

ФИЗИКА ПОЛУПРОВОДНИКОВ И ДИЭЛЕКТРИКОВ

УДК 621.387:62-758

DOI: 10.17223/00213411/65/12/15

**ВЛИЯНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ НА СВОЙСТВА ЭКСИТОНА
В ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ КВАНТОВОЙ ТОЧКЕ**

С.Ш. Рехвиашвили

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, г. Нальчик, Россия

Рассматривается экситон Ванье – Мотта в полупроводниковой квантовой точке. Исследуется влияние поляризации среды и эффекта экранирования кулоновского взаимодействия между электроном и дыркой на свойства экситона методом прямого численного решения уравнения Шредингера. Поляризация и эффект экранирования оказывают наибольшее влияние на экситонные уровни, если радиус квантовой точки соизмерим с боровским радиусом экситона и поляронными радиусами электрона и дырки (режим сильного конфайнмента). При уменьшении радиуса квантовой точки происходит изменение знака внутриэкситонного вклада в энергию, что объясняется увеличением кинетической энергии электрона и дырки и потерей их связанного состояния.

Ключевые слова: *экситон Ванье – Мотта, полупроводниковая квантовая точка, поляризация, экранирование, конфайнмент.*

Введение

Полупроводниковые квантовые точки (КТ) чрезвычайно востребованы в квантовой оптике и твердотельной электронике. Имеются реальные перспективы их широкого применения в качестве источников одиночных фотонов и функциональных структур микролазеров [1]. Хорошо известно, что оптические характеристики полупроводниковых КТ определяются, главным образом, экситонами Ванье – Мотта [2, 3]. Свойства этих экситонов существенно отличаются от свойств водородоподобных экситонов в объемных полупроводниках, что обусловлено пространственным ограничением или называемым конфайнментом электронов и дырок.

Практическое внедрение структур с КТ сдерживается рядом трудностей. Основной негативный фактор, с которым приходится иметь дело – это быстрый распад экситонов при повышении температуры. В связи с этим в различных технологиях (эпитаксиальные и коллоидные структуры, графен и др.) наиболее актуальным остается поиск путей увеличения энергии экситонов и времени их жизни. В последнее время много внимания уделяется исследованиям так называемых «темных» экситонов, которые не испускают фотоны и обладают большими временами жизни и когерентности [4, 5]. Установлено, что первостепенную роль в образовании в КТ как «ярких», так и «темных» экситонов играют кулоновские эффекты. Для исследования физических свойств КТ часто применяются туннельная и емкостная спектроскопии. С помощью этих методов наблюдают за особенностями размерного квантования и кулоновского взаимодействия электронов и дырок в функциональных полупроводниковых структурах. Температурная зависимость измеряемых спектров может быть обусловлена не только изменением плотностей состояний электронов и дырок в соответствующих зонах, но и эффектами поляризации и экранирования кулоновского взаимодействия [6–8].

Различным вопросам теории экситонов в КТ посвящены, в частности, работы [9–21]. Большинство расчетов осуществляется в приближении эффективной массы и в рамках теории возмущений. В теории получается учесть свойства как прямозонных, так и непрямозонных полупроводниковых материалов. В качестве моделей КТ используются сферически-симметричные потенциальные ямы с конечной или бесконечной высотой. Внутри ямы рассматриваются электрон и дырка, между которыми действует кулоновская сила притяжения. В ряде случаев принимаются во внимание особенности структуры КТ и учитываются, например, поправки на поляризационное взаимодействие экситона с поверхностью или окружающей сплошной средой, а также силы электростатического изображения. Конфайнмент вызывает смещение уровней энергии и усиливает

роль кулоновского притяжения между электронами и дырками. Большие значения энергии связи экситонов в достаточно массивных КТ означают, что наблюдаемая люминесценция КТ имеет экситонную природу вплоть до комнатной температуры. Время жизни экситонов сильно зависит от размеров КТ и может изменяться на несколько порядков. В структурах с КТ обнаруживается квантово-размерный эффект Штарка, который заключается в смещении спектров излучения или поглощения при приложении внешнего электрического поля. Поправка к спектру электронов и дырок в данном случае вычисляется во втором порядке теории возмущений.

Движение экситона создает флуктуации плотности заряда и поляризацию кристаллической решетки, которые, в свою очередь, изменяют потенциальную энергию взаимодействия электрона и дырки [22]. В результате возникает эффект экранирования кулоновского взаимодействия. Если борковский радиус экситона намного превышает межатомное расстояние, то потенциал взаимодействия электрона и дырки можно определить с помощью формул [23, 24]:

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon(r)} \frac{e^2}{r}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{\epsilon(r)} = \frac{1}{\epsilon_2} + \left(\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) \left[1 - \frac{\exp(-r/r_e) + \exp(-r/r_h)}{2} \right], \quad (2)$$

$$\frac{1}{\epsilon(r)} = \frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{m_h - m_e} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) [m_h \exp(-r/r_h) - m_e \exp(-r/r_e)], \quad (3)$$

$$r_{e,h} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m_{e,h}\omega_{LO}}},$$

где e – заряд электрона; ϵ_0 – электрическая постоянная; r – расстояние между электроном и дыркой; $r_{e,h}$ и $m_{e,h}$ – поляронные радиусы и эффективные массы электрона и дырки; ω_{LO} – частота продольных оптических фононов; ϵ_1 и ϵ_2 – относительные диэлектрические проницаемости при $r \rightarrow \infty$ и $r \rightarrow 0$ соответственно. В качестве ϵ_1 и ϵ_2 принимаются низкочастотная и высокочастотная диэлектрические проницаемости материала.

Потенциал электростатического взаимодействия электрона и дырки (1) учитывает изменение поляризации пространства между ними. Функции экранирования (2), (3) получены в различных приближениях, но описывают один и тот же эффект [23, 24]. Изменение поляризации полупроводника при сближении электрона и дырки происходит вследствие запаздывания отклика от валентных электронов. При малых r частота вращения электрона вокруг дырки высока и намного превышает E_g/\hbar , где E_g – ширина запрещенной зоны, поэтому потенциал (1) в данном случае имеет кулоновскую форму. По мере возрастания r движение электрона замедляется и запаздывание постепенно исчезает. Таким образом происходит непрерывное изменение относительной диэлектрической проницаемости от ϵ_2 до ϵ_1 . Для большинства полупроводников выполняется очевидное неравенство $\epsilon_1 > \epsilon_2$ [7, 22].

Графики функций $\epsilon(r)$ для полупроводника CdSe, имеющего структуру вюрцита, представлены на рис. 1. Из этих графиков видно, что для КТ с радиусом менее 10 нм изменением поляризации пренебрегать уже нельзя. В [9, 14–16] различными приближенными методами исследовались поляронные эффекты для экситона, находящегося в полупроводниковой КТ в основном состоянии. Из полученных результатов в общем следует, что для очень малых КТ поляронные эффекты не играют заметную роль, с увеличением размеров КТ эти эффекты сначала усиливаются, а затем стабилизируются. Исходя из формул (1) – (3), это естественным образом объясняется изменениями диэлектрической проницаемости и энергии взаимодействия между электроном и дыркой.

Анализ многочисленной литературы показывает, что влияние локальной поляризации среды на волновые функции и уровни энергии экситона в полупроводниковой КТ путем прямого реше-

ния уравнения Шредингера вне рамок теории возмущений и метода минимизации гамильтониана с помощью пробных волновых функций не изучалось. Решению этой задачи посвящена настоящая статья. Предлагается метод решения задачи, в рамках которого возможно рассматривать экситон в произвольном квантовом состоянии.

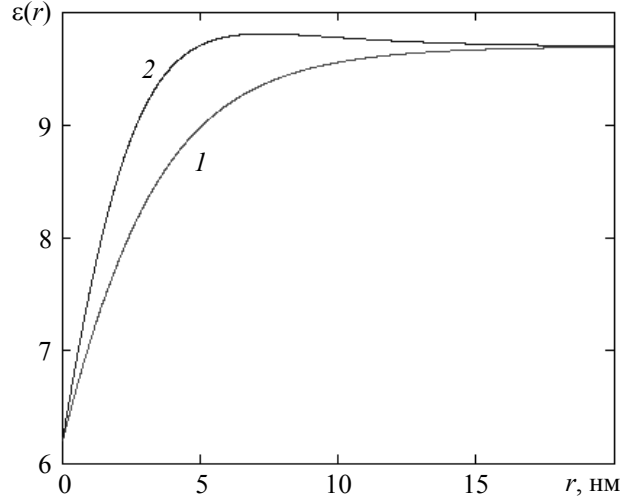


Рис. 1. Зависимость диэлектрической функции от расстояния между электроном и дыркой: кр. 1 – формула (2); кр. 2 – формула (3)

Теоретическая модель

Будем рассматривать полупроводниковую КТ сферической формы радиусом R , внутри которой имеется одиночный экситон Ванье – Мотта. Считается, что боровский радиус экситона и радиус КТ могут иметь произвольные значения. Предлагается использовать модельный гамильтониан вида

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_e^2 - \frac{\hbar^2}{2m_h} \nabla_h^2 + \varphi(\mathbf{R}) + V(\mathbf{r}), \quad (4)$$

$$\varphi(\mathbf{R}) = \begin{cases} 0, & |\mathbf{R}| < R, \\ \infty, & |\mathbf{R}| > R, \end{cases}$$

$$\mathbf{R} = \frac{m_e \mathbf{R}_e + m_h \mathbf{R}_h}{m_e + m_h}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{R}_e - \mathbf{R}_h,$$

где \mathbf{R}_e и \mathbf{R}_h – векторы, определяющие положения электрона и дырки; $\varphi(\mathbf{R})$ – ограничивающий потенциал для центра масс экситона; $V(\mathbf{r})$ – потенциальная энергия взаимодействия электрона и дырки, которая задается формулами (1) – (3). Зонная структура материала КТ, определяемая законами дисперсии для электрона и дырки, в гамильтониане (4) учитывается посредством эффективных масс $m_{e,h}$. Уравнение Шредингера для экситона с учетом (4) имеет вид

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_e^2 + \frac{\hbar^2}{2m_h} \nabla_h^2 - \varphi(\mathbf{R}) - V(\mathbf{r}) + E \right] \psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = 0, \quad (5)$$

где E – собственные значения энергии экситона. Способ решения квантово-механической задачи заключается в следующем. Разделение движения центра масс экситона и относительного движения электрона и дырки возможно, если центральный потенциал $V(\mathbf{r})$ зависит только от положения квазичастиц, т.е. является инвариантным относительно их перестановки [25]. В нашем случае это условие всегда выполняется. Ограничивающий потенциал $\varphi(\mathbf{R})$ зависит лишь от положения центра масс экситона, что также не препятствует разделению движения при любых соотношениях

между боровским радиусом экситона и радиусом КТ. Конфайнмент задается соответствующими граничными условиями для двух уравнений после разделения переменных в (5), что и обеспечивает размерное квантование. В этих рамках предполагается, что центр масс экситона не выходит за некоторую границу, а расстояние между электроном и дыркой не превышает диаметр КТ. Это, по существу, означает, что экситон рассматривается внутри сферы с некоторым эффективным радиусом, который всегда меньше геометрического радиуса КТ. Погрешность метода, очевидно, возрастает с уменьшением размера КТ, однако этот недостаток компенсируется имеющейся возможностью изучить в общих чертах влияние поляризации среды на свойства экситона.

Из (5) получаются два уравнения

$$\left[\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\mathbf{R}}^2 - \varphi(\mathbf{R}) + E_R \right] \Phi(\mathbf{R}) = 0, \quad (6)$$

$$\left[\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) + E_r \right] \phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (7)$$

где $M = m_e + m_h$ – масса экситона; $\mu = m_e m_h / M$ – приведенная масса экситона. Искомые волновая функция и собственные значения энергии есть

$$\psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{R})\phi(\mathbf{r}), \quad E = E_R + E_r. \quad (8)$$

Рассмотрим поочередно уравнения (6), (7). В обоих случаях используется сферическая система координат и одинаковые (для простоты записи) обозначения переменных ρ, θ, φ . Общее решение уравнения (6) имеет вид

$$\Phi_{n,l,m}(\rho, \theta, \varphi) = \sqrt{\frac{k_{n,l}}{\rho}} \left[A J_{l+1/2}(k_{n,l}\rho) + B J_{-(l+1/2)}(k_{n,l}\rho) \right] Y_{l,m}(\theta, \varphi), \quad (9)$$

$$E_R = \frac{\hbar^2 k_{n,l}^2}{2M},$$

где $J_{\pm(l+1/2)}(k_{n,l}\rho)$ – функции Бесселя; $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ – сферические функции; A и B – константы. Чтобы выполнялось условие нормировки, из решения требуется исключить часть, имеющую сингулярность при $\rho = 0$. Поэтому в (9) должно быть $B = 0$. Для непроницаемой сферы радиусом R волновая функция (9) подчиняется граничному условию $\Phi(R, \theta, \varphi) = 0$. Отсюда возникает трансцендентное уравнение

$$J_{l+1/2}(k_{n,l}R) = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) имеет бесконечное число нулей. В качестве аппроксимации его решения можно применить формулу

$$k_{n,l}R \approx \pi \left(n + \frac{l}{2} \right) \quad (n=1, 2, 3, \dots, \quad l=0, 1, 2, \dots). \quad (11)$$

Формула (11) хорошо работает, если выполняется условие $n \geq l+1$ (см. таблицу). При $l=0$ формула (11) является точной. Для собственных значений энергии в итоге получаем

$$E_R \approx \frac{\pi^2 \hbar^2}{2M R^2} \left(n + \frac{l}{2} \right)^2, \quad n \geq l+1. \quad (12)$$

Перейдем теперь к уравнению (7). Общее решение этого уравнения с центральным потенциалом имеет вид

$$\phi_{n',l',m'}(\rho, \theta, \varphi) = \chi_{n',l'}(\rho) Y_{l',m'}(\theta, \varphi), \quad (13)$$

где функция $\chi_{n',l'}(\rho)$ удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E_r - V(\rho)) - \frac{l'(l'+1)}{\rho^2} \right] \chi_{n',l'}(\rho) = 0. \quad (14)$$

Собственные значения $k_{n,l}$ в решении (9)

n	l	Численное решение уравнения (10)	Формула (11)	Погрешность формулы (11), %
1	0	3.142	3.142	0
1	1	4.493	4.712	4.9
1	2	5.763	6.283	9.0
1	3	6.988	7.854	12.4
2	0	6.283	6.283	0
2	1	7.725	7.854	1.7
2	2	9.095	9.425	3.6
2	3	10.417	10.996	5.6
3	0	9.425	9.425	0
3	1	10.904	10.996	0.8
3	2	12.323	12.566	2.0
3	3	13.698	14.137	3.2

Далее, чтобы исследовать эффект поляризации, введем безразмерную радиальную переменную $\rho \rightarrow \rho/a_0$, где $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(\mu e^2)$. Считая, что взаимодействие между электроном и дыркой описывается формулами (1) – (3), приходим к уравнению

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{2}{\rho\epsilon(\rho)} - \frac{l'(l'+1)}{\rho^2} + \kappa_{n',l'}^2 \right] \chi_{n',l'}(\rho) = 0, \quad (15)$$

$$E_r = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\hbar\kappa_{n',l'}}{a_0} \right)^2 \quad (n' = 0, 1, 2, \dots, l' = 0, 1, 2, \dots), \quad (16)$$

где функция $\epsilon(\rho)$ определяется формулами (2), (3) и содержит уже безразмерные (отнесенные к a_0) поляронные радиусы $r_{e,h}$. Для уравнения (15) воспользуемся граничными условиями Дирихле

$$\chi_{n',l'}(0) = \chi_{n',l'}(\xi R) = 0, \quad (17)$$

где R – безразмерный радиус КТ; ξ – числовой параметр. Наиболее ожидаемые значения параметра ξ находятся в интервале между 1 и 2. Например, для неподвижной дырки в центре КТ и легкого электрона $\xi = 1$. Если эффективные массы электрона и дырки соизмеримы, то не для очень малой КТ можно принять $\xi = 2$. В (17) первое условие в нуле является естественным, поскольку при $\rho \rightarrow 0$ потенциальная энергия имеет кулоновскую асимптотику, $V(\rho) \rightarrow -\infty$. Второе условие отражает невозможность отдаления электрона от дырки вследствие конфайнмента на расстояние больше ξR . Средний радиус экситона должен зависеть от квантового состояния и радиуса КТ:

$$\langle a_{n',l'} \rangle = \frac{\int_0^{\xi R} |\chi_{n',l'}(\rho)|^2 \rho d\rho}{\int_0^{\xi R} |\chi_{n',l'}(\rho)|^2 d\rho}. \quad (18)$$

Совместное решение уравнений (15) – (18) с учетом формул (1) – (3) позволяет исследовать влияние поляризации на свойства экситона в КТ.

Существование нетривиальных решений краевой задачи (15), (17) следует из общих свойств уравнения Шредингера [26]. В предельных случаях при $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$ имеем водородоподобные экситоны, для которых решение уравнения (14) выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию или полиномы Лагерра. Рассматриваемая здесь модель и известная модель сфери-

ческой потенциальной ямы с бесконечно высокими потенциальными стенками для электрона и дырки (см., в частности, [2]) должны, очевидно, давать сопоставимые результаты, если выполняется условие $\xi R / \langle a_{n',l'} \rangle \gg 1$. Уместно, кроме того, заметить, что средний радиус экситона в режиме сильного конфайнмента всегда меньше его боровского радиуса. Если перейти к размерным величинам, то для режима слабого конфайнмента с учетом (12) и (16) получается спектр известного вида (см., например, [27, 28] и формулу (2.1) из [29]):

$$E \approx E_g + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2MR^2} \left(n + \frac{l}{2} \right)^2 - \frac{R^*}{(n' + l' + 1)^2},$$

где R^* – постоянная Ридберга экситона.

В общем случае задача (15), (17) не может быть решена в явном аналитическом виде, поэтому для ее решения требуются приближенные или численные методы. Расчеты проводились согласно следующей схеме. Уравнение (15) представлялось в виде системы из двух дифференциальных уравнений первого порядка. Данная система вместе с условиями (16) решалась методом стрельбы [30]. Суть этого метода заключается в сведении краевой задачи к эквивалентной начальной задаче для той же системы уравнений и дальнейшем ее численном решении с «пристрелкой» по собственному значению. Численное решение начальной задачи находилось методом Рунге – Кутты четвертого порядка с фиксированным шагом. Интегралы в (18) вычислялись простым методом прямоугольников. Количество разбиений промежутка интегрирования увеличивалось до $N = 2.3 \cdot 10^4$. Таким образом, для всех решений обеспечивалась точность вплоть до третьего знака после запятой.

Численные расчеты проводились для КТ из CdSe. Параметры в формулах (2), (3) имели следующие значения [31, 32]: $\varepsilon_1 = 9.7$; $\varepsilon_2 = 6.2$; $m_e = 0.13$; $m_h = 0.45$; $r_e = 3.3$ нм; $r_h = 1.8$ нм. Константа в формуле (16) равна $a_0 = 0.52$ нм, в (17) эмпирический параметр $\xi = 2$. Вычислительный эксперимент показывает, что применение формул (2), (3) к расчету функций $\chi_{n',l'}(\rho)$ и собственных значений $\kappa_{n',l'}^2$ дает достаточно близкие результаты даже для основного состояния. Так, при $R = 0.5$ разница между собственными значениями в основном состоянии составляет $|\Delta \kappa_{0,0}^2| = 0.013$. С ростом радиуса R и квантовых чисел n' и l' эта разница быстро стремится к нулю.

Спектр энергий, относящийся к внутриэкситонному вкладу, является непрерывной функцией радиуса КТ для обеих рассмотренных моделей экранированного кулоновского потенциала. Ниже описываются результаты, полученные с использованием формул (1), (3). На рис. 2 показаны примеры расчета для основного состояния экситона. Как и следовало ожидать, поляризация среды и увеличение радиуса КТ влекут за собой уменьшение квазиимпульса электрон-дырочной пары. Увеличение центробежной энергии экситона, т.е. орбитального квантового числа l' при фиксированном радиальном квантовом числе n' , сводит к нулю влияние поляризации и эффект экранирования кулоновского взаимодействия. Поляризация и экранирование в целом уменьшают средний радиус экситона. В основном состоянии орбитальный радиус изменяется незначительно и оказывается намного меньше среднего радиуса экситона.

Как выясняется, сильный конфайнмент экситона критически сказывается на его энергетическом спектре. Самым интересным проявлением здесь является смена знака E_r в зависимости от радиуса КТ. Для CdSe изменение знака энергии основного состояния с отрицательного на положительный происходит при $R < 10$ для обеих рассмотренных моделей экранированного кулоновского потенциала. Расчеты, проведенные в настоящей работе, согласуются с результатами работ [14, 15], которые были получены более сложным способом. Так, из рис. 1b в [14] следует, что для CdSe знак энергии изменяется при значении радиуса КТ ~ 0.75 нм. На основе численного решения краевой задачи (15), (17) с формулами (1), (3) получается значение 0.8 нм, которое практически точно совпадает со значением из [15] (см. рис. 1 из [15]). Указанное явление интерпретируется как утрата связанного состояния электрон-дырочной пары вследствие возрастания кинетической энергии

электрона и дырки. Граничный радиус КТ, при котором изменяется знак E_r , зависит от диэлектрических свойств материала, причем учет поляризации сдвигает этот радиус в область меньших значений.

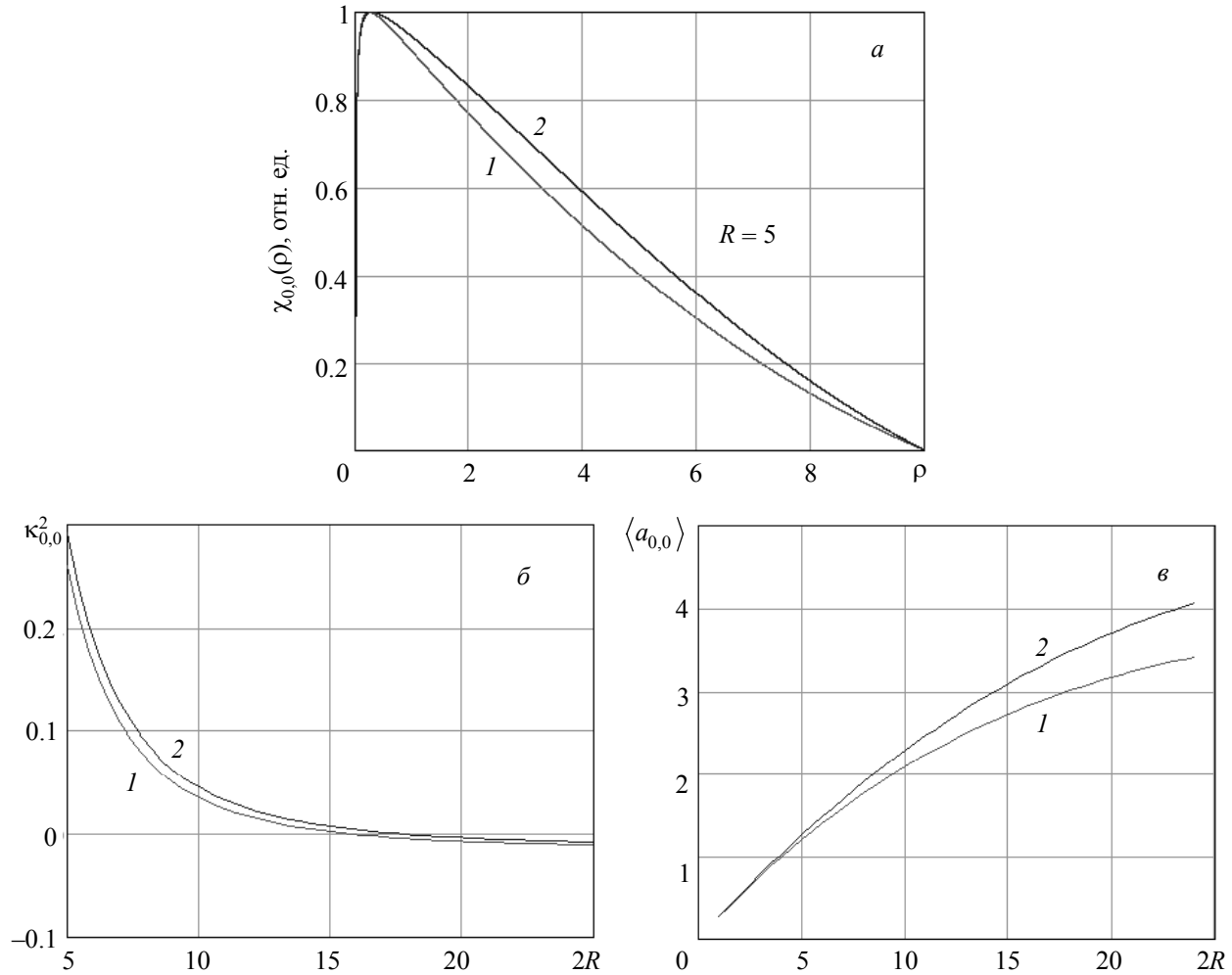


Рис. 2. Результаты расчета характеристик экситона в $1s$ -состоянии в условиях сильного конфайнмента: a – радиальные составляющие волновой функции; $б$ и $в$ – собственные значения и средние радиусы экситона в зависимости от радиуса КТ. Кр. 1, 2 соответствуют расчетам с потенциалом (1), (3) и кулоновским незэкранированным потенциалом (1) при $\epsilon(\rho) = \epsilon_1$

Изменение знака спектра энергий можно продемонстрировать без учета поляризации на примере атома водорода. В этом случае в (15) нужно принять $\epsilon(\rho) = 1$, а в качестве a_0 и μ в (16) взять боровский радиус и массу электрона. Рассмотрим мысленный эксперимент, в котором атом водорода зажат внутри непроницаемой сферы радиусом R . Считается, что с уменьшением R происходит изменение волновых функций и уровней энергии электрона так, что атом всегда остается в основном стационарном состоянии. Правое граничное условие в (17) задается при $\xi = 1$. Численное решение задачи на собственные значения для атома водорода, находящегося в условиях конфайнмента, представлено на рис. 3. При условии $R < 1.84$ получаются положительные значения энергии электрона, $E_r > 0$. Если же $R \rightarrow \infty$, то $\kappa_{0,0}^2 = -1$ и (16) точно дает энергию связи электрона в атоме водорода в основном состоянии. Энергия связи электрона и протона равна нулю, когда $R = 1.84^*$. По отношению к экситону это явление означает, что при малых размерах пространства связанные экситонные состояния отсутствуют, и экситоны в КТ, по-видимому, превращаются в вырожденную электрон-дырочную плазму.

* Численные расчеты показывают, что граничный радиус с высокой точностью задает иррациональное число $\pi(2 - \sqrt{2}) \approx 1.84$.

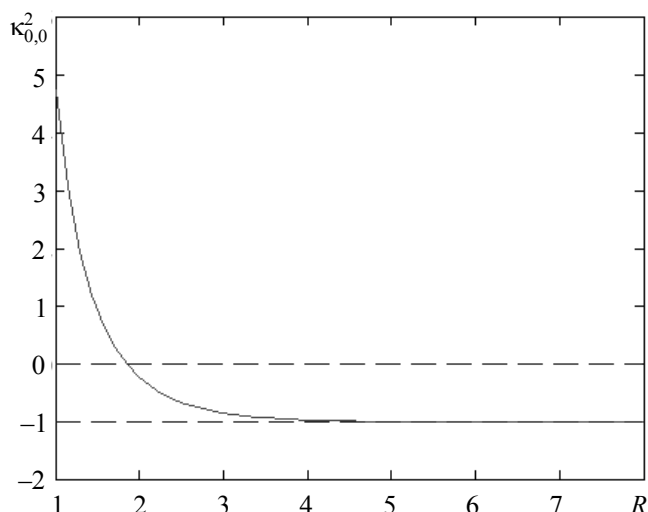


Рис. 3. Влияние конфайнмента на $1s$ -состояние электрона в атоме водорода

Заключение

Итак, модельный гамильтониан (4) дает возможность изучить влияние поляризации полупроводника на свойства экситона. Основное допущение заключается в том, что рассматривается движение центра масс экситона при переходе к сильному размерному квантованию. Физически центр масс экситона всегда находится внутри КТ, что и позволяет воспользоваться для него отдельным граничным условием. Наиболее распространенная модель экситона в КТ (см., например, [2]), в которой ограничиваются электрон и дырка по отдельности, в определенной степени эквивалентна рассмотренной модели с ограничивающим потенциалом $\phi(\mathbf{R})$ в (4), (5) и условиями (10) и (17). Для случая $m_e \ll m_h$ обе модели идентичны, что несложно показать аналитически.

В данной работе выяснено, что учет поляризации среды и экранирования кулоновского взаимодействия для экситона особенно целесообразен в условиях сильного конфайнмента, когда радиус КТ по порядку величины сопоставим с боровским радиусом экситона и поляронными радиусами электрона и дырки. Для рассмотренного примера с CdSe это $R \leq 5$ нм. Количественно указанный критерий зависит как от диэлектрических свойств полупроводника, так и от эффективных масс электрона и дырки. В условиях сильного конфайнмента обнаруживается изменение знака внутриэкситонной части энергии, что объясняется принципом неопределенности. Это явление может служить причиной разнообразных изменений ридбергоподобных состояний и связанных с ними спектров поглощения и излучения при малых радиусах КТ. Не исключается также и то, что квантовые состояния с малыми отрицательными значениями E_r , которые имеют место в КТ при определенных размерах, могут играть роль при возникновении «темных» экситонов. Согласно рассмотренной модели, для таких экситонов $E_R + E_r \rightarrow 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Maximov M.V., Nadtochiy A.M., Mintairov S.A., et al. // Appl. Sci. – 2020. – V. 10. – P. 103.
2. Woggon U., Gaponenko S.V. // Phys. Stat. Sol. (b). – 1995. – V. 189. – P. 285.
3. Ghimire S., Biju V. // J. Photochem. Photobiol. C. – 2018. – V. 34. – P. 137.
4. Germanis S., Atkinson P., Hostein R., et al. // Phys. Rev. B. – 2018. – V. 98. – P. 155303.
5. Holtkemper M., Quinteiro G.F., Reiter D.E., et al. // Phys. Rev. Res. – 2021. – V. 3. – P. 013024.
6. Якимов А.И., Двуреченский А.В., Никифоров А.И. и др. // Письма в ЖЭТФ. – 1998. – Т. 68. – Вып. 2. – С. 125.
7. Senger R.T., Bajaj K.K. // Phys. Stat. Sol. (b). – 2003. – V. 236. – No. 1. – P. 82.
8. Nilsson M., Namazi L., Lehmann S., et al. // Phys. Rev. B. – 2016. – V. 94. – P. 115313.
9. Lippens P.E., Lannoo M. // Phys. Rev. B. – 1990. – V. 41. – P. 6079.
10. Einevoll G.T. // Phys. Rev. B. – 1992. – V. 45. – P. 3410.
11. Takagahara T., Takeda K. // Phys. Rev. B. – 1992. – V. 46. – P. 15578(R).
12. Boero M., Rorison J.M., Duggan G., et al. // Surf. Sci. – 1997. – V. 377–379. – P. 371.
13. Marin J.L., Riera R., Cruz S.A. // J. Phys.: Cond. Matter. – 1998. – V. 10. – P. 1349.
14. Oshiro K., Akai K., Matsuura M. // Phys. Rev. B. – 1999. – V. 59. – P. 10850.

15. Senger R.T., Bajaj K.K. // *Phys. Rev. B.* – 2003. – V. 68. – P. 045313.
16. Franceschetti A., Fu H., Wang L.W., et al. // *Phys. Rev. B.* – 1999. – V. 60. – P.1819.
17. Shi Jun-Jie // *Chin. Phys.* – 2002. – V. 11. – No. 12. – P. 1286.
18. Corni S., Brasken M., Lindberg M., et al. // *Phys. Rev. B.* – 2003. – V. 67. – P. 045313.
19. Покутний С.И. // *ФТП.* – 2007. – Т. 41. – № 11. – С. 1341.
20. Якимов А.И., Блошкин А.А., Двуреченский А.В. // *Письма в ЖЭТФ.* – 2009. – Т. 90. – Вып. 8. – С. 621.
21. Зегря Г.Г., Самосват Д.М. // *ЖЭТФ.* – 2009. – Т. 135. – Вып. 6. – С. 1043.
22. Нокс Р. *Теория экситонов.* – М.: Наука, 1966. – С. 45–60.
23. Haken H. // *Polarons and Excitons* / ed. C.G. Kuper, G.D. Whitfield. – Edinburgh: Oliver and Boyd Ltd, 1963. – P. 295–322.
24. Pollmann J., Buttner H. // *Phys. Rev. B.* – 1977. – V. 16. – P. 4480.
25. Мессиа А. *Квантовая механика. Т. 1.* – М.: Наука, 1978. – С. 349–352.
26. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. *Квантовая механика (нерелятивистская теория).* – М.: Физматлит, 2002. – С. 77–81.
27. Keller H.B. *Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems.* – Dover Publications, 2018. – P. 1–19.
28. Kayanuma Y. // *Phys. Rev. B.* – 1988. – V. 38. – P. 9797.
29. Yoffe A.D. // *Adv. Phys.* – 1993. – V. 42. – No. 2. – P. 173.
30. Эфрос Ал.Л., Эфрос А.Л. // *ФТП.* – 1982. – Т. 16. – № 7. – С. 1209.
31. Wang L.-W., Zunge A. // *Phys. Rev. B.* – 1996. – V. 53. – P. 9579.
32. Yeо H., Lee J.S., Khan M.E., et al. // *J. Phys. Mater.* – 2020. – V. 3. – No. 3. – P. 034012.

Поступила в редакцию 18.08.2022,
принята в печать 02.11.2022.

Рехвиашвили Серго Шотович, д.ф.-м.н., зав. отделом ИПМА КБНЦ РАН, e-mail: rsergo@mail.ru.