics. *Journal of the American Ceramic Society*. 83. pp. 3041–3048. doi: 10.1111/j.1151-2916.2000.tb01680.x

Сведения об авторах:

Григорьев Александр Сергеевич – младший научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН, Томск, Россия. E-mail: grigoriev@ispms.ru

Дмитриев Андрей Иванович – доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН, профессор кафедры физики металлов физического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: dmitr@ispms.ru

Шилько Евгений Викторович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН, профессор кафедры физики металлов физического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: shilko@ispms.ru

Information about the authors:

Grigoriev Aleksandr S. (Junior Researcher, Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: grigoriev@ispms.ru

Dmitriev Andrey I. (Doctor of Physics and Mathematics, Principal Researcher, Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: dmitr@ispms.ru

Shil'ko Evgeniy V. (Doctor of Physics and Mathematics, Principal Researcher, Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: shilko@ispms.ru

Статья поступила в редакцию 01.06.2022; принята к публикации 01.12.2022

The article was submitted 01.06.2022; accepted for publication 01.12.2022

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/80/8

Анализ эффективности противоударной стойкости двух групп керамических и композитных материалов

Сергей Алексеевич Зелепугин¹, Владимир Фомич Толкачев²,
Илья Михайлович Тырышкин³

^{1, 2, 3} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ Томский научный центр Сибирского отделения РАН, Томск, Россия

¹ szel@yandex.ru

² tolk@niipmm.tsu.ru

³ tryshkin@niipmm.tsu.ru

Аннотация. Представлены результаты экспериментальных исследований эффективности противоударной стойкости керамических и композитных образцов в диапазоне скоростей удара 0.5–6.5 км/с. Рассмотрены следующие материалы: оксид алюминия Al_2O_3 , оксид алюминия марки КВП-98 (корунд), диоксид циркония ZrO_2 , карбид кремния SiC , композитные материалы $TiC-NiCr$ и TiB_2-B_4C . Выявлены две группы материалов по эффективности противоударной стойкости в качестве дополнительных элементов защиты основной конструкции.

Ключевые слова: керамика, композит, высокоскоростной удар, разрушение, параметр эффективности

Благодарности: Экспериментальные исследования выполнены при поддержке Программы развития ТГУ («Приоритет-2030»), анализ эффективности противоударной стойкости проведен в рамках государственного задания Томского научного центра Сибирского отделения РАН.

Для цитирования: Зелепугин С.А., Толкачев В.Ф., Тырышкин И.М. Анализ эффективности противоударной стойкости двух групп керамических и композитных материалов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 80. С. 85–96. doi: 10.17223/19988621/80/8

Original article

Analysis of impact resistance for two groups of ceramic and composite materials

Sergey A. Zelepugin¹, Vladimir F. Tolkachev², Il'ya M. Tyryshkin³

^{1, 2, 3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ Tomsk Scientific Center of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation

¹ szel@yandex.ru² tolk@niipmm.tsu.ru³ tyryshkin@niipmm.tsu.ru

Abstract. Complex experimental and theoretical studies of shock-wave characteristics and penetration parameters are conducted to develop physical and mathematical models of deformation and fracture of ceramic and composite materials under high-velocity loading. The purpose of this work is to investigate the fracture of ceramic and composite targets and their efficiency in ceramic-containing structures. The experiments are performed using a ballistic test stand (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Research Tomsk State University). The deformation and fracture of ceramic (aluminum oxide Al_2O_3 , aluminum oxide (KVP-98, corundum), zirconium dioxide ZrO_2 , silicon carbide SiC) and composite (TiC-NiCr and $\text{TiB}_2\text{-B}_4\text{C}$) materials are studied experimentally in the impact velocity range of 0.5 – 6.5 km/s. The dynamics of the fracture of ceramic plates (silicon carbide and aluminum oxide) is analyzed. The fragments of the plates and their size distribution are given. The study of the impact resistance of ceramic and composite samples reveals two groups of materials with essentially different levels of efficiency. For both groups, the dependence of the efficiency parameter on the impact velocity demonstrates a decrease in the velocity range from 0.5 to 3.0 – 4.5 km/s and a subsequent increase when the impact velocity tends to 6.5 km/s. The obtained experimental results may be used during the validation and verification of numerical and analytical models, approaches, and software packages.

Keywords: ceramics, composite, high-velocity impact, fracture, efficiency parameter

Acknowledgments: This study was supported by the TSU Federal Program (“Priority-2030”) and the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (state assignment for the Tomsk Scientific Center of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences).

For citation: Zelepugin, S.A., Tolkachev, V.F., Tyryshkin, I.M. (2022) Analysis of impact resistance for two groups of ceramic and composite materials. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 85–96. doi: 10.17223/19988621/80/8

Введение

Возможности модернизации высокоэффективных защитных конструкций из традиционных материалов (сталь, титан, алюминий и их сплавы) при функционировании в условиях высокоскоростного удара к настоящему времени практически исчерпаны. В качестве дополнительных элементов конструктивно-компоновочных схем конструкций используются различные виды керамических и композитных материалов комбинированного строения (керметы, наноструктурные материалы) [1–5], которые обладают высокими прочностными характеристиками и являются одним из перспективных средств индивидуальной (человека) и локальной (технических средств) защиты от проникающего и разрушительного действия различных видов высокоскоростных ударников.

К настоящему времени продолжают активные комплексные экспериментальные и теоретические исследования ударно-волновых характеристик и параметров проникания с целью разработки физико-математических моделей деформирования и разрушения керамических и композитных материалов в условиях высокоскоростного нагружения. Применяемыми методами оценки характеристик

высокоскоростного соударения являются экспериментальные исследования, аналитические расчеты, а также численное моделирование проникания ударников в преграды и конструкции, содержащие слои из металлов, керамик и композитов [3–7].

Следует отметить значительные успехи в численном моделировании поведения материалов при динамическом нагружении. Это обусловлено быстрым развитием вычислительных мощностей, созданием эффективных численных комплексов, разработкой новых методов и подходов. К эффективным программным комплексам следует отнести коммерческие пакеты ANSYS LS-DYNA/AUTODYN, ABAQUS и другие, уровень развития которых позволяет квалифицированному специалисту решать задачи повышенной сложности. Среди новых методов и подходов можно отметить методы подвижных клеточных автоматов [8], SPH [9], молекулярной динамики [10, 11]. Из подходов необходимо выделить многоуровневый подход с учетом структуры материала, в том числе на мезоуровне [12], а также вероятностный подход [13], который позволяет учитывать влияние структуры материала через варьирование прочностных характеристик на макроуровне.

Однако эксперимент был и остается наиболее важным методом исследования поведения материалов при динамическом нагружении. Экспериментальные данные являются основой для валидации и верификации численных и аналитических моделей, методик и программных комплексов. Так, экспериментальные исследования подтверждают необходимость использования вероятностного подхода при анализе прочностных характеристик материалов [14]. Также в эксперименте удастся зафиксировать уникальные особенности поведения материалов, которые не укладываются в общепринятые теоретические модели. К таким можно отнести асимметрию разрушения керамики при высокоскоростном ударе [15, 16], которая до сих пор не описана численно.

При отборе наиболее эффективных керамик в составе комбинированных конструкций из имеющихся и вновь разрабатываемых материалов возникает задача сравнения их противоударной стойкости при варьировании начальных условий высокоскоростного удара компактными и стержневыми ударниками. При выявлении противоударной стойкости керамических материалов наиболее эффективны тесты на глубину проникания [17–19] или определение остаточной скорости ударника за преградой [20].

Цель данной работы – исследование разрушения керамических и композитных преград и их эффективности в составе керамикосодержащих конструкций. Эксперименты проводились на баллистическом стенде НИИ прикладной математики и механики Национального исследовательского Томского государственного университета. Метание ударников осуществлялось из пороховой и легкогазовой установок калибром 8 и 23 мм [21]. Скорость метаемых тел измерялась электромагнитным датчиком перемещений с точностью порядка 0.5%. Эксперименты осуществлялись в диапазоне скоростей взаимодействия 0.5–6.5 км/с. В специально выполненных опытах проводилось рентгенографирование процесса взаимодействия для оценки характера разрушения преград (пластин).

Испытуемые образцы представляли собой плоскопараллельные керамические и композитные пластины толщиной 2–25 мм поперечным размером более 50 × 50 мм. В экспериментах исследованы следующие материалы: оксид алюминия Al_2O_3 , оксид алюминия марки КВП-98 (корунд), диоксид циркония ZrO_2 , карбид кремния SiC, композитные материалы TiC–NiCr и TiB_2 – B_4C . Некоторые физико-

механические характеристики испытуемых материалов приведены в таблице. Здесь ρ_0 – плотность материала, E – эффективный модуль Юнга, H_M – микротвердость, H_D – динамическая твердость, σ_e – предел упругости, σ_T – предел текучести, c_0 – объемная скорость звука.

Физико-механические характеристики исследованных материалов

Материал	ρ_0 , г/см ³	E , ГПа	H_M , ГПа	H_D , ГПа	σ_e , ГПа	σ_T , ГПа	c_0 , см/мкс
Al ₂ O ₃	3.8	407	18	20–25	6.5	59.3	0.88
Корунд КВП-98	3.7	–	–	20–24	8.3	–	0.95
ZrO ₂	6.0	–	–	–	13.1	–	–
SiC	3.0	330	27	25–30	6.5	55.9	0.69
TiC–NiCr	7.0	310	–	–	–	–	–
TiB ₂ –B ₄ C	3.5	167	–	90 HRA	6.7	–	0.71

Ударники из стали ШХ-15 имели форму шара диаметром 3.5 мм, 5.5 мм, также использовался компактный ударник диаметром и высотой по 8 мм и удлиненный ударник диаметром 6.2 мм и длиной 28.2 мм.

Анализ динамики разрушения керамических пластин

Для оценки скорости деформирования ударника и степени разрушения керамических пластин выполнена серия опытов, в которой проводилось рентгенографирование процесса высокоскоростного взаимодействия стержневых ударников с керамическими пластинами.

На рис. 1 представлена рентгенограмма процесса разрушения пластины из керамики SiC толщиной 20 мм в момент времени 30 мкс при ударе компактным стальным цилиндрическим элементом 8×8 мм со скоростью 1 270 м/с.

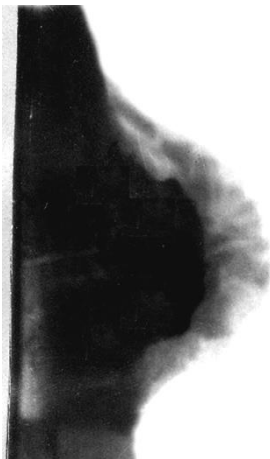


Рис. 1. Рентгенограмма разрушения керамической пластины SiC толщиной 20 мм в момент времени 30 мкс

Fig. 1. X-ray diffraction pattern for a 20 mm SiC ceramic plate at a time instant of 30 μ s

Динамика разрушения керамической пластины характеризуется следующим образом. На начальной стадии формируется ударная волна, которая распространяется вглубь пластины. Ударная волна выходит на тыльную поверхность преграды и отражается от нее вглубь преграды в виде волны разгрузки, после чего в преграде начинается процесс формирования областей микроразрушений. Поскольку структура материала крупнозернистая и тыльная поверхность пластины шероховатая (технология изготовления), на первом этапе микроразрушение проявляется в виде микрокумуляции [22], т.е. формирования и отделения микроструй мелких частиц с тыльной поверхности керамической пластины. На рентгенограмме это отражено в виде купола слабого затемнения впереди основного фрагмента тыльной поверхности пластины.

С течением времени, в зависимости от структуры материала, процесс микро-разрушения переходит в мезо- и макроразрушение [23], на тыльной поверхности преграды формируется откольный слой (аналог откольной «тарелочки», характерной для откольного разрушения металлических пластин при высокоскоростном ударе), диаметр которого больше диаметра ударника. На рентгенограмме отражен момент смещения откольного слоя относительно плоскости тыльной поверхности пластины. Основной каркас керамической пластины сохраняет целостность вне зоны контакта на данный момент времени. Под действием сдвиговых и растягивающих напряжений процесс разрушения преграды продолжается, и в конечном итоге преграда разрушается на осколки различных размеров.

На рис. 2, *a* приведена характерная рентгенограмма пробивания пластины из оксида алюминия Al_2O_3 стальным ударником диаметром 6.2 мм и длиной 28.2 мм при начальной скорости удара 760 ± 3 м/с в момент времени 30 мкс после начала взаимодействия. Толщина керамической пластины составила 9.2 мм. Можно отметить, что разрушение пластины наблюдается в центре, в месте контакта с ударником, а периферийные области сохраняют целостность. На рис. 2, *b* приведена рентгенограмма пробивания пластины из карбида кремния SiC толщиной 12 мм для тех же условий нагружения. Вследствие относительно низких прочностных характеристик данного материала наблюдается более интенсивное разрушение пластины по сравнению с предыдущим случаем. Можно отметить, что в обоих случаях ударник в головной части претерпел значительную пластическую деформацию вследствие взаимодействия с керамикой с высоким пределом упругости и представляет собой форму «гриба».

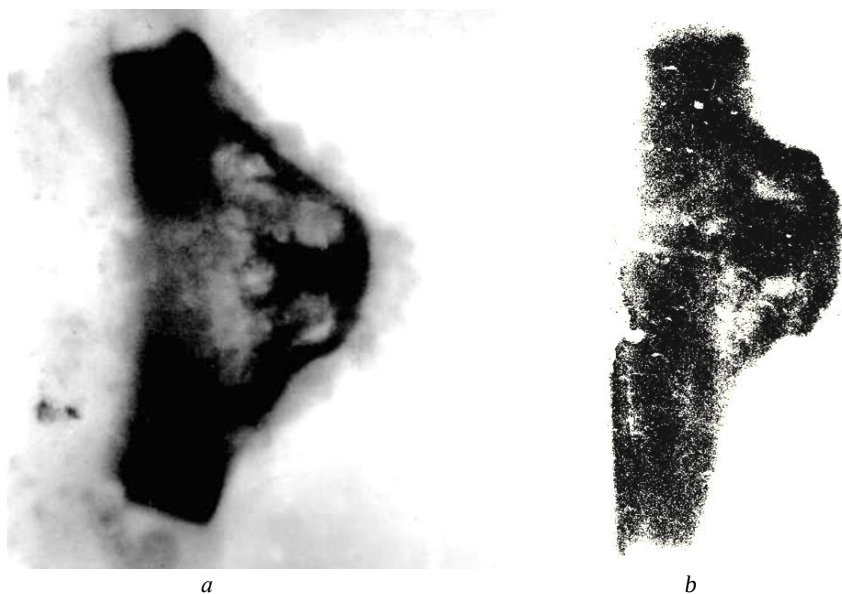


Рис. 2. Рентгенограмма разрушения керамических пластин Al_2O_3 (*a*) и SiC (*b*) в момент времени 30 мкс

Fig. 2. X-ray diffraction pattern of (*a*) Al_2O_3 and (*b*) SiC ceramic plates at a time instant of 30 μ s

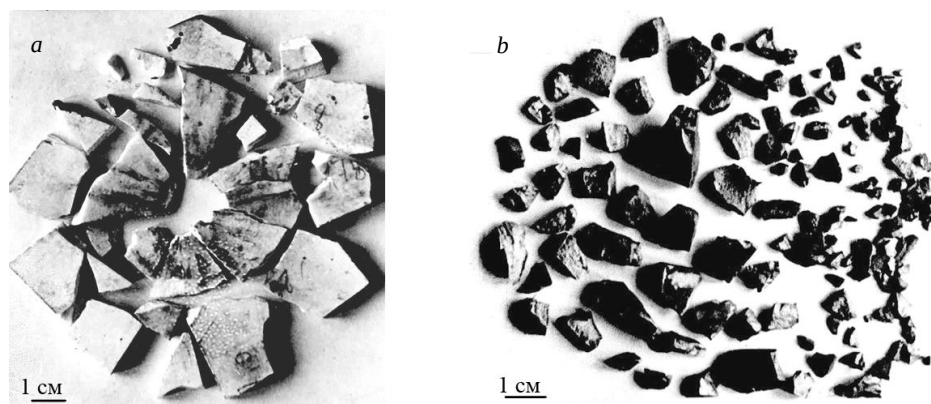


Рис. 3. Фотографии осколков керамической пластины из корунда Al_2O_3 марки КВП-98 (a) и карбида кремния SiC (b) после опыта

Fig. 3. Photo of ceramic plate fragments made of (a) Al_2O_3 corundum (KVP-98) and (b) silicon carbide SiC after the experiment

На рис. 3, a приведена фотография уловленных осколков разрушенной керамической пластины из оксида алюминия марки КВП-98 (корунд) толщиной 7 мм. Условия нагружения аналогичны предыдущему случаю. Наиболее разрушен материал в месте контакта (крупные частицы пыли), и от центра контакта к периферии размеры осколков увеличиваются. На фотографии уловленных осколков керамической пластины из карбида кремния SiC толщиной 12 мм (рис. 3, b) видно, что степень разрушения материала повышена в сравнении с предыдущим случаем. Это свидетельствует о влиянии физико-механических и динамических характеристик прочности материала керамик на процесс разрушения при высокоскоростном ударе.

Анализ эффективности противоударной стойкости

Проведенные ранее исследования свидетельствуют об эффективности расположения керамических пластин на лицевой поверхности основной конструкции [24]. При этом в процессе ударно-волнового нагружения керамические образцы, как показано выше, разрушаются на фрагменты и в большинстве случаев после опыта восстановлению не подлежат, поэтому определить глубину проникания ударников в керамические преграды оказывается невозможным. Эффективность образцов из керамических материалов принято определять косвенным методом, в частности по глубине проникания ударника в массивную металлическую плиту-свидетель с керамической пластиной на лицевой поверхности и без нее. В [25] предложена простая формула для оценки эффективности противоударной стойкости ε керамики:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\rho_m r + \rho_k c}{\rho_m x},$$

где r – глубина проникания в металлическую плиту с керамической пластиной на лицевой поверхности, x – глубина проникания в плиту при отсутствии керамической пластины, c – толщина керамической пластины, ρ_m – плотность материала плиты, ρ_k – плотность керамики. В качестве массивной плиты обычно использу-

ется алюминиевый сплав Д16М. Параметр эффективности ε конструкции меньше или равен нулю, если пластина из керамики не дает выигрыша по массе на единицу площади преграды. Рост ε от нуля до 1 означает рост эффективности. Такой подход к оценке эффективности хрупко разрушающихся материалов активно используется в настоящее время [17–19], однако диапазон исследуемых скоростей соударения, как правило, ограничен сверху несколькими сотнями метров в секунду.

В данной работе проведен анализ серии экспериментов по высокоскоростному соударению стальных сферических ударников с керамическими и металлокерамическими пластинами в диапазоне скоростей соударения 0.5–6.5 км/с. Путем обработки статистическими методами ранее полученных экспериментальных данных и компьютерного моделирования [7, 20, 24], а также анализа результатов выполненных опытов выявлено наличие двух групп керамик по их эффективности в качестве дополнительных элементов защиты основной конструкции. На рис. 4 представлены зависимости параметра эффективности керамик и металлокерамики, выполненные по описанной выше методике с использованием приведенного соотношения. Ударник – шар диаметром 3.5 и 5.5 мм.

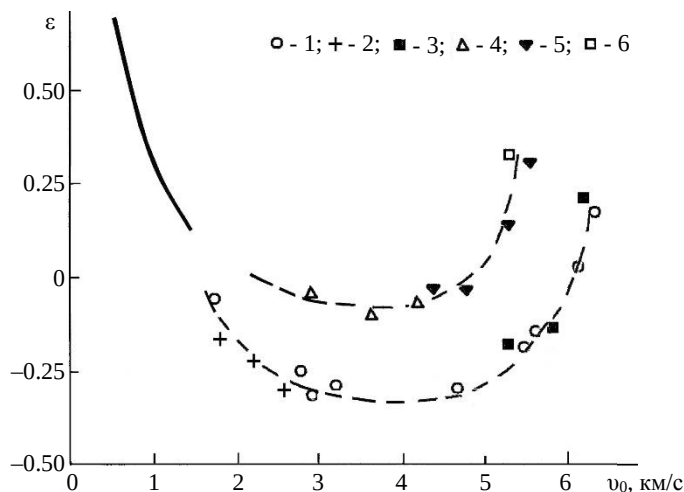


Рис. 4. Параметр эффективности керамических и композитных материалов при высокоскоростном ударе: 1 – ZrO₂, 2 – SiC, 3 – TiC–NiCr, 4 – TiB₂–B₄C, 5 – Al₂O₃, 6 – KBП-98

Fig. 4. Efficiency parameter for ceramic and composite materials under a high-velocity impact: (1) ZrO₂, (2) SiC, (3) TiC–NiCr, (4) TiB₂–B₄C, (5) Al₂O₃, and (6) KVP-98

В левом верхнем углу рисунка сплошной линией представлена экспериментальная усредненная зависимость параметра эффективности керамики Al₂O₃ при ударе стальным стержнем диаметром 6.2 мм и длиной 28.2 мм при скорости удара до 1.5 км/с [20]. При данных условиях взаимодействия максимальное значение параметра эффективности керамики соответствует низким скоростям удара и с увеличением скорости соударения до 1.5 км/с эффективность снижается.

Штриховые линии соответствуют результатам исследования эффективности керамических и композитных материалов при ударе сферическими элементами при высоких и сверхвысоких скоростях нагружения. Верхняя кривая соответ-

стствует группе керамических материалов с повышенным параметром эффективности противоударной стойкости к удару, нижняя кривая – с пониженным параметром эффективности. Можно выделить их общее объединяющее свойство – первоначальное понижение параметра эффективности с увеличением скорости удара, достижение им минимального значения в диапазоне скоростей удара 3.0–4.5 км/с и увеличение его значения с дальнейшим повышением скорости удара.

Спад кривых эффективности исследуемых материалов на первом этапе, по-видимому, связан с деформированием и разрушением материала преград во фронте ударной волны. Можно предположить, что при скоростях удара свыше 4.5 км/с наблюдаются ветвление микротрещин и интенсивное разрушение материала на микрофрагменты в ударной волне. На более поздней стадии взаимодействия осуществляется поджатие разрушенного материала деформированным ударником, как следствие, наблюдается процесс компактирования материала. Это способствует усилению сопротивления внедрению ударника в керамику, снижению начальной скорости внедрения в плиту-свидетель и повышению параметра эффективности.

Заключение

Экспериментально исследованы процессы деформирования и разрушения керамических (оксид алюминия Al_2O_3 , оксид алюминия марки КВП-98 (корунд), диоксид циркония ZrO_2 , карбид кремния SiC) и композитных материалов ($TiC-NiCr$ и TiB_2-B_4C) в диапазоне скоростей удара 0.5–6.5 км/с.

Проведен анализ динамики разрушения керамических пластин на примере карбида кремния и оксида алюминия. Показаны уловленные осколки разрушенных пластин и их распределение по размерам.

Результаты исследования эффективности противоударной стойкости рассмотренных керамических и композитных образцов выявили две группы материалов с существенно различным уровнем эффективности. Для обеих групп зависимость параметра эффективности от скорости удара демонстрирует падение для скоростей от 0.5 до 3.0–4.5 км/с и последующий рост при росте скорости удара до 6.5 км/с.

Список источников

1. Румянцев Б.В., Павлов С.И. Высокоскоростное взаимодействие металлической струны с керамикой // Письма в Журнал технической физики. 2020. Т. 46, вып. 17. С. 10–13. doi: 10.21883/PTF.2020.17.49885.18363
2. Черепанов И.А., Савиных А.С., Разоренов С.В. Откол в сапфире при ударном сжатии в различных кристаллографических направлениях // Журнал технической физики. 2020. Т. 90, вып. 6. С. 961–964. doi: 10.21883/JTF.2020.06.49283.368-19
3. Дульнев А.И. О применении керамики в составе композитных конструкций защиты // Труды Крыловского государственного научного центра. 2021. Т. 2 (396). С. 52–66. doi: 10.24937/2542-2324-2021-2-396-52-66
4. Zelepugin S.A., Mali V.I., Zelepugin A.S., Ilna E.V. Failure of metallic-intermetallic laminate composites under dynamic loading // AIP Conference Proceedings. 2012. V. 1426. P. 1101–1104. doi: 10.1063/1.3686471
5. Промахов В.В., Коробенков М.В., Шульц Н.А. и др. Моделирование накопления повреждений и разрушения керамических композитов $Al_2O_3-ZrO_2$, полученных по аддитив-

- ным технологиям, при высокоскоростном нагружении // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 72. С. 140–157. doi: 10.17223/19988621/72/12
6. Zelepugin S.A., Zelepugin A.S., Khristenko Yu.F. Computational modelling of brittle fracture under dynamic loading // ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. 2016. V. 11 (24). P. 14560–14565.
 7. Горельский В.А., Зелепугин С.А., Толкачев В.Ф. Экспериментальное и численное исследование разрушения керамики при высокоскоростном ударе // Химическая физика. 1999. Т. 18. С. 104–107.
 8. Smolin A.Yu., Eremina G.M. Refinement of the model for iron oxide friction based on movable cellular automata // AIP Conference Proceedings. 2020. V. 2310. Art. 020320. doi: 10.1063/5.0034150
 9. Ivanova O.V., Cherepanov R.O., Zelepugin S.A. Numerical simulation of solid-phase chemical transformations in thermite mixtures under shock-wave loading // Journal of Physics: Conference Series. 2022. V. 2154 (1). Art. 012005. doi: 10.1088/1742-6596/2154/1/012005
 10. Brancio P.S., Zhang J., Rino J.P. et al. Shock-induced microstructural response of mono- and nanocrystalline SiC ceramics // Journal of Applied Physics. 2018. V. 123 (14). Art. 145902. doi: 10.1063/1.5023915
 11. Ramesh K.T., Graham-Brady L., Goddard W.A. et al. Models for the behavior of boron carbide in extreme dynamic environments // Journal of the American Ceramic Society. 2021. V. 105 (1). doi: 10.1111/jace.18071
 12. Мукушина В.А., Смолин И.Ю. Численное моделирование деформирования и разрушения пористой алюмооксидной керамики на мезоуровне // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 58. С. 99–108. doi: 10.17223/19988621/58/8
 13. Pashkov S.V., Zelepugin S.A. Probabilistic approach in modelling dynamic fracture problems // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2022. V. 236 (21). P. 10681–10689. doi: 10.1177/0954406220939116
 14. Зимина В.А. Экспериментальное исследование структуры, упругих и прочностных характеристик пористой корундовой керамики // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 67. С. 117–126. doi: 10.17223/19988621/67/11
 15. Хорев И.Е. Ударно-откольная асимметрия в проблеме высокоскоростного соударения твердых тел // Письма в Журнал технической физики. 2005. Т. 31, вып. 4. С. 71–75.
 16. Зелепугин С.А., Толкачев В.Ф., Зелепугин А.С. Асимметрия разрушения керамики при высокоскоростном ударе // Письма в Журнал технической физики. 2017. Т. 43, вып. 23. С. 48–54. doi: 10.21883/PJTF.2017.23.45275.16974
 17. Carton E.P., Johnsen B.B., Rahbek D.-B. et al. Round robin using the depth of penetration test method on an armour grade alumina // Defence Technology. 2019. V. 15. P. 829–836. doi: 10.1016/j.dt.2019.07.014
 18. Savio S.G., Madhu V. Ballistic performance evaluation of ceramic tiles with respect to projectile velocity against hard steel projectile using DOP test // International Journal of Impact Engineering. 2018. V. 113. P. 161–167. doi: 10.1016/j.ijimpeng.2017.11.020
 19. Savio S.G., Rao A.S., Reddy P.R.S., Madhu V. Microstructure and ballistic performance of hot pressed & reaction bonded boron carbides against an armour piercing projectile // Advances in Applied Ceramics. 2019. V. 118 (5). P. 264–273. doi: 10.1080/17436753.2018.1564416
 20. Tolkahev V.F., Konyaev A.A., Zheikov V.V. Experimental study of impact resistance of ceramics and composites // Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal. 2012. V. 3 (3). P. 253–262. doi: 10.1615/CompMechComputApplIntJ.v3.i3.40
 21. Khristenko Yu.F., Zelepugin S.A., Gerasimov A.V. New light-gas guns for the high-velocity throwing of mechanical particles // ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. 2017. V. 12 (22). P. 6606–6610.
 22. Михайлов А.Л., Огородников В.А., Сасик В.С. и др. Экспериментально-расчетное моделирование процесса выброса частиц с ударно-нагруженной поверхности // Журнал

- экспериментальной и теоретической физики. 2014. Т. 145 (5). С. 892–905. doi: 10.7868/S0044451014050127
23. Григорьев М.В., Бурлаченко А.Г., Буякова С.П., Кульков С.Н. Деформация и разрушение корундовой керамики с многоуровневой поровой структурой // Журнал технической физики. 2019. Т. 666 (12). С. 1898–1902. doi: 10.21883/JTF.2019.12.48489.255-18
 24. Tolkachev V.F., Konyaev A.A., Pakhnutova N.V. The efficiency of ceramic-faced metal targets at high-velocity impact // Journal of Physics: Conference Series. 2017. V. 919. Art. 012007. doi: 10.1088/1742-6596/919/1/012007
 25. Bless S.J., Rosenberg Z., Yoon B. Hypervelocity penetration of ceramics // International Journal of Impact Engineering. 1987. V. 5 (1-4). P. 165–171. doi: 10.1016/0734-743X(87)90036-4

References

1. Rumyantsev B.V., Pavlov S.I. (2020) High-speed interaction of a metal jet with ceramics. *Technical Physics Letters*. 46. pp. 843–846. doi: 10.1134/S1063785020090102
2. Cherepanov I.A., Savinykh A.S., Razorenov S.V. (2020) Spalling in sapphire in different crystallographic directions under shock compression. *Technical Physics*. 65. pp. 921–924. doi: 10.1134/S1063784220060067
3. Dulnev A. (2021) Applications of ceramics in composite protective structures. *Transactions of the Krylov State Research Centre*. 2(396). pp. 52–66. doi: 10.24937/2542-2324-2021-2-396-52-66
4. Zelepugin S.A., Mali V.I., Zelepugin A.S., Ilina E.V. (2012) Failure of metallic-intermetallic laminate composites under dynamic loading. *AIP Conference Proceedings*. 1426. pp. 1101–1104. doi:10.1063/1.3686471
5. Promakhov V.V., Korobenkov M.V., Schultz N.A., Zhukov A.S., Olisov A.V., Bakhmat V.R., Dronov F.Yu., Myalkovskiy I.S. (2021) Modelirovanie nakopleniya povrezhdeniy i razrusheniya keramicheskikh kompozitov $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-ZrO}_2$, poluchennykh po additivnym tekhnologiyam, pri vysokoskorostnom nagruzhении [Modeling the accumulation of damages and the failure of ceramic composites $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-ZrO}_2$, obtained by additive technologies, under high-speed loading]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 72. pp. 140–157. doi: 10.17223/19988621/72/12
6. Zelepugin S.A., Zelepugin A.S., Khristenko Yu.F. (2016) Computational modelling of brittle fracture under dynamic loading. *ARPJ Journal of Engineering and Applied Sciences*. 11(24). pp. 14560–14565.
7. Gorelskii V.A., Zelepugin S.A., Tolkachev V.F. (2000) Experimental and numerical study of ceramics destruction by high-velocity impact. *Chemical Physics Reports*. 18(10-11). pp. 2211–2217.
8. Smolin A.Yu., Eremina G.M. (2020) Refinement of the model for iron oxide friction based on movable cellular automata. *AIP Conference Proceedings*. 2310. Article 020320. doi: 10.1063/5.0034150
9. Ivanova O.V., Cherepanov R.O., Zelepugin S.A. (2022) Numerical simulation of solid-phase chemical transformations in thermite mixtures under shock-wave loading. *Journal of Physics: Conference Series*. 2154(1). Article 012005. doi: 10.1088/1742-6596/2154/1/012005
10. Brancio P.S., Zhang J., Rino J.P., Nakano A., Kalia R.K., Vashishta P. (2018) Shock-induced microstructural response of mono- and nanocrystalline SiC ceramics. *Journal of Applied Physics*. 123(14). Article 145902. doi: 10.1063/1.5023915
11. Ramesh K.T., Graham-Brady L., Goddard W.A., Hurley R.C., Robbins M., Tonge A.L., Bhattacharjee A., Clemmer J.T., Zeng Q., Li W., Shen Y., An Q., Mitra N. (2021) Models for the behavior of boron carbide in extreme dynamic environments. *Journal of the American Ceramic Society*. 105 (1). doi: 10.1111/jace.18071

12. Mikushina V.A., Smolin I.Yu. (2019) Chislennoe modelirovanie deformirovaniya i razrusheniya poristoy alyumooksidnoy keramiki na mezourovne [Numerical modeling of the deformation and fracture of a porous alumina ceramics at mesoscale]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 58. pp. 99–108. doi: 10.17223/19988621/58/8
13. Pashkov S.V., Zelepugin S.A. (2022) Probabilistic approach in modelling dynamic fracture problems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 236(21). pp. 10681–10689. doi: 10.1177/0954406220939116
14. Zimina V.A. (2020) Eksperimental'noe issledovanie struktury, uprugikh i prochnostnykh kharakteristik poristoy korundovoy keramiki [Experimental investigation of the structure, elastic, and strength characteristics of porous corundum ceramics]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 67. pp. 117–126. doi: 10.17223/19988621/67/11
15. Khorev I.E. (2005) Shock-spall asymmetry in high-velocity impact of solids. *Technical Physics Letters*. 31(2). pp. 167–168. doi:10.1134/1.1877637
16. Zelepugin S.A., Tolkahev V.F., Zelepugin A.S. (2017) Asymmetry of ceramic destruction under a high-velocity impact. *Technical Physics Letters*. 43(12). pp. 1071–1073. doi: 10.1134/S1063785017120136
17. Carton E.P., Johnsen B.B., Rahbek D.-B., Broos H., Snippe A. (2019) Round robin using the depth of penetration test method on an armour grade alumina. *Defence Technology*. 15. pp. 829–836. doi: 10.1016/j.dt.2019.07.014
18. Savio S.G., Madhu V. (2018) Ballistic performance evaluation of ceramic tiles with respect to projectile velocity against hard steel projectile using DOP test. *International Journal of Impact Engineering*. 113. pp. 161–167. doi: 10.1016/j.ijimpeng.2017.11.020
19. Savio S.G., Rao A.S., Reddy P.R.S., Madhu V. (2019) Microstructure and ballistic performance of hot pressed & reaction bonded boron carbides against an armour piercing projectile. *Advances in Applied Ceramics*. 118(5). pp. 264–273. doi: 10.1080/17436753.2018.1564416
20. Tolkahev V.F., Konyaev A.A., Zheikov V.V. (2012) Experimental study of impact resistance of ceramics and composites. *Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal*. 3(3). pp. 253–262. doi: 10.1615/CompMechComputApplIntJ.v3.i3.40
21. Khristenko Yu.F., Zelepugin S.A., Gerasimov A.V. (2017) New light-gas guns for the high-velocity throwing of mechanical particles. *ARPJ Journal of Engineering and Applied Sciences*. 12(22). pp. 6606–6610.
22. Mikhailov A.L., Ogorodnikov V.A., Sasik V.S. et al. (2014) Experimental-calculation simulation of the ejection of particles from a shock-loaded surface. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 118. pp. 785–797. doi: 10.1134/S1063776114040153
23. Grigor'ev M.V., Burlachenko A.G., Buyakova S.P., Kul'kov S.N. (2019) Deformation and fracture of corundum ceramics with a multilevel pore structure. *Technical Physics*. 64(12). pp. 1803–1807. doi: 10.1134/S1063784219120090
24. Tolkahev V.F., Konyaev A.A., Pakhnutova N.V. (2017) The efficiency of ceramic-faced metal targets at high-velocity impact. *Journal of Physics: Conference Series*. 919. Article 012007. doi: 10.1088/1742-6596/919/1/012007
25. Bless S.J., Rosenberg Z., Yoon B. (1987) Hypervelocity penetration of ceramics. *International Journal of Impact Engineering*. 5(1-4). pp. 165–171. doi: 10.1016/0734-743X(87)90036-4

Сведения об авторах:

Зелепугин Сергей Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор Томского государственного университета, ведущий научный сотрудник научно-исследовательского отдела структурной макрокинетики Томского научного центра СО РАН, Томск, Россия. E-mail: szel@yandex.ru

Толкачев Владимир Фомич – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: tolk@niipmm.tsu.ru

Тырышкин Илья Михайлович – научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: tyryshkin@niipmm.tsu.ru

Information about the authors:

Zelepugin Sergey A. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk Scientific Center of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation), szel@yandex.ru.

Tolkachev Vladimir F. (Doctor of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation), tolk@niipmm.tsu.ru

Tyryshkin Il'ya M. (Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation), tyryshkin@niipmm.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 18.05.2022; принята к публикации 01.12.2022

The article was submitted 18.05.2022; accepted for publication 01.12.2022

Научная статья

УДК 523.681.8

doi: 10.17223/19988621/80/9

Оценка траектории метеороидов по марсианским кластерам

Елена Дмитриевна Подобная¹, Ольга Петровна Попова²,
Дмитрий Олегович Глазачев³

^{1, 2, 3} *Институт динамики геосфер им. академика М.А. Садовского РАН, Москва, Россия*

¹ *epodobnaya@gmail.com*

² *olga@idg.chph.ras.ru*

³ *glazachevd@gmail.com*

Аннотация. С 2006 г. на Марсе было обнаружено около 1 200 мест недавних падений метеороидов, примерно половина которых разрушается при пролете через атмосферу и приводит к образованию кратерных полей (кластеров). Анализ кластеров позволяет изучать плохо различимые на Земле детали взаимодействия метеороидов с атмосферой. Ранее предлагалось оценивать траекторию метеороида по эллипсу рассеяния кластеров и по выбросам из кратеров, однако оценки, полученные этими методами, согласуются только в 30% случаев. В данной работе представлены первые результаты применения модели фрагментации к описанию кластеров; мы надеемся, что в дальнейшем эта модель позволит описать кластеры и предложить методы определения направления полета и свойств ударника.

Ключевые слова: кратеры, метеороиды, кратерные выбросы, фрагментация, численное моделирование

Для цитирования: Подобная Е.Д., Попова О.П., Глазачев Д.О. Оценка траектории метеороидов по марсианским кластерам // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 80. С. 97–107. doi: 10.17223/19988621/80/9

Original article

Estimation of the trajectory of meteoroids from Martian clusters

Elena D. Podobnaya¹, Olga P. Popova², Dmitry O. Glazachev³

^{1, 2, 3} *Sadovsky Institute of Geosphere Dynamics Russian Academy of Science*

¹ *epodobnaya@gmail.com*

² *olga@idg.chph.ras.ru*

³ *glazachevd@gmail.com*

Abstract. Recently, about 1200 fresh meteoroid impact sites were discovered on Mars, they are single craters and crater fields with crater sizes up to 50 m. Atmosphere density on the surface of Mars corresponds to about 30 km height of the Earth's atmosphere. Thus, scattering fields of craters on Mars allow one to study fragmentation details, which are hidden in terrestrial conditions.

Previously, data on 77 Martian clusters were analyzed. To estimate the trajectory of meteoroids, the scattering ellipses were constructed. The ellipse size determines the angle of the meteoroid entry into the atmosphere and provides information about the height of destruction and the density of a space object. For more than 70% of clusters, the obtained azimuth estimations are within 20° of those determined by independent evaluations. For some clusters, the flight direction can be specified from crater ejecta on Martian HiRISE images. Estimations of azimuth angles for 42 clusters coincide with previous results obtained for 70% of clusters, while the data on the flight direction fit only for 30%. The discrepancy between different estimations of azimuth angles requires the use of other approaches.

Continuing on the topic, this work presents numerical modeling of the flight and fragmentation of a meteoroid in the atmospheres of two planets, Mars and Earth. It is assumed that the simulation results will allow one to determine meteoroid parameters, in particular, the trajectory parameters.

The main purpose of the presented work is to demonstrate the efficiency of the fragmentation model, its applicability to Martian clusters, and the difference in the scattering fields on the Earth and Mars: the atmospheric sorting effect is weak on Mars, and the scattering field is mainly dependent on fragmentation and the lateral spreading of fragments. The area of the simulated cluster is described with an accuracy of about 10%; the size of the maximum crater, with an accuracy of about 35%. The ratios of crater diameters to the maximum crater diameter for the model and real cluster are close to each other. In the future, it is planned to implement a series of numerical simulations with different initial data and to compare the results with real clusters on Mars, which have already been analyzed in previous works. The aim is to propose the advanced methods for determining the direction of the flight of meteoroids and the properties of impactors such as density and strength.

Keywords: craters, meteoroids, crater ejecta, fragmentation, numerical modeling

For citation: Podobnaya, E.D., Popova, O.P., Glazachev, D.O. (2022) Estimation of the trajectory of meteoroids from Martian clusters. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 97–107. doi: 10.17223/19988621/80/9

Введение

В течение последних лет на Марсе было обнаружено около 1 200 свежих мест падения метеороидов [1–4], приведших к образованию одиночных ударных кратеров и кратерных полей (кластеров) с диаметрами отдельных кратеров от 1 до 50 м. Кластер определяется как скопление в одной и той же области нескольких кратеров, которые образовались почти одновременно в результате атмосферной фрагментации ударника. Метеороидом принято называть твердый природный объект размером примерно от 30 мкм до 1 м, движущийся в межпланетном пространстве или прибывающий из него. Метеорит – это космический объект, который пролетел атмосферу, не испарившись полностью, и достиг поверхности планеты.

Благодаря более разреженной (в сравнении с Землей) атмосфере Марса, падающие метеороиды меньше фрагментируются. Тем не менее около половины метеороидов разрушается в марсианской атмосфере и образует кратерные поля [2–5]. На Земле, как правило, метеороиды наблюдаются во время недолгого пролета через атмосферу, в редких случаях находятся их фрагменты в виде метеоритов. На Марсе в 40–50% случаев аналогичные объекты привели бы к образованию кластеров. Плотность атмосферы у поверхности Марса соответствует примерно

30 км высоты земной атмосферы; таким образом, исследование кратерных полей на Марсе позволяет увидеть результаты менее существенной фрагментации, которые не могут быть обнаружены в земных условиях. Свойства космических объектов оцениваются по наблюдательным данным в рамках тех или иных предположений с не очень высокой точностью, исследование марсианских кластеров дает возможность оценить свойства метеороидов независимым образом.

Цель данной работы – предложить модель фрагментации метеороидов на Марсе, которая позволит описать реальные кластеры и определить для них характеристики фрагментации (прочность и плотность ударников, распределение фрагментов, параметры траектории метеороидов и др.).

В первом разделе приводится описание обнаруженных кластеров, представлены полученные ранее результаты. Второй раздел посвящен разрабатываемой модели фрагментации метеороидов и сопоставлению первых результатов моделирования с реальным кластером, сравнению фрагментации в атмосфере Земли и Марса для одного и того же модельного метеороида.

Кластеры и кратерные выбросы

Недавно были опубликованы подробные данные для 77 марсианских кластеров, содержащих от 2 до 465 отдельных кратеров [3], которые включают информацию о размере и расположении кратеров в кластере. Средний диаметр кратеров для этих кластеров составляет 2.5 м, наибольшее расстояние между двумя кратерами в кластере – от 16.5 м до 3.8 км (среднее значение 350 м), характерный размер кластера – 50–500 м.

Для получения различных оценок параметров траектории космических объектов, образовавших марсианские кластеры, содержащие более 5 кратеров, в работе [3] предложено построить минимальный эллипс, покрывающий 90% кратеров в кластере (эллипс рассеяния). Ориентация траектории ударника в пространстве определяется двумя углами – углом входа (угол между траекторией ударника и горизонтальной плоскостью) и наклоном проекции траектории на плоскости (рис. 1). Азимут полета метеороида определяется наклоном проекции на плоскости с учетом направления движения метеороида и отсчитывается от направления на север по часовой стрелке.

Размер эллипса определяет угол входа метеороида в атмосферу, содержит информацию о высоте разрушения и плотности космического объекта [6]. Непонятно, насколько достоверными являются полученные оценки углов и размеров кластеров, поэтому в работах [7, 8] мы воспроизвели тот же алгоритм самостоятельно, а также построили эллипсы рассеяния для рассматриваемых кластеров еще одним способом. Для каждого кластера, исходя из эллипса рассеяния, определялся азимут его траектории как угол наклона главной оси эллипса рассеяния, направление полета выбиралось в сторону большего суммарного диаметра фрагментов (от центра эллипса) [7, 8]. В более чем 70% случаев оценки углов, полученных по эллипсам рассеяния и описывающих траекторию ударника, отличаются от независимых оценок [3] не более чем на 20°. Эллипсы рассеяния позволяют оценить разброс кратеров в кластере – площадь поля рассеяния была оценена с точностью $\pm 50\%$ в сравнении с независимой оценкой [3]. Кроме того, были построены эллипсы рассеяния для двух известных полей рассеяния метеоритов на Земле. Показано, что возможно оценить азимут и угол входа с точностью до 15° для по-

логой траектории и наличия достаточного количества крупных фрагментов, на чье падение мало влияет ветровой снос [7, 8]. Поле рассеяния (территория, по которой разлетаются метеоритные осколки, образованные в результате падения космического тела) маленьких фрагментов метеороида (< 1 кг) с почти вертикальной траекторией входа определяется только ветровым сносом [7, 8].

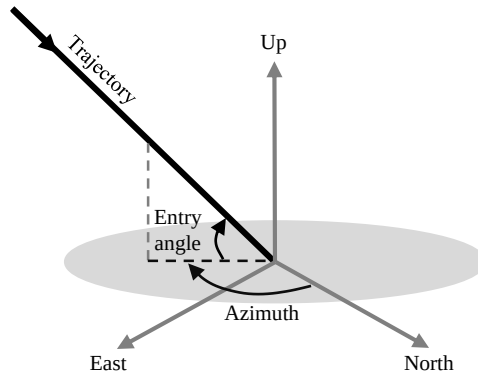


Рис. 1. Схематическое изображение углов, определяющих траекторию метеороида в атмосфере. Черная линия со стрелкой обозначает направление полета метеороида; серые линии – система координат

Fig. 1. Schematic representation of the angles determining the meteoroid trajectory in the atmosphere. The black line with an arrow indicates the direction of the meteoroid flight; the gray arrows, the coordinate system

Изображения Марса, полученные проектом HiRISE (High Resolution Imaging Science Experiment), позволяют детально рассмотреть выбросы из кратеров для ряда кластеров и найти соответствующую траекторию ударника [7, 8]. В случае косых ударов выбросы из образующегося кратера распределены ассиметрично и более выражены по направлению полета [9]. Кроме того, в ряде случаев для определения направления полета метеороида можно использовать пылевые следы на поверхности Марса – параболические элементы, которые рассматриваются как поверхностные записи взаимодействия атмосферных ударных волн [10, 11]. Определить направление полета по расположению кратерных выбросов оказалось возможным для 42 из 77 рассмотренных кластеров [8], в остальных случаях изображения кластеров не дают возможности получить однозначную оценку направления кратерных выбросов. Направление полета определялось приближенно, с точностью $\pm 45^\circ$. Кратерные выбросы не дают возможности определить угол входа метеороида в атмосферу.

Направление полета, определяемое выбросами, сравнивалось с оценками, полученными по эллипсам рассеяния. Кластер ESP_013655_1710 (рис. 2) демонстрирует совпадение оценок направления полета: азимут, вычисленный по эллипсам рассеяния, составляет 300° , как и полученный по расположению кратерных выбросов. Направление полета метеороида, образовавшего кластер PSP_009305_1830 (рис. 3), составляет 315° при оценке траектории по эллипсам рассеяния и 220° – исходя из выбросов из кратеров. Таким образом, полученные направления полета различаются на 95° , т.е. полученные оценки направления полета расположены практически перпендикулярно.

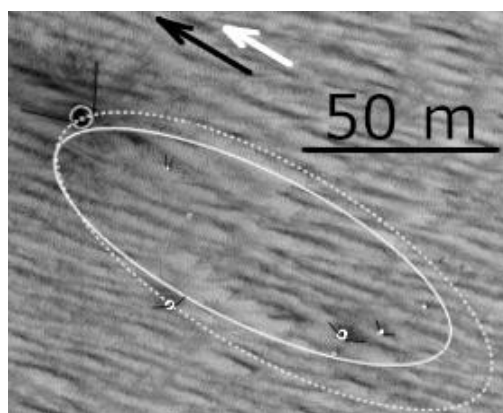


Рис. 2. Изображение, полученное камерами HiRISE для кластера ESP_013655_1710. Эллипсы рассеяния, построенные двумя различными способами [7, 8], показаны белой сплошной и пунктирной линиями. Стрелки показывают направление полета метеороида, полученное с помощью эллипсов рассеяния (белая стрелка) и по расположению выбросов из кратеров (черная стрелка); границы кратерных выбросов и кратеров отмечены черными линиями и белыми окружностями соответственно

Fig. 2. Image made by a HiRISE camera for ESP_013655_1710 cluster. Scattering ellipses (white solid and dashed lines) are constructed by two different methods [7, 8]. The meteoroid flight direction obtained from scattering ellipses (white arrow) and from crater ejecta location (black arrow) are shown; areas of crater ejecta and craters are indicated by black lines and white circles, respectively

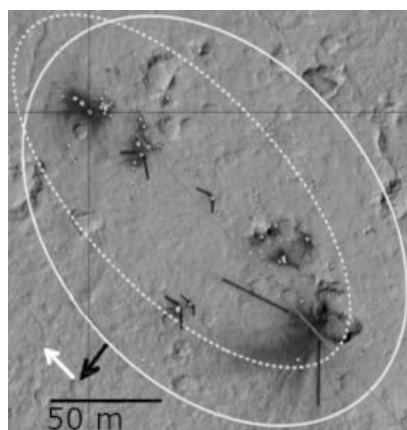


Рис. 3. Изображение, полученное камерами HiRISE для кластера PSP_009305_1830. Эллипсы рассеяния, построенные двумя различными способами [7, 8], показаны белой сплошной и пунктирной линиями. Стрелки показывают направление полета метеороида, полученное с помощью эллипсов рассеяния (белая стрелка) и по расположению выбросов из кратеров (черная стрелка); границы кратерных выбросов и кратеров отмечены черными линиями и белыми окружностями соответственно

Fig. 3. Image made by a HiRISE camera for PSP_009305_1830 cluster. Scattering ellipses (white solid and dashed lines) are constructed by two different methods [7, 8]. The meteoroid flight direction obtained from scattering ellipses (white arrow) and from crater ejecta location (black arrow) are shown; areas of crater ejecta and craters are indicated by black lines and white circles, respectively

Для азимутов, полученных по кратерным выбросам, азимут метеороида без учета направления полета соответствует предыдущим оценкам примерно для 70% кластеров [8], направление полета соответствует примерно в 30%. Различие оценок, полученных разными способами, показывает необходимость рассмотрения иных способов нахождения азимута.

Модель фрагментации метеороидов

В качестве следующего шага рассматривается численное моделирование полета и фрагментации метеороида в атмосферах двух планет – Марса и Земли, поскольку популяция метеороидов для обеих планет общая [12]. Мы предполагаем, что результаты моделирования позволят определять параметры метеороидов, в том числе параметры траектории.

Взаимодействие метеороида с атмосферой планеты описывается системой дифференциальных уравнений [13]. В качестве примера рассматривается каменный ударник диаметром 1 м (анализ 77 кластеров на Марсе показал, что диаметр соответствующих метеороидов примерно 0.2–3 м [7]) и плотностью $2\,650\text{ кг/м}^3$, входящий в атмосферы Земли и Марса под углом 45° и азимутом 45° . Поверхность планеты в месте падения метеороида считалась каменной, с плотностями $2\,650\text{ кг/м}^3$ для Земли и $2\,000\text{ кг/м}^3$ для Марса. Скорость входа метеороида в атмосферу предполагалась примерно равной средней для каждой планеты – 10 км/с для Марса и 20 км/с для Земли.

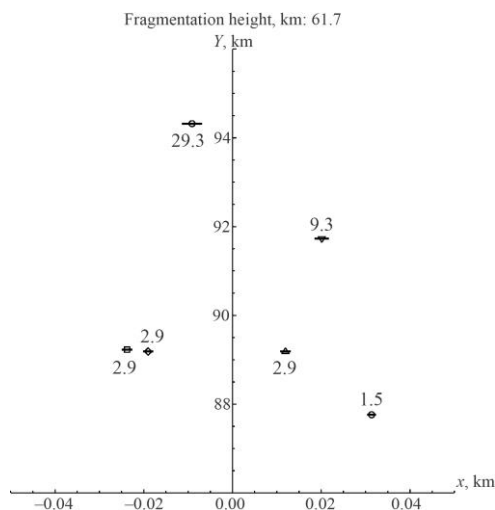


Рис. 4. Расположение фрагментов 1 м метеороида ($v_0 = 20\text{ км/с}$; $\rho = 2\,650\text{ кг/м}^3$), входящего в атмосферу Земли под углом 45° и азимутом 45° и разрушающегося при давлении 0.1 МПа. Траектория метеороида совпадает с вертикальной осью. Фрагменты долетают до поверхности Земли; их финальные массы от 1.5 кг до 29 кг (обозначены цифрами). Длина отрезков пропорциональна диаметру соответствующего фрагмента

Fig. 4. Location of fragments of a 1 m meteoroid ($v_0 = 20\text{ км/с}$; $\rho = 2\,650\text{ кг/м}^3$), which enters the atmosphere of the Earth at an angle of 45° and azimuth angle of 45° , and explodes at a pressure of 0.1 МПа. Meteoroid trajectory coincides with the vertical axis. Fragments reach the Earth surface; their final masses are in the range of 1.5 – 29 kg (indicated by numbers). The length of line segments is proportional to the diameter of the corresponding fragment

В рассматриваемом варианте предполагалось, что фрагментация проходила в одну стадию, боковой разлет фрагментов происходил под случайным углом к траектории метеороида (дополнительная скорость разлета перпендикулярно к траектории возникает за счет начального взаимодействия ударных волн фрагментов сразу после разрушения [14]), разрушение метеороида происходило на высоте, где прочность метеороида достигала 0.1 МПа [15] (это значение соответствует разрушению на Земле примерно на высоте 60 км, на Марсе – 30 км). Во время фрагментации метеороид распадается на некоторое количество сферических фрагментов, количество и размеры которых определяются распределением по усеченному степенному закону с фиксированной массой максимального фрагмента [16]. Анализ оценок массы наибольшего фрагмента для 77 кластеров показал, что можно выделить несколько групп ударников: с отношением массы наибольшего фрагмента к массе метеороида до разрушения > 0.8 , отношением масс примерно 0.6–0.7 и 0.2–0.4 [16]. В данной работе было выбрано значение в 0.6 (60%).

Фрагменты рассматриваемого метрового метеороида на Земле (рис. 4) долетают до поверхности, но не образуют кратеров, разлет фрагментов вдоль траектории составляет примерно 5 км, поперек траектории – менее 100 м. В условиях достаточно плотной земной атмосферы происходит атмосферная сортировка, крупные фрагменты образуют головную часть поля рассеяния, фрагменты располагаются вдоль траектории в зависимости от своей массы, как и наблюдается в многочисленных земных полях рассеяния метеоритов [17].

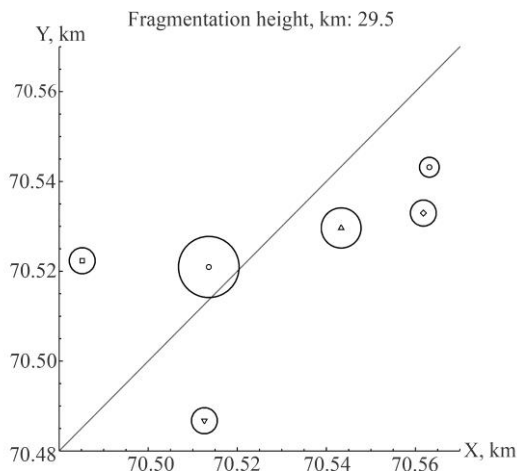


Рис. 5. Расположение кратеров (обозначены кругами в масштабе осей) от 1 м метеороида ($v_0 = 10$ км/с; $\rho = 2\,650$ кг/м³), входящего в атмосферу Марса под углом 45° и азимутом 45° и разрушающегося при давлении 0.1 МПа. Фрагменты долетают до поверхности Марса с массами от 30 кг до 735 кг. Линия обозначает траекторию ударника

Fig. 5. Location of craters (indicated by circles in the scale of the axes) made by a 1 m meteoroid ($v_0 = 10$ km/s; $\rho = 2650$ kg/m³), which enters the atmosphere of Mars at an angle of 45° and azimuth angle of 45°, and explodes at a pressure of 0.1 MPa. The mass of the fragments reaching the Mars surface ranges from 30 to 735 kg. The solid line indicates the impactor trajectory

В случае разрушения идентичного метрового метеороида в марсианской атмосфере (рис. 5) фрагменты достигают поверхности планеты со скоростью, достаточной для образования кратеров. Диаметр кратеров вычислялся исходя из соот-

ношений подобия [18] и для рассматриваемого ударника составил от 4.5 до 13.5 м, разлет фрагментов составил примерно 60 м вдоль траектории и 40 м – поперек.

Соотношение между размерами кратеров и размером поля рассеяния хорошо соответствуют реальному кластеру на Марсе: кластер ESP_037706_1765 с максимальным кратером диаметром 10 м имеет площадь примерно 75 м на 35 м (рис. 6), отношение диаметров кратеров к диаметру максимального кратера в модели и реальном кластере близки друг к другу. Направление полета для рассматриваемого реального кластера, полученное по эллипсам рассеяния и по кратерным выбросам, отличается на 190° , т.е. практически противоположно. Направление полета, полученное по выбросам, совпадает с заданным в моделировании кластера. В головной части поля рассеяния оказываются не наиболее крупные фрагменты, как происходит на Земле и как предполагалось при построении эллипсов рассеяния.

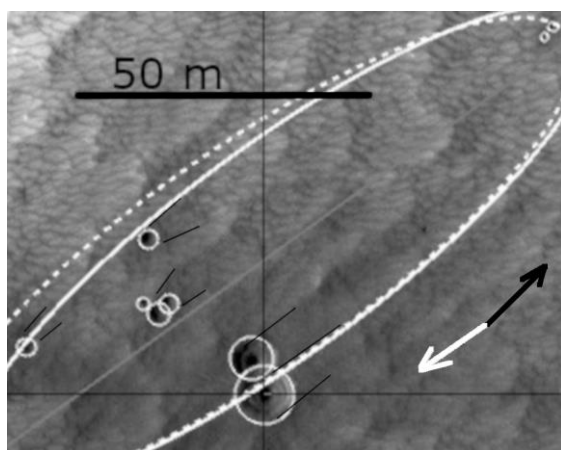


Рис. 6. Снимок камерой HiRISE кластера ESP_037706_1765 на поверхности Марса. Эллипсы рассеяния, построенные двумя различными способами [7, 8], показаны белой сплошной и пунктирной линиями. Стрелки показывают направление полета метеороида, полученное с помощью эллипсов рассеяния (белая стрелка) и по расположению выбросов из кратеров (черная стрелка); границы кратерных выбросов и кратеров отмечены черными линиями и белыми окружностями соответственно

Fig. 6. Image made by a HiRISE camera for ESP_037706_1765 cluster on the Martian surface. Scattering ellipses (white solid and dashed lines) are constructed by two different methods [7, 8]. The meteoroid flight direction obtained from scattering ellipses (white arrow) and from crater ejecta location (black arrow) are shown; areas of crater ejecta and craters are indicated by black lines and white circles, respectively

На Марсе эффект атмосферной сортировки выражен слабо, поле рассеяния в основном определяется фрагментацией и боковым разлетом осколков. Сравнение результатов моделирования фрагментации для Земли и Марса показало, что благодаря различию в плотности атмосфер при одинаковых исходных данных ударник образует на Марсе кратерное поле, во много раз меньшее, чем поле рассеяния метеоритов на Земле, и с кратерами размером до 13.5 м.

Реализованная модель разрушений метеороида в атмосфере дает возможность описать кратерные кластеры и позволит предложить методы определения направления полета и свойств ударника.

Заключение

Основным результатом представленной работы является демонстрация работоспособности модели фрагментации, ее применимости к марсианским кластерам и отличия характера полей рассеяния на Земле и на Марсе (атмосферная сортировка и разлет фрагментов за счет начального взаимодействия их ударных волн).

Проведенное численное моделирование показало, что примененная модель описывает кластеры на Марсе и дает возможность определить параметры ударника, образовавшего кластер. Площадь моделированного кластера описывается с точностью около 10%, размер максимального кратера – с точностью около 35%. Отношение диаметров кратеров к диаметру максимального кратера в модели и реальном кластере близки к друг другу. В будущем планируется провести серийное применение численного моделирования с различными начальными данными и сравнить его результаты с рассмотренными в предыдущих работах реальными кластерами на Марсе. Это позволит предложить более точные методы определения направления полета метеороида и определить свойства ударников, в том числе плотность и прочность.

Список источников

1. Malin M.C., Edgett K.S., Posiolova L.V., McColley S.M., Noe Dobrea E.Z. Catalog of new impact sites on Mars formed May 1999–March 2006. San Diego, CA : Malin Space Science Systems. Inc., 2006.
2. Daubar I.J., McEwen A.S., Byrne S., Dundas C.M., Kennedy M., Ivanov B.A. The current Martian cratering rate // 41th Lunar and Planetary Science Conference. 2010. Abstract 1978.
3. Daubar I.J., Banks M.E., Schmerr N.C., Golombek M.P. Recently formed crater clusters on Mars // Journal of Geophysical Research 2019. V. 124 (4). P. 958–969. doi: 10.1029/2018JE005857
4. Daubar I.J., Dundas C.M., McEwen A.S., Gao A., Wexler D., Piqueux S., Collins G.S., Miljkovic K., Neidhart T., Eschenfelder J., Bart G.D., Wagstaff K.L., Doran G., Posiolova L., Malin M., Speth G., Susko D., Werynski A. New Craters on Mars: An Updated Catalog // Journal of Geophysical Research (Planets). 2022. V. 127 (7). e2021JE007145. doi: 10.1029/2021JE007145
5. Hartmann W.K., Daubar I.J., Popova O.P., Joseph Emily C.S. Martian cratering 12. Utilizing primary crater clusters to study crater populations and meteoroid properties // Meteoritics & Planetary Science. 2018. V. 53 (4). P. 672–686. doi: 10.1111/maps.13042
6. Ivanov B.A., Melosh H.J., McEwen A.S. and the HiRISE team. New small impact craters in high resolution HiRISE images – IV // 45th Lunar and Planetary Science Conference. 2014. Abstract 1812.
7. Подобная Е.Д., Попова О.П., Глазачев Д.О. Эллипсы рассеяния для недавно образованных кластеров кратеров на Марсе // Динамические процессы в геосферах. 2020. № 12. С. 89–98. doi: 10.26006/IDG.2020.24.10.011
8. Podobnaya E.D., Popova O.P., Glazachev D.O. Trajectory estimation for fresh impacts on Mars // Contributions of the Astronomical Observatory Skalnaté Pleso. 2021. V. 51 (3). P. 241–248. doi: 10.31577/caosp.2021.51.3.241
9. Shuvalov V.V. Ejecta deposition after oblique impacts: An influence of impact scale // Meteoritics & Planetary Science. 2011. V. 46 (11). P. 1713–1718. doi: 10.1111/j.1945-5100.2011.01259.x
10. Ivanov B.A., Melosh H.J., McEwen A.S., Team HiRISE. New small impact craters in high resolution HiRISE images – III // 41th Lunar and Planetary Science Conference. 2010. Abstract 2020.

11. Burleigh K.J., Melosh H.J., Tornabene L.L., Ivanov B.A., McEwen A.S., Daubar, I.J. Impact airblast triggers dust avalanches on Mars // *Icarus*. 2012. V. 217 (1). P. 194–201. doi: 10.1016/j.icarus.2011.10.026
12. Adolfsson L.G., Gustafson B.Å., Murray C.D. The Martian atmosphere as a meteoroid detector // *Icarus*. 1996. V. 119 (1). P. 144–152. doi: 10.1006/icar.1996.0007
13. Baldwin B., Sheaffer Y. Ablation and breakup of large meteoroids during atmospheric entry // *Journal of Geophysical Research*. 1971. V. 76 (19). P. 4653–4668. doi: 10.1029/JA076i019p04653
14. Passey Q.R., Melosh H.J. Effects of atmospheric breakup on crater field formation // *Icarus*. 1980. V. 42 (2). P. 211–233. doi: 10.1016/0019-1035(80)90072-X
15. Popova O., Borovička J., Hartmann W.K., Spurný P., Gnos E., Nemtchinov I., Trigo-Rodríguez J.M. Very low strengths of interplanetary meteoroids and small asteroids // *Meteoritics & Planetary Science*. 2011. V. 46 (10). P. 1525–1550. doi: 10.1111/j.1945-5100.2011.01247.x
16. Popova O., Borovička J., Campbell-Brown M. Modelling the entry of meteoroids // *Meteoroids, sources of meteor on Earth and beyond* / G. Ryabova, D. Asher, M. Campbell-Brown (eds). New York : Cambridge University Press, 2019. P. 9–36.
17. Frost M.J. Size and spacial distribution in meteoritic showers // *Meteoritics*. 1969. V. 4 (3). P. 217–232. doi: 10.1111/j.1945-5100.1969.tb01270.x
18. Holsapple K.A., Housen K.R. A crater and its ejecta: An interpretation of Deep Impact // *Icarus*. 2007. V. 191 (2). P. 586–597. doi: 10.1016/j.icarus.2006.08.035

References

1. Malin M.C., Edgett K.S., Posiolova L.V., McColley S.M., Noe Dobrea E.Z. (2006) *Catalog of New Impact Sites on Mars Formed May 1999–March 2006*. Malin Space Science Systems Inc.: San Diego, California.
2. Daubar I.J., McEwen A.S., Byrne S., Dundas C.M., Kennedy M., Ivanov B.A. (2010) The current Martian cratering rate. *41th Lunar and Planetary Science Conference*. Abstract 1978.
3. Daubar I.J., Banks M.E., Schmerr N.C., Golombek M.P. (2019) Recently formed crater clusters on Mars. *Journal of Geophysical Research*. 124(4). pp.958–969. doi: 10.1029/2018JE005857
4. Daubar I.J., Dundas C.M., McEwen A.S., Gao A., Wexler D., Piqueux S., Collins G.S., Miljkovic K., Neidhart T., Eschenfelder J., Bart G.D., Wagstaff K.L., Doran G., Posiolova L., Malin M., Speth G., Susko D., Werynski A. (2022) New Craters on Mars: An Updated Catalog. *Journal of Geophysical Research (Planets)*. 127(7). doi: 10.1029/2021JE007145
5. Hartmann W.K., Daubar I.J., Popova O.P., Joseph E.C.S. (2018) Martian cratering 12. Utilizing primary crater clusters to study crater populations and meteoroid properties. *Meteoritics & Planetary Science*. 53(4). pp. 672–686. doi: 10.1111/maps.13042
6. Ivanov B.A., Melosh H.J., McEwen A.S., the HiRISE team (2014) New small impact craters in high resolution HiRISE images—IV. *45th Lunar and Planetary Science Conference*. Abstract 1812.
7. Podobnaya E.D., Popova O.P., Glazachev D.O. (2020) Ellipsy rasseyaniya dlya nedavno obrazovannykh klasterov kraterov na Marse [Scattering ellipses for fresh clusters of craters on Mars]. *Collection of scientific papers IDG RAS. Dynamic processes in geospheres*. 12. pp. 89–98. doi: 10.26006/IDG.2020.24.10.011
8. Podobnaya E.D., Popova O.P., Glazachev D.O. (2021) Trajectory estimation for fresh impacts on Mars. *Contributions of the Astronomical Observatory Skalnaté Pleso*. 51(3). pp. 241–248. doi: 10.31577/caosp.2021.51.3.241
9. Shuvalov V.V. (2011) Ejecta deposition after oblique impacts: An influence of impact scale. *Meteoritics & Planetary Science*. 46(11). pp. 1713–1718. doi: 10.1111/j.1945-5100.2011.01259.x
10. Ivanov B.A., Melosh H.J., McEwen A.S., the HiRISE team (2010) New small impact craters in high resolution HiRISE images—III. *41th Lunar and Planetary Science Conference*. Abstract 2020.

11. Burleigh K.J., Melosh H.J., Tornabene L.L., Ivanov B.A., McEwen A.S., Daubar, I.J. (2012) Impact airblast triggers dust avalanches on Mars. *Icarus*. 217(1). pp. 194–201. doi: 10.1016/j.icarus.2011.10.026
12. Adolfsson L.G., Gustafson B.Å., Murray C.D. (1996) The Martian atmosphere as a meteoroid detector. *Icarus*. 119(1). pp. 144–152. doi: 10.1006/icar.1996.0007
13. Baldwin B., Sheaffer Y. (1971) Ablation and breakup of large meteoroids during atmospheric entry. *Journal of Geophysical Research*. 76(19). pp. 4653–4668. doi: 10.1029/JA076i019p04653
14. Passey Q.R., Melosh H.J. (1980) Effects of atmospheric breakup on crater field formation. *Icarus*. 42(2). pp. 211–233. doi: 10.1016/0019-1035(80)90072-X
15. Popova O., Borovička J., Hartmann W. K., Spurný P., Gnos E., Nemtchinov I., Trigo-Rodríguez J.M. (2011) Very low strengths of interplanetary meteoroids and small asteroids. *Meteoritics & Planetary Science*. 46(10). pp. 1525–1550. doi: 10.1111/j.1945-5100.2011.01247.x
16. Popova O., Borovicka J., Campbell-Brown M. (2019) Modelling the entry of meteoroids. In: *Meteoroids, Sources of Meteor on Earth and Beyond*. Cambridge University Press, New York. pp. 9–36.
17. Frost M.J. (1969) Size and spacial distribution in meteoritic showers. *Meteoritics*. 4(3). pp. 217–232. doi: 10.1111/j.1945-5100.1969.tb01270.x
18. Holsapple K.A., Housen K.R. (2007) A crater and its ejecta: An interpretation of Deep Impact. *Icarus*. 191(2). pp. 586–597. doi: 10.1016/j.icarus.2006.08.035

Сведения об авторах:

Подобная Елена Дмитриевна – младший научный сотрудник Института динамики геосфер им. академика М.А. Садовского РАН, Москва, Россия. E-mail: epodobnaya@gmail.com

Попова Ольга Петровна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института динамики геосфер им. академика М.А. Садовского РАН, Москва, Россия. E-mail: olga@idg.chph.ras.ru

Глазачев Дмитрий Олегович – научный сотрудник Института динамики геосфер им. академика М.А. Садовского РАН, Москва, Россия. E-mail: glazachevd@gmail.com

Information about the authors:

Podobnaya Elena D. (Junior Researcher, Sadovsky Institute of Geosphere Dynamics Russian Academy of Science, Moscow, Russian Federation). E-mail: epodobnaya@gmail.com

Popova Olga P. (Senior Researcher, Candidate of Physics and Mathematics, Sadovsky Institute of Geosphere Dynamics Russian Academy of Science, Moscow, Russian Federation). E-mail: olga@idg.chph.ras.ru

Glazachev Dmitry O. (Researcher, Sadovsky Institute of Geosphere Dynamics Russian Academy of Science, Moscow, Russian Federation). E-mail: glazachevd@gmail.com

Статья поступила в редакцию 09.06.2022; принята к публикации 01.12.2022

The article was submitted 09.06.2022; accepted for publication 01.12.2022

Научная статья

УДК 532.68 + 536.46

doi: 10.17223/19988621/80/10

Периодические режимы горения термически сопряженных СВС-систем с термокапиллярным течением расплава

Вадим Геннадьевич Прокофьев

Томский государственный университет, Томск, Россия, pvg@ftf.tsu.ru

Аннотация. Проведено численное исследование нестационарных пространственных режимов безгазового горения трехслойного образца квадратного сечения с плавлением и течением инертного компонента смеси. В зависимости от относительной калорийности смеси внутреннего слоя обнаружены нестационарные периодические режимы горения. Исследованы квазистационарные режимы управления и слияния при горении образца с активным внутренним слоем, когда средние собственные скорости горения донорной и акцепторной смесей близки.

Ключевые слова: СВС, плавление, термокапиллярное течение, донорная и акцепторная смеси

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания FSWM-2020-0036.

Для цитирования: Прокофьев В.Г. Периодические режимы горения термически сопряженных СВС-систем с термокапиллярным течением расплава // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 80. С. 108–116. doi: 10.17223/19988621/80/10

Original article

Periodic combustion regimes for thermally coupled SHS systems with a thermocapillary melt flow

Vadim G. Prokof'ev

Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, pvg@ftf.tsu.ru

Abstract. This paper presents a three-dimensional mathematical model of self-propagating high-temperature synthesis (SHS) of a three-layer “sandwich” sample. The layers are formed from gasless mixtures with the addition of an inert fusible component. The mathematical model is studied numerically using the finite-difference method. The unsteady periodic regimes of gasless combustion of the three-layer sample with square cross-section are revealed with account for melting and thermocapillary flow of the melted inert component of the mixture. The unsteady periodic combustion regimes are specified depending on the relative calorific value of the mixture in the inner layer. High-temperature points move

along the side faces of the sample. The velocity of the points' motion along the combustion surface is much higher than the average burning velocity of the sample. An increase in the melt flow velocity leads to the equalization of the temperature field and stabilization of the combustion regime. The quasi-stationary regimes of control and fusion are studied during the combustion of the sample with an active inner layer, when the intrinsic burning velocities of the donor and acceptor mixtures are close to each other.

Keywords: SHS, melting, thermocapillary flow, donor and acceptor mixtures

Acknowledgments: This research was carried out within the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. FSWM-2020-0036).

For citation: Prokof'ev, V.G. (2022) Periodic combustion regimes for thermally coupled SHS systems with a thermocapillary melt flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 108–116. doi: 10.17223/19988621/80/10

Введение

Самораспространяющийся высокотемпературный синтез (СВС) является эффективным методом получения функционально-градиентных соединений и слоевых композиций из порошковых материалов. СВС-процесс в слоевой системе по предложению А.Г. Мержанова был назван чисто термически сопряженным [1]. Исследуемый образец представляет собой совокупность нескольких теплосопреженных друг с другом слоев, выполненных из смесей с различным теплосодержанием с добавлением легкоплавкого инертного металла-пластификатора. Подобная форма образца позволяет для двух разных СВС-систем создать благоприятные условия таким образом, что более калорийная система при одновременном протекании реакций подогревает вторую – менее калорийную. Поэтому реакцию в первой системе предложено называть донорной, а во второй – акцепторной [1]. В качестве вспомогательных, или донорных, слоев, используются высококалорийные металлотермитные или безгазовые составы с температурами горения 1 500–4 000 К [2, 3]. Тепло от донорных слоев поступает в основной, или акцепторный, слой синтеза для дополнительного нагрева реагентов. Одномерное математическое моделирование безгазового горения слоевой системы, один из слоев которой состоит из инертного легкоплавкого металла, а другие части выполнены из высокоэнтальпийного безгазового состава, представлено в [4]. В статье рассмотрен процесс капиллярного смачивания пористых продуктов горения внешних слоев расплавом металла внутреннего слоя в зависимости от параметров задачи. Двумерное и трехмерное моделирование СВС-процессов напрямую связано с неустойчивостью распространения пространственных волн безгазового горения, в частности так называемых спиновых волн безгазового горения [5–9]. В [10] для однородного образца цилиндрической формы в рамках трехмерной модели исследовано влияние термокапиллярного течения на спиновые режимы горения. В [11] анализируется развитие неустойчивости распространения фронта горения в зависимости от уровня теплопотерь с боковой поверхности образца и его толщины. Теоретическое исследование синтеза в двухслойном образце, один слой которого донорный, другой – акцепторный, выполнено в [12]. Спиновые волны горения наблюдаются в экспериментах при неустойчивом распространении фронта экзотермической реакции в безгазовых и малогазовых системах [13–16].

В настоящей работе рассматривается трехмерная математическая модель высокотемпературного синтеза слоистых металлокомпозитов, получаемых из образцов в виде стержней прямоугольного сечения с учетом конвективного течения расплава. Слои выполнены из реакционных смесей, отличающихся только тепловыми эффектами: донорные и акцепторные смеси. Снижение теплового эффекта смеси в практике CBS получают разбавлением шихты продуктами реакции с целью снижения температуры горения.

Математическая модель

Наиболее типичным примером слоистой композиции является плоский трехслойный пакет (сэндвич) прямоугольного сечения в форме прямого параллелепипеда. Параметры и состав внешних донорных слоев предполагаются одинаковыми, а внутренний акцепторный слой однороден по составу и макроструктуре. Реакции в слоях в химическом отношении протекают независимо. Внешние слои передают тепловую энергию внутреннему слою, ускоряя в нем синтез продуктов. Теплофизические характеристики всех компонентов смеси, включая инертный, и продукта реакции полагаются равными. Появление жидкой фазы не влияет на механизм синтеза. Область термокапиллярного течения расплава ограничена температурами плавления (во фронте горения) и кристаллизации (в продуктах горения). На границах между слоями предполагается идеальный тепловой контакт и осуществляется режим сопряженного теплообмена. В плоскости верхнего основания образца-параллелепипеда в результате кратковременного контакта всех слоев с нагретой стенкой формируется волна горения, распространяющаяся вниз по образцу (рис. 1).

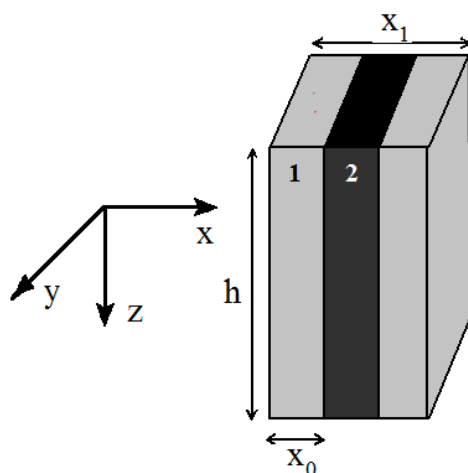


Рис. 1. Схема образца: 1 – донорный слой, 2 – акцепторный слой

Fig. 1. Structure of a sample: (1) donor and (2) acceptor layers

Уравнения математической модели высокотемпературного синтеза записываются в декартовой системе координат в безразмерном виде:

$$[1 + \varepsilon Ph \delta_D (\theta_1 - \theta_L)] \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} + \varepsilon Ve (\theta_1 - \theta_L) [1 + Ph \delta_D (\theta_1 - \theta_L)] \nabla \theta_1 = \Delta \theta_1 + \frac{(1 - \varepsilon)}{\gamma} \frac{\partial \eta_1}{\partial \tau}, \quad (1)$$

$$[1 + \varepsilon Ph \delta_D(\theta_2 - \theta_L)] \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} + \varepsilon V e(\theta_2 - \theta_L) [1 + Ph \delta_D(\theta_2 - \theta_L)] \nabla \theta_2 = \Delta \theta_2 + \frac{\Omega(1 - \varepsilon)}{\gamma} \frac{\partial \eta_2}{\partial \tau}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial \tau} = \gamma(1 - \eta_i) \exp\left(\frac{\theta_i}{1 + Ar \theta_i}\right). \quad (3)$$

С краевыми условиями

$$\begin{aligned} \tau = 0: \theta_i(x, y, z, 0) &= \theta_0, \eta_i(x, y, z, 0) = 0, \\ z = 0: \theta_i(x, y, 0, \tau) &= \theta_w \quad (\tau < \tau_w), \quad \partial \theta_i(x, y, 0, \tau) / \partial z = 0 \quad (\tau > \tau_w), \\ x = 0, x = x_1: \partial \theta_i(0, y, z, \tau) / \partial x &= 0, \quad \partial \theta_i(x_1, y, z, \tau) / \partial x = 0, \\ y = 0, y = y_1: \partial \theta_i(x, 0, z, \tau) / \partial y &= 0, \quad \partial \theta_i(x, y_1, z, \tau) / \partial y = 0, \\ z = h: \partial \theta_i(x, y, h, \tau) / \partial z &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Со следующими безразмерными переменными и параметрами:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{cRT_*^2}{Q_1 E}, \quad \theta_i = \frac{(T_i - T_*)E_1}{RT_*^2}, \quad \theta_L = \frac{(T_L - T_*)E_1}{RT_*^2}, \quad \theta_0 = -1/\gamma, \quad Ar = \frac{RT_*}{E}, \quad x = \frac{r_1}{r_*}, \quad y = \frac{r_2}{r_*}, \\ z &= \frac{r_3}{r_*}, \quad r_* = \sqrt{\frac{\lambda t_*}{c\rho}}, \quad t_* = \frac{cRT_*^2}{Q_1 EK(T_*)}, \quad K(T_*) = k_0 \exp(-E/RT_*), \quad \tau = \frac{t}{t_*}, \quad \tau_w = \frac{t_w}{t_*}, \\ x_1 &= \frac{R_1}{r_*}, \quad x_0 = \frac{R_0}{r_*}, \quad y_1 = \frac{R_2}{r_*}, \quad h = \frac{R_3}{r_*}, \quad Ph = \frac{Q_L}{Q}, \quad \varepsilon = \frac{m_{in}}{1 - m}, \quad V = \frac{m_i t_* V_c}{(1 - m)x_*}, \end{aligned}$$

где $T_* = T_0 + Q_1/c$ – адиабатическая температура горения донорной смеси; r_1, r_2, r_3 – декартовы координаты; t – текущее время; R_1, R_2, R_3 – размеры образца; R_0 – ширина внешнего (донорного) слоя ($2R_0 < R_1$); Q_L – теплота фазового перехода в донорной смеси; T_L – температура плавления; V_c – скорость течения расплава, существующего в интервале температур $\theta_i > \theta_L$; ρ, c, λ – плотность, теплоемкость и теплопроводность; Q_i, E_i – тепловые эффекты реакции и энергия активации; $k_0, K(T_*)$ – предэкспоненциальный множитель и скорость реакции при T_* ; Ω – степень разбавления исходной смеси продуктом реакции; η_i – глубина превращения; m – пористость; m_{in} – объемная доля инертного плавящегося компонента; $\delta_D(\theta_i - \theta_L)$ – дельта-функция Дирака; $e(\theta_2 - \theta_L)$ – функция единичного скачка. Подстрочный индекс $i = 1$ относится к внешним слоям, $i = 2$ – внутренним.

Численная методика решения

Математическая модель безгазового горения трехслойного образца с учетом термокапиллярного течения расплава (1)–(4) исследовалась численно методом конечных разностей с использованием неявной схемы по координатному расщеплению и метода прогонки. На боковых гранях параллелепипеда задавались адиабатические граничные условия, которые аппроксимировались со вторым порядком. Выполнена проверка на аппроксимационную сходимость разностной схемы. Для решения задачи с фазовым переходом использовалась экономичная схема сквозного счета А.А. Самарского без явного выделения поверхности раздела фаз с процедурой сглаживания дельта-функции.

При численном решении задачи до установления режима горения по мере продвижения фронта реакции по образцу происходили наращивание расчетной

области задачи на значительном расстоянии (пять-шесть толщин прогретого слоя) от фронта со стороны свежей смеси и удаление аналогичной части расчетной области со стороны продуктов реакции. Такой метод «сдвига» вдоль оси образца экономит время численных расчетов до достижения устойчивого режима горения. Время контакта с нагретой поверхностью во всех расчетах принималось равным $\tau_{ign} = 500$. С целью ускорения процесса выхода на нестационарный периодический режим горения слоевого образца задавалось начальное возмущение температурного поля, не влияющее на характер режима горения. Значения параметров фазового перехода во всех расчетах приняты равными: $Ph = 0.6$, $\theta_L = -2.5$, $\varepsilon = 0.2$.

Математическая модель (1)–(4) позволяет рассчитать пространственные режимы горения как трехслойного образца в форме параллелепипеда, так и в предельном случае – однородного образца. Геометрически образец имеет плоскости симметрии, проходящие через центр внутреннего слоя, но условие симметрии для решения уравнений (1) и (2) не ставится. В [9] показано, что увеличение площади основания параллелепипеда приводит к сложным пространственным режимам горения с большим количеством очагов. Движение очага горения при этом может осуществляться как по спиральным траекториям вдоль боковой поверхности образца, так и по внутренним траекториям, не выходящим на боковые грани образца.

Горение трехслойного образца с активным внутренним слоем

Известно, что для успешного проведения синтеза неоднородных материалов необходимым условием является сочетание высоко- и низкокзотермических слоев. Калорийность донорного слоя должна быть значительно выше, чем у внутреннего акцепторного слоя, что обеспечивает высокую скорость нагрева внутреннего слоя. Пространственные периодические режимы горения трехслойного образца со слабо экзотермическим активным внутренним слоем более разнообразны, чем у однородного образца [8, 9]. Добавляется параметр Ω , отвечающий за калорийность реакционной смеси внутреннего слоя. Включение нового параметра задачи приводит к реализации более сложных режимов горения образца. В случае сильного различия характерных времен реакции в донорной и акцепторной смесях, например при $\Omega \sim 0.1$, волна горения по донорной смеси распространяется намного быстрее, чем по акцепторной – режим «химической печи» [1]. В этом случае численное исследование процесса с выходом на установившийся режим провести не удастся, так как постоянно растет расстояние между фронтами реакции в донорной и акцепторной смесях. При фиксированной расчетной длине образца по высоте (ось z) наступает момент, когда межфронтальное расстояние становится сравнимо или больше расчетной высоты образца h . Поэтому выбор параметра Ω ограничен режимами слияния и управления [1], для которых собственные значения скорости горения донорной и акцепторной смесей относительно близки.

Наиболее типичный вариант нестационарного периодического режима горения трехслойного образца представлен на рис. 2. Температурное поле симметрично относительно плоскости, проходящей через точку $x = x_1/2$ параллельно оси z . Изменения температурного поля и глубины превращения имеют циклический характер. Ведущая зона горения распространяется по образцу в виде парных очагов, не

выходящих за границы внешних слоев при относительно низкой калорийности внутреннего слоя $\Omega = 0.5$. Условно за начало цикла можно принять температурное поле с двумя крупными очагами в угловых точках $(0, 0)$ и $(0, y_1)$ на рис. 2, а, распространяющимися параллельно оси OX в направлении угловых вершин $(x_1, 0)$ и (x_1, y_1) . Далее через небольшой промежуток времени, равный полупериоду цикла, происходит движение этих очагов в обратном направлении (см. рис. 2, с). Движение всей фронтальной поверхности по образцу вдоль оси OZ происходит со значительно меньшей скоростью, примерно равной средней скорости горения образца топлива.

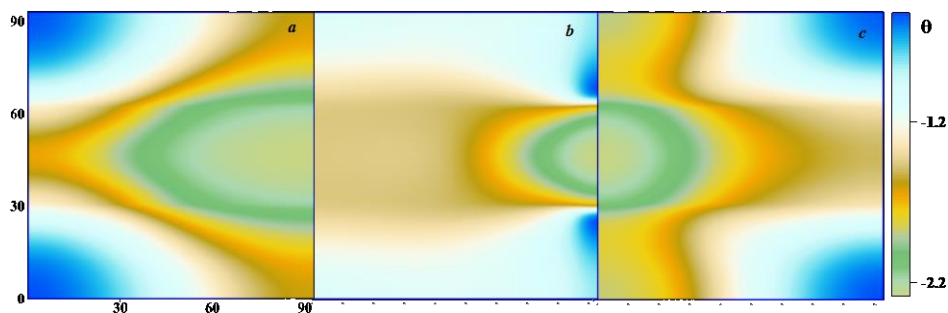


Рис. 2. Динамика температурного поля в нестационарном циклическом режиме горения трехслойного образца с низкокалорийным внутренним слоем: $x_1 = 93$, $y_1 = 93$, $x_0 = 31$, $\theta_0 = -7$, $Ar = 0.13$, $\Omega = 0.5$, $V = 0.5$: а – начало, б – развитие, с – завершение цикла

Fig. 2. Dynamics of the temperature field in the unsteady cyclic combustion regime of a three-layer sample with a low-calorie inner layer: $x_1 = 93$, $y_1 = 93$, $x_0 = 31$, $\theta_0 = -7$, $Ar = 0.13$, $\Omega = 0.5$, $V = 0.5$: (a) start, (b) extension, and (c) end of cycle

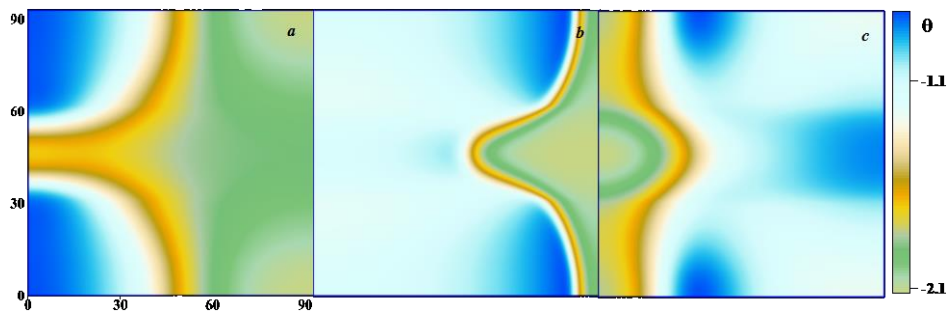


Рис. 3. Динамика температурного поля в нестационарном циклическом режиме горения трехслойного образца: $x_1 = 93$, $y_1 = 93$, $x_0 = 31$, $\theta_0 = -7$, $Ar = 0.13$, $\Omega = 0.65$, $V = 0.5$: а – начало, б – развитие, с – завершение цикла

Fig. 3. Dynamics of the temperature field in the unsteady cyclic combustion regime of a three-layer sample: $x_1 = 93$, $y_1 = 93$, $x_0 = 31$, $\theta_0 = -7$, $Ar = 0.13$, $\Omega = 0.65$, $V = 0.5$: (a) start, (b) extension, and (c) end of cycle

Увеличение калорийности реакционной смеси внутреннего слоя на 23% ($\Omega = 0.65$) приводит к периодическому режиму слияния [1], когда линейные скорости горения в плоскости образца $y = 0.5y_1$ для внутреннего и внешних слоев равны, но фронты горения в слоях могут отставать друг от друга примерно на толщину

прогретого слоя. Характерные распределения температуры в поперечном сечении образца $z = \text{const}$, соответствующие эволюции поверхности горения в течение одного цикла, представлены на рис. 3. Крупные очаги горения распространяются вдоль боковых граней образца во внешних слоях (рис. 3, *a, b*), создавая благоприятные условия для развития лидирующего очага горения во внутреннем слое (рис. 3, *c*). В течение цикла происходит чередование лидирующих очагов горения из внешних слоев в донорный и наоборот. Максимальная температура в очагах не превышает адиабатическую температуру горения донорной смеси и на 2–3 характерных интервала ниже максимальных температур в нестационарных режимах горения однородного образца [7].

С уменьшением калорийности акцепторной смеси до значений $\Omega < 0.45$ при фиксированном соотношении размеров и условий зажигания инициировать устойчивый режим синтеза трехслойного образца во фронтальном режиме не удастся. К аналогичному результату приводит и увеличение объема акцепторного слоя по отношению к объемам донорных слоев. Влияние фазового превращения на устойчивость режима горения проявляется тем сильнее, чем ближе температура плавления к адиабатической температуре горения донорной смеси $-0.5 < \theta_L < 0$ и выше скорость термокапиллярного течения расплава. В этом случае поверхность фронта реакции заметно сглаживается вследствие уменьшения градиентов температуры под действием конвективного потока. При малых скоростях термокапиллярного течения $V \ll 1$ и небольшой относительной толщине акцепторного слоя реализуются режимы, близкие к рассмотренным в [9]. С увеличением размеров образца реализуются сложные пространственные режимы горения с большим количеством очагов, численный расчет которых до установления режима горения требует значительных временных ресурсов.

Выводы

1. Предложена трехмерная модель высокотемпературного синтеза трехслойного образца в форме параллелепипеда с учетом фазового превращения компонентов и термокапиллярного течения расплава.
2. Горение трехслойного образца с низкокалорийным внутренним слоем возможно в нестационарных периодических режимах в зависимости от калорийности внутреннего слоя и скорости течения расплава.
3. Предложенная математическая модель горения слоевой системы может быть полезна для оценки оптимального соотношения объемов донорной и акцепторной смесей для синтеза металлокомпозитов во фронтальном режиме горения.

Список источников

1. Мержанов А.Г. Термически сопряженные процессы самораспространяющегося высокотемпературного синтеза // Доклады РАН. 2010. Т. 434, № 4. С. 489–492.
2. Linde A.V., Studenikin I.A., Kondakov A.A., Grachev V.V. Thermally coupled SHS processes in layered $(\text{Fe}_2\text{O}_3 + 2\text{Al})/(\text{Ti} + \text{Al})/(\text{Fe}_2\text{O}_3 + 2\text{Al})$ structures: An experimental study // Combustion and Flame. 2019. V. 208. P. 364–368. doi: 10.1016/j.combustflame.2019.07.010
3. Sytschev A.E., Vrel D., Boyarchenko O.D., Roshchupkin D.V., Sachkov N.V. Combustion synthesis in bi-layered $(\text{Ti-Al})/(\text{Ni-Al})$ system // Journal of Materials Processing Technology. 2017. V. 240. P. 60–67. doi: 10.1016/j.jmatprotec.2016.09.010

4. Прокофьев В.Г., Лапшин О.В., Смоляков В.К. Макрокинетика горения слоевых композиций с легкоплавким инертным слоем // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 52. С. 102–113. doi: 10.17223/19988621/52/10
5. Максимов Ю.М., Пак А.Т., Лавренчук Г.В., Найборожденко Ю.С., Мержанов А.Г. Спиновое горение безгазовых систем // Физика горения и взрыва. 1979. Т. 15, № 3. С. 156–159.
6. Максимов Ю.М., Мержанов А.Г., Пак А.Т., Кучкин М.Н. Режимы неустойчивого горения безгазовых систем // Физика горения и взрыва. 1981. Т. 17, № 4. С. 51–58.
7. Ивлева Т.П., Мержанов А.Г. Математическое моделирование трехмерных спиновых режимов безгазового горения // Физика горения и взрыва. 2002. Т. 38, № 1. С. 47–54. doi: 10.1023/A:1014053816863
8. Прокофьев В.Г., Смоляков В.К. Влияние фазового перехода на трехмерные неустойчивые режимы безгазового горения // Физика горения и взрыва. 2016. Т. 52, № 3. С. 65–71. doi: 10.15372/FGV20160309
9. Prokof'ev V.G., Unsteady Combustion Modes in Rectangular Rods // Int. Journal Self-Propag. High-Temp. Synth. 2019. V. 28 (3). P. 155–158. doi: 10.3103/S1061386219030099
10. Прокофьев В.Г., Смоляков В.К. Режимы горения безгазовых систем с плавящимся компонентом в области сильной неустойчивости // Инженерно-физический журнал. 2019. Т. 92, № 3. С. 706–710.
11. Kurdyumov V.N., Gubernov V.V. Combustion waves in narrow samples of solid energetic material: chaotic versus spinning dynamics // Combustion and Flame. 2021. V. 229. 111407. doi: 10.1016/j.combustflame.2021.111407
12. Miroshnichenko T.P., Yakupov E.O., Gubernov V.V., Kurdyumov V.N., Polezhaev A.A. Combustion wave in a two-layer solid fuel system // Applied Mathematical Modelling. 2020. V. 77. P. 1082–1094. doi: 10.1016/j.apm.2019.09.037
13. Nersisyan H.H., Joo S.H., Yoo B.U., Cho Y.H., Kim H.M., Lee J.-H. Melt-assisted solid flame synthesis approach to amorphous boron nanoparticles // Combustion and Flame. 2015. V. 162. P. 3316–3323. doi: 10.1016/j.combustflame.2015.05.021
14. Yeh C.L., Chen Y.C. Effects of PTFE activation and carbon sources on combustion synthesis of Cr₂AlC/Al₂O₃ composites // Ceramics International. 2018. V. 44. P. 384–389. doi: 10.1016/j.ceramint.2017.09.187
15. Feng P., Liu W., Farid A., Wua J., Niu J., Wang X., Qiang Y. Combustion synthesis of (Mo_{1-x}Cr_x)Si₂ (x = 0.00–0.30) alloys in SHS mode // Advanced Powder Technology. 2012. V. 23. P. 133–138. doi: 10.1016/j.apm.2011.01.003
16. Yeh C.L., Wang H.J. Combustion synthesis of vanadium borides // Journal of Alloys and Compounds. 2011. V. 509. P. 3257–3261. doi: 10.1016/j.jallcom.2010.12.004\

References

1. Merzhanov A.G. (2010) Thermally coupled processes of selfpropagating high-temperature synthesis. *Doklady Physical Chemistry*. 434. pp. 159–162. doi: 10.1134/S0012501610100015
2. Linde A.V., Studenikin I.A., Kondakov A.A., Grachev V.V. (2019) Thermally coupled SHS processes in layered (Fe₂O₃ + 2Al)/(Ti + Al)/(Fe₂O₃ + 2Al) structures: An experimental study. *Combustion and Flame*. 208. pp. 364–368. doi: 10.1016/j.combustflame.2019.07.010
3. Sytshev A.E., Vrel D., Boyarchenko O.D., Roshchupkin D.V., Sachkov N.V. (2017) Combustion synthesis in bi-layered (Ti–Al)/(Ni–Al) system. *Journal of Materials Processing Technology*. 240. pp. 60–67. doi: 10.1016/j.jmatprotec.2016.09.010
4. Prokof'ev V.G., Lapshin O.V., Smolyakov V.K. (2018) Макрокинетика горения слоевых композиций с легкоплавким инертным слоем [Macrokinetics of combustion of layered compositions with a low-melting inert layer]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 52. pp. 102–113. doi: 10.17223/19988621/52/10

5. Maksimov Yu.M., Pak A.T., Lavrenchuk G.V., Naiborodenko Yu.S., Merzhanov A.G. (1979) Spin combustion of gasless systems. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 15(3). pp. 415–417. doi: 10.1007/BF00785083
6. Maksimov Yu.M., Merzhanov A.G., Pak A.T., Kuchkin M.N. (1981) Unstable combustion modes of gasless systems. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 17(4). pp. 393–400. doi: 10.1007/BF00761208
7. Ivleva T.P., Merzhanov A.G. (2002) Mathematical simulation of three-dimensional spin regimes of gasless combustion. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 38(1). pp. 41–48. doi: 10.1023/A:1014053816863
8. Prokof'ev V.G., Smolyakov V.K. (2016) Effect of the phase transition on three-dimensional unstable regimes of gasless combustion. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 52(3). pp. 313–319. doi: 10.1134/S0010508216030096
9. Prokof'ev V.G. (2019) Unsteady Combustion Modes in Rectangular Rods. *International Journal of Self-Propagating High-Temperature Synthesis*. 28(3). pp. 155–158. doi: 10.3103/S1061386219030099
10. Prokof'ev V.G., Smolyakov V.K. (2019) Regimes of combustion of gasless systems with a melting component in a strong-instability region. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 92(3). pp. 682–686. doi: 10.1007/s10891-019-01977-9
11. Kurdyumov V.N., Gubernov V.V. (2021) Combustion waves in narrow samples of solid energetic material: chaotic versus spinning dynamics. *Combustion and Flame*. 229. Article 111407. doi: 10.1016/j.combustflame.2021.111407
12. Mirosnichenko T.P., Yakupov E.O., Gubernov V.V., Kurdyumov V.N., Polezhaev A.A. (2020) Combustion wave in a two-layer solid fuel system. *Applied Mathematical Modelling*. 77. pp. 1082–1094. doi: 10.1016/j.apm.2019.09.037
13. Nersisyan H.H., Joo S.H., Yoo B.U., Cho Y.H., Kim H.M., Lee J.-H. (2015) Melt-assisted solid flame synthesis approach to amorphous boron nanoparticles. *Combustion and Flame*. 162. pp. 3316–3323. doi: 10.1016/j.combustflame.2015.05.021
14. Yeh C.L., Chen Y.C. (2018) Effects of PTFE activation and carbon sources on combustion synthesis of Cr₂AlC/Al₂O₃ composites. *Ceramics International*. 44. pp. 384–389. doi: 10.1016/j.ceramint.2017.09.187
15. Feng P., Liu W., Farid A., Wua, J. Niu, J. Wang X., Qiang Y. (2012) Combustion synthesis of (Mo_{1-x}Cr_x)Si₂ (x = 0.00–0.30) alloys in SHS mode. *Advanced Powder Technology*. 23. pp. 133–138. doi: 10.1016/j.apm.2011.01.003
16. Yeh C.L., Wang H.J. (2010) Combustion synthesis of vanadium borides. *Journal of Alloys and Compounds*. 509. pp. 3257–3261. doi: 10.1016/j.jallcom.2010.12.004

Сведения об авторе:

Прокофьев Вадим Геннадьевич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: pvg@ftf.tsu.ru

Information about the author:

Prokof'ev Vadim G. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: pvg@ftf.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 10.10.2022; принята к публикации 01.12.2022

The article was submitted 10.10.2022; accepted for publication 01.12.2022

Научная статья

УДК 532.5

doi: 10.17223/19988621/80/11

Экспериментальное изучение влияния ультразвука на движение стеклянных шариков в ячейках Хеле-Шоу

Артур Ашотович Рахимов¹, Азат Ахматович Валиев²

^{1, 2} *Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия*

¹ *ragar83@mail.ru*

² *azatphysic@mail.ru*

Аннотация. Исследовано ультразвуковое воздействие (УЗВ) при заполнении стеклянными шариками ячеек Хеле-Шоу, в том числе с сужением. Расход по воде шариков, просеянных через сито 150 мкм, в ячейке с зазором 200 мкм пропорционально возрастал с увеличением перепада давления (ΔP), а шариков, просеянных через сито 70 мкм, возрастал сильнее с увеличением ΔP . УЗВ привело к плотной упаковке шариков при заполнении ячеек Хеле-Шоу с постоянно действующим ΔP и возобновляло течение при блокировке сужения.

Ключевые слова: ячейка Хеле-Шоу, ультразвуковое воздействие, перепад давления, эффект динамического запираания, стеклянные шарики, сужение

Благодарности: Работа выполнена с использованием средств государственного бюджета по госзаданию на 2019–2022 годы (№ 0246-2019-0052).

Для цитирования: Рахимов А.А., Валиев А.А. Экспериментальное изучение влияния ультразвука на движение стеклянных шариков в ячейках Хеле-Шоу // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 80. С. 117–132. doi: 10.17223/19988621/80/11

Original article

An experimental study of the ultrasound effect on the motion of glass spherules in Hele-Shaw cells

Artur A. Rakhimov ¹, Azat A. Valiev²

^{1, 2} *Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa, Russian Federation*

¹ *ragar83@mail.ru*

² *azatphysic@mail.ru*

Abstract. This paper presents the experimental study results for the effect of ultrasound influence (USI) on the filling of the Hele-Shaw cells with glass spherules at a constant pressure drop, including the case with a stepwise constriction. The process considered represents a physical model of fractures in an oil reservoir. The experimental set-up is developed with the use of visualization methods for microfluidic studies. Exposure to the

USI and constant pressure drop provides the close packing and uniform distribution of the spherules. The flow rate of the water with glass spherules, which are sieved through a 150 μm strainer in the measured model with a thickness of 200 μm , increases proportionally with an increase in the pressure drop, while for the model with the spherules sieved through a 70 μm strainer, the increase is more significant, and the flow rate is five times lower for a pressure drop of 50 kPa. The USI is revealed to be crucial for the uniform filling with the spherules, both in the volumetric models with and without constriction. When the spherules block the constriction, the USI reactivates the flow. Thus, it is a reliable method of influencing the dynamic blocking effect, which is promising for creating the technology intended to increase the ratio of hard-to-recover oil reserves in the total production balance.

Keywords: Hele-Shaw cell, ultrasonic influence, pressure drop, dynamic blocking effect, glass spherules, constriction

Acknowledgments: The work is funded by the state budget according to the state assignment for 2019–2022 (No. 0246-2019-0052).

For citation: Rakhimov, A.A., Valiev, A.A. (2022) An experimental study of the ultrasound effect on the motion of glass spherules in Hele-Shaw cells. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 117–132. doi: 10.17223/19988621/80/11

Введение

Опыт разработки нефтяных месторождений свидетельствует, что в процессах первичного и вторичного вскрытия продуктивных пластов, глушения и ремонтных работ в скважинах, а также при их эксплуатации постепенно ухудшаются свойства призабойной зоны пласта. Чаще всего это является следствием отрицательного воздействия технологических жидкостей на водной основе, которые наиболее широко используются на данном этапе развития отрасли. Альтернативными системами в этом плане являются составы на углеводородной основе, в частности обратные эмульсии. Применение растворов на углеводородной основе для щадящего глушения нефтяных скважин, а также в качестве промывочных жидкостей при бурении и вскрытии продуктивных пластов позволяет повысить технико-экономические показатели бурения и ремонта скважин и сохранять естественные свойства продуктивных пластов.

Обратные водонефтяные эмульсии представляют собой микрокапли дисперсной фазы – воды, находящиеся в дисперсионной среде – нефти. Высококонцентрированные обратные водонефтяные эмульсии обладают гидродинамической особенностью – высокой вязкостью, значительно превышающей вязкость несущей фазы, при этом повышение концентрации дисперсной фазы ведет к существенному возрастанию вязкости эмульсии. Экспериментально доказано: структурирование эмульсий в микроканалах, приводящее к изменению реологических свойств, в одних случаях происходит вследствие разрушения, коалесценции дисперсной фазы, в других случаях – из-за диспергации.

Для того чтобы исследовать поведение нелинейных систем в неоднородном поле, важно изучить особенности их преобразования и движения не столько при постоянных скоростях подачи жидкости, сколько при постоянных перепадах давления. При их течении в капиллярах и пористой структуре проявляется эффект

динамического запираания [1, 2], который заключается в том, что течение жидкости, несмотря на постоянно действующий перепад давления, по показаниям прецизионных электронных весов, измеряющих с точностью до 0,1 мг, прекращается. Детальное изучение структуры потока под микроскопом обнаруживает, что на самом деле течение не прекращается полностью, а уменьшается со временем более чем на 3 порядка, поэтому это явление было названо эффектом динамического запираания. Наличие данного эффекта объясняет успех применения водонефтяных эмульсий в потокоотклоняющих технологиях, в качестве жидкостей для глушения скважин и буровых растворов с коагуляционными свойствами.

Еще в конце 60-х гг. XX столетия появилась работа Дж.А. Дэвиса [3], в которой упоминается изготовленная с использованием метода фотолитографии модель для фильтрации многофазных систем, названная микромоделью. В ней для изготовления фотошаблона использовался рисунок маскхалата. Стеклопластиковая пластина с вытравленной системой сложных каналов в поверхностном слое спеклась с другой целой пластиной в муфельной печи. Большими преимуществами обладают разборные микромодели [4], разборность которых реализуется за счет использования стекол с высокой плоскостностью, применяемых в оптической интерферометрии; картина пор микромодели отображает аншлиф нефтеносной породы, использовавшийся для изготовления фотошаблона. Прозрачные микромодели выгодно отличаются возможностью использования методов визуализации и непосредственного наблюдения за физико-химическими процессами, происходящими в порах структуры.

Использование прозрачной ячейки Хеле-Шоу, изготовленной методом мягкой фотолитографии, позволило визуально показать, что эффект динамического запираания обратных водонефтяных эмульсий при постоянно действующем перепаде давления в ячейке Хеле-Шоу со ступенчатым сужением объясняется образованием перед сужением структуры из микрокапель воды, представляющих дисперсную фазу в углеводородной эмульсии [5]. В работе [6] показано, что ультразвуковое воздействие (УЗВ) влияет на эффект динамического запираания, способно восстановить течение, однако не рассматривается как влияет УЗВ на дисперсные частицы – микрокапли воды. В работе [7] отмечено, что агрегативная и седиментационная устойчивость нефтяных высокопарафинистых дисперсных систем после УЗВ зависит от состава дисперсной среды, изменение вязкости объясняется разрушением межмолекулярных связей и перераспределением компонентов нефти между дисперсной фазой и дисперсионной средой нефтяной системы. В работе [8] продемонстрировано, что длительное УЗВ на акриловую суспензию приводит к седиментации дисперсной фазы: укрупнению частиц, а затем осаждению агломератов на стенках пробирки. В работе [9] исследовано влияние УЗВ на характеристики полимерных материалов, показано, что УЗВ в кавитационном режиме приводит к разрушению молекулярных связей, обеспечивает однородность структуры многокомпонентного материала и равномерное распределение армирующих частиц. В перечисленных работах [7–9] изменение вязкости после УЗВ объясняется разрушением межмолекулярных связей, однако проведенные опыты по течению эмульсий [5] показывают важную роль самих дисперсных частиц, их расположения, группировки в изменении вязкости, поэтому для того, чтобы оценить влияние УЗВ без учета слияния и диспергации капель, можно в качестве дисперсной фазы использовать недеформируемые твердые частицы.

Цель данной работы – изучение влияния УЗВ на поведение недеформируемых частиц в дисперсии при течении в ячейке Хеле-Шоу с постоянно действующим перепадом давления, проведение экспериментов, направленных на опосредованное, путем воздействия на стеклянные шарики, изучение влияния УЗВ на дисперсную фазу – микрокапли воды в эмульсии. Для достижения поставленной цели в работе проведены эксперименты по заполнению ячейки Хеле-Шоу стеклянными шариками с образованием объемной пористой структуры (физической модели пористой трещины) и течению шариков в объемной пористой структуре со ступенчатым сужением, в том числе под влиянием ультразвука.

Экспериментальная установка и методика измерений

В качестве экспериментальной ячейки использовали модель трещины – ячейку Хеле-Шоу, образованную двумя оптическими стеклянными пластинами, между которыми для создания зазора зажимается фольга разной толщины с вырезанным окном. Входные и выходные отверстия высверлены в верхнем стекле, к ним подведены трубки. Экспериментальная установка приведена на рис. 1, использована схожая установка, что и в нашей ранней работе [10].

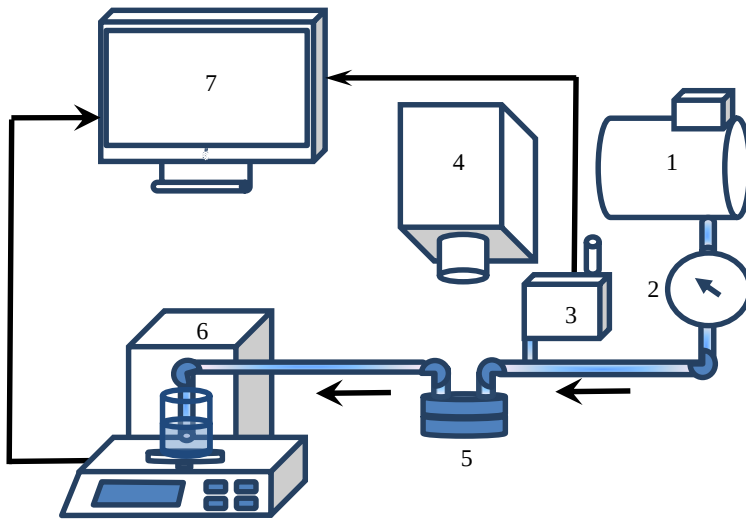


Рис. 1. Схема установки для проведения микрогидродинамических исследований и визуализации структуры течения

Fig. 1. Scheme of the experimental setup for microhydrodynamic studies and flow structure visualization

Подача воды проводилась при постоянном перепаде давления, который обеспечивался давлением газа от компрессора с ресивером (1) и контролировался образцовым манометром (2). Давление на входе ячейки Хеле-Шоу (5) измерялось тензометрическим датчиком MPX 5100 (3) и фиксировалось с помощью программы RS-Weight на персональном компьютере (ПК) (7). Объем жидкости, выходящей из ячейки (5), вытеснял из выходной трубки дистиллированную воду, которая поступала в мерный стакан, находящийся на прецизионных электронных весах

A&D GH-252 (6), для измерения расхода весовым методом по массе вытесняемой дистиллированной воды. На верхнюю поверхность воды в стакане налито машинное масло, слой масляной пленки предотвращает интенсивное испарение воды. Видеосъемка процессов, происходящих в ячейке Хеле-Шоу, проводилась камерой Sony DCR-TRV530E (4) с частотой 25 кадров в секунду и минимальной выдержкой, видеозахват с камеры обеспечивался программой VirtualDub. Показания датчика давления, весов и видеоизображение синхронизировались по времени и поступали на ПК (7).

Предварительно поверхности оптических пластин промывались последовательно бензином марки «Калоша» и этиловым спиртом. Стекланные пластины с окном, образованным фольгой между пластинами, помещались в обойму и зажимались винтами. Погрешности измеряемого объема определялись по массе дистиллированной воды, поступавшей на весы, которая считывалась 1 раз в секунду, и составляли 5% до достижения выходного отверстия, 1% до протекания одного объема ячейки и 0,1% при больших объемах; перепад давления контролировался датчиком давления с погрешностью в 1%. Отклонение расходных характеристик после разборки и сборки ячейки – не более 10% при малых расходах.

Гидравлическая система в эксперименте состоит из прямоугольной ячейки Хеле-Шоу и подводящих цилиндрических трубок (на вход и выход) с одним и тем же объемным расходом Q в сечениях. Падение давления при течении через ячейку Хеле-Шоу описывается формулой [8]

$$\Delta P_1 = \frac{3\mu l_1}{2bh^3} Q, \quad (1)$$

где μ – вязкость, l_1 – длина ячейки, b – ширина ячейки, h – половина зазора (глубины).

Перепад давления на каждой трубке определяется по формуле Пуазейля

$$\Delta P_i = \frac{8\mu l_i}{\pi R_i^4} Q, \quad (2)$$

где l_i – длина трубки, R_i – радиус трубки, $i = 2, 3, 4$.

Используя формулы (1) и (2), получаем отношение перепадов давления в трубке и ячейке:

$$\frac{\Delta P_i}{\Delta P_1} = \frac{16}{3\pi} \frac{bh^3 l_i}{R_i^4 l_1} \approx 1.7 \frac{bh^3 l_i}{R_i^4 l_1}. \quad (3)$$

Размеры прямоугольного канала в ячейке Хеле-Шоу: ширина $b = 2$ см, зазор $2h = 20$ мкм, длина $l_1 = 3,5$ см. В системе на входе (от датчика давления, манометра, до входного отверстия) вставлены короткая трубка (10 см) диаметром 1 мм (по формуле (3) $\Delta P_2/\Delta P_1 \approx 0.00155$, что соответствует 0.155%) и подводящая трубка (20 см) диаметром 2 мм ($\Delta P_3/\Delta P_1 \approx 1.9 \cdot 10^{-4}$, что соответствует 0.019%), а на выходе длинная (1 м) толстая трубка диаметром 3 мм, подходящая к стакану с водой на весах ($\Delta P_4/\Delta P_1 \approx 1.9 \cdot 10^{-4}$, что соответствует 0,019%). Суммарная потеря перепада давления на всех трубках, по сравнению с перепадом давления в ячейке, около 0,2%, ею в экспериментах пренебрегаем.

Приведем оценку размеров капель, удерживаемых капиллярными силами при создавшемся градиенте давления в модели. Капиллярное давление на цилиндрической поверхности составит $P_k = \sigma/h$, где σ – поверхностное натяжение. Перепад

давления на капле можно оценить из градиента давления в ячейке: $\nabla P = \Delta P / l_1$. Длину капли обозначим l_k , на ней будет перепад давления $l_k \cdot \nabla P$. Таким образом, размер капли при заданном градиенте давления будет определяться отношением: $l_k = P_k / |\nabla P| = \sigma l_1 / (h |\Delta P|)$. При перепаде давления $\Delta P = 20$ кПа, $h = 10$ мкм, $\sigma = 32$ мН/м, $l_1 = 3,5$ см размер защемленной капли будет $l_k = 5,6$ мм. При перепаде давления 50 кПа длина защемленных капель составит порядка 2 мм.

Трехмерная пористая структура

Экспериментальная установка – с обеспечением перепада давления с помощью компрессора – для всех экспериментов была одной и той же (см. рис. 1), менялись только изучаемые дисперсии, перепады давления и сами ячейки Хеле-Шоу. Изготовлена ячейка Хеле-Шоу следующим образом: между двух стеклянных оптических стекол зажат лист латунной фольги толщиной $2h = 190$ мкм, в котором сделано прямоугольное окошко со сглаженными углами длиной $l = 40$ мм, шириной $b = 20$ мм. Расход течения в данной модели находится по формуле (1). Для перепада давления $\Delta P = 10$ кПа при течении дистиллированной воды и заданных размерах расход равен 2.86 мл/с.

Ячейку планировалось заполнять стеклянными шариками, и в случае остановки движения воздействовать ультразвуком на полученную пористую модель. Использовались стеклянные шарики, предварительно просеянные через сито 70 мкм. С помощью программы ImageJ (программа в свободном доступе) рассчитано распределение по размерам для 122 шариков (табл. 1). Подавляющее большинство шариков оказалось в диапазоне 35–70 мкм.

Таблица 1

Распределение по размерам стеклянных шариков, просеянных через сито 70 мкм
(D – диаметр, n – относительное количество, N – количество)

D	0–10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
$n, \%$	0	0.8	1.6	3.3	3.3	8.2	11.5	12.3	11.5	17.2	12.3	10.7	6.6	0.8
N	0	1	2	4	4	10	14	15	14	21	15	13	8	1

Для того чтобы ограничить выход шариков из ячейки, перед выходным отверстием поставили кусок покровного стекла толщиной 150 мкм, уменьшающий сечение выходного отверстия; таким образом, зазор на выходе составил 40 мкм (толщина латунной фольги минус толщина покровного стекла). Предполагалось, что шарики займут плотную упаковку в несколько рядов по всей поверхности ячейки, и на выходе перед стеклом окажутся шарики с диаметром более 40 мкм, поскольку шарики с диаметром менее 40 мкм либо выйдут из ячейки, либо окажутся в плотной упаковке не в непосредственной близости от края со стеклом. Расчет участка с покровным стеклом по формуле (1) в данной модели показывает, что отношение локального перепада давления к перепаду давления в ячейке на данном участке на два порядка больше, чем в остальной зоне ячейки. Экспериментальный расход по течению дистиллированной воды до заполнения шариками оказался равен 0,59 мл/с, что в 4,8 раз ниже рассчитанного расхода (2,86 мл/с) при отсутствии шариков и покровного стекла, т.е. наличие покровного стекла привело к уменьшению расхода почти в 5 раз.

Суспензию из шариков (5% по массе) в дистиллированной воде при перепаде давления 20 кПа подавали во входное отверстие ячейки Хеле-Шоу. На рис. 2 приведены соответствующие эксперименту обработанные изображения, на которых слева видим входное отверстие, сверху и снизу – латунную фольгу, обеспечивающую зазор в ячейке, и движущуюся слева направо массу шариков. Часть ячейки, не занятая шариками, заменена белым цветом для удобства визуализации, кадры взяты в прямоугольных рамках. Шариками, по всей видимости, забились входное отверстие, уменьшили сечение, что привело к уменьшению потока жидкости, и поэтому движение замедлилось и остановилось (рис. 2, *a*). Затем, не убирая подаваемый перепад давления 20 кПа, ячейку поместили в наполненную водой ультразвуковую ванну CD-4820 ($V_{\max} = 2\,500$ мл, мощность 170 Вт, частота 42 кГц). В ультразвуке входное отверстие очистилось, и движение суспензии с шариками сразу возобновилось (рис. 2, *b*), за несколько секунд фронт течения стал выравниваться (рис. 2, *c*), и шариками в течение 13 с заняли ячейку (рис. 2, *d*).

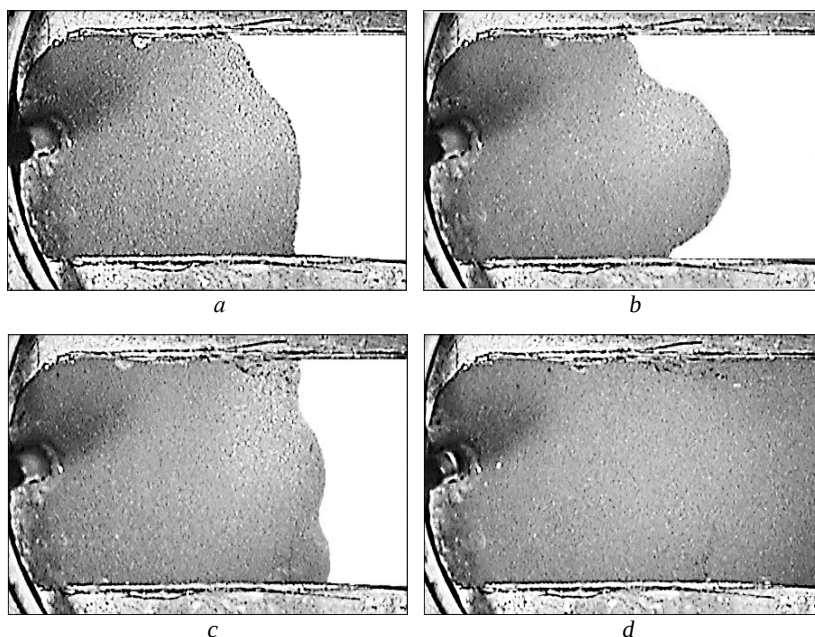


Рис. 2. Обработанные фотоизображения заполнения стеклянными шариками ячейки Хеле-Шоу (движение слева направо) при перепаде давления 20 кПа до и при ультразвуковом воздействии (УЗВ): (а) до УЗВ, (б) 1 с при УЗВ, (в) 5 с при УЗВ, (г) 13 с при УЗВ

Fig. 2. The processed photographs of the Hele-Shaw cell filling with glass spherules (left-to-right motion) at a pressure drop of 20 kPa before and during ultrasonic influence (USI): (a) before USI, (b) 1 second under USI, (c) 5 seconds under USI, and (d) 13 seconds under USI

Таким образом, ультразвуковое воздействие помогло распределить шариками и очистить входное отверстие. Поддержали ячейку несколько минут в ультразвуке для равномерного заполнения и распределения шариков по всей ячейке, наблюдая визуально за шариками: некоторые области были светлыми, поскольку шариками еще совершали движения в ультразвуке, а потом темнели, когда, уплотнившись,

шарики переставали двигаться, что подтверждалось наблюдением при большем увеличении микроскопа. Добившись визуального наблюдения уплотненной структуры шариков, мы провели проверочный эксперимент по течению дистиллированной воды через полученное устройство. Расход по воде составил 0.65 мкл/с при постоянно заданном перепаде давления 20 кПа. Для сравнения, экспериментальный расход для этой модели без шариков при перепаде давления 20 кПа составил около 1.18 мл/с, т.е. получается, что после заполнения ячейки шариками он уменьшился в 1 800 раз.

Как оказалось, в модели Хеле-Шоу с латунной фольгой вода частично просачивалась через латунный лист при перепаде давления свыше 200 кПа, поскольку из-за недостаточной деформации латунного листа создавались неоднородности по зазору. Вновь сделали аналогичное устройство ячейки Хеле-Шоу, постаравшись исправить минусы предыдущей модели. Ячейка, как и предыдущая, образована двумя оптическими стеклянными пластинами, между которыми зажимается фольга с вырезанным окном. Входные и выходные отверстия высверлены в верхнем стекле, к ним подведены трубки. Зазор обеспечили с помощью 20 слоев тонкой алюминиевой фольги толщиной 10 мкм, суммарный зазор составил 200 мкм. Неоднородности затяжки крепления болтов выравниваются фольгой, и вода не просачивается. В фольге вырезано окошко для фильтрации длиной 40 мм, шириной 10 мм. Расчетный расход по течению дистиллированной воды по формуле (1) при перепаде 10 кПа в данной ячейке составляет 1 667 мкл/с. Для изучения фильтрации в трехмерной модели с шариками на выходе ячейки поместили тот же кусок покровного стекла толщиной 150 мкм, делающий из-за разницы высот фольги и стекла зазор 40 мкм на выходе в качестве «забора» для шариков, и измерили расход по течению дистиллированной воды при перепаде давления 10 кПа, он составил 330 мкл/с. Уменьшение выходного отверстия за счет наличия покровного стекла привело к уменьшению расхода в 5 раз, отношение расходов согласуется с ранее приведенными результатами для ячейки Хеле-Шоу схожей конструкции.

Аналогично предыдущему эксперименту заполнили ячейку шариками с помощью ультразвуковой ванны. Измерили расход по течению дистиллированной воды, он составил 0.55 мкл/с при перепаде давления 20 кПа, что в 1 200 раз меньше расхода в ячейке со стеклом без шариков (660 мкл/с при перепаде давления 20 кПа). Экспериментально полученные расходы по течению дистиллированной воды для перепадов давления 10, 20, 30 и 50 кПа составили 0.43, 0.55, 1.24 и 2.30 мкл/с. Расход увеличивался непропорционально, сильнее с увеличением перепада давления, что, скорее всего, связано с потерями давления на трубках и низкой проницаемостью.

Далее был проведен эксперимент с шариками, просеянными через сито 150 мкм, распределение шариков по размерам представлено в табл.2.

В данном случае, несмотря на то что присутствует много мелких шариков (20–40 мкм), по объему преобладают крупные шары. Эксперимент провели в той же ячейке Хеле-Шоу с алюминиевой фольгой (фильтрационное окно $40 \times 10 \times 0,2$ мм) и тем же куском покровного стекла толщиной 150 мкм на выходе ячейки, делающим из-за разницы высот фольги и стекла зазор 40 мкм на выходе. Расход по воде без шариков при перепаде давления 10 кПа составил 488 мкл/с. Заполнение ячейки в ультразвуке суспензией, содержащей в воде 5% по массе шариков, просеянных через сито 150 мкм, при перепаде давления 10 кПа представлено на рис. 3.

Таблица 2

Распределение по размерам стеклянных шариков, просеянных через сито 150 мкм (D – диаметр, n – относительное количество, N – количество)

D	0–9	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
n , %	0	0.6	1.7	5.1	9.7	9.7	5.1	7.4	4.0	2.3	4.5	1.7	3.4	2.8	1.7
N	0	1	3	9	17	17	9	13	7	4	8	3	6	5	3

D	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150
n , %	2.8	1.7	4.0	4.5	2.3	1.1	5.1	3.4	4.0	4.0	1.7	2.3	1.7	0.6	1.1
N	5	3	7	8	4	2	9	6	7	7	3	4	3	1	2

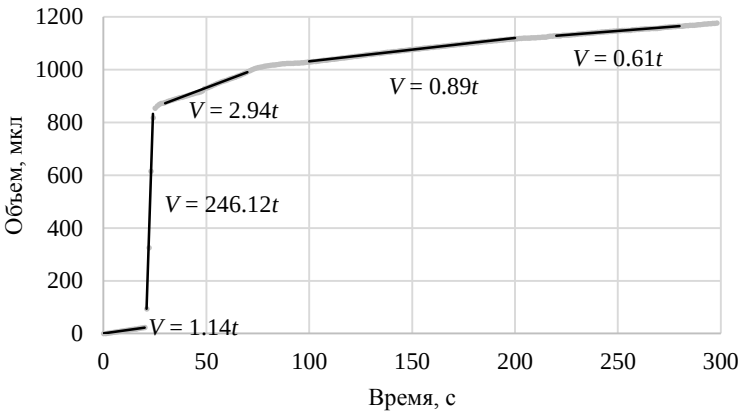


Рис. 3. Зависимость прошедшего объема от времени при заполнении ячейки Хеле-Шоу 5%-ной суспензией с шариками, просеянными через сито 150 мкм, при перепаде давления 10 кПа в ультразвуковой ванне CD-4820 (на 21-й с подали УЗВ). Приведенные на графике выражения объема (V) от времени (t) соответствуют отмеченным прямым линиям. Измерение проводилось каждую секунду, поэтому график имеет вид сплошной линии

Fig. 3. Dependence of the passed volume on time when filling the Hele-Shaw cell with a 5% suspension including spherules sieved through a 150 μm strainer at a pressure drop of 10 kPa in an ultrasonic bath CD-4820 (ultrasonic influence is applied at 21 seconds). The volume (V) – time (t) relations that are shown on the graph correspond to the highlighted straight lines. The measurements taken every second result in the solid line graph

На 21-й с включили ультразвук, и расход резко вырос: с 1.14 до 246.12 мл/с, затем шарики стали заполнять ячейку, уменьшая проницаемость и, соответственно, уменьшая расход (см. рис. 3). Как и в эксперименте с более мелкими шариками (см. рис. 2), подача ультразвука приводит к активному движению, увеличение расхода связано с прочисткой выходного сужения, что привело к большому объему прошедших шариков. Далее шарики двигались более равномерно с расходом 2.94 мл/с, который постепенно уменьшался по мере уплотнения шариками ячейки. Таким образом, благодаря ультразвуковому воздействию совместно с перепадом давления создается плотная упаковка шариков.

Экспериментальный расход течения дистиллированной воды в устройстве с шариками составил при 10 кПа – 2.56 мл/с, 20 кПа – 5.44 мл/с, 30 кПа – 7.87 мл/с,

50 кПа – 12.60 мкл/с. Благодаря плотной упаковке шариков и однородному распределению расход по воде пропорционально возрастает с увеличением перепада давления. Для сравнения, у «мелких» шариков, просеянных через сито 70 мкм, где расход увеличивался непропорционально сильнее с увеличением перепада давления, при 50 кПа он составил 2.3 мкл/с, что в 5 раз ниже, чем полученное значение 12.60 мкл/с для шариков, просеянных через сито 150 мкм.

Экспериментальное изучение эффекта запирания в ячейке с сужением с помощью стеклянных шариков

Была подготовлена ячейка со ступенчатым сужением для изучения запирания дисперсной фазой, движение справа налево. Зазор, как и в предыдущей модели, обеспечивался с помощью 20 слоев тонкой алюминиевой фольги толщиной 10 мкм, суммарный зазор составил 200 мкм. В фольге вырезано окно для фильтрации согласно схеме (рис. 4). Справа отсек-камеру сделали шире левого отсека для возможности визуального наблюдения за движением шариков во входной зоне, чтобы шарики не скапливались на входе, как было бы в случае узкой камеры.

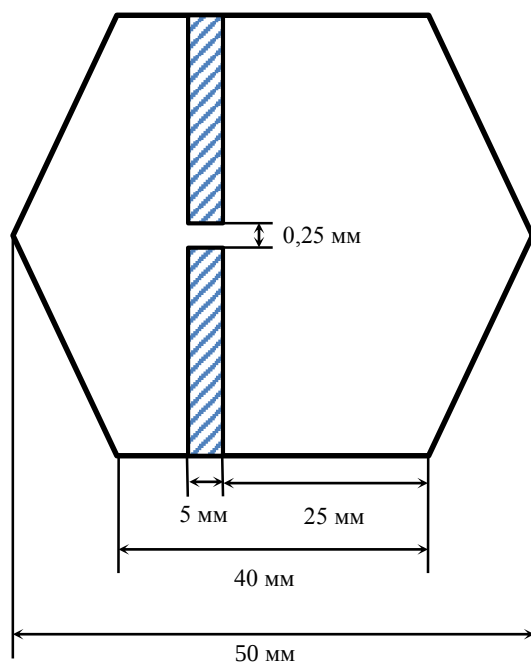


Рис. 4. Схематичное изображение фильтрационного окна ячейки с сужением
Fig. 4. Schematic representation of the filtration window in a cell with constriction

Приготовили суспензию «мелких» шариков (см. табл. 1) в дистиллированной воде (5% по массе), и при постоянном перепаде давления 10 кПа шарики запустили в ячейку (рис. 5, 6).

Спустя 11 с от начала эксперимента (см. рис. 6, *b*) видим, что ячейка преимущественно заполнена водой и, кроме входного отверстия, практически не отлича-

ется от фотоизображения начала движения (см. рис. 6, а). Это свидетельствует о том, что первые 10 с в ячейку попадала преимущественно водная фаза с небольшим содержанием шариков.

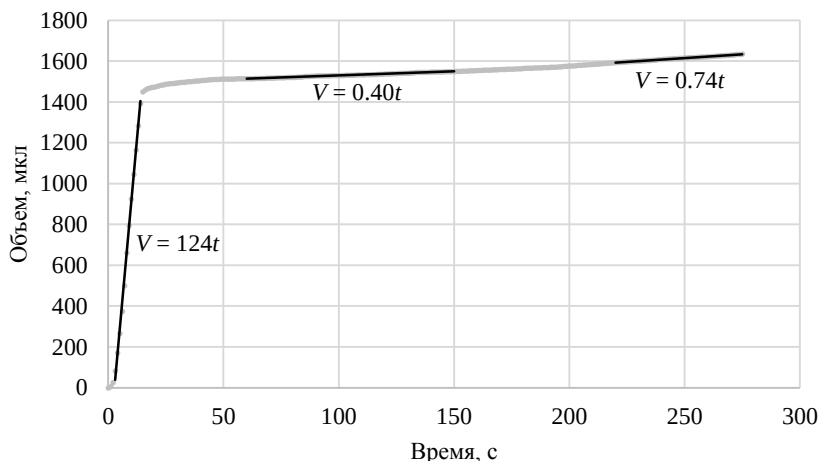


Рис. 5. Зависимость прошедшего объема от времени при заполнении ячейки Хеле-Шоу с сужением 5%-ной суспензией с шариками, просеянными через сито 70 мкм, при перепаде давления 10 кПа. Приведенные на графике выражения объема (V) от времени (t) соответствуют отмеченным прямым линиям. Измерение проводилось каждую секунду, поэтому график имеет вид сплошной линии

Fig. 5. Dependence of the passed volume on time when filling the Hele-Shaw cell with a 5% suspension including spherules sieved through a 70 μm strainer at a pressure drop of 10 kPa. The volume (V) – time (t) relations that are shown on the graph correspond to the highlighted straight lines. The measurements taken every second result in a solid line graph

На графике (см. рис. 5) первые 14 с расход высокий, что связано с активным движением суспензии, состоящей преимущественно из водной фазы, основная масса шариков еще не достигла сужения. На 11-й с начинается движение в ячейке большого скопления шариков, что отчетливо видно уже через секунду (см. рис. 6, с). На 15-й с расход резко падает (см. рис. 5), что связано с уменьшением сечения при попадании шариков в сужение на 13-й с (см. рис. 6, d); буквально за 2 с шарика «заблокировали» сужение, уменьшив проходное сечение. Вода продолжает проходить через сужение, однако движение шариков через сужение значительно сокращается и прекращается. На 13-й с, после достижения движущейся массой шариков сужения, видим зарождение второго «слоя» поступающих шариков, который останавливается примерно на 15-й с (см. рис. 6, e), что совпадает с резким уменьшением расхода на графике, связанным с тем, что попавшая в сужение плотная упаковка шариков уменьшила проходное сечение.

Далее начинается медленное движение верхнего третьего «слоя» шариков; этот «слой» более темный, а значит, концентрация шариков больше, упаковка более плотная (см. рис. 6, f). Полученная последовательность кадров схожа с картиной запираания микрокаплями воды в обратных водоуглеводородных эмульсиях, для которой также характерно волновое, пульсирующее течение перед запиранием.

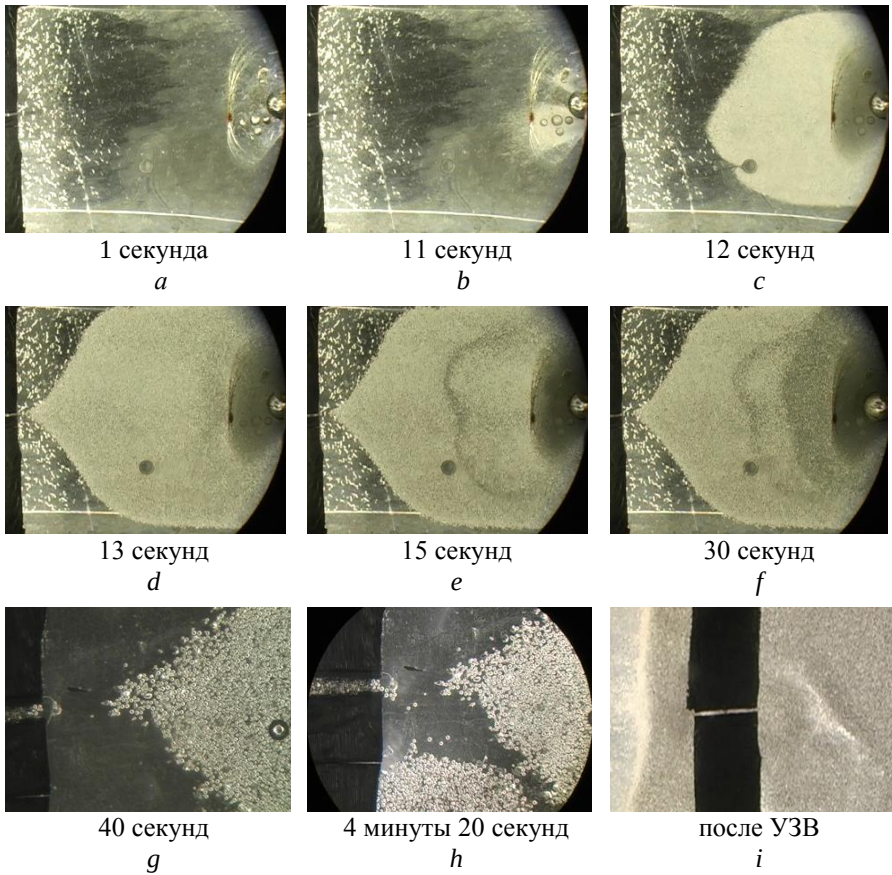


Рис. 6. Фотоизображения заполнения ячейки Хеле-Шоу с сужением 5%-ной суспензией с шариками, просеянными через сито 70 мкм, при перепаде давления 10 кПа (движение справа налево). Полуокружности на кадрах – ограничения видимой области камеры, установленной на микроскоп. Время от начала эксперимента приведено под кадрами

Fig. 6. Photographs of the filling of the Hele-Shaw cell with a constriction with a 5% suspension including spherules sieved through a 70 μm strainer at a pressure drop of 10 kPa (right-to-left motion). The semicircles indicate the limitations of the visible area of the camera arranged on a microscope. The time after the beginning of the experiment is given under the frames

Спустя 40 с от начала эксперимента (см. рис. 6, *g*) видим, что шарики перестают заходить в сужение, что связано с блокировкой сужения шариками и частицами из воздуха. Расход, равный 0.4 мкл/с (см. рис. 5), объясняется фильтрацией воды через структуру из шариков. Получается, что с начала движения с расходом в 120 мкл/с расход уменьшился в 300 раз. Отсек-камера постепенно заполняется шариками, но остаются области, не занятые шариками. Спустя 4 мин 20 с (см. рис. 6, *h*) видим движущееся вдоль нижней границы кадра скопление шариков, с этим также связано небольшое увеличение расхода на графике от 0.4 до

0.74 мкл/с (см. рис. 5) за счет вытеснения воды в камере шариками, однако шарики по одному подходят к входу в сужение и, не заходя в него, останавливаются.

Далее остановили видеосъемку и, не убирая перепад давления 10 кПа, поместили ячейку в ту же ультразвуковую ванну CD-4820 на 3 мин. График зависимости течения при трехминутном УЗВ и после него представлен на рис. 7. После помещения в ультразвуковую ванну на 13-й с подали УЗВ (см. рис. 7), расход вырос с 0.16 до 1.57 мкл/с, что связано с прочисткой сужения; шарики активно начали заполнять входную правую камеру и выходить в левую, заполняя пустые пространства в ячейке. Картина после УЗВ представлена на рис. 6, *i* для сравнения с кадрами до УЗВ и акцента на заполненную область.

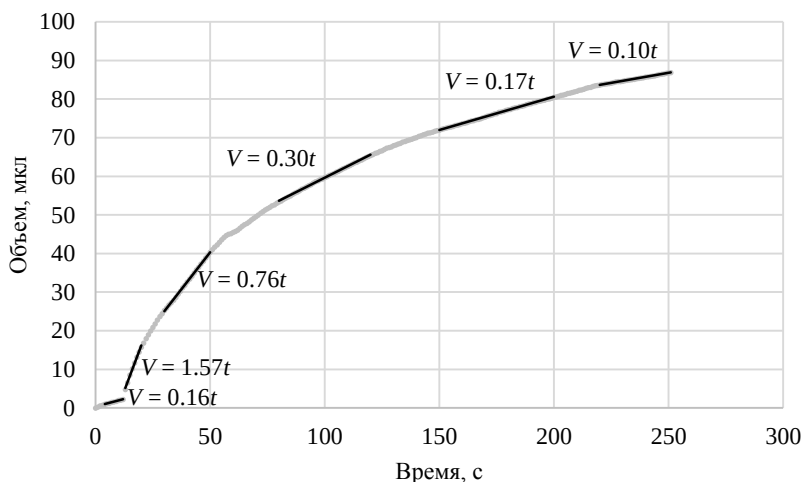


Рис. 7. Зависимость объема от времени при заполнении ячейки Хеле-Шоу с сужением 5%-ной суспензией с шариками при перепаде давления 10 кПа в ультразвуковой ванне CD-4820; на 13-й с подали УЗВ, которое длилось 3 мин. Последний участок графика соответствует выключенному УЗВ. Приведенные на графике зависимости объема (V) от времени (t) соответствуют отмеченным прямыми линиям. Измерение проводилось каждую секунду, поэтому график имеет вид сплошной линии

Fig. 7. Dependence of the passed volume on time when filling the Hele-Shaw cell with a constriction with a 5% suspension including spherules at a pressure drop of 10 kPa in an ultrasonic bath CD-4820; at 13 seconds, the 3-minute ultrasound influence (USI) is applied. The last section of the graph corresponds to the disabled USI. The volume (V) – time (t) relations that are shown on the graph correspond to the highlighted straight lines. The measurements taken every second result in a solid line graph

Постепенно расход плавно уменьшается до 0.17 мкл/с (см. рис. 7), что связано с уплотнением ячейки шариками, блокировкой сужения. УЗВ подавали в течение 3 мин. Последний участок графика с расходом 0.10 мкл/с характеризуется течением уже без УЗВ, остаточный незначительный расход долгое время сохраняется за счет фильтрации воды; без УЗВ перепада давления в 10 кПа недостаточно для движения уплотнившейся структуры из шариков.

Ультразвуковое воздействие оказалось очень важным для равномерного заполнения ячейки шариками как в объемной модели без сужения, так и в модели

с сужением. УЗВ при постоянном перепаде давления приводило к возобновлению течения в случае, когда шарики блокировали сужение, а после создания плотной структуры движение шариков замедлялось и останавливалось даже в ультразвуке.

Заключение

Представлены результаты экспериментального исследования влияния ультразвукового воздействия (УЗВ) на заполнение стеклянными шариками при постоянно действующем перепаде давления ячеек Хеле-Шоу, в том числе со ступенчатым сужением, являющихся физическими моделями трещины в нефтяном пласте.

Разработана установка с использованием методов визуализации для микрогидродинамических исследований. Все элементы установки управляются с компьютера, и результаты в синхронизованном виде сохраняются в нем (видеоизображения, показания датчика давления, весов).

Благодаря УЗВ и постоянно действующему перепаду давления достигаются плотная упаковка шариков и их однородное распределение. Расход по воде с шариками, просеянными через сито 150 мкм, в ячейке Хеле-Шоу с зазором 200 мкм пропорционально возрастал с увеличением перепада давления, в отличие от расхода шариков, просеянных через сито в 2 раза меньшего диаметра: он возрастал сильнее с увеличением перепада давления и был в 5 раз ниже для перепада давления 50 кПа. УЗВ при постоянном перепаде давления оказалось очень важным для равномерного заполнения ячейки шариками как в объемной модели без сужения, так и в модели с сужением; оно приводило к возобновлению течения в случае, когда шарики блокировали сужение. Можно с уверенностью предположить, что влияние УЗВ на микрокапли воды в эмульсии при возникновении запираания будет аналогичным, что косвенно подтверждается возобновлением с подачей УЗВ течения эмульсий, находящихся под влиянием эффекта динамического запираания [6]. Таким образом, УЗВ является качественным способом воздействия на эффект динамического запираания, обусловленный скоплением у входа в сужение микрокапель воды в углеводороде, что позволяет подойти к созданию технологии по увеличению доли трудноизвлекаемых запасов нефти в общем балансе добычи.

Список источников

1. Ахметов А.Т., Телин А.Г., Мавлетов М.В. Новые принципы применения обратных водо-нефтяных эмульсий в потокоотклоняющих технологиях и глушении скважин // Нефтегазовое дело. 2005. Т. 3. С. 119–126. URL: http://ngdelo.ru/files/old_ngdelo/2005/1/119-126.pdf
2. Ахметов А.Т., Саметов С.П. Особенности течения дисперсии из микрокапель воды в микроканалах // Письма в Журнал технической физики. 2010. Т. 36, вып. 22. С. 21–28. URL: <http://journals.ioffe.ru/articles/viewPDF/14196>
3. Davis J.A., Jones S.C. Displacement mechanisms of micellar solutions // Journal of Petroleum Technology. 1968. V. 20 (12). P. 1415–1428. URL: doi: 10.2118/1847-2-PA
4. Нигматулин Р.И., Ахметов А.Т., Федоров К.М. О механизме вытеснения нефти из пористой среды мицеллярными растворами // Доклады АН СССР. 1987. Т. 293, № 3. С. 558–563. URL: <http://www.mathnet.ru/links/6a23ef4d31c7ac01deade4cbfe0ba73b/dan47862.pdf>
5. Рахимов А.А., Ахметов А.Т. Экспериментальные исследования гидродинамических эффектов при течении обратных водоуглеводородных эмульсий в микроканалах // Труды

- Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2016. Т. 11, № 1. С. 30–37. doi: 10.21662/uim2016.1.006
6. Рахимов А.А., Валиев А.А. Влияние агрегатного состояния дисперсной фазы и ультразвукового воздействия на течение эмульсий в микроканалах // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2017. Т. 12, № 2. С. 187–194. doi: 10.21662/uim2017.2.028
 7. Ануфриев Р.В., Волкова Г.И. Влияние ультразвука на структурно-механические свойства нефтей и процесс осадкообразования // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2016. Т. 327, № 10. С. 50–58. URL: http://earchive.tpu.ru/bitstream/11683/33185/1/bulletin_tpu-2016-v327-i10-05.pdf
 8. Харисова З.И. Влияние ультразвукового воздействия на дисперсность водоземulsionных лакокрасочных материалов // Альманах современной науки и образования. 2016. Т. 103, № 1. С. 108–110. URL: https://www.gramota.net/articles/issn_1993-5552_2016_1_32.pdf
 9. Лопатин Р.А., Голых Р.Н., Хмелев В.Н., Минаков В.Д., Генне Д.В., Нестеров В.А. Экспериментальное исследование влияния ультразвукового кавитационного воздействия на сырьевые компоненты полимерного композита // Южно-Сибирский научный вестник. 2018. Т. 23, № 3. С. 94–98. doi: 10.25699/SSSB.2018.23.17563
 10. Валиев А.А., Ахметов А.Т., Рахимов А.А. Неустойчивое вытеснение в плоскопараллельном микроканале // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 65. С. 68–82. doi: 10.17223/19988621/65/5

References

1. Akhmetov A.T., Telin A.G., Mavletov M.V. (2005) Novye printsipy primeneniya obratnykh vodoneftnykh emul'siy v potokootklonyayushchikh tekhnologiyakh i glushenii skvazhin [New principals of application for invert emulsions in baffling technologies and killing of a well]. *Neftegazovoe delo – Petroleum Engineering*. 3. pp. 119–126.
2. Akhmetov A.T., Sametov S.P. (2010) Features of water microdrop dispersion flow in microchannels. *Technical Physics Letters*. 36(11). pp. 1034–1037. doi: 10.1134/S1063785010110180
3. Davis J.A., Jones S.C. (1968) Displacement mechanisms of micellar solutions. *Journal of Petroleum Technology*. 20(12). pp. 1415–1428. doi: 10.2118/1847-2-PA
4. Nigmatulin R.I., Akhmetov A.T., Fedorov K.M. (1987) O mekhanizme vytesneniya nefi iz poristoy sredy mitsellyarnymi rastvorami [On the mechanism of oil displacement from a porous medium by micellar solutions]. *Doklady AN SSSR*. 293(3). pp. 558–563.
5. Rakhimov A.A., Akhmetov A.T. (2016) Eksperimental'nye issledovaniya gidrodinamicheskikh effektiv pri techenii obratnykh vodouglevodorodnykh emul'siy v mikrokanalakh [Experimental study of hydrodynamic effects in the inverse water hydrocarbon emulsions flow in microchannels]. *Trudy Instituta mekhaniki im. R.R. Mavlyutova Ufimskogo nauchnogo tsentra RAN – Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics*. 11(1). pp. 30–37. doi: 10.21662/uim2016.1.006
6. Rakhimov A.A., Valiev A.A. (2017) Vliyanie agregatnogo sostoyaniya dispersnoy fazy i ul'trazvukovogo vozdeystviya na techenie emul'siy v mikrokanalakh [Influence of the aggregate state of the dispersed phase and ultrasonic effect on the flow of emulsions in microchannels]. *Trudy Instituta mekhaniki im. R.R. Mavlyutova Ufimskogo nauchnogo tsentra RAN – Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics*. 12(2). pp. 187–194. doi: 10.21662/uim2017.2.028
7. Anufriev R.V., Volkova G.I. (2016) Vliyanie ul'trazvuka na strukturno-mekhanicheskie svoystva neftei i protsess osadkoobrazovaniya [Influence of ultrasonic treatment on structural-mechanical properties of oil and sedimentation]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Inzhiniring georursov – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*. 327(10). pp. 50–58.

8. Kharisova Z.I. (2016) Vliyanie ul'trazvukovogo vozdeystviya na dispersnost' vodo-emul'sionnykh lakokrasochnykh materialov [Influence of ultrasonic exposure on dispersion of water-emulsion paintwork materials]. *Al'manakh sovremennoy nauki i obrazovaniya – Almanac of Modern Science and Education*. 103(1). pp. 108–110.
9. Lopatin R.A., Golyh R.N., Khmelev V.N., Minakov V.D., Genne D.V., Nesterov V.A. (2018) Eksperimental'noe issledovanie vliyaniya ul'trazvukovogo kavitatsionnogo vozdeystviya na syr'evye komponenty polimernogo kompozita [Experimental study of the influence of ultrasonic cavitation on raw-material components of the polymeric composite]. *Yuzhno-Sibirskiy nauchnyy vestnik – South-Siberian Scientific Bulletin*. 23(3). pp. 94–98. doi: 10.25699/SSSB.2018.23.17563
10. Valiev A.A., Akhmetov A.T., Rakhimov A.A. (2020) Neustoychivoe vytesnenie v plosko-parallel'nom mikrokanale [Unstable displacement in a plane-parallel microchannel]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 65. pp. 68–82. doi: 10.17223/19988621/65/5

Сведения об авторах:

Рахимов Артур Ашотович – научный сотрудник лаборатории «Экспериментальная гидродинамика» Института механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия. E-mail: ragar83@mail.ru

Валиев Азат Ахматович – младший научный сотрудник лаборатории «Экспериментальная гидродинамика» Института механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия. E-mail: azatphysic@mail.ru

Information about the authors:

Rakhimov Artur A. (Candidate of Physics and Mathematics, Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa, Russian Federation). E-mail: ragar83@mail.ru

Valiev Azat A. (Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa, Russian Federation). E-mail: azatphysic@mail.ru

Статья поступила в редакцию 27.01.2022; принята к публикации 01.12.2022

The article was submitted 27.01.2022; accepted for publication 01.12.2022

Научная статья

УДК 004.942:623.526.4

doi: 10.17223/19988621/80/12

Одномерная математическая модель колебаний ствола с поперечным сечением произвольной формы

Иван Григорьевич Русяк¹, Вадим Гарайханович Суфиянов²,
Даниил Анатольевич Клюкин³

^{1, 2, 3} *Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова,
Ижевск, Россия*

¹ *primat@istu.ru*

² *vsufiy@mail.ru*

³ *anatoliikljukin@mail.ru*

Аннотация. Рассмотрена одномерная математическая модель решения задачи о продольно-поперечных колебаниях ствола автоматической пушки с поперечными сечениями различной формы. Разностная схема для решения одномерных нестационарных уравнений напряженно-деформированного состояния ствола при выстреле построена на основе интегро-интерполяционного метода; напряженно-деформированное состояние ствола в плоскостях поперечных сечений аппроксимировано с использованием аналитического решения Ламе. Проведено исследование влияния формы сечения канала ствола на величину начального прогиба и амплитуду поперечных колебаний дульного среза при стрельбе очередями.

Ключевые слова: математическая модель, численные методы, колебания ствола, автоматическая пушка, повышение жесткости

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00072.

Для цитирования: Русяк И.Г., Суфиянов В.Г., Клюкин Д.А. Одномерная математическая модель колебаний ствола с поперечным сечением произвольной формы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 80. С. 133–146. doi: 10.17223/19988621/80/12

Original article

A one-dimensional mathematical model of barrel vibrations with arbitrary cross-sectional shapes

Ivan G. Rusyak¹, Vadim G. Sufyanov², Daniil A. Klyukin³

^{1, 2, 3} *Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation*

¹ *primat@istu.ru*

² vsufiy@mail.ru³ anatoliikljukin@mail.ru

Abstract. The problem of longitudinal and transverse vibrations of a barrel with arbitrary cross-sectional shapes is considered and solved in the framework of a one-dimensional model. The study shows that the amplitude of transverse vibrations in the vertical plane significantly exceeds that in the horizontal plane. This paper proposes to reduce the amplitude of vibrations by changing the shape of the barrel cross-section, namely by adding stiffeners. The numerical algorithm for solving the problem is developed on the basis of the integro-interpolation method. The verification of the numerical integration method is carried out, and the grid convergence is verified by means of the modeling of barrel vibrations for a 30 mm automatic cannon. The study of the impact of the barrel cross-section shape shows that the use of stiffeners can reduce the initial deflection and the amplitude of muzzle vibrations when firing in bursts. The obtained results demonstrate a narrow spread of projectile departure angles, and, consequently, the improved shooting accuracy of the automatic cannon.

Keywords: mathematical model, numerical methods, barrel vibrations, automatic cannon, stiffening

Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 20-01-00072.

For citation: Rusyak, I.G., Sufiyarov, V.G., Klyukin, D.A. (2022) A one-dimensional mathematical model of barrel vibrations with arbitrary cross-sectional shapes. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 133–146. doi: 10.17223/19988621/80/12

Введение

Основная задача исследований в области проектирования орудий – повышение мощности, надежности, живучести стволов и точности стрельбы, а также удешевление производства стволов автоматических пушек [1]. Повышение характеристик эффективности стрельбы неизбежно приводит к увеличению толщины стенок стволов, что входит в противоречие с техническими и экономическими требованиями их изготовления. В этой связи необходимо искать компромисс между меньшим весом, высокой огневой мощностью и жесткостью конструкции.

Математическое моделирование позволяет проводить анализ влияния различных факторов на эффективность функционирования артиллерийских орудий еще на этапе проектирования стволов [1, 2]. В данной работе рассматривается вопрос уменьшения поперечных колебаний ствола автоматической пушки в вертикальной плоскости. Одним из способов решения данной проблемы является усовершенствование формы ствола, например с помощью ребер жесткости [3]. Существуют известные разработки 30 мм автоматических пушек, например Mk44 Bushmaster II [4], которые имеют неколецное сечение ствола (рис. 1).



Рис. 1. Стрельба из 30 мм автоматической пушки Mk44 Bushmaster II
Fig. 1. Firing from a 30 mm Mk44 Bushmaster II automatic cannon

Жесткость конструкции имеет важное значение для автоматических пушек, так как из-за высокого темпа стрельбы из этих орудий имеет место большой разброс траекторий движения снарядов. Рассмотрим поперечные сечения ствола различной формы трех типов (рис. 2). Будем считать базовым типом кольцевое сечение ствола пушки (см. рис. 2, а). В остальных случаях (см. рис. 2 а, b) для обеспечения одинакового веса площади поперечных сечений выбирались равными площади поперечного сечения базового типа.

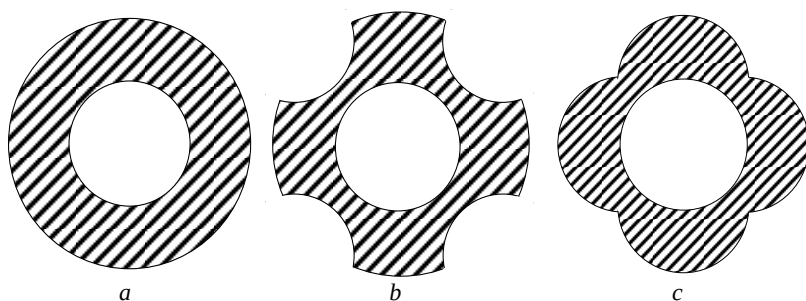


Рис. 2. Поперечные сечения стволов:

(а) без ребер жесткости, (b) ребра жесткости 1-го типа, (с) ребра жесткости 2-го типа

Fig. 2. Cross sections of barrels:

(a) without stiffeners, (b) type 1 stiffeners, and (c) type 2 stiffeners

Трехмерные модели пушек с соответствующими типами ребер жесткости представлены на рис. 3.

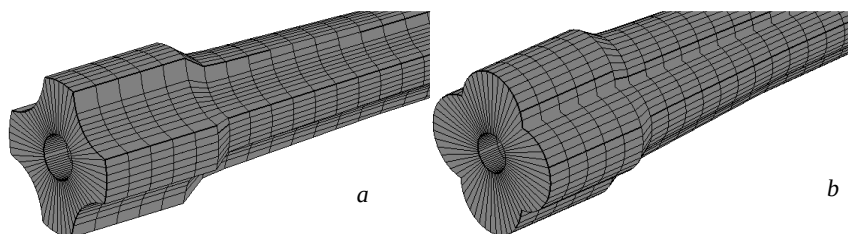


Рис. 3. 3D модели стволов 30 мм пушки:

а – ребра жесткости 1-го типа, b – ребра жесткости 2-го типа

Fig. 3. 3D models of 30 mm gun barrels: (a) type 1 and (b) type 2 stiffeners

Целью данной работы является анализ влияния формы поперечного сечения ствола автоматической пушки на величину начального прогиба ствола под действием сил тяжести и определение амплитуды колебаний ствола автоматической пушки на основе математического моделирования процесса стрельбы очередями.

1. Математическая модель

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений начального прогиба ствола, направленного под углом возвышения φ [2, 5, 6], с учетом произвольной формы сечения ствола автоматической пушки. Помимо силы тяжести самого ствола будем учитывать силы, действующие на ствол со стороны снаряда при его дви-

жении по каналу: $q_1^0(x)$ – по оси Ox , $q_2^0(x)$ – по оси Oy ; $q_3^0(x)$ – по оси Oz , где ось Ox направлена вдоль оси ствола, ось Oy вверх, ось Oz направлена так, что единичные орты образуют правую тройку векторов [6]. Модель учитывает технологические дефекты изготовления ствола, а именно отклонения центров масс сечений ствола v_{00} и w_{00} от оси симметрии канала ствола с кольцевым сечением [2].

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(FE \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) &= \rho F g \sin \varphi - q_1^0(x), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ_z \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(FE \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial (v_0 + v_{00})}{\partial x} \right) &= -\rho F g \cos \varphi + q_2^0(x), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(FE \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial (w_0 + w_{00})}{\partial x} \right) &= q_3^0(x), \end{aligned} \quad (1)$$

где $u_0 = u_0(x)$ – величина начального прогиба по оси Ox ; $v_0 = v_0(x)$ – величина начального прогиба по оси Oy ; $w_0 = w_0(x)$ – величина начального прогиба по оси Oz ; E – модуль Юнга; $F = F(x)$ – площадь поперечного сечения в точке с координатой x ; ρ – плотность материала ствола; g – ускорение силы тяжести; $J_y = J_y(x)$ – момент инерции сечения относительно оси Oy ; $J_z = J_z(x)$ – момент инерции сечения относительно оси Oz . Площадь поперечного сечения F , моменты инерции J_y и J_z вычисляются по формулам

$$F = \int_F df, \quad J_y = \int_F z^2 df, \quad J_z = \int_F y^2 df, \quad (2)$$

Запишем граничные условия у казенного среза. Считая, что ствол жестко закреплен, будем иметь:

$$\begin{aligned} u_0(0) &= 0, \\ v_0(0) &= 0, \quad \left. \frac{\partial v_0(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \\ w_0(0) &= 0, \quad \left. \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

граничные условия для дульного среза запишутся в виде:

$$\begin{aligned} FE \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \Big|_{x=L} &= 0, \\ EJ_z \frac{\partial^2 v_0(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=L} &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(EJ_z \frac{\partial^2 v_0(x)}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=L} = 0, \\ EJ_y \frac{\partial^2 w_0(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=L} &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(EJ_y \frac{\partial^2 w_0(x)}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=L} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Процесс колебаний ствола в одномерной постановке рассматривается как задача о колебаниях стержня, которая описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\rho F g \sin \varphi + q_1(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} (F \sigma^x) - p_1 \frac{\partial S}{\partial x}, \\
 \rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= -\rho F g \cos \varphi + q_2(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left((F \sigma^x - p_1 S) \frac{\partial (v + v_{00})}{\partial x} \right) + \\
 &\quad + v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\int_F (\sigma^{yy} + \sigma^{zz}) y df \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E J_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right), \\
 \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= q_3(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left((F \sigma^x - p_1 S) \frac{\partial (w + w_{00})}{\partial x} \right) + \\
 &\quad + v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\int_F (\sigma^{yy} + \sigma^{zz}) z df \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E J_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\
 \sigma^x &= E \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{F} \int_F (\sigma^{yy} + \sigma^{zz}) df,
 \end{aligned} \tag{5}$$

где $u = u(x, t)$ – величина продольных колебаний ствола по оси Ox ; $v = v(x, t)$ – величина поперечных колебаний ствола по оси Oy ; $w = w(x, t)$ – величина поперечных колебаний ствола по оси Oz ; v – коэффициент Пуассона. На ствол действуют внешние динамические силы $q_1(x, t)$, $q_2(x, t)$ и $q_3(x, t)$. В рамках допущений работы будем рассматривать только силу взаимодействия снаряда со стволом. Нагружение ствола внутренним давлением определяется из решения задачи внутренней баллистики с учетом периода последствия в термодинамической постановке [7, 8].

В качестве допущения одномерной модели распределение суммы напряжений $\sigma^{yy} + \sigma^{zz}$ в поперечном сечении определим на основе решения задачи Ламе [9] для всего интервала углов $\alpha \in [0, 2\pi)$ (рис. 4) по формуле

$$\sigma^{yy} + \sigma^{zz} = 2p_1 \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}, \tag{6}$$

где p_1 – давление внутри канала ствола.

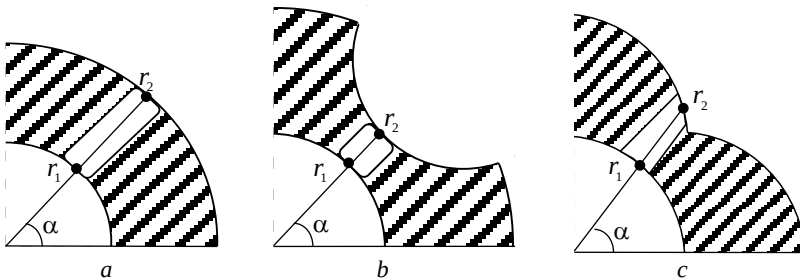


Рис. 4. К использованию решения задачи Ламе для сечений:

a – без ребер жесткости, b – с ребрами жесткости 1-го типа, c – с ребрами жесткости 2-го типа

Fig. 4. To the Lamé problem solution for sections:

(a) without stiffeners, (b) type 1 stiffeners, and (c) type 2 stiffeners

Погрешность представления (6) определялась с помощью расчета напряженно-деформированного состояния сечений ствола в пространственной постановке в ANSYS. При сравнении результатов расчета значений интегралов $\int_F (\sigma^{yy} + \sigma^{zz}) df$

при нагружении внутренним давлением $p = 400$ МПа отклонения составили: для сечения базового типа – 0,01%, для сечения с ребрами жесткости 1-го типа – 15,7%, для сечения с ребрами жесткости 2-го типа – 1,5%.

Система уравнений (5) решается при следующих начальных условиях:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x), \quad \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \\ v(x,0) &= v_0(x), \quad \left. \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \\ w(x,0) &= w_0(x), \quad \left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Граничные условия закрепления для казенного среза:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= u_0(0), \\ v(0,t) &= v_0(0), \quad \left. \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \\ w(0,t) &= w_0(0), \quad \left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Граничные условия для дульного среза при отсутствии внешних сил имеют вид:

$$\begin{aligned} FE \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=L} &= 0, \\ EJ_z \left. \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=L} &= 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(EJ_z \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right) \right|_{x=L} = 0, \\ EJ_y \left. \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=L} &= 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(EJ_y \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) \right|_{x=L} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Решение уравнений (1)–(9) проводится на расчетной сетке в пространственной области $0 \leq x \leq l = L_{\text{км}} + L_{\text{д}}$:

$$\Omega = \left\{ x_i = i \cdot h \mid i \in \{0, 1, \dots, I\}, h = \frac{l}{I} \right\}, \quad (10)$$

а шаги по времени определяются в области $0 \leq t \leq T$:

$$\Xi = \left\{ t_n = n \cdot \tau \mid n \in \{0, 1, \dots, N\}, \tau = \frac{T}{N} \right\}, \quad (11)$$

где I – количество узлов в пространственной области; $L_{\text{км}}$, $L_{\text{д}}$ – длины камеры и ствола соответственно; N – количество узлов во временной области; T – конечное время решения задачи.

Неявная разностная аппроксимация дифференциальных уравнений в узлах расчетной сетки осуществляется интегро-интерполяционным методом [10]. В результате получается система алгебраических уравнений диагонального вида, решение которой определяется методом прогонки [11].

2. Построение сечения произвольной формы и верификация результатов численного интегрирования

Рассмотрим методы построения различных типов сечений, представленных на рис. 2. Границы областей поперечных сечений определяются из параметрического уравнения окружности:

$$y = y_c + r \sin(t), \quad z = z_c + r \cos(t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad (12)$$

где y_c, z_c, r – координаты центра и радиус окружности. В случае отсутствия ребер жесткости внутренняя граница сечения канала ствола определяется окружностью радиуса $r = r_1$, а внешняя граница – окружностью радиуса $r = r_2$.

Внешние границы сечения канала ствола с ребрами жесткости 1-го типа образуются из кольцевого сечения удалением областей, удовлетворяющих неравенствам

$$(y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 \leq r. \quad (13)$$

Внешние границы сечений канала ствола с ребрами жесткости 2-го типа образуются добавлением к внешней части кольцевого сечения областей, определяемых по формуле (13).

Для обеспечения одинакового веса рассматриваемых типов стволов сечения каналов с ребрами жесткости строились таким образом, чтобы на каждом срезе их площади сечений, расположенных на одном и том же расстоянии от казенного среза, совпадали с площадями сечений ствола с круговым сечением.

В рассматриваемых сечениях вычисляются площади сечений F , а также моменты инерции относительно соответствующих осей и другие параметры в системе уравнений (5). Численное интегрирование производится в сечениях ствола, разбитых на треугольные конечные элементы. На рис. 5 представлены результаты дискретизации области интегрирования методом триангуляции Делоне [12].

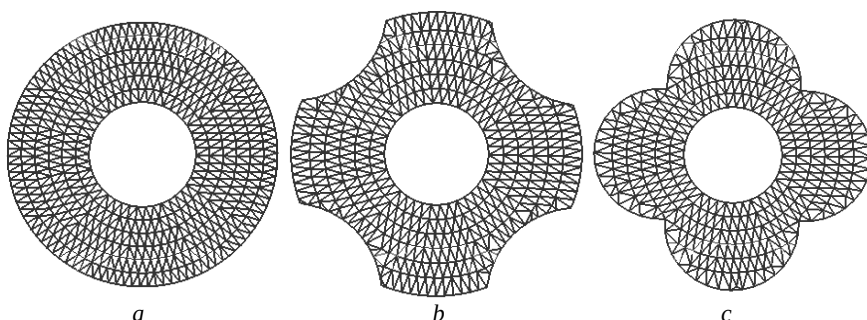


Рис. 5. Триангулированные поперечные сечения:

a – без ребер жесткости, *b* – с ребрами жесткости 1-го типа, *c* – с ребрами жесткости 2-го типа

Fig. 5. Triangulated cross sections:

(*a*) without stiffeners, (*b*) type 1 stiffeners, and (*c*) type 2 stiffeners

Проведем сравнение аналитических решений и результатов численного интегрирования для F , J_y , J_z по формулам (2). На рис. 6–8 представлено сравнение аналитического (сплошная линия) и численного (точки) интегрирования площади поперечного сечения F и моментов инерции J_y , J_z ствола без ребер жесткости на различных расстояниях Ox от казенного среза.

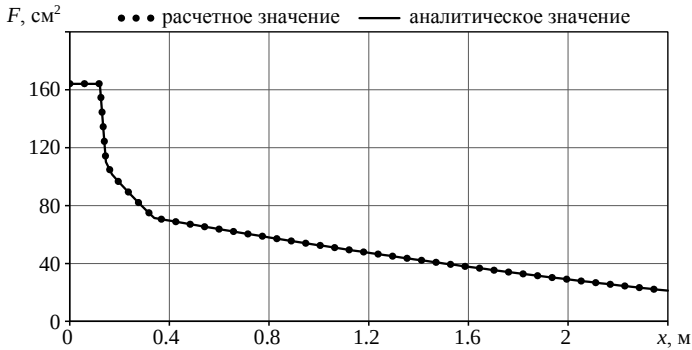


Рис. 6. Сравнение аналитического и расчетного значений площади поперечного сечения F
Fig. 6. Comparison of the calculated and analytical values of the cross-sectional area F

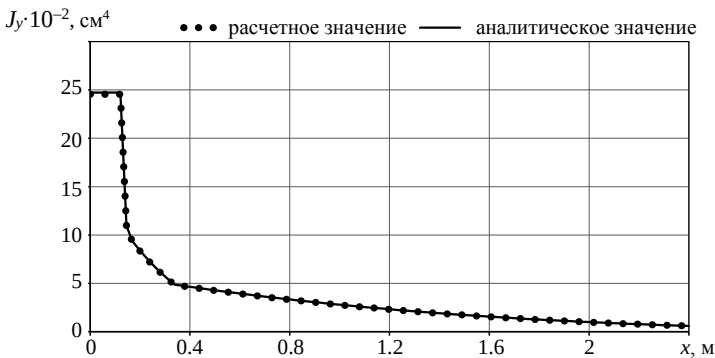


Рис. 7. Сравнение аналитического и расчетного значений момента инерции J_y
Fig. 7. Comparison of the calculated and analytical values of the moment of inertia J_y

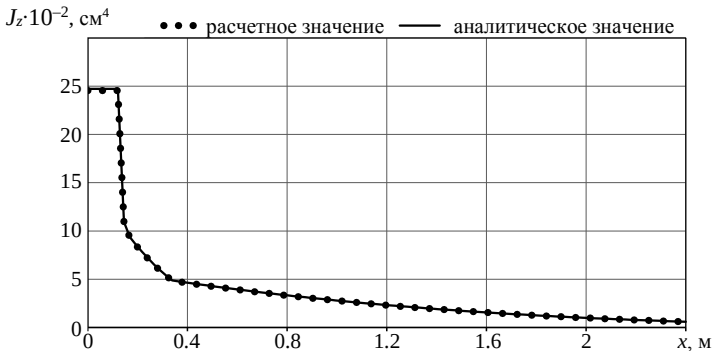


Рис. 8. Сравнение аналитического и расчетного значений момента инерции J_z
Fig. 8. Comparison of the calculated and analytical values of the moment of inertia J_z

Отклонение расчетных и аналитических значений определяется согласно норме

$$\|y^* - \tilde{y}\| = \frac{1}{I} \sum_{i=0}^I \frac{|y_i^* - \tilde{y}_i|}{|y_i^*|} \cdot 100\%, \quad (14)$$

где y^* – аналитическое значение параметра; $\tilde{y}$ – расчетное значение параметра.

Погрешность численного интегрирования на расчетной сетке из 3 000 треугольных элементов составила

$$\|F^* - \tilde{F}\| = 0.16\%, \quad \|J_y^* - \tilde{J}_y\| = 0.39\%, \quad \|J_z^* - \tilde{J}_z\| = 0.39\%.$$

На рис. 9, 10 представлено сравнение распределений моментов инерции по длине ствола для рассматриваемых типов сечений.

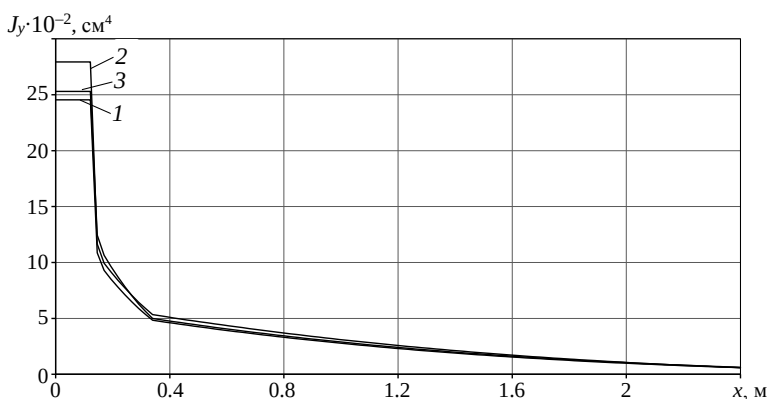


Рис. 9. Сравнение расчетных значений момента инерции J_y :

1 – без ребер жесткости, 2 – с ребрами жесткости 1-го типа, 3 – с ребрами жесткости 2-го типа

Fig. 9. Comparison of the calculated values of the moment of inertia J_y :

(1) without stiffeners, (2) type 1 stiffeners, and (3) type 2 stiffeners

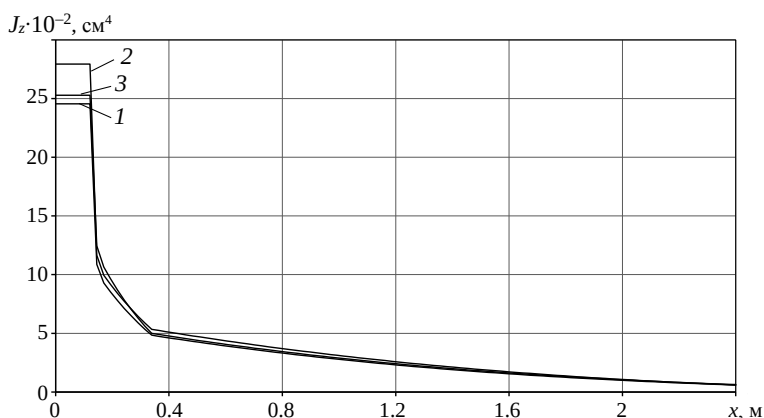


Рис. 10. Сравнение расчетных значений момента инерции J_z :

1 – без ребер жесткости, 2 – с ребрами жесткости 1-го типа, 3 – с ребрами жесткости 2-го типа

Fig. 10. Comparison of the calculated values of the moment of inertia J_z :

(1) without stiffeners, (2) type 1 stiffeners, and (3) type 2 stiffeners

Сходимость результатов численного интегрирования в зависимости от числа конечных элементов K на примере ствола с ребрами жесткости 2-го типа показана на рис. 11. Аналогичные результаты были получены и для других типов сечений.

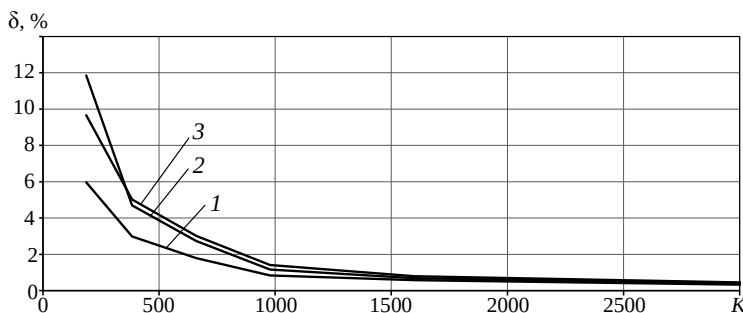


Рис. 11. Зависимость погрешности расчета от числа конечных элементов в сечении:

1 – площадь поперечного сечения F ; 2 – момент инерции J_y ; 3 – момент инерции J_z

Fig. 11. Calculation error as a function of the number of finite elements in the section:

(1) cross-sectional area F , (2) moment of inertia J_y ; and (3) moment of inertia J_z

Из рис. 11 видно, что для достижения точности 1% необходимо 1 500 конечных элементов в сечении. Далее при моделировании использовалось именно такое количество элементов.

3. Результаты математического моделирования

Решим основную задачу внутренней баллистики (ОЗВБ) в термодинамической постановке для выстрела из 30 мм автоматической пушки с осколочно-фугасным снарядом. Кривые давлений и скорости снаряда представлены на рис. 12.

Согласно теории наибольших деформаций [1] вычислим допустимое давление с запасом прочности n по формуле

$$p_{\max} = \frac{3}{2n} \sigma_e \frac{(r_2/r_1)^2 - 1}{2 \cdot (r_2/r_1)^2 + 1}, \quad (15)$$

откуда можно определить зависимость допустимой толщины ствола $h_{\min}$ от давления p :

$$h_{\min} = r_1 \left(\sqrt{\frac{1,5\sigma_e + n \cdot p}{1,5\sigma_e - 2n \cdot p}} - 1 \right), \quad (16)$$

где σ_e – предел пропорциональности материала, для стали $\sigma_e = 784$ МПа.

Построим эпюру максимальных давлений и определим допустимую толщину в каждой точке ствола с запасом прочности 20% ($n = 1, 2$) (рис. 13).

При построении ребер жесткости 1-го и 2-го типов минимальная толщина ствола принималась равной минимально допустимой толщине (16) с запасом прочности $n = 1, 2$.

Проведем моделирование колебаний ствола при стрельбе очередью из 5 выстрелов с интервалом 15 мс между выстрелами при стрельбе под углом возвышения $\varphi = 5^\circ$. Сравнение начальных прогибов и колебаний дульного среза для различных типов поперечных сечений представлено на рис. 14.

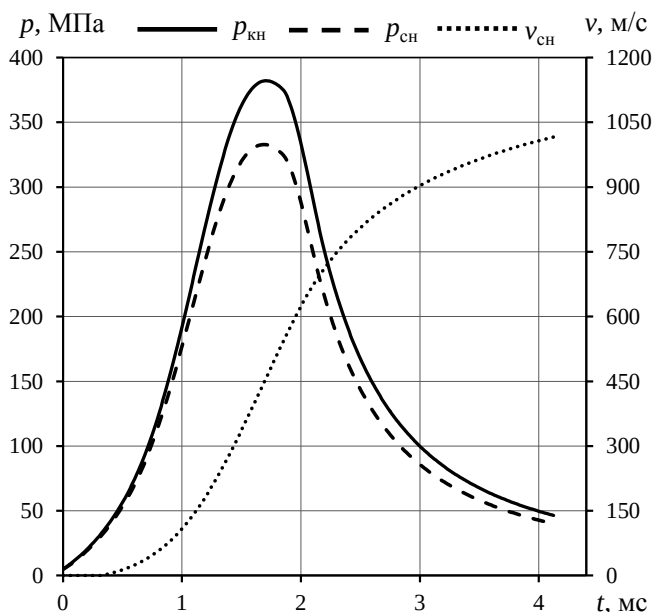


Рис. 12. Зависимости давления газа у дна канала, у дна снаряда и скорости снаряда от времени при решении ОЗВБ в термодинамической постановке

Fig. 12. Gas pressure at the face of the breech and at the bottom of the projectile and the projectile velocity as functions of time when solving the problem of internal ballistics in a thermodynamic formulation

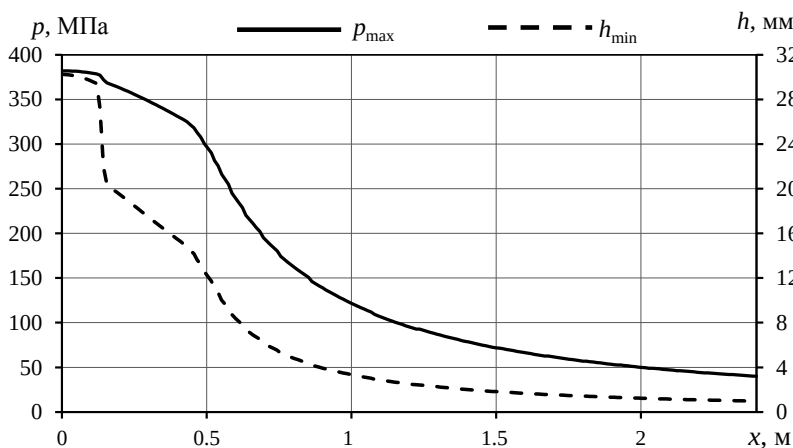


Рис. 13. Эпюра максимальных давлений и допустимая толщина ствола

Fig. 13. Diagram of maximum pressures and allowable barrel thickness

Из рис. 14, а видно, что стволы с ребрами жесткости испытывают меньший начальный прогиб, чем без ребер жесткости. Так, для ствола без ребер жесткости прогиб составил 1.07 мм, для 1-го типа ребер – 1.00 мм, для 2-го типа ребер – 1.03 мм. При этом существенно уменьшается амплитуда колебаний (рис. 14, b):

для ствола без ребер жесткости амплитуда составила 55 мкм, для 1-го типа ребер – 22 мкм, для 2-го типа ребер – 32 мкм. Полученный результат, очевидно, должен привести к меньшему разбросу углов вылета снаряда, а следовательно, и повышению точности при стрельбе очередями.

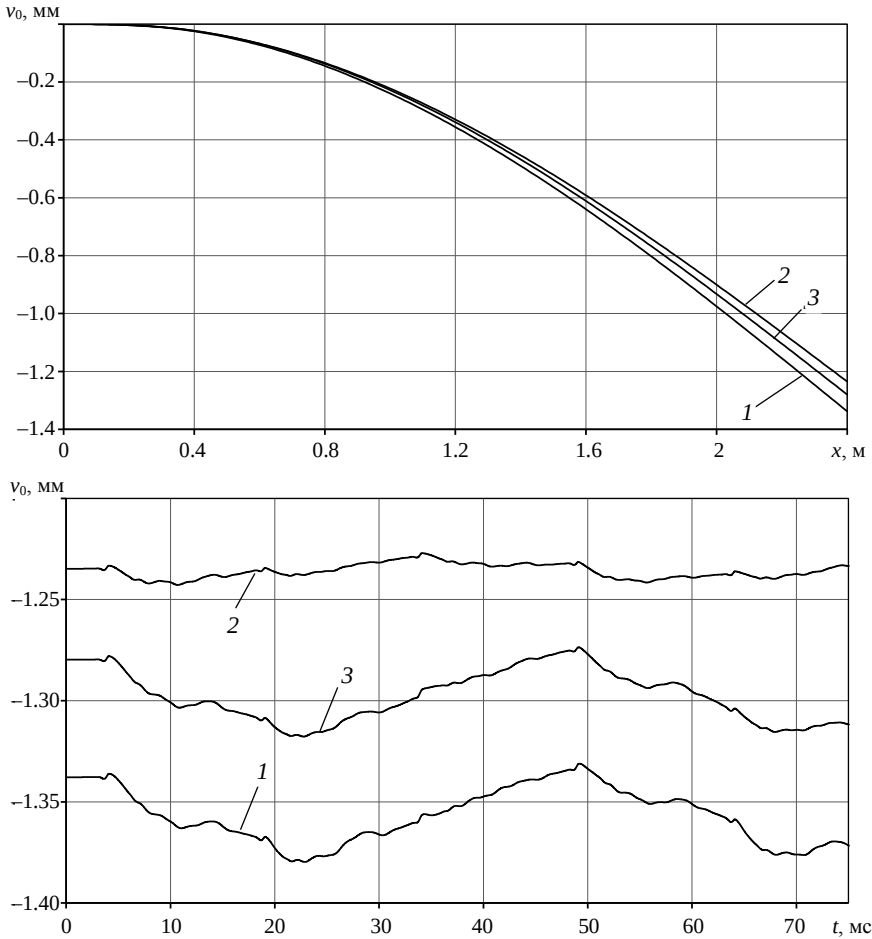


Рис. 14. Начальный прогиб (а) и колебания дульного среза (б) 30-мм автоматической пушки: 1 – без ребер жесткости, 2 – с ребрами жесткости 1-го типа, 3 – с ребрами жесткости 2-го типа

Fig. 14. (a) Initial deflection and (b) muzzle vibrations for a 30 mm automatic cannon: (1) without stiffeners, (2) type 1 stiffeners, and (3) type 2 stiffeners

Закключение

1. Разработана и реализована математическая модель продольно-поперечных колебаний ствола автоматической пушки при наличии ребер жесткости с учетом влияния давления пороховых газов и взаимодействия снаряда со стволом.

2. Определены амплитуды колебаний дульного среза для стволов различных поперечных сечений на основе решения задачи о продольно-поперечных колебаниях при стрельбе из 30 мм автоматической пушки.

3. Исследовано влияние ребер жесткости на величину начального прогиба и амплитуду колебаний. Расчеты показали, что прогиб ствола для ребер жесткости 1-го типа уменьшается на 8,1%, для 2-го типа – на 4,6% по сравнению с кольцевым сечением ствола пушки. При этом амплитуда колебаний дульного среза ствола для ребер жесткости 1-го типа уменьшается в 2 раза, для 2-го типа – почти в 1,5 раза.

Список источников

1. Орлов Б.В., Ларман Э.К., Маликов В.Г. Устройство и проектирование стволов артиллерийских орудий. М. : Машиностроение, 1976. 432 с.
2. Хоменко Ю.П., Ищенко А.Н., Касимов В.З. Математическое моделирование внутрибаллистических процессов в ствольных системах. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 1999. 256 с.
3. Антоненко Е.Д., Егоров В.В., Кудряшова И.А., Филенко А.В. Исследование решений для уменьшения изгиба артстволов // Калашниковские чтения : материалы VII Всерос. науч.-практ. online-конф., в рамках III Молодеж. форума студентов и курсантов оборонных специальностей вузов России «С именем Калашникова». Ижевск : Изд-во ИжГТУ им. М.Т. Калашникова, 2020. С. 71–75.
4. Mk44 Bushmaster II // Wikipedia contributors. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Mk44_Bushmaster_II (accessed: 13.02.2022)
5. Ахромеев С.Ф. Военный энциклопедический словарь. М. : Воениздат, 1986. 863 с.
6. Русяк И.Г., Суфиянов В.Г., Ключин Д.А. Исследование влияния упругих деформаций и колебаний ствола на точность стрельбы // Интеллектуальные системы в производстве. 2020. Т. 18, № 4. С. 98–108. doi: 10.22213/2410-9304-2020-4-98-108
7. Серебряков М.Е. Внутренняя баллистика ствольных систем и пороховых ракет. М. : Оборонгиз, 1962. 703 с.
8. Русяк И.Г., Липанов А.М., Ушаков В.М. Физические основы и газовая динамика горения порохов в артиллерийских системах. М. ; Ижевск : Ижевский ин-т компьютерных иссл., 2016. 456 с.
9. Работнов Ю.Н. Соппротивление материалов. М. : Физматгиз, 1963. 456 с.
10. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М. : Наука, 1971. 552 с.
11. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М. : Наука, 1989. 432 с.
12. Скворцов А.В., Мирза Н.С. Алгоритмы построения и анализа триангуляции. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2006. 168 с.

References

1. Orlov B.V., Larman E.K., Malikov V.G. (1976) *Ustroystvo i proektirovanie stvolov artilleriyskikh orudiy* [Arrangement and design of artillery barrels]. Moscow: Mashinostroenie.
2. Khomenko Yu.P., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z. (1999) *Matematicheskoe modelirovanie vnutriballisticheskikh protsessov v stvol'nykh sistemakh* [Mathematical modelling of interior ballistic processes in barrel systems]. Novosibirsk: SB RAS Publishing House.
3. Antonenko E.D., Egorov V.V., Kudryashova I.A., Filenko A.V. (2020) Issledovanie resheniy dlya umen'sheniya izgiba artstvolov [A study of approaches to reduce the bending of guns]. *Proceedings of the VII All-Russian Scientific and Practical Online Conference "Kalashnikovskie chteniya"*, Izhevsk. pp. 71–75.
4. Mk44 Bushmaster II. Wikipedia contributors. Access mode: https://en.wikipedia.org/wiki/Mk44_Bushmaster_II

5. Akhromeev S.F. (1986) *Voennyi entsiklopedicheskiy slovar'* [Military encyclopedic dictionary]. Moscow: Voenizdat.
6. Rusyak I.G., Sufiyarov V.G., Klyukin D.A. (2020) Issledovanie vliyaniya uprugikh deformatsiy i kolebaniy stvola na tochnost' strel'by [Study of elastic barrel deformations and vibrations impact on shooting accuracy]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve – Intelligent Systems in Manufacturing*. 18(4). pp. 98–108. doi: 10.22213/2410-9304-2020-4-98-108
7. Serebryakov M.E. (1962) *Vnutrennyaya ballistika stvol'nykh sistem i porokhovykh raket* [Internal ballistics of barrel systems and powder rockets]. Moscow: Oborongiz.
8. Rusyak I.G., Lipanov A.M., Ushakov V.M. (2016) *Fizicheskie osnovy i gazovaya dinamika goreniya porokhov v artilleriyskikh sistemakh* [Physical principles and gas dynamics of the gunpowder combustion in artillery systems]. Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science.
9. Rabotnov Yu.N. (1963) *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials]. Moscow: Fizmatgiz.
10. Samarskiy A.A. (1971) *Vvedenie v teoriyu raznostnykh skhem* [Introduction to the theory of difference schemes]. Moscow: Nauka.
11. Samarskiy A.A., Gulin A.V. (1989) *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow: Nauka.
12. Skvortsov A.V., Mirza N.S. (2006) *Algoritmy postroeniya i analiza triangulyatsiy*. [Algorithms for constructing and analyzing triangulations]. Tomsk: Izdatel'stvo Tomskogo universiteta.

Сведения об авторах:

Русяк Иван Григорьевич – доктор технических наук, профессор, действительный член Российской академии ракетных и артиллерийских наук, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета им. М.Т. Калашникова, Ижевск, Россия. E-mail: primat@istu.ru

Суфиянов Вадим Гарайханович – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета им. М.Т. Калашникова, Ижевск, Россия. E-mail: vsufiy@mail.ru

Клюкин Даниил Анатольевич – аспирант, ассистент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета им. М.Т. Калашникова, Ижевск, Россия. E-mail: anatoliikljukin@mail.ru

Information about the authors:

Rusyak Ivan G. (Doctor of Technical Sciences, Professor, Full Member of the Russian Academy of Missile and Artillery Sciences Russian Federation, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: primat@istu.ru

Sufiyarov Vadim G. (Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: vsufiy@mail.ru

Klyukin Daniil A. (Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: anatoliikljukin@mail.ru

Статья поступила в редакцию 27.04.2022; принята к публикации 01.12.2022

The article was submitted 27.04.2022; accepted for publication 01.12.2022

Original article

UDK 519.245

doi: 10.17223/19988621/80/13

Application of Monte Carlo methods for solving the regular and degenerate problem of two-phase filtration

Meyrambek G. Tastanov¹, Anar A. Utemissova², Fedor F. Mayer³

^{1, 2, 3} *Kostanay Regional University named after A. Baitursynov, Kostanay, Kazakhstan*

¹ *tastao@mail.ru*

² *anar_utemisova@mail.ru*

³ *maiyer@mail.ru*

Abstract. One of popular mathematical models of filtration is the classical elastic regime model describing the nonstationary equilibrium filtration. It is also called the Muskat–Leverett model. Solving filtration problems by Monte Carlo methods makes it possible to find the solution of the problem at an individual point of the domain and to estimate derivatives of the solution. This paper is devoted to applying algorithms of the Monte Carlo method to problems of filtration. The Monte Carlo algorithms of random walk by spheres and on boundaries are used for solving the stationary problem of filtration of two immiscible inhomogeneous incompressible fluids in a porous medium and for estimating the solution and the derivatives of the solution of this problem.

Keywords: Monte Carlo method, continuity equation, Dirichlet problem, Markov chains, estimate of the solution and its derivatives

For citation: Tastanov, M.G., Utemissova, A.A., Mayer, F.F. (2022) Application of Monte Carlo methods for solving the regular and degenerate problem of two-phase filtration. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 147–156. doi: 10.17223/19988621/80/13

Научная статья

Применение методов Монте-Карло для решения регулярной и вырожденной задачи двухфазной фильтрации

Мейрамбек Габдулиевич Тастанов¹, Анар Алтаевна Утемисова², Федор Федорович Майер³

^{1, 2, 3} *Костанайский региональный университет им. А. Байтурсынова, Костанай, Казахстан*

¹ *tastao@mail.ru*

² *anar_utemisova@mail.ru*

³ *maiyer@mail.ru*

Аннотация. Одной из популярных математических моделей фильтрации является классическая модель упругого режима, описывающая фильтрацию с нестационар-

ным равновесием. Ее также называют моделью Маскета-Левеверетта. Решение задач фильтрации методами Монте-Карло позволяет найти решение задачи в отдельной точке области и оценить производные решения. Данная статья посвящена применению алгоритмов Монте-Карло к задачам фильтрации. Алгоритмы случайного блуждания по сферам и по границам методом Монте-Карло используются для решения стационарной задачи фильтрации двух несмешивающихся неоднородных несжимаемых жидкостей в пористой среде и для оценки решения и производных от решения этой задачи.

Ключевые слова: метод Монте-Карло, уравнение неразрывности, задача Дирихле, цепи Маркова, оценка решения и его производных

Для цитирования: Тастанов М.Г., Утемисова А.А., Майер Ф.Ф. Применение методов Монте-Карло для решения регулярной и вырожденной задачи двухфазной фильтрации // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 80. С. 147–156. doi: 10.17223/19988621/80/13

Formulation of the problem

Let us consider the initially boundary problem for saturation and reduced pressure (s, p) in a given finite domain $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) with the boundary $\partial\Omega$, $Q = \Omega \times [0, T]$, $G = \partial\Omega \times [0, T]$:

$$m \frac{\partial s}{\partial t} = \operatorname{div}(K_0 a \nabla s + K_1 \nabla p + \vec{f}_0), (x, t) \in Q, \quad (1)$$

$$\operatorname{div}(K \nabla p + \vec{f}) = 0, (x, t) \in Q, \quad (2)$$

$$s(x, t) = s_0(x, t), (x, t) \in G, \quad (3)$$

$$p(x, t) = p_0(x, t), (x, t) \in G, \quad (4)$$

$$s(x, 0) = s^0(x, 0), x \in \Omega, \quad (5)$$

where the coefficients K_0 , a , K , $\vec{f}_0$, K , and $\vec{f}$, as well as the boundary and initial conditions, are given [1].

For the approximate solution of problem (1)–(5), two methods were proposed in [2]:

Method 1.

$$L_1 s_{i+1} \equiv -m \frac{\partial s_{i+1}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{K}(x, s_i) \nabla s_{i+1}) + \bar{B}(x, s_i) \nabla s_{i+1} + \quad (6)$$

$$+ D(x, s_i) \nabla p_{i+1} \nabla s_{i+1} = 0, (x, t) \in Q,$$

$$s_{i+1}(x, t) = s_0(x, t), (x, t) \in G, \quad (7)$$

$$s_{i+1}(x, 0) = s^0(x, 0), x \in \Omega, \quad (8)$$

$$L_2 p_{i+1} \equiv \operatorname{div}(K(x, s_i) \nabla p_{i+1} + \vec{f}(x, s_i)) = 0, (x, t) \in Q, \quad (9)$$

$$p_{i+1}(x, t) = p_0(x, t), (x, t) \in G \quad (10)$$

where $m \bar{K} = K_0 a$, $m \bar{B} = \bar{K} \nabla m + \vec{f}'_0 - b f'$, $m D = k b'$, $b(s) = K_1 K^{-1}$, $k = k_{01} + k_{02}$, k_{0i} are the phase permeabilities for a homogeneous isotropic soil ($i = 1, 2$).

Method 2.

After dividing the time interval $[0, T]$ into N parts ($\tau = T/N$) for each time layer $t \in [l\tau, (l+1)\tau]$, $l = 0, \dots, N-1$, the initially boundary value problem is solved for the functions $s_{l+1}(x, t)$, $p_{l+1}(x)$, $(s_l(x, l\tau) = s^l(x), s_0(x, 0) = s^0(x) = s^0(x, 0))$:

$$L_3 s_{l+1} \equiv m \frac{\partial s_{l+1}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{K}(x, s^l) \nabla s_{l+1}) + \bar{B}(x, s^l) \nabla s_{l+1} + \\ + D(x, s^l) \nabla p_{l+1} \nabla s_{l+1} = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad (11)$$

$$s_{l+1}(x, t) = s_0(x, t), \quad x \in G, \quad (12)$$

$$s_{l+1}(x, l\tau) = s^l, \quad x \in \Omega, \quad (13)$$

$$L_4 p_{l+1} \equiv \operatorname{div}(\bar{K}(x, s^l) \nabla p_{l+1} + \bar{f}(x, s^l)) = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad (14)$$

$$p_{l+1}(x) = p_0(x, l\tau), \quad x \in \partial\Omega, \quad (15)$$

Let us describe the general scheme of using Monte Carlo algorithms for methods 1 and 2 [3].

For method 1, the Dirichlet problem is first solved for the linear elliptic equation (9), (10) for $p_{i+1}(x, t)$ at a given saturation value s_i and fixed $t = t_0$, in particular, $t_0 = 0$. Then, equation (6) is split only with respect to the time variable, i.e., for the iteration index $i + 1$ the time interval $[t_0, T]$ is divided into M parts ($\tau = (T - t_0)/M$) and for each time layer $t_j = \tau j + t_0, j = 0, \dots, M - 1$, by use of the implicit difference scheme for (6), the Dirichlet problem for an elliptical equation for the variable $s_{i+1}^{j+1}(x)$ is obtained. The corresponding boundary and initial conditions (7) and (8) are written in the form

$$s_{i+1}^{j+1}(x) = s_0^{j+1}(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad j = 0, M - 1,$$

$$s_{i+1}^0(x, 0) = s^0(x, 0), \quad x \in \Omega.$$

Now, omitting the subscript, we obtain

$$-m \frac{s^{j+1} - s^j}{\tau} + \operatorname{div}(\bar{K}(x, s^j) \nabla s^{j+1}) + \bar{B}(x, s^j) \nabla s^{j+1} + \\ + D(x, s^j) \nabla p^{j+1} \cdot \nabla s^{j+1} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, M - 1, \quad (16)$$

$$s^{j+1}(x) = s_0^{j+1}(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad j = 0, 1, \dots, M - 1, \quad (17)$$

$$s^0(x, 0) = s^0(x), \quad x \in \Omega. \quad (18)$$

For method 2, similarly to method 1, the Dirichlet problem for the linear elliptical equation (14), (15) is first solved for $p_{l+1}(x)$ at a given saturation s^l ; in particular, at $l = 0$ from (13) we obtain $s_1(x, 0) = s^0(x), x \in \Omega$. Now, using the purely implicit scheme, approximating only with respect to the time variable, for the initially boundary problem (11)–(13) for the variable $s_{l+1}(x) = s^{j+1}(x), (l = j)$, we obtain the Dirichlet problem for the elliptical equation, i.e., problem (16)–(18).

Thus, to determine p and s , one has to solve the Dirichlet problem for the elliptical type [4].

Omitting indices of the time layer j , we obtain for the determination of pressure $\tilde{p}(x)$ ($\tilde{p}(x) \equiv p^{j+1}(x)$) the problem

$$\operatorname{div}(K(x, s)) \nabla \tilde{p} + \bar{f}(x, s) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \tilde{p}(x) = p_0(x), \quad x \in \partial\Omega$$

or

$$K(x, s) \Delta \tilde{p}(x) + \sum_{i=1}^n C_i(x, s) \cdot \frac{\partial \tilde{p}(x)}{\partial x_i} + g(x, s) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (19)$$

$$\tilde{p}(x) = p_0(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (20)$$

where $C_i(x, s) = \frac{\partial}{\partial x_i} K(x, s)$, $g(x, s) = \operatorname{div} \bar{f}(x, s)$; when determining the saturation

$\tilde{s}(x)$ ($\tilde{s}(x) = s^{j+1}(x)$), we obtain

$$\operatorname{div}(\bar{K}(x, s) \nabla \tilde{s}(x)) + (\bar{B}(x, s) + D(x, s) \nabla \tilde{p}(x)) \nabla \tilde{s}(x) - \tilde{m} \tilde{s}(x) = -\tilde{m} s(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\tilde{s}(x) = \tilde{s}_0(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad s(x) = s^0(x), \quad x \in \Omega$$

or

$$K(x, s) \Delta \tilde{s}(x) + \sum_{i=1}^n E_i(x, s) \frac{\partial s(x)}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n B_i(x, s) \frac{\partial \tilde{s}(x)}{\partial x_i} + \quad (21)$$

$$+ D(x, s) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{p}(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{s}(x)}{\partial x_i} - \tilde{m}(x) \tilde{s}(x) = -\tilde{m}(x) s(x), \quad x \in \Omega, \quad (22)$$

$$\tilde{s}(x) = \tilde{s}_0(x), \quad x \in \partial\Omega$$

where $s(x)$ is a known function by virtue of the initial data, $\tilde{m}(x) = \frac{m(x)}{\tau}$,

$\tilde{m}(x) = \frac{m(x)}{\tau}$, $E_i(a) = \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{K}(x, s)$, $B_i(x, s)$ are components of the vector $\bar{B}(x, s)$.

Let us construct a random process and algorithm for solving problem (19), (20). Consider the Dirichlet problem for a function ϕ continuous at the boundary $\partial\Omega$, a measurable function f , and an elliptical operator L

$$Lu(x) = -f(x), \quad x \in \Omega, \quad (23)$$

$$u(x) = \phi(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (24)$$

Let us construct random processes for numerical finding of the solution u . We suppose that the domain Ω and operator L are such that problem (23), (24) has a unique solution, continuous in $\bar{\Omega}$ and regular in Ω , for any sufficiently smooth f and ϕ [5].

It is known that the integral representation

$$u(x) = \int_{V(x)} k(x, y) u(y) dy + \int_{V(x)} \Lambda(y, x) f(y) dy, \quad (25)$$

where $k(x, y) = N_y \Lambda(y, x) \geq 0$, $\Lambda(y, x)$ – is a Levy function, N_y is an operator adjoint to the operator L , $V(x)$ is an ellipsoid,

$$V(x) = V_R(x) = \left\{ y : \sigma(y, x) = \left(A^{-1}(x)(y - x), (y - x) \right)^{\frac{1}{2}} \leq R(x) \right\}.$$

is valid for the solution $u(x)$ of the boundary problem (23), (24).

Here, $R(x)$ is a maximum radius ball with a center at the point x lying in Ω and A is the matrix of higher coefficients of the operator L ; the matrix is symmetric [6].

Representation (25) is called the mean value theorem. Note that if the coefficient $C \leq 0$ at $u(x)$ in equation (23) of the operator L , then the kernel $k(x, y)$ is substochastic, i.e., $\int_{V(x)} k(x, y) dy \leq 1$ [7]. Representation (22) allows one to construct unbiased esti-

mates for the solution of problem (23), (24). Any regular solution of problem (23), (24) satisfies equation (25) and boundary condition (24). In connection with this, we define operator K acting on functions from $C(\bar{\Omega})$ by the formula

$$(Ku)(x) = \begin{cases} \int_{V(x)} k(x, y)u(y)dy, & x \in \Omega, \\ u(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (26)$$

Consider the following problem: for $\phi \in C(\partial\Omega)$ and $F \in C(\Omega)$, find $u \in C(\overline{\Omega})$ such that

$$\begin{cases} u(x) = (Ku)(x) + F(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = \phi(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (27)$$

If $F(x) = \int_{V(x)} \Lambda(y, x) f(y) dy$, then the solution of problem (27) is a solution for (23), (24).

In [8], the uniqueness theorem was proved for the class of kernels $k(x, y) = N_y \Lambda(y, x)$ of the operator K acting by formula (26) and having the properties

- 1) $\text{mes}(V(x_1) \Delta V(x_2)) \rightarrow 0$ as $x_1 \rightarrow x_2$,
- 2) $\text{diam}(V(x)) \rightarrow 0$ for $x \in \partial\Omega$,
- 3) kernel $k(x, y)$ is substochastic and weakly polar, $k(x, y) = W(x, y) / |x - y|^{n-1}$, $n \geq 3$, where the function $W(x, y)$ can be continuously extended from $\Omega \times V(x)$ to $\Omega \times \overline{\Omega}$,

4) $\|K\|_{L^\infty} = 1$; then the integral operator acting in $L^\infty(\Omega)$ by the formula $(Ku)(x) = \int_{V(x)} k(x, y)u(y)dy$ and satisfying properties 1), 2), and 3) maps functions

bounded in Ω into continuous ones. It is easy to establish that for an operator satisfying properties 1), 2), 3) the following conditions hold:

a) for any $u \in C(\overline{\Omega})$,

$$\int_{V(x)} k(x, y)u(y)dy \rightarrow u(x_0) \text{ as } x \rightarrow x_0 \in \partial\Omega,$$

b) $\int_{V(x)} k(x, y)dy \rightarrow 1$ as $x \rightarrow x_0 \in \partial\Omega$.

From the above, it follows that the operator defined by formula (26) is bounded in $C(\overline{\Omega})$, i.e., problem (27) can be solved in $C(\overline{\Omega})$ and problem (27) has not more than one solution in $C(\overline{\Omega})$.

Construction of unbiased estimates of solution (27)

Let $V(x)$ and kernel $k(x, y)$ satisfy properties 1), 2), 3) and additional requirement b). By virtue of the last property, the spectral radius of the operator K is equal to unity; therefore, one cannot use the standard estimates for solving integral equations of the second kind by Monte Carlo methods. Here, the estimation scheme is based on the martingale theory. In this case, it is easy to analyze the variance of the estimates.

A terminating Markovian chain is determined with a transition density $P(x, y) = k(x, y)$, $y \in V(x)$. The probability of termination $q(x) = 1 - \int_{V(x)} k(x, y)dy$

tends to zero at $x \in \partial\Omega$; therefore, the trajectory of the chain can have an infinite length. For the set of trajectories $\tilde{B}$ having an infinite length, the following Lemma is valid:

Lemma. Let problem (27) be solvable for $F \equiv 0, \varphi \equiv 1$. If there exists a function $0 \leq H \in C(\Omega)$ such that problem (27) for $F = H, \varphi \equiv 0$ is solvable, then for a chain $\{x_m\}_{m=0}^\infty$ with transition density $P(x, y)$ almost all trajectories of infinite length approach the boundary $\partial\Omega$:

$$P_x \left\{ \text{dist}(x_n, \partial\Omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \mid \tilde{B} \right\} = 1, \text{ and } P_x \left\{ \tilde{B} \right\} > 0. \quad (28)$$

Proof. From Lemma 2.3.3 (see Lemma 2.3.3, [4]) it follows that for the solution $u(x)$ of problem (27) with $F \equiv H, \varphi \equiv 1$ the maximum principle is valid: $u(x)$ reaches the smallest value on the boundary of the domain. Hence, $u(x) \geq 0$. Let χ_i be the indicator of an event (the moment of chain termination $> i$), $\{A_n\}_{n=0}^\infty$ be a sequence of σ -algebras generated by the chain up to the time moment n .

Consider a sequence of random variables

$$\eta_n = \sum_{i=0}^{n-1} H(x_i) \chi_i + \chi_n u(x_n).$$

The sequence $\{\eta_n\}_{n=0}^\infty$ is a positive martingale with respect to $\{A_n\}_{n=0}^\infty$. Indeed,

$$\begin{aligned} M_x \left\{ \eta_n \mid A_{n-1} \right\} &= \sum_{i=0}^{n-1} H(x_i) \chi_i + M_{x_{n-1}} \left\{ \chi_n u(x_n) \right\} = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} H(x_i) \chi_i + x_{n-1} \cdot \int_{T(x_{n-1})} k(x_{n-1}, x_n) u(x_n) dx_n = \eta_{n-1}. \end{aligned}$$

Then, by the martingale convergence theorem [9], there exists a random value η_∞ such that $M_x \eta_\infty < +\infty$ and $\eta_n \rightarrow \eta_\infty$ as $n \rightarrow \infty$ with probability 1. Consequently, almost everywhere on the set $\tilde{B}$ $H(x_n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Let

$$\partial\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega' : \text{dist}(x, \partial\Omega) < \varepsilon\}, \Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \partial\Omega_\varepsilon.$$

It is evident that $H(x) \geq \text{const} = c(\varepsilon) > 0$ on Ω_ε . If $\tilde{B}_1$ is a subset of trajectories from $\tilde{B}$ such that $H(x_n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$, then $P_n(\tilde{B} \setminus \tilde{B}_1) = 0$. Hence, if $P_x(\tilde{B}_1) > 0$, then

$$P_x \left(\text{dist}(x_n, \partial\Omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \mid \tilde{B} \right) = P_x \left(\text{dist}(x_n, \partial\Omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \mid \tilde{B}_1 \right).$$

Let $X = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \tilde{B}_1$, but $\text{dist}(x_n, \partial\Omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{not} 0$. Then there also exists ε_0 and an increasing sequence $\{n_k\}_{k=0}^\infty$ such that $\text{dist}(x_{n_k}, \partial\Omega) > \varepsilon_0$. Hence, $H(x_{n_k}) > c(\varepsilon) > 0$, so $X \notin \tilde{B}_1$. It follows that $\{X : \text{dist}(x_n, \partial\Omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\} \supset \tilde{B}_1$. Therefore, if $P_x(\tilde{B}_1) > 0$, then $P_x \left\{ \text{dist}(x_n, \partial\Omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \mid \tilde{B}_1 \right\} = 1$.

Now let us prove that $P_x(\tilde{B}_1) > 0$. By condition of the lemma, there exists a solution to problem (27) with $F \equiv H$ and $\varphi \equiv 1$. Let us denote it as $v(x)$. It can be shown that $\inf v(x) > 0$, $x \in \Omega'$. A martingale $\eta_n = \chi_n v(x_n)$ is uniformly integrable; therefore, by the martingale convergence theorem, $v(x) = M_x \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0$, if $P_x(\tilde{B}) \equiv P_x(\tilde{B}_1) = 0$. And this contradiction proves the inequality $P_x(\tilde{B}_1) > 0$. The lemma is proved.

If we take $H(x) = \int_{V(x)} \Lambda(x, y) dy$ as $H(x)$, then we can construct estimates for the solution $u(x)$ of problem (27) on trajectories of the chain $\{x_m\}_{m=0}^\infty$ with a transition density

$$P(x, y) = \begin{cases} k(x, y), & y \in V(x), \\ 0, & y \notin V(x). \end{cases}$$

The sequence of estimates $\{\eta_m\}_{m=0}^\infty$ is determined by the equality $\eta_m = \sum_{i=0}^{m-1} F(x_i) \chi_i + \chi_m u(x_m)$, where χ_i is the event indicator {the moment of the chain termination $> i$ }. Obviously, $M_x \eta_{m_{x_0}} = u(x)$, i.e. estimates η_m are unbiased. The sequence $\{\eta_m\}_{m=0}^\infty$ forms a martingale with respect to $\{A_m\}_{m=0}^\infty$ – a sequence of σ -algebras. A_m is generated by the chain up to the time instant m . The last statement is proved in the same way as the Lemma. From this we have

Corollary. For a Markovian chain $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ determined by the transition density $P(x, y) = k(x, y) = N_y \Lambda(y, x)$, (28) is fulfilled.

Let τ_1 be the moment of chain termination, τ_2 be the moment when the chain enters the δ -neighborhood of the boundary $\tau_\delta = \min(\tau_1, \tau_2)$. A sequence $\{\xi_m\}_{m=0}^\infty$ of unbiased estimates for the solution $u(x)$ of problem (23), (24) is called admissible if there exists a sequence of σ -algebras $\{Y_m\}_{m=0}^\infty$ such that $A_m \subset Y_m$ and $A_m \subset Y_{m+1}$, and ξ_m has the form $\xi_m = \xi_m + \chi_m u(x_m)$, where $\xi_m \in Y_m$ are measurable. For an admissible sequence of estimates $\{\xi_m\}_{m=0}^\infty$, we define a random variable ξ_δ by the equality

$$\xi_\sigma = \xi_{\tau_\delta} + \phi(x_{\tau_\delta}), \quad (29)$$

where x_{τ_δ} denoted a border point closest to x_{τ_δ} . The definition is correct since $\tau_\delta < +\infty$ by virtue of the above Lemma.

We finally obtain

Theorem. If an admissible sequence of estimates $\{\xi_m\}_{m=0}^\infty$ forms a square integrable martingale with respect to a family of σ -algebras, $\{Y_m\}_{m=0}^\infty$, then the random variable ξ_δ is a $\varepsilon(\delta)$ -biased estimate for $u(x)$, its variance is a bounded function of the parameter δ ($\varepsilon(\delta)$ is the modulus of continuity of the function).

Proof. Let χ denote the indicator of the event $\{\tau_1 = \tau_2\}$. By the theorem about the free choice transformation [6], $M_x \xi_{\tau_\delta} = u(x)$, therefore, $|u(x) - M_x \xi_{\tau_\delta}| = |M_x \xi_{\tau_\delta} - M_x \xi_{\tau_\delta}| \leq M_x \chi |u(x_{\tau_\delta}) - \varphi(x_{\tau_\delta})| \leq \varepsilon(\delta)$, i.e. $\varepsilon(\delta)$ and the bias of the estimate is proven. Now let us prove that the variance is bounded. We introduce an abbreviation ξ for ξ_{τ_δ} , then we obtain

$$\begin{aligned} D\xi_{\tau_\delta} &= M_x (\xi_{\tau_\delta} - M_x \xi_{\tau_\delta})^2 = M_x (\xi_{\tau_\delta} - \xi + \xi - u(x) + u(x) - M_x \xi_{\tau_\delta})^2 \leq \\ &\leq 4 \left[M_x (\xi_{\tau_\delta} - \xi)^2 + M_x (\xi - u(x))^2 + (u(x) - M_x \xi_{\tau_\delta})^2 \right] \leq 8\varepsilon^2(\delta) + 4D\xi \end{aligned}$$

By virtue of square integrability of the martingale $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$, $\sup_n M_x \xi_n^2 < +\infty$, therefore, the $D\xi_{\tau_\delta} < +\infty$. The theorem is proved.

Consider now the sequence of estimates $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$.

Lemma. If problem (27) is solvable when $F(x)$ is replaced by $|F(x)|$ and $F^2(x)$, $\phi \equiv 0$, then the martingale $\{\eta_n\}_{n=0}^\infty$ is square integrable.

Proof. Let us put $s_i = \chi_i F(x_i)$; and let $v_{F,\phi}$ denote a solution of problem (27). Under conditions of the Lemma, $F(x) \rightarrow 0$ as $x \rightarrow x_0 \in \partial\Omega$; therefore, $F(x)$ is bounded in Ω . Let $F = \|F\| = \max_{x \in \Omega} |F(x)|$; then, for the function $H(x) = |F(x)|/F$, equation (27) is solvable at $\phi = 0$ разрешимо. Its solution $v_{G,0}$ can be represented as a series $v_{G,0} = \sum_{m=0}^\infty K^m G$. Since $0 \leq G \leq 1$, the series $\sum_{m=0}^\infty K^m G^2$ also converges and yields a solution $v_{G^2,0}$ of problem (27). Therefore, there exists $v_{F^2,0}$. Then,

$$\begin{aligned} \eta_n^2 &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} s_i + \chi_n u(x_n) \right)^2 \leq 2 \left(\sum_{i=0}^{n-1} s_i \right)^2 + 2\chi_n u^2(x_n), \quad M_x \chi_n u^2(x_n) \leq \|u\|_{C(\Omega)}^2, \\ M_x \left(\sum_{i=0}^{n-1} s_i \right)^2 &\leq M_x \sum_{i=0}^{n-1} s_i^2 + 2M_x \sum_{i=0}^{n-1} s_i \sum_{k=i+1}^{n-1} s_k = I_1 + 2I_2, \quad I_1 \leq v_{F^2,0}. \end{aligned}$$

To estimate the second summand, we use the Markov property:

$$I_2 \leq \sum_{i=0}^{n-2} M_x \left(|s_i| M_x \left\{ \sum_{k=i+1}^{n-1} |s_k| \chi_k \right\} \right) \leq M_x \sum_{i=0}^{n-2} |s_i| v_{|F|,0}(x_i).$$

Therefore, $I_2 \leq \|v_{|F|,0}\|_{C(\Omega)}^2$. Thus, $\sup_n M_x \eta_n^2 \leq 2\|u\|^2 + v_{F^2,0} + \|v_{|F|,0}\|^2$. Lemma is proved.

Now, it remains to determine for problem (23), (24) a sequence of unbiased estimates which are obtained from η_m according to the estimate $F(x_i)$ by a single random node with the density $\Lambda(y, x_i)/h(x_i)$, $h(x) = \int_{V(x)} \Lambda(y, x) dy$. In this case, the sequence

of unbiased estimates $\xi_m + \sum_{i=0}^{m-1} h(x_i) f(y_i) \chi_i + \chi_m u(x_m)$ forms a martingale with respect

to $\{Y_m\}_{m=0}^\infty$. Here, $y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, \dots$ are independent random vectors with the densities $\Lambda(y, x_i) / h(x_i)$, Y_m is a σ -algebra generated by $x_0, x_1, \dots, x_m, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}$. The Lemma below follows from the previous one.

Lemma. The martingale $\{\xi_m\}_{m=0}^\infty$ is square integrable.

Finally, applying the theorem to the martingale $\{\xi_m\}_{m=0}^\infty$, we obtain

Theorem. Let $\varepsilon(\delta)$ be the modulus of continuity of the solution $u(x)$ of problem (23), (24); then, the estimate ξ_δ , determined according to $\{\xi_m\}_{m=0}^\infty$ by formula (29), is $\varepsilon(\delta)$ -biased for $u(x)$. $D\xi_\delta$ is a bounded function of the parameter δ .

Conclusions

To implement the algorithm in practice, it is necessary to learn to model the chain $\{x_m\}_{m=0}^\infty$ on trajectories of which estimates of the solution are constructed, and algorithms of simulation of the Markovian chain $\Lambda(y, x) / h(x)$ are based on the von Neumann selection method. Modeling distributions requires special investigations, especially in cases where it is necessary to model the distributions regularly and repeatedly. Such investigations are usually carried out for each specific equation if it is solved several times.

References

1. Antontsev S.N., Kazhikhov A.V., Monakhov V.N. (1983) *Kraevye zadachi mekhaniki neodnorodnykh zhidkostey* [Boundary value problems of mechanics of inhomogeneous fluids]. Novosibirsk: Nauka.
2. Tastanov M.G., Shakenov K.K. (1997) *Ob odnoy statsionarnoy zadache dvukhfaznoy fil'tratsii i primeneniye algoritmov metodov Monte-Karlo* [On one stationary problem of two-phase filtration and application of algorithms of Monte Carlo methods. Mathematical modeling of scientific, technological, and environmental problems in the oil and gas industry]. Almaty: Al-Farabi KazNU.
3. Ermakov S.M. (1975) *Metod Monte-Karlo i smezhnye voprosy* [Monte Carlo method and related topics]. Moscow: Nauka.
4. Elepov B.S., Kronberg A.A., Mikhailov G.A., Sabelfeld K.K. (1980) *Reshenie kraevykh zadach metodom Monte-Karlo* [Solution to boundary value problems by the Monte Carlo method]. Novosibirsk: Nauka.
5. Ermakov S.M., Mikhaylov G.A. (2019) *Statisticheskoe modelirovanie* [Statistical modeling]. Moscow: Nauka.
6. Ermakov S.M., Nekrutkin V.V., Sipin A.A. (2014) *Sluchaynye protsessy dlya resheniya klassicheskikh uravneniy matematicheskoy fiziki* [Random processes for solving classical equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka.
7. Sobol' I.M. (1973) *Chislennyye metody Monte-Karlo* [Monte Carlo numerical methods]. Moscow: Nauka.
8. Mikhaylov G.A. (1987) *Optimizatsiya vesovykh metodov Monte-Karlo* [Optimization of weighted Monte Carlo methods]. Moscow: Nauka.
9. Meyer P.A. (1976) *Veroyatnost' i potentsialy* [Probability and potentials]. Moscow: Mir.

Information about the authors:

Tastanov Meyrambek G. (Professor, Candidate of Physics and Mathematics, Kostanay Regional University named after A. Baitursynov, Kostanay, Kazakhstan). E-mail: tastao@mail.ru

Utemissova Anar A. (Associate Professor, Candidate of Pedagogical Sciences, Kostanay Regional University named after A. Baitursynov, Kostanay, Kazakhstan). E-mail: anar_utemisova@mail.ru

Mayer Fedor F. (Professor, Candidate of Physics and Mathematics, Kostanay Regional University named after A. Baitursynov, Kostanay, Kazakhstan). E-mail: maiyer@mail.ru

Сведения об авторах:

Тастанов Мейрамбек Габдулневич – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и физики Костанайского регионального университета им. А. Байтурсынова, Костанай, Казахстан. E-mail: tastao@mail.ru

Утемисова Анар Алтаевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и физики Костанайского регионального университета им. А. Байтурсынова, Костанай, Казахстан. E-mail: anar_utemisova@mail.ru

Майер Федор Федорович – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и физики Костанайского регионального университета им. А. Байтурсынова, Костанай, Казахстан. E-mail: maiyer@mail.ru

The article was submitted 24.11.2021; accepted for publication 01.12.2022

Статья поступила в редакцию 24.11.2021; принята к публикации 01.12.2022

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

2022. № 80

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано в печать 21.12.2022 г. Формат 70×100¹/₁₆.
Печ. л. 9,8; усл. печ. л. 12,8. Цена свободная.
Тираж 250 экз. Заказ № 5295.

Дата выхода в свет 26.12.2022 г.

Адрес издателя и редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Томский государственный университет

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru