УДК 519.87 DOI 10.17223/20710410/58/9

ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА КРАТЧАЙШИХ ПУТЕЙ В ПЛОТНЫХ ГАУССИАНСКИХ СЕТЯХ[1]

Э. А. Монахова, О. Г. Монахов

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск, Россия

E-mail: emilia@rav.sscc.ru, monakhov@rav.sscc.ru

Для семейства плотных Гауссианских сетей вида $C(D^2 + (D + 1)^2; D, D + 1)$ как перспективной топологии сетей на кристалле предложен алгоритм поиска кратчайших путей между вершинами графа, использующий относительную адресацию вершин и позволяющий в отличие от ряда известных алгоритмов рассчитать кратчайшие пути без использования координат соседних нулей решетки в плотной укладке графов на плоскости $\mathbb{Z}^2$. Это сокращает затраты памяти и времени выполнения по сравнению с другими алгоритмами при реализации данного алгоритма в сетях на кристалле с топологией плотной Гауссианской сети.

Ключевые слова: *плотные Гауссианские сети, циркулянтные графы, кратчайшие пути, сети на кристалле.*

EFFECTIVE ALGORITHM FOR FINDING SHORTEST PATHS IN DENSE GAUSSIAN NETWORKS

E. A. Monakhova, O. G. Monakhov

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia

As a promising topology of networks on a chip, we consider a family of Dense Gaussian Networks, which are optimal circulant degree four graphs of the form $C(D^2+(D+1)^2; D, D+1)$. For this family, an algorithm for finding the shortest paths between graph vertices is proposed, which uses relative addressing of vertices and, unlike a number of the known algorithms, allows to calculate the shortest paths without using the coordinates of neighboring lattice zeros in a dense tessellation of graphs on the $\mathbb{Z}^2$ plane. This reduces the memory and execution time costs compared to other algorithms when the new algorithm is implemented on a network-on-chip with a Dense Gaussian Network topology.

Keywords: *Dense Gaussian Networks, circulant graphs, shortest paths, networks on a chip.*

Введение

Плотные Гауссианские сети [1 – 7], далее — DGNs (Dense Gaussian Networks), относятся к классу циркулянтных сетей [8 – 10] и представляют собой семейство оптимальных циркулянтных графов вида $C(N_D; D, D + 1)$ степени четыре и диаметра $D \geqslant 1$

[1]Работа поддержана проектом ИВМиМГ СО РАН №0251-2021-0005.

с числом вершин $N_D = D^2 + (D+1)^2$ и образующими $s_1 = D$ и $s_2 = D+1$. Графы данного семейства достигают максимально возможного числа вершин для заданного диаметра (расстояния между наиболее удалёнными друг от друга вершинами графа) и являются лучшими по диаметру и среднему расстоянию среди всех решётчатых графов степени четыре с таким же числом вершин, включая двумерные торы (2D torus) и двумерные решётки (2D mesh) [11]. Это вместе с вершинной симметрией и регулярностью связей позволяет рассматривать их как перспективную топологию для сетей на кристалле (Networks-on-Chip, NoC). В частности, DGNs могут вмещать больше узлов в одной и той же области чипа по сравнению с другими сетчатыми структурами. В [1, 2] плотные Гауссианские сети рассмотрены в качестве топологии для NoC, получена схема их оптимальной вложимости в чип без пересечения связей и разработаны иерархические двухуровневые структуры для NoC, в основе которых лежат плотные Гауссианские сети.

При проектировании сетей на кристалле важным этапом является разработка подсистемы связей, в том числе эффективных алгоритмов маршрутизации. В работах [1, 2] предложен алгоритм маршрутизации для DGNs, основанный на использовании координат всех соседних нулей решётки в плотной укладке (plane tessellation) графов семейства на плоскости $\mathbb{Z}^2$ для определения кратчайших путей между вершинами. При этом применяются операции суммирования относительных координат пары вершин «источник — приёмник» с координатами всех соседних нулей и последующее сравнение полученных сумм на минимум l_1-нормы, где l_1-норма определена как расстояние в двумерной целочисленной решётке $\mathbb{Z}^2$ [12]. Алгоритмы такого типа предложены как альтернатива методам маршрутизации из [13, 14], использующим деление Евклида с высокой вычислительной стоимостью.

В алгоритме маршрутизации из [1, 2] при определении кратчайших путей используются все девять соседних нулей; в алгоритме маршрутизации для Гауссианских сетей из [4] необходимое количество используемых соседних нулей сокращено до четырёх, но при этом также требуется найти минимум расстояний до четырёх нулей. В [15, 16] метод использования координат соседних нулей решётки при получении кратчайших путей между вершинами расширен для применения в оптимальных циркулянтных сетях степени четыре с любым числом вершин $N \geqslant 5$. При этом при поиске кратчайших путей в зависимости от значения N используется девять или семь соседних нулей. Отметим также работу [17], в которой рассмотрен аналогичный алгоритм маршрутизации для семейства циркулянтных графов с числом вершин $N = 2D^2$, где диаметр D — нечётное число, а количество используемых соседних нулей равно семи, и работы [5 – 7, 11, 18], в которых рассмотрены другие типы обменов либо другие подходы к построению алгоритмов маршрутизации в плотных Гауссианских сетях.

Из анализа алгоритмов маршрутизации [11, 15, 19, 20], реализованных в сетях на кристалле с двумерной циркулянтной топологией, следует, что критичными показателями для NoC наряду с задержкой передачи пакетов являются затраты ресурсов памяти и логических регистров. Как показано в [15], алгоритмы маршрутизации из [1, 2] и аналогичные им в [4, 15 – 17] , основанные на суммировании с координатами всех соседних нулей решётки и сравнении полученных l_1-норм (длин путей), требуют больших ресурсов памяти NoC для хранения промежуточных вычислений с большим количеством затратных по времени операций присваивания и взятия абсолютной величины, и, таким образом, отсутствие операций деления не является решающим фактором для NoC.

В настоящей работе получен алгоритм поиска кратчайших путей в плотных Гауссианских сетях константной сложности $O(1)$, модифицированный по сравнению с [1, 2, 4, 15 – 17, 21], который для любой пары вершин «источник — приёмник» определяет кратчайший путь (пути) между ними непосредственно по их координатам относительно нулевой вершины: 1) без использования суммирования координат со всеми соседними нулями решётки и последующего сравнения на минимум длин полученных путей; 2) с меньшим количеством операций присваивания и взятия абсолютной величины при отсутствии операций деления.

1. Алгоритм поиска кратчайших путей в плотных Гауссианских сетях

Пусть в циркулянтном графе $C(N_D; D, D+1)$, $D \geqslant 1$, (x, y) — координаты вершины u (далее — «источник») относительно вершины 0, а именно: x определяет число шагов вдоль образующей s_1 $(-s_1)$, а y — число шагов вдоль образующей s_2 $(-s_2)$ в кратчайшем пути из 0 в u. Аналогично определяются (x', y') — координаты вершины v (далее — «приёмник») относительно вершины 0. Требуется определить координаты (X, Y) — вектора кратчайшего пути между ними. Отметим, что вектор кратчайшего пути задаёт множество кратчайших путей между вершинами, отличающихся порядком прохождения образующих графа.

На рис. 1 показан фрагмент плотной укладки циркулянтного графа $C(N_D; D, D+1)$ на плоскости $\mathbb{Z}^2$. Пример дан для $D = 3$. Область ромба $R_D = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : |x| + |y| \leqslant \leqslant D\}$ с нулевой вершиной $Z_0 = (0, 0)$ соответствует рассматриваемому циркулянтному графу (графу DGN). Каждой клетке решётки (x, y) может быть сопоставлен номер вершины $m = xD + y(D+1) \bmod N_D$. Номера вершин графа $0 \leqslant m < N_D$ повторяются на плоскости бесконечное число раз, формируя плотную укладку. Восемь соседних с R_D ромбов получены трансляцией ромба R_D на плоскости. Центральные нули для соседних ромбов обозначены через $\pm Z_1, \pm Z_2$ и их комбинации. Для графов DGNs известны координаты относительно Z_0 соседних нулей:

$$Z_1 = (-D-1, D),\ Z_2 = (D, D+1),$$

из которых могут быть получены координаты других соседних нулей, например

$$Z_1 + Z_2 = (-1, 2D+1),\ -Z_1 + Z_2 = (2D+1, 1).$$

В [1, 2] доказано следующее утверждение: чтобы вычислить кратчайший путь из вершины (x, y) в вершину (x', y'), достаточно найти суммы относительного вектора $(x' - x, y' - y)$ с координатами девяти нулей Z_0, $\pm Z_1$, $\pm Z_2$, $\pm(Z_1 + Z_2)$, $\pm(Z_1 - Z_2)$ и сравнить полученные векторы на минимум длины пути.

Новый подход к разработке алгоритма поиска кратчайших путей для семейства графов DGNs заключается в следующем. Мы не используем суммирования с координатами всех соседних нулей и сравнения полученных результатов. Для этого всё множество $N = N_D$ вершин циркулянта DGN относительно вершины $Z_0 = (0, 0)$ разбиваем на четыре непересекающихся множества (квадранта), основанных на адресе источника, с числом вершин, равным $D(D+1)/2$. Обозначим эти множества через Q_i, $i = 1, \ldots, 4$ (рис. 2). Условия принадлежности источника (x, y), где $|x|, |y| \leqslant D$, к одному из этих квадрантов следующие:

$$Q_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : -y \leqslant x < y\},\ Q_2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : -x < y \leqslant x\},$$
$$Q_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : y < x \leqslant -y\},\ Q_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x \leqslant y < -x\}.$$

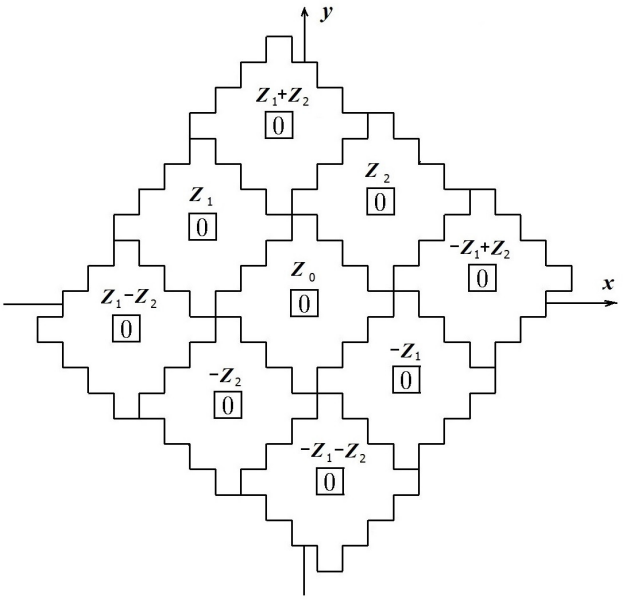

Рис. 1. Фрагмент плотной укладки графа $C(N_D; D, D+1)$ на плоскости $\mathbb{Z}^2$

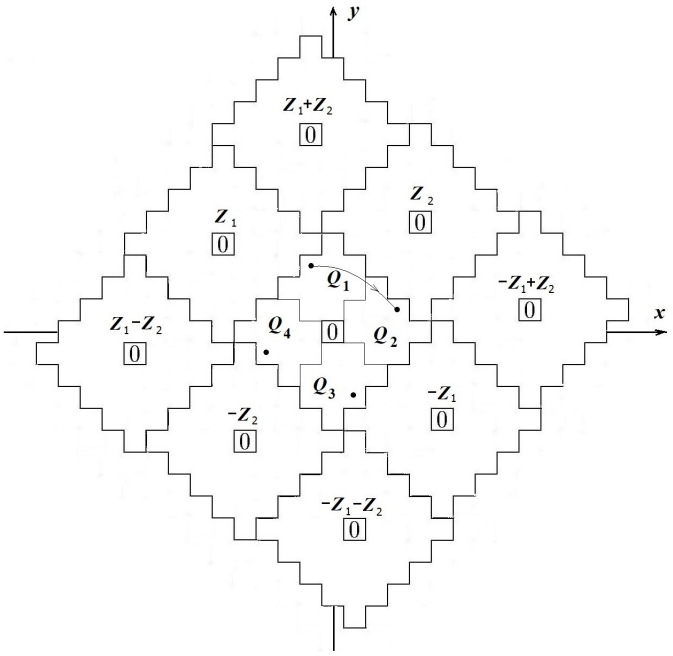

Рис. 2. Разбиение циркулянта $C(N_D; D, D+1)$ на квадранты Q_i, $i = 1, \ldots, 4$, по адресу источника

При попадании источника $u = (x, y)$ в один из квадрантов Q_i, $i = 1, \ldots, 4$, в зависимости от того, где находится приёмник $v = (x', y')$, $|x'|, |y'| \leqslant D$, ромб R_D с центром в Z_0 в общем случае также разбивается на четыре множества вершин соответственно тому, до какого из соседних нулей решётки оказывается ближе приемник v.

Сначала рассмотрим случай, когда $(x, y) \in Q_1$. На рис. 3 показан фрагмент укладки циркулянта $C(41; 4, 5)$ диаметра $D = 4$ на плоскости $\mathbb{Z}^2$ и соседние нули Z_0, Z_1, Z_2, $Z_1 + Z_2$, ближайшие для любого источника $(x, y) \in Q_1$. Пример дан для источника u

(обозначен знаком «·») с координатами $(x, y) = (-1, 3)$ относительно Z_0. В ромбе R_D с центром в Z_0 разными цветами и римскими цифрами обозначены: I — приёмники, находящиеся на расстоянии не более D от u и относящиеся соответственно к Z_0; II — приёмники, для которых ближайшим нулём из источника u является Z_1; III — приёмники, для которых ближайший нуль Z_1+Z_2; IV — приёмники, для которых ближайший нуль Z_2.

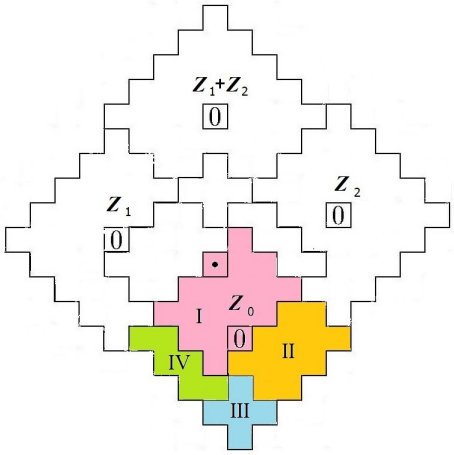

Рис. 3. Источник $(x, y) \in Q_1$

Условия принадлежности приёмников $v = (x', y')$ к соответствующим ближайшим соседним нулям находим из соотношений между $Y = y' - y$ и $X = x' - x$, задающих границы областей. Для всех приёмников, относящихся к Z_0, имеем $y' - y + D \geqslant x' - x$, $y' - y + D \geqslant x - x'$ (равенства достигаются на левой или правой границах области I), что равносильно условию $|y' - y| + |x' - x| \leqslant D$. Для приёмников, ближайших к Z_1 из u, имеем $x - x' < y' - y + D < x' - x$; для приёмников, ближайших к Z_2 из u, — $x' - x - 1 \leqslant y' - y + D < x - x'$; для оставшихся приёмников, принадлежащих области III, $Z_1 + Z_2$ — ближайший нуль из u. Отсюда следует

Утверждение 1. Пусть в графе $C(N_D; D, D + 1)$ с диаметром $D > 1$ даны вершины $u = (x, y)$ и $v = (x', y') \neq u$, такие, что $|x| + |y| \leqslant D$, $|x'| + |y'| \leqslant D$ и $y > x$, $y \geqslant -x$. Тогда вектор кратчайшего пути из u в v имеет следующий вид:

$$(X, Y) = \begin{cases} (x' - x, y' - y), & \text{если } |x' - x| + |y' - y| \leqslant D, \\ (x' - x, y' - y) + Z_1, & \text{если } x - x' < y' - y + D < x' - x, \\ (x' - x, y' - y) + Z_2, & \text{если } x' - x - 1 \leqslant y' - y + D < x - x', \\ (x' - x, y' - y) + Z_1 + Z_2 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь и далее операции типа $(X, Y) \pm Z_i$, $i = 1, 2$, означают сложение соответствующих координат векторов.

Для вершин, находящихся на границе Q_1, из утверждения 1 следует: если для источника (x, y) выполняется $y = -x$, $-\lfloor D/2 \rfloor \leqslant x \leqslant -1$, то Z_2 не является ближайшим нулём ни для какой вершины (x', y'); если для источника (x, y) выполняется $y = x + 1$, $0 \leqslant x < \lceil D/2 \rceil$, то $Z_1 + Z_2$ не является ближайшим нулём ни для какой вершины (x', y').

Теперь, зная, как определяются векторы кратчайших путей в любой приёмник из источника, принадлежащего Q_1, можем получить для источников, принадлежащих Q_i,

$i = 2, 3, 4$, векторы кратчайших путей в любой приёмник с помощью соответствующих ротаций источника (направление ротаций показано стрелкой на рис. 2), приёмника и соседних нулей. На рис. 2 отмечены знаком «·» вершины $(y, -x) = (3, 1) \in Q_2$, $(-x, -y) = (1, -3) \in Q_3$ и $(-y, x) = (-3, -1) \in Q_4$, полученные ротацией источника $(x, y) = (-1, 3) \in Q_1$. Рис. 4 даёт пример распределения вершин приёмников по областям, относящимся к ближайшим соседним нулям для источника u с координатами $(3, 1)$, принадлежащего Q_2. В ромбе R_D с центром в Z_0 разными цветами и римскими цифрами обозначены: I — приёмники, находящиеся на расстоянии не более D от u и относящиеся соответственно к Z_0; II — приёмники, для которых ближайшим нулем из u является Z_2; III — приёмники, для которых ближайший нуль — это $Z_2 - Z_1$; IV — приёмники, для которых ближайший нуль $-Z_1$.

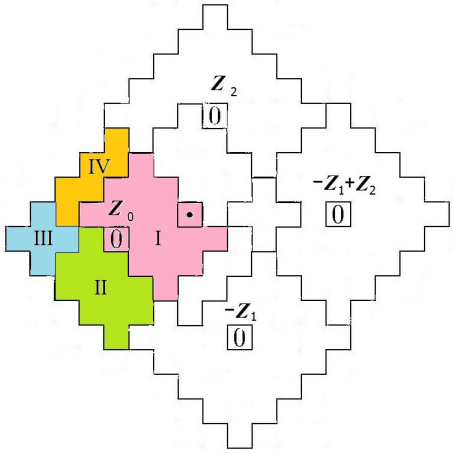

Рис. 4. Источник $(x, y) \in Q_2$

Таким образом, по аналогии с утверждением 1 для источников $(x, y) \in Q_2$ получаем

Утверждение 2. Пусть в графе $C(N_D; D, D+1)$ диаметра $D > 1$ даны вершины $u = (x, y)$ и $v = (x', y') \neq u$, такие, что $|x| + |y| \leqslant D$, $|x'| + |y'| \leqslant D$ и $-x < y \leqslant x$. Тогда вектор кратчайшего пути из u в v имеет следующий вид:

$$(X, Y) = \begin{cases} (x' - x, y' - y), & \text{если } |x' - x| + |y' - y| \leqslant D, \\ (x' - x, y' - y) - Z_1, & \text{если } y' - y - D > x' - x \text{ и } y' - y + D + 1 \geqslant x - x', \\ (x' - x, y' - y) + Z_2, & \text{если } y' - y - D < x' - x \text{ и } y' - y + D < x - x', \\ (x' - x, y' - y) - Z_1 + Z_2 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Аналогично определяются векторы кратчайших путей между вершинами, когда источник находится в Q_3 или Q_4. Согласно полученным результатам, разработан алгоритм RDGN (Routing in Dense Gaussian Networks) поиска кратчайших путей в плотных Гауссианских сетях (алгоритм 1).

Алгоритм 1. RDGN — поиск кратчайших путей в плотных Гауссианских сетях

Вход: (x, y) — источник; (x', y') — приёмник; D — диаметр графа.
Выход: (X, Y) — вектор кратчайших путей из (x, y) в (x', y').

$X := x' - x$; $Y := y' - y$.
Если $|X| + |Y| > D$, **то**
  // пп. 3–7 — источник в квадранте Q_1
  Если $(y > x)\&(y \geqslant -x)$, **то**
    Если $(Y + X < -D)$ & $(Y - X \geqslant -D - 1)$, **то**
      $(X, Y) := (X, Y) + Z_2$,
    иначе
    Если $(Y + X > -D)$ & $(Y - X < -D)$, **то**
      $(X, Y) := (X, Y) + Z_1$,
      иначе $(X, Y) := (X, Y) + Z_1 + Z_2$,
  иначе *// пп. 9–13 — источник в квадранте Q_2*
    Если $(y \leqslant x)\&(y > -x)$, **то**
      Если $(Y + X < -D)\&(Y - X < D)$, **то**
        $(X, Y) := (X, Y) + Z_2$,
      иначе
        Если $(Y + X \geqslant -D - 1)\&(Y - X > D)$, **то**
          $(X, Y) := (X, Y) - Z_1$,
          иначе $(X, Y) := (X, Y) + Z_2 - Z_1$,
      иначе *// пп. 15–19 — источник в квадранте Q_3*
        Если $(y < x)\&(y \leqslant -x)$, **то**
          Если $(Y + X > D)\&(Y - X \leqslant D + 1)$, **то**
            $(X, Y) := (X, Y) - Z_2$,
          иначе
            Если $(Y + X < D)\&(Y - X > D)$, **то**
              $(X, Y) := (X, Y) - Z_1$,
              иначе $(X, Y) := (X, Y) - Z_1 - Z_2$,
        иначе *// пп. 21–24 — источник в квадранте Q_4*
          Если $(Y + X > D)\&(Y - X > -D)$, **то**
            $(X, Y) := (X, Y) - Z_2$,
          иначе
            Если $(Y + X \leqslant D + 1)\&(Y - X < -D)$, **то**
              $(X, Y) := (X, Y) + Z_1$
              иначе $(X, Y) := (X, Y) - Z_2 + Z_1$.

Корректность работы алгоритма RDGN проверена для плотных Гауссианских сетей с числом вершин от 13 до 2521 на множестве всех пар вершин «источник — приёмник» в системе Wolfram Mathematica 10 сравнением полученных кратчайших путей с результатами работы алгоритма Дейкстры [22].

2. Оценки алгоритма поиска кратчайших путей

Приведём некоторые теоретические оценки алгоритма RDGN. Используемое количество переменных: четыре входных x, y, x', y', две выходных X, Y и глобальная переменная D. Для плотных Гауссианских сетей диаметр $D = \lfloor\sqrt{N/2}\rfloor$. Кроме того, $|x|, |y|, |x'|, |y'|, |X|, |Y| \leqslant D$. Для хранения D в маршрутизаторе требует-

ся $\lceil \log_2 \lfloor \sqrt{N/2} \rfloor \rceil$ битов. Для хранения входных и выходных переменных добавляем по одному биту для знака и получаем: общее количество необходимой памяти в битах для хранения переменных в алгоритме RDGN равно $M = 7\lceil \log_2 \lfloor \sqrt{N/2} \rfloor \rceil + 6$. Таким образом, по сравнению с алгоритмом поиска кратчайших путей из [1, 2] происходит более чем трёхкратное уменьшение требуемой памяти. Алгоритм RDGN также требует меньше ресурсов памяти в NoC по сравнению с [15 – 17] за счёт меньшего количества переменных, используемых для его работы.

Число операций разных типов, применяемых в алгоритме RDGN, приведено в таблице. Показаны минимальное (min) и максимальное (max) значения числа операций при исполнении алгоритма и среднее время выполнения одной операции в наносекундах, найденное в [15] (при подсчёте использовался язык программирования C#, процессор Intel Core i5-6500).

Операция	$\lvert a \rvert$	$=$	$\&$	$+$	$-$	$\times$	$<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$	$\div$
Время, нс	6,436	2,978	0,655	0,770	0,672	0,722	0,692	2,530
min/max	2/2	2/4	0/5	2/8	1/12	0/0	1/11	0/0

По сравнению с алгоритмами поиска кратчайших путей в плотных Гауссианских сетях из [1, 2, 4, 15 – 17, 21] алгоритм RDGN выполняет больше операций сравнения, но намного меньше затратных по времени операций взятия абсолютной величины ($|a|$) и присваивания ($=$) (например, в 8 раз меньше, чем в алгоритме 1 из [1]) и, в отличие от алгоритмов из [4, 21], не использует операций деления ($\div$).

Кроме того, моделирование парных обменов в сети типа «каждый — каждому», проведённое для плотных Гауссианских сетей с числом вершин $13 \leqslant N_D \leqslant 313$, показало следующий результат: условие $|X| + |Y| \leqslant D$ алгоритма выполняется в 52–56 % случаев пар «источник — приёмник», а это означает минимальное число исполняемых операций алгоритма RDGN и соответственно минимальное время его работы. На рис. 5 приведены результаты моделирования. Параметр λ означает отношение числа пар «источник — приёмник» с l_1-нормой, меньшей или равной диаметру, к общему числу пар вершин плотных Гауссианских сетей с числов вершин N.

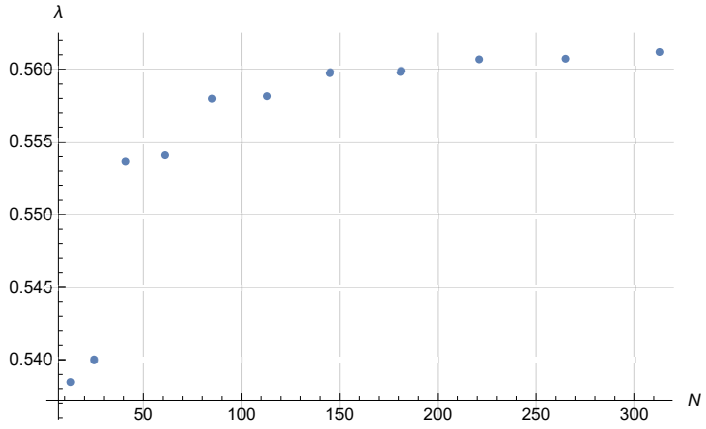

Рис. 5. Относительное сокращение числа операций алгоритма RDGN при выполнении условия $|X| + |Y| \leqslant D$

Заключение

Для семейства плотных Гауссианских сетей, как перспективной топологии сетей на кристалле по сравнению с 2D torus и 2D mesh, предложен новый алгоритм поиска

кратчайших путей между вершинами графа, использующий относительную адресацию вершин и позволяющий, в отличие от ряда известных алгоритмов маршрутизации, рассчитать кратчайшие пути без суммирования с координатами всех соседних нулей в плотной укладке графов на плоскости. Теоретические оценки алгоритма подтверждают уменьшение затрат памяти и времени выполнения при реализации в сети на кристалле по сравнению с известными алгоритмами маршрутизации, реализованными в NoC. В будущем планируется апробация разработанного алгоритма в сети на кристалле и экспериментальное сравнение его оценок памяти и эффективности с другими алгоритмами маршрутизации, а также исследование возможности расширения разработки аналогичных алгоритмов маршрутизации для любого числа вершин графов семейства оптимальных двумерных циркулянтов [10], к которому плотные Гауссианские сети принадлежат по определению.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Martinez C., Vallejo E., Beivide R., et al.* Dense Gaussian networks: Suitable topologies for on-chip multiprocessors // Intern. J. Parallel Programming. 2006. V. 34. P. 193–211.
2. *Martinez C., Vallejo E., Moreto M., et al.* Hierarchical topologies for large-scale two-level networks // XVI Jornadas de Paralelismo, Granada, Spain, September 2005. `https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.149.7372`.
3. *Martinez C., Beivide R., Stafford E., et al.* Modeling toroidal networks with the Gaussian integers // IEEE Trans. Computers. 2008. V. 57. No. 8. P. 1046–1056.
4. *Flahive M. and Bose B.* The topology of Gaussian and Eisenstein — Jacobi interconnection networks // IEEE Trans. Parall. Distrib. Syst. 2010. V. 21. No. 8. P. 1132–1142.
5. *Pay K.-J., Yang J.-S., Chen G.-Y., and Chang J.-M.* Configuring protection routing via completely independent spanning trees in Dense Gaussian On-Chip Networks // IEEE Trans. Netw. Sci. Eng. 2022. V. 9. No. 2. P. 932–946.
6. *Touzene A.* On all-to-all broadcast in dense Gaussian network on-chip // IEEE Trans. Parall. Distrib. Syst. 2015. V. 26. No. 4. P. 1085–1095.
7. *Alsaleh O., Bose B., and Hamdaoui B.* On-to-many node-disjoint paths routing in dense Gaussian networks // Computer J. 2015. V. 58. No. 2. P. 173–187.
8. *Bermond J.-C., Comellas F., and Hsu D. F.* Distributed loop computer networks: a survey // J. Parallel Distrib. Comput. 1995. No. 24 (1). P. 2–10.
9. *Hwang F. K.* A survey on multi-loop networks // Theor. Comput. Sci. 2003. V. 299. P. 107–121.
10. *Монахова Э. А.* Структурные и коммуникативные свойства циркулянтных сетей // Прикладная дискретная математика. 2011. № 3 (13). С. 92–115.
11. *Monakhova E. A., Romanov A. Y., and Lezhnev E. V.* Shortest path search algorithm in optimal two-dimensional circulant networks: Implementation for Networks-on-Chip // IEEE Access. 2020. V. 8. P. 215010–215019.
12. *Zerovnik J. and Pisanski T.* Computing the diameter in multiple-loop networks // J. Algorithms. 1993. V. 14. P. 226–243.
13. *Gomez D., Gutierrez J., Ibeas A., et al.* On finding a shortest path in circulant graphs with two jumps // LNCS. 2005. V. 3595. P. 777–786.
14. *Cai J. Y., Havas G., Mans B., et al.* On routing in circulant graphs // LNCS. 1999. V. 1627. P. 360–369.
15. *Monakhova E. A., Monakhov O. G., and Romanov A. Yu.* Routing algorithms in optimal degree four circulant networks based on relative addressing: Comparative analysis for

Networks-on-Chip // IEEE Trans. Network Science and Engineering. 2022. https://ieeexplore.ieee.org/document/9910381.

16. *Monakhova E. and Monakhov O.* A generalized routing algorithm for a family of optimal 2D circulant networks based on relative addressing // Proc. 17th Inter. Asian School-Seminar (OPCS-21), Novosibirsk, Russia. 2021. P. 55–59.
17. *Jha P. K.* Dimension-order routing algorithms for a family of minimal-diameter circulants // J. Inter. Networks. 2013. V. 14. No. 1. P. 1350002 (24 pages).
18. *Монахова Э. А.* Поиск кратчайших путей в оптимальных двумерных циркулянтах // Прикладная дискретная математика. 2020. № 47. С. 87–100.
19. *Romanov A. Y.* Development of routing algorithms in networks-on-chip based on ring circulant topologies // Heliyon. 2019. V. 5. Iss. 4. Article e01516.
20. *Romanov A. Y., Lezhnev E. V., Glukhikh A. Y., and Amerikanov A. A.* Development of routing algorithms in networks-on-chip based on two-dimensional optimal circulant topologies // Heliyon. Jan. 2020. V. 6. No. 1. Art. No. e03183.
21. *Camarero C., Martinez C., and Beivide R.* L-networks: A topological model for regular two-dimensional interconnection networks // IEEE Trans. Computers. 2013. V. 62. No. 7. P. 1362–1375.
22. *Dijkstra E. W.* A note on two problems in connexion with graphs // Numer. Math. 1959. V. 1. No. 1. P. 269–271.

REFERENCES

1. *Martinez C., Vallejo E., Beivide R., et al.* Dense Gaussian networks: Suitable topologies for on-chip multiprocessors. Inter. J. Parallel Programming, 2006, vol. 34, pp. 193–211.
2. *Martinez C., Vallejo E., Moreto M., et al.* Hierarchical topologies for large-scale two-level networks. XVI Jornadas de Paralelismo, Granada, Spain, September 2005. https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.149.7372.
3. *Martinez C., Beivide R., Stafford E., et al.* Modeling toroidal networks with the Gaussian integers. IEEE Trans. Comput., 2008, vol. 57, no. 8, pp. 1046–1056.
4. *Flahive M. and Bose B.* The topology of Gaussian and Eisenstein — Jacobi interconnection networks. IEEE Trans. Parall. Distrib. Syst., 2010, vol. 21, no. 8, pp. 1132–1142.
5. *Pay K.-J., Yang J.-S., Chen G.-Y., and Chang J.-M.* Configuring protection routing via completely independent spanning trees in Dense Gaussian On-Chip Networks. IEEE Trans. Netw. Sci. Eng., 2022, vol. 9, no. 2, pp. 932–946.
6. *Touzene A.* On all-to-all broadcast in dense Gaussian network on-chip. IEEE Trans. Parall. Distrib. Syst., 2015, vol. 26, no. 4, pp. 1085–1095.
7. *Alsaleh O., Bose B., and Hamdaoui B.* On-to-many node-disjoint paths routing in dense Gaussian networks. Computer J., 2015, vol. 58, no. 2, pp. 173–187.
8. *Bermond J.-C., Comellas F., and Hsu D. F.* Distributed loop computer networks: a survey. J. Parallel Distrib. Comput., 1995, no. 24 (1), pp. 2–10.
9. *Hwang F. K.* A survey on multi-loop networks. Theor. Comput. Sci., 2003, vol. 299, pp. 107–121.
10. *Monakhova E. A.* Strukturnye i kommunikativnye svoystva tsirkulyantnykh setey [Structural and communicative properties of circulant networks]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2011, no. 3 (13), pp. 92–115. (in Russian)
11. *Monakhova E. A., Romanov A. Y., and Lezhnev E. V.* Shortest path search algorithm in optimal two-dimensional circulant networks: Implementation for Networks-on-Chip. IEEE Access, 2020, vol. 8, pp. 215010–215019.

12. *Zerovnik J. and Pisanski T.* Computing the diameter in multiple-loop networks. J. Algorithms, 1993, vol. 14, pp. 226–243.
13. *Gomez D., Gutierrez J., Ibeas A., et al.* On finding a shortest path in circulant graphs with two jumps. LNCS, 2005, vol. 3595, pp. 777–786.
14. *Cai J. Y., Havas G., Mans B., et al.* On routing in circulant graphs. LNCS, 1999, vol. 1627, pp. 360–369.
15. *Monakhova E. A., Monakhov O. G., and Romanov A. Yu.* Routing algorithms in optimal degree four circulant networks based on relative addressing: Comparative analysis for Networks-on-Chip. IEEE Trans. Network Science and Engineering. 2022. `https://ieeexplore.ieee.org/document/9910381`.
16. *Monakhova E. and Monakhov O.* A generalized routing algorithm for a family of optimal 2D circulant networks based on relative addressing. Proc. 17th Intern. Asian School-Seminar (OPCS-21), Novosibirsk, Russia, 2021, pp. 55–59.
17. *Jha P. K.* Dimension-order routing algorithms for a family of minimal-diameter circulants. J. Inter. Networks, 2013, vol. 14, no. 1, pp. 1350002 (24 pages).
18. *Монахова Э. А.* Poisk kratchajshih putej v optimal'nyh dvumernyh cirkulyantah [Search for the shortest paths in optimal two-dimensional circulants]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2020, no. 47, pp. 87–100. (in Russian)
19. *Romanov A. Yu.* Development of routing algorithms in networks-on-chip based on ring circulant topologies. Heliyon, 2019, vol. 5, iss. 4, article e01516.
20. *Romanov A. Y., Lezhnev E. V., Glukhikh A. Y., and Amerikanov A. A.* Development of routing algorithms in networks-on-chip based on two-dimensional optimal circulant topologies. Heliyon, 2020, vol. 6, no. 1, art. no. e03183.
21. *Camarero C., Martinez C., and Beivide R.* L-networks: A topological model for regular two-dimensional interconnection networks. IEEE Trans. Computers, 2013, vol. 62, no. 7, pp. 1362–1375.
22. *Dijkstra E. W.* A note on two problems in connexion with graphs. Numer. Math., 1959, vol. 1, no. 1, pp. 269–271.