

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ИСЗ В ОРБИТАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ РОЯ*

В.А. Авдюшев, Р.А. Гонтарев, Я.А. Михайлова

*Научно-исследовательский институт прикладной математики и механики
Томского государственного университета, г. Томск, Россия*

Рассматривается вопрос о возможности применения дифференциальных уравнений в элементах Роя для численного моделирования движения искусственных спутников Земли. Предложен оригинальный алгоритм редуцирования шага интегрирования для сохранения точности моделирования при прохождении спутником тени Земли. На примере космического аппарата ГЛОНАСС показано, что численное моделирование в элементах Роя столь же высокоэффективно, как и в регулярных элементах Лагранжа.

Ключевые слова: искусственные спутники Земли, ГЛОНАСС, орбитальное движение, численное моделирование, дифференциальные уравнения движения.

Введение

Орбитальное движение искусственных спутников Земли (ИСЗ) описывается весьма сложными дифференциальными уравнениями, которые не имеют аналитического решения, поэтому для моделирования спутниковых орбит прибегают к численным методам. Классическая и традиционная формализация орбитального движения – это дифференциальные уравнения в прямоугольных координатах. Однако их численное интегрирование сопряжено с рядом трудностей, что приводит к низкой эффективности моделирования. Функции дифференциальных уравнений орбитального движения – периодические и быстроизменяющиеся. Поэтому для обеспечения высокой точности спутниковых эфемерид дифференциальные уравнения необходимо интегрировать с малым шагом, что требует больших объемов вычислений, которые сопровождаются быстрым накоплением ошибок округления. Эта трудность усугубляется наличием в уравнениях сингулярности при нулевом геоцентрическом расстоянии, что в случае высоко эллиптических орбит становится причиной сильно неравномерного поведения функций дифференциальных уравнений. Кроме того, уравнения неустойчивы по Ляпунову и, как известно, неустойчивость усиливает всевозможные ошибки, неизбежно сопровождающие любой численный процесс.

Разрешение этих трудностей – формализация спутникового движения в орбитальных элементах, которые при слабых возмущениях – медленно изменяющиеся величины. Кеплеровы элементы – неподходящий выбор для моделирования орбит многих функционирующих спутников, поскольку их дифференциальные уравнения сингулярны при нулевых значениях эксцентриситета и наклонения. Впрочем, регуляризация этих уравнений возможна путем введения комбинированных орбитальных элементов, каковыми, например, являются широко используемые на практике элементы Лагранжа [1]. Однако их уравнения также не лишены недостатков. Они очень сложные и, кроме того, при интегрировании на каждом шаге многократно требуют преобразования возмущающих сил из прямоугольной системы координат к орбитальной.

Между тем наиболее удачным, на взгляд авторов, выбором для численного моделирования спутниковых орбит являются элегантные и простые уравнения в регулярных элементах Роя [2], каковыми являются известные в орбитальной динамике величины: вектор момента количества движения, вектор Лапласа и истинная долгота.

В настоящей работе авторы ставят перед собой цель исследовать эффективность уравнений Роя в задачах орбитальной динамики ИСЗ на примере космического аппарата (КА) ГЛОНАСС. Несмотря на то, что А.Э. Рой предложил свои уравнения еще в 1973 г. [3], они до сих пор так и не были удостоены должного внимания в небесной механике. С тем чтобы исправить эту историческую несправедливость, авторы статьи намерены показать, что численное моделирование в элементах Роя столь же высокоэффективно, как и в регулярных элементах Лагранжа.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № FSWM-2020-0049.

Уравнения Роя

Дифференциальные уравнения орбитального движения в элементах Роя: $\mathbf{c}$ (вектор момента количества движения), $\mathbf{g}$ (вектор Лапласа) и λ (истинная долгота) имеют вид

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \mathbf{x} \times \mathbf{P}, \quad \frac{d\mathbf{g}}{dt} = \mathbf{P} \times \mathbf{c} + \dot{\mathbf{x}} \times \dot{\mathbf{c}}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{|\mathbf{c}|}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{c_1 \dot{c}_2 - c_2 \dot{c}_1}{|\mathbf{c}|(|\mathbf{c}| + c_3)}. \quad (1)$$

Здесь t – время; $\mathbf{x}$ и $\dot{\mathbf{x}}$ – положение и скорость небесного тела соответственно; $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ – равнодействующая возмущающих сил. Начальные условия для уравнений (1) формируются из положения $\mathbf{x}_0$ и скорости $\dot{\mathbf{x}}_0$ на некоторый начальный момент времени t_0 :

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{x}_0 \times \dot{\mathbf{x}}_0, \quad \mathbf{g}_0 = \mathbf{x}_0 \times \mathbf{c}_0 - \mu \frac{\mathbf{x}_0}{|\mathbf{x}_0|}, \quad \lambda_0 = \arctg \left(\frac{x_{20} - x_{30} c_{20} / (|\mathbf{c}_0| + c_{30})}{x_{10} - x_{30} c_{10} / (|\mathbf{c}_0| + c_{30})} \right).$$

Между тем положение $\mathbf{x}$ и скорость $\dot{\mathbf{x}}$ для $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ определяются из элементов Роя по формулам

$$\begin{aligned} \gamma &= g_1 - \frac{g_3 c_1}{|\mathbf{c}| + c_3}, \quad \delta = g_2 - \frac{g_3 c_2}{|\mathbf{c}| + c_3}, \\ |\mathbf{g}| \cos v &= \gamma \cos \lambda + \delta \sin \lambda, \quad |\mathbf{g}| \sin v = \gamma \sin \lambda - \delta \cos \lambda, \\ |\mathbf{x}| &= \frac{|\mathbf{c}|^2}{\mu + |\mathbf{g}| \cos v}, \quad \mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{|\mathbf{x}| |\mathbf{g}| \sin v}{|\mathbf{c}|}, \\ x_1 &= |\mathbf{x}| \cos \lambda + \frac{x_3 c_1}{|\mathbf{c}| + c_3}, \quad x_2 = |\mathbf{x}| \sin \lambda + \frac{x_3 c_2}{|\mathbf{c}| + c_3}, \quad x_3 = -\frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{c}|} (c_1 \cos \lambda + c_2 \sin \lambda), \\ \dot{\mathbf{x}} &= \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{x} + (\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}}) \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}. \end{aligned}$$

Редуцирование шага интегрирования при прохождении тени Земли

Если возмущающая сила $\mathbf{P}$ мала и как функция времени является гладкой, уравнения Роя позволяют достигать значительной эффективности численного моделирования даже при использовании интеграторов низких порядков. Однако интегрирование малых возмущений может быть усложнено их скачкообразными изменениями, которые происходят при моделировании светового давления в период прохождения спутником тени Земли. В модели силы светового давления они вызываются так называемой функцией тени (рис. 1), которая является отношением площади видимого со спутника диска Солнца к площади полного диска. Нерегулярное поведение возмущающей силы приводит к ощутимой потере точности численного интегрирования [4, 5]. Чтобы сохранить точность при моделировании теневых участков орбиты, в работе предлагается специальный алгоритм редуцирования шага интегрирования.

Точность интегрирования теряется, главным образом, когда моменты начала и конца полутени оказываются внутри шага, т.е. когда функция $\mathbf{P}$ претерпевает фактически излом вследствие входа в полутень и выхода из нее. Поэтому, чтобы избежать этих изломов внутри шага, необходимо редуцировать его так, чтобы точно выходить на моменты начала t_{en} и конца t_{ex} полутени*. С достаточно высокой точностью их можно предвосхитить задолго до начала полутени, используя схему секущих применительно к функции углового расстояния r между центрами Солнца и Земли относительно спутника:

$$t_{\text{en}} = t - h \frac{r(t) - r_S - r_E}{r(t) - r(t-h)}, \quad t_{\text{ex}} = t - h \frac{r(t) + r_S - r_E}{r(t) - r(t-h)}. \quad (2)$$

Здесь h – величина шага интегрирования; t – момент времени в конце шага; $t-h$ – момент времени в начале шага; r_S и r_E – соответственно угловые радиусы Солнца и Земли, видимые со спутника. Величины r , r_S и r_E определяются по формулам

* Названия индексов здесь от англ. entrance (вход) и exit (выход).

$$r = \arccos \frac{\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_S)}{|\mathbf{x}| |\mathbf{x} - \mathbf{x}_S|}, \quad r_S = \arcsin \frac{b_S}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S|}, \quad r_E = \arcsin \frac{b_E}{|\mathbf{x}|},$$

где b_S и b_E – радиусы Солнца и Земли в пространстве; $\mathbf{x}_S$ – положение Солнца. Заметим, что схемы (2) справедливы перед входом в тень. Перед выходом из тени в (2) нужно поменять знаки для величины r_S .

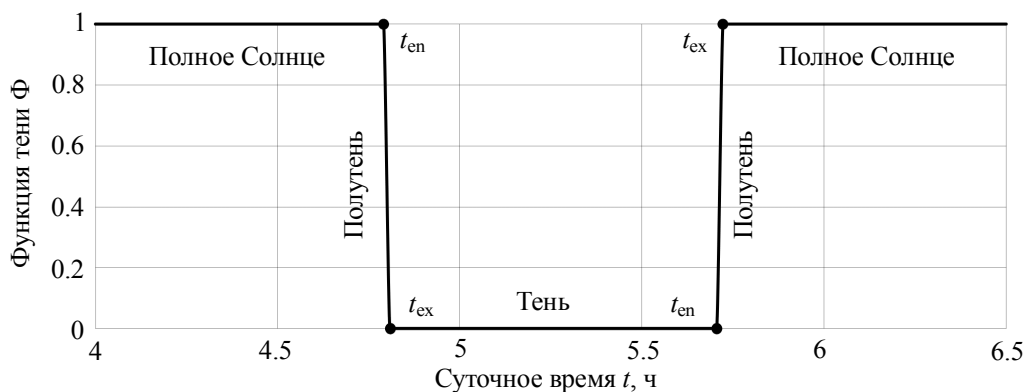


Рис. 1. Функция тени для КА ГЛОНАСС

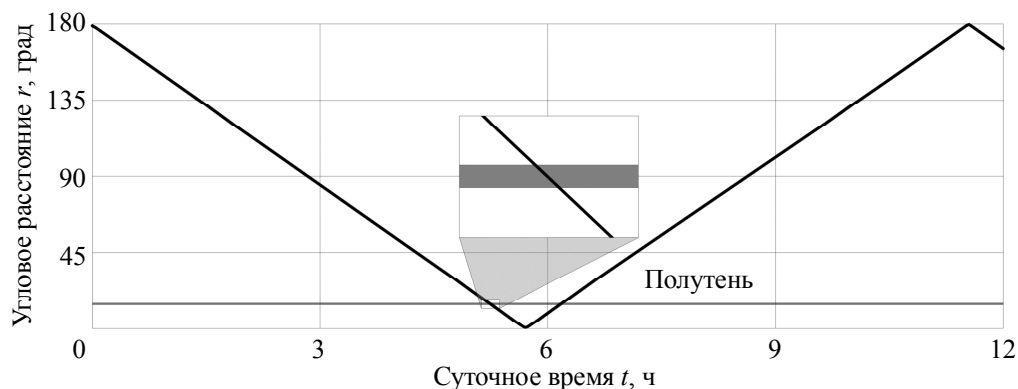


Рис. 2. Угловое расстояние между центрами Солнца и Земли относительно КА ГЛОНАСС на одном обороте и условие прохождения полутени

Итак, стратегия выбора величины шага следующая. При полном Солнце на каждом шаге оцениваются моменты начала и конца полутени (2). Если выполняется условие $0 < (t_{\text{ен}} - t)/h < 1$ (первая полутень), редуцируем шаг как $h = t_{\text{ен}} - t$. Следующая величина шага выбирается равной периоду полутени: $h = t_{\text{ех}} - t_{\text{ен}}$. При вхождении в тень на каждом шаге увеличиваем его в полтора раза ($h := 1.5h$) до исходной величины. Если выполняется $0 < (t_{\text{ен}} - t)/h < 1$ (вторая полутень), снова редуцируем шаг как $h = t_{\text{ен}} - t$, а полутень проходим с величиной $h = t_{\text{ех}} - t_{\text{ен}}$. При полном Солнце задаем исходную величину шага.

Следует заметить, что оценка начала полутени $t_{\text{ен}}$ в (2) приближенная: для первой полутени она будет немного раньше начала, тогда как для второй – немного позже. Поэтому для высокоточного выхода на начало полутени оценку, возможно, потребуется повторить.

Тестирование уравнений Роя

Эффективность дифференциальных уравнений в элементах Роя (1) с применением оригинального алгоритма редуцирования шага исследовалась на примере КА ГЛОНАСС. Движение спутника рассматривалось в поле тяготения Земли (с точностью до второй зональной гармоники) под действием притяжения Луны и Солнца с учетом влияния светового давления. Дифференциальные уравнения орбитального движения интегрировались классическим методом Рунге – Кутты в арифметике с двойной точностью. Характеристики эффективности (точность – быстродействие)

получались по результатам многократных расчетов при варьировании задаваемой начальной величины постоянного шага. Точность оценивалась в векторе положения ($|\Delta x|$) путем сравнения результатов прямого и обратного интегрирования. В качестве характеристики быстродействия рассматривалось количество вычислений функций дифференциальных уравнений (NCF). Моделирование выполнялось на временном интервале 10 оборотов с прохождением тени Земли и без. Результаты представлены на рис. 3. Здесь для сравнения также приведены результаты моделирования в прямоугольных координатах. Результаты для уравнений в элементах Лагранжа не приводятся, поскольку визуально они совпадают с результатами для уравнений в элементах Роя.

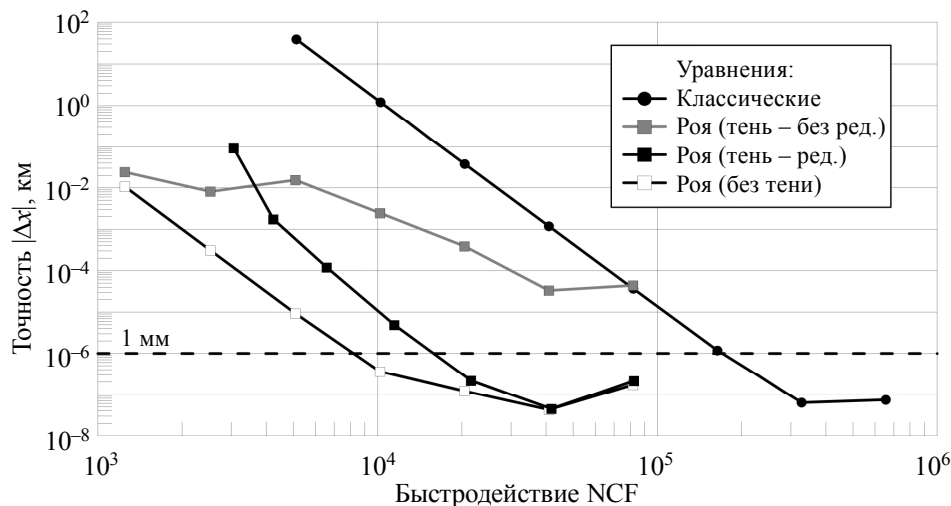


Рис. 3. Характеристики эффективности численного моделирования движения в прямоугольных координатах и в элементах Роя

Как видно из рис. 3, при условиях полного Солнца (без тени) уравнения в элементах Роя демонстрируют колоссальную эффективность в сравнении с классическими уравнениями в прямоугольных координатах: при одинаковом быстродействии они позволяют повысить методическую точность на 7 порядков. С другой стороны, высокую эффективность по точности можно также интерпретировать как высокую эффективность по быстродействию. Например, миллиметровый уровень точности для уравнений в регулярных элементах достигается быстрее в 20 раз, нежели для уравнений в прямоугольных координатах.

При прохождении тени Земли с постоянным шагом интегрирования (тень – без ред.) точность моделирования значительно ухудшается. Редуцирование шага предложенным алгоритмом (рис. 4) (тень – ред.) решает эту проблему, но, очевидно, ценой понижения быстродействия (приблизительно в 2 раза).

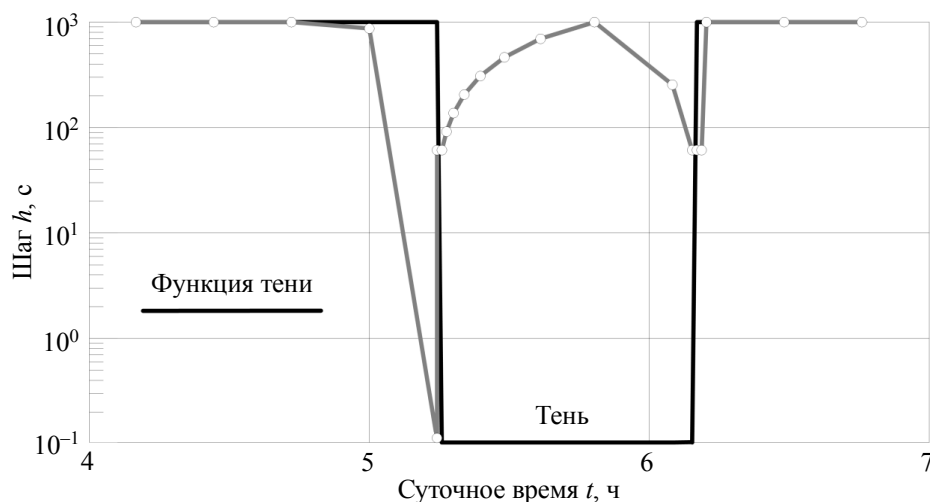


Рис. 4. Редуцирование шага при прохождении тени

Заключение

Таким образом, в работе показано, что моделирование в элементах Роя выполняется значительно более эффективно, нежели в прямоугольных координатах. Между тем численное моделирование в элементах Роя столь же высокоэффективно, как и в регулярных элементах Лагранжа. Поэтому, учитывая простоту уравнений Роя, авторы находят их более привлекательными для формализации орбитального движения и видят в них достойную альтернативу уравнениям в элементах Лагранжа. В перспективе предполагается исследовать эффективность уравнений Роя в связке с методами интегрирования более высоких порядков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Battin R. H. An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics. – Revised Edition. – American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1999. – 828 p.
2. Roy A. E. Orbital Motion. – CRC Press, 2005. – 544 p.
3. Roy A. E., Moran P. E. // Cel. Mech. – 1973. – P. 236–255.
4. Montenbruck O., Gill E. Satellite Orbits: Models, Methods and Applications. – Springer, 2000. – 369 p.
5. Lundberg J. B. // Appl. Math. Comput. – 2000. – V. 112. – P. 193–211.

Поступила в редакцию 31.03.2022,
принята в печать 03.10.2022.

Авдюшев Виктор Анатольевич, д.ф.-м.н., профессор, ведущ. науч. сотр. НИИ ПММ ТГУ, e-mail: sch@niipmm.tsu.ru;
Гонтарев Роман Алексеевич, магистрант НИ ТГУ, инженер-исследователь НИИ ПММ ТГУ, e-mail: gontarev.r@mail.ru;
Михайлова Яна Андреевна, магистрантка НИ ТГУ, инженер-исследователь НИИ ПММ ТГУ, e-mail: yana.mikhayliva.999@mail.ru.