ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2022 Математика и механика № 80
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 512.542 MSC: 20E28
doi: 10.17223/19988621/80/3

Конечные группы с перестановочными строгими обобщенно максимальными подгруппами

Юлия Владимировна Горбатова

Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ (Брянский филиал), Брянск, Россия, g.julia32@yandex.ru

Аннотация. Описана структура конечных групп, в которых любая строго 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной строго 3-максимальной подгруппой. Показано, что класс групп с указанным свойством совпадает с классом групп, в которых любая 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной 3-максимальной подгруппой, и, как следствие, такие группы являются разрешимыми. В качестве вспомогательных результатов в работе описано строение групп, в которых любая строго 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной максимальной подгруппой. В частности, показано, что класс таких групп совпадает с классом групп, в которых любая 2-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами, и, как следствие, такие группы являются сверхразрешимыми.
Ключевые слова: разрешимая группа, i-максимальная подгруппа; строго i-максимальная подгруппа, нормальная подгруппа, нильпотентная группа, сверхразрешимая группа, группа Шмидта

Для цитирования: Горбатова Ю.В. Конечные группы с перестановочными строгими обобщенно максимальными подгруппами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 80. С. 26–38. doi: 10.17223/19988621/80/3

Original article

Finite groups with permuted strongly generalized maximal subgroups

Yulia V. Gorbatova

Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Bryansk Branch), Bryansk, Russian Federation, g.julia32@yandex.ru

Abstract. Let G be a finite group. If there is a maximal subgroup M in G such that $H \le M$ and H is a maximal subgroup of M, then H is called the 2-maximal subgroup of G. The 3-maximal subgroups can be defined similarly. Note that the n-maximal subgroup

of the group G is called strongly the n-maximal if it is not the n-maximal subgroup in any proper subgroup of the group G.
This paper is devoted to describing the structure of the groups in which any strongly 2-maximal subgroup is permutable with the arbitrary strongly 3-maximal subgroup. The class of groups with this property is proved to coincide with the class of groups in which any 2-maximal subgroup is permuted with the arbitrary 3-maximal subgroup, and, as a consequence, such groups are solvable. As an auxiliary result, this work presents a description of groups in which any strongly 2-maximal subgroup is permutable with an arbitrary maximal subgroup. The class of such groups is shown to coincide with the class of the groups in which any 2-maximal subgroup is permutable with all maximal subgroups and, as a consequence, such groups are supersolvable.
Keywords: solvable group, i-maximal subgroup, strongly i-maximal subgroup, normal subgroup, nilpotent group, supersolvable group, Schmidt group

For citation: Gorbatova, Y.V. (2022) Finite groups with permuted strongly generalized maximal subgroups. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 26–38. doi: 10.17223/19988621/80/3

Введение

Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными. Напомним ряд основных понятий, используемых в работе.

Подгруппа A перестановочна с подгруппой B в группе G, если $AB = BA$.

Группа Шмидта – это ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны.

Рассмотрим ряд подгрупп вида $G_3 \leq G_2 \leq G_3 \leq G$, где G_1 – максимальная подгруппа в G, G_2 – максимальная подгруппа в G_1, G_3 – максимальная подгруппа в G_2. Тогда G_2 и G_3 называются 2-максимальной подгруппой и 3-максимальной подгруппой в G соответственно.

Кроме того, некоторая подгруппа группы G называется строго i-максимальной, если она i-максимальна в G, но при этом не является i-максимальной ни в одной собственной подгруппе группы G для $i \geq 2$.

В данной статье рассматривается одно из направлений теории групп, связанное с анализом вопроса: как на строение группы влияет наличие в ней некоторых систем перестановочных подгрупп? Отметим, в частности, работы [1, 2], в которых получено строение групп, в которых любая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми 2-максимальными подгруппами или со всеми максимальными подгруппами. Опираясь на эти результаты, на Гомельском алгебраическом семинаре (2005) В.С. Монаховым и О.И. Тавгенем были сформулированы задачи описания точного строения групп с перестановочными 2-максимальными подгруппами, а также групп с перестановочными 3-максимальными подгруппами. Эти две задачи в ненильпотентном случае были решены в работе автора [3]. В связи с последним результатом возникает вопрос описания ненильпотентных групп с перестановочными строго i-максимальными подгруппами, который был решен автором в классе разрешимых групп для $i = 2, 3$ в недавней работе [4]. В частности, было доказано, что класс ненильпотентных разрешимых групп с перестановочными i-максимальными подгруппами совпадает с классом ненильпотентных разрешимых групп с перестановочными строго i-максимальными подгруппами ($i = 2, 3$).

Данная работа посвящена описанию структуры групп, в которых любая строго 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной строго 3-максимальной подгруппой. Доказано, что класс групп с указанным свойством совпадает с классом групп, в которых любая 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной 3-максимальной подгруппой, и, как следствие, такие группы являются разрешимыми. Данный результат позволяет усилить формулировки основных теорем более ранней работы [1], заменив условие перестановочности всех 3-максимальных и 2-максимальных подгрупп на условие перестановочности только строго 3-максимальных и строго 2-максимальных подгрупп. В качестве вспомогательных результатов в работе описано также строение групп, в которых каждая строго 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной максимальной подгруппой. Показано, что класс таких групп совпадает с классом групп, в которых любая 2-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами, и, как следствие, такие группы являются сверхразрешимыми.

1. Вспомогательные результаты и условные обозначение

Приведем основные обозначения и результаты, используемые в работе. Пусть G – группа. Тогда:

$|G|$ – порядок группы G;

$F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G, т.е. произведение всех нормальных нильпотентных подгрупп группы G;

$O_p(G)$ – наибольшая нормальная p-подгруппа группы G;

$|G:H|$ – индекс подгруппы H в группе G;

$M_G = Core_G(H)$ – ядро подгруппы M в группе G, т.е. пересечение всех подгрупп, сопряженных с M в группе G;

$[N]M$ – полупрямое произведение нормальной подгруппы N группы G и подгруппы M группы G;

G' – коммутант группы G, т.е. подгруппа, порожденная коммутаторами всех элементов группы G;

$Z(G)$ – центр группы G;

$\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G, т.е. пересечение всех максимальных подгрупп группы G;

$\langle x \rangle$ – циклическая подгруппа, порожденная элементом x.

Лемма 1.1 [5. Леммы 1.43, 1.44]. *Пусть A и B – собственные подгруппы группы G. Тогда*:

(1) *Если $G = AB$, то $G = AB^x$ для всех $x \in G$*;

(2) $G \neq AA^x$ *для всех* $x \in G$.

Лемма 1.2 [6. Гл. VI, теоремы 26.1, 26.2]. *Если G – группа Шмидта, тогда*:

(1) $G = [P]\langle a \rangle$, *где P и $\langle a \rangle$ – силовские p-подгруппа и q-подгруппа группы G, соответственно*;

(2) *G имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются группы* $P\langle a^q \rangle$ *и* $P'\langle a \rangle$;

(3) $G' = P$;

(4) $\Phi(G) = Z(G) = P' \times \langle a^q \rangle$;

(5) $P/\Phi(P)$ – *главный фактор группы G, причем если* $|P/\Phi(P)| = p^\alpha$, *то* p^α *сравнимо с единицей по модулю q*;

(6) *Наибольшая нормальная подгруппа группы G, строго содержащаяся в P, совпадает с* $\Phi(P) = P' = C_P(a)$;

(7) *Если P абелева, то она элементарна*;

(8) *Если P неабелева, то ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют экспоненту p*.

Лемма 1.3 [7. Следствие 2.5]. *Предположим, что группа G не является нильпотентной. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) *в группе G каждая* 2-*максимальная подгруппа нормальна*;

(2) *в группе G каждая строго* 2-*максимальная подгруппа нормальна*;

(3) *в группе G каждая 2-максимальная подгруппа S-квазинормальна*;

(4) *в группе G каждая строго* 2-*максимальная подгруппа S-квазинормальна*.

Лемма 1.4 [7. Теорема 2.1]. *Пусть G* – *ненильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) *G является группой Шмидта, нормальная силовская подгруппа которой имеет простой порядок*;

(2) *каждая* 2-*максимальная подгруппа группы G нормальна*;

(3) *каждая строго* 2-*максимальная подгруппа группы G S-квазинормальна*.

Теорема 1.1 [1. Теорема 2.4]. *Каждая максимальная подгруппа группы G перестановочна с каждой* 2-*максимальной подгруппой из G в том и только в том случае, когда G либо нильпотентна, либо G является сверхразрешимой группой порядка* $|G| = pq^\alpha$ *такой, что силовская q-подгруппа* $Q = \langle x \rangle$ *из G является циклической и* $Q_G = \langle x^{\alpha-1} \rangle$.

Теорема 1.2 [1. Теорема 3.5]. *Пусть G – конечная ненильпотентная группа. Тогда каждая* 2-*максимальная подгруппа из G перестановочна со всеми* 3-*максимальными подгруппами из G в том и только в том случае, когда либо* $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, *где* p, q, r *– различные простые числа и* $\alpha + \beta + \gamma \le 3$, *либо G является группой одного из следующих типов*:

(1) *G – группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами и* $|G| = p^a q^b$, *где* $a + b > 3$;

(2) $G = [P]Q$ *– группа Шмидта, где P – группа кватернионов порядка* 8 *и Q – группа порядка* 3,

либо G – сверхразрешимая группа одного из типов:

(3) $G = [P]Q$ и $|Q : C_Q(P)| = q$, *где P – группа простого порядка* $p \ne q$, *Q – нециклическая группа с порядком* $|Q| = q^a$ ($a > 2$) *и все максимальные подгруппы из Q, отличные от* $C_Q(P)$, *являются циклическими*;

(4) $G = [P]Q$, *где P – группа порядка* p^2 (*p – простое число*), *все максимальные подгруппы из P нормальны в G,* $Q = \langle a \rangle$ *– циклическая q-группа* ($q \ne p$) *с порядком* $|Q| > q$ *и* $C_Q(P) = \langle a^q \rangle$;

(5) $G=[P]Q$, *где* $P=\langle a\rangle$ *– циклическая группа порядка* p^3 (*p – простое число*), *Q – группа простого порядка* $q\neq p$ *и* $C_G(a^2)=P$;

(6) $G=[P\times Q]R$, *где P – группа простого порядка p, Q – группа простого порядка* $q\neq p$, *R – циклическая группа порядка* $|R|=r^a$ (*a* > 1), *R не является нормальной в G, но всякая максимальная подгруппа из R нормальна в G.*

2. Структура групп, для которых любая строго 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной максимальной подгруппой

Лемма 2.1. *Пусть G – примитивная разрешимая группа. Тогда и только тогда в группе G любая строго* 2*-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной максимальной подгруппой, когда G =* [*N*]*M, причем N и M – группы различных простых порядков*.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть *G* – примитивная разрешимая группа, в которой любая строго 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной максимальной подгруппой. Тогда, в силу строения примитивных групп (см.: [8. Ch. A, 15.6 Theorem]), имеем *G* = [*N*]*M*, где $N=F(G)=O_p(G)=C_G(N)$ и *M* – максимальная подгруппа из *G* с единичным ядром.

Пусть M_1 – максимальная подгруппа в *M*. Тогда M_1 является 2-максимальной подгруппой в *G*. Предположим вначале, что M_1 – строго 2-максимальная подгруппа в *G*. Тогда, в силу условия леммы, получаем $M_1^xM\leq G$ для всех элементов $x\in G$. Следовательно, имеет место ряд подгрупп $M\leq M_1^xM\leq G$. В силу максимальности *M* в *G*, имеем либо $M_1^xM=M$, либо $M_1^xM=G$. Если $M_1^xM=G$, то $M^xM=G$, что противоречит лемме 1.1 (2). Следовательно, $M_1^xM=M$. Это влечет $M_1^x\leq M$ для всех $x\in G$. Следовательно, $M_1\leq M_G=1$.

Предположим теперь, что M_1 не является строго 2-максимальной подгруппой в *G*. Это означает, что в группе *G* существует некоторая строго 2-максимальная подгруппа *T*, содержащая M_1. Тогда $M_1\leq M\cap T$ и имеет место ряд подгрупп $M_1\leq M\cap T\leq M$. В силу максимальности M_1 в *M* имеем либо $M_1=M\cap T$, либо $M\cap T=M$. Если $M\cap T=M$, то $M\leq T$, что противоречит максимальности *M* в *G*. Следовательно, $M_1=M\cap T$. Так как *T* – строго 2-максимальная подгруппа в *G*, то, по условию, $T^xM\leq G$ для всех элементов $x\in G$. Следовательно, имеет место ряд подгрупп $M\leq T^xM\leq G$. В силу максимальности подгруппы *M* в *G*, имеем либо $T^xM=M,$ либо $T^xM=G$. Если $T^xM=M$, то $T^x\leq M$ для всех $x\in G$. Следовательно, $M_1<T\leq M_G=1$. Пусть теперь $T^xM=G$. Тогда

$$|G:M|=\frac{|G|}{|M|}=\frac{|T||M|}{|T\cap M||M|}=\frac{|T|}{|T\cap M|}=\frac{|T|}{|M_1|}=|N|.$$

Следовательно, $T=[N]M_1$. Так как при этом *T* является строго 2-максимальной подгруппой в *G* и *G* = [*N*]*M*, то M_1 является строго 2-максимальной подгруппой в M, что противоречит максимальности M_1 в M. Следовательно, случай $T^x M = G$ не имеет места.

Итак, мы показали, что для произвольной максимальной подгруппы M_1 из M верно $M_1 \le M_G = 1$. Это означает, что M является группой простого порядка, например $|M| = q$. Поэтому N является максимальной подгруппой в G.

Предположим далее, что N имеет неединичную максимальную подгруппу, например N_1. Тогда N_1 является строго 2-максимальной подгруппой в G с $|G : N_1| = pq$ и, в силу условия, $N_1 M \le G$. Снова ввиду максимальности подгруппы M в G получаем $N_1 M = M$. Поэтому $N_1 \le M$ и, следовательно, $N_1 = 1$. Полученное противоречие показывает, что $|N| = p$. Таким образом, $G = [N]M$, где $|N| = p$, $|M| = q$ и $p \ne q$.

Достаточность. Пусть $G = [N]M$, где $|N| = p$, $|M| = q$ и $p \ne q$. Тогда, очевидно, единичная 2-максимальная подгруппа из G перестановочна с любой ее максимальной подгруппой. *Лемма доказана.*

Лемма 2.2. *Пусть G – группа, в которой любая строго 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной максимальной подгруппой. Тогда G разрешима.*

Доказательство. Предположим, что группа G является контрпримером минимального порядка, т.е. всякая группа, удовлетворяющая условию леммы, порядок которой меньше порядка G, является разрешимой. Тогда, очевидно, G не может быть нильпотентной группой, а значит, она содержит некоторую максимальную подгруппу M, причем M не является нормальной в группе G. Тогда $M \ne M_G$. Таким образом, мы можем рассмотреть примитивную фактор-группу G/M_G. Так как для фактор-групп сохраняется условие перестановочности подгрупп, то в G/M_G любая строго 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной максимальной подгруппой, и в силу допущения G/M_G разрешима. Тогда по лемме 2.1 имеем:

$$G/M_G = \left[NM_G/M_G \right]\left(M/M_G \right), \text{ где } \left| NM_G/M_G \right| = p \text{ и } \left| M/M_G \right| = q \ (p \ne q).$$

Таким образом, M_G является единственной неединичной максимальной подгруппой в группе M. Следовательно, M – циклическая примарная группа (см.: [9. Kapitel III, 8.3 Satz]). Заметим также, что

$$\left| G/M \right| = \left| \frac{G/M_G}{M/M_G} \right| = \left| NM_G/M_G \right| = p .$$

Последнее означает сверхразрешимость фактор-группы G/M_G. При этом в силу цикличности M ядро M_G является циклической q-группой, следовательно, G сверхразрешима в силу [5. Лемма 4.46 (1)], что противоречит нашему предположению о группе G. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 2.1. *Тогда и только тогда любая максимальная подгруппа группы G перестановочна с произвольной ее строго 2-максимальной подгруппой, когда группа G либо нильпотентна, либо является сверхразрешимой группой Шмидта.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть G не является нильпотентной группой и в G любая строго 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной максимальной подгруппой. Тогда, согласно лемме 2.2, G разрешима. Если в группе G каждая максимальная подгруппа является нормальной, то G нильпотентна (см. [5. Теорема 3.13]), что противоречит допущению. Следовательно, группа G имеет максимальную подгруппу M, которая не является нормальной в G. Тогда в силу разрешимости G справедливо $\left|G:M\right| = p^{\alpha}$ для некоторого простого числа p.

Рассмотрим произвольную максимальную подгруппу M_1 в группе M. Очевидно, что M_1 является 2-максимальной подгруппой в G. Предположим, что M_1 – строго 2-максимальная подгруппа в G. Тогда, по условию, $M_1^{\,x}M \le G$ для всех элементов $x \in G$. Следовательно, имеет место ряд подгрупп $M \le M_1^{\,x}M \le G$. В силу максимальности M в M имеем либо $M_1^{\,x}M = M$, либо $M_1^{\,x}M = G$. Если $M_1^{\,x}M = G$, то $M^xM = G$, что противоречит лемме 1.1 (2). Следовательно, $M_1^{\,x}M = M$. Это влечет $M_1^{\,x} \le M$ для всех $x \in G$, значит, $M_1 \le M_G$. В силу максимальности подгруппы M_1 в M это означает, что $M_1 = M_G$ является нормальной подгруппой в G.

Предположим теперь, что M_1 не является строго 2-максимальной подгруппой в G. В этом случае существует ряд подгрупп $M_1 \le G_2 \le G_1 \le G$, где G_1 – максимальная подгруппа в G, G_2 – максимальная подгруппа в G_1, причем G_2 является строго 2-максимальной подгруппой в G. По условию имеем $G_2^{\,x}G_1 \le G$ для всех элементов $x \in G$. Следовательно, $G_1 \le G_2^{\,x}G_1 \le G$, что в силу максимальности подгруппы G_1 в G влечет либо $G_2^{\,x}G_1 = G_1$, либо $G_2^{\,x}G_1 = G$. Если $G_2^{\,x}G_1 = G$, то $G_1^{\,x}G_1 = G$, что противоречит лемме 1.1 (2). Следовательно, $G_2^{\,x}G_1 = G_1$. Это влечет $G_2^{\,x} \le G_1$ для всех $x \in G$, следовательно, $G_2 \le (G_1)_G$. В силу максимальности подгруппы G_2 в G_1 это означает, что $G_2 = (G_1)_G$ является нормальной подгруппой в G.

Таким образом, произвольная 2-максимальная подгруппа M_1 группы G либо является строго 2-максимальной нормальной подгруппой в G, либо содержится в некоторой нормальной строго 2-максимальной подгруппе из G. Следовательно, произвольная строго 2-максимальная подгруппа нормальна в группе G, и, в силу леммы 1.3, произвольная 2-максимальная подгруппа нормальна в группе G. Тогда, согласно лемме 1.4, G является группой Шмидта, нормальная силовская подгруппа которой имеет простой порядок. Тогда, согласно лемме 1.2 (1), (2), максимальные подгруппы группы G имеют простые индесы, а значит, по теореме Хупперта, G является сверхразрешимой группой.

Достаточность. Если группа G нильпотентна, то каждая ее максимальная подгруппа нормальна в G, а значит, перестановочна с произвольной ее 2-максимальной подгруппой, в том числе и строго 2-максимальной подгруппой.

Предположим, что G – сверхразрешимая группа Шмидта. Согласно лемме 1.2 (1), (4), $G = \left[P\right]Q$, где P – силовская p-подгруппа, $Q = \left\langle a \right\rangle$ – циклическая q-группа, причем $\langle a^q \rangle \leq Z(G)$. По лемме 1.2 (2), подгруппа $P'\langle a \rangle$ максимальна в G и $F(G)$ не содержится в $P'\langle a \rangle$ (так как $F(G) = P\langle a^q \rangle$). Тогда, согласно [5. Теорема 4.56, следствие 2], $|G : P'\langle a \rangle| = p$, что влечет $|P : P'| = p$. Предположим, что P не является абелевой группой. В этом случае, по лемме 1.2 (8), $P' = \Phi(P)$ и, следовательно, $\Phi(P)$ является единственной максимальной подгруппой в P. Тогда, в силу [9. Kapitel III, 8.3 Satz], P является циклической, а значит, и абелевой группой, – противоречие. Следовательно, P – абелева группа, что влечет $P' = 1$. Так как при этом P' – максимальная подгруппа в P, то $|P| = p$. Тогда, в силу леммы 1.2 (2), каждая 2-максимальная подгруппа группы G является нормальной, а следовательно, перестановочной с любой максимальной подгруппой из G. *Теорема доказана*.

Теорема 2.1 позволяет усилить формулировку более ранней теоремы 1.1, заменив условие перестановочности всех 2-максимальных подгрупп на перестановочность только строго 2-максимальных подгрупп, что отражено в следствии 2.1.

Следствие 2.1. *Следующие условия равносильны*:

(a) *любая максимальная подгруппа группы перестановочна с произвольной ее* 2-*максимальной подгруппой*;

(b) *любая максимальная подгруппа группы перестановочна с произвольной ее строго* 2-*максимальной подгруппой*.

Доказательство. Пусть G – произвольная группа. Если G нильпотентна, то каждая ее максимальная подгруппа нормальна в G, а значит, перестановочна с произвольной ее 2-максимальной подгруппой, в том числе и строго 2-максимальной подгруппой, что влечет равносильность условий (a) и (b).

Предположим, что группа G не является нильпотентной и верно условие (a), т.е. любая максимальная подгруппа из G перестановочна с произвольной ее 2-максимальной подгруппой, в том числе и со строго 2-максимальной подгруппой. Следовательно, верно условие (b).

Предположим, что группа G не является нильпотентной и верно условие (b), т.е. любая максимальная подгруппа из G перестановочна с произвольной ее строго 2-максимальной подгруппой. Согласно теореме 2.1, G является сверхразрешимой группой Шмидта. Покажем, что в этом случае G удовлетворяет условию теоремы 1.1, т.е. $|G| = pq^\alpha$, силовская q-подгруппа $Q = \langle x \rangle$ из G является циклической и $Q_G = \langle x^{\alpha-1} \rangle$. Согласно лемме 1.2 (1), (4), $G = [P]Q$, где P – силовская p-подгруппа и $Q = \langle a \rangle$ – циклическая q-группа. Рассуждая аналогично, как и при доказательстве достаточности в теореме 2.1, можно показать, что $|P| = p$. Осталось показать, что $Q_G = \langle a^{\alpha-1} \rangle$, т.е. ядро подгруппы Q в G совпадает с максимальной подгруппой из Q. Согласно лемме 1.2 (4), максимальная подгруппа из Q содержится в центре группы G, а значит, является наибольшей нормальной подгруппой группы G, содержащейся в Q. Тогда, по [5. Лемма 3.18 (1)], Q_G совпадает с максимальной подгруппой из Q. Таким образом, G является группой, описанной в теореме 1.1, и, согласно этой теореме, каждая максимальная подгруппа группы G перестановочна с каждой 2-максимальной подгруппой из G. Следовательно, верно условие (a). *Следствие доказано.*

Следствие 2.2. *Пусть G – произвольная группа. Если любая максимальная подгруппа группы G перестановочна с произвольной строго 2-максимальной подгруппой, и порядок группы G делится более чем на два простых числа, то G нильпотентна.*

Доказательство. Предположим обратное, т.е. G – ненильпотентная группа. Так как в группе G любая максимальная подгруппа перестановочна с произвольной строго 2-максимальной подгруппой, то, по теореме 2.1, G является сверхразрешимой группой Шмидта. Тогда, в силу леммы 1.2 (1), порядок группы G делится в точности на два простых числа, – противоречие с условием. Следовательно, группа G нильпотентна. *Следствие доказано.*

Следствие 2.3. *Пусть G – произвольная группа. Если любая максимальная подгруппа группы G перестановочна с произвольной ее строго 2-максимальной подгруппой, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Согласно теореме 2.1, группа G, в которой любая максимальная подгруппа перестановочна с произвольной строго 2-максимальной подгруппой, либо нильпотентна, либо является сверхразрешимой группой Шмидта. Так как нильпотентные группы сверхразрешимы, то группа G сверхразрешима в каждом из двух возможных вариантов. *Следствие доказано.*

3. Структура групп, для которых любая строго 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной строго 3-максимальной подгруппой

Лемма 3.1. *Пусть G – произвольная группа. Если любая строго 2-максимальная подгруппа из G перестановочна с произвольной ее строго 3-максимальной подгруппой, то G разрешима.*

Доказательство. Предположим, что M – произвольная максимальная подгруппа группы G. Ввиду условия любая максимальная подгруппа из M перестановочна со всеми ее строго 2-максимальными подгруппами. Следовательно, по следствию 2.3, M сверхразрешима. Но тогда группа G является разрешимой в силу теоремы Хупперта о разрешимых группах со сверхразрешимыми максимальными подгруппами (см.: [7. Гл. VI, теорема 9.6]). *Лемма доказана.*

Лемма 3.2. *Если G – сверхразрешимая группа, то все ее n-максимальные подгруппы являются строго n-максимальными.*

Доказательство. Предположим, что K – произвольная n-максимальная подгруппа группы G. Тогда в группе G существует ряд максимальных подгрупп вида:

$$K = K_n \le K_{n-1} \le \ldots \le K_2 \le K_1 \le G\,,$$

где K_1 – максимальная подгруппа в G, K_2 – максимальная подгруппа в K_1, K_n – максимальная подгруппа в K_{n-1}. Согласно теореме Хупперта о сверхразрешимых группах, индекс $|G:K|$ делится в точности на n необязательно различных простых чисел.

Предположим, что M – произвольная максимальная подгруппа группы G, содержащая K. Покажем, что при этом K является $(n-1)$-максимальной подгруппой в M. Так как $|G:K|$ делится на n простых чисел, и $|G:K|$ также является простым числом в силу сверхразрешимости группы G, то индекс $|M:K| = \dfrac{|G:K|}{|G:M|}$ делится на $(n-1)$ необязательно различных простых чисел. Это означает, что K является

(n – 1)-максимальной подгруппой в M. Произвольность выбора подгруппы M означает, что K является строго n-максимальной подгруппой в G. *Лемма доказана*.

Следующая теорема позволяет усилить результат, полученный авторами в теореме 1.2, заменив условие перестановочности всех 2-максимальных и 3-максимальных подгрупп на перестановочность только строго 2-максимальных и строго 3-максимальных подгрупп.

Теорема 3.1. *Для ненильпотентной группы следующие условия равносильны*:

(a) *любая* 2-*максимальная подгруппа группы перестановочна с каждой ее* 3-*максимальной подгруппой*;

(b) *любая строго* 2-*максимальная подгруппа группы перестановочна с произвольной ее строго* 3-*максимальной подгруппой*.

Доказательство. Пусть G – ненильпотентная группа, и $|G| = p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}$, где p, q, r – различные простые числа и $\alpha+\beta+\gamma \le 3$. Тогда теорема, очевидно, верна, так как в этом случае 3-максимальные подгруппы в G единичны. Поэтому далее будем считать, что $|G| = p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}$, где p, q, r – различные простые числа и $\alpha+\beta+\gamma \ge 4$.

$(a) \Rightarrow (b)$. Пусть верно условие (a) теоремы. Тогда оно распространяется также на все строго 2-максимальные и строго 3-максимальные подгруппы. Таким образом, верно условие (b).

$(b) \Rightarrow (a)$. Пусть верно условие (b) теоремы. Тогда, согласно лемме 3.1, G является разрешимой группой. Кроме того, для каждой максимальной подгруппы из G выполняется условие теоремы 2.1, следовательно, в группе G каждая максимальная подгруппа либо нильпотентна, либо является сверхразрешимой группой Шмидта.

Если допустить, что все максимальные подгруппы из G нильпотентны, то G является группой Шмидта. Тогда, в силу леммы 1.2 (1), имеем $G = [P]Q$, где P – нормальная силовская p-подгруппа в G, Q – циклическая силовская q-подгруппа в G. Покажем, что в этом случае для G выполняется одно из двух условий: либо ее подгруппа P абелева, либо P – группа кватернионов порядка 8 и Q – группа порядка 3. С этой целью предположим, что группа G – контрпример минимального порядка.

Предположим вначале, что силовская q-подгруппа Q имеет собственную неединичную подгруппу Q_1 такую, что $|Q_1| = q$. В силу леммы 1.2 (4) подгруппа Q_1 содержится в центре группы G, следовательно, Q_1 является нормальной в G, и мы можем рассмотреть фактор-группу $G/Q_1 = \left[PQ_1/Q_1\right]\left(Q/Q_1\right)$, которая также является группой Шмидта. Так как для фактор-групп сохраняется условие перестановочности подгрупп, то любая строго 2-максимальная подгруппа из G/Q_1 перестановочна с произвольной строго 3-максимальной подгруппой из G/Q_1. Таким образом, в силу выбора G либо G/Q_1 является полупрямым произведением группы кватернионов порядка 8 на группу порядка 3, либо фактор-группа PQ_1/Q_1 абелева.

В последнем случае подгруппа P, изоморфная фактор-группе PQ_1/Q_1, также является абелевой, что невозможно в силу выбора G.

Значит $G/Q_1 = [PQ_1/Q_1](Q/Q_1)$ является группой Шмидта, в которой PQ_1/Q_1 – группа кватернионов порядка 8, и Q/Q_1 – группа порядка 3. Это означает, что подгруппа P, изоморфная фактор-группе PQ_1/Q_1, также является группой кватернионов порядка 8, и Q является циклической группой порядка 9. Тогда, в силу леммы 1.2 (2), (8), максимальными подгруппами в группе Шмидта $G = [P]Q$ являются подгруппы вида $P'Q = \Phi(P)Q$ и PQ_1, где $|P'| = 2$ и $|Q_1| = 3$. Тогда подгруппа Q является строго 2-максимальной в группе G, и подгруппа P_1 является строго 3-максимальной в группе G, где P_1 – максимальная подгруппа в P порядка 4. По условию Q и P_1 перестановочны, следовательно, P_1Q является подгруппой в G. Тогда в силу максимальности подгруппы $P'Q$ в группе G имеем $P_1 = P' = \Phi(P)$. Это означает, что P имеет единственную максимальную подгруппу порядка 2, что противоречит строению группы кватернионов порядка 8. Полученные противоречия показывают, что подгруппа Q не имеет собственной неединичной подгруппы Q_1 такой, что $|Q_1| = q$. Следовательно, $|Q| = q$.

Далее осталось показать, что P либо абелева, либо группа кватернионов порядка 8 и $q = 3$. Предположим, что P не является абелевой группой. В этом случае, в силу леммы 1.2 (2), максимальными подгруппами в G являются группы вида $P'Q$ и P, т.к. $|Q| = q$. Значит, подгруппа $P_1'Q$ является строго 2-максимальной в группе G, где P_1' – максимальная подгруппа в P'. Также, очевидно, подгруппа P_2 является строго 3-максимальной в группе G, где P_2 – произвольная 2-максимальная подгруппа в P. Согласно условию, $P_1'Q$ и P_1 перестановочны, следовательно, $P_2P_1'Q$ – подгруппа в G. Тогда в силу максимальности подгруппы $P'Q$ в группе G имеем $P_1'P_2 \le P'$. Следовательно, $P_2 \le P'$, т.е. любая 2-максимальная подгруппа из P содержится в P'. Это означает, что либо P является циклической, либо подгруппа P' является единственной 2-максимальной подгруппой в P. Если P циклическая, то она абелева, что невозможно в силу выбора P. Значит, P является группой кватернионов порядка 8 согласно [7. Гл. III, теорема 8.2]. В силу леммы 1.2 (5), (8), порядок фактор-группы $|P/P'| = 4$ сравним с единицей по модулю q, что влечет $q = 3$.

Итак, мы показали, что группа Шмидта G является либо полупрямым произведением группы кватернионов порядка 8 на группу порядка 3 (т.е. G изоморфна группе $SL(2, 3)$), либо группой с абелевыми силовскими подгруппами (т.е. группой Миллера–Морена). Значит, G – группа одного из типов (1)–(2), описанных в теореме 1.2.

Допустим теперь, что не все максимальные подгруппы из G нильпотентны, т.е. G не является группой Шмидта. Покажем, что тогда G является группой одного из типов (3)–(6), описанных в теореме 1.2. Заметим, что условия (3)–(6) из теоремы 1.2 справедливы в случае, когда G является сверхразрешимой группой. Согласно лемме 3.2, в сверхразрешимой группе все ее n-максимальные подгруппы являются строго n -максимальными. Это означает, что случаи (3)–(6) из теоремы 1.2 справедливы также при условии перестановочности каждой строго 2-максимальной подгруппы с любой строго 3-максимальной подгруппой. Следовательно, G удовлетворяет одному из типов групп (3)–(6), описанных в теореме 1.2.

Таким образом, группа G удовлетворяет условию теоремы 1.2, что, в свою очередь влечет, справедливость условия (а). *Теорема доказана.*

Следствие 3.1. *Пусть G – группа, в которой любая строго* 2-*максимальная подгруппа перестановочна с произвольной ее строго* 3-*максимальной подгруппой, и порядок группы G делится более чем на три простых числа. Тогда G нильпотентна*.

Следствие 3.2. *Пусть G – группа, в которой любая строго* 2-*максимальная подгруппа перестановочна с произвольной ее строго* 3-*максимальной подгруппой. Тогда G либо сверхразрешима, либо является группой Миллера–Морена, либо изоморфна группе* $SL(2, 3)$.

Доказательство следствий 3.1 и 3.2 проводится аналогично доказательству следствий 2.2 и 2.3.

Заключение

Основным результатом работы является описание структуры групп, для которых любая строго 2-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной строго 3-максимальной подгруппой. Отметим также, что полученные в работе результаты и методы доказательств могут быть использованы для получения точного строения групп, для которых любая строго 3-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной строго 4-максимальной подгруппой.

В заключение приведем ряд открытых вопросов, которые естественным образом возникают из результатов, полученных в данной работе.

Вопрос 1. Какое строение имеют группы, в которых любая строго 3-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной строго 4-максимальной подгруппой?

Вопрос 2. Верно ли, что класс групп, в которых любая n-максимальная подгруппа перестановочна с произвольной $(n + 1)$-максимальной подгруппой, совпадает с классом групп, в которых любая строго n -максимальная подгруппа перестановочна с произвольной строго $(n + 1)$-максимальной подгруппой для $n \geq 3$?

Список источников

1. *Guo W., Legchekowa H.V., Skiba A.N.* The structure of finite non-nilpotent groups in which every 2-maximal subgroup permutes with all 3-maximal subgroups // Communications in Algebra. 2009. V. 37 (7). P. 2446–2456. doi: 10.1080/00927870802334330
2. *Го В., Легчекова Е.В., Скиба А.Н.* Конечные группы, в которых любая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами // Математические заметки. 2009. Т. 86, № 3. С. 350–359. doi: 10.4213/mzm8499
3. *Луценко* (*Горбатова*) *Ю.В., Го В., Скиба А.Н.* О ненильпотентных группах, любые две 3-максимальные подгруппы которых перестановочны // Сибирский математический журнал. 2009. Т. 50, № 6. С. 1255–1268. doi: 10.1007/s11202-009-0109-1

4. *Горбатова Ю.В.* О перестановочных строго 2-максимальных и строго 3-максимальных подгруппах // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26, № 134. С. 121–129. doi: 10.20310/2686-9667-2021-26-134-121-129
5. *Монахов В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск : Вышэйшая школа, 2006. 207 с.
6. *Шеметков Л.А.* Формации конечных групп. М. : Наука, 1978. 272 с.
7. *Луценко Ю.В., Скиба А.Н.* Конечные ненильпотентные группы с нормальными или *S*-квазинормальными *n*-максимальными подгруппами // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. 2009. Т. 52, № 1. С. 134–138.
8. *Doerk K., Hawkes T.* Finite Soluble Groups. Berlin–New York : Walter de Gruyter, 1992. 889 p.
9. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. Berlin–Heidelberg–New York : Springer, 1967. 793 S.

References

1. Guo W., Legchekowa H.V., Skiba A.N. (2009) The structure of finite non-nilpotent groups in which every 2-maximal subgroup permutes with all 3-maximal subgroups. *Communications in Algebra*. 37(7). pp. 2446–2456. DOI: 10.1080/00927870802334330.
2. Guo W., Legchekowa H.V., Skiba A.N. (2009) Finite groups in which any 3-maximal subgroup is permutable with all maximal subgroups. *Mathematical Notes*. 86(3). pp. 350–359. DOI: 10.4213/mzm8499.
3. Guo W., Lutsenko (Gorbatova) Yu.V, Skiba A.N. (2009) On nonnilpotent groups in which every two 3-maximal subgroups are permutable. *Siberian Mathematical Journal*. 50(6). pp. 988–997. DOI: 10.1007/s11202-009-0109-1.
4. Gorbatova Yu.V. (2021) On permutable strongly 2-maximal and strongly 3-maximal subgroups. *Bulletin of Russian Universities. Mathematics*. 26(134). pp. 121–129. DOI: 10.20310/2686-9667-2021-26-134-121-129.
5. Monakhov V.S. (2006) *Vvedeniye v teoriyu konechnykh grupp i ikh klassov* [Introduction to the theory of finite groups and their classes]. Minsk: Vysheyshaya shkola.
6. Shemetkov L.A. (1978) *Formatsii konechnykh grupp* [Formations of finite groups]. Moscow: Nauka.
7. Lutsenko Yu.V., Skiba A.N. (2009) Konechnyye nenil'potentnyye gruppy s normal'nymi ili *S*-kvazinormal'nymi *n*-maksimal'nymi podgruppami [Finite nonnilpotent groups with normal or *S*-quasinormal *n*-maximal subgroups]. *Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta*. 52(1). pp. 134–138.
8. Doerk K., Hawkes T. (1992) *Finite Soluble Groups*. Berlin–New York: Walter de Gruyter.
9. Huppert B. (1967) *Endliche Gruppen I*. Berlin–Heidelberg–New York: Springer.

***Сведения об авторе*:**
Горбатова Юлия Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент Российской академии народного хозяйства и государственной службы при президенте РФ (Брянский филиал), Брянск, Россия. E-mail: g.julia32@yandex.ru

***Information about the author*:**
Gorbatova Yulia V. (Cand. Sci (Phys. and Math.), associate professor at the Social-humanitarian and Natural-scientific Disciplines Department, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Bryansk Branch), Bryansk, Russian Federation). E-mail: g.julia32@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 16.09.2021; принята к публикации 01.12.2022

The article was submitted 16.09.2021; accepted for publication 01.12.2022