ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ

УДК 530:145 DOI: 10.17223/00213411/65/12/28

КВАНТОВОЕ СУПЕРВРЕМЯ

Ю.Р. Мусин

*Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия*

Рассматривается структура собственного времени как массивных, так и безмассовых частиц в рамках псевдоклассической модели супервремени. Предлагаются варианты введения некоммутативной геометрии в структуру супервремени для моделей фундаментальных частиц, описанных в предыдущих публикациях.

Ключевые слова: *собственное время, безмассовые частицы, глюоны, псевдоклассическая механика, суперсимметрия, некоммутативная геометрия, квантовые группы.*

Развиваемая автором эмерджентная теория времени опирается на понятие супервремени [1], которое по существу является расширением классического собственного времени фундаментальных частиц и было введено еще зачинателями суперсимметричной механики [2, 3]. Предсказанное недавно [4] существование на квантовом уровне разнонаправленных течений времени и возникновении термодинамической стрелы времени на макроскопическом уровне только в результате их усреднения подтверждает эмерджентный подход, но требует более тщательного анализа самого понятия направления собственного времени фундаментальных частиц. Мы обсудим возможности, которые дает для этого модель расширенного супервремени [5], а также направления его обобщения в духе некоммутативной геометрии Ю.И. Манина [6]. Является ли геометрия супервремени коммутативной? Насколько сильно повлияет использование некоммутативной геометрии на ранее полученные результаты? Какие квантовые группы будут возникать как «деформации» классических групп суперсимметрии, реализованных на супервремени?

Напомним структуру супервремени на самом простом варианте – плоском супервремени $\mathbb{R}^{1|1}$, собранном из множества вещественных грассмановых чисел [1] (четных $\mathbb{R}_c$ и нечетных $\mathbb{R}_a$) и снабженном дифференциальной 1-формой ω:

$$\mathbb{R}^{1|1} = \left\{ t,\theta \middle| t\theta - \theta t = 0, t \in \mathbb{R}_c; \theta \in \mathbb{R}_a \middle| \omega = dt - i\theta d\theta \middle| \omega : \mathbb{R}^{1|1} \to \mathbb{R}_c \right\}. \tag{1}$$

На $\mathbb{R}^{1|1}$ определены преобразования, сохраняющие форму ω. Это трансляции по четному времени (A) и суперпреобразования (B):

$$\text{A:} \begin{cases} t' = t + \alpha, \\ \theta' = \theta, \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}_c, \tag{2}$$

$$\text{B:} \begin{cases} t' = t + i\varepsilon\theta, \\ \theta' = \theta + \varepsilon, \end{cases} \quad \varepsilon \in \mathbb{R}_a. \tag{3}$$

Вводя матрицу-столбец $T = (1, t, \theta)^T$, запишем преобразования (2), (3) в матричном виде

$$\text{A:} (1 + \Gamma_\alpha) T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t + \alpha \\ \theta \end{pmatrix}, \ \text{B:} (1 + \Gamma_\varepsilon) T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i\varepsilon \\ \varepsilon & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t + i\varepsilon\theta \\ \theta + \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Генераторы преобразований (2), (3) тогда задаются матрицами

$$\hat{H} = i\frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial \alpha} = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \hat{Q} = \frac{\partial \Gamma_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться прямой подстановкой, что генераторы преобразований $\mathbb{R}^{1|1}$ образуют представление алгебры суперсимметрии:

$$\left\{\hat{Q},\hat{Q}\right\} = 2\hat{H}\,,\ \left[\hat{H},\hat{H}\right] = \left[\hat{H},\hat{Q}\right] = 0\,. \tag{4}$$

Это означает, что на плоском супервремени действует группа простой суперсимметрии (SUSY), а его метрика –

$$ds^2 = \omega^2 = dt^2 - 2i\theta d\theta dt\,. \tag{5}$$

Данные конструкции представляют собой конечномерный аналог построений, используемых в суперсимметричных полевых теориях [7, 8], геометрия такого времени является классической, т.е. коммутативной. Концепция плоского супервремени оказалась весьма успешной при построении псевдоклассических моделей лептонов и кварков и описания движения частиц со спином во внешних гравитационных и электромагнитных полях [1].

В ареал этих моделей могут быть включены бесспиновые частицы, если компактифицировать нечетную компоненту супервремени θ путем склейки значений суперкоординат $X^{\mu}(t,\theta)\colon \mathbb{R}^{1|1} \to \mathbb{R}_c$, нумеруемых внешним лоренцевским индексом $\mu = 0,1,2,3$, посредством соотношения:

$$X^{\mu}(t,\theta) = X^{\mu}(t,\theta+\varepsilon)\,, \tag{6}$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}_a$ – фиксированная нечетная константа.

Воспользуемся последним обстоятельством, чтобы ввести внутреннее определение направления возрастания времени. Понимая движение (6) по компактифицированной нечетной компоненте θ как вращение по окружности, определим направление «вперед» по собственному времени t как направление, образующее правую тройку с этим вращением, и «назад» – как противоположное ему. Это автоматически задаст направление всех временных потоков на расширенном супервремени $\mathbb{R}^{1|m}$, которое ранее [5] определялось вложением мировой линии частицы в объемлющее пространство-время (рис. 1, показаны только две нечетные компоненты супервремени).

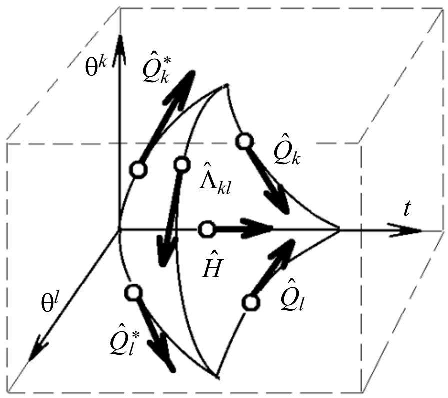

Рис. 1. Потоки времени и его генераторы в расширенном супервремени

Особо надо рассмотреть безмассовые частицы, движущиеся в пространстве со скоростью света, для которых интервалы собственного времени становятся нулевыми. При получении траекторий таких частиц во внешних полях параметр вдоль мировой линии брался произвольным [1], что не влияло на форму траектории, но при переходе к эмерджентному подходу необходимо пояснить, в каком смысле существует собственное время безмассовых частиц. Возьмем самый привычный вариант безмассовой частицы – фотон, для которого моменты рождения и уничтожения (регистрации) происходят в один и тот же момент собственного времени. Это позволяет отождествить концы оси собственного времени t, т.е. компактифицирует ее в окружность. Поскольку фотон – истинно нейтральная частица, т.е. совпадает со своей античастицей, то движение по окружности собственного времени удовлетворяет двум противоположным требованиям: движению «вперед» для частицы и «назад» для античастицы. Таким образом, суперсимметричная модель фотона по Рампфу [9], использующая «объемное супервремя»,

$$\mathbb{R}^{1|2}=\left\{t,\theta^1,\theta^2\left|t\theta^k-\theta^k t=0,\ t\in\mathbb{R}_c;\theta^k\in\mathbb{R}_a;k=1,2\right|\omega=dt-i\theta^1 d\theta^1-i\theta^2 d\theta^2\left|\omega:\mathbb{R}^{1|2}\to\mathbb{R}_c\right.\right\}, \quad (7)$$

должна быть дополнена условием компактности четной компоненты времени t. Это же условие должно быть наложено на две другие истинно нейтральные безмассовые частицы: гравитон с супервременем $\mathbb{R}^{1|4}$ и гравитино с $\mathbb{R}^{1|3}$.

Сложнее выглядит структура времени для глюонов – безмассовых переносчиков сильного («цветного») взаимодействия, также опирающаяся на «объемное супервремя» (7). Для размещения переносимых глюонами трех зарядов: «красного» (R), «зеленого» (G) и «синего» (B) необходимо заменить компактифицированную четную компоненту времени t на трехлистное накрытие, каждый лист которого отвечает своему цвету. Тогда цветной заряд движется «вперед» по своему слою, а соответствующий антизаряд – «назад». Супервремя для любого из 8 глюонов может быть представлено в виде диаграммы заполнения листов. В качестве примера (рис. 2) приведем вид таких диаграмм для заряженного глюона g^5 и истинно нейтрального g^7 (нечетные компоненты времени θ^1,θ^2 опустим).

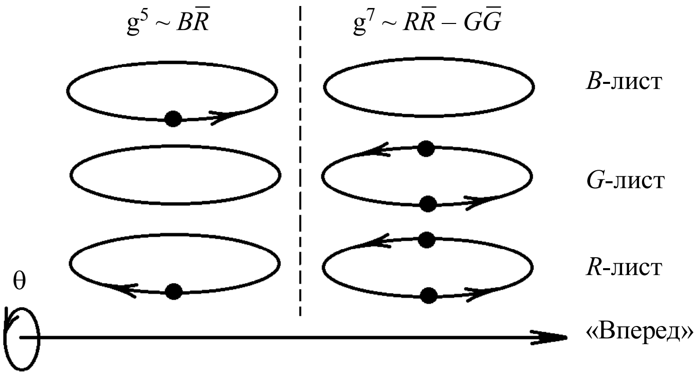

Рис. 2. Примеры диаграмм заполнения листов накрытия для глюонов

Возвращаясь к заданию направления супервремени для массивных частиц, отметим, что хотя дифференциальные формы, задающие его в (1), (7), так же как и в произвольном расширенном супервремени, не инвариантны относительно обращения хода времени $t\to -t$, метрика супервремени $ds^2=\omega^2$ остается инвариантной, т.е. псевдоклассические уравнения симметричны во времени, так же как и классические. Суперпозиция между прямыми и обратными во времени процессами возможна только на квантовом уровне.

Построение квантовой теории времени пока остается недоступной задачей, но в качестве псевдоклассического приближения к ней можно попытаться построить теорию супервремени, которая обобщала бы развиваемую нами модель расширенного супервремени на случай некоммутативной геометрии, которой могла бы обладать квантовая теория времени. В настоящее время математиками развиваются различные подходы к построению некоммутативной геометрии. Рассмотрим только один из вариантов такого построения, предложенный Ю.И. Маниным [6]. Сначала изложим основную идею подхода, для чего рассмотрим эволюцию одномерной классической системы с канонически сопряженными переменными x и y (например, координатой и импульсом). Ее можно описывать траекториями на фазовой плоскости с коммутирующими координатами x и y: $xy-yx=0$. При переходе к квантово-механическому описанию для учета соотношения неопределенностей Гейзенберга $\Delta x\Delta y\geqslant\hbar$ вместо переменных вводят в рассмотрение операторы $\hat{x}$ и $\hat{y}$. Они действуют в гильбертовом пространстве состояний и удовлетворяют операторному соотношению Гейзенберга: $[\hat{x},\hat{y}]=i\hbar\hat{1}$. Если воспринимать эти операторы как генераторы некоторой алгебры Ли, т.е.

$$[X,Y]=i\hbar E, \quad [X,E]=[Y,E]=0, \quad (8)$$

то, экспоненцируя (8), получим группу Ли, содержащую элементы $x = e^X$; $y = e^Y$, произведение которых может быть найдено по формуле Кэмпбелла – Хаусдорфа [10], имеющей, с учетом соотношений (8), особенно простой вид:

$$xy = e^X e^Y = \exp\left(X + Y + \frac{1}{2}[X,Y]\right) = \exp\left(X + Y + \frac{i\hbar}{2}\right),$$

$$yx = e^Y e^X = \exp\left(Y + X + \frac{1}{2}[Y,X]\right) = \exp\left(X + Y - \frac{i\hbar}{2}\right).$$

Логарифмируя последние соотношения и вычитая их друг из друга, получим

$$\ln xy - \ln yx = \ln\frac{xy}{yx} = i\hbar; \quad \Rightarrow \quad xy = e^{i\hbar} yx.$$

Вводя обозначение $q \triangleq e^{i\hbar}$, получаем проинтегрированное соотношение Гейзенберга:

$$xy - qyx = 0\,. \tag{9}$$

При $q = 1$, т.е. $\hbar = 0$, мы имеем классическую фазовую плоскость, а выражению $q = e^{i\hbar}$ отвечает «квантовая плоскость», координаты x и y которой уже не коммутируют, т.е. это объект некоммутативной геометрии. Очевидно, что обычные симметрии плоскости, обусловленные ее группой движения $GL(2)$, при этом разрушаются. Оказывается, что их можно восстановить, если наложить некоторые нетривиальные соотношения на матрицы из $GL(2)$. Это «деформирует» группу $GL(2)$ в группу $GL_q(2)$ [6], которую стали называть «квантовой», как и все другие группы, полученные по такому рецепту из «классических» групп.

Суперпространство $\mathbb{R}^{1|1}$ можно трактовать как фазовую плоскость эволюции супервремени, если четную компоненту t воспринимать как связанную с гамильтонианом, т.е. с энергией, а нечетную компоненту θ – с «внутренним» временем. Тогда соотношение неопределенностей Гейзенберга $\Delta E \Delta t \geqslant \hbar$ позволяет записать проинтегрированное соотношение Гейзенберга (9) в виде

$$t\theta - q\theta t = 0\,. \tag{10}$$

Вычисляя дифференциал (10) и умножая его справа на θ, убеждаемся в справедливости новых соотношений коммутации не только для переменных, но и для их дифференциалов:

$$td\theta - qd\theta t = 0,\;\; dt\theta - q\theta dt = 0,\;\; dtd\theta - qd\theta dt = 0. \tag{11}$$

Тогда «квантовое плоское супервремя» можно определить как

$$\mathbb{R}_q^{1|1} = \left\{t,\theta \middle| t\theta - q\theta t = 0, t \in \mathbb{R}_c; \theta \in \mathbb{R}_a \middle| \omega = dt - i\theta d\theta \middle| \omega : \mathbb{R}^{1|1} \to \mathbb{R}_c \right\}. \tag{12}$$

Название «квантовое супервремя» означает не выход за пределы псевдоклассической механики, а лишь следствие общепринятого математиками термина «квантовые группы». Метрика суперпространства $\mathbb{R}_q^{1|1}$ будет иметь вид

$$ds_q^2 = \omega^2 = dt^2 - i(1+q^2)\theta d\theta dt\,, \tag{13}$$

т.е. геометрия $\mathbb{R}_q^{1|1}$ будет некоммутативной и совпадающей с коммутативной только при $q = 1$, т.е. при $\hbar \to 0$. Однако форма ω и следующие из нее выражения для генераторов преобразований (2), (3) не меняются, что означает сохранение алгебры суперсимметрии (4) и всех ранее полученных результатов для композитных моделей лептонов и кварков [1].

Перейдем к рассмотрению более сложных моделей супервремени, так называемых расширенных моделей [5]. В качестве примера обсудим «объемное супервремя» $\mathbb{R}^{1|2}$, безмассовый вариант которого использован в модели фотона Рампфа [9]:

$$\mathbb{R}^{1|2} = \left\{t,\theta^1,\theta^2 \middle| t\theta^k - \theta^k t = 0,\; t \in \mathbb{R}_c; \theta^k \in \mathbb{R}_a; k = 1,2 \middle| \omega = dt - i\theta^1 d\theta^1 - i\theta^2 d\theta^2 \middle| \omega : \mathbb{R}^{1|2} \to \mathbb{R}_c \right\}. \tag{14}$$

На $\mathbb{R}^{1|2}$ определены преобразования, сохраняющие форму ω. Это трансляции по четному времени (A), суперпреобразования (B) и вращения вокруг четного времени (C):

$$\text{A:}\begin{cases} t' = t + \alpha, \\ \theta'^1 = \theta^1, \quad \alpha \in \mathbb{R}_c, \\ \theta'^2 = \theta^2, \end{cases} \tag{15}$$

$$\text{B:}\begin{cases} t' = t + i\varepsilon^1\theta^1 + i\varepsilon^2\theta^2, \\ \theta^{1'} = \theta^1 + \varepsilon^1, \qquad \varepsilon^1, \varepsilon^2 \in \mathbb{R}_a, \\ \theta^{2'} = \theta^2 + \varepsilon^2, \end{cases} \tag{16}$$

$$\text{C:}\begin{cases} t' = t, \\ \theta^{1\prime} = \theta^1 \cos\varphi + \theta^2 \sin\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}_c. \\ \theta^{2\prime} = -\theta^1 \sin\varphi + \theta^2 \cos\varphi, \end{cases} \tag{17}$$

Вводя матрицу-столбец $T = \left(1, t, \theta^1, \theta^2\right)^T$, запишем генераторы преобразований (15) – (17) в матричном виде (графические представления этих генераторов приведены на рис. 1):

$$\begin{gathered} \hat{H} = i\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{12} = \left.\frac{\partial C}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{Q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial B}{\partial \varepsilon^1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial B}{\partial \varepsilon^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{18}$$

Легко убедиться, что генераторы (18) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\left\{\hat{Q}_k, \hat{Q}_l\right\} = 2\delta_{kl}\hat{H}, \ \left[\hat{H}, \hat{H}\right] = \left[\hat{H}, \hat{Q}_k\right] = \left[\hat{H}, \hat{\Lambda}_{kj}\right] = 0, \ \left[\hat{Q}_k, \hat{\Lambda}_{kj}\right] = \hat{Q}_j, \quad j, k = 1, 2. \tag{19}$$

Это представления минимально расширенной алгебры суперсимметрии [8], а метрика такого супервремени имеет вид

$$ds^2 = \omega^2 = dt^2 - 2i\left(\theta^1 d\theta^1 + \theta^2 d\theta^2\right)dt + 2\theta^1\theta^2 d\theta^1 d\theta^2. \tag{20}$$

Возможны различные варианты перехода к некоммутативной геометрии на супервремени $\mathbb{R}^{1|2}$. Самый очевидный – тривиальное обобщение формул (12), (13) на две нечетные переменные, что дает некоммутативное объемное квантовое супервремя, которое удобно записать через перечисление идеалов:

$$\mathbb{R}_q^{1|2} = \mathbb{R}\left\{t, \theta^1, \theta^2\right\} \Big/ \left(\left(\theta^1\right)^2, \left(\theta^2\right)^2, t\theta^1 - q\theta^1 t, t\theta^2 - q\theta^2 t\right). \tag{21}$$

Соответствующая метрика некоммутативна:

$$ds_q^2 = \omega^2 = dt^2 - i(1+q^2)(\theta^1 d\theta^1 + \theta^2 d\theta^2)dt + 2\theta^1\theta^2 d\theta^1 d\theta^2 \tag{22}$$

и переходит в (14) только при $q = 1$, т.е. при $\hbar \to 0$. Однако форма ω и следующие из нее выражения для генераторов преобразований (19) не меняются, что означает сохранение алгебры суперсимметрии (19).

Другой вариант некоммутативной геометрии получается при выборе идеалов, использующих только нечетные компоненты времени:

$$\mathbb{R}_q^{1|2} = \mathbb{R}\left\{t, \theta^1, \theta^2\right\} \Big/ \left(\left(\theta^1\right)^2, \left(\theta^2\right)^2, \theta^1\theta^2 + q\theta^2\theta^1\right). \tag{23}$$

Соответствующая метрика некоммутативна и имеет вид, отличный от (22):

$$ds_q^2 = \omega^2 = dt^2 - 2i(\theta^1 d\theta^1 + \theta^2 d\theta^2)dt + 2q\theta^1\theta^2 d\theta^1 d\theta^2 . \quad (24)$$

Изменения коснутся и группы суперсимметрии, отвечающей алгебре (19), так как в квантовой плоскости

$$A_q^{0|2} = \mathbb{R}\left\{\theta^1, \theta^2\right\} \Big/ \left(\left(\theta^1\right)^2, \left(\theta^2\right)^2, \theta^1\theta^2 + q\theta^2\theta^1\right) \quad (25)$$

будет действовать не группа поворотов $SO(2)$, а ее «деформация» – квантовая группа $SO_q(2)$. И, наконец, самый общий вариант некоммутативной геометрии возникает при объединении идеалов двух ранее разобранных случаев, т.е. объединяя (21) и (23), получим

$$\mathbb{R}_q^{1|2} = \mathbb{R}\left\{t, \theta^1, \theta^2\right\} \Big/ \left(\left(\theta^1\right)^2, \left(\theta^2\right)^2, t\theta^1 - q\theta^1 t, t\theta^2 - q\theta^2 t, \theta^1\theta^2 + q\theta^2\theta^1\right). \quad (26)$$

Некоммутативная геометрия такого супервремени задается метрикой

$$ds_q^2 = \omega^2 = dt^2 - i(1+q^2)(\theta^1 d\theta^1 + \theta^2 d\theta^2)dt + 2q\theta^1\theta^2 d\theta^1 d\theta^2. \quad (27)$$

Аналогичным образом можно строить некоммутативные геометрии для произвольного расширенного супервремени $\mathbb{R}^{1|m}$, т.е. обобщать их до $\mathbb{R}_q^{1|m}$. Построенные на их основе модели фундаментальных частиц будут переходить в ранее построенные [1] при $q = 1$, т.е. при $\hbar \to 0$. Некоммутативный характер геометрии квантового супервремени может повлиять на описание частиц с высшими спинами $S \geq 1$, использующими квантовое супервремя $\mathbb{R}_q^{1|m}, m \geq 2$. Поиск физических проявлений возможной некоммутативности геометрии супервремени представляется актуальной задачей развиваемой теории времени.

На квантовом уровне разнонаправленный ход времени, предсказываемый в [4], обнаруживается косвенным образом – посредством статистического анализа генерации энтропии в микроскопических системах. В подходе, опирающемся на те или иные варианты супервремени, направление времени определяется внутренним образом, т.е. присутствует изначально и в этом смысле более адекватно описывает его протекание на квантовом уровне. Поскольку коммутативный характер геометрии квантового времени является только упрощающим предположением, то обобщение супервремени до некоммутативного квантового супервремени может быть полезным для анализа природы времени на первичном квантовом уровне.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мусин Ю.Р. Методы суперсимметричной механики. – М.: ЛЕЛАНД, 2019.
2. Ravndal F. // Phys. Rev. D. – 1980. – V. 21. – P. 2832.
3. Freund P.G.O. Introduction to Supersymmetry. – Berlin: Springer, 1986.
4. Rubino G., Manzano G., Brukner C. // Commun. Phys. – 2021. – V. 4. – P. 251.
5. Мусин Ю.Р. // Изв. вузов. Физика. – 2019. – Т. 62. – № 4. – С. 48–54.
6. Манин Ю.И. Введение в теорию схем и квантовые группы. – М.: МЦНМО, 2012.
7. Galperin A.S., Ivanov E.N., Ogievetsky V.I., Sokatchev E.S. Harmonic Superspace. – Cambridge Univ. Press, 2001.
8. Buchbinder I.L., Kuzenko S.M. Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity. – CRC Press, 1998.
9. Rumpf H. // J. Phys. A: Math. Gen. — 1987. – V. 20. – P. 4285–4307.
10. Джекобсон Н. Алгебры Ли. – М.: Мир, 1964.

Поступила в редакцию 16.05.2022,
принята в печать 22.08.2022.

Мусин Юрат Рашитович, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры 311 «Прикладные программные средства и математические методы» МАИ, e-mail: urat_musin@mail.ru.