МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

# В Е С Т Н И К
# ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

## МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

*Научный журнал*

**2023** **№ 81**

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Учредитель:**
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»



Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich’s Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

**Адрес редакции:** 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417
**Электронный адрес:** http://journals.tsu.ru/mathematics
**Контактный тел./факс:** (3822) 529-740
**E-mail:** vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

# СОДЕРЖАНИЕ

## МАТЕМАТИКА



## МЕХАНИКА

# CONTENTS

## MATHEMATICS



## MECHANICS

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2023 Математика и механика № 81
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

# МАТЕМАТИКА

# MATHEMATICS

Научная статья
УДК 512.543 MSC: 20F99
doi: 10.17223/19988621/81/1

## Множество $K_p$ в некоторых конечных группах

**Анна Ивановна Забарина[1], Елена Анатольевна Фомина[2]**

*[1, 2] Томский государственный педагогический университет, Томск, Россия*
*[1] aizabarina@gmail.com*
*[2] ef254@mail.ru*

**Аннотация.** Продолжено исследование свойств множества $K_p$, состоящего из элементов неабелевой группы, коммутирующих ровно с $p$ элементами группы $G$. В частности, этот вопрос рассмотрен для групп порядка $p_1p_2\cdots p_k$, $k \geq 3$, и $p^2q$, где $p_i$, $q$ – простые числа.
Также доказано, что множество $K_5$ непусто в трехмерной проективной специальной линейной группе. Эта группа имеет такой же порядок, что и знакопеременная группа $A_8$, в которой множество $K_5$ пусто.
**Ключевые слова:** группа, централизатор элемента, инволюция, силовские и холловы подгруппы

**Для цитирования:** Забарина А.И., Фомина Е.А. Множество $K_p$ в некоторых конечных группах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 81. С. 5–13. doi: 10.17223/19988621/81/1

Original article

## The set $K_p$ in some finite groups

**Anna I. Zabarina[1], Elena A. Fomina[2]**

*[1, 2] Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation*
*[1] aizabarina@gmail.com*
*[2] ef254@mail.ru*

**Abstract.** This article continues the study of the properties of a set $K_p$ for groups of order $p_1p_2\cdots p_k$, $k \geq 3$, and $p^2q$, where $p_i$ and $q$ are prime numbers.
Let $G$ be an arbitrary finite multiplicative group, $|G| = n$. We define the sets $X_p(G)$ and $K_p(G)$ as follows:

$$X_p(G) = \{g \in G \mid o(g) = p\},$$
$$K_p(G) = \{g \in G \mid g \neq e \wedge |C(g)| = p\}.$$

We write $X_p$, $K_p$ instead of $X_p(G)$, $K_p(G)$, respectively, in the case when it is clear which group $G$ we talk about.
It follows from this definition $K_p$ that if $x \in K_p$, then $\{x, x^2, \ldots, x^{p-1}\} \subset X_p$ and $\{x, x^2, \ldots, x^{p-1}\} \subset K_p$.
The following properties of the set $K_p$ have been proved.
**Proposition 1**. If $K_p(G) \neq \varnothing$, then $|G| \vdots p$ and $|G| \not\vdots\, p^2$.
**Proposition 2**. If $x \in K_p(G)$, then $x^g \in K_p(G)$ for each $g \in G$.
**Proposition 3**. Let $|G| = n$. Then $\left|K_p\right| \in \left\{0, \frac{n}{p}, \frac{2n}{p}, \ldots, \frac{(p-1)n}{p}\right\}$.
We consider the question of the set $K_p$ in the group $G$, where $|G| = p_1p_2 \cdots p_k$, $k \geq 3$, $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$.
**Lemma**. Let $|G| \neq p$, $|G| \vdots p$ and $K_p \neq \varnothing$. Then $Z(G) = \{e\}$.
**Theorem**. Let $G$ be a non-Abelian group with a trivial center $Z(G) = \{e\}$, $|G| = p_1p_2 \cdots p_k$, $k \geq 3$, $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$. Then, if $a \in K_{p_i}$, we have $i \in \{1, k\}$.
Now, let $G$ be a non-Abelian group, $|G| = p^2q$, $p$ and $q$ be prime numbers, and $Z(G) = e$. Since $|G| \vdots p^2$, then $K_p = \varnothing$. We consider the set $K_q$.
**I**. If $p > q$, then $|K_q| = p^2(q - 1)$.
**II**. If $p < q$, then there are two cases. Let $H_q$ and $H_{p^2}$ be Hall subgroups of the group $G$. Then:
– If $H_q \lhd G$, then $K_q = H_q \setminus \{e\}$, $|K_q| = q - 1$.
– If $H_{p^2} \lhd G$, then $|K_q| = p^2(q - 1)$.
It is also proved that the set $K_5$ is not empty in the three-dimensional projective special linear group $L_3(4)$. This group has the same order as the group $A_8$ in which the set $K_5$ is empty.
**Keywords:** group, centralizer of an element, involution, Sylow and Hall subgroups

**For citation:** Zabarina, A.I., Fomina, E.A. (2023) The set $K_p$ in some finite groups. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 81. pp. 5–13. doi: 10.17223/19988621/81/1

В [1–3] изучались некоторые свойства конечных групп, содержащих элементы порядка $p$, порядок централизатора которых равен порядку элемента. Множества таких элементов мы обозначали $K_p$, где $p$ – произвольное простое число. В настоящей работе рассмотрено множество $K_p$ в группе $G$, порядок которой – составное число, имеющее каноническое разложение: $|G| = p_1p_2 \cdots p_k$, $k \geq 3$.

## 1. Множество $K_p$ в группе $G$, где $|G| = p_1p_2 \cdots p_k$, $k \geq 3$, $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$

Пусть $\langle G, \cdot \rangle$ – конечная неабелева группа, $|G| = n$, $p$ – простой делитель $n$. Введем следующие обозначения:

$$X_p(G) = \{g \in G \mid o(g) = p\},$$
$$K_p(G) = \{g \in G \mid g \neq e \wedge |C(g)| = p\}.$$

В том случае, когда понятно, о какой группе $G$ идет речь, вместо $X_p(G)$, $K_p(G)$ будем писать $X_p$, $K_p$ соответственно.

Очевидно:

$$x \in K_p \Rightarrow x \in X_p \wedge \{x, x^2, \ldots, x^{p-1}\} \subset K_p.$$

Напомним некоторые результаты о множествах $K_p$ в конечных группах [1–3].

**1**. Пусть $|G| = n$. Тогда, если $K_p$ не пусто, то $n$ делится на $p$ и не делится на $p^2$.

**2**. Множество $K_p$ является инвариантным подмножеством $G$.

**3**. Пусть $|G| = n$. Тогда $\left|K_p\right| \in \left\{0, \frac{n}{p}, \frac{2n}{p}, \ldots, \frac{(p-1)n}{p}\right\}$.

Рассмотрим вопрос о множестве $K_p$ в группе $G$, где $|G| = p_1p_2\cdots p_k$, $k \geq 3$, $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$. Предварительно докажем лемму.

**Лемма**. Пусть $|G| \neq p$, $|G| \,\vdots\, p$ и $K_p \neq \varnothing$. Тогда $Z(G) = \{e\}$.

*Доказательство*. Пусть $K_p \neq \varnothing$ и $a \in K_p$. Тогда:

1) если $a \in Z(G)$, то $|C(a)| > p$, что противоречит тому, что $a \in K_p$;

2) пусть $a \notin Z(G)$. Так как $\{a, a^2, \ldots, a^{p-1}\} \subset K_p$ и $C_G(a^i) = \langle a\rangle$, то $Z(G) = \{e\}$. #

**Теорема**. Пусть $G$ – неабелева группа с тривиальным центром $Z(G) = \{e\}$, $|G| = p_1p_2\cdots p_k$, $k \geq 3$, $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$. Тогда, если $a \in K_{p_i}$, то $i \in \{1, k\}$.

*Доказательство*. Согласно [4. Т. 9.4.3 и 9.4.1], из того, что $|G| = p_1p_2\cdots p_k$, следует:

1) $G$ – разрешимая;

2) $G = \langle a, b\rangle$, коммутант $G' = \langle a\rangle$, $o(a) = m$, $o(b) = n$, $|G| = mn$, $(m, n) = 1$. Кроме того, $b^{-1}ab = a^r$, $(r - 1, m) = 1$, $r^n \equiv 1(\mathrm{mod}\ m)$. Операция в $G$ задается следующим образом:

$$b^j a^i b^k a^t = b^{j+k} a^{ir^k + t};$$

3) Холловы подгруппы $H_{p_2p_3\cdots p_k}$, $H_{p_3\cdots p_k}$, …, $H_{p_k}$ являются нормальными делителями $G$.

Так как $\left|G/H_{p_2p_3\cdots p_k}\right| = p_1$, то $G' \subset H_{p_2p_3\cdots p_k}$. Так как $H_{p_k} \lhd G$ и $H_{p_k}$ – минимальный нормальный делитель $G$, то $H_{p_k} \subset G'$. Следовательно, возможны три случая: $G' = H_{p_2p_3\cdots p_k}$, $G' = H_{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_s}p_k}$, $G' = H_{p_k}$. Рассмотрим каждый из них.

- $G' = H_{p_2p_3\cdots p_k} = \langle a\rangle$, $o(a) = p_2p_3\cdots p_k$, $o(b) = p_1$.

Рассмотрим $C_G(b)$.

$$b^ja^i \in C(b) \Leftrightarrow b^ja^i \cdot b = b \cdot b^ja^i \Rightarrow a^{i(r-1)} = e.$$

Так как $(r - 1, p_2p_3\cdots p_k) = 1$, то $i = 0$.

Следовательно, $C_G(b) = \langle b\rangle$, т.е. $\langle b\rangle \setminus \{e\} \subset K_{p_1}$, $b^G \subset K_{p_1}$. Таким образом, $K_{p_1} \neq \varnothing$.

Пусть $o(g) \in \{p_2, p_3, \ldots, p_k\}$. Согласно свойству холловых подгрупп $\langle g\rangle \subset H_{p_2p_3\cdots p_k}$; $H_{p_2p_3\cdots p_k} = \langle a\rangle$. Следовательно, так как $C_G(g) \neq \langle g\rangle$, то $K_{p_2} = K_{p_3} = \ldots = K_{p_k} = \varnothing$.

- Пусть $G' = H_{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_s}p_k}$, где $\{i_1, \ldots, i_s\} \neq \{2, 3, \ldots, k-1\}$, $\{i_1, \ldots, i_s\} \neq \varnothing$.

$o(a) = p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_s}p_k$, $o(b) = p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_t}$, $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\} \cap \{j_1, j_2, \ldots, j_t\} = \varnothing$.

Заметим, что существуют $u, v \in G$, такие что $a = uv = vu$. Рассмотрим случай, когда $o(u) = p_{i_1}$, $o(v) = p_{i_2} \cdots p_{i_s} p_k$, то $u \notin K_{p_{i_1}}$. Пусть $o(u^*) = p_{i_1}$.

Так как $\langle u^* \rangle = g^{-1}\langle u \rangle g$, то $u^* = g^{-1}u^l g$. Но $u^l \notin K_{p_{i_1}}$. Следовательно, $|C(u^*)| =$ $= |C(u)| \neq p_{i_1}$.

Поэтому $K_{p_{i_1}} = \varnothing$. Аналогично $K_{p_{i_2}} = K_{p_{i_3}} = \ldots = K_{p_{i_s}} = K_{p_k} = \varnothing$.

Из аналогичных рассуждений для элемента $b$, получаем

$$K_{p_{j_1}} = K_{p_{j_2}} = \ldots = K_{p_{j_t}} = \varnothing.$$

- $G' = H_{p_k} = \langle a \rangle$. Следовательно, $o(a) = p_k$, $o(b) = p_1 p_2 \cdots p_{k-1}$. Рассмотрим холлову подгруппу $H_{p_1 p_2 \cdots p_{k-1}}$ – максимальную подгруппу $G$. Пусть $S \lhd G$, $S \neq \{e\}$, и $S \subset H_{p_1 p_2 \cdots p_{k-1}}$.

Так как $S \cap G' = \{e\}$, то $S \subset Z(G)$ [5. С. 59, 5.49а].

Следовательно, максимальная подгруппа $H_{p_1 p_2 \cdots p_{k-1}}$ не содержит неединичных нормальных делителей группы $G$.

Так как $H_{p_k} \lhd G$, то $C_G(H_{p_k}) = H_{p_k}$ [6. С. 42–43, 4.52_1)] Следовательно, $C_G(a) = \langle a \rangle$, т.е. $K_{p_k} = \langle a \rangle \setminus \{e\}$.

Заметим, что так как $o(b) = p_1 p_2 \cdots p_{k-1}$, то? повторяя рассуждения из предыдущего пункта для элемента $b$, получим, что $K_{p_2} = K_{p_3} = \ldots = K_{p_k} = \varnothing$. Теорема доказана.

## 2. Множества $K_p$, $K_q$ в группе $G$, где $|G| = p^2 q$

Пусть $G$ – неабелева группа, $|G| = p^2 q$, $p$ и $q$ – простые числа, $Z(G) = e$. Так как $|G| \,\vdots\, p^2$, то $K_p = \varnothing$. Рассмотрим множество $K_q$. Возможны два случая:

**I**. $p > q$. Так как количество силовских $p$-подгрупп $N_p$ сравнимо с 1 по модулю $p$ (т.е. $N_p = 1 + pk$) и $q \,\vdots\, (1 + pk)$, то $k = 0$. В этом случае, $N_p = 1$ и $H_{p^2} \lhd G$. С другой стороны, $N_q = 1 + qm$, т.е. $N_q \in \{1, p, p^2\}$.

- Так как $G$ – неабелева, то $N_q \neq 1$.
- Пусть $N_q = p$. Подсчитаем $|G|$. Группа $G$ содержит $p$ подгрупп по $q$ элементов, пересекающихся только по единичному элементу, и одну подгруппу порядка $p^2$. Тогда $|G| = p(q - 1) + p^2 = p^2 q$ .

Отсюда: $p(q - 1) = p^2(q - 1)$, чего быть не может.

- Следовательно, $N_q = p^2$ и $\forall_G\, g\ (g \neq e \Rightarrow o(g) \in \{p, p^2, q\})$ (*).

Пусть $o(g) = q$. Так как $\langle g \rangle \subset C_G(g)$, то $|C_G(g)| \geq q$. Если $|C_G(g)| = pq$, то в $C_G(g)$ существует элемент $x$, такой что $o(x) = p$. Так как $xg = gx$, то $o(xg) = pq$, что противоречит (*).

Если $|C_G(g)| = p^2 q$, то $g \in Z(G)$, что противоречит условию.

Таким образом, $\forall_G\, g\ (o(g) = q \Rightarrow C_G(g) = \langle g \rangle)$. То есть $|K_q| = p^2(q - 1)$.

**II**. $p < q$. Заметим, что в группе $A_4$ ($|A_4| = 2^2{\cdot}3$) нормальным делителем является группа $V_4$, а в группе порядка $2^2{\cdot}5$ нормальной является подгруппа $H_5$. Покажем, что одна из силовских подгрупп группы $G$ является ее нормальным делителем.

Так как $N_q = 1 + kq$, то $N_q = 1$ при $k = 0$. Таким образом, $H_q \lhd G$.

Если $k \neq 0$, то $N_q = p^2$ (так как $1 + q > p$ и $p^2 \vdots (1 + kq)$). Тогда во всех $q$-подгруппах группы $G$ содержится $p^2(q-1)$ неединичных элементов. Так как $|G| = p^2q$, то $|G| = p^2(q-1) + p^2$. Следовательно, $N_p = 1$, $H_{p^2} \lhd G$.

Рассмотрим множество $K_q$ в обоих случаях. Заметим, что порядок каждого неединичного элемента $g \in G$ принадлежит множеству $\{q, p, p^2\}$. Следовательно, если:

- $H_q \lhd G$, то $K_q = H_q \setminus \{e\}$, $|K_q| = q - 1$;
- $H_{p^2} \lhd G$, то $|K_q| = p^2(q-1)$.

Вопрос о строении множеств $K_p$, $K_q$ в группе $G$, где $|G| = p^2q$, полностью рассмотрен.

## 3. Множество $K_5$ в группе $L_3(4)$

Обратимся теперь к двум простым группам одинакового порядка: знакопеременной группе подстановок $A_8$ и трехмерной проективной специальной линейной группе, имеющей два обозначения: $L_3(4)$ [7] и $PSL_3(4)$ [8]. Вторая группа построена факторизацией $SL_3(4)$ по подгруппе скалярных матриц над полем $P = \{0, 1, a, a^{-1}\}$.

Известно, что $|A_8| = |PSL_3(4)| = 2^6 3^2 5 \cdot 7$. Последняя группа участвует в доказательстве простоты спорадической группы – группы Матье $M_{22}$. В отличие от $A_8$ [3. С. 34–35] множество $K_5$ в группе $PSL_3(4)$ непусто. Убедимся в этом.

Приведем таблицы сложения и умножения в поле $P$:

| $+$ | $1$ | $a$ | $a^{-1}$ |
|---|---|---|---|
| $1$ | $0$ | $a^{-1}$ | $a$ |
| $a$ | $a^{-1}$ | $0$ | $1$ |
| $a^{-1}$ | $a$ | $1$ | $0$ |

| $\cdot$ | $a$ | $a^{-1}$ |
|---|---|---|
| $a$ | $a^{-1}$ | $1$ |
| $a^{-1}$ | $1$ | $a$ |

Отметим, что в данном поле каждый элемент противоположен самому себе.

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \in SL(3,4)$. Непосредственные вычисления показывают, что $o(A) = 5$, причем

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & a \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $H = \{E, aE, a^{-1}E\}$. Остается убедиться, что $C_{L_3(4)}(AH) = \langle \bar{A} \rangle$, где $\bar{A} = AH$.

Пусть $BH \in C_{L_3(4)}(AH)$, т.е. $BH \cdot AH = AH \cdot BH$, где $B \in SL(3, 4)$. Отсюда следует, что $AB = BAU$, где $U \in H$. Покажем, что $B = A^iU^*$, где $U^* \in H$. Рассмотрим всевозможные значения $U$.

**1)** $U = E$. Тогда

$$AB = BA \Rightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & y & x \\ 0 & x & y+ax \end{pmatrix},$$

где $b_{11}(y^2 - x^2 + axy) = b_{11}(y^2 + x^2 + axy) = 1$.

Исследуем вид матрицы $B$ в зависимости от значения элементов.

**a)** $b_{11} = 1 \Rightarrow y^2 - x^2 + axy = 1$.

Переберем все возможные варианты для элемента $y$:

- $y = x \Rightarrow ax^2 = 1 \Rightarrow y = x = a \Rightarrow B = A^3$;
- $y = 0 \Rightarrow -x^2 = x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow B = A$;
- $y = 1 \Rightarrow 1 + x^2 + ax = 1 \Rightarrow x(x + a) = 0 \Rightarrow (x = 0) \vee (x + a = 0) \Rightarrow (B = E) \vee (x = a \Rightarrow B = A^2)$;
- $y = a \Rightarrow a^2 - x^2 + a^2x = 1 \Rightarrow a^2(1 + x) = a^{-1}(1 + x) = 1 + x^2 = 1 - x^2 = (1 - x)(1 + x) \Rightarrow (x = 1) \vee (a^{-1} = 1 - x) \Rightarrow (B = A^4) \vee (x = a \Rightarrow B = A^3)$ (см. случай $y = x$);
- $y = a^{-1} \Rightarrow a - x^2 + x = 1$. Несложно проверить, что при любом значении $x$ данное равенство не имеет места. Значит, $y \neq a^{-1}$ при $b_{11} = 1$.

Вывод: если $b_{11} = 1$ и $AB = BA$, то $B = A^i$.

**b)** $b_{11} = a \Rightarrow y^2 - x^2 + axy = a^2 = a^{-1}$.

Переберем все возможные варианты для элемента $y$:

- $y = x \Rightarrow ax^2 = a^{-1} \Rightarrow y = x = a^{-1} \Rightarrow$

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & a^2 \\ 0 & a^2 & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} = aA^3 = aE \cdot A^3;$$

- $y = 0 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = a \Rightarrow B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & a^2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} = aE \cdot A$;
- $y = a \Rightarrow a^2 - x^2 + a^2x = a^2 \Rightarrow x^2 + a^2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = aE;$$

- $y = a^{-1} \Rightarrow a - x^2 + x = a^2 \Rightarrow x^2 + x = a^2 + a \Rightarrow (x = a \vee x = a^{-1}) \Rightarrow$

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = aE \cdot A^4 \vee B = aE \cdot A^3 \text{ (см. случай } y = x).$$

- $y = 1 \Rightarrow 1 - x^2 + ax = a^2$. Можно проверить, что при любом значении $x$ данное равенство не имеет места. Значит, $y \neq 1$ при $b_{11} = a$.

Вывод: если $b_{11} = a$ и $AB = BA$, то $B = aE \cdot A^i$.

**c)** $b_{11} = a^2 \Rightarrow y^2 - x^2 + axy = a$.

Переберем все возможные варианты для элемента $y$:

➢ $y = x \Rightarrow axy = a \Rightarrow y = x = 1 \Rightarrow$

$$B = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a^2 \end{pmatrix} = a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} = a^2 A^3 = a^2 E \cdot A^3;$$

➢ $y = 0 \Rightarrow x^2 = a \Rightarrow x = a^2 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \\ 0 & a^2 & 1 \end{pmatrix} = a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} = a^2 E \cdot A;$

➢ $y = 1 \Rightarrow 1 + x^2 + ax = a \Rightarrow (1 - x)^2 = a(1 - x) \Rightarrow (x = 1) \vee (x = a^2) \Rightarrow B = a^2 E \cdot A^3$ (см. случай $y = x$) $\vee$ $B = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a^2 \\ 0 & a^2 & 0 \end{pmatrix} = a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = a^2 E \cdot A^4;$

➢ $y = a^{-1} \Rightarrow a - x^2 + x = a \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow (x = 0 \vee x = 1) \Rightarrow$

$$B = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a^2 E \;\vee\; B = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & a \end{pmatrix} = a^2 E \cdot A^2;$$

➢ $y = a \Rightarrow a^2 - x^2 + a^2 x = a \Rightarrow a^2(1 + x) = x^2 + a$. При любом значении $x$ данное равенство не имеет места. Значит, $y \neq a$ при $b_{11} = a^2$.

Вывод: если $b_{11} = a^2$ и $AB = BA$, то $B = a^2 E \cdot A^i$.

**2)** $U = aE$. Тогда $AB = BA \cdot aE \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & a^{-1} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{21} + ab_{31} & b_{22} + ab_{32} & b_{23} + ab_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab_{11} & ab_{13} & ab_{12} + a^{-1}b_{13} \\ ab_{21} & ab_{23} & ab_{22} + a^{-1}b_{23} \\ ab_{31} & ab_{33} & ab_{32} + a^{-1}b_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$b_{11} = ab_{11} \Rightarrow b_{11} = 0,$$
$$b_{12} = ab_{13} \Rightarrow ab_{12} = a^{-1}b_{13},$$
$$b_{13} = ab_{12} + a^{-1}b_{13} = 0 \Rightarrow b_{12} = 0 \Rightarrow \det B = 0.$$

**3)** $U = a^{-1}E$. Тогда $AB = BA \cdot a^{-1}E \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} \\ 0 & a^{-1} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{21} + ab_{31} & b_{22} + ab_{32} & b_{23} + ab_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1}b_{11} & a^{-1}b_{13} & a^{-1}b_{12} + b_{13} \\ a^{-1}b_{21} & a^{-1}b_{23} & a^{-1}b_{22} + b_{23} \\ a^{-1}b_{31} & a^{-1}b_{33} & a^{-1}b_{32} + b_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$b_{11} = a^{-1}b_{11} \Rightarrow b_{11} = 0,$$
$$b_{12} = a^{-1}b_{13},$$
$$b_{13} = a^{-1}b_{12} + b_{13} \Rightarrow a^{-1}b_{12} = 0 \Rightarrow b_{12} = 0 \Rightarrow b_{13} = 0 \Rightarrow \det B = 0.$$

Таким образом, $o(\bar{A}) = 5$ и $\forall\ BH \left(\bar{A} \cdot \bar{B} = \bar{B} \cdot \bar{A} \Rightarrow \bar{B} = \overline{A^i}\right)$. $C_{L_3(4)}(AH) = \langle \bar{A} \rangle \Rightarrow$

$K_5(G) \neq \varnothing$

*Замечание*. Так как $|L_3(4)| = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ и $K_5 \neq \varnothing$, то в $L_3(4)$ нет таких элементов $g$, что $o(g) = 5m$, где $(5, m) = 1$ и $m \vdots k$, $k \neq 1$.

Открытым остается вопрос о множестве $K_7$ в данной группе.

**Список источников**


1. *Забарина А.И., Гусельникова У.А., Фомина Е.А.* О коммутирующих элементах группы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 6 (38). С. 27–32. doi: 10.17223/19988621/38/3
2. *Забарина А.И., Фомина Е.А.* О множестве $K_3(G)$ элементов конечных групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 55. С. 5–11. doi: 10.17223/19988621/55/1
3. *Забарина А.И., Фомина Е.А.* О множестве $K_p$ в конечных группах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 68. С. 33–40. doi: 10.17223/19988621/68/3
4. *Холл М.* Теория групп. М. : Изд-во иностр. лит., 1962. 468 с.
5. *Чехлов А.Р.* Упражнения по основам теории групп. Томск : Том. гос. ун-т, 2004. 275 с.
6. *Белоногов В.А.* Задачник по теории групп. М. : Наука, 2000. 239 с.
7. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы: введение в их классификацию. М. : Мир, 1985. 352 с.
8. *Богопольский О.В.* Введение в теорию групп. М.–Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2002. 148 с.


**References**


1. Zabarina A.I., Guselnikova U.A., Fomina E.A. (2015) O kommutiruyushchikh elementakh gruppy [On commuting elements of a group]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(38). pp. 27–32. DOI: 10.17223/19988621/38/3.
2. Zabarina A.I., Fomina E.A. (2018) O mnozhestve $K_3(G)$ elementov konechnykh grupp, kommutiruyushchikh rovno s tremya elementami gruppy [On the set $K_3(G)$ of finite groups' elements commuting exactly with three elements]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 55. pp. 5–11. DOI: 10.17223/19988621/55/1.
3. Zabarina A.I., Fomina E.A. (2020) O mnozhestve $K_p$ v konechnykh gruppakh [On the set $K_p$ in finite groups]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 68. pp. 33–40. DOI: 10.17223/19988621/68/3.
4. Hall M. (1959) *The Theory of Groups*. New York: The Macmillan Company.
5. Chekhlov A.R. (2004) *Uprazhneniya po osnovam teorii grupp* [Exercises in fundamentals of the theory of groups]. Tomsk: Tomsk State University.
6. Belonogov V.A. (2000) *Zadachnik po teorii grupp* [Problem book on the theory of groups]. Moscow: Nauka.
7. Gorenstein D. (1982) *Finite Simple Groups: An Introduction to Their Classification*. New York: Springer Science & Business Media.

8. Bogopol'skiy O.V. (2002) *Vvedeniye v teoriyu grupp* [An introduction to the theory of groups]. Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Studies.

***Сведения об авторах*:**
**Забарина Анна Ивановна** – доцент кафедры математики, теории и методики обучения математике Томского государственного педагогического университета, Томск, Россия. E-mail: aizabarina@gmail.com
**Фомина Елена Анатольевна** – доцент кафедры математики, теории и методики обучения математике Томского государственного педагогического университета, Томск, Россия. E-mail: ef254@mail.ru

***Information about the authors*:**
**Zabarina Anna I.** (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematics, Theory and Methods of Teaching Mathematics, Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: aizabarina@gmail.com
**Fomina Elena A.** (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematics, Theory and Methods of Teaching Mathematics, Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ef254@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 11.09.2022; принята к публикации 03.02.2023*

*The article was submitted 11.09.2022; accepted for publication 03.02.2023*

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2023 Математика и механика № 81
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 517.98 MSC: 46E35; 35J60
doi: 10.17223/19988621/81/2

# Линейный финитный функционал в весовом пространстве Соболева

**Игорь Витальевич Корытов**

*Томский политехнический университет, Томск, Россия, korytov@tpu.ru*

**Аннотация.** Получено представление линейного функционала через элемент весового пространства Соболева. Пространство Соболева нормируется без привлечения псевдодифференциальных операторов. Норма включает в себя частные производные всех промежуточных порядков основной функции. Пространство Соболева рассматривается как негильбертово. Элемент, представляющий функционал, является решением нелинейного дифференциального уравнения в обобщенных функциях, которое порождается вводимой нормой.
**Ключевые слова:** весовое пространство Соболева, линейный финитный функционал, интегральное представление функционала, норма функционала, экстремальная функция, неравенства Кларксона

**Для цитирования:** Корытов И.В. Линейный финитный функционал в весовом пространстве Соболева // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 81. С. 14–30. doi: 10.17223/19988621/81/2

Original article

# Linear finite functional in the weighted Sobolev space

**Igor K. Vitalievich**

*Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation, korytov@tpu.ru*

**Abstract.** In this paper, a representation of a linear functional in the weighted Sobolev space is obtained. The space is normed without use of pseudodifferential operators. The norm contains partial derivatives of all intermediate orders of the test function. The Sobolev space is considered to be of non-Hilbert type.
First, we deduce the representation of linear functional via a boundary element of the test space. The boundary element corresponds to the given functional. This way, referring to Clarkson’s inequalities, we prove the uniqueness of the boundary element. Then, to obtain a condition for the boundary element, we differentiate the function built based on the norm. The result leads to a representation of an arbitrary linear functional via the boundary element. When considering the boundary element as unknown, the representation performs as a nonlinear differential equation.

Second, we consider a finite linear functional. The extreme function of such a functional was built in our earlier papers. The extreme function is expressed via convolution of the fundamental solution of a linear partial differential equation with a given functional. The functional performs as a distribution in the convolution. Convolution exists if the linear functional is finite. Using this fact, we prove that the representation of a finite linear functional via the boundary element is identical to the representation via the extreme function.
**Keywords:** weighted Sobolev space, linear finite functional, integral representation of a functional, norm of a functional, extreme function, Clarkson inequalities

**For citation:** Korytov, I.V. (2023) Linear finite functional in the weighted Sobolev space. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 81. pp. 14–30. doi: 10.17223/19988621/81/2

## Введение

Статья является продолжением работ автора [1, 2], связанных с представлением линейного функционала в весовом пространстве Соболева. В ней рассматриваются вопросы представления линейного функционала через элемент того же пространства, на котором данный функционал задан. В гильбертовом пространстве такое представление реализуется через скалярное произведение. Для пространства $W_p^{(m)}$ ($p \neq 2$) конструкция представления выглядит сложнее. К искомому выражению мы приходим через постановку и решение экстремальной задачи, в которой задействовано дифференцирование нормы. Норма в нашей работе в таком контексте рассматривается не как выпуклый нелинейный функционал, а как выражение, содержащее кратный интеграл, допускающий дифференцирование по параметру. Идея состоит в том, что если норма допускает существование производной, а экстремальная задача имеет единственное решение, то эта норма порождает некоторое функциональное уравнение, которое и приводит к представлению функционала. Например, в [3] такое функциональное уравнение, выведенное для пространства $L_p$, не является дифференциальным. Мы же здесь придем именно к дифференциальному уравнению, причем нелинейному и с частными производными. Норму при этом рассматриваем, отличную от норм, вводимых для пространств Соболева, например в [4–7].

Представления функционала через свертку фундаментального решения некоторого линейного дифференциального оператора с рассматриваемым функционалом получены автором ранее в работах [1, 8, 9] для пространств Соболева с весовыми и невесовыми нормами. В одних случаях рассматривались функционалы погрешности кубатурных формул [8, 9], в других – более общие конструкции – линейные финитные функционалы. Базовые утверждения данной статьи доказаны для произвольных линейных функционалов. В финальном пункте, соединяющем представление функционала через предельный элемент и представление функционала через упомянутую свертку, утверждения приведены для финитных функционалов. Условие финитности требуется для существования свертки.

Результаты, полученные в данной статье, являются основой для построения оценочных неравенств конкретных функционалов на весовых пространствах Соболева. Далее, если есть возможность найти фундаментальное решение порожденного нормой уравнения или, более того, его свертку с функционалом, то можно найти и оценивающую константу.

Начало направлению исследований положил С.Л. Соболев построением теории оценивания асимптотически оптимальных кубатурных формул для функций из пространства $L_2^{(m)}$ [10–22]. Это пространство гильбертово, вследствие чего уравнение для экстремальной функции является линейным. Работу с пространством $L_2^{(m)}$ продолжил В.И. Половинкин [23, 24]. Обобщение в направлении $L_2^{(m)} \to W_2^{(m)}$ выполнил Ц.Б. Шойнжуров [25–27]. Уравнение здесь сохраняло линейность, но решение его получено путем, отличным от примененного С.Л. Соболевым [21]. Далее на пути обобщения $W_2^{(m)} \to W_p^{(m)}$ ($p > 1$) Ц.Б. Шойнжуров применил для нормирования пространства псевдодифференциальный оператор [28, 29]. Уравнение в этом пространстве было уже нелинейным, но фундаментальное решение благодаря такой норме получалось явным. Обобщение в направлении $L_2^{(m)} \to L_p^{(m)}$ ($p > 1$) выполнил В.И. Половинкин [31–33]. В этих работах построены представления функционалов погрешности кубатурных формул с исследованием условий на существование свертки фундаментального решения полигармонического уравнения с функционалом. Ц.Б. Шойнжуров развил свои предшествующие результаты с применением новых норм [34, 35].

Укажем круг работ с задачами, аналогичными по постановке, этапам и направлениям, выполняемыми в настоящее время. Равномерная выпуклость негильбертовых пространств Соболева периодических функций как обоснование утверждений для функционалов погрешности кубатурных формул рассмотрена в наших работах [36, 37]. Экстремальные функции и представления функционалов с последующим получением явных норм используются в [38–40] для оценки погрешности оптимальных кубатурных формул. В указанных работах пространства являются гильбертовыми. Для других классов кубатурных формул экстремальные функции и свойства равномерной выпуклости пространств использованы в работах [41, 42].

## 1. Исходные положения

Норма функции в весовом пространстве Соболева $W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)$, как и в [1, 2], задается следующим образом:

$$\left\| \varphi \middle| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega) \right\| = \left[ \int_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha| \le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \left| D^\alpha \varphi \right|^p dx \right]^{1/p}, \tag{1}$$

$1 < p < \infty$, $pm > n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\alpha_j \in \{0\} \cup \mathbf{N}$, $|\alpha| \le m$, $\omega(x) > 0$, $\omega^{1/p}(x)\, |D^\alpha \varphi(x)| \in L_p(\mathbf{R}_n)$.

Неравенства Кларксона, полученные в [3], послужат основой дальнейших выкладок. Приведем их в виде следующей леммы.

**Лемма 1 [3].** Для весового пространства Соболева справедливы первое (2) и второе (3) неравенства Кларксона:

$$\left\| \frac{\varphi + \psi}{2} \middle| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega) \right\|^p + \left\| \frac{\varphi - \psi}{2} \middle| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega) \right\|^p \le \tag{2}$$

$$\le \frac{1}{2}\left( \left\| \varphi \middle| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega) \right\|^p + \left\| \psi \middle| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega) \right\|^p \right), \quad 2 \le p < \infty,$$

$$\left\|\frac{\varphi+\psi}{2}\middle| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n,\omega)\right\|^{p/(p-1)}+\left\|\frac{\varphi-\psi}{2}\middle| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n,\omega)\right\|^{p/(p-1)}\le$$

$$\le\left(\frac{1}{2}\left\|\varphi\middle| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n,\omega)\right\|^{p}+\frac{1}{2}\left\|\psi\middle| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n,\omega)\right\|^{p}\right)^{1/(p-1)},\quad 1<p\le 2. \qquad (3)$$

## 2. Предельный элемент основного пространства для линейного функционала

**Лемма 2.** Для любого линейного функционала существует единственный предельный элемент $\varphi_0$ пространства $W_p^{(m)}$ $(\mathbf{R}_n, \omega)$, такой что $\|\varphi_0\| = 1$, и для любой функции $\varphi \in W_p^{(m)}$ $(\mathbf{R}_n, \omega)$ с единичной нормой справедливо равенство $\sup\limits_{\|\varphi\|=1}\left|\langle l,\varphi\rangle\right|=\langle l,\varphi_0\rangle$.

**Доказательство.** Для удобства сократим запись нормы $\|\varphi|W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)\| = \|\varphi\|$. Обозначим $\sup\limits_{\|\phi\|=1}\left|\langle l,\varphi\rangle\right|=g$. Из определения верхней грани следует, что существует последовательность $\{\varphi_k\}$, $\|\varphi_k\| = 1$, такая что $\lim\limits_{k\to\infty}\langle l,\varphi_k\rangle=g$. Члены последовательности принадлежат основному пространству. Докажем, что сходимость является сильной. Предположим противное, пусть $\{\varphi_k\}$ расходится. Тогда должно быть нарушено условие Коши, т.е. можно указать такое $\varepsilon > 0$, что найдутся пары чисел $n_k$ и $m_k$, такие что $\left\|\varphi_{m_k}-\varphi_{n_k}\right\|>\varepsilon$, $n_k \to \infty$, $m_k \to \infty$. Индекс $k$ у чисел $n_k$ и $m_k$ означает, что функции $\varphi_{m_k}$ и $\varphi_{n_k}$ взяты из последовательности $\{\varphi_k\}$, но сами номера $n_k$ и $m_k$ не зависят от номера со значением $k$. Применяя к функциям $\varphi_{m_k}$, $\varphi_{n_k}$ неравенства Кларксона (2), (3) и учитывая единичность норм этих функций, получим

$$\left\|\frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{2}\right\|^{p}+\left\|\frac{\varphi_{m_k}-\varphi_{n_k}}{2}\right\|^{p}\le 1,\quad 2\le p<\infty.$$

$$\left\|\frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{2}\right\|^{p/(p-1)}+\left\|\frac{\varphi_{m_k}-\varphi_{n_k}}{2}\right\|^{p/(p-1)}\le 1,\quad 1<p\le 2.$$

Оценим норму суммы $\varphi_{m_k}$ и $\varphi_{n_k}$ при любом $p$:

$$\left\|\frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{2}\right\|^{p}\le 1-\left\|\frac{\varphi_{m_k}-\varphi_{n_k}}{2}\right\|^{p},\quad 2\le p<\infty,$$

$$\left\|\frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{2}\right\|^{p/(p-1)}\le 1-\left\|\frac{\varphi_{m_k}-\varphi_{n_k}}{2}\right\|^{p/(p-1)},\quad 1<p\le 2.$$

Далее,

$$\left\|\frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{2}\right\|\le\left(1-\left\|\frac{\varphi_{m_k}-\varphi_{n_k}}{2}\right\|^{p}\right)^{1/p},\quad 2\le p<\infty,$$

$$\left\|\frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{2}\right\| \le \left(1-\left\|\frac{\varphi_{m_k}-\varphi_{n_k}}{2}\right\|^{p/(p-1)}\right)^{(p-1)/p}, \quad 1<p\le 2 .$$

Для равномерно выпуклой единичной сферы норма полуразности равна единице $\left(\left\|\frac{\varphi_{m_k}-\varphi_{n_k}}{2}\right\|=1\right)$ только для пар функций, лежащих на диаметре, так что $\varphi_{n_k}=-\varphi_{m_k}$ :

$$\left\|\frac{\varphi_{n_k}-\left(-\varphi_{n_k}\right)}{2}\right\|=\left\|\frac{\varphi_{n_k}+\varphi_{n_k}}{2}\right\|=\left\|\frac{2\varphi_{n_k}}{2}\right\|=\left\|\varphi_{n_k}\right\|=1 .$$

Для всех остальных пар функций норма полуразности строго меньше единицы:

$$\left\|\frac{\varphi_{m_k}-\varphi_{n_k}}{2}\right\|<1 \quad \forall\varphi_{m_k},\varphi_{n_k}: \quad \varphi_{m_k}\ne-\varphi_{n_k} .$$

Поэтому правомерно разложение в сходящиеся ряды (отметим, что $1/p < 1$, $(p-1)/p < 1$):

$$\left\|\frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{2}\right\| \le 1-\frac{1}{p}\left\|\frac{\varphi_{m_k}-\varphi_{n_k}}{2}\right\|^{p}+\ldots, \quad 2\le p<\infty ,$$

$$\left\|\frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{2}\right\| \le 1-\frac{p-1}{p}\left\|\frac{\varphi_{m_k}-\varphi_{n_k}}{2}\right\|^{p/(p-1)}+\ldots, \quad 1<p\le 2 .$$

$$\left\|\frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{2}\right\| \le 1-\left(\frac{1}{p}\left\|\frac{\varphi_{m_k}-\varphi_{n_k}}{2}\right\|^{p}-\ldots\right), \quad 2\le p<\infty ,$$

$$\left\|\frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{2}\right\| \le 1-\left(\frac{p-1}{p}\left\|\frac{\varphi_{m_k}-\varphi_{n_k}}{2}\right\|^{p/(p-1)}-\ldots\right), \quad 1<p\le 2 .$$

Оба ряда в скобках знакочередующиеся, поэтому согласно теореме Лейбница

$$0<S^{*}\le\frac{1}{p}\left\|\frac{\varphi_{m_k}-\varphi_{n_k}}{2}\right\|^{p}, \quad 2\le p<\infty ,$$

$$0<S^{**}\le 1-\frac{p-1}{p}\left\|\frac{\varphi_{m_k}-\varphi_{n_k}}{2}\right\|^{p/(p-1)}, \quad 1<p\le 2 .$$

Возьмем далее $S = \min(S^{*}, S^{**})$. Тогда найдется такое $\eta$: $0 < \eta < S$, что

$$\left\|\frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{2}\right\|<1-\eta, \quad 1<p<\infty . \tag{4}$$

Построим из указанных членов последовательности функцию с единичной нормой

$$\chi_k=\frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{\left\|\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}\right\|}, \quad \left\|\chi_k\right\|=1.$$

Линейный функционал на данной функции с учетом (4) будет удовлетворять неравенству

$$\left\langle l,\chi_k\right\rangle=\left\langle l,\frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{\left\|\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}\right\|}\right\rangle=\left\langle l,\frac{\frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{2}}{\frac{\left\|\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}\right\|}{2}}\right\rangle=$$

$$=\left\langle l,\frac{\frac{1}{2}\left(\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}\right)}{\frac{\left\|\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}\right\|}{2}}\right\rangle=\frac{1}{2}\left\langle l,\frac{\left(\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}\right)}{\frac{\left\|\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}\right\|}{2}}\right\rangle=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\left(\left\langle l,\varphi_{m_k}\right\rangle+\left\langle l,\varphi_{n_k}\right\rangle\right)}{\frac{\left\|\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}\right\|}{2}}>\frac{1}{2}\frac{\left(\left\langle l,\varphi_{m_k}\right\rangle+\left\langle l,\varphi_{n_k}\right\rangle\right)}{1-\eta}.$$

Вследствие сходимости $\lim\limits_{k\to\infty}\left\langle l,\varphi_{m_k}\right\rangle=g$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\left\langle l,\varphi_{n_k}\right\rangle=g$ при достаточно большом $k$ будет верным неравенство

$$\left\langle l,\chi_k\right\rangle>\frac{1}{2}\frac{\left(\lim\limits_{k\to\infty}\left\langle l,\varphi_{m_k}\right\rangle+\lim\limits_{k\to\infty}\left\langle l,\varphi_{n_k}\right\rangle\right)}{1-\eta}=\frac{1}{2}\frac{(g+g)}{1-\eta}=\frac{g}{1-\eta}>g\ .$$

Полученное неравенство противоречит тому, что $\sup\limits_{\|\varphi\|=1}\left|\left\langle l,\varphi\right\rangle\right|=g$ . Следовательно, $\{\varphi_k\}$ сходится сильно, и вследствие полноты $W_p^{(m)}$ $(\mathbf{R}_n,\omega)$ существует предельный элемент $\varphi_0$ из $W_p^{(m)}$ $(\mathbf{R}_n,\omega)$. Очевидно $\|\varphi_0\|=1$.

## 3. Вариационная задача для линейного функционала

**Лемма 3.** Если для некоторой функции $\psi\in W_p^{(m)}$ $(\mathbf{R}_n,\omega)$

$$\int\limits_{\mathbf{R}_n}\omega\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha\varphi_0\right|^{p-1}\operatorname{sign}D^\alpha\varphi_0D^\alpha\psi dx=0\,,\tag{5}$$

то $\langle l,\psi\rangle=0$.

**Доказательство.** Рассмотрим $y(\lambda)=\langle l,(\varphi_0+\lambda\psi)/\|\varphi_0+\lambda\psi\|\rangle$, где функции линейно независимы: $\psi\ne c\varphi_0$. Так как $\|(\varphi_0+\lambda\psi)/\|\varphi_0+\lambda\psi\|\,\|=1$ и $(\varphi_0+\lambda\psi)/\|\varphi_0+\lambda\psi\|\ne\varphi_0$ при $\lambda\ne0$, то $y(\lambda)\le g$, причем равенство достигается при $\lambda=0$. Следовательно, при $\lambda=0$ функция одной переменной $y(\lambda)$ имеет максимум. Если существует $y'(0)$, то $y'(0)=0$. Покажем, что производная существует. Дифференцируя формально, имеем

$$y'_\lambda=\frac{d}{d\lambda}\left[\left\langle l,\frac{\varphi_0+\lambda\psi}{\|\varphi_0+\lambda\psi\|}\right\rangle\right]=\left\langle l,\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\varphi_0+\lambda\psi}{\|\varphi_0+\lambda\psi\|}\right]\right\rangle=$$

$$=\left\langle l,\frac{\frac{d}{d\lambda}\left[\varphi_0+\lambda\psi\right]\cdot\|\varphi_0+\lambda\psi\|-\left(\varphi_0+\lambda\psi\right)\cdot\frac{d}{d\lambda}\left[\|\varphi_0+\lambda\psi\|\right]}{\|\varphi_0+\lambda\psi\|^2}\right\rangle=$$

$$=\left\langle l,\frac{\psi\left\|\varphi_0+\lambda\psi\right\|-\left(\varphi_0+\lambda\psi\right)\cdot\dfrac{d}{d\lambda}\left[\left\|\varphi_0+\lambda\psi\right\|\right]}{\left\|\varphi_0+\lambda\psi\right\|^2}\right\rangle.$$

Далее рассмотрим отдельно формальную производную нормы

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\left\|\varphi_0+\lambda\psi\right\|\right]=\frac{d}{d\lambda}\left[\left[\int\limits_{\mathbf{R}_n}\omega\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha\left(\varphi_0+\lambda\psi\right)\right|^p dx\right]^{1/p}\right]=$$

$$=\frac{1}{p}\left[\int\limits_{\mathbf{R}_n}\omega\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha\left(\varphi_0+\lambda\psi\right)\right|^p dx\right]^{(1/p)-1}\frac{d}{d\lambda}\left[\int\limits_{\mathbf{R}_n}\omega\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha\left(\varphi_0+\lambda\psi\right)\right|^p dx\right]=$$

$$=\frac{1}{p}\left[\int\limits_{\mathbf{R}_n}\omega\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha\left(\varphi_0+\lambda\psi\right)\right|^p dx\right]^{(1-p)/p}\int\limits_{\mathbf{R}_n}\omega\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\frac{d}{d\lambda}\left[\left|D^\alpha\left(\varphi_0+\lambda\psi\right)\right|^p\right]dx=$$

$$=\frac{1}{p}\left\|\varphi_0+\lambda\psi\right\|^{1-p}\int\limits_{\mathbf{R}_n}\omega\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}p\left|D^\alpha\left(\varphi_0+\lambda\psi\right)\right|^{p-1}\frac{d}{d\lambda}\left[\left|D^\alpha\left(\varphi_0+\lambda\psi\right)\right|\right]dx=$$

$$=\frac{p}{p}\left\|\varphi_0+\lambda\psi\right\|^{1-p}\int\limits_{\mathbf{R}_n}\omega\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha\left(\varphi_0+\lambda\psi\right)\right|^{p-1}\operatorname{sign}D^\alpha\left(\varphi_0+\lambda\psi\right)\frac{d}{d\lambda}\left[D^\alpha\left(\varphi_0+\lambda\psi\right)\right]dx=$$

$$=\left\|\varphi_0+\lambda\psi\right\|^{1-p}\int\limits_{\mathbf{R}_n}\omega\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha\left(\varphi_0+\lambda\psi\right)\right|^{p-1}\operatorname{sign}D^\alpha\left(\varphi_0+\lambda\psi\right)\frac{d}{d\lambda}\left[\left(D^\alpha\varphi_0+\lambda D^\alpha\psi\right)\right]dx=$$

$$=\left\|\varphi_0+\lambda\psi\right\|^{1-p}\int\limits_{\mathbf{R}_n}\omega\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha\left(\varphi_0+\lambda\psi\right)\right|^{p-1}\operatorname{sign}D^\alpha\left(\varphi_0+\lambda\psi\right)D^\alpha\psi dx.$$

Для доказательства существования производной интеграла по параметру выделим выражение, подлежащее оценке:

$$\left|\int\limits_{\mathbf{R}_n}\omega\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha\left(\varphi_0+\lambda\psi\right)\right|^{p-1}\operatorname{sign}D^\alpha\left(\varphi_0+\lambda\psi\right)D^\alpha\psi dx\right|\le$$

$$\le\int\limits_{\mathbf{R}_n}\left|\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\omega^{(1/q)+(1/p)}\left|D^\alpha\left(\varphi_0+\lambda\psi\right)\right|^{p-1}\operatorname{sign}D^\alpha\left(\varphi_0+\lambda\psi\right)D^\alpha\psi\right|dx\le$$

$$\le\int\limits_{\mathbf{R}_n}\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|\omega^{1/q}\left|D^\alpha\left(\varphi_0+\lambda\psi\right)\right|^{p-1}\operatorname{sign}D^\alpha\left(\varphi_0+\lambda\psi\right)\omega^{1/p}D^\alpha\psi\right|dx.\qquad(6)$$

В (6) учтено соотношение $1/p+1/q=1$, связывающее сопряженные показатели. К сумме, стоящей под знаком интеграла крайней правой части (6), применим неравенство Гёльдера:

$$\int\limits_{\mathbf{R}_n}\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|\omega^{1/q}\left|D^\alpha\left(\varphi_0+\lambda\psi\right)\right|^{p-1}\operatorname{sign}D^\alpha\left(\varphi_0+\lambda\psi\right)\omega^{1/p}D^\alpha\psi\right|dx\le$$

$$\le\int\limits_{\mathbf{R}_n}\left(\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|\omega^{1/q}\left|D^\alpha\left(\varphi_0+\lambda\psi\right)\right|^{p-1}\operatorname{sign}D^\alpha\left(\varphi_0+\lambda\psi\right)\right|^q\right)^{1/q}\left(\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|\omega^{1/p}D^\alpha\psi\right|^p\right)^{1/p}dx=$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}_n} \left( \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega \left| D^\alpha (\varphi_0 + \lambda\psi) \right|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \left( \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega \left| D^\alpha \psi \right|^p \right)^{1/p} dx . \qquad (7)$$

Теперь неравенство Гёльдера применим к интегралу (7):

$$\int\limits_{\mathbf{R}_n} \left( \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega \left| D^\alpha (\varphi_0 + \lambda\psi) \right|^{(p-1)\cdot\frac{p}{p-1}} \right)^{1/q} \left( \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega \left| D^\alpha \psi \right|^p \right)^{1/p} dx \le$$

$$\le \left( \int\limits_{\mathbf{R}_n} \left| \left( \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega \left| D^\alpha (\varphi_0 + \lambda\psi) \right|^p \right)^{1/q} \right|^q dx \right)^{1/q} \left( \int\limits_{\mathbf{R}_n} \left| \left( \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega \left| D^\alpha \psi \right|^p \right)^{1/p} \right|^p dx \right)^{1/p} .$$

Упрощая показатели степеней и переходя к нормам, имеем

$$\left( \int\limits_{\mathbf{R}_n} \left| \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega \left| D^\alpha (\varphi_0 + \lambda\psi) \right|^p \right| dx \right)^{1/q} \left( \int\limits_{\mathbf{R}_n} \left| \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega \left| D^\alpha \psi \right|^p \right| dx \right)^{1/p} \le$$

$$\le \left( \int\limits_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \left| \omega \left| D^\alpha (\varphi_0 + \lambda\psi) \right|^p \right| dx \right)^{1/q} \left( \int\limits_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \left| \omega \left| D^\alpha \psi \right|^p \right| dx \right)^{1/p} =$$

$$= \left( \int\limits_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega \left| D^\alpha (\varphi_0 + \lambda\psi) \right|^p dx \right)^{(p-1)/p} \left( \int\limits_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega \left| D^\alpha \psi \right|^p dx \right)^{1/p} =$$

$$= \left\| \varphi_0 + \lambda\psi \right\|^{p-1} \left\| \psi \right\| .$$

Оценивающие нормы по условию существуют, что доказывает законность дифференцирования интеграла по параметру. Таким образом, производная исходной функции существует и равна

$$y'_\lambda = \left\langle l, \frac{\psi \left\| \varphi_0 + \lambda\psi \right\| - (\varphi_0 + \lambda\psi) \cdot \frac{d}{d\lambda} \left[ \left\| \varphi_0 + \lambda\psi \right\| \right]}{\left\| \varphi_0 + \lambda\psi \right\|^2} \right\rangle =$$

$$= \left\langle l, \frac{\psi \left\| \varphi_0 + \lambda\psi \right\|}{\left\| \varphi_0 + \lambda\psi \right\|^2} \right\rangle - \left\langle l, \frac{(\varphi_0 + \lambda\psi) \cdot \frac{d}{d\lambda} \left[ \left\| \varphi_0 + \lambda\psi \right\| \right]}{\left\| \varphi_0 + \lambda\psi \right\|^2} \right\rangle =$$

$$= \frac{\langle l, \psi \rangle}{\left\| \varphi_0 + \lambda\psi \right\|} - \frac{\langle l, (\varphi_0 + \lambda\psi) \rangle}{\left\| \varphi_0 + \lambda\psi \right\|^2} \cdot \frac{d}{d\lambda} \left[ \left\| \varphi_0 + \lambda\psi \right\| \right] = \frac{\langle l, \psi \rangle}{\left\| \varphi_0 + \lambda\psi \right\|} - \frac{\langle l, (\varphi_0 + \lambda\psi) \rangle}{\left\| \varphi_0 + \lambda\psi \right\|^2} \left\| \varphi_0 + \lambda\psi \right\|^{1-p} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \left| D^\alpha (\varphi_0 + \lambda\psi) \right|^{p-1} \operatorname{sign} D^\alpha (\varphi_0 + \lambda\psi) D^\alpha \psi dx .$$

При $\lambda = 0$ имеем

$$y'_\lambda(0) = \frac{\langle l, \psi \rangle}{\left\| \varphi_0 \right\|} - \frac{\langle l, \varphi_0 \rangle}{\left\| \varphi_0 \right\|^2} \left\| \varphi_0 \right\|^{1-p} \int\limits_{\mathbf{R}_n} \omega \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \left| D^\alpha \varphi_0 \right|^{p-1} \operatorname{sign} D^\alpha \varphi_0 D^\alpha \psi dx .$$

С учетом того, что $y'(0) = 0$,

$$\frac{\langle l,\psi\rangle}{\|\varphi_0\|}=\frac{\langle l,\varphi_0\rangle}{\|\varphi_0\|^2}\|\varphi_0\|^{1-p}\int\limits_{\mathbf{R}_n}\omega\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha\varphi_0\right|^{p-1}\operatorname{sign}D^\alpha\varphi_0 D^\alpha\psi dx,$$

или

$$\langle l,\psi\rangle=\frac{\langle l,\varphi_0\rangle}{\|\varphi_0\|^p}\int\limits_{\mathbf{R}_n}\omega\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha\varphi_0\right|^{p-1}\operatorname{sign}D^\alpha\varphi_0 D^\alpha\psi dx.$$

Для ненулевой функции норма $\|\varphi_0\| \neq 0$ и функционал $\langle l, \varphi_0\rangle \neq 0$. Более того, по условию $\|\varphi_0\| = 1$. Отсюда если

$$\int\limits_{\mathbf{R}_n}\omega\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha\varphi_0\right|^{p-1}\operatorname{sign}D^\alpha\varphi_0 D^\alpha\psi dx=0,$$

то $\langle l, \psi\rangle = 0$. Таким образом, лемма доказана.

## 4. Представление линейного функционала через предельный элемент

**Теорема 1.** Всякий линейный функционал в $W_p^{(m)}$ ($\mathbf{R}_n$, ω) с нормой (1) представим в виде:

$$\langle l,\varphi\rangle=\int\limits_{\mathbf{R}_n}\omega\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha\psi_0\right|^{p-1}\operatorname{sign}D^\alpha\psi_0 D^\alpha\varphi dx,$$

где $\psi_0 = \varphi_0\|l\|^{1/(p-1)}$, $\psi_0 \in W_p^{(m)}$ ($\mathbf{R}_n$, ω).

**Доказательство.** Покажем, что

$$\langle l,\varphi\rangle=g\int\limits_{\mathbf{R}_n}\omega\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha\varphi_0\right|^{p-1}\operatorname{sign}D^\alpha\varphi_0 D^\alpha\varphi dx.$$

Пусть $\varphi \in W_p^{(m)}$ ($\mathbf{R}_n$, ω) – любая функция. Обозначим

$$a=\int\limits_{\mathbf{R}_n}\omega\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha\varphi_0\right|^{p-1}\operatorname{sign}D^\alpha\varphi_0 D^\alpha\varphi dx.$$

Тогда функция $\psi = \varphi - a\varphi_0$ удовлетворяет (5):

$$\int\limits_{\mathbf{R}_n}\omega\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha\varphi_0\right|^{p-1}\operatorname{sign}D^\alpha\varphi_0 D^\alpha\left(\varphi-a\varphi_0\right)dx=$$

$$=\int\limits_{\mathbf{R}_n}\omega\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha\varphi_0\right|^{p-1}\operatorname{sign}D^\alpha\varphi_0 D^\alpha\varphi dx-$$

$$-a\int\limits_{\mathbf{R}_n}\omega\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha\varphi_0\right|^{p-1}\operatorname{sign}D^\alpha\varphi_0 D^\alpha\varphi_0 dx=$$

$$=a-a\int\limits_{\mathbf{R}_n}\omega\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha\varphi_0\right|^{p-1}\left|D^\alpha\varphi_0\right|dx=$$

$$=a-a\int\limits_{\mathbf{R}_n}\omega\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha\varphi_0\right|^{p}dx=a-a\|\varphi_0\|^p=a-a=0.$$

Следовательно, по лемме 3

$$\langle l,\psi\rangle=\langle l,\varphi-a\varphi_0\rangle=\langle l,\varphi\rangle-a\langle l,\varphi_0\rangle=0\quad\Rightarrow\quad\langle l,\varphi\rangle=a\langle l,\varphi_0\rangle.$$

По лемме 2 $g$ = <$l$, $\varphi_0$> и

$$\langle l,\varphi\rangle = g\int\limits_{\mathbf{R}_n}\omega\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha\varphi_0\right|^{p-1}\operatorname{sign}D^\alpha\varphi_0 D^\alpha\varphi dx\,.$$

Далее, по определению нормы функционала $g = \|l\|$. Отсюда

$$\|l\|\left|D^\alpha\varphi_0\right|^{p-1}\operatorname{sign}D^\alpha\varphi_0 = \|l\|^{(p-1)/(p-1)}\left|D^\alpha\varphi_0\right|^{p-1}\operatorname{sign}D^\alpha\varphi_0 =$$

$$=\left|D^\alpha\varphi_0\|l\|^{1/(p-1)}\right|^{p-1}\operatorname{sign}D^\alpha\varphi_0\|l\|^{1/(p-1)}\,.$$

Обозначив $\psi_0 = \varphi_0\|l\|^{1/(p-1)}$, получим

$$\langle l,\varphi\rangle = \int\limits_{\mathbf{R}_n}\omega\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha\psi_0\right|^{p-1}\operatorname{sign}D^\alpha\psi_0 D^\alpha\varphi dx\,. \tag{8}$$

Теорема доказана.

## 5. Нелинейное уравнение и равносильность представлений для финитных функционалов

В данном пункте результаты, полученные выше для любых линейных функционалов, соединяются с результатами работы [1] для линейного финитного функционала. Ограниченность носителя функционала здесь необходима для существования свертки фундаментального решения дифференциального оператора с рассматриваемым функционалом.

Интегрируя по частям (8), получим

$$\langle l,\varphi\rangle = \int\limits_{\mathbf{R}_n}\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\left(\omega\left|D^\alpha\psi_0\right|^{p-1}\operatorname{sign}D^\alpha\psi_0\right)\varphi dx\,.$$

Относительно неизвестной функции $\psi_0$ получается нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных над функцией $\varphi$ основного пространства:

$$l = \sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\left(\omega\left|D^\alpha\psi_0\right|^{p-1}\operatorname{sign}D^\alpha\psi_0\right). \tag{9}$$

Уравнение (9) связывает данный линейный финитный функционал $l$, заданную при нормировании пространства весовую функцию $\omega$ и неизвестную функцию $\psi_0$. Выше показано, что $\psi_0$ является для данного функционала $l$ единственным элементом в основном пространстве.

Частный случай такого уравнения в невесовом ($\omega = 1$) гильбертовом ($p = 2$) пространстве имеет вид:

$$l = \sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}(-1)^{|\alpha|}D^{2\alpha}\psi_0\,. \tag{10}$$

Структура решения этого уравнения описана в [1] на основе общего случая линейного оператора с постоянными коэффициентами [43]. Для получения явного вида искомой функции здесь требуется знание фундаментального решения $E$ уравнения (10), так как $\psi_0 = E * l$. Однако к настоящему времени фундаментальное решение этого уравнения в явном виде не найдено. Оператор уравнения (10) может быть выражен через оператор Лапласа:

$$\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}(-1)^{|\alpha|}D^{2\alpha}=\sum_{k=0}^{m}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}(-1)^{k}D^{2\alpha}=$$
$$=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}D^{2k}=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k}\Delta^{k}.$$

Уравнение вида (10) использовалось нами в [1] для установления представления линейного финитного функционала и нахождения соответствующей ему экстремальной функции, принадлежащей основному пространству в весовом негильбертовом случае. Представление и экстремальная функция выражались через свертку фундаментального решения с функционалом. Приведем формулировки соответствующих теорем.

**Теорема 2 [1].** Для всякого линейного финитного функционала $l\in W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n,\omega)$, $\mathrm{supp}(l)\subseteq\Omega$, при условии $pm>n$, $1/p+1/q=1$, $1<p<\infty$, существует экстремальная функция $\psi_l\in W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n,\omega)$, которая имеет вид:

$$\psi_l=\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}D^{\alpha}E*\left(\left|\frac{D^{\alpha}(E*l)}{\omega}\right|^{1/(p-1)}\mathrm{sgn}\left(\frac{D^{\alpha}(E*l)}{\omega}\right)\right).$$

**Теорема 3 [1].** Экстремальная функция $\psi_l\in W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n,\omega)$ линейного финитного функционала $l\in W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n,\omega)$, $\mathrm{supp}(l)\subseteq\Omega$, при условии $pm>n$, $1/p+1/q=1$, $1<p<\infty$, единственна.

На основании этих утверждений решение уравнения (9) может быть получено через решение уравнения (10), т.е. имеет место следующая теорема.

**Теорема 4.** Решением уравнения (9) в условиях теорем 2 и 3 [1] является экстремальная функция $\psi_l\in W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n,\omega)$ линейного финитного функционала $l\in W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n,\omega)$. Решение уравнения (9) единственно.

**Доказательство.** Из построения экстремальной функции в [1] следует

$$D^{\alpha}\psi_l=\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}D^{\alpha}E*D^{\alpha}\psi_l,$$

где $E$ – фундаментальное решение уравнения (10), и

$$D^{\alpha}\psi_l=\left|\frac{D^{\alpha}(E*l)}{\omega}\right|^{1/(p-1)}\mathrm{sign}\left(\frac{D^{\alpha}(E*l)}{\omega}\right),\quad |\alpha|\le m. \tag{11}$$

Подстановка $D^{\alpha}\psi_0=D^{\alpha}\psi_l$ в уравнение (9) дает

$$l=\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}\left(\omega\left|\left|\frac{D^{\alpha}(E*l)}{\omega}\right|^{1/(p-1)}\mathrm{sign}\left(\frac{D^{\alpha}(E*l)}{\omega}\right)\right|^{p-1}\times\right.$$
$$\left.\times\,\mathrm{sign}\left(\left|\frac{D^{\alpha}(E*l)}{\omega}\right|^{1/(p-1)}\mathrm{sign}\left(\frac{D^{\alpha}(E*l)}{\omega}\right)\right)\right).$$

Учитывая, что

$$\left|\mathrm{sign}\left(\frac{D^{\alpha}(E*l)}{\omega}\right)\right|=1$$

и что в силу положительности ω

$$\operatorname{sign}\left(\left|\frac{D^{\alpha}(E*l)}{\omega}\right|^{1/(p-1)}\operatorname{sign}\left(\frac{D^{\alpha}(E*l)}{\omega}\right)\right)=\operatorname{sign} D^{\alpha}(E*l), \qquad (12)$$

получаем

$$l=\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}\left(\omega\left|\frac{D^{\alpha}(E*l)}{\omega}\right|^{(p-1)/(p-1)}\operatorname{sign} D^{\alpha}(E*l)\right),$$

$$l=\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}\left(\left|D^{\alpha}(E*l)\right|\operatorname{sign} D^{\alpha}(E*l)\right),$$

$$l=\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}\left(D^{\alpha}(E*l)\right),$$

$$l=\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}(-1)^{|\alpha|}D^{2\alpha}(E*l). \qquad (13)$$

Выражение (13) представляет собой верное равенство [1]. Следовательно, экстремальная функция

$$\psi_l=\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}D^{\alpha}E*\left(\left|\frac{D^{\alpha}(E*l)}{\omega}\right|^{1/(p-1)}\operatorname{sign}\left(\frac{D^{\alpha}(E*l)}{\omega}\right)\right)$$

является решением уравнения (9).

Единственность решения уравнения (9) следует из единственности предельного элемента $\varphi_0$, установленной в лемме 2.

Лемма доказана.

**Теорема 5.** Представления линейного финитного функционала в $W_p^{(m)}$ ($\mathbf{R}_n$, ω)

$$\langle l,\varphi\rangle=\int_{\mathbf{R}_n}\omega\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^{\alpha}\psi_l\right|^{p-1}\operatorname{sign} D^{\alpha}\psi_l D^{\alpha}\varphi dx \qquad (14)$$

и

$$\langle l,\varphi\rangle=\int_{\mathbf{R}_n}\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}D^{\alpha}(E*l)D^{\alpha}\varphi dx \qquad (15)$$

в условиях теорем 2 и 3 [1] равносильны.

**Доказательство** выполняется, как и в теореме 4, подстановкой выражения для экстремальной функции в представление (14) с учетом (11) и (12), что приводит к представлению (15).

Теорема доказана.

**Список источников**


1. *Корытов И.В.* Экстремальная функция линейного функционала в весовом пространстве Соболева // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 2 (14). С. 5–15.
2. *Корытов И.В.* Равномерная выпуклость весового пространства Соболева // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. № 6 (32). С. 25–34.

3. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М. : Наука, 1988. 333 с.
4. *Агранович М.С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. М. : Изд-во МЦНМО, 2013. 378 с.
5. *Мазья В.Г.* Пространства С.Л. Соболева. Л. : Изд-во ЛГУ, 1985. 416 с.
6. *Шубин М.А.* Лекции об уравнениях математической физики. М. : Изд-во МЦНМО, 2003. 303 с.
7. *Шойнжуров Ц.Б.* О приближенном интегрировании функций в пространствах С.Л. Соболева с весом // Доклады Академии наук СССР. 1974. Т. 218, № 4. С. 775–778.
8. *Корытов И.В.* Представление функционала погрешности кубатурной формулы в весовом пространстве Соболева // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11, спец. вып. С. 59–66.
9. *Корытов И.В.* Функция, представляющая функционал погрешности кубатурной формулы в пространстве Соболева // Известия Томского политехнического университета. 2013. Т. 323, № 2. С. 21–25.
10. *Соболев С.Л.* О задаче интерполирования функций *n* переменных // Доклады Академии наук СССР. 1961. Т. 137, № 4. С. 778–781.
11. *Соболев С.Л.* О формулах механических кубатур в *n*-мерном пространстве // Доклады Академии наук СССР. 1961. Т. 137, № 3. С. 527–530.
12. *Соболев С.Л.* Некоторые вопросы теории кубатурных формул. Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1963. 8 с.
13. *Соболев С.Л.* О кубатурных формулах // Studia Mathematica. 1963. Vol. 1. P. 117–118.
14. *Соболев С.Л.* Лекции по теории кубатурных формул : спецкурс, прочитанный в НГУ в 1963/64 учебном году. Новосибирск : Изд-во НГУ, 1964. 192 с.
15. *Соболев С.Л.* Лекции по теории кубатурных формул : курс, прочитанный в НГУ в 1964/65 учебном году. Новосибирск : Изд-во НГУ, 1965. 263 с.
16. *Бабушка И., Соболев С.Л.* Оптимизация численных методов // Aplikace Matematiky. 1965. V. 10 (2). P. 96–129.
17. *Соболев С.Л.* Сходимость формул приближенного интегрирования на функциях из $L_2^{(m)}$ // Доклады Академии наук СССР. 1965. Т. 162, № 6. С. 1259–1261.
18. *Соболев С.Л.* Кубатурные формулы с регулярным пограничным слоем // Доклады Академии наук СССР. 1965. Т. 163, № 3. С. 587–590.
19. *Соболев С.Л.* О порядке сходимости кубатурных формул // Доклады Академии наук СССР. 1965. Т. 162, № 5. С. 1005–1008.
20. *Соболев С.Л.* О построении кубатурных формул с регулярным пограничным слоем // Доклады Академии наук СССР. 1966. Т. 166, № 2. С. 295–297.
21. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М. : Наука, 1974. 808 с.
22. *Соболев С.Л., Васкевич В.Л.* Кубатурные формулы. Новосибирск : Ин-т математики СО РАН, 1996. 483 с.
23. *Polovinkin V.I.* Some estimates of norms of functionals of cubature formula errors // Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR. 1969. V. 5 (3). P. 192–195. doi: 10.1007/BF01388625
24. *Polovinkin V.I.* On cubature formulas with regular boundary layer // Siberian Mathematical Journal. 1972. V. 13 (4). P. 663–665. doi: 10.1007/BF00971061
25. *Шойнжуров Ц.Б.* Некоторые вопросы теории кубатурных формул в пространстве $W_2^{(m)}$ // Сибирский математический журнал. 1967. Т. 8, № 2. С. 433–446.
26. *Шойнжуров Ц.Б.* Оценка функционалов погрешности кубатурной формулы в пространствах с нормой, зависящей от младших производных : дис. … канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1967. 83 с.
27. *Шойнжуров Ц.Б.* Оценка нормы функционала погрешности интерполяционных формул в пространстве Соболева $L^{(m)}{}_2$ // Труды МИАН СССР. 1987. Т. 180. С. 234–235.

28. *Шойнжуров Ц.Б.* Некоторые вопросы теории кубатурных формул в неизотропных пространствах С.Л. Соболева // Доклады Академии наук СССР. 1973. Т. 209, № 5. С. 1036–1038.
29. *Шойнжуров Ц.Б.* Теория кубатурных формул в функциональных пространствах с нормой, зависящей от функции и ее производных : дис. … д-ра физ.-мат. наук. Улан Удэ, 1977. 235 с.
30. *Polovinkin V.I.* Asymptotic optimality of sequences of formulas with a regular boundary layer for odd *m* // Siberian Mathematical Journal. 1975. V. 16 (2). P. 253–258. doi: 10.1007/BF00967509
31. *Polovinkin V.I.* Representation of linear functionals in $L_q^{(m^*)}(\Omega)$ // Siberian Mathematical Journal. 1995. V. 36 (1). P. 140–142. doi: 10.1007/BF02113927
32. *Polovinkin V.I.* Representation of functionals on the spaces $L_p^m(E_n)$ // Siberian Mathematical Journal. 1997. V. 38 (1). P. 140–146. doi: 10.1007/BF02674910
33. *Polovinkin V.I.* A formula for the functions realizing functionals // Siberian Mathematical Journal. 2001. V. 42 (4). P. 774–778. doi: 10.1023/A:1010457817521.
34. *Шойнжуров Ц.Б.* Кубатурные формулы в пространстве С.Л. Соболева $W_p^m$. Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2002. 201 с.
35. *Шойнжуров Ц.Б.* Оценка нормы функционала погрешности кубатурных формул в различных функциональных пространствах. Улан-Удэ: Изд-во Бурят. науч. центра СО РАН, 2005. 247 с.
36. *Корытов И.В.* Неравенства Кларксона для пространства Соболева периодических функций // Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки. 2016. Т. 158, № 3. С. 336–349.
37. *Korytov I.V.* Clarkson's inequalities for periodic Sobolev space // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. V. 38 (6). P. 1146–1155. doi: 10.1134/S1995080217060178
38. *Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Nuraliev F.A.* On an optimal quadrature formula in Sobolev space $L_2^{(m)}$ // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2013. V. 243 (1). P. 91–112. doi: 10.1016/j.cam.2012.11.010
39. *Hayotov A.R., Milovanović G.V., Shadimetov Kh.M.* Optimal quadrature formula in the sense of Sard in $K_2(P_3)$ space // Publications de l'Institut Mathématique. 2014. V. 95 (109). P. 29–47. doi: 10.2298/PIM1409029H
40. *Boltaev N.D., Hayotov A.R., Milovanović G.V., Shadimetov Kh.M.* Optimal quadrature formulas for Fourier coefficients in $W_2^{(M,m-1)}$ space // Journal of Applied Analysis and Computation. 2017. V. 7 (4). P. 1233–1266. doi: 10.11948/2017076
41. *Vaskevich V.L.* Extremal functions of cubature formulas on a multidimensional sphere and spherical splines // Siberian Advances in Mathematics, 2012. V. 22 (3). P. 217–226. doi: 10.3103/S1055134412030054
42. *Vaskevich V.L.* Errors, condition numbers, and guaranteed accuracy of higher dimensional spherical cubatures // Siberian Mathematical Journal. 2012. V. 53 (6). P. 996–1010. doi: 10.1134/S0037446612060043
43. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М. : Наука, 1981. 512 с.

## References

1. Korytov I.V. (2011) Ekstremal'naya funktsiya lineynogo funktsionala v vesovom prostranstve Soboleva [The extreme function of a linear functional in the weighted Sobolev space]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(14). pp. 5–15.
2. Korytov I.V. (2014) Ravnomernaya vypuklost' vesovogo prostranstva Soboleva [Uniform convexity of weighted Sobolev space]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta.*

*Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 6(32). pp. 25–34.
3. Sobolev S.L. (1988) *Nekotoryye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoy fizike* [Some applications of functional analysis in mathematical physics]. Moscow: Nauka.
4. Agranovich M.S. (2013) *Sobolevskiye prostranstva, ikh obobshcheniya i ellipticheskiye zadachi v oblastyakh s gladkoy i lipshitsevoy granitsey* [Sobolev spaces, their generalizations and elliptical problems in regions with a smooth and Lipschitz boundary]. Moscow: MCNMO.
5. Maz'ya V.G. (1985) *Prostranstva S.L. Soboleva* [Sobolev spaces]. Leningrad: Leningrad State University.
6. Shubin M.A. (2003) *Lektsii ob uravneniyakh matematicheskoy fiziki*. [Lectures on equations of mathematical physics]. Moscow: MCNMO.
7. Shoynzhurov Ts.B. (1974) O priblizhennom integrirovanii funktsiy v prostranstvakh S.L. Soboleva s vesom [On the approximate integration of functions in S.L. Sobolev spaces with weight]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 218(4). pp. 775–778.
8. Korytov I.V. (2006) Predstavleniye funktsionala pogreshnosti kubaturnoy formuly v vesovom prostranstve Soboleva [Representation of the error functional of a cubature formula in the weighted Sobolev space]. *Vychislitel'nyye tekhnologii – Computational Technologies*. 11. Special issue. pp. 59–66.
9. Korytov I.V. (2013) Funktsiya, predstavlyayushchaya funktsional pogreshnosti kubaturnoy formuly v prostranstve Soboleva [A function representing the error functional of a cubature formula in the Sobolev space]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering.* 323(2). pp. 21–25.
10. Sobolev S.L. (1961) O zadache interpolirovaniya funktsiy *n* peremennykh [On the problem of interpolation of functions of *n* variables]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 137(4). pp. 778–781.
11. Sobolev S.L. (1961) O formulakh mekhanicheskikh kubatur v *n*-mernom prostranstve [On formulas for mechanical cubatures in the *n*-dimensional space]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 137(3). pp. 527–530.
12. Sobolev S.L. (1963) *Nekotoryye voprosy teorii kubaturnykh formul* [Some questions of the theory of cubature formulas]. Novosibirsk: SB AS USSR Publ.
13. Sobolev S.L. (1963) O kubaturnykh formulakh [On cubature formulas]. *Studia Mathematica. Seria Specjalna*. 1. pp. 117–118.
14. Sobolev S.L. (1964) *Lektsii po teorii kubaturnykh formul: kurs, prochitannyy v NGU v 1963/64 uchebnom godu* [Lectures on the theory of cubature formulas: a special course, given at Novosibirsk State University in the 1963/64 academic year]. Novosibirsk: Novosibirsk State University.
15. Sobolev S.L. (1965) *Lektsii po teorii kubaturnykh formul: kurs, prochitannyy v NGU v 1964/645 uchebnom godu* [Lectures on the theory of cubature formulas: a course, given at NSU in the 1964/65 academic year]. Novosibirsk: Novosibirsk State University.
16. Babuška I., Sobolev S.L. (1965) Optimizatsiya chislennykh metodov [Optimization of numerical methods]. *Aplikace Matematiky*. 10(2). pp. 96–129.
17. Sobolev S.L. (1965) Skhodimost' formul priblizhennogo integrirovaniya na funktsiyakh iz $L_2^{(m)}$ [Convergence of approximate integration formulas on functions from $L_2^{(m)}$]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 162(6). pp. 1259–1261.
18. Sobolev S.L. (1965) Kubaturnyye formuly s regulyarnym pogranichnym sloyem [Cubature formulas with a regular boundary layer]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 163(3). pp. 587–590.
19. Sobolev S.L. (1965) O poryadke skhodimosti kubaturnykh formul [On the order of convergence of cubature formulas]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 162(5). pp. 1005–1008.
20. Sobolev S.L. (1966) O postroyenii kubaturnykh formul s regulyarnym pogranichnym sloyem [On the construction of cubature formulas with a regular boundary layer]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 166(2). pp. 295–297.

21. Sobolev S.L. (1974) *Vvedeniye v teoriyu kubaturnykh formul* [Introduction to the theory of cubature formulas]. Moscow: Nauka.
22. Sobolev S.L., Vaskevich V.L. (1996) Kubaturnyye formuly [Cubature formulas]. Novosibirsk: Institute of Mathematics SB RAS.
23. Polovinkin V.I. (1969) Some estimates of norms of functionals of cubature formula errors. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*. 5(3). pp. 192–195. DOI: 10.1007/BF01388625.
24. Polovinkin V.I. (1972) On cubature formulas with regular boundary layer. *Siberian Mathematical Journal*. 13(4). pp. 663–665. DOI: 10.1007/BF00971061.
25. Shoynzhurov Ts.B. (1967) Nekotoryye voprosy teorii kubaturnykh formul v prostranstve $W_2^{(m)}$ [Some questions of the theory of cubature formulas in the space $W_2^{(m)}$]. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal – Siberian Mathematical Journal*. 8(2). pp. 433–446.
26. Shoynzhurov Ts.B. (1967) *Otsenka funktsionalov pogreshnosti kubaturnoy formuly v prostranstvakh s normoy, zavisyashchey ot mladshikh proizvodnykh* [Estimation of error functionals of the cubature formula in spaces with a norm dependent on junior derivatives]. Dissertation. Novosibirsk.
27. Shoynzhurov Ts.B. (1987) Otsenka normy funktsionala pogreshnosti interpolyatsionnykh formul v prostranstve Soboleva $L_2^{(m)}$ [Estimation of the norm of the error functional for interpolation formulas in the Sobolev space $L_2^{(m)}$]. *Trudy MIAN SSSR – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 180. pp. 234–235.
28. Shoynzhurov Ts.B. (1973) Nekotoryye voprosy teorii kubaturnykh formul v neizotropnykh prostranstvakh S.L. Soboleva [Some issues of the theory of cubature formulas in nonisotropic Sobolev spaces]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 209(5). pp. 1036–1038.
29. Shoynzhurov Ts.B. (1977) *Teoriya kubaturnykh formul v funktsional'nykh prostranstvakh s normoy, zavisyashchey ot funktsii i eye proizvodnykh* [Theory of cubature formulas in functional spaces with a norm depending on a function and its derivatives]. Dissertation. Ulan-Ude.
30. Polovinkin V.I. (1975) Asymptotic optimality of sequences of formulas with a regular boundary layer for odd *m*. *Siberian Mathematical Journal*. 16(2). pp. 253–258. DOI: 10.1007/BF00967509.
31. Polovinkin V.I. (1995) Representation of linear functionals in $L_q^{(m^*)}(\Omega)$. *Siberian Mathematical Journal*. 36(1). pp. 140–142. DOI: 10.1007/BF02113927.
32. Polovinkin V.I. (1997) Representation of functionals on the spaces $L_p^m(E_n)$. *Siberian Mathematical Journal*. 38(1). pp. 140–146. DOI: 10.1007/BF02674910.
33. Polovinkin V.I. (2001) A formula for the functions realizing functionals. *Siberian Mathematical Journal*. 42(4). pp. 774–778. DOI: 10.1023/A:1010457817521.
34. Shoynzhurov Ts.B. (2002) *Kubaturnyye formuly v prostranstve S.L. Soboleva* $W_p^m$ [Cubature formulas in S.L. Sobolev space $W_p^m$]. Ulan-Ude: VSGTU.
35. Shoynzhurov Ts.B. (2005) *Otsenka normy funktsionala pogreshnosti kubaturnykh formul v razlichnykh funktsional'nykh prostranstvakh* [Estimation of the norm of the error functional of cubature formulas in different functional spaces]. Ulan-Ude: Buryat Scientific Center SB RAS.
36. Korytov I.B. (2016) Neravenstva Klarksona dlya prostranstva Soboleva periodicheskikh funktsiy [Clarkson's inequalities for periodic Sobolev space]. *Uchenyye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie Nauki – Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series*. 158(3). pp. 336–349.
37. Korytov I.V. (2017) Clarkson's inequalities for periodic Sobolev space. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 38(6). pp. 1146–1155. DOI: 10.1134/S1995080217060178.

38. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Nuraliev F.A. (2013) On an optimal quadrature formula in Sobolev space $L_2^{(m)}$. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 243(1). pp. 91–112. DOI: 10.1016/j.cam.2012.11.010.
39. Hayotov A.R., Milovanović G.V., Shadimetov Kh.M. (2014) Optimal quadrature formula in the sense of Sard in $K_2(P_3)$ space. *Publications de l'Institut Mathématique*. 95(109). pp. 29–47. DOI: 10.2298/PIM1409029H.
40. Boltaev N.D., Hayotov A.R., Milovanović G.V., Shadimetov Kh.M. (2017) Optimal quadrature formulas for Fourier coefficients in $W_2^{(M,m-1)}$ space. *Journal of Applied Analysis and Computation*. 7(4). pp. 1233–1266. DOI: 10.11948/2017076.
41. Vaskevich V.L. (2012) Extremal functions of cubature formulas on a multidimensional sphere and spherical splines. *Siberian Advances in Mathematics*. 22(3). pp. 217–226. DOI: 10.3103/S1055134412030054.
42. Vaskevich V.L. (2012) Errors, condition numbers, and guaranteed accuracy of higher dimensional spherical cubatures. *Siberian Mathematical Journal*. 53(6). pp. 996–1010. DOI: 10.1134/S0037446612060043.
43. Vladimirov V.S. (1981) *Uravneniya matematicheskoj fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka.

***Сведения об авторе*:**
**Корытов Игорь Витальевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент отделения математики и информатики Томского политехнического университета, Томск, Россия. E-mail: korytov@tpu.ru

***Information about the author*:**
**Korytov Igor V.** (Candidate of in Physical and Mathematical Sciences, associate professor, Division for Mathematics and Computer Sciences, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: korytov@tpu.ru

*Статья поступила в редакцию 07.12.2021; принята к публикации 03.02.2023*

*The article was submitted 07.12.2021; accepted for publication 03.02.2023*

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2023 Математика и механика № 81
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 519.622.1 MSC: 65L20
doi: 10.17223/19988621/81/3

# Численный метод решения задачи Коши для одного ди фференциального уравнения с дробной производной Капуто

**Асият Гамзатовна Омарова**

*Дагестанский государственный университет, Махачкала, Россия, asya89.89@mail.ru*

**Аннотация.** Исследована на отрезке $[0, T]$ задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто порядка $\alpha = \alpha(t)$, где $0 < \alpha(t) < 1$ – непрерывная функция. Построен численный метод решения задачи. Показано, что численное решение задачи сходится к точному решению первым порядком. Проведен вычислительный эксперимент по анализу численного решения задачи Коши. На основе вычислительного эксперимента показано, что если в качестве $\alpha(t)$ взять среднее значение, численное решение задачи также имеет первый порядок точности.
**Ключевые слова:** дробная производная, аппроксимация, задача Коши, разностная схема, сходимость, численные методы, вычислительный эксперимент

**Для цитирования:** Омарова А.Г. Численный метод решения задачи Коши для одного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 81. С. 31–38. doi: 10.17223/19988621/81/3

Original article

# A numerical method of solving the Cauchy problem for one differential equation with the Caputo fractional derivative

**Asiyat G. Omarova**

*Dagestan State University, Makhachkala, Russian Federation, asya89.89@mail.ru*

**Abstract.** The Cauchy problem for differential equations with fractional derivatives is used in many spheres of science and technology. It was the reason for the development of various methods for its solution, both analytic and approximate ones. The search of an exact solution of differential equations with fractional derivatives by analytic methods is a complex and ineffective task; for this reason, an attempt to solve the considered problem approximately is undertaken in this paper.

The Cauchy problem for the ordinary differential equation with a fractional derivative of the Caputo order, $\alpha = \alpha(t)$ where $0 < \alpha(t) < 1$ is a continuous function, has been investi-

gated on the segment [0, $T$]. The method of finite differences which is relatively primary to implement is used for the numerical solution. A difference scheme approximating the Cauchy problem with the first order is constructed on a uniform grid. The difference problem is studied for stability and convergence with a fixed value of the function $\alpha(t)$. It is shown that the numerical solution of the problem converges to the exact solution in the first order. Explicit recurrent formulas for the numerical solution are obtained. A computational experiment upon analysis of the numerical solution of the Cauchy problem is carried out. It is shown on the basis of the computational experiment that if we take the average value for $\alpha(t)$, the first order exactness takes place.
**Keywords:** fractional derivative, approximation, Cauchy problem, numerical methods, computational experiment

**For citation:** Omarova, A.G. (2023) A numerical method of solving the Cauchy problem for one differential equation with the Caputo fractional derivative. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 81. pp. 31–38. doi: 10.17223/19988621/81/3

## Введение

Основы дробного исчисления были заложены еще в XVIII в., но широко оно стало применяться в последние 15 лет. Об этом свидетельствуют работы [1–3].

Приведем небольшой перечень задач, где применимы и эффективны дифференциальные уравнения с дробными производными: обратные задачи механики, пластина в вязкой жидкости, диффузия в пористых средах, динамика турбулентной среды, задача о падении тела в атмосфере, задача теплопереноса, теория фазовых переходов, задача о релаксации, космофизика и многие другие задачи физики [3].

Задача Коши для дифференциального уравнения с дробными производными применяется во многих областях науки и техники. Это явилось причиной разработки для ее решения различных методов, как аналитических, так и приближенных. Поиск точного решения дифференциальных уравнений с дробными производными аналитическими методами является задачей сложной и малоэффективной, поэтому большое количество работ посвящено приближенным численным методам решения.

Численные методы решения задачи Коши рассмотрены в работах [4–6]. В [4] анализируются разностные методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дифференцирования, доказана устойчивость разностной схемы. В [5] рассматривается задача Коши для системы трех дифференциальных уравнений с производными дробного порядка Капуто, исследуются вопросы существования и единственности решения рассматриваемой задачи и способ его отыскания. В [6] изучен разностный метод $(2 - \alpha)$-го порядка точности решения задачи Коши для дифференциального уравнения с оператором дробного дифференцирования Римана–Лиувиля. Получена оценка предложенного численного метода, из которой следует сходимость.

Доказательству устойчивости и сходимости разностных схем, аппроксимирующих краевые задачи для дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто, посвящены работы [7, 8].

В данной работе исследуется задача Коши с дробной производной Капуто в случае, когда порядок $\alpha = \alpha(t)$ – некоторая непрерывная функция. Для конкретных представлений функции $\alpha = \alpha(t)$ проведен вычислительный эксперимент, показывающий, что предложенный численный метод сходится к точному решению задачи.

## 1. Постановка задачи

В области $D$ = [0, $T$] рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто [9. С. 597]:

$$\begin{aligned} &\partial_{ot}^{\alpha(t)} u(t) = f(t,u), t > 0, \\ &u(0) = u^{(0)}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $f(t,u) = \{f_i(t,u_1,..,u_m)\}_{i=1}^m$, $u(t) = \{u_i(t)\}_{i=1}^m$, – непрерывные по всем аргументам функции в замкнутой области $D$, $\partial_{0t}^{\alpha(t)} u(t) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \displaystyle\int_0^t \frac{u'(s)}{(t-s)^{\alpha(t)}} ds$ – дробная производная Капуто, $\alpha(t)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая условию $0 < \alpha(t) < 1$, $t > 0$.

Так как функции $f_i$, $i = 1, 2, ..., m,$ непрерывные во всей области $D$, то имеют место неравенства $|f_i| < M$, $i = 1, 2, ..., m,$ где $M > 0$ – некоторая константа.

Предположим, кроме того, что в области $D$ для функций $f_i$ выполняется условие Липшица по аргументам $(u_1, u_2, .., u_m)$, т.е.

$$|f_i(t,u_1',u_2',..,u_m') - f_i(t,u_1'',u_2''..,u_m'')| \le L\{|u_1' - u_1''| + |u_2' - u_2''| + ... + |u_m' - u_m''|\}$$

для всех точек $(t,u_1',u_2',..,u_m')$ и $(t,u_1'',u_2''..,u_m'')$ в области $D$, где $L$ является константой Липшица.

Если выполнены сформулированные выше условия, то существует единственное решение $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$, .., $u_m = u_m(t)$ системы (1), определенное при всех $|t| \le t_0 = \min(T / M)$ и принимающее при $t$ = 0 заданные начальные значения [10].

## 2. Численный метод решения задачи Коши для дифференциального уравнения с дробной производной

Построим численное решение задачи (1). Для этого в области $D$ введем по переменной $t$ равномерную сетку с шагом $\tau > 0$:

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0,1,2,...N, N\tau = T\}.$$

Точное решение задачи (1) обозначим через $u_n = u(t_n)$, а приближенное решение обозначим $y_n$, $n = 0,1,2,..N.$ Тогда для дробной производной при $t = t_n$ имеет место равенство

$$\partial_{0t}^{\alpha(t_n)} u(t_n) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha(t_n))\tau} \sum_{k=0}^{n} (y_{k+1} - y_k)(t_{n-k+1}^{1-\alpha(t_n)} - t_{n-k}^{1-\alpha(t_n)}) + O(\tau). \tag{2}$$

Воспользовавшись аппроксимацией (2), систему уравнений (1) заменим системой разностных уравнений

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha(t_n))\tau} \sum_{k=0}^{n} (y_{k+1} - y_k)(t_{n-k+1}^{1-\alpha(t_n)} - t_{n-k}^{1-\alpha(t_n)}) - f(t_{n,}y_n) = 0, \tag{3}$$

$$y_0 = u_0, \ \ n = 0,1,2,..N-1.$$

Преобразуя систему разностных уравнений (3), получим явные рекуррентные формулы:

$$
\begin{aligned}
&y_0 = u_0,\\
&y_1 = y_0 + \Gamma(2-\alpha(t_0))\tau^{\alpha(t_0)} f(t_0, y_0),\\
&y_{n+1} = y_n + \Gamma(2-\alpha(t_n))\tau^{\alpha(t_n)} f(t_n, y_n) - \tau^{\alpha(t_n)-1}\sum_{k=0}^{n-1}(y_{k+1}-y_k)(t_{n-k+1}^{1-\alpha(t_n)} - t_{n-k}^{1-\alpha(t_n)}),\\
&n = 0,1,2,..N-1.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Когда α($t$) =1 для всех $t \in D$, из (4) получим расчетные формулы Эйлера.

**Определение 1.** Будем говорить, что метод (3) сходится при $t$ = $t_n$, если $|y_n - u_n| \to 0$ при $\tau \to 0$. Метод сходится на отрезке [0, $T$], если он сходится в каждой точке $t \in [0,T]$ [11].

Исследуем сходимость разностного метода (3). Пусть $\tilde{\alpha}$ – любое произвольное значение функции α($t$).

Обозначим через $z_n = y_n - u_n$ погрешность метода. Покажем, что $z_n \to 0$ при $\tau \to 0$. Если $y_n = z_n + u_n$ подставим в равенство (3), получим разностное уравнение для погрешности

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(2-\tilde{\alpha})\tau}\sum_{k=0}^{n}(z_{k+1}-z_k)(t_{n-k+1}^{1-\tilde{\alpha}} - t_{n-k}^{1-\tilde{\alpha}}) =\\
&= f(t_n, z_n + u_n) - \frac{1}{\Gamma(2-\tilde{\alpha})\tau}\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)(t_{n-k+1}^{1-\tilde{\alpha}} - t_{n-k}^{1-\tilde{\alpha}}).
\end{aligned} \tag{5}
$$

Правую часть равенства (5) представим в виде суммы $\psi_n^{(1)} + \psi_n^{(2)}$, где

$$
\begin{aligned}
&\psi_n^{(1)} = -\frac{1}{\Gamma(2-\tilde{\alpha})\tau}\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)(t_{n-k+1}^{1-\tilde{\alpha}} - t_{n-k}^{1-\tilde{\alpha}}) + f(t_{n,}u_n),\\
&\psi_n^{(2)} = f(t_{n,}u_n + z_n) - f(t_{n,}u_n).
\end{aligned} \tag{6}
$$

Функция $\psi_n^{(1)}$ называется невязкой, или погрешностью аппроксимации, разностного уравнения (3) на решении исходного уравнения (1). Будем говорить, что разностный метод аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение, если $\psi_n^{(1)} \to 0$ при $\tau \to 0$. [11]. Разложим $u(t_{k+1}) = u(t_k + \tau)$ в ряд Тейлора:

$$
u(t_{k+1}) \approx u(t_k) + \tau u'(t_k) + \frac{\tau^2}{2}u''(\xi_k), \tag{7}
$$

где $\xi_k$ – некоторая точка, расположенная в интервале $(t_k, t_k + \tau)$.

Подставляя (7) в (6), получим

$$
\begin{aligned}
\psi_n^{(1)} = &-\frac{1}{\Gamma(2-\tilde{\alpha})}\sum_{k=0}^{m}u'(t_k)\left(t_{n-k+1}^{1-\tilde{\alpha}} - t_{n-k}^{1-\tilde{\alpha}}\right) - \frac{\tau}{2\Gamma(2-\tilde{\alpha})}\sum_{k=0}^{m}u''(\xi_k)\left(t_{n-k+1}^{1-\tilde{\alpha}} - t_{n-k}^{1-\tilde{\alpha}}\right) + f(t_{n,}y_n) =\\
&= -(\partial_{0t}^{\tilde{\alpha}}u(t_n)) + f(t_n, u_n) + O(\tau) = O(\tau).
\end{aligned}
$$

Из этого равенства следует, что разностный метод (3) аппроксимирует задачу (1) с первым порядком.

Покажем, что функция $\psi_n^{(2)}$ удовлетворяет условию Липшица. Так как

$$
\psi_n^{(2)} = f(t_{n,}y_n) - f(t_{n,}u_n) = f(t_{n,}u_n + z_n) - f(t_{n,}u_n),
$$

$$\left|\psi_n^{(2)}\right| = \left| f(t_{n,} u_n + z_n) - f(t_{n,} u_n) \right| \le L\left|u_n + z_n - u_n\right| = L\,|\,z_n\,|.$$

Следовательно,

$$\tau^{1-\tilde\alpha} z_{n+1} + \left(t_2^{1-\tilde\alpha} - 2t_1^{1-\tilde\alpha} + t_0^{1-\tilde\alpha}\right) z_n + \ldots \left(t_{n+1}^{1-\tilde\alpha} - 2t_n^{1-\tilde\alpha} + t_{n-1}^{1-\tilde\alpha}\right) z_1 = \tau\Gamma(2-\tilde\alpha)\psi_n^{(2)} + \tau\Gamma(2-\tilde\alpha)\psi_n^{(1)},$$

т.е.

$$z_{n+1} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{t_{n-k+2}^{1-\tilde\alpha} - 2t_{n-k+1}^{1-\tilde\alpha} + t_{n-k}^{1-\tilde\alpha}}{\tau^{1-\tilde\alpha}} z_k + \tau^{\tilde\alpha}\Gamma(2-\tilde\alpha)\psi_n^{(2)} + \tau^{\tilde\alpha}\Gamma(2-\tilde\alpha)\psi_n^{(1)}, \tag{8}$$

$$n = 0,1,\ldots, N-1.$$

Преобразуя выражение под суммой равенства (8), получим

$$\frac{t_{n-k+2}^{1-\tilde\alpha} - 2t_{n-k+1}^{1-\tilde\alpha} + t_{n-k}^{1-\tilde\alpha}}{\tau^{1-\tilde\alpha}} = \frac{\tau^2\left(\left(t_{n-k+1}^{1-\tilde\alpha}\right)'' + O(\tau^2)\right)}{\tau^{1-\tilde\alpha}} = -\frac{\tau^{\tilde\alpha+1}\tilde\alpha\left(1-\tilde\alpha\right)}{t_{n-k+1}^{\tilde\alpha+1}} + O(\tau^{3+\tilde\alpha}) =$$

$$= -\frac{\tau^{\tilde\alpha+1}\tilde\alpha\left(1-\tilde\alpha\right)}{\tau^{\tilde\alpha+1}(n-k+1)^{\tilde\alpha+1}} + O(\tau^{3+\tilde\alpha}) = -\frac{\tilde\alpha\left(1-\tilde\alpha\right)}{(n-k+1)^{\tilde\alpha+1}} + O(\tau^{3+\tilde\alpha}).$$

Пусть $m \le n$ – значение $k$, при котором достигается $\max\limits_{1\le k}\left|z_k\right|$, тогда

$$|\,\psi_n^{(2)}\,| \le L\left|y_n - u_n\right| = L\left|z_n\right| \le L\max_{1\le k}\left|z_k\right| = L\left|z_m\right|,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{t_{n-k+2}^{1-\tilde\alpha} - 2t_{n-k+1}^{1-\tilde\alpha} + t_{n-k}^{1-\tilde\alpha}}{\tau^{1-\tilde\alpha}}\right|\left|z_k\right| \le \left|z_m\right|\sum_{k=1}^{n}\frac{\tilde\alpha\left(1-\tilde\alpha\right)}{(n-k+1)^{\tilde\alpha+1}} + O(\tau^{2+\tilde\alpha}).$$

Тогда $|\,z_{n+1}\,| \le (S + \tau^{\tilde\alpha}\Gamma(2-\tilde\alpha)L)\,|\,z_m\,| + \tau^{\tilde\alpha}\Gamma(2-\tilde\alpha)\left|\psi_n^{(1)}\right| + O(\tau^{2+\tilde\alpha}),$ где

$$S = \sum_{k=1}^{n}\frac{\tilde\alpha(1-\tilde\alpha)}{(n-k+1)^{\tilde\alpha+1}} \le \tilde\alpha(1-\tilde\alpha) +$$

$$+\int_1^n \frac{\tilde\alpha(1-\tilde\alpha)}{x^{\tilde\alpha+1}}dx = \tilde\alpha(1-\tilde\alpha) + (1-\tilde\alpha) - \frac{1-\tilde\alpha}{n^{\tilde\alpha}} \le 1-(\tilde\alpha)^2 < 1.$$

Следовательно, $|\,z_m\,| \le q\,|\,z_m\,| + \tau^{\tilde\alpha}\Gamma(2-\tilde\alpha)\max\limits_{0\le j\le n}\left|\psi_j^{(1)}\right| + O(\tau^{2+\tilde\alpha})$ , т.е.

$$(1-q)\,|\,z_m\,| \le \tau^{\tilde\alpha}\Gamma(2-\tilde\alpha)\max_{0\le j\le n}\left|\psi_j^{(1)}\right| + O(\tau^{2+\tilde\alpha}), \tag{9}$$

где $q = \left(1-\tilde\alpha^2\right) + \tau^{\tilde\alpha}\Gamma(2-\tilde\alpha)L.$

Из (9) при $q < 1$ и $\tau^{\tilde\alpha} < \dfrac{\tilde\alpha^2}{\Gamma(2-\tilde\alpha)L}$ следует оценка

$$\|z\| \le \frac{\tau^{\tilde\alpha}\,\Gamma(1-\tilde\alpha)}{1-q}\left\|\psi^{(1)}\right\| + O(\tau^{2+\tilde\alpha}), \tag{10}$$

где $\|z\| = \max\limits_{1\le k}\left|z_k\right|.$

Из оценки (10) следует сходимость разностной схемы (3) при $\tilde\alpha = \alpha(t)$. Так как $\tilde\alpha$ было взято произвольно, следовательно, разностный метод (3) сходится для всех $\alpha(t)$.

## 3. Вычислительный эксперимент по анализу численного решения

Рассмотрим систему разностных уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = y^0, \\ y_1 = y_0 + \Gamma(2-\alpha(t_0))\tau^{\alpha(t_0)} f(t_0, y_0), \\ y_{n+1} = y_n - \tau^{\alpha(t_n)-1}\sum\limits_{i=0}^{n-1}(y_{i+1}-y_i)(t_{n-i+1}^{1-\alpha(t_n)} - t_{n-i}^{1-\alpha(t_n)}) + \Gamma(2-\alpha(t_n))\tau^{\alpha(t_n)} f(t_n, y_n). \end{cases} \tag{11}$$

Для вычислительного эксперимента исследовали тестовую задачу

$$\begin{cases} \partial_{0t}^{\alpha(t)} u(t) = -u(t) + t^2 + \dfrac{2t^{2-\alpha(t)}}{\Gamma(3-\alpha(t))}, \quad 0 < t \le 1, \ \ 0 < \alpha(t) < 1, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

точным решением которой является функция $u(t) = t^2$.

Обозначим через $\varepsilon = \max\limits_{0\le n\le N}|y_n - u(t_n)|$, где $y_n$, $n = 0,1,2...,N,$ – таблица чисел, полученная на основе рекуррентных формул (11), а $u(t_n)$ – точное решение.

Проверим выполнение условия Липшица для функции

$$f(t,u) = -u(t) + t^2 + \frac{2t^{2-\alpha(t)}}{\Gamma(3-\alpha(t))},$$

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| = \left| -u_1(t) + t^2 + \frac{2t^{2-\alpha(t)}}{\Gamma(3-\alpha(t))} + u_2(t) - t^2 - \frac{2t^{2-\alpha(t)}}{\Gamma(3-\alpha(t))} \right| = |u_2(t) - u_1(t)|.$$

Таким образом, $|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \le L|u_1(t) - u_2(t)|$, следовательно, константа Липшица $L = 1$.

Выбор $\tau$ осуществляем из условия устойчивости $\tau^{\tilde{\alpha}} < \dfrac{\tilde{\alpha}^2}{\Gamma(2-\tilde{\alpha})L}$.

**Значения погрешности ε при для различных $\alpha(t)$**

| $\alpha(t)$ | $\tilde{\alpha}$ | $\tau$ | $\varepsilon = \max\limits_{0\le n\le N}\lvert y_n - u(t_n)\rvert$ при $\alpha(t)$ | $\varepsilon = \max\limits_{0\le n\le N}\lvert y_n - u(t_n)\rvert$ при $\tilde{\alpha}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha(t) = \dfrac{1}{t+1}$ | 0,693 | $\tau < 0.4$ | | |
| | | 0.2 | 0.200607 | 0.193696 |
| | | 0.1 | 0.102727 | 0.0993468 |
| | | 0.01 | 0.0108135 | 0.0107151 |
| | | 0.001 | 0.00110652 | 0.00111727 |
| $\alpha(t) = \dfrac{1}{t^2+3}$ | 0.302 | $\tau < 0.0005$ | | |
| | | 0.0004 | 0.000422696 | 0.000425794 |
| | | 0.0002 | 0.000211383 | 0.000212949 |
| | | 0.0001 | 0.000105703 | 0.000106491 |
| $\alpha(t) = \lvert\sin(t)\rvert$ | 0.46 | $\tau < 0.04$ | | |
| | | 0.03 | 0.0300878 | 0.0318397 |
| | | 0.02 | 0.0203528 | 0.0215116 |
| | | 0.01 | 0.0103327 | 0.0108322 |

Окончание таблицы

| $\alpha(t)$ | $\tilde{\alpha}$ | $\tau$ | $\varepsilon = \max\limits_{0 \le n \le N} \lvert y_n - u(t_n) \rvert$ | |
|---|---|---|---|---|
| | | | при $\alpha(t)$ | при $\tilde{\alpha}$ |
| $\alpha(t) = \frac{1}{4^t}$ | 0.541 | $\tau < 0.12$ | | |
| | | 0.1 | 0.10428 | 0.103953 |
| | | 0.02 | 0.0211145 | 0.0215553 |
| | | 0.01 | 0.01059 | 0.0108905 |

В таблице приведены значения погрешности ε при $\tilde{\alpha} = \int_0^1 \alpha(t)dt$ для различных функций $\alpha(t)$. Как видно из таблицы, при $\tau \to 0$ погрешность $\varepsilon \to 0$, т.е. предложенный численный метод сходится к точному решению задачи.

**Список источников**


1. *Diethelm K.* The Analysis of Fractional Differential Equations : An Application-oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. Berlin : Springer-Verlag. 2010. 262 p. (Lecture Notes in Mathematics; v. 2004)
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam : Elsevier Science, 2006. 499 p. (North-Holland Mathematics Studies; v. 204)
3. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск : Артишок, 2008. 512 с.
4. Бейбалаев В.Д., Абдулаев И.А., Наврузова К.А., Гаджиева Т.Ю. О разностных методах решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дифференцирования // Вестник Дагестанского государственного университета. 2014. Вып. 6. С. 53–61.
5. Ибавов Т.И. Решение задачи Коши для системы трех дифференциальных уравнений с производной дробного порядка // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2019. № 2. С. 10–14. doi: 10.23683/0321-3005-2019-2-10-14
6. Малиева Ф.Ф., Бейбалаев В.Д. О сходимости разностного метода решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дифференцирования Римана–Лиувилля. // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2018. № 2. С. 30–34. doi: 10.23683/0321-3005-2018-2-30-34.
7. Бейбалаев В.Д., Ибавов Т.И., Омарова А.Г. Численное исследование нелинейного уравнения теплопроводности с производной дробного порядка // Вестник Дагестанского государственного университета. 2021. Вып. 2. С. 47–53. doi: 10.21779/2542-0321-2021-36-2-47-53.
8. Омарова А.Г. Об устойчивости и сходимости разностной схемы, аппроксимирующей краевую задачу для одного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2022. № 1. С. 23–27. doi: 10.18522/1026-2237-2022-1-23-27
9. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск : Наука и техника, 1987. 688 с.
10. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик, 1989. 430 с.
11. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М. : Наука, 1989. 432 с.


***References***


1. Diethelm K. (2010) *The Analysis of Fractional Differential Equations. An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. Lecture Notes in Mathematics, 2004.* Berlin: Springer-Verlag.

2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. (2006) *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. North-Holland Mathematics Studies. 204. Amsterdam: Elsevier Science.
3. Uchaikin V.V. (2008) *Metod drobnykh proizvodnykh* [Method of fractional derivatives]. Ulyanovsk: Artishok.
4. Beibalaev V.D., Abdulaev I.A., Navruzova K.A., Hajiyeva T.Yu. (2014) O raznostnykh metodakh resheniya zadachi Koshi dlya obyknovennogo differentsial’nogo uravneniya s operatorom drobnogo differentsirovaniya [On finite-difference methods of solving the Cauchy problem for an ordinary differential equation with an operator of fractional differentiation]. *Vestnik Dagestanskogo Gosudarstvennogo Universiteta Seriya 1. Estestvennyye nauki – Herald of Dagestan State University. Natural Sciences*. 6. pp. 53–61.
5. Ibavov T.I. (2019) Resheniye zadachi Koshi dlya sistemy trekh differentsial’nykh uravneniy s proizvodnoy drobnogo poryadka [Solution of the Cauchy problem for a system of three differential equations with a derivative of fractional order]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennyye nauki*. 2. pp. 10–14. DOI: 10.23683/0321-3005-2019-2-10-14.
6. Malieva F.F., Beybalaev V.D. (2018) O skhodimosti raznostnogo metoda resheniya zadachi Koshi dlya obyknovennogo differentsial’nogo uravneniya s operatorom drobnogo differentsirovaniya Rimana – Liuvillya [On convergence of the difference method for solving the Cauchy problem for an ordinary differential equation with a Riemann–Liouville fractional differentiation operator]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennyye nauki*. 2. pp. 30–34. DOI: 10.23683/0321-3005-2018-2-30-34.
7. Beybalaev V.D., Ibavov1 T.I., Omarova A.G. (2021) Chislennoye issledovaniye nelineynogo uravneniya teploprovodnosti s proizvodnoy drobnogo poryadka [Numerical study of a nonlinear heat equation with a fractional order derivative]. *Vestnik Dagestanskogo Gosudarstvennogo Universiteta Seriya 1. Estestvennyye nauki – Herald of Dagestan State University. Natural Sciences*. 2. pp. 47–53. DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-2-47-53.
8. Omarova A.G. (2022) Ob ustoychivosti i skhodimosti raznostnoy skhemy, approksimiruyushchey krayevuyu zadachu dlya odnogo differentsial’nogo uravneniya s drobnoy proizvodnoy Kaputo [On stability and convergence of a different scheme approximating a boundary value problem for a differential equation with a fractional Caputo derivative. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennyye nauki*. 1. pp. 23–27. DOI: 10.18522/1026-2237-2022-1-23-27.
9. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. (1993) *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Yverdon: Gordon and Breach.
10. Nakhushev A.M. (1989) *Elementy drobnogo ischisleniya i ikh primeneniye* [Elements of fractional calculus and their application]. Nalchik: Kabardino-Balkarian Scientific Center.
11. Samarskii A.A., Gulin A.V. (1989) *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow: Nauka.

***Сведения об авторе*:**
**Омарова Асият Гамзатовна** – аспирант кафедры прикладной математики факультета математики и компьютерных наук Дагестанского государственного университета, Махачкала, Россия. E-mail: asya89.89@mail.ru

***Information about the author*:**
**Omarova Asiyat G.** (graduate student of Department of Applied Mathematics, Dagestan State University, Makhachkala, Russian Federation). E-mail: asya89.89@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 19.04.2022; принята к публикации 03.02.2023*

*The article was submitted 19.04.2022; accepted for publication 03.02.2023*

Научная статья
УДК 514.7 MSC: 51F15; 14L24
doi: 10.17223/19988621/81/4

# О базисных инвариантах некоторых конечных подгрупп в $SL_3$(C)

**Олег Иванович Рудницкий**

*Крымскмй федеральный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь, Россия, oirud58@gmail.com*

**Аннотация.** Работа посвящена изучению алгебр инвариантов конечных унитарных групп $G' = G \cap SL_3(\mathbf{C})$, где $G$ – конечная унитарная неприводимая примитивная группа, порожденная отражениями в унитарном пространстве $U^3$. Известно, что система образующих алгебры инвариантов группы $G'$ получается из системы образующих алгебры инвариантов группы $G$ присоединением всех полуинвариантов группы $G$ специального вида. В статье построены образующие алгебр инвариантов всех указанных групп $G'$.
**Ключевые слова:** унитарное пространство, отражение, группа отражений, инвариант, полуинвариант, алгебра инвариантов, базисные инварианты

**Для цитирования:** Рудницкий О.И. О базисных инвариантах некоторых конечных подгрупп в $SL_3(\mathbf{C})$ // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 81. С. 39–48. doi: 10.17223/19988621/81/4

Original article

# On basic invariants of some finite subgroups in $SL_3$(C)

**Oleg I. Rudnitskii**

*V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russian Federation, oirud58@gmail.com*

**Abstract.** In an $n$-dimensional unitary space $U^n$ we introduce an orthogonal coordinate system: $\mathbf{e}_i, i = \overline{1, n}$ is the orthonormal basis, any vector $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$. Let $G$ be a finite irreducible unitary group generated by reflections σ with respect to hyperplanes $h_\sigma$ with a common point in the origin of the coordinate system.
A polynomial $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$ is called a semi-invariant of the group $G$ if

$$g \cdot f(\mathbf{x}) = f(g^{-1}\mathbf{x}) = \chi(g) f(\mathbf{x}) \text{ for all } g \in G,$$

where $\chi : G \to \mathbf{C}^*$ is the character of $G$. If $\chi = 1$, then $f(\mathbf{x})$ is called an invariant of $G$. It is known that algebra $I^G$ of all invariants of $G$ is generated by $n$ algebraically independent polynomials (Shephard G.C. and Todd J.A.).

T.A. Springer proposed a method for finding the generators of the algebra of invariants of the group $G'$ not generated by reflections: if $G'$ is a subgroup of $G$ such that each homogeneous invariant of $G'$ is a semi-invariant of $G$ and vise versa, then the system of generators for algebra $I^{G'}$ consists of the system of generators for algebra $I^G$ and of all semi-invariants of $G$ of the form

$$f_O = \prod_{h_\sigma \in O} l_\sigma,$$

where $O$ is an orbit of group $G$ in a set of all hyperplanes $h_\sigma$; $l_\sigma \in \mathbf{C}[x_1,\ldots,x_n]$ is the linear function for which $h_\sigma$ is the set of its zeros. Using this method and the theory of invariants of finite groups $G$ generated by reflections, Springer constructed the algebras of invariants of the two groups $G' = G \cap SL_3(\mathbf{C})$.

In this paper, using the abovementioned method, generators of the algebras of invariants of all groups $G' = G \cap SL_3(\mathbf{C})$ were constructed, where $G$ is a finite irreducible unitary group generated by reflections in the space $U^3$. Also, all the relations between these generators are established.

**Keywords:** unitary space, reflection, reflection groups, invariant, semi-invariant, algebra of invariants, basic invariants

**For citation:** Rudnitskii, O.I. (2023) On basic invariants of some finite subgroups in $SL_3(\mathbf{C})$. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 81. pp. 39–48. doi: 10.17223/19988621/81/4

## Введение. Постановка задачи

Введем в $n$-мерном унитарном пространстве $U^n$ ортогональную систему координат: $\{\mathbf{e_i}, i=\overline{1,n}\}$ – ортонормированный базис, вектор $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e_i}$. Отражением $\sigma$ порядка $l$ в пространстве $U^n$ называется унитарное преобразование порядка $l$, множество неподвижных точек которого является плоскостью $h_\sigma$ размерности $n$ – 1. Эту плоскость называют гиперплоскостью отражения или симметрии.

Пусть $G$ – конечная неприводимая унитарная группа, порожденная отражениями $\sigma$ относительно гиперплоскостей отражения $h_\sigma$ с общей точкой в начале координат. Обозначим через $R = \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$ кольцо многочленов от $n$ переменных над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$. Действие группы $G$ на кольце $R$ определим с помощью равенства

$$g{\cdot}f = g{\cdot}f(\mathbf{x}) = f(g^{-1}\mathbf{x}),$$

где $g \in G$, $f(\mathbf{x}) = f(x_1,\ldots,x_n) \in R$.

Многочлен $f \in R$ называется ***полуинвариантом*** (*относительным инвариантом*) группы $G$, если существует такая функция $\chi : G \to \mathbf{C^*}$ (*характер группы* $G$), что

$$g{\cdot}f = \chi(g)\, f$$

для всех $g \in G$.

Если $\chi = 1$, то $f$ называется ***инвариантом группы*** $G$. Известно [1], что множество всех инвариантов группы $G$ образует алгебру $I^G$, которая порождается $n$ алгебраически независимыми многочленами $f_{m_i}$ (базисные инварианты) степеней $m_i$, $i = 1,2,\ldots,n$ (показатели группы).

Описание полуинвариантов группы $G$ дано в работе [2]. Приведем его здесь.

Пусть $H$ – множество всех гиперплоскостей $h_\sigma$ и $O$ – орбита группы $G$ в $H$. Положим

$$f_O = \prod_{h_\sigma \in O} l_\sigma,$$

где $l_\sigma \in R$ – линейная функция, для которой $h_\sigma$ – множество ее нулей.

Многочлен $f_O$ определяется орбитой $O$ с точностью до скалярного множителя. Если $l = e(h_\sigma)$ – порядок отражения σ, то положим $e(O) = e(h_\sigma)$, где $h_\sigma$ – некоторый элемент из орбиты $O$. Справедлива следующая теорема [2. С. 100].

**Теорема.** (i) *Функции $f_O$ являются полуинвариантами группы $G$. Точнее, если $\sigma \in G$ – отражение, то $\sigma \cdot f_O = f_O$ при $h_\sigma \notin O$ и $\sigma \cdot f_O = \xi_\sigma^{-1} f_O$ при $h_\sigma \in O$, где $\xi_\sigma$ – собственное значение отражения σ, отличное от* 1.

(ii) *Любой однородный полуинвариант $f$ группы $G$ может быть записан в виде $f = (\prod_O f_O^{a(O)}) f_1$, где $0 \le a(O) < e(O)$, $f_1 \in I^G$. Такая запись единственна.*

В [2] эта теорема применяется для нахождения образующих алгебр инвариантов двух групп $G' = G \cap SL_3(\mathbf{C})$, *не* порожденных отражениями. Идея такого применения состоит в следующем.

Пусть $G$ – конечная неприводимая унитарная группа, порожденная отражениями, и $G'$ – такая ее подгруппа, что всякий однородный инвариант группы $G'$ является полуинвариантом группы $G$, и наоборот. Тогда ввиду приведенной теоремы система образующих алгебры $I^{G'}$ получается из системы образующих алгебры $I^G$ присоединением всех полуинвариантов группы $G$ вида $f_O$.

В настоящей статье продолжены начатые в [2] исследования и построены образующие алгебр инвариантов для всех конечных унитарных групп $G' = G \cap SL_3(\mathbf{C})$.

Для вычислений был использован программный пакет – система компьютерной алгебры Maple.

## Образующие алгебр инвариантов унитарных групп $G' = G \cap SL_3(\mathbf{C})$

В пространстве $U^3$ существуют четыре конечные примитивные унитарные группы $G$ [3]. Это группы $W(J_3(m))$, $m = 4, 5$, $W(L_3)$ и $W(M_3)$. Рассмотрим соответствующую каждой из них группу $G'$ и ее алгебру инвариантов.

**1.** Группа $W(J_3(4))$ порядка 336 порождается отражениями второго порядка относительно 21 плоскости с уравнениями [4]

$$x_i = 0,\ x_i \pm x_j = 0,\ i, j = \overline{1,3}\ (i < j),\ x_i \pm x_j \pm \alpha x_k = 0, \tag{1}$$

где $\alpha = \frac{1 - \varepsilon\sqrt{7}}{2}$ – корень уравнения $z^2 - z + 2 = 0$, $\varepsilon = \sqrt{-1}$, $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ – циклически.

Группа содержит скалярное умножение на –1, показатели группы равны $m_i = 4, 6, 14$ [1]. Образующие алгебры $I^{W(J_3(4))}$ имеют вид [4]:

$$f_4 = \sum x_i^4 - 3\bar{\alpha} \sum_{i<j} x_i^2 x_j^2,$$

$$f_6 = 2\sum x_i^6 + 5\bar{\alpha} \sum x_i^4 x_j^2 + 20\alpha^2 x_1^2 x_2^2 x_3^2,$$

$$f_{14} = 382\sum x_i^{14} - 793\bar{\alpha}\sum x_i^{12}x_j^2 + 143(16-21\bar{\alpha})\sum x_i^{10}x_j^4 -$$
$$-143(16+95\bar{\alpha})\sum x_i^8 x_j^6 + 572(21+9\bar{\alpha})\sum_{j<k} x_i^{10}x_j^2x_k^2 -$$
$$-4290(19-5\bar{\alpha})\sum x_i^8x_j^4x_k^2 + 8008(13-11\bar{\alpha})\sum_{i<j} x_i^6x_j^6x_k^2 + 20020(5+\bar{\alpha})\sum_{j<k} x_i^6x_j^4x_k^4,$$

здесь и далее, если не оговорено иное, индексы $i, j, k$ принимают значения 1, 2, 3 и удовлетворяют неравенствам, указанным под знаком суммы.

Пусть $S$ – множество, состоящее из 42 единичных нормальных векторов плоскостей (1):

$$\pm\mathbf{e_i}, \pm\frac{\alpha}{2}(\mathbf{e_i}\pm\mathbf{e_j}), \pm\frac{1}{2}(\mathbf{e_i}\pm\mathbf{e_j}\pm\bar{\alpha}\mathbf{e_k}).$$

Нетрудно убедиться в том, что множество $S$ инвариантно относительно действия группы $W(J_3(4))$ и $S = W(J_3(4))\cdot\mathbf{e}_2$.

Таким образом, есть только одна орбита $O$ группы $W(J_3(4))$ в множестве плоскостей (1) и, следовательно, лишь один полином

$$f_O = f_{21} = 16\sum(-1)^p x_i^{17}x_j^3x_k + 24\bar{\alpha}\sum(-1)^p x_i^{15}x_j^5x_k -$$
$$-(46+27\bar{\alpha})\sum(-1)^p x_i^{13}x_j^7x_k + 13(2-3\bar{\alpha})\sum(-1)^p x_i^{11}x_j^9x_k +$$
$$+7(22+39\bar{\alpha})\sum(-1)^p x_i^{13}x_j^5x_k^3 - 26(10-7\bar{\alpha})\sum(-1)^p x_i^{11}x_j^7x_k^3 - 143(2-3\bar{\alpha})\sum(-1)^p x_i^9x_j^7x_k^5,$$

здесь $p = 2$ или 1, если индексы $(i, j, k)$ принимают значения соответственно четных (циклических) или нечетных перестановок чисел (1, 2, 3).

Следовательно, любой полуинвариант группы $W(J_3(4))$ представим в виде $(f_{21})^{a(O)}f_1$, где $0 \le a(O) < 2$, $f_1 \in I^{W(J_3(4))}$.

Пусть $G' = W(J_3(4))\cap SL_3(\mathbf{C})$. Это группа порядка 168. Любой однородный инвариант группы $G'$ является полуинвариантом группы $W(J_3(4))$, и наоборот. Таким образом, алгебра $I^{G'}$ инвариантов группы $G'$ порождается многочленами $f_4$, $f_6$, $f_{14}$ и $f_{21}$.

При этом, так как $(f_{21})^2$ – инвариант степени 42 группы $W(J_3(4))$, то его можно представить так:

$$(f_{21})^2 = \beta(f_{14})^3 + \delta(f_6)^7 + f_4F,$$

где $F \in I^{W(J_3(4))}$ – полином степени 38; $\beta$, $\delta$ – неопределенные коэффициенты.

Для определения коэффициента $\delta$ возьмем вектор

$$\mathbf{x_0} = 2\sqrt{3}\varepsilon\bar{\alpha}\mathbf{e_1} + (2\sqrt{3}\varepsilon\alpha - 6)\mathbf{e_2} + (2\sqrt{3}\varepsilon\alpha + 6)\mathbf{e_3},$$

такой что $f_4(\mathbf{x_0}) = f_{14}(\mathbf{x_0}) = 0$. Тогда $(f_{21}(\mathbf{x_0}))^2 = \delta(f_6(\mathbf{x_0}))^7$ и $\delta = \dfrac{27\alpha^4}{13176688}$.

Далее, возьмем вектор $\mathbf{x_1} = \mathbf{e_1} + \varepsilon\mathbf{e_2} + (\varepsilon\zeta\sqrt[8]{7}\sqrt{\bar{\alpha}})\mathbf{e_3}$, такой что $f_4(\mathbf{x_1}) = 0$. Здесь и далее рассматриваются арифметические корни из вещественных чисел, $\zeta$ – первообразный корень 16-й степени из единицы.

Тогда с помощью явных вычислений можно найти коэффициент $\beta = \dfrac{\alpha^4}{1509902464}$.

Если обозначить

$$\tilde{f}_4 = \frac{\bar{\alpha}^4}{16} f_4,\ \tilde{f}_6 = \frac{1}{14} f_6,\ \tilde{f}_{14} = \frac{1}{6664} f_{14},\ \tilde{f}_{21} = \frac{\bar{\alpha}^2}{4} f_{21},$$

то справедливо следующее соотношение:

$$(\tilde{f}_{21})^2 = 196(\tilde{f}_{14})^3 + 216(\tilde{f}_6)^7 + \tilde{f}_4 \tilde{F}. \tag{2}$$

Итак, $I^{G'} = \mathbf{C}[\tilde{f}_4, \tilde{f}_6, \tilde{f}_{14}, \tilde{f}_{21}]$ с соотношением (2) для образующих.

Отметим, что данный результат также получен в [2], но в системе координат, где базисные векторы – собственные векторы преобразования Коксетера–Киллинга группы $W(J_3(4))$.

**2.** Рассмотрим группу $W(J_3(5))$. Она имеет порядок 2 160 и порождается отражениями второго порядка относительно 45 плоскостей с уравнениями [4]

$$\begin{gathered} x_i = 0,\ x_i \pm x_j = 0\ (i < j),\ i, j = \overline{1,3}, \\ x_i \pm (\omega - \gamma) x_j \pm x_k = 0,\ \omega x_l \pm \gamma\omega^2 x_m \pm r x_t = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

где $r = \gamma^{-1} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = 2\cos\dfrac{\pi}{5}$, $\omega = \dfrac{-1+\varepsilon\sqrt{3}}{2}$ – первообразный корень третьей степени из единицы, индексы $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ – циклически; $l, m, t = 1, 2, 3$.

Образующие алгебры $I^{W(J_3(5))}$ степеней $m_i$ = 6, 12, 30 [1] имеют следующий развернутый вид [4]:

$$f_6 = 4\sum x_i^6 - 3(5+\varepsilon\sqrt{15})\sum x_i^4 x_j^2 + 12(5-\varepsilon\sqrt{15}) x_1^2 x_2^2 x_3^2,$$

$$\begin{gathered} f_{12} = 148\sum x_i^{12} - 66(5+\varepsilon\sqrt{15})\sum x_i^{10} x_j^2 - \\ -165(7-5\varepsilon\sqrt{15})\sum x_i^8 x_j^4 + 308(7+3\varepsilon\sqrt{15})\sum_{i<j} x_i^6 x_j^6 + \\ +660(19+\varepsilon\sqrt{15})\sum_{j<k} x_i^8 x_j^2 x_k^2 - 18480\sum x_i^6 x_j^4 x_k^2 - 4620(3+\varepsilon\sqrt{15}) x_1^4 x_2^4 x_3^4, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} f_{30} = 24195204\sum x_i^{30} - 3603975(5+\varepsilon\sqrt{15})\sum x_i^{28} x_j^2 - \\ -9135(39147-15281\varepsilon\sqrt{15})\sum x_i^{26} x_j^4 + 13195(461197+13953\varepsilon\sqrt{15})\sum x_i^{24} x_j^6 - \\ -130065(44261+23105\varepsilon\sqrt{15})\sum x_i^{22} x_j^8 + 10015005(821+ \\ +1745\varepsilon\sqrt{15})\sum x_i^{20} x_j^{10} + 5766215(21871+4587\varepsilon\sqrt{15})\sum x_i^{18} x_j^{12} + \\ +3231615(32539+12479\varepsilon\sqrt{15})\sum x_i^{16} x_j^{14} + \\ +109620(27493+279\varepsilon\sqrt{15})\sum_{j<k} x_i^{26} x_j^2 x_k^2 - 791700(31441+5358\varepsilon\sqrt{15})\sum x_i^{24} x_j^4 x_k^2 - \\ -101970960(1343-342\varepsilon\sqrt{15})\sum x_i^{22} x_j^6 x_k^2 + 60090030(13927-299\varepsilon\sqrt{15})\sum x_i^{20} x_j^8 x_k^2 - \\ -1522280760(243+130\varepsilon\sqrt{15})\sum x_i^{18} x_j^{10} x_k^2 - 1176307860(601-202\varepsilon\sqrt{15})\sum x_i^{16} x_j^{12} x_k^2 + \\ +775587600(791-27\varepsilon\sqrt{15})\sum_{i<j} x_i^{14} x_j^{14} x_k^2 + 18209100(21651- \\ -991\varepsilon\sqrt{15})\sum_{j<k} x_i^{22} x_j^4 x_k^4 - 1682520840(233+152\varepsilon\sqrt{15})\sum x_i^{20} x_j^6 x_k^4 - \\ -3805701900(91-248\varepsilon\sqrt{15})\sum x_i^{18} x_j^8 x_k^4 + \\ +6469693230(547+113\varepsilon\sqrt{15})\sum x_i^{16} x_j^{10} x_k^4 - \\ -23526157200(219+40\varepsilon\sqrt{15})\sum x_i^{14} x_j^{12} x_k^4 + 3551988440(2051+ \end{gathered}$$

$$+177\varepsilon\sqrt{15})\sum_{j<k} x_i^{18}x_j^6x_k^6 - 116454478140(65-16\varepsilon\sqrt{15})\sum x_i^{16}x_j^8x_k^6 -$$

$$-13560477010080\sum x_i^{14}x_j^{10}x_k^6 + 214088030520(17-21\varepsilon\sqrt{15})\sum_{i<j} x_i^{12}x_j^{12}x_k^6 -$$

$$-83181770100(141-\varepsilon\sqrt{15})\sum_{j<k} x_i^{14}x_j^8x_k^8 + 336424047960(29-$$

$$-16\varepsilon\sqrt{15})\sum x_i^{12}x_j^{10}x_k^8 + 3700664527560(13-\varepsilon\sqrt{15})x_1^{10}x_2^{10}x_3^{10}.$$

Так как группа содержит подгруппу скалярных умножений на 1, ω, $\omega^2$, то инвариантное относительно группы $W(J_3(5))$ множество $S$ единичных нормальных векторов плоскостей (3) состоит из 270 векторов

$$\pm\omega^p\mathbf{e_i}, \pm\frac{\omega^p}{2}(\gamma-\omega)(\mathbf{e_i}\pm\mathbf{e_j}), \pm\frac{\omega^p}{2}(\mathbf{e_i}\pm(\omega^2-\gamma)\mathbf{e_j}\pm\mathbf{e_k}), \pm\frac{\omega^p}{2}(\mathbf{e_l}\pm\gamma\omega^2\mathbf{e_m}\pm r\omega\mathbf{e_t}),\ p=\overline{1,3},$$

и $S = W(J_3(5))\cdot\mathbf{e_1}$ [4].

Следовательно, как и ранее, существует только одна орбита $O$ группы $W(J_3(5))$ в множестве плоскостей (3) и единственный многочлен $f_O$ степени 45. С точностью до постоянного множителя, он имеет вид:

$$f_O = f_{45} = 32\sum(-1)^p x_i^{41}x_j^3x_k + 56(5+\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{39}x_j^5x_k +$$

$$+53(29+5\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{37}x_j^7x_k + (4659+1547\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{35}x_j^9x_k +$$

$$+2(4239+871\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{33}x_j^{11}x_k - 4(3797-$$

$$-2563\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{31}x_j^{13}x_k + (43981-1387\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{29}x_j^{15}x_k -$$

$$-29(5699+507\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{27}x_j^{17}x_k + 87(2257+121\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{25}x_j^{19}x_k -$$

$$-1305(89+65\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{23}x_j^{21}x_k - 53(151-17\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{37}x_j^5x_k^3 -$$

$$-6(6589+389\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{35}x_j^7x_k^3 - 5(13049+1089\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{33}x_j^9x_k^3 -$$

$$-8(26281+6481\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{31}x_j^{11}x_k^3 + 5(88045+37173\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{29}x_j^{13}x_k^3 -$$

$$-58(8051+4907\varepsilon\sqrt{15})\times\sum(-1)^p x_i^{27}x_j^{15}x_k^3 - 1044(2447-$$

$$-745\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{25}x_j^{17}x_k^3 - 4350(419+219\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{23}x_j^{19}x_k^3 +$$

$$+3(44651-12285\varepsilon\sqrt{15})\times\sum(-1)^p x_i^{33}x_j^7x_k^5 + 44(9697-2327\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{31}x_j^9x_k^5 -$$

$$-3(85197+33301\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{29}x_j^{11}x_k^5 + 406(19963-$$

$$-1165\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{27}x_j^{13}x_k^5 - 8091(439-113\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{25}x_j^{15}x_k^5 +$$

$$+3915(1263+2119\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{23}x_j^{17}x_k^5 - 110055(127+23\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{21}x_j^{19}x_k^5 -$$

$$-55(40717-1835\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{29}x_j^9x_k^7 - 58(77483-$$

$$-6877\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{27}x_j^{11}x_k^7 + 2349(1895-2881\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{25}x_j^{13}x_k^7 +$$

$$+5220(6239+1015\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{23}x_j^{15}x_k^7 + 660330(107+3\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{21}x_j^{17}x_k^7 -$$

$$-1131(9521+281\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{25}x_j^{11}x_k^9 -$$

$$-4350(9283+2235\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{23}x_j^{13}x_k^9+110055(329-$$
$$-143\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{21}x_j^{15}x_k^9+550275(55-49\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{19}x_j^{17}x_k^9-$$
$$-10005(7411-85\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{21}x_j^{13}x_k^{11}-340170(271+$$
$$+39\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{19}x_j^{15}x_k^{11}-570285(67-5\varepsilon\sqrt{15})\sum(-1)^p x_i^{17}x_j^{15}x_k^{13},$$

здесь, как и ранее, $p = 2$ или 1, если индексы $(i, j, k)$ принимают значения соответственно четных (циклических) или нечетных перестановок чисел (1, 2, 3).

Рассмотрим группу $G' = W(J_3(5))\cap SL_3(\mathbf{C})$ порядка 1 080. Как и ранее, любой однородный инвариант группы $G'$ является полуинвариантом группы $W(J_3(5))$, и наоборот, а любой полуинвариант $f$ группы $W(J_3(5))$ представим в виде $f = (f_{45})^k f_1$, где $k = 0, 1$ и $f_1 \in I^{W(J_3(5))}$. Следовательно, $I^{G'} = \mathbf{C}[f_6, f_{12}, f_{30}, f_{45}]$.

Более того, $(f_{45})^2$ – инвариант группы $W(J_3(5))$ степени 90, и его можно однозначно представить в виде:

$$(f_{45})^2 = \beta(f_{30})^3 + \delta f_{30}(f_{12})^5 + f_6F,$$

где $F \in I^{W(J_3(5))}$ – полином степени 84; β, δ – неопределенные коэффициенты.

Для определения коэффициентов β и δ возьмем два вектора

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{e_1} + \varepsilon\mathbf{e_2} + \frac{1}{2}\sqrt[4]{24(15-\varepsilon\sqrt{15})}\mathbf{e_3} \text{ и } \mathbf{x_2} = \mathbf{e_2} + \frac{1}{4}\sqrt{38+6\varepsilon\sqrt{15}+\sqrt{162+114\varepsilon\sqrt{15}}}\mathbf{e_3}.$$

Здесь при нахождении корня из комплексного числа берем первообразный корень соответствующей степени из единицы. Имеем

$$f_6(\mathbf{x_i}) = 0,\ f_{12}(\mathbf{x_i}) \neq 0,\ f_{30}(\mathbf{x_i}) \neq 0,\ (i = 1, 2),\ f_{45}(\mathbf{x_1}) \neq 0,\ f_{45}(\mathbf{x_2}) = 0.$$

Из системы $(f_{45}(\mathbf{x_i}))^2 = \beta(f_{30}(\mathbf{x_i}))^3 + \delta f_{30}(\mathbf{x_i})(f_{12}(\mathbf{x_i}))^5$, получим

$$\beta = -\frac{7+\varepsilon\sqrt{15}}{996251668062742989952 00},\quad \delta = -\frac{7+\varepsilon\sqrt{15}}{25429834044875520000}.$$

Если ввести обозначения $\tilde{f}_{12} = \frac{1}{780}f_{12}$ и $\tilde{f}_{30} = -\frac{1}{79270760}f_{30}$, то справедливо следующее равенство:

$$f_{45}^2 = 5(7+\varepsilon\sqrt{15})\,\tilde{f}_{30}^{\,3} + 900(7+\varepsilon\sqrt{15})\,\tilde{f}_{30}\tilde{f}_{12}^{\,5} + f_6\tilde{F}. \quad (4)$$

Таким образом, алгебра инвариантов группы $G' = W(J_3(5))\cap SL_3(\mathbf{C})$ порождается многочленами $f_6, \tilde{f}_{12}, \tilde{f}_{30}$ и $f_{45}$, для которых справедливо соотношение (4).

**3.** Группа $W(L_3)$ порядка 648 порождается отражениями третьего порядка относительно 12 плоскостей с уравнениями [5]

$$x_i = 0,\ x_1 + \omega^j x_2 + \omega^k x_3 = 0,\ i, j, k = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Базисные инварианты группы $W(L_3)$ имеют степени $m_i = 6, 9, 12$ [1] и могут быть заданы следующим образом [5]:

$$f_6 = \sum x_i^6 - 10\sum_{i<j} x_i^3 x_j^3, \quad (6)$$

$$f_9 = (x_1^3 - x_2^3)(x_1^3 - x_3^3)(x_2^3 - x_3^3), \quad (7)$$

$$f_{12} = \sum x_i^{12} - 110\sum x_i^9 x_j^3 + 462\sum_{i<j} x_i^6 x_j^6. \quad (8)$$

Поскольку группа $W(L_3)$ содержит подгруппу скалярных умножений на 1, ω, $\omega^2$, то $W(L_3)$-инвариантное множество $S$ единичных нормальных векторов плоскостей (5) состоит из 72 векторов [5]:

$$\pm\omega^l \mathbf{e_i}, \quad \pm\frac{\omega^l \varepsilon}{\sqrt{3}}(\mathbf{e_1}+\omega^j\mathbf{e_2}+\omega^k\mathbf{e_3}). \tag{9}$$

Существует одна орбита $O$ группы $W(L_3)$ в множестве плоскостей (5) ($S = W(L_3)\cdot\mathbf{e}_1$). Значит, существует только один, с точностью до постоянного множителя, полуинвариант $f_O$ группы $W(L_3)$. Он имеет степень 12 и следующий вид:

$$f_O = f'_{12} = \sum_{j<k} x_i^{10}x_jx_k + 3\sum x_i^7x_j^4x_k - 21x_1^4x_2^4x_3^4. \tag{10}$$

Таким образом, любой полуинвариант группы $W(L_3)$ представим в виде $f = (f'_{12})^k f_1$, где $k = 0, 1, 2$, $f_1 \in I^{W(L_3)}$.

Любой однородный инвариант группы $G' = W(L_3)\cap SL_3(\mathbf{C})$ является полуинвариантом группы $W(L_3)$, и наоборот. Значит $I^{G'} = \mathbf{C}[f_6, f_9, f_{12}, f'_{12}]$.

При этом, так как $(f'_{12})^3$ – инвариант группы $W(L_3)$, то

$$(f'_{12})^3 = \beta(f_{12})^3 + \delta(f_9)^4 + f_6 F,$$

где $F \in I^{W(L_3)}$ – полином степени 30; β, δ – неопределенные коэффициенты.

Для нахождения коэффициентов β и δ возьмем вектор

$$\mathbf{x_0} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + (1+\sqrt{3})\mathbf{e_3}, \tag{11}$$

удовлетворяющий условию $f_6(\mathbf{x_0}) = f_9(\mathbf{x_0}) = 0$, и вектор

$$\mathbf{x_1} = \varepsilon\mathbf{e_1} + (-\varepsilon)\mathbf{e_2} + \sqrt[6]{12}\mathbf{e_3}. \tag{12}$$

Здесь, как и ранее, рассматривается арифметический корень 6-й степени из 12.

Имеем $\beta = \dfrac{(f'_{12}(\mathbf{x_0}))^3}{f_{12}^3(\mathbf{x_0})} = -\dfrac{1}{91125}, \delta = -27.$ Если ввести обозначение $\tilde{f}_{12} = -\dfrac{1}{45}f_{12}$, то справедливо следующее соотношение:

$$(f'_{12})^3 = (\tilde{f}_{12})^3 - 27(f_9)^4 + f_6\tilde{F}. \tag{13}$$

Итак, алгебра инвариантов группы $G' = W(L_3)\cap SL_3(\mathbf{C})$ порождается многочленами (6), (7), (8) и (10), для которых справедливо соотношение (13).

Отметим, что аналогичный результат получен в [2].

**4.** Рассмотрим группу $W(M_3)$ порядка 1 296, которая порождается отражениями второго порядка относительно 9 плоскостей с уравнениями

$$x_i - \omega^k x_j = 0,\ i, j, k = 1, 2, 3\ (i < j) \tag{14}$$

и отражениями третьего порядка относительно 12 плоскостей (5).

Алгебра инвариантов $I^{W(M_3)}$ группы $W(M_3)$ порождается многочленами степеней 6, 12, 18 [2]. В качестве базисных инвариантов можно взять многочлены (6), (8) [5] и многочлен

$$f_{18} = \sum x_i^{18} - 408\sum x_i^{15}x_j^3 + 9282\sum x_i^{12}x_j^6 - 24310\sum_{i<j} x_i^9x_j^9. \tag{15}$$

$W(M_3)$-инвариантное множество $S$ единичных нормальных векторов плоскостей (5) и (14) распадается на два $W(M_3)$-инвариантных подмножества, состоящих соответственно из 54 векторов

$$\pm\frac{\omega^l\varepsilon}{\sqrt{2}}(\mathbf{e_i} - \omega^k\mathbf{e_j}), \quad l = 1,2,3,$$

и 72 векторов (9).

Следовательно, существует две орбиты группы $W(M_3)$ в множестве плоскостей (5) и (14), а значит, и два полуинварианта $f_O$ группы $W(M_3)$ степеней 9 и 12.

С точностью до постоянного множителя они имеют вид (7) и (10). Поэтому любой полуинвариант группы $W(M_3)$ представим в виде:

$$f = (f'_{12})^k (f_9)^m f_1,$$

где $k = 0, 1, 2$, $m = 0, 1$, $f_1 \in I^{W(M_3)}$.

Как и ранее, нетрудно убедиться, что любой однородный инвариант группы $G' = W(M_3) \cap SL_3(\mathbf{C})$ является полуинвариантом группы $W(M_3)$, и наоборот. Следовательно, алгебра инвариантов группы $G' = W(M_3) \cap SL_3(\mathbf{C})$ порождается многочленами (6), (7), (8), (10) и (15).

С помощью явных вычислений можно получить следующие соотношения:

$$18435(f_9)^2 = 16(f_6)^3 - 21 f_6 f_{12} + 5 f_{18} \tag{16}$$

и

$$(f'_{12})^3 = \beta (f_{18})^2 + \delta (f_{12})^3 + f_6 F,$$

где $F \in I^{W(M_3)}$ – полином степени 30, а $\beta$ и $\delta$, как и ранее, – неопределенные коэффициенты.

Для нахождения $\beta$ и $\delta$ возьмем вектор (11), удовлетворяющий условиям $f_6(\mathbf{x_0}) = f_{18}(\mathbf{x_0}) = 0$, и вектор (12). Получим $\beta = -\dfrac{3}{1510441}$ и $\delta = -\dfrac{1}{91125}$. Следовательно, справедливо равенство

$$(f'_{12})^3 = -3(\tilde{f}_{18})^2 - (f_{12})^3 + f_6 \tilde{F}, \tag{17}$$

где $\tilde{f}_{12} = \dfrac{1}{45} f_{12}$, $\tilde{f}_{18} = \dfrac{1}{1229} f_{18}$.

Таким образом, алгебра инвариантов $I^{G'} = \mathbf{C}[f_6, f_9, f_{12}, f'_{12}, f_{18}]$ при выполнении соотношений (16) и (17) для образующих.

## Заключение

В статье, построены в явном виде образующие всех алгебр инвариантов групп $G' = G \cap SL_3(\mathbf{C})$, где $G$ – конечная унитарная неприводимая примитивная группа, порожденная отражениями в унитарном пространстве $U^3$, а также установлены соотношения между образующими.

## Список источников

1. *Shephard G.C., Todd J.A.* Finite unitary reflection groups // Can. J. Math. 1954. V. 6 (2). P. 274–304. doi: 10.4153/CJM-1954-028-3
2. *Спрингер Т.А.* Теория инвариантов. М. : Мир, 1981. 191 с.
3. *Cohen A.M.* Finite complex reflection groups // Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 1976. Ser. 4. V. 9. P. 379–436. doi: 10.24033/ASENS.1313
4. *Рудницкий О.И.* Канонические системы базисных инвариантов для унитарных групп $W(J_3(m))$, $m = 4, 5$ // Таврический вестник информатики и математики. 2018. № 1 (38). С. 89–96.
5. Рудницкий О.И. Канонические системы базисных инвариантов для групп симметрий многогранников Гессе // Таврический вестник информатики и математики. 2017. № 3 (36). С. 73–78.

## *References*

1. Shephard G.C., Todd J.A. (1954) Finite unitary reflection groups. *Canadian Journal of Mathematics*. 6(2). pp. 274–304. DOI: 10.4153/CJM-1954-028-3.

2. Springer T.A. (1977) *Invariant Theory. Lecture Notes in Mathematics*. Berlin: Springer-Verlag. DOI: 10.1007/BFb0095644.
3. Cohen A.M. (1976) Finite complex reflection groups. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*. Serie 4. 9. pp. 379–436. DOI: 10.24033/ASENS.1313.
4. Rudnitskii O.I. (2018) Kanonicheskiye sistemy bazisnykh invariantov dlya unitarnykh grupp $W(J_3(m))$, $m = 4, 5$ [Canonical systems of basic invariants for unitary groups $W(J_3(m))$, $m = 4, 5$]. *Tavricheskiy vestnik informatiki i matematiki – Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 38(1). pp. 89–96.
5. Rudnitskii O.I. (2017) Kanonicheskiye sistemy bazisnykh invariantov dlya grupp simmetriy mnogogrannikov Gesse [Canonical systems of basic invariants for symmetry groups of Hessian polyhedrons]. *Tavricheskiy vestnik informatiki i matematiki – Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*. 36(3). pp. 73–78.

***Сведения об авторе*:**
**Рудницкий Олег Иванович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа Физико-технического института Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского, Симферополь, Россия. E-mail: oirud58@gmail.com

**Information about the author:**
**Rudnitskii Oleg I.** (Candidate of Physics and Mathematics, associate professor, associate professor of the department of mathematical analysis of Physics and Technology Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russian Federation). E-mail: oirud58@gmail.com

*Статья поступила в редакцию 26.01.2022; принята к публикации 03.02.2023*

*The article was submitted 26.01.2022; accepted for publication 03.02.2023*

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2023 Математика и механика № 81
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

# МЕХАНИКА

# MECHANICS

Научная статья
УДК 533.7
doi: 10.17223/19988621/81/5

## Определение значений переносных характеристик в многокомпонентных средах на основе анализа микропроцессов

**Ирина Викторовна Анисимова[1], Виктор Николаевич Игнатьев[2], Елена Юрьевна Лаптева[3]**

[1, 2, 3] *Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, Казань, Россия*
[1, 2] *anisimovaiv1@rambler.ru*
[3] *lapti.daleko@mail.ru*

**Аннотация.** Предлагается двухуровневый подход математического моделирования в многокомпонентных газовых смесях. Он основан на сочетании описания законов сохранения на базе макроуравнений и определения в них коэффициентов переноса, исходя из анализа микропроцессов. Основной целью работы является разработка алгоритма определения транспортных характеристик в многокомпонентных средах. Для этого используется молекулярно-кинетическая теория газов и жидкостей, а именно столкновительная часть уравнения Больцмана. В ней содержатся кратные несобственные интегралы, учитывающие влияние микропроцессов в среде на значения коэффициентов переноса. При интегрировании уравнения Больцмана методом Чепмена–Энскога коэффициенты переноса выражаются через интегральные скобки полиномов Сонина, которые являются линейными комбинациями интегралов столкновения молекул. Их вычисление требует использования эффективных математически обоснованных алгоритмов, включая элементы параллельных вычислений.

**Ключевые слова:** многокомпонентная среда, коэффициенты переноса, уравнение Больцмана, потенциал взаимодействия молекул, интегралы с осциллирующими подынтегральными функциями, параллельные вычисления

**Для цитирования:** Анисимова И.В., Игнатьев В.Н., Лаптева Е.Ю. Определение значений переносных характеристик в многокомпонентных средах на основе анализа микропроцессов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 81. С. 49–56. doi: 10.17223/19988621/81/5

Original article

# Determination of the values of transfer characteristics in multicomponent media on the basis of micro-process analysis

**Irina V. Anisimova[1], Victor N. Ignat`ev[2], Elena Yu. Lapteva[3]**

[1, 2, 3] *Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev – KAI, Kazan, Russian Federation*
[1, 2] *anisimovaiv1@rambler.ru*
[3] *lapti.daleko@mail.ru*

**Abstract.** This paper proposes a two-level approach for mathematical modeling of processes in multicomponent gas mixtures. It involves a combination of the description of conservation laws based on macro-equations and the determination of the corresponding transfer coefficients using the analysis of micro-processes. The main purpose of this work is to develop an algorithm for determining transport characteristics in multicomponent media based on the analysis of inner micro-processes. Hence, the kinetic molecular theory of gases and liquids is used, namely, the collision part of the Boltzmann equation. It includes multiple improper integrals taking into account the effect of micro-processes in the medium on the values of transport coefficients. When integrating the Boltzmann equation by the Chapman-Enskog method, the transport coefficients are expressed through integral brackets of the Sonin polynomials, which represent the linear combinations of molecular collision integrals. Their calculations require the use of efficient mathematically sound ways including the elements of parallel computing.
**Keywords:** multicomponent medium, transport coefficients, Boltzmann equation, interaction potential of molecules, integrals with oscillating integrands, parallel computing

**For citation:** Anisimova, I.V., Ignat`ev, V.N., Lapteva, E.Yu. (2023) Determination of the values of transfer characteristics in multicomponent media on the basis of micro-process analysis. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 81. pp. 49–56. doi: 10.17223/19988621/81/5

## 1. Математическое описание микропроцессов в многокомпонентных газовых средах

Уравнения, полученные на основе корпускулярного (мольного) описания процессов в многокомпонентных средах, содержат коэффициенты переноса, характеризующие транспортные характеристики сред [1, 2]. Так, вязкость зависит от вязкоупругих и геометрических характеристик молекул в смеси. Аналогично значения других коэффициентов переноса, используемых в макроуравнениях, должны определяться на основе анализа микропроцессов в смеси. В связи с этим при численном моделировании задач прикладной гидроаэромеханики на основе макроуравнений для определения значений полуэмпирических коэффициентов переноса в этих уравнениях необходимо использовать результаты кинетической теории газов и жидкостей [3–6].

Поскольку в уравнении Больцмана столкновительная часть описывает процессы, связанные со взаимодействием молекул, то будем ее использовать в алгоритме определения переносных характеристик многокомпонентных смесей. Столкновительная часть уравнения Больцмана состоит из восьмикратных несобственных интегралов, содержащих осциллирующие подынтегральные функции. Одним из них является несобственный интеграл, описывающий угол рассеяния взаимодействующих молекул [3, 4]:

$$\chi(b,g)=\pi\mp 2b\int_{r_0}^{\infty}\frac{dr}{r^2\left(1-\frac{\varphi(r)}{g^2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{1}$$

где $b$ – прицельный параметр, $g$ - относительная скорость взаимодействующих молекул, $r$ - межмолекулярное расстояние, $r_0$ – минимальное положительное значение корня нелинейного алгебраического уравнения [7, 8]:

$$r_0^2-b^2-\frac{r_0}{g}\left(f(n)\cdot\left(\left(\frac{AI}{r_0}\right)^{2(n+3)}-\left(\frac{AI}{r_0}\right)^{6}\right)\right)=0\cdot \tag{2}$$

Функция $\varphi(r)$, входящая в подынтегральное выражение (1), описывает процесс взаимодействия молекул в газовой среде.

Рассмотрим газовые смеси, в которых силы притяжения определяются зависимостью [3, 4]

$$\varphi(r)=-c\cdot r^{-6}, \tag{3}$$

где $c$ – некоторая постоянная. Соотношение (3) является степенной функцией и, как отмечается в [3, 4], удовлетворительно аппроксимирует кривую графика сил притяжения взаимодействующих молекул.

Проводя анализ сил, действующих на молекулы как в простых, так и многокомпонентных средах, можно предположить, что сила притяжения взаимодействующих молекул обладает свойством «автомодельности» и удовлетворительно аппроксимируется степенной зависимостью (3) [3].

В отличие от силы притяжения сила отталкивания, действие которой велико при малых $r$, зависит не только от электромагнитных полей, но и от вязкоупругих свойств взаимодействующих молекул. Эти свойства молекул и их влияние на значение силы отталкивания наряду с силой электромагнитных полей будем учитывать при аппроксимации степенной функцией [7, 8]

$$\varphi(r)=\varepsilon f(n)\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{2(n+3)}-\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right], \tag{4}$$

где $\sigma$ – расстояние от начала координат до точки пересечения функции (4) с осью абсцисс, т.е. $\varphi(\sigma)=0$, а $\varepsilon$ характеризует максимальное значение глубины потенциальной ямы. Функция $f(n)$ в (4) определяется выражением

$$f(n)=\frac{\left(\frac{n+3}{3}\right)^{\frac{3}{n}}}{1-\left(\frac{n+3}{3}\right)^{-1}} \tag{5}$$

и является монотонно убывающей для $\forall n>0$. Параметр $n$ в (4) характеризует суперпозицию сил, влияющих на процесс отталкивания взаимодействующих молекул в смеси (в частности, вязкоупругих свойств молекул), и электромагнитных сил. Для каждой газовой смеси параметр $n$ в (4) определяется минимизацией квадратичного функционала ошибки между расчетным и экспериментально определенным значением одного (любого) коэффициента переноса в смеси. Отметим, что при $n = 3$ потенциал (4) содержит в своем семействе потенциал Леннарда-Джонса (12,6), который не всегда корректно используется в программных продуктах, предназначенных для проведения расчетов в области механики многокомпонентных жидкостей и газов: STAR-CD, FLUENT и CFX компании ANSIS и др.

Введем новые переменные $r^* = \dfrac{r}{d_{12}}$, $d_{12} = \dfrac{d_1 + d_2}{2}$, $b^* = \dfrac{b}{d_{12}}$, $\varphi^* = \dfrac{\varphi}{\varepsilon}$ в которых выражение (1) имеет вид:

$$\chi\left(b^*, g^*\right) = \pi \mp 2b^* \int_{r_0^*}^{\infty} \frac{dr^*}{r^{*2}\left(1 - \dfrac{\varphi_{eff}^*\left(n, AI, b^*, g^*\right)}{g^{*2}}\right)^{\frac{1}{2}}}. \qquad (6)$$

Подынтегральная функция, входящая в несобственный интеграл (6), содержит $\varphi_{eff}^*$:

$$\varphi_{eff}^*\left(n, AI, b^*, g^*\right) = f(n)\left(\left(\frac{AI}{r^*}\right)^{2(n+3)} + \left(\frac{AI}{r^*}\right)^{6}\right), \qquad (7)$$

где безразмерное число $AI = \dfrac{2\sigma}{d_1 + d_2}$ характеризует геометрические параметры молекул.

Для описания взаимодействия молекул в $N$-компонентной среде ($N > 2$) воспользуемся теорией аппроксимации и обобщением кинетической теории газов при создании алгоритма вычисления значений коэффициентов переноса в газовой среде с учетом микропроцессов. Такой подход позволяет учитывать геометрические и вязкоупругие свойства взаимодействующих в смеси молекул. С этой целью исходную $N$-компонентную смесь аппроксимируем газовой средой, состоящей из молекул максимальной концентрации в смеси диаметром $d_1$. Остальную часть исходной смеси аппроксимируем средой с молекулами с осредненным диаметром

$$d_2^* = \frac{\sum_{i=2}^{N-1} d_i}{N-1}.$$

Введем безразмерное число $AI^*$ соотношением

$$AI^* = \frac{\sigma}{\sum_{i=1}^{N} d_i} = \frac{\sigma}{d^* \dfrac{\sum_{i=1}^{N} d_i}{d^*}} = \frac{AI}{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} d_i}{d^*}}, \qquad (8)$$

где $d^* = \dfrac{d_1 + d_2^*}{2}$.

Соотношение (8) позволяет установить взаимосвязь между безразмерными числами где $AI$ и где $AI^*$ :

$$AI = AI^* \cdot \sum_{i=1}^{N} d_i . \tag{9}$$

Подставляя (9) в (7), получаем выражение, описывающее взаимодействие молекул в $N$-компонентной газовой среде, которое учитывает их геометрические и вязко-упругие свойства:

$$\varphi_{eff}^*\left(r^*, n, AI, d_i^*\right) = f\left(n\right)\left(\left(\frac{AI^* \cdot \sum_{i=1}^{N} d_i}{r^*}\right)^{2(n+3)} - \left(\frac{AI^* \cdot \sum_{i=1}^{K} d_i}{r^*}\right)^{6}\right). \tag{10}$$

Следуя кинетической теории газов [3, 4], коэффициенты переноса в $N$-компонентной газовой среде определяются в результате решения систем линейных алгебраических уравнений. Коэффициенты данных систем уравнений пропорциональны интегральным скобкам полинома Сонина. Вводя понятие угла рассеяния взаимодействующих молекул, удается упростить интегральные скобки и свести их к выражениям многочленов, зависящих от несобственного интеграла:

$$\Omega^{(l,r)} = \left(\frac{kT}{\pi m}\right)^{1/2} \int_0^{\infty} \exp\left(-\gamma^2\right)\gamma^{2r+3} Q^{(l)} d\gamma , \tag{11}$$

в котором

$$Q^{(l)}\left(g^*\right) = 2\pi \int_0^{\infty} \left(1 - \cos^l\left(\chi\left(g^*, b^*\right)\right)\right) b^* db^* \tag{12}$$

Таким образом, чтобы определить значение интеграла (11), необходимо найти значение несобственного интеграла (12), который содержит осциллирующую функцию $\left(1 - \cos^l\left(\chi\left(g^*, b^*\right)\right)\right) b^*$. Данная функция зависит от потенциала $\varphi_{eff}^*\left(r^*, n, AI, d_i^*\right)$ (10), который описывается кривой взаимодействия молекул в $N$-компонентной смеси. Данная кривая содержит подобласть потенциальной ямы. Геометрические характеристики этой подобласти описывают микропроцессы, которые существенно влияют на определение значений интегралов (11) и (12), а следовательно, коэффициентов переноса. Микропроцессы в потенциальной яме, как правило, приводят к уменьшению значений переносных характеристик среды: вязкости, теплопроводности, диффузии и др.

## 2. Квадратура Гаусса–Кристоффеля в алгоритме расчета интегралов столкновения молекул

Поскольку расчет интегралов (11), (12) является основной частью алгоритма определения переносных характеристик смесей, то необходимо использовать математически обоснованные численные алгоритмы. Для численного интегрирования интегралов (11), (12) предлагается квадратура Гаусса–Кристоффеля, построенная на теории ортогональных многочленов [9]. Построение узлов разбиения на исходном отрезке интегрирования и значений весов в них происходит из условия минимизации функционала для погрешности квадратуры. Использование квадратуры такого типа для определения значений интегралов (11), (12) позволяет учесть микропроцессы в потенциальной яме и их влияние на значения коэффициентов переноса. На рис. 1 приведена графическая иллюстрация наиболее сложного интеграла (12) с осциллирующей подынтегральной функцией для различных значений параметра $n$, который влияет на геометрию потенциальной ямы. Расчеты и построение графиков осуществлялись с помощью пакета Wolfram Mathematica [10].

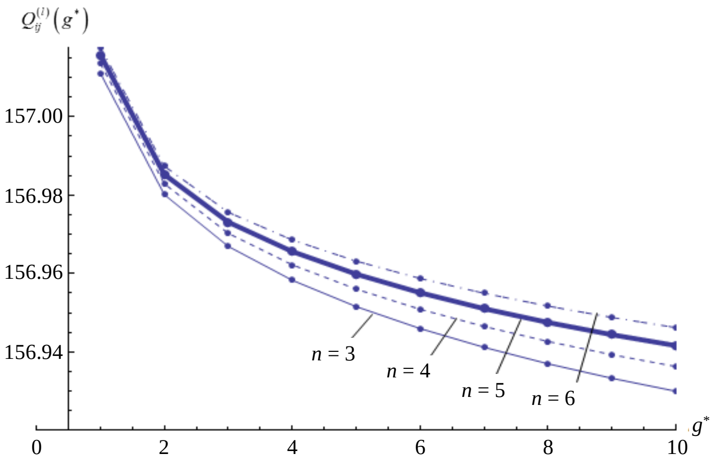



**Рис. 1**. Значение интеграла (12) при различных $n$
**Fig. 1.** The value of integral (12) at various $n$

В предложенном методе определения коэффициентов переноса в $N$-компонентных газовых смесях необходимо использовать алгоритмы параллельных вычислений, что связано с необходимостью решений систем алгебраических уравнений. Количество систем зависит от числа определяемых коэффициентов переноса в $N$-компонентной среде. Алгоритм распараллеливания решения совокупности систем уравнений зависит от структуры вычислительного комплекса и представляет научный интерес авторов в будущих работах.

## Заключение

Для качественного моделирования газодинамических процессов в газожидкостных смесях необходимо формирование адекватной математической модели, которая базируется на взаимосвязи макроуравнений тепломассопереноса с переносными характеристиками среды из кинетической теории, а также создание эффективных вычислительных технологий для определения значений коэффициентов переноса. В работе предложено определение значений коэффициентов переноса (вязкости, теплопроводности, диффузии и др.) в $N$-компонентных газовых смесях с учетом анализа микропроцессов. С этой целью введено понятие аппроксимации исходной многокомпонентной смеси бинарной средой, состоящей из молекул двух типов. Одну часть среды формировали молекулы с максимальной концентрацией, другую часть – остальные молекулы с осредненным диаметром.

При математическом описании взаимодействия молекул в среде кроме сил притяжения, отталкивания и электромагнитных сил учитывались геометрические и вязкоупругие характеристики молекул. При использовании в уравнении Больцмана столкновительной части, состоящей из восьмикратных интегралов, и теории многочленов Сонина задача определения коэффициентов переноса сводится к отысканию решения систем линейных алгебраических уравнений для каждого коэффициента переноса. В данных системах коэффициентами являются многочлены, которые зависят от значений трехкратных несобственных интегралов с осциллирующими подынтегральными функциями. Эти интегралы описывают микропроцессы в среде. Для вычисления данных интегралов была предложена квадратурная формула, основанная на теории ортогональных многочленов и минимизации ее погрешности. Такой подход позволил определять значения коэффициентов переноса, используемых в макроуравнениях гидродинамики, на основе анализа микропроцессов среды.

### Список источников


1. *Нигматуллин Р.И.* Динамика многофазных сред. М. : Наука, 1987. 464 с.
2. *Соу С.* Гидродинамика многофазных систем. М. : Мир, 1983. 536 с.
3. *Гиршфельдер Дж., Кертиес Ч., Берд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей. М. : Изд-во иностр. лит., 1961. 929 с.
4. *Ферцигер Дж., Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. М. : Мир, 1976. 554 с.
5. *Chapman S., Cowling T.G.* The mathematical theory of non-uniform gases. An account of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction, and diffusion in gases. Cambridge : Cambridge University Press, 1952. 423 p.
6. *Яненко Н.Н.* Проблемы вычислительной механики // Николай Николаевич Яненко : очерки, статьи , воспоминания / сост. Н.Н. Бородина. Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1988. С. 72–100.
7. *Анисимова И.В., Игнатьев В.Н.* Вычислительные и компьютерные технологии определения коэффициентов переноса в моделях многокомпоненных смесей. Казань : Казан. гос. техн. ун-т им. А.Н. Туполева, 2019. 256 с.
8. *Анисимова И.В., Игнатьев В.Н., Ю.Ф. Гортышов, Аристова Е.Ю.* О потенциале взаимодействия молекул в многокомпонентных газовых средах // Известия вузов. Авиационная техника. 2018. № 4 С. 69–71. doi: 10.3103/S1068799816030193
9. *Анисимова И.В., Гиниятуллина Р.Р., Игнатьев В.Н.* Об одном методе вычисления узлов и весов квадратур Гаусса-Кристоффеля // Математическое моделирование. 2013. Т. 25, № 3. С. 3–13. doi: org/10.1134/S2070048213050025
10. *Мовчан Л.Ш., Карчевский М.М., Игнатьев В.Н., Анисимова И.В.* Компьютерная система Mathematica и расчетно-графические работы по высшей математке. Казань : Казан. гос. техн. ун-т им. А.Н. Туполева, 2008. 96 с.


### *References*


1. Nigmatullin R.I. (1987) *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of multiphase media]. Moscow: Nauka.
2. Sou S. (1983) *Gidrodinamika mnogofaznykh system* [Hydrodynamics of multiphase systems]. Moscow: Mir.
3. Hirschfelder J., Curtiss J, Bird R. (1961) *Molekulyarnaya teoriya gazov i zhidkostey* [Molecular theory of gases and liquids]. Moscow: Izdatelstvo inostrannaya literatura.

4. Ferziger J., Kaper G. (1972) *Matematicheskaya teoriya protsessov perenosa v gazakh* [Mathematical theory of transport processes in gases]. Moscow: Mir.
5. Chapman S., Cowling T.G. (1952) *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases. An Account of the Kinetic Theory of Viscosity, Thermal Conduction, and Diffusion in Gases*. Cambridge: Cambridge University Press.
6. Yanenko N.N. (1988) *Problemy vychislitel'noy mekhaniki*. *In: Nikolay Nikolaevich Yanenko. Ocherki, stat'i, vospominaniya. Sost.: N.N. Borodina* [Problems in computational mechanics. In: Nikolay Nikolaevich Yanenko. Essays, articles, memoirs. Compiled by: Borodina N.N.]. Novosibirsk: Nauka.
7. Anisimova I.V., Ignat`ev V.N. (2019) *Vychislitel'nye i komp'yuternye tekhnologii opredeleniya koeffitsientov perenosa v modelyakh mnogokomponovannykh smesey* [Computational and computer technologies for determining transfer coefficients in models of multicomponent mixtures]. Kazan: Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev.
8. Anisimova I.V., Ignat`ev V.N., Gortyshov Yu.F., Aristova E.Yu. (2018) The potential of interaction of molecules in multicomponent gaseous media. *Russian Aeronautics*. 59(3). pp. 414–418. doi: 10.3103/S1068799816030193
9. Anisimova I.V., Giniyatullina R.R., Ignat`ev V.N. (2013) On one method for calculating the nodes and weights of the Gauss-Christoffel quadratures. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 5(5). pp. 448–455. doi: 10.1134/S2070048213050025
10. Movchan L.Sh., Karchevskiy M.M., Ignat'ev V.N., Anisimova I.V. (2008) *Komp'yuternaya sistema Mathematica i raschetno-graficheskie raboty po vysshey matematke* [“Mathematica” computer system and computational and graphic efforts on higher mathematics]. Kazan: Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev.

***Сведения об авторах*:**
**Анисимова Ирина Викторовна** – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры прикладной математики и информатики Казанского национального исследовательского университета им. А.Н. Туполева, Казань, Россия. E-mail: anisimovaiv1@rambler.ru
**Игнатьев Виктор Николаевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики и математики Казанского национального исследовательского университета им. А.Н. Туполева, Казань, Россия. E-mail: anisimovaiv1@rambler.ru
**Лаптева Елена Юрьевна** – доцент кафедры иностранных языков, русского и русского как иностранного Казанского национального исследовательского технического университета им. Туполева, Казань, Россия. E-mail: lapti.daleko@mail.ru

***Information about the authors*:**
**Anisimova Irina V.** (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Applied Mathematics and Informatics, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev, Kazan, Russian Federation). E-mail: anisimovaiv1@rambler.ru
**Ignat`ev Victor N.** (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Theoretical and Applied Mechanics and Mathematics, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev, Kazan, Russian Federation). E-mail: anisimovaiv1@rambler.ru
**Lapteva Elena Yu.** (Associate Professor, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev, Kazan, Russian Federation). E-mail: lapti.daleko@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 08.12.2021; принята к публикации 03.02.2023*

*The article was submitted 08.12.2021; accepted for publication 03.02.2023*

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2023 Математика и механика № 81
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 532.5.011
doi: 10.17223/19988621/81/6

# Экспериментально-теоретическое исследование обтекания сферы с учетом вдува газа с ее поверхности

**Владимир Афанасьевич Архипов[1], Сергей Александрович Басалаев[2], Кирилл Владимирович Костюшин[3], Ксения Григорьевна Перфильева[4], Анна Сергеевна Усанина[5]**

[1, 2, 3, 4, 5] *Томский государственный университет, Томск, Россия*
[1] *leva@niipmm.tsu.ru*
[2] *tarm@niipmm.tsu.ru*
[3] *kostushink@niipmm.tsu.ru*
[4] *k.g.perfiljeva@yandex.ru*
[5] *usaninaanna@mail.ru*

**Аннотация.** Представлены новые экспериментально-теоретические данные по исследованию обтекания твердой сферы в условиях истечения потока массы с ее поверхности. Предложен новый способ определения коэффициента аэродинамического сопротивления твердой сферы при истечении потока воздуха с ее поверхности, включающий измерение аэродинамической силы, действующей на обдуваемую равномерным газовым потоком полую сферу с пористой оболочкой, при подаче во внутреннюю полость сферы сжатого газа под давлением.
**Ключевые слова:** твердая сфера, обтекание сферы, вдув газа, коэффициент сопротивления, экспериментальное исследование, численное моделирование

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № FSWM-2020-0036.

**Для цитирования:** Архипов В.А., Басалаев С.А., Костюшин К.В., Перфильева К.Г., Усанина А.С. Экспериментально-теоретическое исследование обтекания сферы с учетом вдува газа с ее поверхности // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 81. С. 57–72. doi: 10.17223/19988621/81/6

Original article

# Experimental and theoretical studies of the flow around a sphere with account for gas injection from its surface

**Vladimir A. Arkhipov[1], Sergey A. Basalaev[2], Kirill V. Kostyushin[3], Kseniya G. Perfil'eva[4], Anna S. Usanina[5]**

[1, 2, 3, 4, 5] *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*
[1] *leva@niipmm.tsu.ru*

[2] tarm@niipmm.tsu.ru
[3] kostushink@niipmm.tsu.ru
[4] k.g.perfiljeva@yandex.ru
[5] usaninaanna@mail.ru

**Abstract.** The results of the experimental and theoretical studies of the gas flow around a solid sphere under conditions of mass outflow from its surface are presented. A new experimental setup and a method for studying the flow around a solid sphere during the gas injection from its surface are proposed with the aim of improving the accuracy of determining the drag coefficient. In the range of the Reynolds number (Re = 133÷667), experimental results show that the drag coefficient decreases at the gas injection from the surface of the sphere. Moreover, the drag coefficient decreases with an increase in the density of the injected air flow at the fixed Reynolds number. Numerical simulation of a two-phase flow around a sphere with the gas injection from its surface is carried out for two calculation cases: with a uniform gas outflow from the surface of a porous sphere and with gas injection from perforated holes on the sphere surface. The numerical calculation results for the case of gas injection from the holes of the sphere are in quantitative and qualitative agreement with the experimental data.
**Keywords:** solid sphere, flow around a sphere, gas injection, drag coefficient, experimental study, numerical simulation

**Acknowledgments:** This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the framework of state assignment (project No. FSWM-2020-0036).

**For citation:** Arkhipov, V.A., Basalaev, S.A., Kostyushin, K.V., Perfil'eva, K.G., Usanina, A.S. (2023) Experimental and theoretical studies of the flow around a sphere with account for gas injection from its surface. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 81. pp. 57–72. doi: 10.17223/19988621/81/6

## Введение

Обтекание сферической частицы дисперсной фазы (твердой или жидкой) газовым потоком реализуется в различных технических системах и технологических процессах. Исследованию влияния истечения потока газа с поверхности твердой сферы посвящены в основном расчетно-теоретические работы [1–9]. В частности, в работах J.K. Dukowicz [2, 3] проведено численное моделирование обтекания твердой сферической частицы с равномерным истечением потока массы с ее поверхности при малых числах Рейнольдса (Re < 1) и получены теоретические зависимости коэффициента аэродинамического сопротивления от Re обтекающего потока и параметра вдува, характеризующего скорость оттекающего от поверхности частицы потока газа. В работе T.R. Jayawickrama и соавт. [4] проведено теоретическое исследование влияния истечения потока массы с поверхности частицы на коэффициент аэродинамического сопротивления при ее движении в однородном потоке в изотермических условиях в диапазоне чисел Рейнольдса Re = 0.2 ÷ 14. Такая же задача решалась в диапазоне чисел Рейнольдса Re = 1 ÷ 200 численным методом конечных разностей для уравнения Навье–Стокса в работах [5, 6]. В работе M. Watanabe, J. Yahagi [7] представлены результаты численного моделирования динамики движения частицы горящего топлива с неоднородным вдувом газового потока с поверхности в диапазоне чисел Рейнольдса Re = 1 ÷ 200. Исследовано изменение двух составляющих коэффициента аэродинамического сопротивления (коэффициенты давления и трения) при разном направлении истечения газового потока с поверхности частицы. В большинстве рассмотренных работ показано снижение коэффициента сопротивления при увеличении скорости вдуваемого потока газа с поверхности частицы. Экспериментальному исследованию обтекания сфероида в условиях вдува газа с его поверхности посвящено ограниченное число публикаций [8, 9].

Анализ известных публикаций по данной тематике показал, что в большинстве работ исследования проводились, как правило, при ускорении частицы, что не позволяет выделить влияние только вдува газа с поверхности частицы на коэффициент аэродинамического сопротивления. При этом данные разных авторов имеют большой разброс (иногда противоречат друг другу). Поэтому для практических расчетов известные зависимости по влиянию эффекта вдува на коэффициент сопротивления требуют дальнейшего тщательного экспериментально-теоретического подтверждения и уточнения.

Цель данной работы – комплексное (экспериментальное и теоретическое) исследование обтекания твердой сферы в условиях оттока массы от ее поверхности и получение зависимости для силы аэродинамического сопротивления. Влияние силы, действующей на твердую сферу при обтекании в автомодельном и переходном режимах, экспериментально исследовано в работах [10, 11]. Для повышения чувствительности метода измерения коэффициента сопротивления в переходном режиме разработана экспериментальная установка, включающая рычаг с закрепленной на нем твердой сферой [12].

## Экспериментальная установка и методика исследования

Схема экспериментальной установки для исследования влияния истечения потока газа с поверхности одиночной твердой сферы на коэффициент аэродинамического сопротивления приведена на рис. 1 [12].

Твердая полая перфорированная сфера *1* закреплялась на длинном плече *2* рычага. Рычаг устанавливался на неподвижной точке опоры *3* с возможностью его вращения вокруг горизонтальной оси *4*. На коротком плече *5* рычага крепился стержень *6*, контактирующий с приемной площадкой *7* датчика силы *8*, в качестве которого использовались высокоточные электронные аналитические весы марки AND GX-200 с погрешностью ± 0.002 гс (1 гс = 9.80665 мН).

В ходе эксперимента предварительно на коротком плече *5* рычага размещался дополнительный груз *9* для уравновешивания моментов силы тяжести, приложенных к плечам рычага. При открытии запорного вентиля *10* во внутреннюю полость твердой сферы *1* подавался через тонкостенную трубку *11* сжатый воздух из батареи баллонов *12* через расходомер *13*, давление перед которым регистрировалось манометром *14*. После открытия запорного вентиля *15* сжатый воздух из батареи баллонов *12* через расходомер *16* и гибкий шланг *17* поступал внутрь патрубка *18*, расположенного под полой твердой сферой *1*. Давление перед расходомером регистрировалось манометром *19*. В качестве расходомеров *13, 16* использовались ротаметры марки РМ-0.63Г с погрешностью ± 2.5%, которые были отградуированы для объемного расхода.

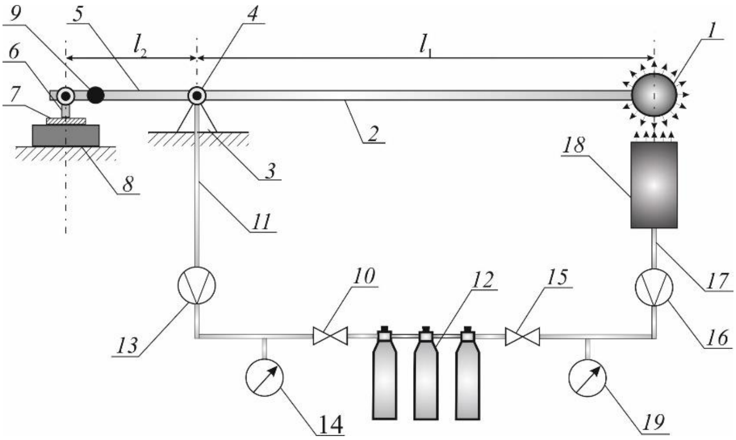



**Рис. 1.** Схема экспериментальной установки для исследования обтекания твердой сферы в условиях вдува газа с ее поверхности: *1* – полая сфера; *2* – длинное плечо рычага; *3* – точка опоры; *4* – ось; *5* – короткое плечо рычага; *6* – стержень; *7* – приемная площадка; *8* – датчик силы; *9* – груз; *10* – запорный вентиль; *11* – трубка; *12* – батарея баллонов; *13* – расходомер; *14* – манометр; *15* – запорный вентиль; *16* – расходомер; *17* – гибкий шланг; *18* – патрубок; *19* – манометр

**Fig. 1.** Diagram of an experimental setup for studying the flow around a solid sphere under conditions of gas injection from its surface: (*1*) hollow sphere; (*2*) long lever arm; (*3*) fulcrum; (*4*) axis; (*5*) short lever arm; (*6*) pin; (*7*) receiving platform; (*8*) force sensor; (*9*) block; (*10*) shut-off valve; (*11*) tube; (*12*) bank of air flasks; (*13*) flow meter; (*14*) manometer; (*15*) shut-off valve; (*16*) flow meter; (*17*) flexible hose; (*18*) branch pipe; and (*19*) manometer

Закрепление твердой полой сферы на длинном плече рычага и стержня, контактирующего с приемной площадкой датчика силы, на коротком плече рычага обеспечивает увеличение измеренной датчиком силы $F$ в $n$ раз по сравнению с аэродинамической силой $F_a$, действующей на обдуваемую равномерным газовым потоком сферу: $F = F_a \cdot n$, где $n = l_1/l_2 > 1$ – передаточное отношение рычага, равное отношению длин плеч.

Предварительное уравновешивание моментов силы тяжести, приложенных к плечам рычага, путем помещения дополнительного груза на коротком плече рычага обеспечивает исключение влияния массы твердой сферы, тонкостенной трубки для подачи сжатого газа во внутреннюю полость сферы, стержня, контактирующего с приемной площадкой датчика силы и другими элементами рычага, на результаты измерений. При этом датчик силы регистрирует только усиленную в $n$ раз аэродинамическую силу, действующую на твердую полую сферу.

Предложенный способ определения влияния истечения потока газа с поверхности твердой перфорированной сферы на коэффициент аэродинамического сопротивления позволяет повысить точность измерения аэродинамической силы при малых числах Рейнольдса, соответствующих малым скоростям обдува сферы.

Для получения достоверных данных о влиянии истечения потока массы через перфорированную поверхность твердой сферы в экспериментах измерены основные параметры, описывающие рассматриваемый процесс: диаметр твердой сферы $D$; скорость обдувающего потока $u$; скорость вдуваемого с поверхности твердой сферы потока $u_s$.

В экспериментах использовались перфорированные твердые сферы, изготовленные на 3$D$-принтере. Диаметр используемых в экспериментах сфер измерялся микрометром с погрешностью 0.01 мм. Эксперименты проведены для сфер диаметрами $D$ = 10 и $D$ = 20 мм; количество перфораций диаметром 1 мм на поверхностях сфер $n$ = 11 и $n$ = 44 соответственно.

Длина тонкостенной трубки составляла 65 см. Расстояние от центра сферы до точки опоры рычага $l_1$ = 44 см, а расстояние от стержня, контактирующего с приемной площадкой датчика силы, до точки опоры рычага $l_2$ = 7 см.

Скорость обдувающего и истекающего потока воздуха с поверхности твердой сферы измерялась с помощью цифрового анемометра АП-1 с погрешностью ± 0.1 м/с. В экспериментах значения скорости истекающего с поверхности потока воздуха варьировали в диапазоне $u_s = 0.5 \div 1.7$ м/с, а значения обдувающего потока воздуха составляли $u = 0.7 \div 1.4$ м/с.

Экспериментальное значение коэффициента аэродинамического сопротивления от числа Рейнольдса обдувающего потока и плотности потока вдуваемого газа определялось из соотношения

$$C_D(\mathrm{Re}, q_s) = C_{D0}(\mathrm{Re}) \frac{F(\mathrm{Re}, q_s)}{F_0(\mathrm{Re})},$$

где в качестве $C_{D0}(\mathrm{Re})$ использовалась стандартная кривая сопротивления [13]

$$C_{D0}(\mathrm{Re}) = \begin{cases} \dfrac{24}{\mathrm{Re}}, & \mathrm{Re} \le 1, \\ \dfrac{24}{\mathrm{Re}} + \dfrac{4}{\sqrt[3]{\mathrm{Re}}}, & \mathrm{Re} = (1 \div 700), \\ 0.44 & \mathrm{Re} \ge (700 \div 3 \cdot 10^5), \end{cases}$$

и число Рейнольдса Re определялось из соотношения

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho u D}{\mu},$$

где $F(\mathrm{Re}, q_s)$ − сила, измеренная датчиком при заданных значениях Re, $q_s$; $F_0(\mathrm{Re})$ − сила, измеренная датчиком при заданном значение Re при отсутствии вдува с поверхности сферы; $D$ – диаметр полой сферы; $\rho$, $\mu$ – плотность и коэффициент динамической вязкости газа, обдувающего сферу; $u$ – скорость обдувающего сферу газового потока. При численном моделировании плотность потока газа, равномерно вдуваемого через пористую оболочку, определялась по формуле

$$q_s = \rho_s \frac{Q_s}{\pi D^2}, \tag{1}$$

где $\rho_s$ − плотность газа, вдуваемого с поверхности сферы; $Q_s$ – объемный расход газа. В экспериментах величина $q_s$ рассчитывалась из выражения

$$q_s = \rho_s \frac{Q_s}{S}, \tag{2}$$

где $S$ – суммарная площадь перфораций.

## Математическая постановка задачи и метод решения

Для математического описания задачи обтекания твердой сферы при наличии газоприхода с ее поверхности использовалась система уравнений Навье–Стокса, осредненная по Фавру [14, 15] в декартовой системе координат $x_1, x_2, x_3$.

Уравнение неразрывности имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\bar{\rho}\tilde{u}_j\right] = 0, \tag{3}$$

где $\rho$ – плотность; $t$ – время; $u_j$ – скорость; $x_j$ – координата.

Уравнения импульса имеют вид:

$$\frac{\partial\left(\bar{\rho}\tilde{u}_i\right)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j + \bar{p}\delta_{ij} - \tilde{\tau}_{ij}\right] = 0, \tag{4}$$

где $i$ – 1, 2, 3; $p$ – давление; $\delta_{ij}$ – символ Кронекера.

Уравнение энергии запишется в виде:

$$\frac{\partial\left(\bar{\rho}\tilde{E}\right)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\bar{\rho}\tilde{u}_j\tilde{E} + \tilde{u}_j\bar{p} - \tilde{u}_i\tilde{\tau}_{ij}\right] = 0, \tag{5}$$

где $E$ – полная внутренняя энергия.

Система уравнений (4), (5) замыкается уравнением состояния идеального газа

$$\bar{p} = \bar{\rho}R\tilde{T},$$

где $T$ – температура; $R$ – газовая постоянная.

Тензор вязких напряжений имеет следующий вид:

$$\tilde{\tau}_{ij} = \mu\left(\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial\tilde{u}_k}{\partial x_k}\delta_{ij} - \overline{\rho u_i'' u_j''},$$

где $\mu$ – коэффициент динамической вязкости.

Для замыкания системы уравнений вязкого газа использовалась модель турбулентности SST $k$–$\omega$ [15].

Расчеты проведены для двух модельных вариантов подачи газового потока с поверхности твердой сферы (рис. 2). Для первого варианта (см. рис. 2, *a*), соответствующего физической постановке рассматриваемой задачи, равномерный вдув газового потока задавался по всей поверхности пористой сферы; плотность потока газа определялась формулой (1). Для второго варианта (см. рис. 2, *b*) газ подавался через трубку в полость твердой сферы с перфорированной поверхностью, что соответствовало условиям проведения экспериментов; плотность потока газа при этом определялась формулой (2). На рис. 2 представлены виды расчетной области и обозначения границ для постановки граничных условий. В качестве граничных условий на границе *1* задавались вектор скорости обтекающего твердую сферу потока $\bar{u} = u_{in}\bar{n}$ (где $\bar{n}$ – вектор внутренней нормали к границе *1*), давление и температура окружающей среды: $P$ = 1 атм, $T$ = 296 К, кинетическая энергия турбулентности и диссипация кинетической энергии турбулентности: $k = k_0$, $\omega = \omega_0$. Для границ *2* и *3* использовались мягкие граничные условия: $\partial / \partial n = 0$. На поверхности вдува (граница *4*) задавались газоприход $G = G_{vd}$

и полная энтальпия $H = H_0$. Направление вдува – по нормали к поверхности. Для конфигурации со вдувом через отверстия на всех непроницаемых поверхностях твердой сферы и трубки (граница *5*) для скорости задавались условия непротекания и прилипания: $\bar{u} = [0\ 0\ 0]^T$, для температуры – условия теплоизолированности: $\mathrm{grad}(T) = 0$, для давления: $\mathrm{grad}(P) = 0$. Для постановки граничных условий для характеристик турбулентности на стенке используется метод пристеночных функций. В качестве начальных условий во всей области течения задавались параметры набегающего потока. Газ – воздух с параметрами: $k = 1.4$, $R = 287$ Дж/(кг·К), динамическая вязкость: $1.8 \cdot 10^{-5}$ Па·с.

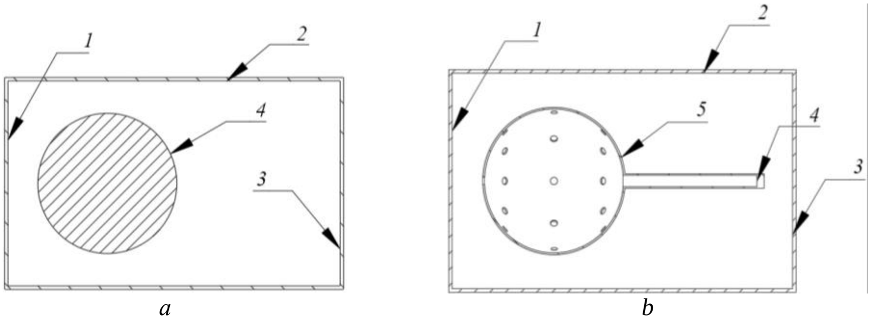



**Рис. 2.** Расчетная область и обозначения граничных условий: *a* – вариант с равномерным по пористой поверхности твердой сферы вдувом; *b* – вариант с вдувом через перфорированные отверстия на поверхности твердой сферы

**Fig. 2.** Computational domain and notations of boundary conditions: (*a*) a case with uniform injection on the porous surface of a solid sphere and (*b*) a case with injection through perforated holes on the solid sphere surface

Численный расчет проводился методом установления. Для повышения порядка точности по пространству использовался метод кусочно-линейной реконструкции решения, с ограничителями Venkatakrishnan [16]. Для определения параметров на гранях расчетных ячеек использовался метод Roe с энтропийной коррекцией [17].

## Результаты экспериментального и численного исследования

Результаты экспериментальных исследований получены в диапазоне чисел Рейнольдса обдувающего потока Re = 133 ÷ 1811, что соответствует переходному и автомодельному режимам.

Качественная картина истечения газового потока из перфорированных отверстий на поверхности твердой сферы при отсутствии и в присутствии обдувающего потока ($u = 0.2$ м/с) показана на рис. 3.

Экспериментальные значения коэффициента аэродинамического сопротивления твердой сферы $C_D$ при истечении газового потока с ее поверхности в зависимости от значения плотности потока газа $q_s$ приведены в табл. 1–3. Эксперименты проведены для двух значений $q_s$: $q_s = 0.60$ кг/(м$^2$·с) и $q_s = 1.09$ кг/(м$^2$·с).

В табл. 1–3 приведены измеренные значения скорости обдувающего потока газа (воздуха) $u$, рассчитанные по формуле (3) значения плотности потока вдуваемого газа $q_s$, значения числа Рейнольдса Re, значения коэффициента аэродинамического сопротивления от числа Рейнольдса $C_{D0}(\mathrm{Re})$, рассчитанные по стандартной зависимости (2) и измеренные значения коэффициент аэродинамического сопротивления твердой сферы $C_D(\mathrm{Re}, q_s)$, определенные по формуле (1).

Из приведенных в табл. 1 и 2 результатов следует, что при вдуве газа с поверхности сферы в исследованном диапазоне чисел Re = 133÷667 коэффициент аэродинамического сопротивления уменьшается. По мере увеличения плотности вдуваемого потока газа при постоянном значении числа Рейнольдса обтекающего потока наблюдается наибольшее изменение (уменьшение) коэффициента аэродинамического сопротивления сферы.

*a*

*b*

**Рис. 3.** Фотографии процесса истечения воздушного потока из перфорированных отверстий на поверхности твердой сферы ($D$ = 20 мм) при отсутствии (*a*) и в присутствии (*b*) обдувающего потока ($u$ = 0.2 м/с)

**Fig. 3.** Pictures of the air flow injection from perforated holes on the solid sphere surface ($D$ = 20 mm): (*a*) in the absence and (*b*) in the presence of a blowing flow ($u$ = 0.2 m/s)

Таблица 1

**Результаты измерений коэффициента аэродинамического сопротивления сферы $D$ = 10 мм при $q_s$ = 0.60 кг/(м$^2$·с)**

| Параметр | Значения | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$, м/с | 0.20 | 0.30 | 0.40 | 0.50 | 0.60 | 0.80 | 1.00 |
| Re | 133 | 200 | 267 | 333 | 400 | 533 | 667 |
| $C_{D0}$ | 0.96 | 0.80 | 0.71 | 0.65 | 0.60 | 0.54 | 0.49 |
| $C_D$ | 0.87 | 0.72 | 0.71 | 0.63 | 0.60 | 0.52 | 0.48 |

Таблица 2

**Результаты измерений коэффициента аэродинамического сопротивления сферы $D$ = 10 мм при $q_s$ = 1.09 кг/(м$^2$·с)**

| Параметр | Значения | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$, м/с | 0.20 | 0.30 | 0.40 | 0.50 | 0.60 | 0.80 | 1.00 |
| Re | 133 | 200 | 267 | 333 | 400 | 533 | 667 |
| $C_{D0}$ | 0.96 | 0.80 | 0.71 | 0.65 | 0.60 | 0.54 | 0.49 |
| $C_D$ | 0.98 | 0.65 | 0.62 | 0.56 | 0.60 | 0.51 | 0.49 |

Таблица 3

**Результаты измерений коэффициента аэродинамического сопротивления сферы $D$ = 20 мм при $q_s$ = 0.60 кг/(м²·с)**

| Параметр | Значения | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$, м/с | 0.20 | 0.30 | 0.40 | 0.50 | 0.60 | 0.80 | 1.00 |
| Re | 267 | 400 | 533 | 667 | 800 | 1066 | 1333 |
| $C_{D0}$ | 0.71 | 0.60 | 0.54 | 0.49 | 0.44 | 0.44 | 0.44 |
| $C_D$ | 0.61 | 0.56 | 0.53 | 0.48 | 0.44 | 0.43 | 0.46 |

Из табл. 3 следует, что по мере увеличения числа Re обтекающего твердую сферу потока газа коэффициент аэродинамического сопротивления при истечении газа с ее поверхности в промежуточном режиме уменьшается до некоторого переходного значения, соответствующего началу автомодельного режима. При наступлении автомодельного режима (при Re $\geq$ 700) коэффициент аэродинамического сопротивления соответствует стандартному значению $C_{D0} = const = 0.44$.

Получены результаты численного моделирования обтекания твердой сферы диаметром 10 и 20 мм для случая равномерного вдува воздуха с ее поверхности и для случая вдува потока воздуха через перфорированные отверстия на поверхности твердой сферы. В расчетах варьировали скорость обтекающего твердую сферу потока и газоприход с поверхности сферы в соответствии со значениями параметров, используемых в экспериментах. Расчеты проведены в трехмерной постановке на неструктурированной расчетной сетке с числом ячеек $\approx$ 950 тыс.

На рис. 4 показана локальная картина течения для двух рассмотренных расчетных вариантов: с вдувом газа через перфорированные отверстия на поверхности твердой сферы (см. рис. 4, *a*) и с равномерным вдувом газа (см. рис. 4, *b*). При вдуве газового потока в полость сферы реализуется струйная картина течения, которая приводит к сильному возмущению течения в окрестности сферы. При равномерном вдуве газа наблюдается лишь небольшое отклонение линий тока набегающего потока.

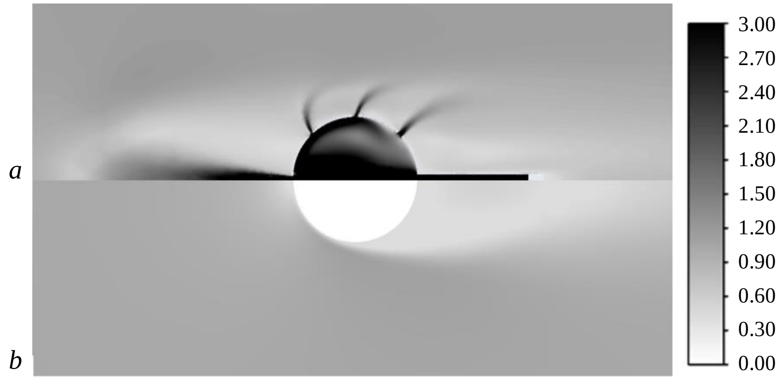



**Рис. 4.** Поле модуля вектора скорости $|\bar{u}|$ в окрестности твердой сферы ($D$ = 20 мм) при Re = 1 120, м/с: *a* – расчет с вдувом воздуха через перфорированные отверстия на поверхности сферы; *b* – расчет с равномерным вдувом воздуха

**Fig. 4.** The field of the velocity vector modulus $|\bar{u}|$ in the vicinity of a solid sphere ($D$ = 20 mm) at the Reynolds number Re = 1120, m/s: (*a*) calculation with air injection through perforated holes on the sphere surface and (*b*) calculation with uniform gas injection

Локальная картина поля скоростей в окрестности твердой сферы диаметром 10 мм при равномерном вдуве потока воздуха с ее поверхности при значении числа Рейнольдса Re = 506 показана на рис. 5. По мере увеличения газоприхода с поверхности твердой сферы увеличивается область торможения набегающего потока и существенно расширяется зона рециркуляционного следа. На рис. 5 изображены изолинии скорости, в каждой точке которых величина модуля скорости сохраняет постоянное значение.

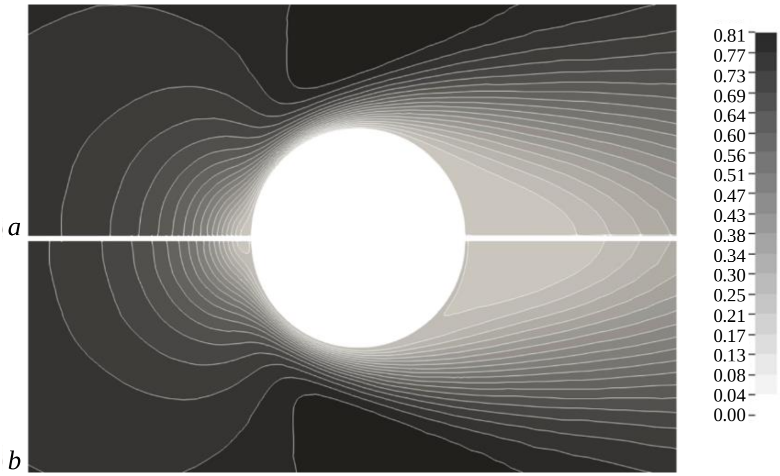



**Рис. 5.** Поле модуля вектора скорости $|\bar{u}|$ в окрестности твердой сферы ($D$ = 10 мм) при Re = 506 ($u$ = 0.8 м/с), м/с: $a$ – $u_s$ = 0.5 м/с; $b$ – $u_s$ = 1.7 м/с

**Fig. 5.** The field of the velocity vector modulus $|\bar{u}|$ in the vicinity of a solid sphere ($D$ = 10 mm) at the Reynolds number Re = 506 ($u$ = 0.8 m/s), m/s: $u_s$ = ($a$) 0.5 and ($b$) 1.7 m/s

Распределение давления по поверхности твердой сферы диаметром 10 мм при различных числах Рейнольдса при фиксированной скорости вдуваемого потока воздуха приведено на рис. 6 (φ – зенитный угол в сферической системе координат). По мере увеличения скорости обтекающего твердую сферу потока уровень давления на поверхности сферы существенно увеличивается, но область повышенного давления остается неизменной.

На рис. 7 показано распределение давления по поверхности сферы диаметром 10 мм при значении числа Рейнольдса Re = 905. Видно, что при наличии вдува с поверхности твердой сферы, при увеличении газоприхода, максимальное значение давления изменяется незначительно. Стоит отметить, что по сравнению с результатами расчетов, полученными при отсутствии вдуваемого потока воздуха ($u_s$ = 0), площадь области повышенного давления увеличивается на 10–15%. Эти эффекты наблюдаются для всех рассмотренных расчетных вариантов.

На рис. 8 приведены зависимости коэффициента сопротивления твердой сферы диаметром 20 мм от скорости вдуваемого потока воздуха $u_s$, рассчитанные для случая равномерного истечения газа с поверхности сферы (см. рис. 8, $a$) и при вдуве через перфорированные отверстия (см. рис. 8, $b$) при разных числах Рейнольдса. Отличия в значениях $C_D$ на рис. 8, $a$, $б$ при скорости вдува $u_s$ = 0 объясняется различием структуры поверхности моделируемой твердой сферы. Результаты расчета показывают, что при равномерном вдуве по мере увеличения скорости вдува воздуха с поверхности твердой сферы наблюдается постепенное снижение коэффициента сопротивления, а при значении $u_s$ > 1.3 м/с происходит монотонное увеличение $C_D$ относительно условий без вдува. Этот эффект связан, по-видимому, с изменением соотношения составляющих коэффициента полного сопротивления (коэффициентов сопротивления давления и трения) при изменении скорости вдуваемого потока [1].

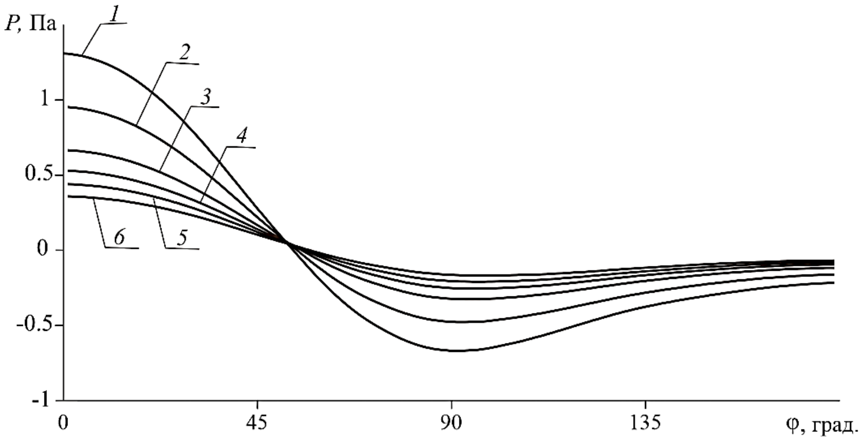



**Рис. 6**. Расчетное распределение давления по поверхности твердой сферы ($D$ = 10 мм) при скорости вдуваемого потока воздуха $u_s$ = 0.9 м/с: *1* – Re = 905; *2* – Re = 766; *3* – Re = 633; *4* – Re = 559; *5* – Re = 506; 6 – Re = 453

**Fig. 6.** Calculated pressure distribution on the solid sphere surface ($D$ = 10 mm) at the blowing air flow velocity $u_s$ = 0.9 m/s: Re = (*1*) 905; (*2*) 766; (*3*) 633; (*4*) 559; (*5*) 506; and (*6*) 453

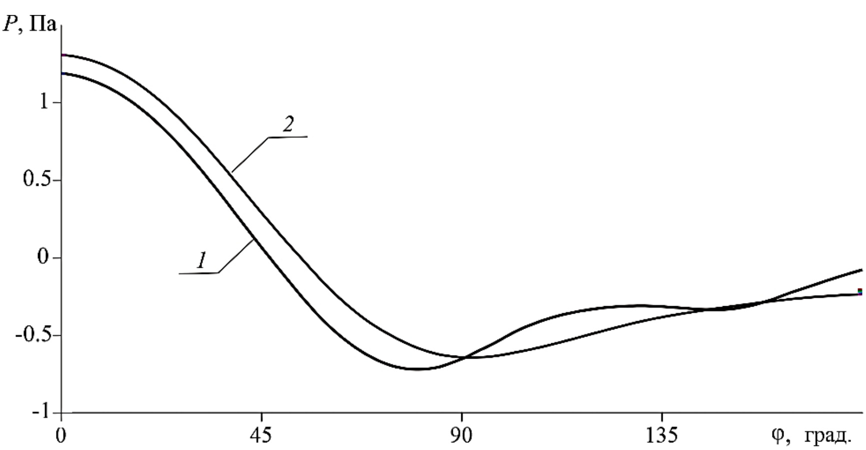



**Рис. 7.** Расчетное распределение давления по поверхности твердой сферы ($D$ = 10 мм) при Re = 905: *1* – $u_s$ = 0; *2* – $u_s$ = 1.7 м/с

**Fig. 7.** Calculated pressure distribution on the solid sphere surface ($D$ = 10 mm) at the Reynolds number Re=905: $u_s$ = (*1*) 0 and (*2*) 1.7 m/s

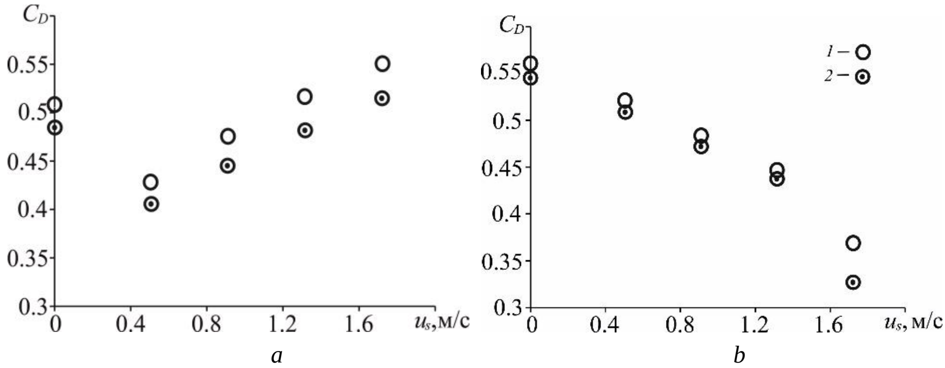



**Рис. 8.** Расчетные зависимости коэффициента сопротивления твердой сферы ($D$ = 20 мм) от скорости вдува при равномерном вдуве с ее поверхности (*a*) и вдувом через перфорированные отверстия (*b*): *1* – Re = 1 266; *2* – Re = 1 811

**Fig. 8.** Calculated drag coefficient of a solid sphere ($D$ = 20 mm) as a function of blowing velocity at (*a*) uniform injection from the sphere surface and (*b*) injection through perforated holes: Re = (*1*) 1266 and (*2*) 1811

При вдуве воздуха через перфорированную поверхность сферы наблюдается монотонное уменьшение $C_D$ с увеличением скорости вдува. Это объясняется отличием интеграла сил давления по поверхности твердой сферы в области торможения потока при вдуве воздуха и его отсутствии. Отличие вызвано влиянием струйного течения при вдуве воздуха через перфорированные отверстия.

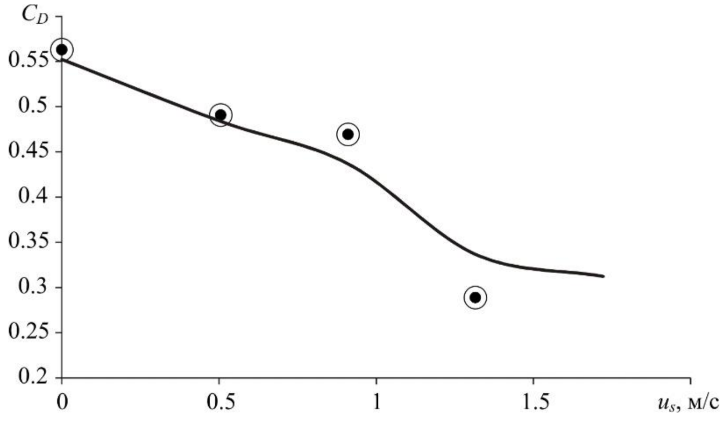



**Рис. 9.** Зависимость коэффициента сопротивления твердой сферы ($D$ = 20 мм) от скорости вдува при Re = 1 120 (точки – экспериментальные данные, сплошная линия – численный расчет)

**Fig. 9.** Drag coefficient as a function of blowing velocity for a solid sphere ($D$ = 20 mm) at Re = 1120 (the dotted line indicates experimental data; the solid line, the numerical calculation)

На рис. 9 приведены расчетная и экспериментальная зависимости коэффициента сопротивления $C_D$ твердой сферы диаметром 20 мм от скорости вдува через ее перфорированную поверхность. Из приведенных на рис. 9 данных следует их количественное и качественное соответствие.

## Заключение

– Предложены новая экспериментальная установка и методика исследования влияния истечения воздуха через перфорированную поверхность полой твердой сферы на коэффициент аэродинамического сопротивления в обдувающем потоке.

– В исследованном диапазоне чисел Рейнольдса обдувающего потока Re = 133 ÷ 1 811 экспериментально показано, что при истечении воздуха через перфорированную поверхность твердой сферы коэффициент аэродинамического сопротивления $C_D$ уменьшается.

– Численным решением системы уравнений Навье–Стокса получена картина обтекания твердой сферы при равномерном вдуве газа с ее поверхности и при вдуве газа через перфорированную поверхность сферы. Показано, что при равномерном вдуве наблюдается небольшое отклонение лини тока набегающего потока; при вдуве через перфорированную поверхность реализуется струйная картина обтекания, которая приводит к сильному возмущению течения в окрестности сферы.

– Проведены численные расчеты коэффициента сопротивления сферы при равномерном вдуве газа с ее поверхности и при вдуве через перфорированные отверстия. Результаты расчетов показали, что при равномерном вдуве по мере увеличения скорости вдува наблюдается монотонное снижение $C_D$, а при значении скорости вдува более 1.3 м/с – увеличение $C_D$ по сравнению с его значением при в отсутствие вдува. Этот эффект связан, по-видимому, с изменением соотношения составляющих коэффициента полного сопротивления (коэффициентов сопротивления давления и трения) при изменении скорости вдуваемого потока.

– Сравнение расчетных и экспериментальных зависимостей $C_D(u_s)$ при вдуве газа через перфорированную поверхность показало их количественное и качественное соответствие.

## Список источников

1. *Горохов М.М., Русяк И.Г., Тененев В.А.* Численное исследование обтекания осесимметричных тел при наличии вдува с поверхности // Механика жидкости и газа. 1996. № 4. С. 162–166.
2. *Dukowicz J.K.* An exact solution for the drag of a sphere in low Reynolds number flow with strong uniform suction or blowing // The Physics of Fluids. 1982. V. 25 (7). P. 1117–1118.
3. *Dukowicz J.K.* Drag of evaporating or condensing droplets in low Reynolds number flow // The Physics of Fluids. 1984. V. 27 (6). P. 1351–1358. doi: 10.1063/1.864776
4. *Jayawickrama T.R., Haugen N.E.L., Babler M.U. et al.* The effect of Stefan flow on the drag coefficient of spherical particles in a gas flow // International Journal of Multiphase Flow. 2019. V. 117. P. 130–137. doi: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2019.04.022
5. *Chuchottaworn P., Fujinami A., Asano K.* Numerical analysis of the effect of mass injection or suction on drag coefficients of a sphere // Journal of Chemical Engineering of Japan. 1983. V. 16 (1). P. 18–24. doi: 10.1252/jcej.16.18
6. *Kurose R., Makino H., Komori S. et al.* Effects of outflow from the surface of a sphere on drag, shear lift, and scalar diffusion // The Physics of Fluids. 2003. V. 15 (8). P. 2338–2351. doi: 10.1063/1.1591770
7. *Watanabe M., Yahagi J.* Effects of nonuniform outflow and buoyancy on drag coefficient acting on a spherical particle // Journal of Flow Control, Measurement & Visualization. 2017. V. 5 (4). P. 99–110. doi: 10.4236/jfcmv.2017.54008

8. *Никольский Ю.В., Хлопков Ю.И.* Теоретическое и экспериментальное исследование обтекания сферы сверхзвуковым потоком малой плотности с учетом конденсации и испарения с поверхности // Ученые записки ЦАГИ. 1989. Т. 20, № 5. С. 118–122.
9. *Коваль М.А., Стулов В.П., Швец А.И.* Экспериментальное исследование сверхзвукового обтекания затупленных тел с сильным распределенным вдувом // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1978. № 3. С. 84–95.
10. *Архипов В.А., Басалаев С.А., Перфильева К.Г., Поленчук С.Н., Усанина А.С.* Методы определения коэффициента сопротивления при вдуве газа с поверхности сферической частицы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 76. С. 56–69. doi: 10.17223/19988621/76/5
11. *Архипов В.А., Басалаев С.А., Гольдин В.Д, Перфильева К.Г., Усанина А.С.* Метод исследования влияния вдува газа с поверхности твердой сферы на коэффициент сопротивления // Оптика атмосферы и океана. 2022. Т 35, № 6. С. 510–514. doi: 10.15372/AOO20220613
12. *Архипов В.А., Басалаев С.А., Перфильева К.Г., Поленчук С.Н., Усанина А.С.* Способ определения коэффициента аэродинамического сопротивления твердой сферы при вдуве газа с ее поверхности: заявка на патент РФ № 2022122234 от 16.08.2022. G01N 15/10.
13. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. М. : Наука, 1987. Ч. 1. 464 с.
14. *Wilcox D.C.* Turbulence modeling for CFD. California : DCW Industries, Inc., 1993. 460 p.
15. *Menter F.R., Kuntz M., Langtry R.* Ten years of industrial experience with the SST turbulence model // Proceedings of the 4th International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer. 2003. P. 625–632.
16. *Venkatakrishnan V.* On the accuracy of limiters and convergence to steady–state solutions // AIAA. 1993. Paper 93–0880. P. 1–11. doi: 10.2514/6.1993-880
17. *Toro E.F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. 3rd ed. London ; New York : Springer-Verlag, 2009. 748 p.

## References

1. Gorokhov M.M., Rusyak I.G., Tenenev V.A. (1996) Numerical investigation of the flow past axisymmetric bodies with surface injection. *Fluid Dynamics*. 31(4). pp. 614–617. doi: 10.1007/BF02031770
2. Dukowicz J.K. (1982) An exact solution for the drag of a sphere in low Reynolds number flow with strong uniform suction or blowing. *Physics of Fluids*. 25(7). pp. 1117–1118. doi: 10.1063/1.863875
3. Dukowicz J.K. (1984) Drag of evaporating or condensing droplets in low Reynolds number flow. *The Physics of Fluids*. 27(6). pp. 1351–1358. doi: 10.1063/1.864776
4. Jayawickrama T.R., Haugen N.E.L., Babler M.U., Chishty M.A., Umeki K. (2019) The effect of Stefan flow on the drag coefficient of spherical particles in a gas flow. *International Journal of Multiphase Flow*. 117. pp. 130–137. doi: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2019.04.022
5. Chuchottaworn P., Fujinami A., Asano K. (1983) Numerical analysis of the effect of mass injection or suction on drag coefficients of a sphere. *Journal of Chemical Engineering of Japan*. 16(1). pp. 18–24. doi: 10.1252/jcej.16.18
6. Kurose R., Makino H., Komori S., Nakamuro M., Akamatsu F., Katsuki M. (2003) Effects of outflow from the surface of a sphere on drag, shear lift, and scalar diffusion. *Physics of Fluids*. 15(8). pp. 2338–2351. doi: 10.1063/1.1591770
7. Watanabe M., Yahagi J. (2017) Effects of nonuniform outflow and buoyancy on drag coefficient acting on a spherical particle. *Journal of Flow Control, Measurement & Visualization*. 5(4). pp. 99–110. doi: 10.4236/jfcmv.2017.54008
8. Nikolsky Yu.V., Khlopkov Yu.I. (1989) Teoreticheskoe i eksperimental'noe issledovanie sfery sverkhzvukovym potokom maloy plotnosti s uchetom kondensatsii i ispareniya s poverkhnosti [Theoretical and experimental study of a low-density supersonic flow around a sphere

taking into account condensation and evaporation from the surface]. *Uchenye zapiski TSAGI – TsAGI Science Journal*. 20(5). pp. 118–122.
9. Koval M.A., Stulov V.P., Shvets A.I. (1978) Experimental investigation of supersonic flow past blunt bodies with strong distributed injection. *Fluid Dynamics*. 13(3). pp. 406–415. doi: 10.1007/s10891-016-1426-4
10. Arkhipov V.A., Basalev S.A., Perfilieva K.G., Polenchuk S.N., Usanina A.S. (2022) Metody opredeleniya koeffitsienta soprotivleniya pri vduve gaza s poverkhnosti sfericheskoy chastitsy [Methods for determining the drag coefficient at gas injection from the surface of spherical particle]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 56–69. doi: 10.17223/19988621/76/5
11. Arkhipov V.A., Basalev S.A., Gol'din V.D, Perfilieva K.G., Usanina A.S. (2022) Metod issledovaniya vduva gaza s poverkhnosti tverdoy sfery na koeffitsient soprotivleniya [A method for studying the effect of gas injection from the surface of a solid sphere on the drag coefficient]. *Optika atmosfery i okeana*. 35(6). pp. 510–514. doi: 10.15372/AOO20220613
12. Arkhipov V.A., Basalev S.A., Perfilieva K.G., Polenchuk S.N., Usanina A.S. *Sposob opredeleniya koeffitsienta aerodinamicheskogo soprotivleniya tvyordoy sfery pri vduve gaza s eyo poverkhnosti* [A method for determining the drag coefficient of a solid sphere at gas injection from its surface]. Zayavka na patent RF № 2022122234.
13. Nigmatulin R.I. (1990) *Dynamics of Multiphase Medium. Volume 1*. New York: Hemisphere Publishing Corporation.
14. Wilcox D.C. (1993) *Turbulence Modeling for CFD*. California: DCW Industries, Inc.
15. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. (2003) Ten years of industrial experience with the SST turbulence model. *Proceedings of the 4th International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer*. pp. 625–632.
16. Venkatakrishnan V. (1993) On the accuracy of limiters and convergence to steady–state solutions. *AIAA*. Article 93–0880. pp. 1–11. doi: 10.2514/6.1993-880
17. Toro E.F. (2009) *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. London–New York: Springer–Verlag.

***Сведения об авторах*:**
**Архипов Владимир Афанасьевич** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом газовой динамики и физики взрыва Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: leva@niipmm.tsu.ru
**Басалаев Сергей Александрович** – кандидат физико-математических наук, инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: tarm@niipmm.tsu.ru
**Костюшин Кирилл Владимирович** – младший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: kostushink@niipmm.tsu.ru
**Перфильева Ксения Григорьевна** – кандидат физико-математических наук, инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: k.g.perfiljeva@yandex.ru
**Усанина Анна Сергеевна** – кандидат физико-математических наук, инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: usaninaanna@mail.ru

***Information about the authors*:**
**Arkhipov Vladimir A.** (Doctor of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: leva@niipmm.tsu.ru

**Basalaev Sergey A.** (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tarm@niipmm.tsu.ru
**Kostyushin Kirill V.** (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kostushink@niipmm.tsu.ru
**Perfil'eva Kseniya G.** (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: k.g.perfiljeva@yandex.ru
**Usanina Anna S.** (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: usaninaanna@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 24.11.2022; принята к публикации 03.02.2023*

*The article was submitted 24.11.2022; accepted for publication 03.02.2023*

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2023 Математика и механика № 81
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 533.6.621.4
doi: 10.17223/19988621/81/7

# К вопросу о принципе наименьшего действия при течении несжимаемой жидкости в осесимметричном канале переменного сечения

**Геннадий Иванович Афонин**

*Томский государственный университет, Томск, Россия, agi@niipmm.tsu.ru*

**Аннотация.** Предлагается формулировка принципа наименьшего действия применительно к стационарному движению невязкой, нетеплопроводной, несжимаемой жидкости в осесимметричном канале переменного сечения. В результате решения соответствующей этому принципу вариационной задачи обнаружена связь между составляющими вектора скорости, что позволило определить форму канала, в котором обеспечивается выполнение принципа наименьшего действия, и параметры потока как в самом канале, так и в начальной области истечения – области, которая формирует течение в некотором условном сечении входа в канал.

**Ключевые слова:** идеальная жидкость, элемент жидкости, уравнение Бернулли, принцип наименьшего действия, вариационная задача, условие оптимальности (уравнение Эйлера), закон сохранения энергии

**Благодарности:** Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России, проект № 0721-2020-0032.

**Для цитирования:** Афонин Г.И. К вопросу о принципе наименьшего действия при течении несжимаемой жидкости в осесимметричном канале переменного сечения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 81. С. 73–86. doi: 10.17223/19988621/81/7

Original article

# On the principle of least action in terms of incompressible fluid flow in a channel of variable cross-section

**Gennadiy I. Afonin**

*Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, agi@niipmm.tsu.ru*

**Abstract.** In this paper, the formulation of the principle of least action as applied to a steady flow of an inviscid incompressible non-heat-conducting fluid in an axisymmetric channel of variable cross-section is proposed. After solving the variational problem corresponding to the principle, the optimal condition correlating the velocity vector components is obtained. As a result, an efficient marching method is developed for designing the channel shape and calculating the flow parameters. An important element of the variational problem is the concept of a conditional section introduced within the moving flow, or in other words, the inlet section of the channel. In this section, specifying the function $y' = v / u$ allows one to determine the fluid flow parameters, which are necessary for calculating both in the initial outflow region (before entering the channel) and in the region downstream. The calculated results show two edge extrema and their effect on the flow pattern. In the initial outflow region, which is adjacent to a stationary region with constant pressure $p$ = 1, the edge extremum $u$ = 0 determines the vertical motion of the fluid. In the region of the channel outlet, the edge extremum $p$ = 0 induces a parallel flow in the outlet section.

**Keywords:** ideal fluid, fluid element, Bernoulli equation, principle of least action, variational problem, optimal condition (Euler equation), energy conservation law

**Acknowledgments:** The results were obtained in fulfilment of the Ministry of Education and Science task, project No. 0721-2020-0032.

**For citation:** Afonin, G.I. (2023) On the principle of least action in terms of incompressible fluid flow in a channel of variable cross-section. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 81. pp. 73–86. doi: 10.17223/19988621/81/7

Принципу наименьшего действия (ПНД) и его различным формам в механике посвящено значительное количество работ, подробный обзор большинства основных из них содержится в [1]. Наиболее простое изложение сути ПНД можно найти в [2]. ПНД наряду с законом сохранения энергии является важной составляющей энергетической теории механики. Сравнение ее с классической теорией, что сделано, например, в [3], показывает преимущества этой теории, одним из которых является то, что она рассматривает только реализуемые в природе движения. Важно заметить, что основной трудностью для использования ПНД является отсутствие в большинстве случаях возможности определения кинетической и потенциальной энергии, на что в [3] обращается особое внимание.

Ниже, основываясь на точке зрения Эйлера при изучении движения сплошной среды [4], вводится понятие кинетической и потенциальной энергии потока жидкости в канале переменного сечения (КПС). Это позволяет ввести действие $S$ в сечении канала как разницу кинетической и потенциальной энергии потока. Из рассмотрения стационарного течения массы жидкости в КПС вдоль оси симметрии следует, что минимальное суммарное значение действия

$$I = \int_{t_0}^{t_k} S(t)dt$$

от начального сечения в момент времени $t_0$ до сечения выхода из канала в момент времени $t_k$ реализуется, когда при движении $S$ в каждом сечении имеет минимальное значение.

Важно отметить, что такое рассмотрение возможно лишь тогда, когда кинетическая энергия элемента жидкости зависит только от скорости, а потенциальная – от его положения в пространстве [3]. То есть когда мы имеем дело с консервативными силами, как в данной модели движения жидкости.

Предлагаемый подход к построению действия $S$ позволяет в итоге сформулировать вариационную задачу о минимуме $S$. Полученное условие оптимальности совместно с уравнениями движения решает задачу определения параметров потока и формы КПС.

1. Рассмотрим стационарное движение идеальной несжимаемой жидкости в осесимметричном канале переменного сечения; $x$, $y$ – прямоугольные координаты в меридиональной плоскости, ось $x$ направлена по оси симметрии слева направо. Поток жидкости характеризуется плотностью $\rho_0$, давлением $p$ и вектором скорости $\mathbf{V} = (u,\ v)$.

Зададим в сечении $x$ с ординатой контура КПС $y_1$ кинетическую и потенциальную энергию потока жидкости, соответственно обозначив их как $T$ и $U$, следующим образом:

$$2T = 2\int_0^{y_1}\left(\rho_0 \frac{u^2+v^2}{2}\right)uy\,dy\ ,\ U = 2\int_0^{y_1} pu\,ydy\ . \tag{1}$$

По аналогии с принципом Гамильтона, который является одной из форм принципа наименьшего действия, введем понятие действия для потока жидкости $I$:

$$I = \int_{t_0}^{t_k}\left(T - U\right)dt\,. \tag{2}$$

Важно отметить, что принцип Гамильтона опирается на точку зрения Лагранжа при изучении движения сплошной среды.

Из (2) следует, что минимальное суммарное значение действия $I$ реализуется, когда при движении в каждом сечении $x$ имеет минимум значение $S = T - U$, т.е. согласно (1)

$$S = 2\int_0^{y_1}\left(u^2+v^2-p\right)uydy\,. \tag{3}$$

Именно $S$ в дальнейшем будем называть действием. В (3) $S$ представлено в безразмерном виде: давление $p$ отнесено к давлению заторможенной жидкости $p_0$, ордината $y$ – к ординате некоторого условного начального сечения канала, которое будем называть сечением входа КПС, продольная составляющая вектора скорости $u$ и поперечная скорость $v$ отнесены к скорости $u_0 = \sqrt{2\frac{p_0}{\rho_0}}$.

Таким образом, поиск минимума $S$ представляет собой вариационную задачу для функционала (3) с тремя неизвестными функциями одной переменной $u(y)$, $v(y)$ и $p(y)$.

2. Рассмотрим вариационную задачу для входного сечения КПС $y_1 = 1$. Воспользуемся выражением для закона сохранения энергии в безразмерном виде

$$u^2+v^2+p=1 \tag{4}$$

и упростим (3) путем исключения из него функции давления $p(y)$. В результате получим

$$S = 2\int_0^1\left[2(u^2+v^2)-1\right]uy\,dy\,. \tag{5}$$

Подынтегральная функция этого функционала имеет вид:

$$F(y,u,v) = \left[2(u^2+v^2)-1\right]uy\,.$$

Отсюда для функций $u(y)$ и $v(y)$ следуют следующие уравнения Эйлера [5]:

$$F_u(y,u,v) = 6u^2 + 2v^2 - 1 = 0\,,\ F_v(y,u,v) = u\,v = 0\,. \tag{6}$$

Из первого получим

$$u^2 = \frac{1}{6} + \frac{v^2}{3}\,. \tag{7}$$

Из второго уравнения Эйлера следует $v = 0$. Таким образом, минимум действия в начальном сечении реализуется при

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0.4082 \text{ и } v = 0. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (5), получим

$$\min S = -\frac{2}{3\sqrt{6}} \approx -0.27217\,. \tag{9}$$

Коэффициент расхода

$$\mu = 2\int_0^1 uy\,dy \tag{10}$$

для КПС с параметрами в начальном сечении согласно (8)

$$\mu = u_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0.4082\,. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь для произвольного сечения с ординатой $y_1$ вариационную задачу нахождения минимума функционала (5) при

$$\mu = 2\int_0^{y_1} uydy \tag{12}$$

Вспомогательный функционал имеет для этой задачи следующий вид:

$$\tilde{S} = 2\int_0^{y_1}\left(2(u^2+v^2)-1-\lambda\right)uydy\,. \tag{13}$$

Здесь $\lambda = const$ – множитель Лагранжа. Уравнения Эйлера для функционала $S$ имеют вид:

$$F_u(y,u,v) = 6u^2 + 2v^2 - 1 - \lambda = 0\,,\ F_v(y,u,v) = uv = 0\,. \tag{14}$$

Отсюда следует

$$u^2 = \frac{1+\lambda}{6} - \frac{v^2}{3}\,,\ v = 0. \tag{15}$$

Соотношения (8) и (15) показывают, что наименьшее действие при движении жидкости реализуется в канале с бесконечно медленным изменением площади поперечного сечения.

Таким образом, минимум действия в произвольном сечении канала реализуется при

$$u = \sqrt{\frac{1+\lambda}{6}}\,,\ v = 0. \tag{16}$$

Из (16) следует $0 \le \lambda \le 5$, и при этом скорость изменяется в диапазоне $u_0 \le u \le 1$. Важно отметить, результаты (16) справедливы и в канале вверх по потоку как следствие решения в этой области вариационной задачи для того же функционала (13). Эту область назовем начальной областью истечения. Здесь из (16) следует $-1 \le \lambda \le 0$ и, соответственно, для скорости имеем $0 \le u \le u_0$.

Соотношение (12) позволяет определить ординату предельного контура, контура с бесконечно медленным изменением площади поперечного сечения $y_1 = \sqrt{u_0/u}$. Подставляя (16) в (13), получим минимальное значение $S$ в сечении канала для заданного коэффициента расхода (11):

$$S = -\frac{4}{\sqrt{6}}u^2. \tag{17}$$

Полученные соотношения (8)–(11) определяют характеристики контура на входе в канал при задании $\lambda = 0$. Соотношение (16) позволяет определить форму канала как функцию скорости $u$ при изменении $\lambda$ в диапазоне $-1 \le \lambda \le 5$.

Рассматривая (16) для различных $\lambda$ в сечении $y_1 = 1$, тем самым задавая коэффициент расхода $\mu$, можно построить КПС для любого $\mu$ из промежутка $0 < \mu < 1$.

На рисунке 1 представлены ординаты контура канала $y_1$ для $\lambda = 0$ ($\mu = \sqrt{1/6}$) – кривая *1*, $\lambda = 1$ ($\mu = \sqrt{1/3}$) – кривая *2*, $\lambda = 2$ ($\mu = \sqrt{1/2}$) – кривая *3*. Для иллюстрации минимума функционала (13) представлены функции $S = \left(2u^2 - 1 - \lambda\right)u$ для этих же $\lambda$. Кривая *4* показывает минимальные значения (13) ($S_m = -4\,u^3$) в сечении $y_1 = 1$, кривая *5* представляет ординаты выходного сечения $y_в$ при изменении коэффициент расхода $y_b = \sqrt{\mu}$. Пунктирные линии показывают сечения входа в канал для соответствующих $\lambda$.

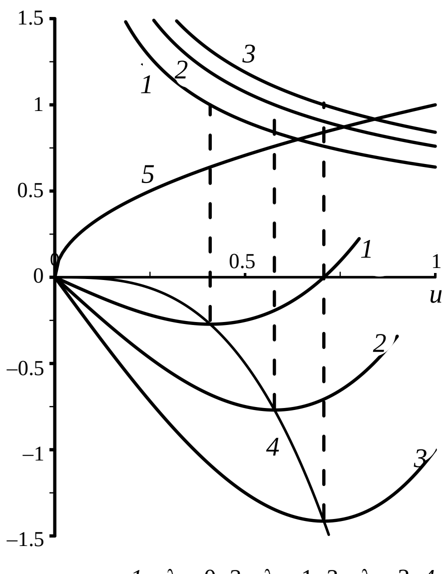



**Рис. 1.** Ординаты контура канала $y_1$: *1* – $\lambda = 0$, *2* – $\lambda = 1$, *3* – $\lambda = 3$; *4* – минимальные значения (13) ($\bar{S}_m = -4\,u^3$) в сечении $y_1 = 1$; *5* – ординаты выходного сечения каналов $y_b = \sqrt{\mu}$

**Fig. 1.** Channel contour ordinates $y_1$: $\lambda$ = (*1*) 0, (*2*) 1, and (*3*) 3; (*4*) minimum values of (13) ($\bar{S}_m = -4\,u^3$) in the cross-section $y_1 = 1$; (*5*) output section ordinates $y_b = \sqrt{\mu}$

3. Рассмотрим эту же вариационную задачу о минимуме функционала (13) при условии (12), но будем считать $v(y)$ известной функцией в сечении входа в канал.

В произвольном сечении имеем соотношение (15) для скорости $u$, которое с учетом того, что на оси симметрии $v = 0$, а $u = u_0$, запишем в виде:

$$u^2 = u_0^2 - \frac{v^2}{3}. \tag{18}$$

В начальном сечении $y_1 = 1$, считая известным наклон контура $y_1'$, зададим функцию $v(y)$ в виде:

$$v = y_1' y u. \tag{19}$$

Скорость $u$ согласно (18) будет иметь вид:

$$u = \frac{u_0\sqrt{3}}{\sqrt{3+(y')^2}}. \tag{20}$$

При (19) продольная скорость $u$ согласно (20) монотонно падает. Поскольку на стенке контура модуль скорости ограничен условием $p_1 = 0$, при котором $u_1^2 + \upsilon_1^2 = 1$, то отсюда следует максимально возможное значение $u_o$ и, соответственно, $\lambda$:

$$u_{om} = \sqrt{\frac{3+(y_1')^2}{3(1+(y_1')^2)}}, \qquad \lambda_m = \frac{5+(y_1')^2}{1+(y_1')^2}. \tag{21}$$

Таким образом, при заданном $y_1'$ возможны различные течения $\lambda$ ($-1 < \lambda < \lambda_m$) и, соответственно, скорости $u_o$ ($0 < u_o < u_{om}$). Предельное значение скорости $u_{om}$ при $y_1' \to \infty$ $u_{om} = 1/\sqrt{3}$ $(u_{om} \approx 0.57735)$. Эта скорость достигается при $\lambda_m = 1$.

Подставляя (20) в (13) и проведя интегрирование, получим

$$S = \frac{2\sqrt{3}\,u_0}{\sqrt{3}+\sqrt{3+(y_1')^2}}\left(6u_0^2\frac{\sqrt{3(3+(y_1')^2)}-2}{\sqrt{3(3+(y_1')^2)}} - 1 - \lambda\right). \tag{22}$$

Отсюда минимум $S$ реализуется при

$$u_0 = \sqrt{\frac{(1+\lambda)\sqrt{3(3+(y_1')^2)}}{18\left(\sqrt{3(3+(y_1')^2)}-2\right)}}. \tag{23}$$

Подставляя (23) в (22) получим

$$S = -\frac{4\sqrt{3}}{3}\frac{(1+\lambda)\,u_0}{\sqrt{3}+\sqrt{3+(y_1')^2}}.$$

В результате интегрирования (10) для коэффициента расхода в начальном сечении следует зависимость

$$\mu = \frac{2\sqrt{3}\,u_0}{\sqrt{3}+\sqrt{3+(y_1')^2}}. \tag{24}$$

Для $\lambda = 0$ на рис. 2 в сечении входа КПС сплошными линиями показаны зависимости от угла наклона $y_1'$ $S$, $u_0$, $\mu$ и ординаты канала $y_b = \mu^{0.5}$. Здесь же для иллюстрации неравномерности потока показаны давление на оси $p_0$, давление на стенке канала $p_1$, поперечная составляющая скорости на стенке $v_1$ и изменения $\mu$, $y_b$. Видно, что если для контура с наклоном $y_1' = -0.5$ коэффициент расхода $\mu$, $y_b$ по отношению к $\mu_0$, $y_{0b}$ для канала с наклоном $y_1' = 0$ уменьшается незначительно, на величину $\approx 2\%$, а $y_b$ на $\approx 1\%$, то для канала с наклоном $y_1' = -1$ эти величины изменяются значительно: на 7.2 и 3.7% соответственно.

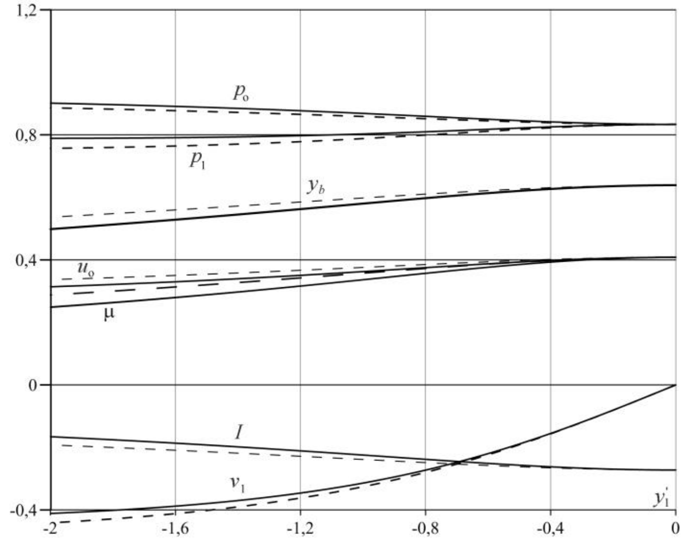



**Рис. 2.** Параметры потока и ординаты $y_b$ в сечении входа в канал
**Fig. 2.** Flow parameters and ordinates $y_b$ in the inlet section of a channel

Для определения параметров течения в КПС при известных и удовлетворяющих принципу наименьшего действия $S$ параметрах во входном сечении система уравнений включает соотношение (18) для продольной составляющей скорости $u$, уравнение неразрывности в виде:

$$u\,y' - v = 0\,, \tag{25}$$

и уравнение движения для определения скорости $v$

$$u\,v' + 0.5 p_y = 0\,. \tag{26}$$

Здесь $v' = v_x + \frac{v}{u} v_y$ – полная производная скорости $v$, $p = 1 - u^2 - v^2$.

Для удобства уравнение (26), используя соотношение (18), можно преобразовать к виду:

$$v' = -2u_y\,. \tag{27}$$

В сечении входа в КПС согласно (18) имеем

$$u_y = -\frac{y_1' y' u}{3 + (y')^2}\,.$$

Численная реализация со вторым порядком точности данных уравнений состоит из двух этапов. Сначала осуществлялся расчет вниз по потоку от сечения входа в канал, где параметры задаются соотношениями (19), (20) и (22), а коэффициент расхода μ находится из (24). Далее с помощью (25) в следующем сечении находятся положения линий тока и, используя (27) определяются значения скорости $v$. Для определения скорости $u$ строится итерационная процедура, с помощью которой находится значение $u_0$, удовлетворяющее условию выполнения полученного в сечении входа в канал расхода.

На втором этапе аналогично ведется расчет течения жидкости вверх по потоку. Последовательность выполнения этапов не имеет значения. Следует заметить, что при решении данной вариационной задачи имеют место два краевых экстремума – вниз по потоку $p = 0$, а вверх по потоку $u = 0$.

На рис. 3 показаны линии тока для канала, у которого в сечении входа $y_1' = -1$. Пунктирные линии показывают границы начала области краевых экстремумов и наиболее близкую к оси симметрии линию тока, которая отделяет движущийся поток от неподвижной области постоянного давления. Из рисунка видим, что краевой экстремум $u = 0$ определяет вертикальное прямолинейное движение потока конечной ширины. Следует отметить, что здесь и ниже все расчеты проводились для $\lambda = 0$.

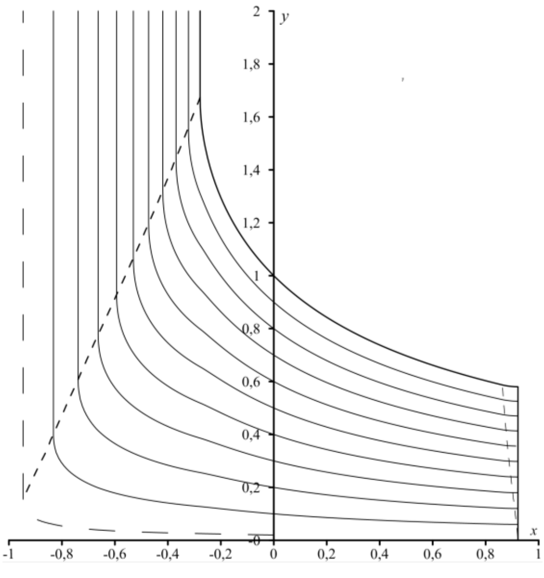



**Рис. 3.** Линии тока для канала $y_1' = -1$

**Fig. 3.** Streamlines in a channel with $y_1' = -1$

Важно отметить: при достижении первого краевого экстремума, когда $\psi_N = \mu$,

$$\psi_i = \frac{2\sqrt{3}\,u_0 y_i^2}{\sqrt{3} + \sqrt{3 + \left(y_1' y_i\right)^2}}.$$

Дальше решается вариационная задача для линии тока $i - 1$ при условии выполнения для нее коэффициента расхода, равного $\psi_{i-1}$, и так продолжается расчет до линии тока $i = 1$.

В области краевого экстремума $p$ = 0 происходит изменение угла наклона $y'$ линий тока до нуля, т.е. в выходном сечении формируется поток жидкости, движущийся параллельно оси симметрии с максимальной скоростью $u$ = 1. Видим, что наибольший по длине краевой экстремум реализуется на стенке канала.

На рис. 4 для некоторых выбранных линий тока представлены параметры течения – скорости $u$, $v$ и давление $p$. Вертикальные прямолинейные участки соответствуют краевому экстремуму $u$ = 0. На этих участках параметры течения определяются из соотношений

$$U = 0,\ v = \tilde{v}\tilde{y}/y,\ p = 1 - v^2. \qquad (28)$$

Здесь $\tilde{v}$ и $\tilde{y}$ – скорость и ордината в начальной точке краевого экстремума. Из (18) следует, что $\tilde{v} = u_0\sqrt{3}$. Выражение для определения скорости $v$ следует из условия сохранения расхода.

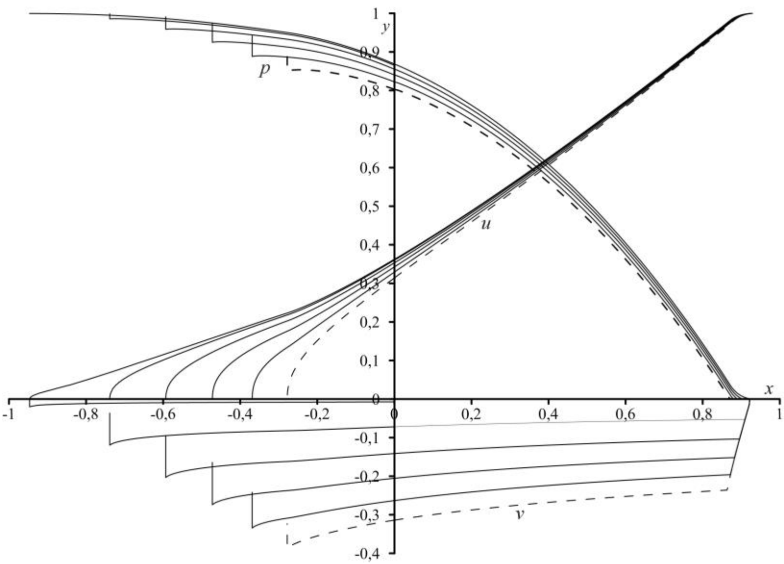



**Рис. 4.** Скорости $u$, $v$ и давление $p$ вдоль линий тока
**Fig. 4.** Velocities $u$, $v$ and pressure $p$ along the streamlines

Из рис. 4 видим, что наибольшее влияние краевой экстремум $p$ = 0 оказывает на поперечную составляющую скорости $v$, так на граничной линии тока она изменяется от −0.3 до нуля. В сечениях в зоне действия краевого экстремума параметры течения на линиях тока постоянны и определяются из соотношений

$$P = 0,\ v = -\sqrt{1.5\left(1 - u_0^2\right)},\ u = \sqrt{0.5\left(3u_0^2 - 1\right)}.$$

На рис. 5 для различных степеней расширения контура канала представлены скорости $u$, $v$. Верхняя пунктирная линия показывает изменение скорости $u$ вдоль контура КПС. Нижняя пунктирная линия показывает изменение $u$ в сечении первого краевого экстремума $u$ = 0. Ниже этой линии показаны изменения $u$ в сечениях вверх по потоку, где также часть сечения соответствует краевому экстремуму $u$ = 0.

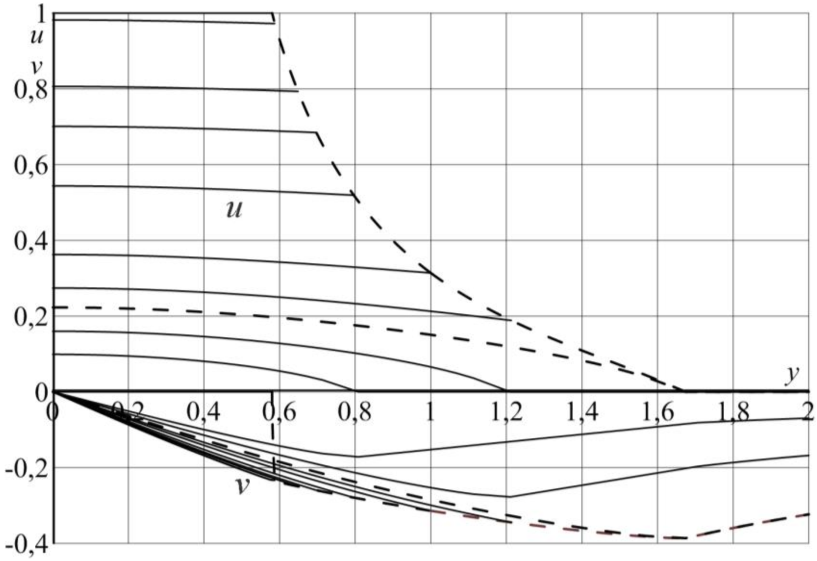



**Рис. 5.** Скорости *u*, *v* в различных сечениях канала
**Fig. 5.** Velocities *u*, *v* in different sections of the channel

Рассмотрим изменение скорости *v*. Пунктирные линии, так же как и для скорости *u*, показывают изменение скорости *v* вдоль контура КПС и изменение *v* в сечении первого краевого экстремума $u = 0$. Практически вертикальный участок кривой *v* вдоль контура – это зона действия краевого экстремума $p = 0$. Линии с изломом показывают изменение *v* в сечениях вверх по потоку, где также часть сечения соответствует краевому экстремуму $u = 0$, в начальной точке которого $v = -\sqrt{3}u_0$. После излома *v* возрастает вдоль краевого экстремума и – как итог – в бесконечно удаленной точке согласно (28) достигает нуля.

На рис. 6 для тех же степеней расширения контура канала, что и на рис. 5, представлены зависимости давления *p*.

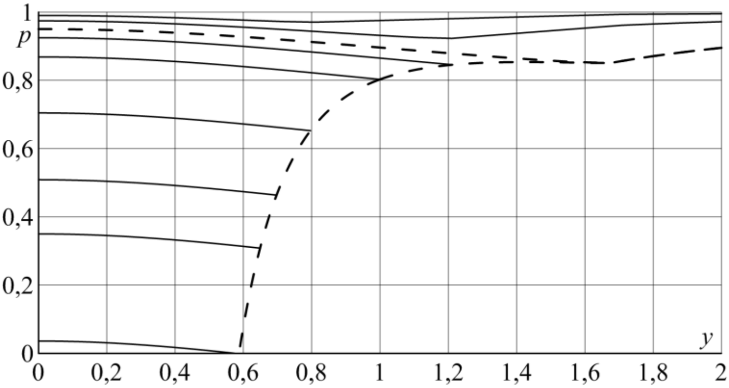



**Рис. 6.** Давления *p* в различных сечениях канала
**Fig. 6.** Pressure *p* in different sections of the channel

На рис. 7 представлены КПС для различных $y_1'$ в сечении входа в канал и соответствующие этим каналам области движущейся жидкости. Пунктирные линии отделяют области краевых экстремумов от области двухстороннего экстремума. На рисунке кривая *1* соответствует каналу, у которого $y_1' = -0.5$ ($\mu \approx 0.38525$, $y_b \approx 0.6207$), кривая *2* – $y_1' = -0.75$ ($\mu \approx 0.3620$, $y_b \approx 0.6017$), кривая *3* – $y_1' = -1$ ($\mu \approx 0.3365$, $y_b \approx 0.5801$). Видим, что когда $y_1' \to 0$, область краевого экстремума $p = 0$ уменьшается, в свою очередь, форма канала стремится к предельному КПС, каналу с бесконечно медленным изменением площади поперечного сечения по длине канала, движение жидкости в котором рассмотрено выше.

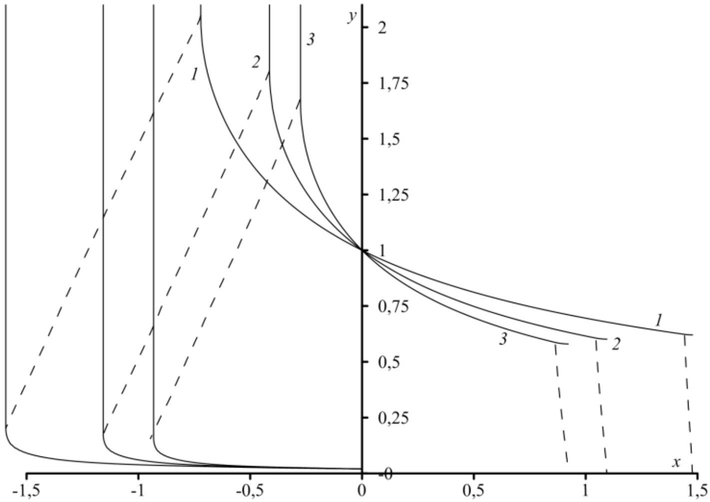



**Рис. 7.** Области движущейся жидкости: *1* – $y_1' = -0.5$, *2* – $y_1' = -0.75$, *3* – $y_1' = -1$

**Fig. 7.** Areas with a moving fluid: $y_1'$ = (*1*) –0.5, (*2*) –0.75, and (*3*) –1

Рисунок 7 показывает, что при проектировании канала, кроме задания формы канала, необходимо учитывать и длину по $x$ начальной области истечения жидкости, т.е. от начала области краевого экстремума $u = 0$ до сечения с ординатой $y_1 = 1$ – сечения входа в канал.

На рис. 8 для сравнения представлены две области истечения жидкости. В канале *1* наклон линий тока в сечении входа изменяется по линейному закону и, соответственно, скорость $v$ определяется соотношением (17). В канале *2* реализуется течение жидкости, в котором наклон линий тока в этом же сечении задается в виде квадратичной функции, в результате для скорости $v$ имеем соотношение

$$v = y_1' y^2 u\,. \tag{29}$$

Тогда для скорости $u$ в этом сечении согласно (20) получим уравнение, аналогичное (18):

$$u = \frac{\sqrt{3}\,u_0}{\sqrt{3 + \left(y_1' y^2\right)^2}}\,. \tag{30}$$

Подставляя (29) и (30) в (10), получим в результате интегрирования

$$S = \frac{\sqrt{3}\,u_0}{y_1'}\left((6u_0^2 - 1 - \lambda)\ln\left|\frac{y_1' + \sqrt{3 + (y_1')^2}}{\sqrt{3}}\right| - \frac{4y_1' u_0^2}{\sqrt{3 + (y_1')^2}}\right). \quad (31)$$

Минимум $S$ реализуется при

$$u_0 = \sqrt{\frac{(1+\lambda)\sqrt{3+(y_1')^2}\left(\ln\left|y_1' + \sqrt{3+(y_1')^2}\right| - \ln\sqrt{3}\right)}{6\left(3\sqrt{3+(y_1')^2}\left(\ln\left|y_1' + \sqrt{3+(y_1')^2}\right| - \ln\sqrt{3}\right) - 2y_1'\right)}}. \quad (32)$$

В результате интегрирования (10) в начальном сечении при (30) для коэффициента расхода μ получим

$$\mu = \frac{\sqrt{3}}{y_1'}u_0 \ln\left(\frac{y_1' + \sqrt{3+(y_1')^2}}{\sqrt{3}}\right). \quad (33)$$

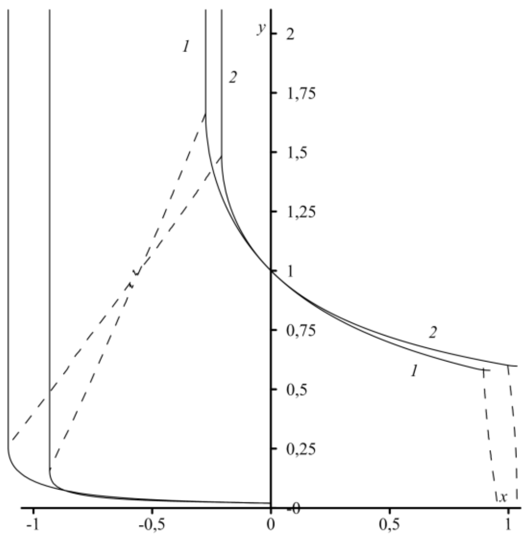



**Рис. 8.** Области движущейся жидкости для $y_1' = -0.5$ : *1* – $y' = y_1' y$, *2* – $y' = y_1' y^2$

**Fig. 8.** Areas with a moving fluid for $y_1' = -0.5$ : $y' =$ (*1*) $y_1' y$ and (*2*) $y_1' y^2$

На рис. 2 пунктирными линиями показаны зависимости (29), (31), (32), (33) и ордината выходного сечения $y_b = \sqrt{\mu}$ .

Для контура *2* на рис. 8 согласно (32) и (33) μ ≈ 0.3576, $y_b$ ≈ 0.5980.

Для иллюстрации степени различия течений жидкости с угловыми наклонами линий тока $y' = y_1' y$ и $y' = y_1' y^2$ на рис. 9 показаны в начальном сечении распределения скоростей $u$ и $v$, угловые наклоны линий тока $y'$ и разница угловых наклонов $\Delta = y_1' y(y-1)$. Пунктирные линии соответствуют квадратичному распределению $y'$.

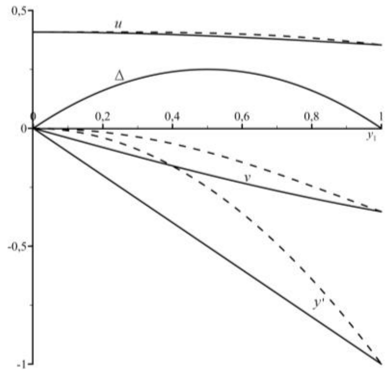



**Рис. 9.** Распределения в начальном сечении *u*, *v*, $y'$ и $\Delta = y_1' y(y-1)$ .

Пунктирные линии соответствуют $y' = y_1' y^2$

**Fig. 9.** Distributions of *u*, *v*, $y'$, and $\Delta = y_1' y(y-1)$ in the initial section.

The dotted lines correspond to $y' = y_1' y^2$

Из рис. 9 видим, что при существенном различии по скорости *v* и, соответственно, наклону $y'$ продольная скорость *u* практически не изменяется.

Проведенные расчеты показали закономерности движения в КПС, особенно в начальной его области, что имеет важное практическое значение при проектировании каналов с заданными характеристиками, например по длине, коэффициенту расхода и т.п.

## Заключение

Предложенная формулировка ПНД дала возможность создать эффективный маршевый метод построения формы канала при одновременном расчете параметров течения в нем. Важным элементом вариационной задачи, которая лежит в основе метода, является введенное внутри движущего потока понятие условного сечения, или сечения входа в КПС. Именно это позволило здесь при заданной функции $y' = v/u$ определить параметры течения жидкости, необходимые для проведения их расчета, как в начальной области истечения, так и в области ниже по потоку. Проведенные расчеты показали наличие двух краевых экстремумов и их влияние на качественную картину течения. В начальной области истечения (до входа в КПС), которая примыкает к неподвижной области постоянного давления *p* = 1, краевой экстремум *u* = 0 определяет вертикальное движение жидкости. В области выхода из канала краевой экстремум *p* = 0 формирует параллельный поток в выходном сечении канала.

### Список источников

1. *Полак Л.С.* Вариационные принципы механики. Их развитие и применение в физике. М. : ЛИБРОКОМ, 2010. 600 с.
2. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. М. : Едиториал УРСС, 2004. Т. 6: Электродинамика. 352 с.

3. *Пуанкаре А.* Наука и гипотеза. М. : ЛИБРОКОМ, 2010. 235 с.
4. *Седов А.И.* Механика сплошной среды. М. : Наука, 1976. Т. 1. 536 с.
5. *Гюнтер Н.М.* Курс вариационного исчисления. СПб. : Лань, 2009. 320 с.

## References

1. Polak L.S. (2010) *Variatsionnye printsipy mekhaniki. Ikh razvitie i primenenie v fizike* [Variational principles of mechanics. Their development and application in physics]. Moscow: LIBROKOM.
2. Feynman R., Leighton R., Sands M. (2010) *The Feynman Lectures on Physics. Volume II. Chapter 19.* New York: Basic Books, A Member of the Perseus Books Group.
3. Poincare A. (1905) *Science and Hypothesis*. London: Walter Scott Publishing.
4. Sedov A.I. (1976) *Mekhanika sploshnoy sredy. Tom 1* [Continuum Mechanics. Volume 1]. Moscow: Nauka.
5. Günther N.M. (2009) *Kurs variatsionnogo ischisleniya* [Course in the calculus of variations]. Saint Petersburg: Lan'.

***Сведения об авторе*:**
**Афонин Геннадий Иванович** – кандидат физико-математических наук, сотрудник отдела математической физики Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: agi@niipmm.tsu.ru

***Information about the author*:**
**Afonin Gennadiy I.** (Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: agi@niipmm.tsu.ru

*Статья поступила в редакцию 14.03.2022; принята к публикации 03.02.2023*

*The article was submitted 14.03.2022; accepted for publication 03.02.2023*

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2023 Математика и механика № 81
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 531.332.3
doi: 10.17223/19988621/81/8

# О влиянии на форму брахистохроны эффекта Магнуса

**Сергей Октябринович Гладков[1], Софья Борисовна Богданова[2]**

[1,2] *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия*
[1] *sglad51@mail.ru*
[2] *sonjaf@list.ru*

**Аннотация.** Строго аналитически показано, что учет собственного вращения тела, порождающего силу Магнуса, существенно влияет на форму брахистохроны. С помощью методов численного интегрирования приведены различные виды деформированных брахистохрон, обязанных учету этого эффекта.
**Ключевые слова:** эффект Магнуса, брахистохрона, уравнения движения

**Для цитирования:** Гладков С.О., Богданова С.Б. О влиянии на форму брахистохроны эффекта Магнуса // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 81. С. 87–96. doi: 10.17223/19988621/81/8

Original article

# On the brachistochrone shape under the Magnus effect

**Sergey O. Gladkov[1], Sof'ya B. Bogdanova[2]**

[1,2] *Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation*
[1] *sglad51@mail.ru*
[2] *sonjaf@list.ru*

**Abstract.** This paper studies the effect of the rotational motion of a body on the trajectory of its fastest descent into the gravity field. The body is considered as a ball rotating about its instantaneous axis, which is perpendicular to the pattern, with a variable angular frequency. The rotation of the ball creates a vortex flow that induces the highest pressure at the top of the ball and the least pressure at the bottom. Thus, the Magnus force (downforce), which is opposed to the reaction force of a trough, occurs. It provides an "anti-lifting" effect resulting in strong changes in the brachistochrone shape. Based on the fundamental principle of dynamics, a general vector equation of motion is obtained in the form of projections on a moving basis represented as unit vectors of the tangent and normal to the trajectory of the motion. A parametric solution to the equations describing the shape of the trough in Cartesian coordinates is obtained in the absence of dissipative forces. It follows from the resulting solution that the Magnus effect is most noticeable only for massive bodies of long radius. Using the numerical integration methods, various shapes of the deformed brachistochrone are presented as a result of the Magnus effect.
**Keywords:** Magnus effect, brachistochrone, equations of motion

**For citation:** Gladkov, S.O., Bogdanova, S.B. (2023) On the brachistochrone shape under the magnus effect. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 81. pp. 87–96. doi: 10.17223/19988621/81/8

## Введение

Вопрос, которому посвящена настоящая работа (как и предыдущие статьи [1–3]), относится к классическим проблемам механики, связанным с выяснением влияния на форму брахистохроны различных внешних физических факторов, приводящих к ее существенной деформации. Ранее было рассмотрено влияние на траекторию движения таких природных проявлений, как силы сухого и вязкого сопротивления, центробежные силы, связанные с вращением брахистохроны, и т.п.

В настоящем сообщении мы продолжим изучение влияния на ее форму результата воздействия внешних природных факторов и проанализируем возможное изменение желоба при учете собственного вращения тела, которое мы выберем в форме шара (или сплошного диска), катящегося под действием силы тяжести. Задачу будем решать без учета проскальзывания, но с учетом его собственного момента инерции, а также с учетом силы Магнуса, которая при этом проявляется вполне естественным образом.

Напомним, что суть этого эффекта заключается в дополнительном воздействии на тело силы, порождаемой собственным вращением. Действительно, если имеется катящийся шар, то он должен характеризоваться своей частотой вращения $\boldsymbol{\omega}$, что естественным образом приводит, во-первых, к появлению дополнительной энергии, которую можно записать как $E' = \dfrac{J\omega^2}{2}$, где момент инерции для шара $J = \dfrac{2}{5}ma^2$, $m$ – его масса, $a$ – радиус, во-вторых, дополнительной силы, действующей перпендикулярно траектории движения и представляющей из себя силу Магнуса $\mathbf{F}_M$. Она определяется в виде векторного произведения (см., напр.: [4–16]):

$$\mathbf{F}_M = km\left[\mathbf{V}\times\boldsymbol{\omega}\right], \tag{1}$$

где $k = \dfrac{\rho_c}{\rho}$, $\rho_c$ – плотность окружающего континуума, $\rho$ – плотность шара, $m$ – его масса, $\mathbf{V}$ – результирующая скорость, связанная с траекторией движения соотношением $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}}$, где конец вектора $\mathbf{r}(t)$ описывает интересующую нас траекторию движения.

Формулу (1) для дальнейшего использования удобно переписать в виде:

$$\mathbf{F}_M = km\left[\mathbf{V}\times\boldsymbol{\omega}\right] = km\omega\mathrm{V}\left[\boldsymbol{\tau}\times\mathbf{k}\right] = -km\omega\mathrm{V}\,\mathbf{n}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\tau}$ – единичный вектор касательной, направленный вдоль траектории движения, $\mathbf{k}$ – единичный вектор по направлению частоты вращения, т.е. перпендикулярный плоскости рис. 1, $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к траектории. Как видно из формулы (2), сила Магнуса направлена против силы реакции, действующей со стороны желоба на тело.

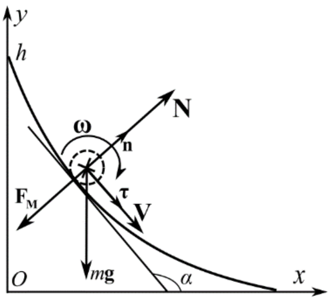



**Рис. 1.** Схематическое изображение постановки задачи
**Fig. 1.** Schematic representation of the problem formulation

Далее, поскольку сила Магнуса (1) линейна по плотности континуума, то с формальной точки зрения нам необходимо учесть и силу сопротивления Стокса, также линейную по плотности.

В свете вышесказанного мы можем теперь записать полную систему уравнений, позволяющих найти аналитическое решение задачи о возможном изменении формы брахистохроны с учетом эффекта Магнуса.

## 1. Основные уравнения.

Таким образом, с учетом формулы (2) имеем согласно второму закону Ньютона

$$m\dot{\mathbf{V}} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{fr} + \mathbf{F}_S - km\omega \mathrm{V}\mathbf{n}\,, \tag{3}$$

где $\mathbf{g}$ – ускорение силы тяжести, а его разложение по подвижному базису $\boldsymbol{\tau}$–$\mathbf{n}$ имеет вид:

$$\mathbf{g} = g\left(\boldsymbol{\tau}\sin\alpha + \mathbf{n}\cos\alpha\right), \tag{4}$$

$$\mathbf{F}_{fr} = \hat{\mu}\mathbf{N} = -\mu N\boldsymbol{\tau}\,, \tag{5}$$

здесь $\hat{\mu}$ – тензорный коэффициент трения, $\mu$ – общепринятое обозначение коэффициента трения, $N$ – сила реакции желоба.

Сила Стокса

$$\mathbf{F}_S = -6\pi\eta a \mathrm{V}\boldsymbol{\tau}\,. \tag{6}$$

Поскольку ускорение в базисе $\boldsymbol{\tau}$–$\mathbf{n}$ имеет вид:

$$\dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathrm{V}}\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathrm{V}^2}{R}\mathbf{n}\,, \tag{7}$$

то с учетом (4)–(7) векторное уравнение (3) становится таким:

$$\dot{\mathrm{V}}\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathrm{V}^2}{R}\mathbf{n} = g\left(\boldsymbol{\tau}\sin\alpha + \mathbf{n}\cos\alpha\right) + \frac{N}{m}\mathbf{n} - \frac{\mathrm{V}}{\tau}\boldsymbol{\tau} - k\omega\mathrm{V}\mathbf{n}\,, \tag{8}$$

где введено время релаксации

$$\frac{1}{\tau} = \frac{6\pi\eta a}{m}\,. \tag{9}$$

Проектируя уравнение (8) на базис $\boldsymbol{\tau}$–$\mathbf{n}$, мы автоматически приходим к двум следующим уравнениям:

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{V}} = g\sin\alpha - \dfrac{\mu N}{m} - \dfrac{\mathrm{V}}{\tau}, \\ N = m\left(\dfrac{\mathrm{V}^2}{R} - g\cos\alpha + k\omega \mathrm{V}\right). \end{cases} \tag{10}$$

Заметим, что верхнее уравнение в системе (10) представляет собой следствие закона сохранения полной суммарной мощности системы (см.: [17]), и была учтена формула (5). Нижнее уравнение представляет собой полную силу реакции желоба. В соответствии с алгоритмом, намеченным в работах [1, 2], полагаем, что

$$\frac{\mathrm{V}^2}{R} = -g\cos\alpha + k\omega \mathrm{V}. \tag{11}$$

Следовательно, силу реакции желоба с учетом формулы (11) можно вычислить, исходя из следующего общего выражения:

$$N = 2mg\left(\frac{k\omega \mathrm{V}}{g} - \cos\alpha\right). \tag{12}$$

Полная же система уравнений с учетом (10) и (11) становится такой:

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{V}} = g\sin\alpha - \dfrac{\mu N}{m} - \dfrac{\mathrm{V}}{\tau}, \\ \dfrac{\mathrm{V}^2}{R} = -g\cos\alpha + k\omega \mathrm{V}. \end{cases} \tag{13}$$

## 2. Анализ уравнений (13) при отсутствии диссипативных сил

Если пренебречь силами сопротивления и вспомнить, что $\mathrm{V} = R\dot{\alpha}$, то уравнения (10) существенно упростятся, и мы получим

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{V}} = g\sin\alpha, \\ \mathrm{V}\dot{\alpha} = -g\cos\alpha + k\omega \mathrm{V}. \end{cases} \tag{14}$$

Так как $\omega = \dfrac{\mathrm{V}}{a}$, где $a$ – радиус шара, то, разделив верхнее уравнение на нижнее и вводя новую функцию

$$p = \cos\alpha, \tag{15}$$

приходим к линейному уравнению

$$p' - \frac{p}{\mathrm{V}} = -\frac{k\mathrm{V}}{ag}. \tag{16}$$

где $p' = \dfrac{dp}{d\mathrm{V}}$.

Его решение имеет вид:

$$p = \cos\alpha = C_1\mathrm{V} - \frac{k\mathrm{V}^2}{ag}, \tag{17}$$

где $C_1$ – константа интегрирования.

Из (16) получим

$$\mathrm{V} = \frac{C_1 ag}{2k} - \sqrt{\left(\frac{C_1 ag}{2k}\right)^2 - \frac{ag\cos\alpha}{k}}\,. \tag{18}$$

В предельных случаях отсюда имеем, если $k \to 0$, то

$$\mathrm{V} \approx -\frac{\cos\alpha}{C_1} - \frac{k\cos^2\alpha}{C_1^3 ag}\,. \tag{19}$$

Напомним, что $\cos\alpha < 0$, поскольку $\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$. Если же $a \to 0$, то

$$\mathrm{V} \approx \sqrt{-\frac{ag\cos\alpha}{k}}\,. \tag{20}$$

Далее, в силу определений

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathrm{V}\cos\alpha, \\ \dot{y} = -\mathrm{V}\sin\alpha, \end{cases}$$

с учетом общей формулы (18) приходим к следующему параметрическому решению

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{k}\displaystyle\int_{\alpha_0}^{\alpha}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\lambda\cos\alpha}}\right)\cos\alpha\, d\alpha, \\ y = h - \dfrac{a}{k}\displaystyle\int_{\alpha_0}^{\alpha}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\lambda\cos\alpha}}\right)\sin\alpha\, d\alpha, \end{cases} \tag{21}$$

где $h$ – высота падения и введен безразмерный параметр

$$\lambda = \frac{4k}{C_1^2 ag}\,. \tag{22}$$

Учтено также, что

$$dt = -\frac{2}{C_1 g}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-\lambda\cos\alpha}}\,. \tag{23}$$

Заметим, что в предельном случае, когда радиус шара $a \to \infty$ $\lambda \to 0$ (т.е. шар не катится, а просто скользит по желобу), решение (21) вырождается в следующую систему:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{k}\displaystyle\int_{\alpha_0}^{\alpha}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\lambda\cos\alpha}}\right)\cos\alpha\, d\alpha \approx -\frac{a\lambda}{2k}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\cos^2\alpha\, d\alpha = \\ \quad = -\dfrac{1}{gC_1^2}\left(\alpha - \alpha_0 + \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha - \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha_0\right), \\ y = h - \dfrac{a}{k}\displaystyle\int_{\alpha_0}^{\alpha}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\lambda\cos\alpha}}\right)\sin\alpha\, d\alpha \approx \\ \quad = h + \dfrac{a\lambda}{2k}\displaystyle\int_{\alpha_0}^{\alpha}\cos\alpha\sin\alpha\, d\alpha = h - \frac{1}{gC_1^2}\left(\cos^2\alpha - \cos^2\alpha_0\right). \end{cases} \tag{24}$$

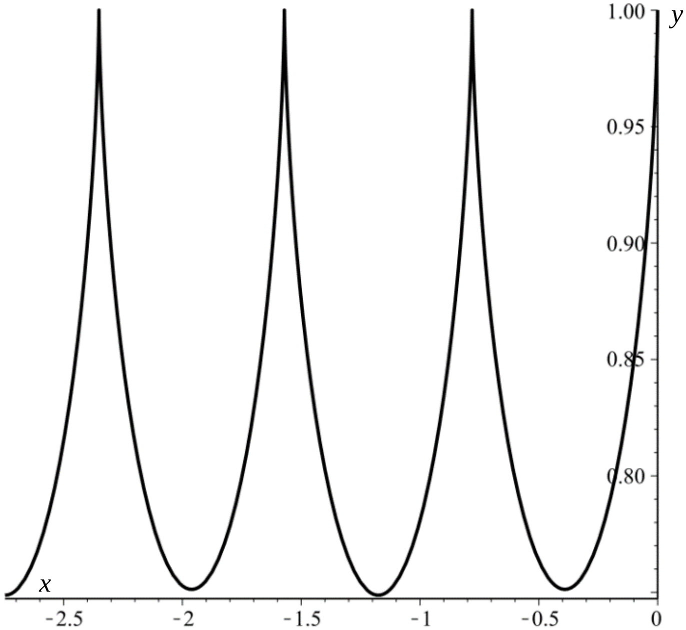



**Рис. 2.** Зависимость $y(x)$ для случая $\lambda = 0.01$ (большой радиус тела)
**Fig. 2.** Dependence $y(x)$ for $\lambda = 0.01$ (a long radius of the body)

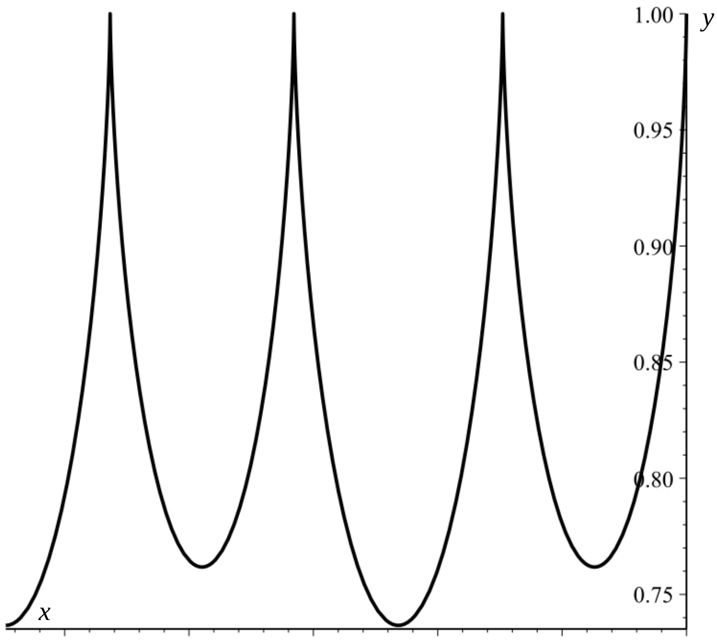



**Рис. 3.** Форма брахистохроны для случая $\lambda = 0.1$
**Fig. 3.** Brachistochrone shape at $\lambda = 0.1$

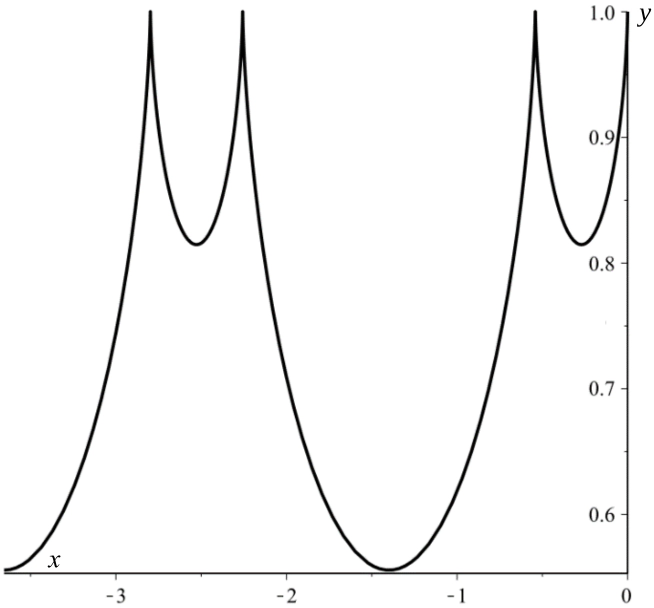



**Рис. 4.** Изменение формы брахистохроны при дальнейшем уменьшении радиуса тела для случая λ = 0.75

**Fig. 4.** Brachistochrone shape variation with a further decrease in the radius of the body at λ = 0.75

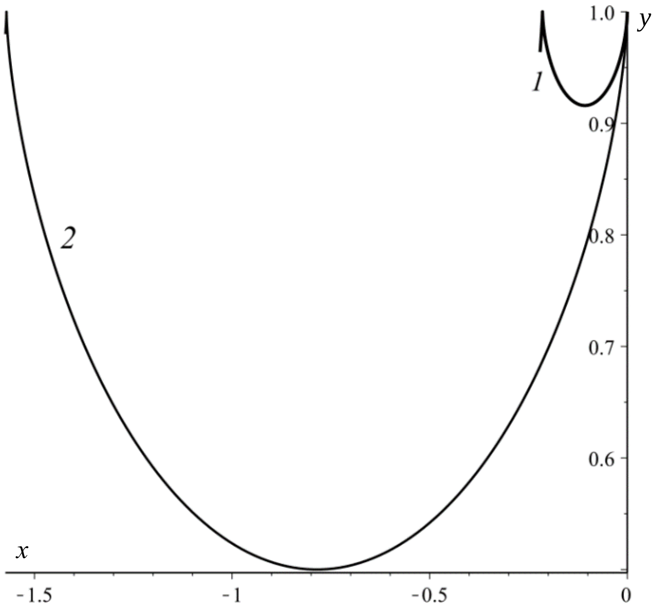



**Рис. 5.** Форма брахистохроны для сравнительно небольшого тела, λ = 5

**Fig. 5.** Brachistochrone shape for a relatively small body at λ = 5

Как видно из (24), мы пришли к уравнению брахистохроны (для нее $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$). Численное решение уравнений (21) для различных значений параметра λ, проиллюстрированое рис. 2–5, доказывает, что влияние эффекта Магнуса на форму брахистохроны существенно возрастает с уменьшением размера скатывающегося тела. Начальные условия выбраны в виде: $\alpha(0) = \alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, $V(0) = 0$.

## Заключение

В заключение работы выделим несколько основных моментов.

1. Получена общая система уравнений, учитывающая влияние на уравнения движения эффекта Магнуса.
2. Проведен анализ полученных уравнений и найдено их численное решение для различных значений параметра λ.
3. Дана графическая иллюстрация численного решения.

### Список источников


1. *Гладков С.О., Богданова С.Б.* К теории движения тел с переменной массой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 65. С. 83–91. doi: 10.17223/19988621/65/6
2. *Гладков С.О., Богданова С.Б.* К теории пространственной брахистохроны // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 68. С. 53–60. doi: 10.17223/19988621/68/5
3. *Gladkov S.O., Bogdanova S.B.* On a class of planar geometrical curves with constant reaction forces acting on particles moving along them // Journal of Mathematical Sciences. 2021. V. 257 (1). P. 27–30. doi: 10.1007/s10958-021-05466-4
4. *Magnus G.* Über eine abfallende Erscheinung bei rotierenden Körpern // Annalen der Physik. 1853. V. 164 (1). P. 1–29.
5. *Platou A.S.* Magnus Characteristics of Fined and Non Finned Projectiles // AIAA Journal. 1960. V. 3 (1). P. 83–90.
6. *Dwyer H., Sander B.R.* Magnus Forces Spinning Supersonic Cones. Part I: The Boundary Layer // AIAA Journal. 1976. V. 14 (11). P. 498–522.
7. *Sturek W.B., Dwyer H., Kayser L., Nietubicz C., Reklis R., Opalka K.* Computations of Magnus Effects for Yawed Spinning Body of Revolution // AIAA Journal. 1978. V. 16 (7). P. 687–692.
8. *Шкадова В.П.* Вращающийся цилиндр в потоке вязкой несжимаемой жидкости // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1982. Т. 14, вып. 1. С. 16–21.
9. *Ландсберг Г.С.* Элементарный учебник физики. М. : Наука, 1984. Т. 1: Механика. Теплота. Молекулярная физика. 606 с.
10. *Péchier M., Guillen P., Cayzac R.* Magnus Effect Over Finned Projectiles // AIAA Journal of Spacecraft and Rockets. 2001. V. 38 (4). P. 542–549.
11. *Бычков Н.М.* Ветродвигатель с эффектом Магнуса. 1. Результаты модельных исследований // Теплофизика и аэромеханика. 2004. Т. 11, вып. 4. С. 583–596.
12. *Бычков Н.М.* Ветродвигатель с эффектом Магнуса. 2. Характеристики вращающегося цилиндра // Теплофизика и аэромеханика. 2005. Т. 12, вып. 1. С. 159–175.
13. *Cayzac R., Carette E., Pascal D., Guillen P.* Magnus effect: Physical Origins and Numerical Prediction // Journal of Applied Mechanics. 2011. V. 78 (5). P. 051005–051012.
14. *Стрелков С.П.* Механика. М. : Наука, 1975. 560 с.

15. *Dupeux G., Le Goff A., Quéré D., Clanet C.* The spinning ball spiral // New Journal of Physics. 2010. № 12. Art. 093004. doi: 10.1088/1367-2630/12/9/093004
16. *Barkla H.M., Auchterloniet L.J.* The Magnus or Robins effect on rotating spheres // Journal of Fluid Mechanics. 1971. V. 47 (3). P. 437–447.
17. *Гладков С.О.* Об одном методическом подходе при выводе основных физических уравнений // Физическое образование в вузах. 2021. Т. 27, вып. 2. С. 5–12.

**References**

1. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2020) K teorii dvizheniya tel s peremennoy massoy [To the theory of motion bodies with a variable mass]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 65. pp. 83–91. doi: 10.17223/19988621/65/6
2. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2020) K teorii prostranstvennoy brakhistokhrony [To the theory of a space brachistochrone]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 68. pp. 53–60. doi: 10.17223/19988621/68/5
3. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2021) On a class of planar geometrical curves with constant reaction forces acting on particles moving along them. *Journal of Mathematical Sciences*. 257(1). pp. 27–30. doi: 10.1007/s10958-021-05466-4
4. Magnus G. (1853) Über eine abfallende Erscheinung bei rotierenden Körpern. *Annalen der Physik*. 164(1). pp. 1–29.
5. Platou A.S. (1960) Magnus characteristics of fined and non finned projectiles. *AIAA Journal*. 3(1). pp. 83–90. doi: 10.2514/3.2791
6. Dwyer H., Sander B.R. (1976) Magnus forces spinning supersonic cones. Part I: The boundary layer. *AIAA Journal*. 14(11). pp. 498–522. doi: 10.2514/3.61389
7. Sturek W.B., Dwyer H., Kayser L., Nietubicz C., Reklis R., Opalka K. (1978) Computations of Magnus effects for yawed spinning body of revolution. *AIAA Journal*. 16(7). pp. 687–692. doi: 10.2514/3.7566
8. Shkadova V.P. (1982) Vrashchayushchiysya tsilindr v potoke vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti [Rotating cylinder in a viscous incompressible fluid flow]. *Izvestiya AN SSSR. MZHG – Fluid Dynamics*. 17(1). pp. 12–16.
9. Landsberg G.S. (1984) *Elementarnyy uchebnik fiziki. Tom 1. Mekhanika. Teplota. Molekulyarnaya fizika* [Elementary textbook of physics. Volume 1. Mechanics. Heat. Molecular physics]. Moscow: Nauka.
10. Péchier M., Guillen P., Cayzac R. (2001) Magnus effect over finned projectiles. *AIAA Journal of Spacecraft and Rockets*. 38(4). pp. 542–549. doi: 10.2514/2.3714
11. Bychkov N.M. (2004) Vetrodvigatel' s effektom Magnusa. 1. Rezul'taty model'nykh issledovaniy [Magnus wind turbine. 1. Results of model testing]. *Teplofizika i aeromekhanika – Thermophysics and Aeromechanics*. 11(4). pp. 567–580.
12. Bychkov N.M. (2005) Vetrodvigatel' s effektom Magnusa. 2. Kharakteristiki vrashchayushchegosya tsilindra [Magnus wind turbine. 2. Characteristics of rotating cylinder]. *Teplofizika i aeromekhanika – Thermophysics and Aeromechanics*. 12(1). pp 159–175.
13. Cayzac R., Carette E., Pascal D., Guillen P. (2011) Magnus effect: physical origins and numerical prediction. *Journal of Applied Mechanics*. 78(5). pp. 051005–051012. doi: 10.1115/1.4004330
14. Strelkov S.P. (1975) *Mekhanika* [Mechanics]. Moscow: Nauka.
15. Dupeux G., Le Goff A., Quéré D., Clanet C. (2010) The spinning ball spiral. *New Journal of Physics*. 12. Article 093004. doi: 10.1088/1367-2630/12/9/093004
16. Barkla H.M., Auchterloniet L.J. (1971) The Magnus or Robins effect on rotating spheres. *Journal of Fluid Mechanics*. 47(3). pp. 437–447. doi: 10.1017/S0022112071001150

17. Gladkov S.O. (2021) Ob odnom metodicheskom podkhode pri vyvode osnovnykh fizicheskikh uravneniy [About one methodical approach when deducing basic physical equations]. *Fizicheskoe obrazovanie v VUZakh.* 27(2). pp. 5–12.

***Сведения об авторах*:**
**Гладков Сергей Октябринович** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры 311 «Прикладные программные средства и математические методы» Московского авиационного института (национального исследовательского университета), Москва, Россия. E-mail: sglad51@mail.ru
**Богданова Софья Борисовна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры 311 «Прикладные программные средства и математические методы» Московского авиационного института (национального исследовательского университета), Москва, Россия. E-mail: sonjaf@list.ru

***Information about the authors*:**
**Gladkov Sergey O.** (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation). E-mail: sglad51@mail.ru
**Bogdanova Sof'ya B.** (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation). E-mail: sonjaf@list.ru

*Статья поступила в редакцию 04.04.2022; принята к публикации 03.02.2023*

*The article was submitted 04.04.2022; accepted for publication 03.02.2023*

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2023 Математика и механика № 81
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 691.32
doi: 10.17223/19988621/81/9

# Поведение мелкозернистых фибробетонов при разных режимах механического нагружениия

**Дмитрий Александрович Ламзин[1], Михаил Евгеньевич Гонов[2], Анатолий Михайлович Брагов[3], Андрей Кириллович Ломунов[4]**

[1, 2, 3, 4] *Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,*
*Нижний Новгород, Россия*
[1] *lamzin.dmitry@yandex.ru*
[2] *gonov_mikhail@mech.unn.ru*
[3] *bragov@mech.unn.ru*
[4] *lomunov@mech.unn.ru*

**Аннотация.** Представлены экспериментальные результаты, описывающие процессы деформирования и энергопоглощения фибробетонов при сжатии. Образцы для статических и динамических испытаний изготавливались из бетонной смеси с добавлением стальных или полипропиленовых волокон волнистой формы, объемная доля которых составляла 1,5%. Проведена обработка данных испытаний и выполнен последующий статистический анализ результатов для реализованных режимов нагружения. Показано влияние скорости деформации на механическое поведение исследуемых материалов.
**Ключевые слова:** динамика, метод Кольского, фибробетон, скорость деформации, удельная энергия

**Благодарности:** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-79-00151, https://rscf.ru/project/21-79-00151/

**Для цитирования:** Ламзин Д.А., Гонов М.Е., Брагов А.М., Ломунов А.К. Поведение мелкозернистых фибробетонов при разных режимах механического нагружениия // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 81. С. 97–109. doi: 10.17223/19988621/81/9

Original article

# Response of fine-grained fiber-reinforced concrete under different mechanical loading conditions

**Dmitriy A. Lamzin[1], Mikhail E. Gonov[2], Anatoliy M. Bragov[3], Andrey K. Lomunov[4]**

[1, 2, 3, 4] *National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation*
[1] *lamzin.dmitry@yandex.ru*

[2] gonov_mikhail@mech.unn.ru
[3] bragov@mech.unn.ru
[4] lomunov@mech.unn.ru

**Abstract.** This paper presents an experimental study of the deformation and energy absorption of fiber-reinforced concretes under compression at different strain rates. Static load tests are carried out using the Zwick-Roell Z100 universal testing machine at a strain rate of $30\times10^{-6}$ $s^{-1}$. Dynamic load tests are carried out in the range of strain rates 200–800 $s^{-1}$ using the Kolsky method, which implies loading of the studied sample in a split Hopkinson pressure bar system. Specimens are made from a concrete mixture with the addition of wavy steel or polypropylene fibers with a volume fraction of 1.5 %. As a result of experiments and processing of the recorded strain pulses of measuring bars, the deformation diagrams and the corresponding diagrams of the specific energy absorption for the fiber-reinforced concretes under study are constructed. For all concretes being studied, the diagrams of deformation and energy absorption have similar trends and show an increase in the strength and energy before fracture initiation with an increase in the strain rate.
**Keywords:** dynamics, Kolsky method, fiber-reinforced concrete, strain rate, specific energy

**Acknowledgments:** This study was funded by the Russian Science Foundation (project No. 21-79-00151, https://rscf.ru/project/21-79-00151/).

**For citation:** Lamzin, D.A., Gonov, M.E., Bragov, A.M., Lomunov, A.K. (2023) Response of fine-grained fiber-reinforced concrete under different mechanical loading conditions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 81. pp. 97–109. doi: 10.17223/19988621/81/9

## Введение

Противодействие техногенным угрозам и терроризму, а также природным опасностям, создающим риски для жизни, здоровья людей и экономики государства, является одной из приоритетных задач, на решение которой должны быть направлены усилия ученых согласно Стратегии научно-технологического развития Российской Федерации. В процессе таких явлений возникают динамические воздействия на конструкции зданий или сооружений – удары и взрывы, характеризующиеся непрерывным изменением параметров и вызывающие высокие скорости деформации конструкционных материалов. Поэтому изучение фундаментальных закономерностей поведения строительных материалов при динамических режимах нагружения является актуальным направлением исследований в современной механике, которое позволит спрогнозировать последствия чрезвычайных ситуаций и уменьшить негативный эффект от них. Механические свойства материалов необходимы для идентификации математических моделей, а также разработки и проверки гипотез прочности, которые используются при численном расчете напряженно-деформированного состояния конструкций сооружений различного назначения на быстро изменяющиеся во времени воздействия.

Одним из перспективных строительных материалов является фибробетон [1]. Фибробетон – это бетон, армированный равномерно распределенными в его объеме волокнами (фиброй), имеющими сцепление с бетоном по своей поверхности. Фибробетон обладает повышенной трещиностойкостью, ударной прочностью, вязкостью разрушения, износостойкостью, морозостойкостью, сопротивлением кавитации, а также пониженной усадкой и ползучестью. Эти преимущества позволяют рекомендовать дисперсно-армированный бетон к применению в конструкциях, которые могут быть подвержены высокоскоростным воздействиям. Опубликованы некоторые результаты изучения механического поведения фибробетона при высоких скоростях деформации [2–7]. В данной работе было выполнено экспериментальное исследование, цель которого заключалась в анализе процессов деформирования и энергопоглощения при сжатии разных мелкозернистых фибробетонов, отличающихся друг от друга видом добавляемой фибры. Образцы для испытаний изготавливались из бетонной смеси с добавлением волокон волнистой формы из стальной проволоки или полипропилена, объемная доля которых составляла 1,5%.

## Методы исследования

При ударах и взрывах скорости деформации конструкционных материалов могут составлять $10^1$–$10^4$ 1/с. Для определения свойств разных материалов в этом диапазоне скоростей деформации применяется методика Кольского с использованием разрезного стержня Гопкинсона (РСГ) [8], которая к настоящему времени дополнена многочисленными модификациями, позволяющими исследовать динамическое поведение хрупких сред при различных типах нагружения [9–11]. Имеются публикации, которые посвящены анализу явлений, происходящих в системе РСГ [12–15]. Суть указанного метода состоит в следующем. В одном из стержней ударом бойка возбуждается одномерная упругая волна сжатия, которая распространяется по стержням со скоростью звука. При достижении образца эта волна ввиду разницы акустических жесткостей материалов стержня и образца, а также площадей их поперечных сечений расщепляется: часть ее отражается обратно волной растяжения, а часть проходит через образец во второй стержень волной сжатия. Образец при этом повреждается или полностью разрушается, в то время как стержни деформируются упруго. В ходе эксперимента производится регистрация импульсов деформации в поперечных сечениях мерных стержней, на основании которых строится диаграмма деформирования исследуемого материала. Деформация образца определяется по перемещениям торцов стержней, примыкающих к образцу, а напряжение – по усилиям, соответствующим этим перемещениям. После численного интегрирования зависимости напряжения от деформации определяется энергия, затраченная на деформирование единицы объема образца исследуемого материала. Варьируя амплитуду и длительность нагружающего импульса путем изменения скорости и длины ударника, можно получить разные режимы нагружения испытываемых образцов, которые будут соответствовать определенной степени повреждения и скорости деформации материала.

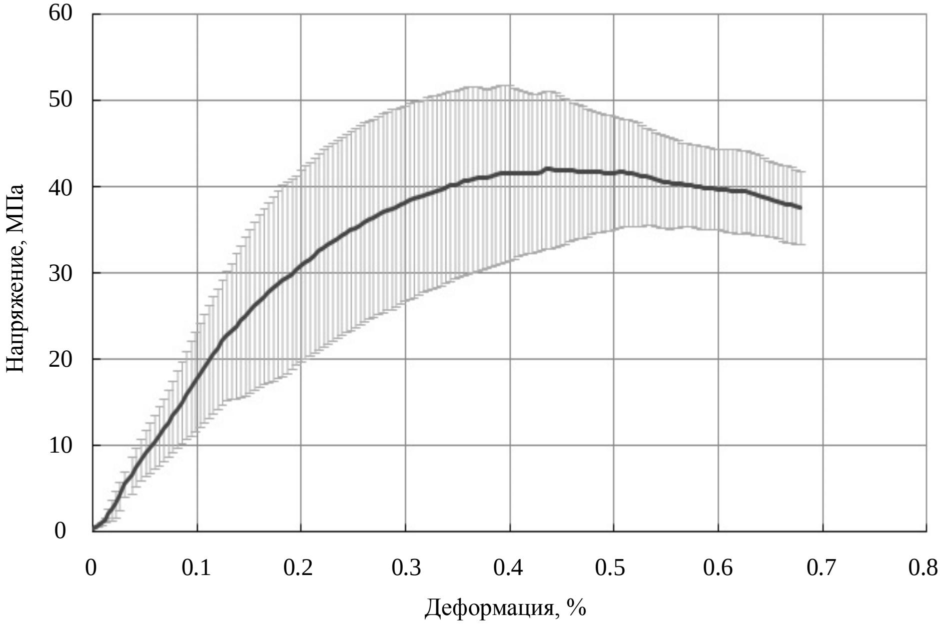
Используемая для динамических испытаний установка состояла из газовой пушки с системой управления, позволяющей разгонять ударники диаметром 20 мм, сменного комплекта мерных стержней диаметром 20 мм и измерительной аппаратуры. В экспериментах регистрировалась скорость ударника перед его воздействием на нагружающий стержень, а также импульсы деформации мерных стержней с помощью цифрового осциллографа. Построение диаграмм деформирования на основе полученных осциллограмм осуществлялось с использованием оригинальных программ обработки экспериментальных данных. Образцы материалов для динамических испытаний имели цилиндрическую форму с диаметром основания 20 мм и высотой 10 мм. Динамические эксперименты проводились в совокупности со статическими испытаниями при скорости деформации $30 \times 10^{-6}$ 1/с на универсальной испытательной машине Z100 Zwick-Roell [16, 17], чтобы оценить изменение механического поведения исследуемых фибробетонов при переходе от статического нагружения к динамическому. Образцы для статических испытаний также имели цилиндрическую форму с диаметром основания 20 мм, но их высота составляла 20 мм. Управление статическими экспериментами осуществлялось с использованием программного обеспечения testXpert II.

## Результаты исследования

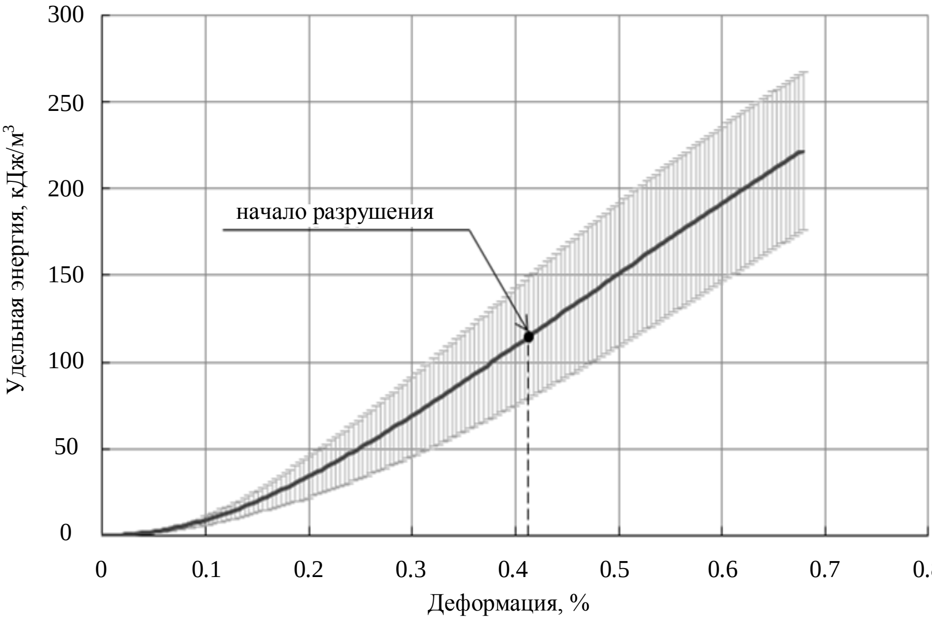
Используемые методы испытаний позволили проследить процессы деформирования и энергопоглощения исследуемых фибробетонов, а также оценить изменение механических характеристик с ростом скорости деформации. После проведения экспериментов, обработки зарегистрированных усилий и перемещений в условиях статики, а также импульсов деформации мерных стержней в условиях динамики были построены диаграммы деформирования и соответствующие им диаграммы удельного энергопоглощения испытанных образцов. При каждом режиме нагружения проводилось от трех до шести испытаний. Далее осуществлялось усреднение полученных данных для определенных режимов нагружения и выполнялась их статистическая обработка, а также определялись значения удельной энергии, затраченной до начала разрушения изучаемых фибробетонов.

Статические зависимости напряжения и удельной энергии от деформации бетона с добавлением полипропиленовой фибры приведены на рисю 1, а сталефибробетона – на рисю 2. Доверительные интервалы на графиках соответствуют 90%-ному уровню надежности. Динамические режимы нагружения были выбраны таким образом, чтобы увеличение скорости ударника позволило плавно подойти к разрушению образца. В результате максимальные величины скорости деформации, которые были получены в экспериментах, находились в интервале 200–800 1/с.

Зависимости изменения напряжения в процессе деформирования и удельной энергии до начала разрушения от деформации для бетона с добавлением полипропиленовой фибры при трех достигнутых скоростях деформации приведены на рис. 3, а для сталефибробетона при двух достигнутых скоростях деформации – на рис. 4. Доверительные интервалы на графиках, полученных в условиях динамического нагружения, соответствуют 90%-ному уровню надежности, так же как и на статических диаграммах. При самой маленькой скорости деформации диаграмма деформирования имеет ветвь разгрузки, характеризующуюся уменьшением деформации и напряжения после достижения максимума на графике. При больших скоростях деформации диаграммы деформирования имеют протяженный участок роста деформаций при уменьшении напряжений, соответствующий процессу разрушения материала. Диаграммы деформирования и энергопоглощения всех исследованных бетонов имеют схожий вид, а также показывают увеличение прочности и энергоемкости с ростом скорости деформации. Наибольшее увеличение прочности и энергоемкости происходит при добавлении в бетонную смесь стальной фибры.

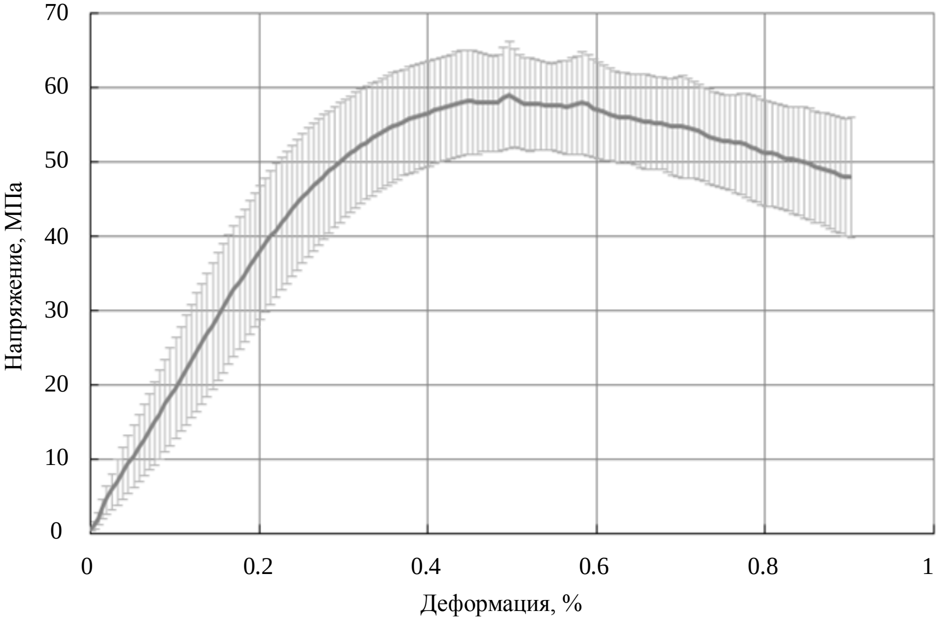



*a*

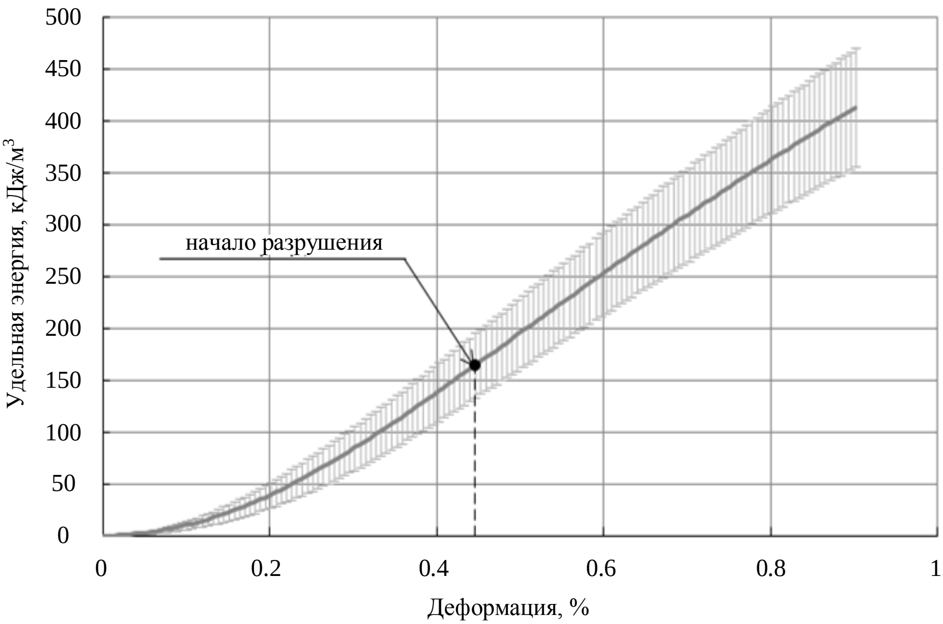



*b*

**Рис. 1.** Результаты статических испытаний бетона с добавлением полипропиленовой фибры: *a* – диаграмма деформирования, *b* – диаграмма энергопоглощения
**Fig. 1.** Static load test results for concrete with the addition of polypropylene fiber: (*a*) deformation and (*b*) energy absorption diagrams

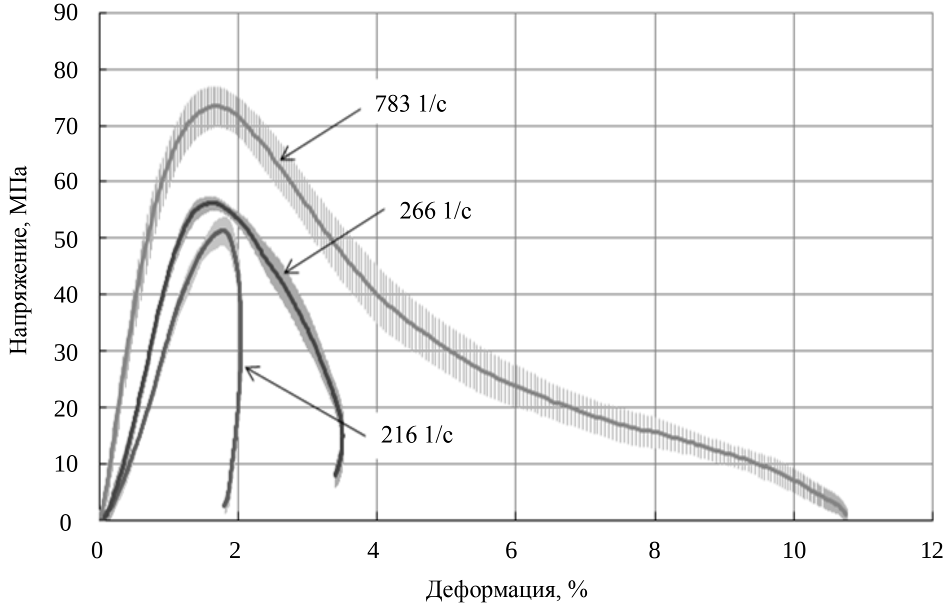



*a*

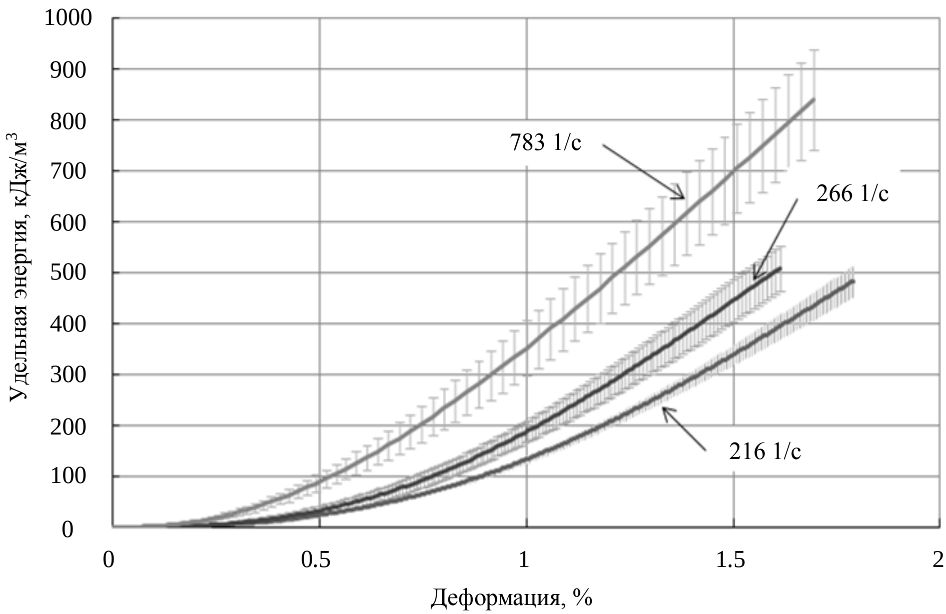



*b*

**Рис. 2.** Результаты статических испытаний сталефибробетона:
*a* – диаграмма деформирования, *b* – диаграмма энергопоглощения
**Fig. 2.** Static load test results for steel fiber reinforced concrete:
(*a*) deformation and (*b*) energy absorption diagrams



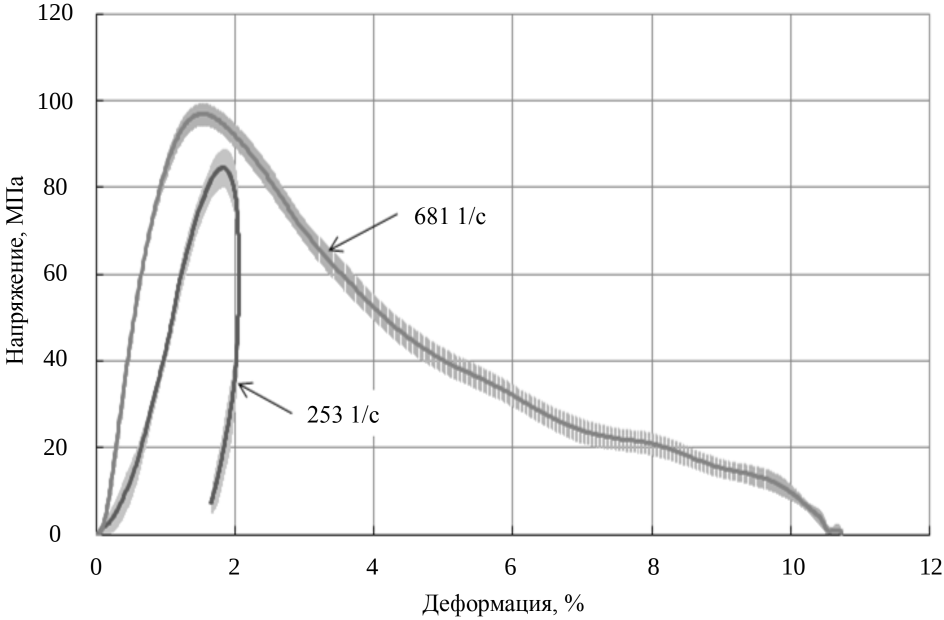

*a*



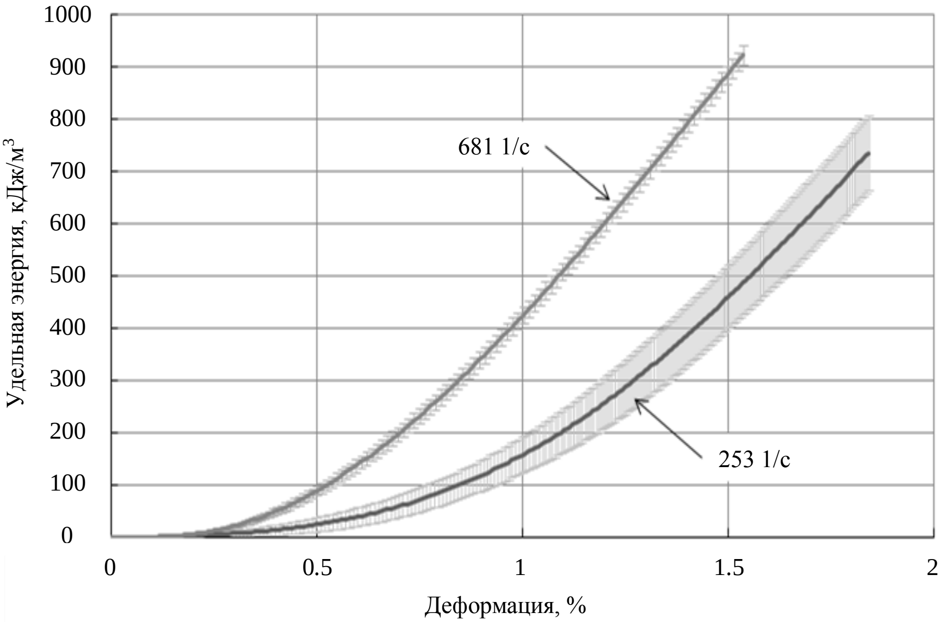

*b*

**Рис. 3.** Результаты динамических испытаний бетона с добавлением полипропиленовой фибры при трех скоростях деформации: *a* – диаграммы деформирования, *b* – диаграммы энергопоглощения

**Fig. 3.** Dynamic load test results for concrete with the addition of polypropylene fiber at three different strain rates: (*a*) deformation and (*b*) energy absorption diagrams




*a*




*b*

**Рис. 4.** Результаты динамических испытаний сталефибробетона при двух скоростях деформации: *a* – диаграммы деформирования, *b* – диаграммы энергопоглощения
**Fig. 4.** Dynamic load test results for steel fiber reinforced concrete at two different strain rates: (*a*) deformation and (*b*) energy absorption diagrams

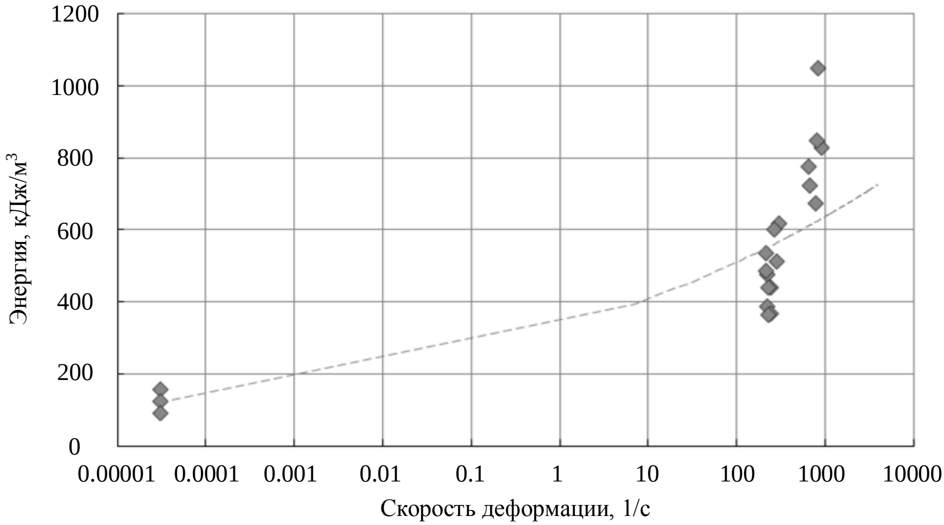



**Рис. 5.** Влияние скорости деформации на величину энергии, затраченной до начала разрушения бетона с добавлением полипропиленовой фибры
**Fig. 5.** Effect of the strain rate on the energy expended before the fracture initiation in concrete with the addition of polypropylene fiber

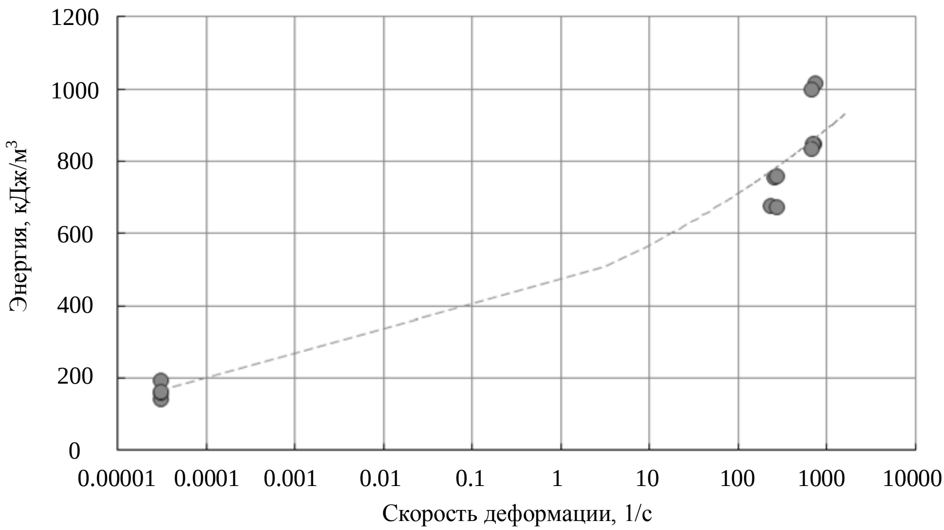



**Рис. 6.** Влияние скорости деформации на величину энергии, затраченной до начала разрушения сталефибробетона
**Fig. 6.** Effect of the strain rate on the energy expended before the fracture initiation in steel fiber reinforced concrete

Зависимость величины удельной энергии до начала разрушения от скорости деформации, полученная при испытаниях образцов бетона с добавлением полипропиленовой фибры, представлена на рис. 5, а полученная при испытаниях образцов сталефибробетона – на рис. 6. Видно, что энергия, необходимая для старта разрушения, растет с увеличением скорости деформации для обоих исследуемых фибробетонов. Это увеличение достигает восьми раз для бетона с добавлением полипропиленовой фибры и шести раз для бетона с добавлением стальной фибры.

## Заключение

Проведены статические и динамические испытания бетонов с добавлением стальной и полипропиленовой фибры. Выполнена обработка полученных экспериментальных данных, в результате которой построены диаграммы деформирования и энергопоглощения с доверительными интервалами при разных скоростях деформации. Отмечен схожий вид графиков деформирования и энергопоглощения исследованных бетонов. Показано влияние скорости деформации на прочность и энергоемкость материалов, характеризующееся их ростом. При достигнутых скоростях деформации в диапазоне 200–800 1/с значение энергии до начала разрушения увеличивалось в разы по сравнению со статической величиной при скорости деформации $30 \times 10^{-6}$ 1/с.

## Список источников


1. *Окольникова Г.Э., Царева А.Ю., Зуев С.С.* Опыт применения дисперсно-армированных бетонов в строительной индустрии России // Системные технологии. 2020. № 34. С. 48–52.
2. *Морозов В.И., Пухаренко Ю.В.* Эффективность применения фибробетона в конструкциях при динамических воздействиях // Вестник МГСУ. 2014. № 3. С. 189–196.
3. *Плевков В.С., Колупаева С.Н., Кудяков К.Л.* Расчетные диаграммы нелинейного деформирования базальтофибробетона при статических и кратковременных динамических воздействиях // Вестник ТГАСУ. 2016. № 3. С. 95–110.
4. *Thomas R.J., Sorensen A.D.* Review of strain rate effects for UHPC in tension // Construction and Building Materials. 2017. V. 153. P. 846–856. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2017.07.168
5. *Bragov A.M., Lomunov A.K., Lamzin D.A., Konstantinov A.Yu.* Change of strength of brittle building materials under high strain and stress rates // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. V. 40 (3). P. 284–291. doi: 10.1134/S1995080219030077
6. *dell'Isola F., Bragov A.M., Igumnov L.A., Abali B.E., Lomunov A.K., Lamzin D.A., Konstantinov A.Y.* Mechanical response change in fine grain concrete under high strain and stress rates // Advanced Structured Materials. 2019. V. 108. P. 71–80. doi: 10.1007/978-3-030-13307-8_5
7. *Bragov A.M., Gonov M.E., Lamzin D.A., Lomunov A.K., Modin I.A.* Response of fine-grained fiber-reinforced concretes under dynamic compression // Materials Physics and Mechanics. 2021. V. 47. P. 962–967. doi: 10.18149/MPM.4762021_14
8. *Kolsky H.* An investigation of the mechanical properties of materials at very high rates of loading // Proceedings of the Physical Society of London. Section B. 1949. V. 62. P. 676–704. doi: 10.1088/0370-1301/62/11/302
9. *Zhang Q.B., Zhao J.* A review of dynamic experimental techniques and mechanical behaviour of rock materials // Rock Mechanics and Rock Engineering. 2014. V. 47. P. 1411–1478. doi: 10.1007/s00603-013-0463-y
10. *Xia K., Yao W.* Dynamic rock tests using split Hopkinson (Kolsky) bar system - a review // Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering. 2015. V. 7. P. 27–59. doi: 10.1016/j.jrmge.2014.07.008
11. *Bragov A., Igumnov L., Lomunov A., Konstantinov A., Lamzin D., Kruszka L.* Use of the Kolsky method for dynamic tests of brittle media // MATEC Web of Conferences. 2018. V. 174. Art. 02022. doi: 10.1051/matecconf/201817402022

12. *Lu Y.B., Li Q.M.* About the dynamic uniaxial tensile strength of concrete-like materials // International Journal of Impact Engineering. 2011. V. 38. P. 171–180. doi: 10.1016/j.ijimpeng.2010.10.028
13. *Chen W., Song B.* Split Hopkinson (Kolsky) Bar. Design, Testing and Applications. Boston, MA : Springer, 2011. doi: 10.1007/978-1-4419-7982-7
14. *Bragov A.M., Lomunov A.K., Lamzin D.A., Konstantinov A.Yu.* Dispersion correction in split-Hopkinson pressure bar: theoretical and experimental analysis // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2019. doi: 10.1007/s00161-019-00776-0
15. *Bragov A.M., Igumnov L.A., Konstantinov A.Y., Lamzin D.A., Lomunov A.K., Kruszka L.* Methodological aspects of testing brittle materials using the split Hopkinson bar technique // Strain. 2021. V. 57. e12389. doi: 10.1111/str.12389
16. *Igumnov L.A., Kazakov D.A., Shishulin D.N., Modin I.A., Zhegalov D.V.* Experimental studies of high-temperature creep of titanium alloy VT6 under conditions of a complex stress state under the influence of an aggressive medium // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Ser. fiziko-matematicheskiye nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2021. V. 25, № 2. P. 286–302. doi: 10.14498/vsgtu1850
17. *Kochetkov A.V., Leontev N.V., Modin I.A., Savikhin A.O.* Study of the stress-strain and strength properties of the metal woven grids // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 2018. № 52. P. 53–62. doi: 10.17223/19988621/52/6

**References**

1. Okolnikova G.E., Tsareva A.Yu., Zuev S.S. (2020) Opyt primeneniya dispersno-armirovannykh betonov v stroitel'noy industrii Rossii [Experience in using dispersed-reinforced concrete in the construction industry in Russia]. *Sistemnye tekhnologii – System Technologies*. 34. pp. 48–52.
2. Morozov V.I., Pukharenko Yu.V. (2014) Effektivnost' primeneniya fibrobetona v konstruktsiyakh pri dinamicheskikh vozdeystviyakh [Efficiency of fiber reinforced concrete application in structures subjected to dynamic effects]. *Vestnik MGSU – Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering*. 3. pp. 189–196.
3. Plevkov V.S., Kolupaeva S.N., Kudyakov K.L. (2016) Raschetnye diagrammy nelineynogo deformirovaniya bazal'tofibrobetona pri staticheskikh i kratkovremennykh dinamicheskikh vozdeystviyakh [Calculating diagrams of nonlinear deformation of basalt fiber concrete under static and dynamic loads]. *Vestnik TGASU – Journal of Construction and Architecture*. 3. pp. 95–110.
4. Thomas R.J., Sorensen A.D. (2017) Review of strain rate effects for UHPC in tension. *Construction and Building Materials*. 153. pp. 846–856. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2017.07.168
5. Bragov A.M., Lomunov A.K., Lamzin D.A., Konstantinov A.Yu. (2019) Change of strength of brittle building materials under high strain and stress rates. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 3(40). pp. 284–291. doi: 10.1134/S1995080219030077
6. dell'Isola F., Bragov A.M., Igumnov L.A., Abali B.E., Lomunov A.K., Lamzin D.A., Konstantinov A.Y. (2019) Mechanical response change in fine grain concrete under high strain and stress rates. *Advanced Structured Materials*. 108. pp. 71–80. doi: 10.1007/978-3-030-13307-8_5
7. Bragov A.M., Gonov M.E., Lamzin D.A., Lomunov A.K., Modin I.A. (2021) Response of fine-grained fiber-reinforced concretes under dynamic compression. *Materials Physics and Mechanics*. 47. pp. 962–967. doi: 10.18149/MPM.4762021_14
8. Kolsky H. (1949) An investigation of the mechanical properties of materials at very high rates of loading. *Proceedings of the Physical Society of London*. 62. pp. 676–704. doi: 10.1088/0370-1301/62/11/302

9. Zhang Q.B., Zhao J. (2014) A review of dynamic experimental techniques and mechanical behaviour of rock materials. *Rock Mechanics and Rock Engineering*. 47. pp. 1411–1478. doi: 10.1007/s00603-013-0463-y
10. Xia K., Yao W. (2015) Dynamic rock tests using split Hopkinson (Kolsky) bar system – A review. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*. 7. pp. 27–59. doi: 10.1016/j.jrmge.2014.07.008
11. Bragov A., Igumnov L., Lomunov A., Konstantinov A., Lamzin D., Kruszka L. (2018) Use of the Kolsky method for dynamic tests of brittle media. *MATEC Web of Conferences*. 174. Article 02022. doi: 10.1051/matecconf/201817402022
12. Lu Y.B., Li Q.M. (2011) About the dynamic uniaxial tensile strength of concrete-like materials. *International Journal of Impact Engineering*. 38. pp. 171–180. doi: 10.1016/j.ijimpeng.2010.10.028
13. Chen W., Song B. (2011) *Split Hopkinson (Kolsky) Bar. Design, Testing and Applications*. Boston: Springer. doi: 10.1007/978-1-4419-7982-7
14. Bragov A.M., Lomunov A.K., Lamzin D.A., Konstantinov A.Yu. (2019) Dispersion correction in split-Hopkinson pressure bar: theoretical and experimental analysis. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. doi: 10.1007/s00161-019-00776-0
15. Bragov A.M., Igumnov L.A., Konstantinov A.Y., Lamzin D.A., Lomunov A.K., Kruszka L. (2021) Methodological aspects of testing brittle materials using the split Hopkinson bar technique. *Strain*. 57(5). doi: 10.1111/str.12389
16. Igumnov L.A., Kazakov D.A., Shishulin D.N., Modin I.A., Zhegalov D.V. (2021) Eksperimental'nye issledovaniya vysokotemperaturnoy polzuchesti titanovogo splava VT6 v usloviyakh slozhnogo napryazhennogo sostoyaniya pod vozdeystviem agressivnoy sredy [Experimental studies of high-temperature creep of titanium alloy VT6 under conditions of a complex stress state under the influence of an aggressive medium]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskie nauki – Journal of Samara State Technical University, Physical and Mathematical Sciences*. 2(25). pp. 286–302. doi: 10.14498/vsgtu1850
17. Kochetkov A.V., Leont’ev N.V., Modin I.A., Savikhin A.O. (2018) Issledovanie deformatsionnykh i prochnostnykh svoystv metallicheskikh pletenykh setok [Study of the stress-strain and strength properties of the metal woven grids]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 52. pp. 53–62. doi: 10.17223/19988621/52/6

***Сведения об авторах*:**
**Ламзин Дмитрий Александрович** – кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского института механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия. E-mail: lamzin.dmitry@yandex.ru
**Гонов Михаил Евгеньевич** – младший научный сотрудник Научно-исследовательского института механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия. E-mail: gonov_mikhail@mech.unn.ru
**Брагов Анатолий Михайлович** – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Научно-исследовательского института механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия. E-mail: bragov@mech.unn.ru
**Ломунов Андрей Кириллович** – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Научно-исследовательского института механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия. E-mail: lomunov@mech.unn.ru

***Information about the authors*:**
**Lamzin Dmitriy A.** (Candidate of Technical Sciences, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation). E-mail: lamzin.dmitry@yandex.ru
**Gonov Mikhail E.** (Junior Researcher, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation). E-mail: gonov_mikhail@mech.unn.ru
**Bragov Anatoliy M.** (Doctor of Technical Sciences, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation). E-mail: bragov@mech.unn.ru
**Lomunov Andrey K.** (Doctor of Physics and Mathematics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation). E-mail: lomunov@mech.unn.ru

*Статья поступила в редакцию 15.03.2022; принята к публикации 03.02.2023*

*The article was submitted 15.03.2022; accepted for publication 03.02.2023*

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2023 Математика и механика № 81
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 523.682
doi: 10.17223/19988621/81/10

# Абляция мелких метеорных тел: сравнение модели сплошного и пористого тела

**Владимир Владимирович Ефремов[1], Ольга Петровна Попова[2], Дмитрий Олегович Глазачев[3], Анастасиос Маргонис[4], Юрген Оберст[5], Анна Петровна Карташова[6]**

*[1, 2, 3] Институт динамики геосфер им. академика М.А. Садовского Российской академии наук, Москва, Россия*
*[4, 5] Берлинский технический университет, Берлин, Германия*
*[6] Институт астрономии Российской академии наук, Москва, Россия*
*[1] efremov.vv@phystech.edu*
*[2] olga@idg.chph.ras.ru*
*[3] glazachevd@gmail.com*
*[4] anastasios.margonis@tu-berlin.de*
*[5] juergen.oberst@tu-berlin.de*
*[6] akartashova@inasan.ru*

**Аннотация.** Модель абляции для мелких метеороидов используется для оценки физических параметров метеоров в разных предположениях. Метеороид рассматривается в двух модификациях: сплошное и пористое тело. Использован автоматизированный метод оценки параметров по кривым блеска. Обсуждаются ограничения и особенности модели.
**Ключевые слова:** метеоры, метеороиды, модель абляции, метеорный поток Персеид

**Благодарности:** В.В. Ефремов и О.П. Попова благодарят за финансовую поддержку госзадание 1021052706222-8-1.5.4 «Разработка комплексной модели воздействия на внутренние и внешние геосферы внедряющихся космических тел и оценка последствий таких падений (FMWN-2022-0011)»; А. Маргонис и Ю. Оберст благодарят за финансовую поддержку фонд Deutsch Forschungsgemeinschaft (DFG – German Research Foundation), грант № OB 124/20-1.

**Для цитирования:** Ефремов В.В., Попова О.П., Глазачев Д.О., Маргонис А., Оберст Ю., Карташова А.П. Абляция мелких метеорных тел: сравнение модели сплошного и пористого тела // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 81. С. 110–122. doi: 10.17223/19988621/81/10

Original article

# Ablation of small meteor bodies: comparison of solid and porous body models

**Vladimir V. Efremov[1], Olga P. Popova[2], Dmitry O. Glazachev[3], Anastasios Margonis[4], Jurgen Oberst[5], Anna P. Kartashova[6]**

[1, 2, 3] *Sadovsky Institute of Geosphere Dynamics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*
[4, 5] Technical University Berlin, Berlin, Germany
[6] *Institute of Astronomy of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*
[1] *efremov.vv@phystech.edu*
[2] *olga@idg.chph.ras.ru*
[3] *glazachevd@gmail.com*
[4] *anastasios.margonis@tu-berlin.de*
[5] *juergen.oberst@tu-berlin.de*
[6] *akartashova@inasan.ru*

**Abstract.** An ablation model is used to describe the interaction of small meteoroids with the Earth's atmosphere. In this model, the mass loss of a meteoroid is determined using the saturated vapor pressure of the assumed meteoroid substance. The meteoroid is considered in two modifications as a solid and a porous object. An automated method for estimating the parameters of meteoroids (mass, size, and density) from light curves is developed based on the model of small meteor body ablation, which has been used to estimate the parameters of the Perseid meteors with a brightness of $-2^m$ to $+2^m$. The effect of the dependence for saturated vapor pressure and the residual on the parameters of the meteoric body is analyzed. It is shown that for the same meteor, the use of different dependences for pressure or different residuals leads to the dispersion of the meteor mass estimate of not more than 10–15% of the average value, and for the meteor size not more than 35–40%. The difference between the maximum and minimum density estimates can be up to five times. The selected dependence for the saturation vapor pressure strongly affects the shape of the light curve, the quality of its approximation, and the density estimate. The average porosity for all meteoroids is 86±5%, which is close to the values for IDP. The density of meteoroids is determined with a large error. The selected model better describes meteoroids with the degree of skewness of the light curve in the range of $0.4 - 0.5$. The use of the porous body model has little effect on the mass estimate, while the density estimates increase by up to 2 times.

**Keywords:** meteors, meteoroids, ablation model, Perseids

**Acknowledgments:** V.V. Efremov and O.P. Popova were funded by the program “Development of an complex model of the entering cosmic objects action on the internal and external geospheres and assessment of the consequences of these impacts” (1021052706222-8-1.5.4); A. Margonis and J. Oberst were funded by the Deutsch Forschungsgemeinschaft (DFG – German Research Foundation) (project No. OB 124/20-1).

**For citation:** Efremov, V.V., Popova, O.P., Glazachev, D.O., Margonis, A., Oberst, J., Kartashova, A.P. (2023) Ablation of small meteor bodies: comparison of solid and porous body models. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 81. pp. 110–122. doi: 10.17223/19988621/81/10

## Введение

Большинство метеорных тел не достигает поверхности Земли, поэтому их свойства приходится определять по косвенным признакам. Основной способ получения информации о свойствах метеорных тел – изучение их взаимодействия с атмосферой. Несмотря на длительную историю изучения метеорных явлений, проблема точного определения массы, плотности и свойств вещества метеороида по наблюдательным данным остается до конца не решенной [1]. Детали взаимодействия метеорных частиц с атмосферой известны плохо, поэтому их характеристики определяются с большими погрешностями.

Для оценки параметров метеорных тел (массы, плотности и т.д.) по данным наблюдений используются различные модели абляции (см. обзор [2]). Существует два основных варианта модели абляции, которые модифицируются различными авторами тем или иным способом [2]. Основное различие между этими вариантами моделей состоит в записи уравнения баланса энергии. В одном из вариантов набегающий поток расходуется только на испарение метеорного тела [3], в другом – на излучение, нагрев и испарение метеорного тела [4–6]. Все эти модели позволяют оценить параметры метеорного тела.

В работе [7] к ряду метеоров были применены две различные модели абляции, принадлежащие к разным вариантам, и результаты показали значительную разницу в оценках параметров. Оценки массы мелких метеороидов по тем или иным моделям сильно зависят от предположений используемой модели. Целью данной работы является применение модели абляции (с различными модификациями) для воссоздания наблюдаемых кривых блеска ряда метеороидов потока Персеид, что позволит оценить параметры этих метеороидов.

## Используемая модель абляции

В качестве модели абляции была выбрана модель, в которой энергия набегающего потока расходуется на излучение, нагрев и испарение метеорного тела [4–6]. В рассматриваемой модели абляции потеря массы определяется через давление насыщенного пара вещества метеороида.

Выбранная модель абляции широко используется в исследованиях, касающихся притока микрометеоритов, внеземного вещества и космической пыли, а также воздействия этого материала на атмосферу [9–11]. Для оценки параметров метеороидов данная модель используется не так часто. Наиболее проработанная модель пылевого шара [12] дополняет эту модель абляции фрагментацией и предполагает, что метеороиды распадаются на фундаментальные зерна при достижении пороговой температуры. В работе [13] были оценены параметры метеороидов разных потоков на основе этой модели пылевого шара. В нашей работе фрагментация не рассматривается, модель абляции применяется к наблюдениям метеоров потока Персеид в качестве первого подхода для более детального рассмотрения ограничений модели. В период с 2010 по 2016 г. во время активности метеорного потока Персеид была проведена серия наблюдательных кампаний на юге Греции [8]. Диапазон яркостей зарегистрированных метеоров составил от $-6^m$ до $+2^m$. Поскольку используемая модель описывает процесс абляции небольших метеорных тел, были выбраны метеоры потока Персеид слабее $-2^m$.

Для определения параметров метеорных тел требуется подобрать такие начальные данные, которые позволят воссоздать кривую светимости путем решения системы дифференциальных уравнений, описывающих высоту, скорость, массу и светимость в зависимости от времени.

Кроме баланса энергии модель абляции включает в себя уравнение потери массы, уравнения торможения и изменения высоты полета, соотношения для определения кривой блеска [5]. Применяемая система уравнений использует различные предположения: коэффициент теплопередачи постоянен по траектории и равен значению для сферы в свободно молекулярном режиме $c_h = 1$; эффективность высвета $\tau$ также постоянна и составляет от 1 до 5% [1]. Теплота абляции и атомная масса определяются веществом, которое выбирается при задании зависимости давления насыщенного пара.

В описываемой модели предполагается, что метеороид имеет сферическую форму. Обычно все рассматривают метеороид как сплошное тело, но известно, что частицы космической пыли (IDP) и кометная пыль имеют высокую пористость [14]. В рамках данной работы метеороид рассматривается в двух модификациях: сплошное тело и пористое тело. Пористое тело представляется как сложенное частицами шарообразной формы при квадратной или ромбической укладке (модель П1) [15]. Сами частицы представляют собой минеральное вещество плотностью 3 000 кг/м$^3$. Другая модификация пористого тела представлена шарообразными кластерами, которые состоят из частиц минерального вещества (модель П2). Такие кластеры схожи по структуре с частицами IDP, их плотность и пористоть неизвестны. Сами кластеры сложены квадратной или ромбической укладкой и занимают половину объема метеороида (макропористость 50%). Микропористоть самих кластеров неизвестна. В случае пористого тела испарение происходит с поверхности минеральных частиц (модель П1) или шарообразных кластеров (П2), которые составляют метеорное тело. Набегающий поток, излучение и торможение рассчитываются с учетом поперечного сечения метеороида как целого.

Поскольку в рассматриваемой модели абляции потеря массы определяется через давление насыщенного пара вещества метеороида, следует определить вещество, из которого может состоять метеороид. Одним из основных компонентов метеорного вещества являются силикаты, в том числе оливин. Присутствие оливина подтверждено в материале комет [16, 17] и в космической пыли [14, 18]. В спектрах Персеид [19] присутствуют химические элементы, входящие в состав оливина. Поэтому в данной работе использовалась зависимость давления насыщенного пара для оливина. Следует отметить, что разные авторы предлагают заметно различающиеся зависимости для одного и того же вещества, что влияет на определение параметров метеороидов, как это было показано в работе В. Ефремова и соавт. [20]. В этой публикации также отмечалось, что зависимость для давления насыщенного пара из работы [21] занимает среднее положение относительно других зависимостей в интересующем нас диапазоне температур, поэтому она была выбрана для дальнейшего использования.

Для построения автоматизированного метода оценки параметров метеорного тела необходимо сформулировать задачу минимизации функции отклонения модельного решения от наблюдаемых данных, т.е. определить невязку. Были рассмотрены четыре функции невязки [20], и проанализировано их влияние на определяемые параметры метеороидов. Невязки рассчитывались как среднеквадратичное отклонение рассчитанной звездной величины или интенсивности от наблюдаемой. Рассматривались как размерные величины, так и приведенные. Для поиска наилучшего решения использовался генетический алгоритм, реализованный в Wolfram Mathematica. В случае модели сплошного тела и пористого (П2), варьировали размер и плотность, а при применении модели пористого тела П1 варьировали размер и пористость.

## Оценка параметров метеорных тел

Описанная модель абляции использовалась для моделирования 11 метеоров, скорость входа в атмосферу ($V$), угол входа от горизонтали ($\gamma$) и абсолютная звездная величина ($M_v$) которых приведены в табл. 1.

Для определения параметров метеороидов использовались только кривые блеска; кривые торможения детально не регистрировались, но контролировалось отсутствие значительного торможения (потеря не больше 10% от начальной скорости). Также следует отметить, что мы не учитывали в нашей модели фрагментацию, хотя ее роль может быть заметной.

Таблица 1

**Скорость, угол входа, абсолютная звездная величина для рассматриваемых метеороидов. Оценки массы по эмпирическим зависимостям (по формулам из работ [22] и [23])**

| Метеор | $V$, км/с | $\gamma$, ° | $M_v$ | Масса, $10^{-5}$ кг | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | По формуле [22] | По формуле [23] |
| 20160811_184336 | 60.7 | 12.8 | –1.14 | 60.30 | 11.30 |
| 20160811_221139 | 58.3 | 32.1 | –1.30 | 86.71 | 8.29 |
| 20160811_200532 | 61.3 | 17.0 | –0.91 | 47.33 | 7.56 |
| 20160811_202351 | 60.7 | 21.4 | –0.73 | 42.13 | 5.92 |
| 20160811_190504 | 66.2 | 14.8 | –0.78 | 30.92 | 5.57 |
| 20160811_205252 | 59.4 | 21.5 | –0.18 | 27.65 | 4.22 |
| 20160811_190233 | 66.8 | 13.3 | 0.55 | 8.74 | 2.10 |
| 20160811_205351 | 59.4 | 22 | –0.18 | 27.65 | 4.22 |
| 20160811_202522 | 60.4 | 19 | –0.05 | 22.84 | 3.83 |
| 20160811_205505 | 60.5 | 22 | 0.12 | 19.55 | 3.06 |
| 20160811_205716 | 63.5 | 24 | 0.64 | 10.08 | 1.62 |

Сравнение модельных (при применении модели сплошного тела) и наблюдаемой кривых блеска для метеора 20160811_200532 приведено на рис. 1 при использовании разных невязок. Разные невязки лучше описывают разные части кривой блеска. Оценка разброса решений при применении различных функций невязок показывает, что выбор функции практически не влияет на массу (отклонение от среднего не более 15%) и на радиус (отклонение от среднего не более 20%), но влияет на плотность (минимальное и максимальное значения плотности могут различаться в два раза). Плотность определяется как отношение массы к объему. Для моделей пористого тела эти закономерности сохраняются.

Для модели сплошного тела выбранное давление насыщенных паров незначительно влияет на оценку массы (отклонение от среднего значения составляет не более 10%); более выраженный эффект наблюдается при оценке радиуса (отклонение составляет не более 35%). Различие между максимальным и минимальным значением оценки плотности может достигать пяти раз. Зависимость давления паров существенно влияет на форму кривой блеска (рис. 2), качество ее подгонки и оценку плотности.

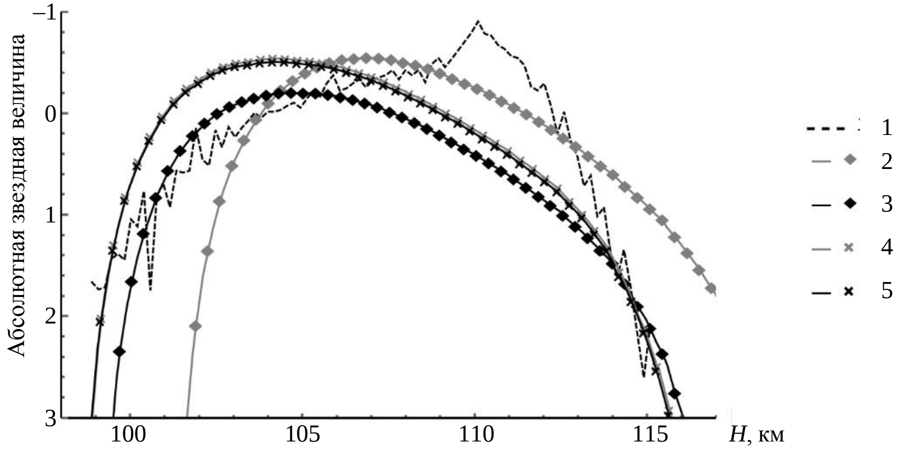



**Рис. 1.** Кривая блеска метеора 20160811_200532 (*1*) и модельные кривые (модель сплошного тела), полученные при использовании разных невязок (*2*–*5*). Использовалось давление насыщенных паров (оливин, пары Fe/Mg) [21]

**Fig. 1.** (*1*) Light curve of meteor 20160811_ 200532 and (*2*) – (*5*) the model curves (a solid body model) obtained with different residuals. The saturated vapor pressure is from [21] (olivine and Fe/Mg vapors)

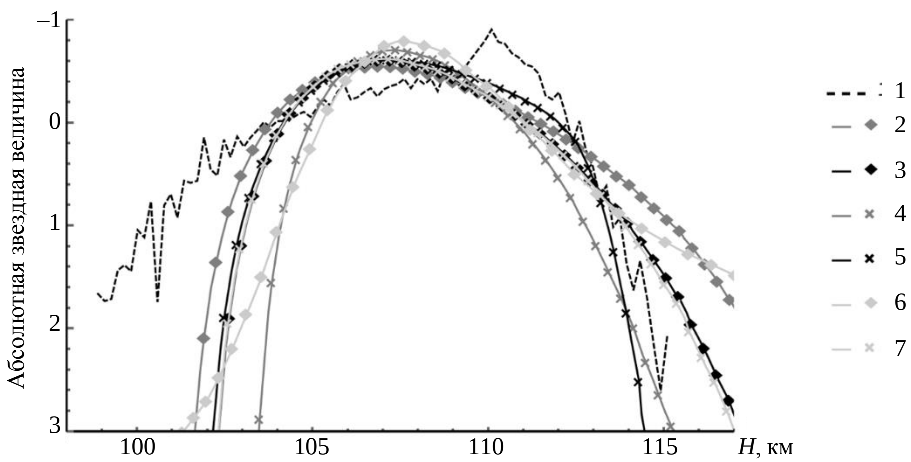



**Рис. 2.** Кривая блеска метеора 20160811_200532 (*1*) и модельные кривые (модель сплошного тела), полученные при использовании разных зависимостей для давлений насыщенных паров: *2* – оливин, пары Fe/Mg [21], *3* – оливин [21], *4* – форстерит [24], *5* – фаялит [24], *6* – кварц [25], *7* – силикаты [25]

**Fig. 2.** (*1*) Light curve of meteor 20160811_ 200532 and (*2*)–(*7*) the model curves (a solid body model) obtained at different dependencies for saturated vapor pressures: (*2*) olivine and Fe/Mg vapors [21], (*3*) olivine [21], (*4*) forsterite [24], (*5*) fayalite [24], (*6*) quartz [25], and (*7*) silicates [25]

Масса мелких метеороидов (примерно 1 см) часто оценивается на основе эмпирических соотношений, использующих максимальную яркость метеора, скорость и угол входа [22, 23, 26, 27]. Оценки массы, основанные на эмпирических соотношениях, приведены в табл. 1, результаты моделирования рассматриваемых метеоров приведены в табл. 2. Эти оценки демонстрируют большую неопределенность при вычислении массы – более чем на порядок, что является давней проблемой метеорных исследований. Полученные нами оценки массы наиболее близки к оценкам по соотношению из [23] (разница до 10 раз при эффективности высвета 5% и до 2 раз при эффективности высвета 1%). Оценки массы для моделей сплошного и пористого тела (при эффективности высвета 5%) практически не отличаются (отклонение не больше 20%). Для моделей пористого тела (П1 и П2) оценки массы различаются не более чем на 5%.

Таблица 2

**Оценки массы для рассматриваемых метеороидов, полученные по четырем невязкам с давлением насыщенных паров из работы [21] (оливин, пары Fe/Mg), при разных эффективностях высвета τ**

| Метеор | Масса, $10^{-5}$ кг | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Моделирование (сплошное тело), $\tau = 5\%$ | Моделирование (сплошное тело), $\tau = 1\%$ | Моделирование (пористое тело П1), $\tau = 5\%$ | Моделирование (пористое тело П2), $\tau = 5\%$ |
| 20160811_184336 | 1.73 ± 0.17 | 8.76 ± 0.95 | 1.94 ± 0.24 | 1.83 ± 0.28 |
| 20160811_221139 | 1.14 ± 0.13 | 5.40 ± 0.62 | 0.99 ± 0.34 | 0.98 ± 0.30 |
| 20160811_200532 | 0.97 ± 0.12 | 4.82 ± 0.67 | 1.06 ± 0.11 | 1.09 ± 0.09 |
| 20160811_202351 | 0.99 ± 0.08 | 4.93 ± 0.51 | 1.17 ± 0.06 | 1.19 ± 0.05 |
| 20160811_190504 | 0.93 ± 0.10 | 4.72 ± 0.57 | 1.14 ± 0.08 | 1.16 ± 0.07 |
| 20160811_205252 | 0.51 ± 0.03 | 2.56 ± 0.17 | 0.62 ± 0.02 | 0.60 ± 0.04 |
| 20160811_190233 | 0.19 ± 0.03 | 0.97 ± 0.16 | 0.24 ± 0.03 | 0.24 ± 0.04 |
| 20160811_205351 | 0.46 ± 0.04 | 2.31 ± 0.25 | 0.53 ± 0.06 | 0.56 ± 0.04 |
| 20160811_202522 | 0.42 ± 0.03 | 2.10 ± 0.15 | 0.49 ± 0.02 | 0.50 ± 0.03 |
| 20160811_205505 | 0.39 ± 0.02 | 1.78 ± 0.39 | 0.44 ± 0.01 | 0.40 ± 0.07 |
| 20160811_205716 | 0.15 ± 0.05 | 0.80 ± 0.09 | 0.19 ± 0.02 | 0.20 ± 0.02 |

Все рассмотренные метеороиды являются метеорами потока Персеид, их скорости близки друг к другу. Оценка массы по модели абляции согласуется с известной корреляцией между яркостью метеора и массой метеороида: чем меньше максимальная яркость, тем меньше полученная масса метеороида.

Использование модели пористого тела мало влияет на оценку массы, оценки плотности увеличиваются (до 2 раз), заметно отличаются формы модельных кривых блеска (рис. 3).

Как уже упоминалось выше, фрагментация не включена в нашу модель, хотя может влиять на кривую блеска и оценки параметров метеороидов. Для грубой оценки влияния фрагментации на кривую блеска ранее был предложен *F*-параметр [28], параметр симметрии кривой блеска, который определяется как отношение односторонней ширины кривой блеска на $1^m$ ниже пика к общей ширине на этом уровне. Считается, что метеороид не испытывает фрагментации (ведет себя как единое тело) при значениях $F > 0.5$–$0.7$.

Сопоставление результатов с параметром $F$ для рассматриваемых метеоров показывает, что выбранная модель лучше описывает метеороиды, для которых

$F$ превышает величину ~ 0.4–0.5. Для метеороидов с высокоим значением $F$ влияние фрагментации минимально, оценка параметров метеороида слабо зависит от выбранной функции невязки. Для метеоров с меньшими значениями $F$, по-видимому, требуется учитывать фрагментацию.

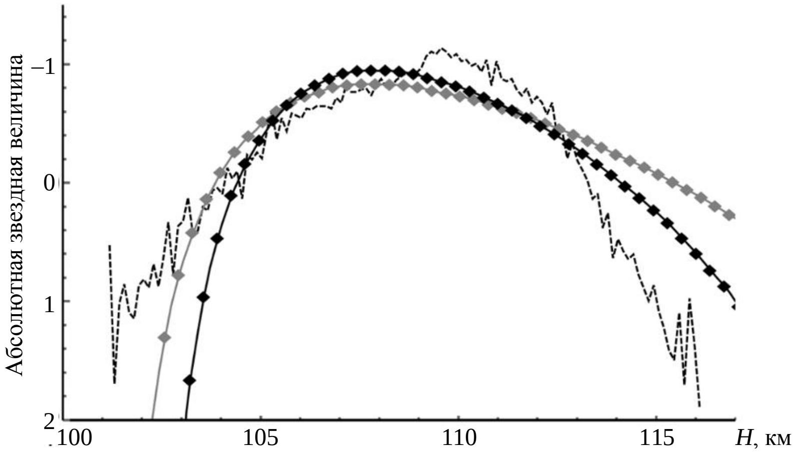



**Рис. 3.** Кривая блеска метеора 20160811_184336 (*1*) и модельные кривые, полученные в рамках модели пористого (П1) (*2*) и сплошного тела (*3*). Использовалось давление насыщенных паров – оливин, пары Fe/Mg [21]

**Fig. 3.** (*1*) Light curve of meteor 20160811_184336 and the model curves obtained within the framework of (*2*) porous (П1) and (*3*) solid models. The saturated vapor pressure is from [21] (olivine and Fe/Mg vapors)

Плотность метеороидов в рамках нашей модели определяется с большой погрешностью, ошибка ее определения может достигать нескольких раз для одного и того же метеора при использовании разных невязок и разных давлений паров. Средняя плотность по всем метеороидам (в рамках модели сплошного тела) составляет 362 ± 237 кг/м$^3$, для отдельных метеоров разброс средних плотностей составляет от 114 ± 99 до 640 ± 500 кг/м$^3$. В рамках модели пористого тела (П1) средняя плотность метеороидов составляет 429 ± 153 кг/м$^3$, для отдельных метеоров разброс средних плотностей составляет от 153 ± 81 до 644 ± 50 кг/м$^3$. В рамках модели пористого тела (П2) средняя плотность метеороидов составляет 473 ± 156 кг/м$^3$, для отдельных метеоров разброс средних плотностей составляет от 208 ± 75 до 770 ± 231 кг/м$^3$.

Оценка плотности в случае моделей пористого тела оказывается выше, чем для модели сплошного тела. Оценки плотности метеороидов для моделей П1 и П2 практически не отличаются.

Метеороиды оказались высокопористыми телами. Средняя пористость по всем метеороидам в модели П1 составила 86 ± 5%, в модели П2 значение полной пористости также составляет около 85%. Полученные пористости характерны для IDP [14].

В ряде работ были получены оценки плотности метеоров Персеид на основе наблюдательных данных. В работе [29] проанализировано 413 фотографических метеоров с яркостью от –5$^m$ до +2.5$^m$ в рамках двух моделей: единого тела и тела, которое испытывает фрагментацию. Плотности, найденные в рамках модели одного тела, всегда ниже, чем в модели с фрагментацией. Для пяти метеоров Персеид плотность была оценена в 600 ± 100 кг/м$^3$ [29]. П.Б. Бабаджанов и Г.И. Кохирова оценили плотность для 44 Персеид (более ярких, чем наша выборка), в рамках модели, которая учитывает фрагментацию, и получили плотность 1 300 ± 200 кг/м$^3$ [30]. J.-B. Kikwaya и соавт. [13] оценили плотность в рамках модели теплового разрушения (фрагментации) для 107 Персеид как 420–820 кг/м$^3$.

Наши оценки плотности метеороидов потока Персеид оказываются ниже или сравнимы с оценками других авторов, полученными в результате анализа наблюдательных данных в рамках различных моделей, и попадают в диапазон известных плотностей комет. Так, плотность частиц пыли, собранных специальным прибором COSIMA в рамках космической миссии Rosetta к комете Чурюмова–Герасименко, составила от 100 до 400 кг/м$^3$ [31]. Средняя плотность кометы Чурюмова–Герасименко, полученная миссией Rosetta, – 537 кг/м$^3$ [16].

## Заключение

Применение автоматизированного метода оценки параметров метеороидов (массы, размера и плотности) по кривым блеска на основе модели абляции с разными предположениями для оценки параметров метеоров потока Персеид яркостью от –2 до +2 звездной величины показало, что для одного и того же метеора применение разных зависимостей для давления или различных невязок приводит к разбросу значений массы метеора не более 10–15% от среднего значения, а размера – не более 35–40%. Различие между максимальным и минимальным значениями оценки плотности может достигать пяти раз. Выбор зависимости для давления насыщенного пара сильно влияет на форму кривой блеска, качество ее приближения и оценку плотности.

В даннои исследовании была разработана и применена модель пористого тела. Средняя пористость по всем метеороидам (в модели П1) составила 86 ± 5%, что близко к значениям для IDP. Плотность метеороидов определяется с большой погрешностью. Выбранная модель лучше описывает метеороиды, для которых $F \geq 0.4{-}0.5$.

## Список источников


1. *Subasinghe D., Campbell-Brown M., Stokan E.* Luminous efficiency estimates of meteors-I. Uncertainty analysis // Planetary and Space Science. 2017. V. 143. P. 71–77. doi: 10.1016/j.pss.2016.12.009
2. *Popova O., Borovicka J., Campbell-Brown M.* Modelling the entry of meteoroids // Meteoroids: Sources of Meteors on the Earth and Beyond / ed. G.O. Ryabova, D.J. Asher, M.D. Campbell-Brown. Cambridge : Cambridge University Press, 2019. P. 9–36. doi: 10.1080/00107514.2020.1736170.
3. *Bronshten V.A.* Physics of meteoric phenomena. Dordrecht : Reidel Publishing Co, 1983. 356 p.
4. *Лебединец В.* Пыль в верхней атмосфере и в космосе. Метеоры. Л. : Гидрометеоиздат, 1980. 248 с.
5. *Lebedinec V.N., Šuškova V.B.* Evaporation and deceleration of small meteoroids // Symposium-International Astronomical Union. 1968. V. 33. P. 193–204.
6. *Jones J., Kaiser T.R.* The effects of thermal radiation, conduction and metoriod heat capacity on meteoric ablation // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1966. V. 133. P. 411–420.

7. *Ефремов В.В., Попова О.П., Глазачев Д.О., Карташова А.П.* Определение параметров мелких метеорных тел по наблюдательным данным // Динамические процессы в геосферах : сб. науч. тр. ИДГ РАН. М. : ГЕОС, 2018. Вып. 10. С. 150–157. doi: 10.26006/IDG.2018.10.20190
8. *Margonis A., Christou A., Oberst J.*, Observations of meteors in the Earth's atmosphere: Reducing data from dedicated double-station wide-angle cameras // Astronomy and Astrophysics. 2018. V. 618 (99). P. 1–11. doi: 10.1051/0004-6361/201832927
9. *Plane J.M.C.* Cosmic dust in the earth's atmosphere // Chemical Society Reviews. 2012. V. 41 (19). P. 6507–6518. doi: 10.1039/C2CS35132C
10. *Carrillo-Sanchez J., Nesvorny` D., Pokorny` P., Janches D., Plane J.*, Sources of cosmic dust in the Earth's atmosphere // Geophysical Research Letters. 2016. V. 43. P. 11–19. doi: 10.1002/2016GL071697
11. *Genge M.J., Larse J., Van Ginneken M., Suttle M.D.* An urban collection of modern-day large micrometeorites: Evidence for variations in the extraterrestrial dust flux through the Quaternary // Geology. 2017. V. 45. P. 119–122. doi: 10.1130/G38352.1
12. *Campbell-Brown M., Koschny D.* Model of the ablation of faint meteors // Astronomy & Astrophysics. 2004. V. 418. P. 751–758. doi: 10.1051/0004-6361:20041001-1
13. *Kikwaya J.-B., Campbell-Brown M., Brown P.* Bulk density of small meteoroids // Astronomy & Astrophysics. 2011. V. 530 (113). P. 1–17. doi: 10.1051/0004-6361/201116431
14. *Borovicka J., Macke R.J., Campbell-Brown M.D.* Physical and chemical properties of meteoroids // Meteoroids: : Sources of Meteors on the Earth and Beyond / ed. G.O. Ryabova, D.J. Asher, M.D. Campbell-Brown. Cambridge : Cambridge University Press, 2019. P. 37–62. doi: 10.1080/00107514.2020.1736170
15. *Лейбензон Л.С.* Собрание трудов. М. : Изд-во АН СССР, 1953. Т. 2: Подземная газогидродинамика. 544 с.
16. *Zolensky M., Nakamura-Messenger K., Rietmeijer F.* Comparing Wild 2 particles to chondrites and IDPs // Meteoritics & Planetary Science. 2008. V. 43 P. 261–272. doi: 10.1111/j.1945-5100.2008.tb00621.x
17. *Patzold M., Ander T.P., Hahn M.* The Nucleus of comet 67P/Churyumov–Gerasimenko. Part I: The global view–nucleus mass, mass-loss, porosity, and implications // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2019. V. 483. P. 2337–2346. doi: 10.1093/mnras/sty3171
18. *Rietmeijer F.J.* Dynamic pyrometamorphism during atmospheric entry of large (10 micron) pyrrhotite fragments from cluster IDPs // Meteoritics & Planetary Science. 2004. V. 39. P. 1869–1887. doi: org/10.1111/j.1945-5100.2004.tb00082.x
19. *Matlovič P., Tóth J., Kornoš L., Loehle S.* On the sodium enhancement in spectra of slow meteors and the origin of Na-rich meteoroids // Icarus. 2020. V. 347. Art. 113817. doi: 10.1016/j.icarus.2020.113817
20. *Efremov V., Popova O., Glazachev D., Margonis A., Oberst J., Kartashova A.* Small Meteor Ablation Model: Applying to Perseid Observations // Contributions of the Astronomical Observatory Skalnate Pleso. 2021. V. 51. P. 186–206. doi: 10.31577/caosp.2021.51.3.186
21. *Costa G.C.C., Jacobson N.S., Fegley Jr B.* Vaporization and thermodynamics of forsterite-rich olivine and some implications for silicate atmospheres of hot rocky exoplanets // Icarus. 2017. V. 289. P. 42–55. doi: j.icarus.2017.02.006
22. *Jenniskens P.* Meteor showers and their parent comets. Cambridge : Cambridge University Press, 2006. 790 p. doi: 10.1017/CBO9781316257104
23. *Vida D., Brown P.G., Campbell-Brown M.* Modelling the measurement accuracy of preatmosphere velocities of meteoroids // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2018. V. 479 (4). P. 4307–4319. doi: 10.1093/mnras/sty1841
24. *Sekanina Z., Chodas P.W.* Comet C/2011 W3 (Lovejoy): Orbit determination, outbursts, disintegration of nucleus, dust-tail morphology, and relationship to new cluster of bright sungrazers // The Astrophysical Journal. 2012. V. 757. P. 127–160. doi: 10.1088/0004-637X/757/2/127

25. *Kimura H., Ishimoto H., Mukai T.* A study on solar dust ring formation based on fractal dust models // Astronomy and Astrophysics. 1997. V. 326. P. 263–270.
26. *Jacchia L., Verniani F., Briggs R.E.* An analysis of the atmospheric trajectories of 413 precisely reduced photographic meteors // Smithsonian Contributions to Astrophysics. 1967. V. 10. P. 1–139.
27. *Verniani F.* On the luminous efficiency of meteors // Smithsonian Contributions to Astrophysics. 1965. V. 8 (5). P. 141–171.
28. *Fleming D., Hawkes R., Jones J.* Light curves of faint television meteors // Meteoroids and their Parent Bodies / ed. J. Stohl, I. Williams. Bratislava : Astronomical Institute SAS, 1993. P. 261–264.
29. *Bellot Rubio L., Gonza ́lez M.M., Herrer L.R,* Modeling the photometric and dynamical behavior of Super-Schmidt meteors in the Earth’s atmosphere // Astronomy & Astrophysics. 2002. V. 389. P. 680–691. doi: 10.1051/0004-6361:20020672
30. *Babadzhano P., Kokhirova G.* Densities and porosities of meteoroids // Astronomy & Astrophysics. 2009. V. 495. P. 353–358. doi: 10.1051/0004-6361:200810460
31. *Hornung K., Merouane S., Hilchenbac M.* A first assessment of the strength of cometary particles collected in-situ by the COSIMA instrument onboard ROSETTA // Planetary and Space Science. 2016. V. 133. P. 63–75. doi: 10.1016/j.pss.2016.07.003

## References

1. Subasinghe D., Campbell-Brown M., Stokan E. (2017) Luminous efficiency estimates of meteors-I. Uncertainty analysis. *Planetary and Space Science.* 143. pp. 71–77. doi: 10.1016/j.pss.2016.12.009
2. Popova O., Borovicka J., Campbell-Brown M. (2019) Modelling the Entry of Meteoroids. In: *Meteoroids: Sources of Meteors on the Earth and Beyond.* Cambridge: Cambridge University Press. pp. 9–36. doi: 10.1080/00107514.2020.1736170
3. Bronshten V.A. (1983) *Physics of Meteoric Phenomena.* Dordrecht: Reidel Publishing Company.
4. Lebedinets V.N. (1980) *Pyl' v verkhney atmosfere i kosmicheskom prostranstve. Meteory* [Dust in the upper atmosphere and in space. Meteors]. Leningrad: Gidrometeoizdat.
5. Lebedinec V.N., Šuškova V.B. (1968) Evaporation and deceleration of small meteoroids. *In Symposium-International Astronomical Union.* 33. pp. 193–204.
6. Jones J., Kaiser T.R. (1966) The effects of thermal radiation, conduction and metoriod heat capacity on meteoric ablation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* 133(4). pp. 411–420. doi: 10.1093/mnras/133.4.411
7. Efremov V.V., Popova O.P., Glazachev D.O., Kartashova A.P. (2018) Determination of the meteor particles properties from observational. *Dynamic Processes in Geospheres. Collection of Scientific Papers of the IDG RAS. Moscow, GEOS*. 10. pp. 150–157. doi: 10.26006/IDG.2018.10.20190
8. Margonis A., Christou A., Oberst J. (2018) Observations of meteors in the Earth’s atmosphere: Reducing data from dedicated double-station wide-angle cameras. *Astronomy and Astrophysics.* 618(99). pp. 1–11. doi: 10.1051/0004-6361/201832927
9. Plane J.M.C. (2012) Cosmic dust in the Earth’s atmosphere. *Chemical Society Reviews*. 41(19). pp. 6507–6518. doi: 10.1039/C2CS35132C
10. Carrillo-Sanchez J., Nesvorny` D., Pokorny` P., Janches D., Plane J. (2016) Sources of cosmic dust in the Earth’s atmosphere. *Geophysical Research Letters*. 43. pp. 11–19. doi: 10.1002/2016GL071697
11. Genge M.J., Larsen J., Van Ginneken M., Suttle M.D. (2017) An urban collection of modern-day large micrometeorites: Evidence for variations in the extraterrestrial dust flux through the Quaternary. *Geology*. 45. pp. 119–122. doi: 10.1130/G38352.1
12. Campbell-Brown M., Koschny D. (2004) Model of the ablation of faint meteors. *Astronomy & Astrophysics.* 418. pp. 751–758. doi: 10.1051/0004-6361:20041001-1

13. Kikwaya J.-B., Campbell-Brown M., Brown P. (2011) Bulk density of small meteoroids. *Astronomy & Astrophysics*. 530(113). pp. 1–17. doi: 10.1051/0004-6361/201116431
14. Borovicka J., Macke R.J., Campbell-Brown M.D. (2019) Physical and chemical properties of meteoroids. In: *Meteoroids: Sources of Meteors on the Earth and Beyond.* Cambridge: Cambridge University Press. pp. 37–62. doi: 10.1080/00107514.2020.1736170
15. Leybenzon L.S. (1953) *Sobranie trudov. Tom 2. Podzemnaya gidrogazodinamika* [Collected papers. Volume 2. Underground gas- and hydrodynamics]. Moscow: Izdatel'stvo ANSSR.
16. Zolensky M., Nakamura-Messenger K., Rietmeijer F. (2008) Comparing Wild 2 particles to chondrites and IDPs. *Meteoritics & Planetary Science*. 43 pp. 261–272. doi: 10.1111/j.1945-5100.2008.tb00621.x
17. Patzold M., Andert T.P., Hahn M. (2019) The nucleus of comet 67P/Churyumov– Gerasimenko. Part I: The global view–nucleus mass, mass-loss, porosity, and implications. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 483. pp. 2337–2346. doi: 10.1093/mnras/sty3171
18. Rietmeijer F.J. (2004) Dynamic pyrometamorphism during atmospheric entry of large (10 micron) pyrrhotite fragments from cluster IDPs. *Meteoritics & Planetary Science*. 39. pp. 1869–1887. doi: 10.1111/j.1945-5100.2004.tb00082.x
19. Matlovič P., Tóth J., Kornoš L., Loehle S. (2020) On the sodium enhancement in spectra of slow meteors and the origin of Na-rich meteoroids. *Icarus*. 347. Article 113817. pp. 1–17. doi: 10.1016/j.icarus.2020.113817
20. Efremov V., Popova O., Glazachev D., Margonis A., Oberst J., Kartashova A. (2021) Small meteor ablation model: applying to Perseid observations. *Contributions of the Astronomical Observatory Skalnate Pleso*. 51. pp. 186–206. doi: 10.31577/caosp.2021.51.3.186
21. Costa G.C.C., Jacobson N.S., Fegley Jr.B. (2017) Vaporization and thermodynamics of forsterite-rich olivine and some implications for silicate atmospheres of hot rocky exoplanets. *Icarus*. 289. pp. 42–55. doi: 10.1016/j.icarus.2017.02.006
22. Jenniskens P. (2006) *Meteor Showers and Their Parent Comets*. Cambridge: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781316257104
23. Vida D., Brown P.G., Campbell-Brown M. (2018) Modelling the measurement accuracy of preatmosphere velocities of meteoroids. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 479(4). pp. 4307–4319. doi: 10.1093/mnras/sty1841
24. Sekanina Z., Chodas P.W. (2012) Comet C/2011 W3 (Lovejoy): Orbit determination, outbursts, disintegration of nucleus, dust-tail morphology, and relationship to new cluster of bright sungrazers. *The Astrophysical Journal.* 757. pp. 127–160. doi: 10.1088/0004-637X/757/2/127
25. Kimura H., Ishimoto H., Mukai T. (1997) A study on solar dust ring formation based on fractal dust models. *Astronomy and Astrophysics*. 326(1). pp. 263–270.
26. Jacchia L., Verniani F., Briggs R.E. (1967) An analysis of the atmospheric trajectories of 413 precisely reduced photographic meteors. *Smithsonian Contributions to Astrophysics.* 10(1). pp. 1–139. doi: 10.5479/si.00810231.10-1.1
27. Verniani F. (1965) On the luminous efficiency of meteors. *Smithsonian Contributions to Astrophysics*. 8(5). pp. 141–171. doi: 10.5479/si.00810231.8-5.141
28. Fleming D., Hawkes R., Jones J. (1993) Light Curves of Faint Television Meteors. In: *Meteoroids and their Parent Bodies.* Bratislava: Astronomical Institute SAS. pp. 261–264.
29. Bellot Rubio L.R., Martínez González M.J., Ruiz Herrera L., Licandro J., Martínez-Delgado D., Rodríguez-Gil P., Serra-Ricart M. (2002) Modeling the photometric and dynamical behavior of Super-Schmidt meteors in the Earth's atmosphere. *Astronomy & Astrophysics*. 389. pp. 680–691. doi: 10.1051/0004-6361:20020672
30. Babadzhanov P., Kokhirova G. (2009) Densities and porosities of meteoroids. *Astronomy & Astrophysics*. 495. pp. 353–358. doi: 10.1051/0004-6361:200810460
31. Hornung K., Merouane S., Hilchenbach M. (2016) A first assessment of the strength of cometary particles collected in-situ by the COSIMA instrument onboard ROSETTA. *Planetary and Space Science*. 133. pp. 63–75. doi: 10.1016/j.pss.2016.07.003

***Сведения об авторах*:**
**Ефремов Владимир Владимирович** – младший научный сотрудник Института динамики геосфер им. академика М.А. Садовского Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: efremov.vv@phystech.edu
**Попова Ольга Петровна** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института динамики геосфер им. академика М.А. Садовского Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: olga@idg.chph.ras.ru
**Глазачев Дмитрий Олегович** – научный сотрудник Института динамики геосфер им. академика М.А. Садовского Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: glazachevd@gmail.com
**Маргонис Анастасиос** – Кандидат наук, Берлинский технический университет, Институт геодезии и геоинформатики, Берлин, Германия. E-mail: anastasios.margonis@tu-berlin.de
**Оберст Юрген** – Профессор, Берлинский технический университет, Институт геодезии и геоинформатики, Берлин, Германия. E-mail: juergen.oberst@tu-berlin.de
**Карташова Анна Петровна** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института астрономии Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: akartashova@inasan.ru

***Information about the authors*:**
**Efremov Vladimir V.** (Junior Researcher, Sadovsky Institute of Geosphere Dynamics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation). E-mail: efremov.vv@phystech.edu
**Popova Olga P.** (Candidate of Physics and Mathematics, Sadovsky Institute of Geosphere Dynamics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation). E-mail: olga@idg.chph.ras.ru
**Glazachev Dmitry O.** (Researcher, Sadovsky Institute of Geosphere Dynamics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation). E-mail: glazachevd@gmail.com
**Margonis Anastasios (**Doctor of Engineering, Technical University Berlin, Institute of Geodesy and Geoinformation Science, Berlin, Germany. E -mail: anastasios.margonis@tu-berlin.de
**Oberst Jurgen** (Professor., Doctor of Natural Sciences, Chair of Planetary Geodesy, Technical University Berlin, Institute of Geodesy and Geoinformation Science, Berlin, Germany). E -mail: juergen.oberst@tu-berlin.de
**Kartashova Anna P.** (Candidate of Physics and Mathematics, Institute of Astronomy of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation). E -mail: akartashova@inasan.ru

*Статья поступила в редакцию 14.06.2022; принята к публикации 03.02.2023*

*The article was submitted 14.06.2022; accepted for publication 03.02.2023*

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2023 Математика и механика № 81
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 536.46, 662.612
doi: 10.17223/19988621/81/11

# Исследование особенностей зажигания и горения высокоплотных зарядов в условиях постоянного объема

**Константин Сергеевич Рогаев[1], Алексей Сергеевич Дьячковский[2], Александр Николаевич Ищенко[3], Нина Михайловна Саморокова[4], Евгений Юрьевич Степанов[5], Наталья Радиковна Гимаева[6]**

*[1, 2, 3, 4, 5,6] Томский государственный университет, Томск, Россия*
*[1] rogaev@ftf.tsu.ru*
*[2] lex_okha@mail.ru*
*[3] ichan@niipmm.tsu.ru*
*[4] Samorokova_nina@mail.ru*
*[5] stepanov_eu@mail.ru*
*[6] natalia.gimaeva@inbox.ru*

**Аннотация.** Представлено исследование некоторых особенностей зажигания высокоплотных зарядов в условиях постоянного объема. Приведено краткое описание используемой манометрической установки. Исследовано влияние некоторых факторов, таких как масса, тип воспламенителя и площадь поверхности горения, на воспламенение высокоплотного заряда и последующее горение. Представлены и проанализированы зависимости давления от времени при горении высокоплотного заряда в текстолитовом контейнере с различными диаметрами. Показано, что существует зависимость воспламенения пастообразного высокоплотного заряда от геометрических размеров контейнера, в котором он располагается.
**Ключевые слова:** манометрическая установка, воспламенение, модельное топливо, пастообразное топливо, скорость горения

**Благодарности:** Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда, проект № 21-79-10054, https://rscf.ru/project/21-79-10054/

**Для цитирования:** Рогаев К.С., Дьячковский А.С., Ищенко А.Н., Саморокова Н.М., Степанов Е.Ю., Гимаева Н.Р. Исследование особенностей зажигания и горения высокоплотных зарядов в условиях постоянного объема // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 81. С. 123–132. doi: 10.17223/19988621/81/11

Original article

# A study of the ignition and combustion of high-density charges under constant volume conditions

**Konstantin S. Rogaev[1], Aleksey S. D'yachkovskiy[2], Aleksandr N. Ishchenko[3], Nina M. Samorokova[4], Evgeniy Yu. Stepanov[5], Natal'ya R. Gimaeva[6]**

[1, 2, 3, 4, 5, 6] *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*
[1] *rogaev@ftf.tsu.ru*
[2] *lex_okha@mail.ru*
[3] *ichan@niipmm.tsu.ru*
[4] *Samorokova_nina@mail.ru*
[5] *stepanov_eu@mail.ru*
[6] *natalia.gimaeva@inbox.ru*

**Abstract.** The study of combustion and ignition of charges with promising propellants or powder compositions in terms of initial conditions is an urgent problem of modern ballistics. Generally, combustion and ignition of charges are tested in a manometric closed vessel. The charge ignition conditions may affect the subsequent reactions. When designing a shot with a new charge, it is necessary to know what determines the moment of ignition (gas pressure, time, pressure rise rate, type of igniter, etc.) and which factor has a greater effect on the ignition.

This paper presents a study of some features of high-density charge ignition under constant volume conditions. A brief description of the manometric setup is given. The effect of mass and type of igniter and combustion surface area on the high-density charge ignition and subsequent combustion is studied. The pressure-time dependences corresponding to high-density charge combustion in a textolite container with different diameters are presented and analyzed. The ignition of the paste high-density charge is revealed to be affected by the geometric dimensions of the container.

The parametric experimental study results show that the ignition conditions of a model high-density propellant (MHDP) strongly depend on the method of initiation, namely the number of burning particles and ambient pressure; however, these factors do not affect the dependence of the MHDP combustion rate on pressure. The ignition momentum is obtained as a function of the ratio of the container burning surface circumference to the burning surface area.

**Keywords:** manometric setup, combustion, model propellant, paste propellant, combustion rate

**Acknowledgments:** This study was carried out at the expenses of the grant from the Russian Science Foundation (project No. 21-79-10054), https://rscf.ru/project/21-79-10054/

**For citation:** Rogaev, K.S., D'yachkovskiy, A.S., Ishchenko, A.N., Samorokova, N.M., Stepanov, E.Yu., Gimaeva, N.R. (2023) A study of the ignition and combustion of high-density charges under constant volume conditions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 81. pp. 123–132. doi: 10.17223/19988621/81/11

## Введение

Исследование горения и воспламенения зарядов из перспективных топлив или пороховых составов в зависимости от начальных условий является актуальной задачей современной баллистики. Большинство исследований по горению и воспламенению зарядов проводят в манометрической бомбе [1–4]. Условия, при которых происходит воспламенение заряда, могут оказывать влияние на протекающие в дальнейшем реакции.

При баллистическом проектировании выстрела с новым зарядом необходимо знать, чем определяется момент воспламенения (давлением газа, временем, скоростью нарастания давления, типом воспламенителя и т.п.) и какие факторы больше влияют на процесс воспламенения [5–8].

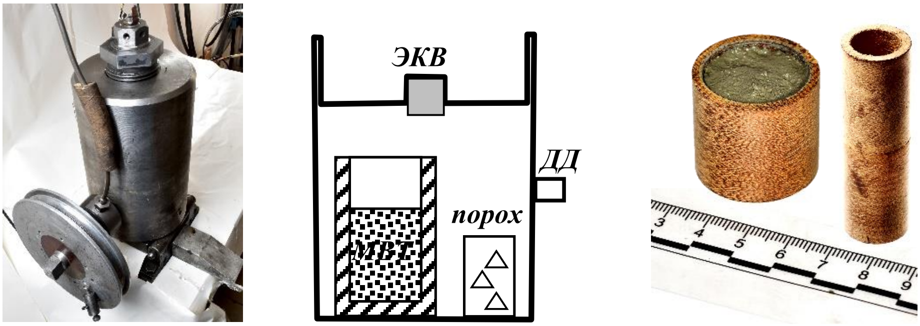
В настощей работе модельное пастообразное топливо (МВТ) имеет плотность около 1.6 г/см$^3$, за счет чего может достигать более высокой плотности заряжания в баллистических установках – до 1.5–1.6 г/см$^3$ – по сравнению с пироксилиновыми порохами ($\leq$ 1.0 г/см$^3$). Данные топлива из-за своей высокой скорости горения могут быть использованы в комбинированной схеме заряжания в качестве присоединенного заряда (ПЗ). В выстреле, как правило, ПЗ воспламеняется позже порохового заряда, и момент воспламенения может оказывать значительное влияние на баллистические параметры выстрела. Раннее воспламенение приводит к превышению давления, позднее – к недогоранию топлива за время выстрела.

Влияние большинства факторов на воспламенение можно оценить в условиях манометрической бомбы. В работе рассматривалось горение МВТ при нормальной температуре, в опыте оно размещалось в цилиндрическом текстолитовом контейнере. Исследовалось влияние типа и массы порохового заряда, площади поверхности горения на воспламенение МВТ.

## Экспериментальное исследование

Экспериментальное исследование особенностей зажигания МВТ проводилось в манометрической бомбе, внешний вид которой представлен на рис. 1. Максимальное давление, на которое рассчитана данная установка, – 300 МПа. Свободный объем камеры составляет 172 см$^3$ и представляет собой цилиндр, в котором сверху располагается воспламенитель – электрокапсюльная втулка (ЭКВ). Для снижения ударного воздействия от ЭКВ на исследуемый состав предусмотрена специальная конструкция гайки с отверстиями по бокам. В бомбе предусмотрены технологические отверстия для установки датчиков давления в двух различных сечениях, запальной пробки и крана для выпуска горячих газов. Сброс давления из камеры осуществляется в выпускной тракт дистанционно при помощи троса, намотанного на шкив крана. Схема размещения контейнера с топливом и порохового заряда в манометрический бомбе показана на рис. 1

Экспериментально обнаружено, что создаваемого ЭКВ давления для стабильного воспламенения МВТ недостаточно. Поэтому проведена серия опытов по исследованию массы дополнительного порохового заряда, способного повысить стабильность воспламенения МВТ. В серии опытов заряд МВТ одинаковой массы располагался в цилиндрических контейнерах одинаковой формы, но с разными навесками порохового воспламенителя.




*a* *b* *c*

**Рис. 1.** Внешний вид манометрической бомбы (*a*), схема рабочей камеры с зарядом (*b*), внешний вид текстолитовых контейнеров (*c*)
**Fig. 1.** (*a*) Configuration of a closed vessel, (*b*) scheme of a working chamber with a charge, and (*c*) configuration of textolite containers

В работе исследовано воспламенение МВТ массой 16.5 г в текстолитовом контейнере диаметром 25 мм (см. рис. 1, *c*), при этом масса воспламенителя из пироксилинового пороха марки «Ирбис» варьировала от 1 до 10 г. Для определения влияния начальной поверхности на воспламенение МВТ проведены опыты с контейнерами диаметрами от 10 до 40 мм.

С учетом свободного объема манометрической бомбы давление, формируемое воспламенителем ЭКВ, составляет $p_0$ = 2 МПа. Для массы воспламенительного заряда пороха $\omega_В$ = 2.5 г давление, формируемое в манометрической бомбе, составляет до 18 МПа, при этом весь пороховой заряд успевает сгореть полностью до начала момента горения МВТ. Для более точного определения закона горения МВТ в серии предварительных экспериментов определен закон горения порохов [4].

На рис. 2 представлено сравнение экспериментальных зависимостей давления от времени при горении МВТ в текстолитовом контейнере с внутренним диаметром $d$ = 25 мм при различных массах дополнительного порохового воспламенителя (1, 2.5, 5, 10 г). Видно, что после сгорания пороховой части заряда (в начале каждой кривой) происходит падение давления, а затем снова рост.

На рис. 3 (в приближенном масштабе) показан момент воспламенения для опыта с $\omega_В$ = 2.5 г, момент времени $t_В$, когда $dp/dt$ = 0, с определенной точностью можно считать началом горения МВТ, здесь $t_0$ – момент срабатывания ЭКВ.

В проведенных опытах время и давление воспламенения различны, поэтому нельзя говорить о воспламенении при определенном уровне давления. Для характеристики воспламенения используем величину интеграла

$$I_В = \int_{t_0}^{t_В} p dt, \quad (1)$$

которую будем называть импульсом воспламенения. Для этой серии опытов импульс воспламенения составляет примерно 0.65 МПа·с. Импульс воспламенения МВТ не является физической характеристикой МВТ.

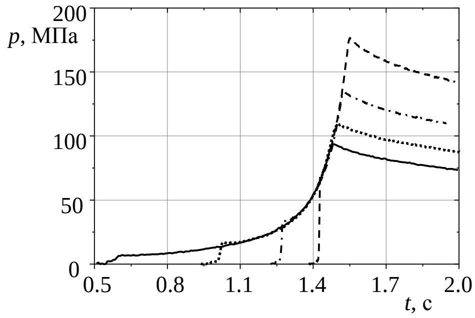



**Рис. 2.** Экспериментальная зависимость давления от времени при горении МВТ в текстолитовом контейнере с диаметром $d$ = 25 мм при массе порохового воспламенителя:
—— – 1 г, · · · · · · – 2.5 г, - · - · - · - · – 5 г, - - - - - – 10 г

**Fig. 2.** Experimental pressure-time dependence for MHDP combustion in a textolite container with a diameter of $d$ = 25 mm at the mass of the powder igniter of:
—— – 1 g, · · · · · · – 2.5 g, - · - · - · - · – 5 g, and - - - - - – 10 g

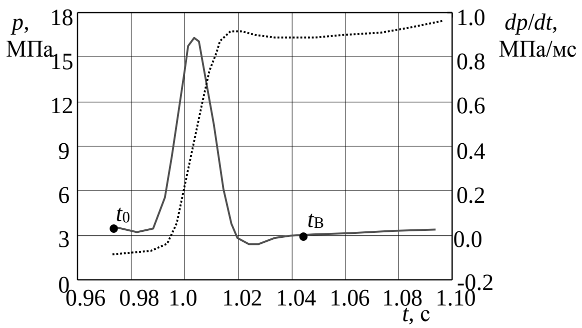



**Рис. 3.** Экспериментальная зависимость давления от времени (· · · · · ·) и его производная при воспламенении МВТ (——) при горении пороха

**Fig. 3.** Experimental pressure-time dependence (· · · · · ·) and pressure derivative with time for MHDP combustion (——) during powder combustion

Скорость горения топлива определялась по формуле

$$u(p) = \frac{d\psi_{\Pi}}{dt}\frac{V}{S}, \tag{2}$$

где $V$ – объем МВТ; $S$ – площадь поверхности горения; $\psi_{п}$ – доля сгоревшего МВТ.

Значение $\psi_{\Pi}(t)$ определялось на основании экспериментальной зависимости $p(t)$ с учетом горения пороха воспламенителя по формуле [1]

$$\psi_{\Pi} = \frac{(p - p_0)\left[W_1 - \frac{\omega_{\Pi}}{\delta_{\Pi}} - \alpha_B\omega_B\right] - f_B\omega_B}{(p - p_0)\left(\alpha_{\Pi} - \frac{1}{\delta_{\Pi}}\right)\omega_{\Pi} + f_{\Pi}\omega_{\Pi}},$$

где индекс «В» для пороха, «П» – для исследуемого МВТ; $W_1$ – свободный объем манометрической бомбы; $\omega_{\Pi}$ – масса МВТ; $\alpha_B$ – коволюм пороха; $\alpha_{\Pi}$ – коволюм МВТ; $f_B$ – сила пороха; $f_{\Pi}$ – сила МВТ; $\delta_{\Pi}$ – плотность МВТ.

Длительность процесса горения в манометрической бомбе порядка 1.0 с, что приводит к существенным теплопотерям в стенки камеры, однако они не оказывают влияния на зависимость скорости горения от давления. При этом в расчете доли сгоревшего МВТ необходимо использовать не паспортные значения силы топлива, а определенные по значению $p_{\max}$ [1]. Производная $d\psi/dt$ определялась численным дифференцированием.

Зависимости скорости горения МВТ от давления, полученные по формуле (2), в этих опытах практически совпадают (рис. 4), что говорит о том, что время воспламенения не влияет на дальнейшее горение топлива. При одном типе воспламенителя разной массы в цилиндрических контейнерах одного диаметра можно определить характерный импульс воспламенения.

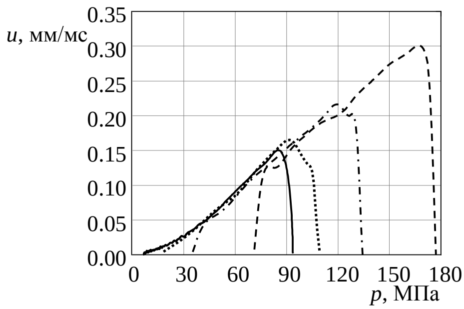



**Рис. 4.** Зависимость скорости горения от времени при горении МВТ в текстолитовом контейнере с диаметром $d$ = 25 мм при массе порохового воспламенителя:
—— – 1 г, · · · · · · – 2.5 г, - · - · - · - – 5 г, - - - - - – 10 г

**Fig. 4.** Time dependence of the combustion rate during MHDP combustion in a textolite container with a diameter of $d$ = 25 mm for the mass of the powder igniter of:
—— – 1 g, · · · · · · – 2.5 g, - · - · - · - – 5 g, and - - - - - – 10 g

Для исследованных в качестве дополнительного воспламенителя пироксилиновых пороховых зарядов – одноканальных и семиканальных («Ирбис», «Сунар», «4/7»), получены ожидаемые результаты: при одном типе (форме) контейнера и одинаковых компоновках заряда МВТ и порохового воспламенителя импульс воспламенения и скорости горения МВТ практически одинаковы.

Воспламенение МВТ при недогоревшем дополнительном пороховом заряде определялось с использованием зависимости доли сгоревшего пороха от интеграла давления [9]. На рис. 5 показана экспериментальная зависимость давления от времени при горении МВТ в текстолитовом контейнере при различном воздействии воспламенителя ЭКВ. В одном случае произведено непосредственное воздействие ударной волны и горячих частиц на поверхность МВТ, в другом воздействие производилось через рассеиватель. Видно, что при непосредственном воздействии на МВТ его горение начинается раньше по времени (импульс горения уменьшился до 0.065 МПа·с), однако при этом скорость горения, полученная по формуле (2), не меняется (рис. 6). Кроме того, это сравнение показывает существенное влияние горячих частиц ДРП на воспламенение МВТ.

Проведена серия опытов с одинаковой навеской МВТ и порохового воспламенителя, но с текстолитовым контейнером разного диаметра (рис/ 7). Из экспериментов видим, что в контейнерах большего диаметра уменьшается импульс воспламенения, при этом увеличивается максимальное давление за счет уменьшения теплопотерь при меньшем времени процесса горения.

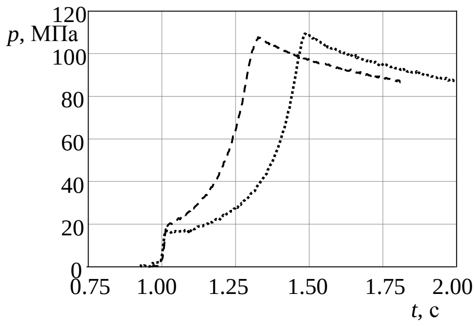



**Рис. 5.** Экспериментальная зависимость давления от времени при горении МВТ в текстолитовом контейнере: - - - - - с рассеивателем, · · · · · · – без рассеивателя
**Fig. 5.** Experimental pressure-time dependence of MHDP combustion in a textolite container: - - - - - – with a diffuser and · · · · · · – without a diffuser

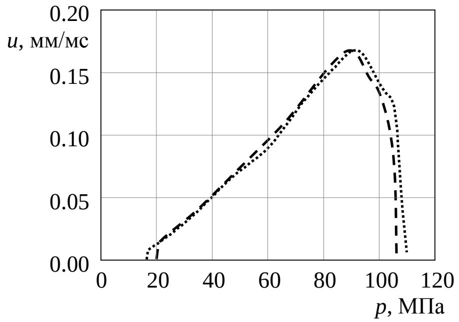



**Рис. 6.** Зависимость скорости горения МВТ от давления: - - - - - с рассеивателем, · · · · · · – без рассеивателя
**Fig. 6.** Dependence of MHDP combustion rate on pressure: - - - - - – with a diffuser and · · · · · · – without a diffuser

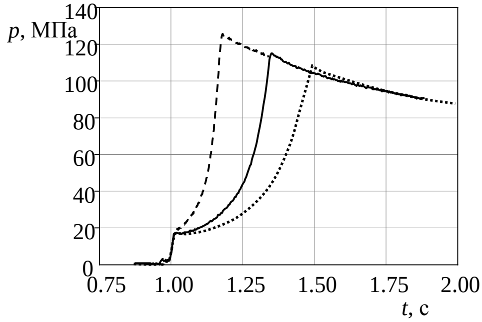



**Рис. 7.** Экспериментальная зависимость давления от времени при горении МВТ в текстолитовом контейнере с диаметром: · · · · · – 25 мм; ·——– 30 мм - - - - - – 40 мм
**Fig. 7.** Experimental pressure-time dependence of MHDP combustion in a textolite container with a diameter of: · · · · · – 25 mm, ·——– 30 mm, and - - - - - – 40 mm

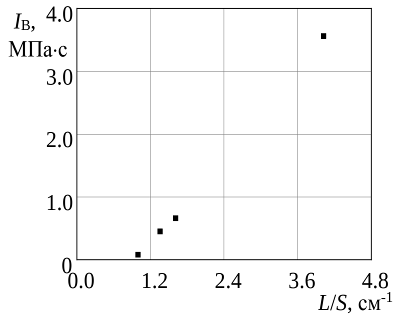



**Рис. 8.** Расчетная зависимость импульса воспламенения от $L/S$
**Fig. 8.** Calculated dependence of the ignition momentum on $L/S$

Видно, что существует зависимость импульса воспламенения от отношения длины окружности поверхности горения $L$ к площади поверхности горения $S$ (рис. 8). То есть чем меньше влияние боковой поверхности, тем быстрее воспламеняется МВТ. Возможно, это связано с оттоком тепла в стенку контейнера во время нагрева поверхности продуктами горения пороха.

## Заключение

В результате проведенных параметрических экспериментальных исследований получено, что условия воспламенения МВТ в значительной степени зависят от способа инициации (количество горящих частиц, окружающее давление), однако данные факторы не влияют на зависимость скорости горения МВТ от давления. Отмечено, что существует зависимость импульса воспламенения от отношения длины окружности поверхности горения контейнера к площади поверхности горения. Полученные особенности зажигания и горения МВТ необходимо учитывать при баллистическом проектировании компоновки заряда в выстреле из стольных баллистических систем.

### Список источников

1. *Серебряков М.Е.* Внутренняя баллистика ствольных систем и пороховых ракет. М. : Оборонгиз, 1962. 703 с.
2. *Botnan J.I.* Testing of M7 propellant at different temperatures in closed vessel. Norwegian Defense Research Establishment (FFI), 2009. 80 p.
3. *Boulkadid M.K., Lefebvre M.H., Jeunieau L., Dejeaifve A.* Temperature sensitivity of propellant combustion and temperature coefficients of gun performance // Cent. Eur. J. Energ. Mater. 2016. V. 13 (4). P. 1005–1022.
4. *Хоменко Ю.П., Ищенко А.Н., Саморокова Н.М.* Интегродифференциальный метод определения законов скорости горения конденсированных систем в условиях постоянного объема // Физика горения и взрыва. 1999. Т. 35, № 1. С. 67–71.
5. *Ермолаев Б.С., Сулимов А.А., Романьков А.В., Королев В.П.* Влияние начальной температуры на характеристики выстрела при использовании блочных метательных зарядов // Химическая физика. 2018. Т 37, № 3. С. 27–34.
6. *Heath T. Martin E.B., Kenneth K.K.* Effect of Initial Temperature on the Interior Ballistics of a 120-mm Mortar System // Journal of Applied Mechanics. 2013. № 80 (3). Art. 031408. P. 1–11.

7. *Leciejewski Z.K., Surma Z.* Investigation of influence of propellant charge temperature on gun firing phenomenon // High-Energetic Materials Instytut Przemysłu Organicznego. 2009. V. 1. P. 42–47.
8. *Ищенко А.Н., Дьячковский А.С., Касимов В.З., Зыкова А.И., Саморокова Н.М.* О влиянии начальной температуры заряда на баллистические характеристики выстрела // Сборник трудов X Всерос. науч. конф., 3–5 сентября 2018 г., г. Томск. Томск : Том. гос. ун-т, 2018. С. 41–43.
9. *Барышев М.С., Бураков В.А., Ищенко А.Н., Саморокова Н.М., Хоменко Ю.П.* Уточнение закона горения ДРП на основе результатов манометрических испытаний // Сборник докладов научной конференции Волжского регионального центра РАРАН, 2010, г. Саров. Саров : Изд-во РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2010. Т. 2. С. 1007–1013.

**References**

1. Serebryakov M.E. (1962) *Vnutrennyaya ballistika stvol'nykh sistem i porokhovykh raket* [Internal ballistics of barrel systems and powder rockets]. Moscow: Oborongiz.
2. Botnan J.I. (2009) Testing of M7 propellant at different temperatures in closed vessel. *Norwegian Defense Research Establishment (FFI).*
3. Boulkadid M.K., Lefebvre M.H., Jeunieau L., Dejeaifve A. (2016) Temperature sensitivity of propellant combustion and temperature coefficients of gun performance. *Central European Journal of Energetic Materials.* 13(4). pp. 1005–1022. doi: 10.22211/cejem/67229
4. Khomenko Yu.P., Ishchenko A.N., Samorokova N.M. (1999) Integrodifferentsial'nyy metod opredeleniya zakonov skorosti goreniya kondensirovannykh sistem v usloviyakh postoyannogo ob"ema [An integro-differential method for determining the burning rate laws for condensed systems under constant volume conditions]. *Fizika goreniya i vzryva – Combustion, Explosion and Shock Waves*. 35(1). pp. 67–71.
5. Ermolaev B.S., Sulimov A.A., Roman'kov A.V., Korolev V.P. (2018) Effect of the initial temperature on the characteristics of the shot with a block charge. *Russian Journal of Physical Chemistry B: Focus on Physics.* 12. pp. 232–238. doi: 10.1134/S1990793118020057
6. Martin H.T., Boyer E., Kuo K.K. (2013) Effect of initial temperature on the interior ballistics of a 120-mm mortar system. *Journal of Applied Mechanics*. 80(3). Article 031408. pp. 1–11. doi: 10.1115/1.4023318
7. Leciejewski Z.K., Surma Z. (2009) Investigation of influence of propellant charge temperature on gun firing phenomenon. *High-Energetic Materials Instytut Przemysłu Organicznego.* 1. pp. 42–47.
8. Ishchenko A.N., D'yachkovskiy A.S., Kasimov V.Z., Zykova A.I., Samorokova N.M. (2018) O vliyanii nachal'noy temperatury zaryada na ballisticheskie kharakteristiki vystrela [On the effect of the initial charge temperature on ballistic characteristics of a shot]. *Proceedings of the X All-Russian Scientific Conference, Tomsk.* pp. 41–43.
9. Baryshev M.S., Burakov V.A., Ishchenko A.N., Samorokova N.M., Khomenko Yu.P. (2010) Utochnenie zakona goreniya DRP na osnove rezul'tatov manometricheskikh ispytaniy [Improvement of the burning law for a black powder according to manometric test results]. *Proceedings of reports of the scientific conference of the Volga RCRAS*. Sarov: RFNC-VNIIEF Publishing House. 2. pp. 1007–1013.

***Сведения об авторах*:**

**Рогаев Константин Сергеевич** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: rogaev@ftf.tsu.ru
**Дьячковский Алексей Сергеевич** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: lex_okha@mail.ru

**Ищенко Александр Николаевич** – доктор физико-математических наук, директор Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru
**Саморокова Нина Михайловна** – научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: Samorokova_nina@mail.ru
**Степанов Евгений Юрьевич** – младший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: stepanov_eu@mail.ru
**Гимаева Наталья Радиковна** – инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: natalia.gimaeva@inbox.ru

***Information about the authors*:**
**Rogaev Konstantin S. (**Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: rogaev@ftf.tsu.ru
**D'yachkovskiy Aleksey S.** (Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lex_okha@mail.ru
**Ishchenko Aleksandr N.** (Doctor of Physics and Mathematics, Director, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru
**Samorokova Nina M.** (Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: Samorokova_nina@mail.ru
**Stepanov Evgeniy Yu.** (Junior Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: stepanov_eu@mail.ru
**Gimaeva Natal'ya R.** (Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: natalia.gimaeva@inbox.ru

*Статья поступила в редакцию 29.04.2022; принята к публикации 03.02.2023*

*The article was submitted 29.04.2022; accepted for publication 03.02.2023*

ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2023 Математика и механика № 81
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 532.3, 519.6
doi: 10.17223/19988621/81/12

# Инженерный расчет разноглубинного рыболовного трала

**Алексей Олегович Ражев[1], Александр Алексеевич Недоступ[2]**

*[1, 2] Калининградский государственный технический университет, Калининград, Россия*
*[1] aleksej.razhev@klgtu.ru*
*[2] nedostup@klgtu.ru*

**Аннотация.** Приводится метод расчета силовых и геометрических характеристик разноглубинного рыболовного трала, состоящего из гибких нитевидных элементов канатной и сетной частей, связанных между собой и с твердотельными элементами оснастки, основанный на методе конечных элементов. Рассмотрена реализация метода на графическом процессоре ЭВМ в составе системы автоматизированного проектирования орудий промышленного рыболовства. Приведены результаты работы системы при расчете физической модели трала в виде числовых показателей скорости вычислений, объема требуемой памяти, точности вычислений, их сравнительный анализ с результатами экспериментов в гидроканале с той же моделью.
**Ключевые слова:** математическая модель, имитация, расчет, графический процессор, рыболовный трал

**Благодарности:** Исследование выполнено в рамках государственного задания по теме «Разработка физических, математических и предсказательных моделей процессов эксплуатации донного и разноглубинного траловых комплексов».

**Для цитирования:** Ражев А.О., Недоступ А.А. Инженерный расчет разноглубинного рыболовного трала // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 81. С. 133–148. doi: 10.17223/19988621/81/12

Original article

# Engineering calculation of a midwater fishing trawl

**Aleksey O. Razhev[1], Aleksandr A. Nedostup[2]**

*[1, 2] Kaliningrad State Technical University, Kaliningrad, Russian Federation*
*[1] aleksej.razhev@klgtu.ru*
*[2] nedostup@klgtu.ru*

**Abstract.** This paper presents a method for calculating the power and geometric properties of a midwater fishing trawl, which is a complicated engineering structure made up of tied flexible (threads, ropes, flap) and rigid (rigging, trawl boards) elements. A computational

model, the functional relations for internal forces and geometric characteristics of the trawl, and a calculation procedure based on the finite element method are proposed. The computational algorithm is implemented on a graphics processing unit of a personal computer with the use of DirectCompute, Shader Model 5, and high-level shader language. The performance and resource intensity of the algorithm applied in the computer-aided design system for industrial fishing gear are assessed in terms of the number of trawl nodes and computing equipment. A comparative analysis of the calculated and experimentally obtained characteristics of the trawl physical model is presented. According to the results, the computational error in geometric characteristics and internal forces is less than 3 and 5%, respectively.
**Keywords:** mathematical model, simulation, calculation, graphics processing unit, fishing trawl

**Acknowledgments:** The research was carried out within the state assignment "Development of Physical, Mathematical, and Predictive Models of the Bottom and Midwater Trawl System Operation".

**For citation:** Razhev, A.O., Nedostup, A.A. (2023) Engineering calculation of a midwater fishing trawl. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 81. pp. 133–148. doi: 10.17223/19988621/81/12

## Введение

Рыболовный трал представляет собой сложное инженерное сооружение, состоящее из канатно-сетной части, сетного мешка и элементов оснастки (твердотельных и гибких). Канатно-сетная часть и сетной мешок являются канатно-веревочными изделиями (КВИ), основу которых составляют соединенные между собой гибкие нитевидные элементы (нитки, веревки, канаты и др.). К твердотельным элементам относятся траловые доски, которые выполняют функцию обеспечения горизонтального раскрытия устья трала, кухтыли, скобы, вертлюги и др. К твердотельным элементам также можно отнести места соединения нитевидных элементов – узлы.

На этапе проектирования инженеру и конструктору необходимо оперативно оценивать форму трала при различных его конструктивных характеристиках, различных характеристиках материалов и условиях эксплуатации с целью их оптимального подбора. В процессе эксплуатации рыбодобытчикам необходимо подбирать элементы оснастки орудия лова, выполнять их регулировку с учетом условий предстоящего лова. Настройка трала в процессе эксплуатации влияет на глубину траления, раскрытие трала, его селективность.

Разрабатываемая система автоматизированного проектирования орудий промышленного рыболовства (САПР-ОР) предназначена для проектирования рыболовного трала, трехмерной визуализации его формы под действием различных гидростатических (веса в воде или плавучести) и гидродинамических (вызванных обтеканием элементов трала водой в процессе траления) сил, расчета нагрузок на элементы трала [1, 2]. В процессе разработки были созданы математические и имитационные модели с эффективным задействованием современных вычислительных ресурсов персонального компьютера.

## Материалы и методы

Основой математической модели является метод точечных масс [3], представляющий разновидность метода конечных элементов (МКЭ) [4–6]. В методе точечных масс используется конечный элемент – упругий стержень, имеющий два узла и одну связь. Элемент определяет зависимость между длиной связи (расстоянием между узлами) и силой реакции связи (силой натяжения в гибком элементе, силой противодействия изгибу).

Анализ формы трала и нагрузок в его элементах в процессе траления проводится при заданных внешних условиях (заданной скорости траления). В таких условиях постановку задачи можно свести к статической.

Для корректного отображения мест соединения нитевидных элементов необходимо учитывать их изгибную жесткость вблизи узлов, иначе переход от нитевидного элемента к узлу будет неплавным и визуально заметным. В расчетной схеме методом точечных масс нитевидный элемент представим в виде цепной линии, состоящей из $n$ узлов (точечных масс) и связей, описывающих взаимодействие между узлами. Для каждого узла расчетной схемы введем дополнительную связь, характеризующую реакцию на изгиб. Расположим узлы равноудаленно друг от друга по всей длине элемента. На рис. 1 показаны участок нитевидного элемента, включающий три соседних узла $i$, $j = i + 1$, $k = i + 2$ (точками обозначены узлы, линиями – связи), и силы, действующие на узел $j$.

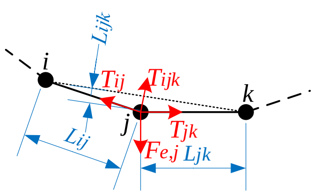



**Рис. 1.** Расчетная схема нитевидного элемента
**Fig. 1.** Calculation scheme of a thread-like element

На рис. 1 используются следующие обозначения: $L_{ij}$ – длина участка $ij$, $L_{jk}$ – длина участка $jk$ после деформации; $T_{ij}$, $T_{jk}$ – силы натяжения (положительная при растяжении, отрицательная при сжатии) участка $ij$ и $jk$ соответственно; $T_{ijk}$ – сила противодействия изгибу в узле $j$; $\mathbf{F}_{e,j}$ – сумма внешних сил, приложенных к узлу $j$.

Для каждого узла введем весовой коэффициент. Для свободных (незакрепленных) узлов зададим

$$w = \frac{L_{\text{В}}}{2G},$$

где $w$ – весовой коэффициент для узла; $L_{\text{В}}$ – длина элемента в ненагруженном состоянии; $G$ – вес элемента в воде (либо плавучесть со знаком минус). Для фиксированных узлов (точек крепления ваеров на судне) зададим $w = 0$.

Для учета внешних сил для каждого узла $i$ запишем в дифференциальной векторной форме зависимость, связывающую узловое перемещение с изменением внешней силы (гидростатической и гидродинамической):

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{d\mathbf{F}_{e,i}} = w_i, \qquad (1)$$

где $\mathbf{r}_i$ – положение узла в пространстве; $\mathbf{F}_{e,i}$ – сумма внешних сил, приложенных к узлу.

Для учета внутренних сил натяжения для каждой пары соседних узлов $i$ и $j$ запишем дифференциальные уравнения, связывающие удлинение с силой натяжения:

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{d\mathbf{F}_{ij}} = w_i, \ \frac{d\mathbf{r}_j}{d\mathbf{F}_{ij}} = -w_j, \ d\mathbf{F}_{ij} = \frac{2dT_{ij}}{L_{ij}}\left(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\right), \tag{2}$$

при

$$dT_{ij} = \frac{L_{ij} - L_0\left(1 + 4T_{ij} / \left(\pi d^2 E_x\right)\right)}{2\left(w_i + w_j\right)}$$

и начальных условиях для всех узлов $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ для всех связей $T_{ij} = 0$, где $\mathbf{F}_{ij}$ – вектор внутренней силы натяжения участка $ij$, направленный от узла $i$ к узлу $j$; $L_0$ – длина участка в ненагруженном состоянии. Для учета внутренних сил противодействия изгибу для каждых трех соседних узлов $i, j$ и $k$ запишем дифференциальные уравнения, связывающие деформацию изгиба с силой противодействия изгибу:

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{d\mathbf{F}_i} = w_i, \ \frac{d\mathbf{r}_j}{d\mathbf{F}_j} = w_j, \ \frac{d\mathbf{r}_k}{d\mathbf{F}_k} = w_k,$$

$$d\mathbf{F}_i = -\frac{dT_{ijk}}{L_{ij}^2 L_{jk}}\left(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\right)\times\left(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j\right)\times\left(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\right),$$

$$d\mathbf{F}_k = -\frac{dT_{ijk}}{L_{ij} L_{jk}^2}\left(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\right)\times\left(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j\right)\times\left(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j\right),$$

$$-d\mathbf{F}_j = d\mathbf{F}_i + d\mathbf{F}_k, \tag{3}$$

при

$$dT_{ijk} = \frac{L_{ijk} - T_{ijk} L_0^3 / \left(48 E_y J\right)}{w_i + w_j + w_k},$$

$$2L_{ijk} = \left\|\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_k - 2\mathbf{r}_j\right\| \tag{4}$$

и начальных условиях для всех узлов $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ для всех связей $T_{ijk} = 0$, где $\mathbf{F}_i$, $\mathbf{F}_j$, $\mathbf{F}_k$ – векторы внутренних сил противодействия изгибу, приложенных к узлам $i, j, k$ соответственно; $E_y J$ – изгибная жесткость элемента. В уравнении (4) двойными вертикальными скобками обозначается оператор взятия абсолютного значения.

Рассмотрим численный метод решения уравнений (1)–(3) итерационным методом последовательного приближения. Алгоритм решения состоит из двух вложенных циклов. Во внешнем цикле вычисляются узловые перемещения под действием внешних сил, во внутреннем – внутренних. При переходе к конечно-разностной схеме произведем замены:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}^{[i+1]} - \mathbf{r}^{[i]}, \ dT = T^{[i+1]} - T^{[i]},$$

где $[i]$ – номер итерации.

Условие завершения итерационного процесса во внутреннем цикле – достижение заданной минимальной невязки по всем перемещениям

$$dr < \varepsilon_L L_0,$$

во внешнем цикле – равнодействующая сила, приложенная к каждому узлу, меньше заданной минимальной невязки по внешним силам

$$\left\| \mathbf{F}_{e,j} + T_{ij}\frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{L_{ij}} + T_{jk}\frac{\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j}{L_{jk}} \right\| < \varepsilon_F F_{e,j},$$

где $\varepsilon_L$ – заданная погрешность по геометрическим характеристикам; $\varepsilon_F$ – заданная погрешность по силовым характеристикам.

При статической постановке исследуется установившийся режим; кинематика твердотельных элементов не учитывается. Для определения сил, действующих на привязанные к твердотельным элементам узлы математической модели КВИ, учитываются моменты и силы относительно их центра масс в установившемся режиме (без учета скорости и ускорения вращения элемента относительно его центра масс и при нулевой скорости перемещения элемента относительно трала). Таким образом, силы гидродинамического сопротивления при статической постановке задачи зависят только от скорости потока воды относительно твердотельного элемента (скорости траления) и ориентации элемента (углов Эйлера) [7] относительно вектора скорости потока воды.

Для расчета сил гидродинамического сопротивления твердотельных элементов произвольной формы в точках соединения с гибкими элементами необходимо учитывать поле давлений на поверхности твердотельного элемента при заданных скоростях потока и ориентации элемента относительно потока. Данная задача решается неявным численным методом решения систем дифференциальных уравнений гидродинамики в частных производных (уравнений Навье–Стокса) с применением линеаризации, метода покоординатного расщепления на трехмерной пространственной сетке и последующим решением трехдиагональных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом прогонки во внутренних итерациях с коррекцией нелинейных коэффициентов во внешних итерациях [8].

Из-за высокой трудоемкости процесса решения на ЭВМ систем уравнений гидродинамики был разработан метод табличной подстановки с вычислением промежуточных значений интерполяцией. Суть метода заключается в нахождении значений коэффициентов гидродинамических сил $c_x$, $c_y$, $c_z$ в точках соединения с гибкими элементами путем квадратичной интерполяции значений в ячейках трехмерного массива, индексы которого определяются по значениям углов Эйлера путем линейного соответствия. Значение гидродинамической составляющей внешней силы, приложенной к узлу, определяются по формуле

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} S\rho V^2 \mathbf{c},$$

где $\mathbf{R}$ – вектор силы гидродинамического сопротивления; $S$ – характерная площадь твердотельного элемента; $\rho$ – плотность воды; $V$ – модуль скорости потока относительно твердотельного элемента; $\mathbf{c}$ – вектор гидродинамических коэффициентов.

Построение таблиц происходит однократно для каждого типа изделия. Данные таблиц помещаются в базу данных элементов вместе с их трехмерными моделями и другими привязанными.

Указанный метод позволяет определить силы гидродинамического сопротивления без учета зависимости гидродинамических коэффициентов от скорости.

Поскольку в режимах траления такая зависимость невысокая, метод подходит для быстрых предварительных расчетов. Для окончательных расчетов необходимо использовать таблицы большей размерности, в которых в качестве входных величин добавляются скорость потока и вязкость (например, при использовании проектируемого орудия рыболовства в водоемах с различной соленостью). То же относится и к не совсем линейной зависимости сил от характерной площади. Для однотипных элементов, но разного размера, можно использовать отдельные таблицы преобразований. В итоге в задачах расчета с повышенной точностью таблица преобразований становится четырех-шестимерной, а в ее ячейках указываются не гидродинамические коэффициенты, а силы гидродинамического сопротивления.

Кроме гибких ниток, веревок и канатов в рыболовных тралах используются гибкие ваеры, кабели, гидродинамические щитки. Последние предназначены для увеличения подъемной силы верхней подборы с целью обеспечения вертикального раскрытия устья трала. Расчет ваеров и кабелей происходит аналогично расчету нитевидных элементов.

Рассмотрим метод описания гидродинамического щитка в общей математической модели точечных масс для гибких элементов. Разместим точечные массы в узлах прямоугольной регулярной сетки на поверхности щитка. Определим связи между узлами так, как показано на рис. 2.

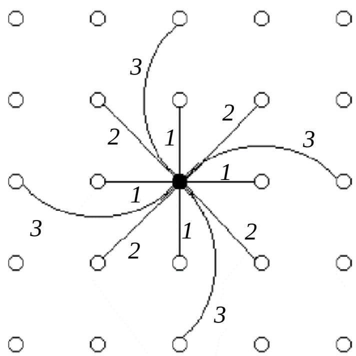



**Рис. 2.** Взаимодействия точечных масс в гидродинамическом щитке
**Fig. 2.** Mass-point interactions in a hydrodynamic flap

На рис. 2 цифрами обозначены: *1* – связи, определяющие противодействие сжатию / растяжению, аналогично связям для нитевидных элементов; *2* – связи, определяющие противодействие сдвигу слоев материала щитка; *3* – связи, определяющие противодействие изгибу щитка.

Вывод зависимостей, связывающих силовые и геометрические характеристики гидродинамического щитка с учетом указанных выше связей, приведен в [9].

С целью визуализации результатов расчета в САПР-ОР был разработан программный модуль 3D-визуализатора, показанный на рис. 3. 3D-визуализатор предназначен для отображения пространственной формы орудия рыболовства и его силовых характеристик (сил натяжения в гибких элементах). На рис. 4, 5 показан 3D-визуализатор в режиме отображения силовых характеристик трала (см. рис. 4) и в режиме повышенной детализации участка верхней подборы (см. рис. 5).

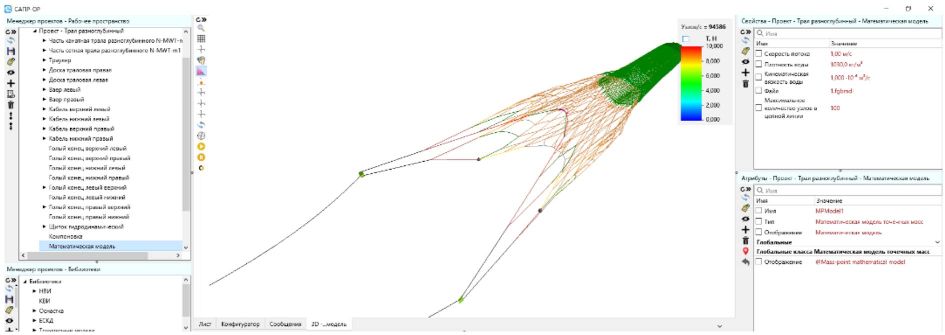


**Рис. 3.** 3D-визуализатор
**Fig. 3.** 3D visualizer

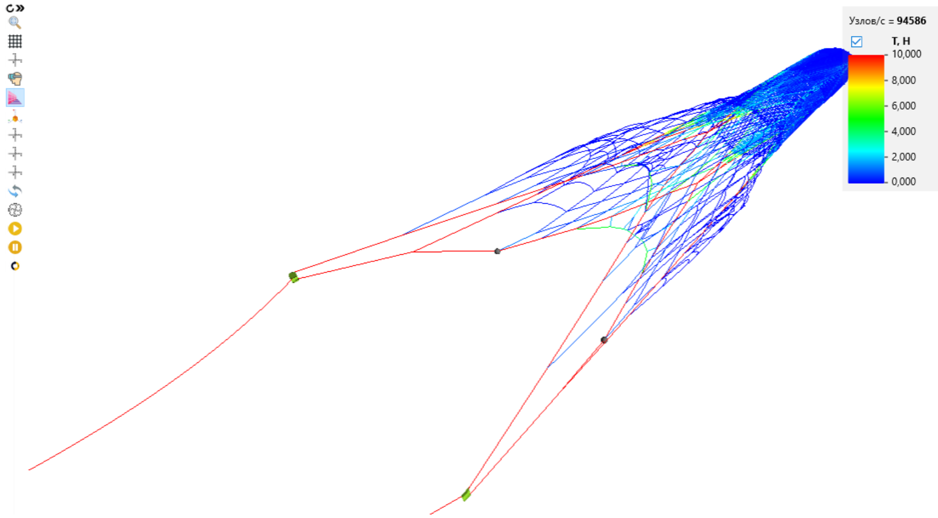



**Рис. 4.** Силовые характеристики трала
**Fig. 4.** Tension forces in trawl elements

**Рис. 5.** Детализированный вид участка верхней подборы
**Fig. 5.** A detailed view of a headline part

В 3D-визуализаторе при формировании изображения трехмерной сцены на экране используется встроенный в операционную систему Windows API Direct3D, входящий в библиотеку DirectX [10]. Орудие рыболовства может отображаться в следующих режимах:

– изометрическая проекция (в трех плоскостях);

– перспективная проекция;

– стереоскопический (в случае наличия устройства стерео-отображения) [11].

Описанный метод расчета реализован на графическом процессоре с использованием DirectCompute, шейдерной модели версии 5 и языка программирования шейдеров HLSL [12]. Ниже приведен участок кода шейдера для расчета внутренних сил:

```
[numthreads(1024,1,1)]
void IntLinks(uint3 i : SV_DispatchThreadID)
{
	if(i.x < LinksCount)
	{
			int4 j = CLinks[i.x].nodes;
			float w1 = CNodes[j.x].wi, w2 = CNodes[j.y].wi;
			float4 d = Nodes[j.y].X - Nodes[j.x].X;
			float L2 = dot(d, d);
			float L = sqrt(L2);
			float w = w1 + w2;
…
	}

		DeviceMemoryBarrierWithGroupSync();
}
```

Перед расчетом задаются следующие параметры условий лова: скорость траления, плотность, вязкость воды. Для настройки математической модели для каждой группы ниток, веревок, канатов, применяемых в рыболовном трале, задается количество узлов в цепной линии при разбиении гибкого нитевидного элемента на элементарные связи. Указанные входные характеристики вместе с результатами расчета сохраняются в файл модели орудия рыболовства для возможности последующей его загрузки в САПР-ОР. Результаты расчета представляют собой списки узлов и связей (граф математической модели) с их входными (диаметр, структура, жесткость и др.) и расчетными (сила натяжения связи, координаты узлов и др.) характеристиками.

## Апробация результатов и их анализ

Для определения вычислительных показателей описанного метода расчета было проведено тестирование САПР-ОР на оборудовании с основными характеристиками, представленными в табл. 1–6.

Конфигурации оборудования № 1 и № 2 выбраны исходя из проверки выполнения минимальных требований, предьявленных к аппаратной части. В процессе тестирования вся необходимая информация отображалась в САПР-ОР.

Таблица 1

**Характеристики оборудования № 1**

| № | Наименование | Характеристика |
|---|---|---|
| 1 | Персональный компьютер с ОС MS Windows 10 и выходом в Интернет | |
| 1.1 | Центральный процессор | 4-ядерный AMD GX-415GA, 1.5 ГГц |
| 1.2 | Видеоадаптер | Встроенный в центральный процессор, AMD Radeon HD 8330E, 1 Гб |
| 1.3 | Оперативная память | Двухканальная, емкостью 16 Гб |
| 1.4 | Диск | SSD, емкостью 512 Гб |
| 2 | Монитор | Диагональ 19 дюймов, форм-фактор 4:3, разрешение 1 280 × 1 024 |

Таблица 2

**Характеристики оборудования № 2**

| № | Наименование | Характеристика |
|---|---|---|
| 1 | Персональный компьютер с ОС MS Windows 10 и выходом в Интернет | |
| 1.1 | Центральный процессор | 2-ядерный Intel Core i5-5300U, 2.3 ГГц |
| 1.2 | Видеоадаптер | Intel HD Graphics 5500, 1 Гб |
| 1.3 | Оперативная память | Двухканальная, емкостью 8 Гб |
| 1.4 | Диск | SSD, емкостью 256 Гб |
| 2 | Монитор | Диагональ 15 дюймов, форм-фактор 16:9, разрешение 1 920 × 1 080 |

Таблица 3

**Характеристики оборудования № 3**

| № | Наименование | Характеристика |
|---|---|---|
| 1 | Персональный компьютер с ОС MS Windows 10 и выходом в Интернет | |
| 1.1 | Центральный процессор | 4-ядерный AMD Phenom II x4, 3.2 ГГц |
| 1.2 | Видеоадаптер | AMD Radeon HD7850, 1 Гб |
| 1.3 | Оперативная память | Двухканальная, емкостью 12 Гб |
| 1.4 | Диск | Гибридный, емкостью 2 Тб |
| 2 | Монитор 1 | Диагональ 19 дюймов, форм-фактор 4:3, разрешение 1 280 × 1 024 |
| 3 | Монитор 2 | Диагональ 28 дюймов, форм-фактор 16:9, разрешение 3 840 × 2 160 |
| 4 | Устройства 3D-ввода | Датчик движения рук Leap Motion 3D |
| 5 | Устройство объемной стереоскопической визуализации | 3D-телевизор с LCD-экраном поляризационного типа, диагональ 42 дюйма, форм-фактор 16:9, разрешение 1 920 × 1 080 |
| 6 | Принтер | Лазерный |
| 7 | Сканер | Планшетный |

Таблица 4

**Характеристики оборудования № 4**

| № | Наименование | Характеристика |
|---|---|---|
| 1 | Персональный компьютер с ОС MS Windows 10 и выходом в Интернет | |
| 1.1 | Центральный процессор | 8-ядерный AMD Ryzen 7 2700 3.2 ГГц |
| 1.2 | Видеоадаптер | AMD Radeon HD 7850, 1 Гб |
| 1.3 | Оперативная память | Двухканальная, емкостью 16 Гб |
| 1.4 | Диск | SSD, емкостью 1 Тб |
| 2 | Монитор | Диагональ 19 дюймов, форм-фактор 16:9, разрешение 1 920 × 1 080 |
| 3 | Устройства 3D-ввода | Датчик движения рук Leap Motion 3D |
| 4 | Устройство объемной стереоскопической визуализации | 3D-телевизор с LCD-экраном поляризационного типа, диагональ 42 дюйма, форм-фактор 16:9, разрешение 1 920 × 1 080 |
| 5 | Принтер, сканер | МФУ |

Таблица 5

**Характеристики оборудования № 5**

| № | Наименование | Характеристика |
|---|---|---|
| 1 | Персональный компьютер с ОС MS Windows 10 и выходом в Интернет | |
| 1.1 | Центральный процессор | 6-ядерный Intel Xeon E-2176M, 2.7 ГГц |
| 1.2 | Видеоадаптер | NVIDIA Quadro P2000, 4 Гб |
| 1.3 | Оперативная память | Двухканальная, емкостью 64 Гб |
| 1.4 | Диск | SSD, емкостью 512 Тб |
| 2 | Монитор | Диагональ 15 дюймов, форм-фактор 16:9, разрешение 2 560 × 1 440 |

Таблица 6

**Характеристики оборудования № 6**

| № | Наименование | Характеристика |
|---|---|---|
| 1 | Персональный компьютер с ОС MS Windows 10 и выходом в Интернет | |
| 1.1 | Центральный процессор | 6-ядерный Intel Core i7-10750H, 2.6 ГГц |
| 1.2 | Видеоадаптер | NVIDIA GeForce RTX 3060 Laptop, 1 Гб |
| 1.3 | Оперативная память | Двухканальная, емкостью 8 Гб |
| 1.4 | Диск | SSD, емкостью 512 Гб |
| 2 | Монитор | Диагональ 15 дюймов, форм-фактор 16:9, разрешение 1 920 × 1 080 |

Тестирование выполнялось в разрезах характеристик оборудования и количества узлов модели (расчетной схемы). При тестировании использовалось две модели:

– с большим количеством узлов – разноглубинного трала (см. рис. 4);

– с небольшим количеством узлов – участка ставной сети (рис. 6).

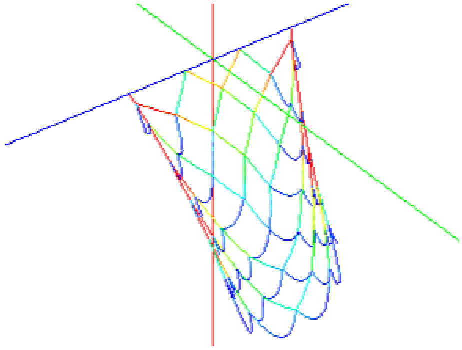


**Рис. 6.** Участок ставной сети
**Fig. 6.** A gill net segment

Количество узлов модели регулировалось установкой различных значений максимального количества разбиений нитевидного элемента орудия рыболовства между его узлами (рис. 7).

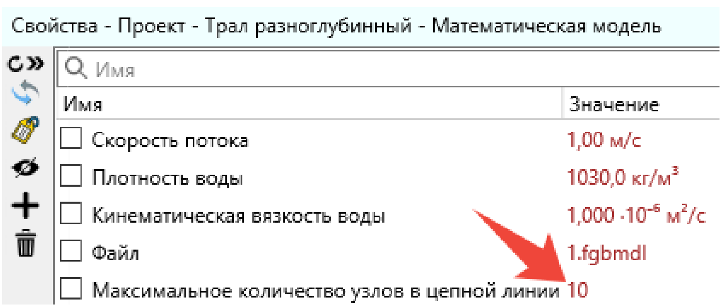



**Рис. 7.** Установка максимального количества узлов в цепной линии
**Fig. 7.** Setting of the maximum number of nodes in a chain line

Тестирование загрузки оперативной памяти персонального компьютера выполнялось в разрезе количества узлов модели на оборудовании № 4. Загрузка измерялась монитором ресурсов ОС Windows. Тестирование производительности выполнялось в разрезах характеристик оборудования и количества узлов модели (расчетной схемы). Результаты тестирования приведены в табл. 7, 8.

Таблица 7

**Результаты тестирования в разрезе количества узлов модели**

| Узлов, тыс. | Производительность, тыс. узлов/с | | | Загрузка оперативной памяти, МБ |
|---|---|---|---|---|
| | Оборудование № 1 | Оборудование № 4 | Оборудование № 6 | |
| 0.15 | 3 | 7 | 10 | 110 |
| 1.89 | 4 | 16 | 117 | 114 |
| 118 | 12 | 95 | 283 | 140 |
| 651 | 15 | 130 | 590 | 210 |
| 1230 | 16 | 145 | 660 | 300 |

Таблица 8

**Результаты тестирования производительности на модели трала, состоящей из 118 тыс. узлов, в разрезе оборудования**

| № оборудования | Производительность, тыс. узлов/с |
|---|---|
| 1 | 12 |
| 2 | 21 |
| 3 | 82 |
| 4 | 95 |
| 5 | 110 |
| 6 | 283 |

Расчет силовых и геометрических характеристик модели происходит на графическом процессоре, поэтому производительность расчета напрямую зависит от применяемого видеоадаптера. По данным, представленным в табл. 8, видно, что наибольшей производительностью обладает современный видеоадаптер NVIDIA GeForce RTX 3060, а наименьшей – встроенный в центральный процессор AMD Radeon HD 8330E.

На рис. 8 показаны графики зависимости производительности вычислений от количества узлов модели для оборудования № 1, 4 и 6.

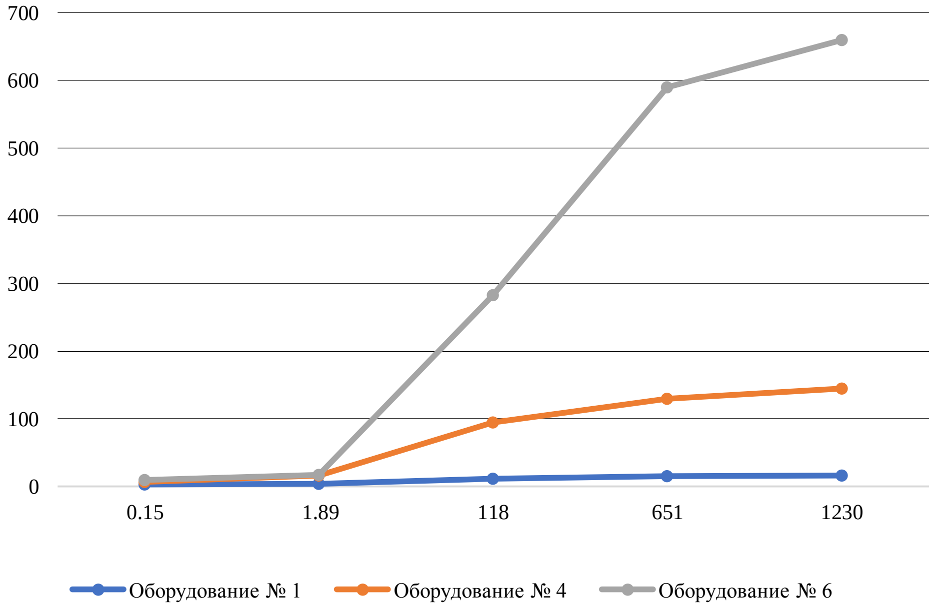



**Рис. 8.** Зависимость производительности вычислений от количества узлов модели
**Fig. 8.** Computing performance as a function of the number of nodes in the model

Из данных, представленных на рис. 8 и в табл. 7, видно, что производительность увеличивается при увеличении количества узлов. Это связано с недозагрузкой вычислительных блоков графического процессора при небольшом количестве узлов. Каждый вычислительный блок может одновременно обрабатывать определенное количество однотипных данных (в нашем случае узлов или связей) по одному алгоритму. Причем чем мощнее графический процессор, тем больше количество одновременно обрабатываемых данных. Если данных меньше, чем способен обрабатывать вычислительный блок, то часть ресурсов графического процессора не задействуется.

С целью определения точности вычисления силовых и геометрических характеристик рыболовного трала в гидроканале ООО «Фишеринг Сервис» были проведены лабораторные испытания на изготовленной физической модели трала (рис. 9).

**Рис. 9.** Эксперименты с физической моделью трала в гидроканале
**Fig. 9.** Experiments with a physical model of a trawl in a hydrochannel

При испытаниях использовалось оборудование с характеристиками, указанными в табл. 6. Результаты расчета горизонтального раскрытия трала и натяжений в кабелях были сопоставлены с результатами замеров в гидроканале, полученных в ходе проведения экспериментов на модели трала.

В табл. 9 приведены сравнительные результаты расчета и измерений горизонтального раскрытия трала и натяжений в его кабелях. При расчете погрешностей использовались математические зависимости

$$\delta X = \frac{\Delta X}{X_И} \cdot 100\%, \quad \Delta X = \left| X_И - X_Р \right|$$

где $\delta X$ – относительная погрешность в процентах; $\Delta X$ – абсолютная погрешность, $X_И$ – измеренная величина; $X_Р$ – расчетная величина.

Таблица 9

**Сравнительные результаты расчета и измерений**

| Параметр | Скорость потока воды, м/с | Расчетное значение | Измеренное значение | Погрешность, % |
|---|---|---|---|---|
| Вертикальное раскрытие устья трала, м | 1.00 | 1.22 | 1.25 | 2.4 |
| | 1.55 | 0.99 | 1.01 | 2.0 |
| Горизонтальное раскрытие устья трала, м | 1.00 | 1.49 | 1.53 | **2.6** |
| | 1.55 | 1.47 | 1.51 | **2.7** |
| Сила натяжения в верхнем кабеле, Н | 1.00 | 19.7 | 19.0 | **3.7** |
| | 1.55 | 63.7 | 61.0 | 4.4 |
| Сила натяжения в нижнем кабеле, Н | 1.00 | 13.0 | 12.6 | 3.2 |
| | 1.55 | 24.8 | 23.7 | **4.6** |

Жирным шрифтом в табл. 9 выделены значения максимальной погрешности по шагу испытаний.

## Заключение

Разработаны универсальные математическая база, имитационные алгоритмы расчета и трехмерной визуализации формы рыболовного трала и нагрузок в его элементах под действием гидростатических и гидродинамических сил при заданных характеристиках места промысла и условиях процесса эксплуатации, оптимизированные для многоядерных и гетерогенных вычислений. Разработанные алгоритмы внедрены в систему автоматизированного проектирования орудий промышленного рыболовства. С целью определения вычислительных показателей (скорости расчета) и их анализа проведено тестирование работы вычислительных алгоритмов. Для определения точности вычисления силовых и геометрических характеристик проведены эксперименты на физической модели рыболовного трала, результаты которых сопоставлены с результатами вычислений.

Сравнительный анализ показал, что погрешность вычислений геометрических характеристик трала не превышает 3%, а силовых характеристик – 5%.

## Список источников

1. *Li Y., Zou X., Zhang X., Zhang M., Chen X., Song L., Zhou Y.* Modeling of the Midwater Trawl Dynamical Behavior Based on R Language // 2015 International Conference on Mechatronics, Electronic, Industrial and Control Engineering (MEIC-15). 2015. Atlantis Press, 2015. С. 1092–1095. doi: 10.2991/meic-15.2015.248
2. *Freiria P.J.* Dynamic modeling of trawl fishing gear components // Ship Science and Technology. 2012. V. 6 (11). P. 57–65.
3. *Недоступ А.А., Ражев А.О., Коротков В.К.* Моделирование композитных сетных конструкций методом точечных масс при динамической постановке задачи // Морские интеллектуальные технологии. 2018. № 4 (42), т. 4. С. 254–258.
4. *Beirao da Veiga L., Brezzi F., Cangiani A., Manzini G., Marini L.D., Russo A.* Basic principles of Virtual Element Methods // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2013. V. 23 (1). P. 199–214. doi: 10.1142/S0218202512500492
5. *Logan D.L.* A first course in the finite element method. Cengage Learning, 2011. 808 c.

6. *Priour D.* A finite element method for netting: Application to fish cages and fishing gear. Springer Briefs in Environmental Science, 2013. 107 p. doi: 10.1007/978-94-007-6844-4
7. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. 2-е изд., перераб. М. : Физматлит, 2001. 320 с.
8. *Недоступ А.А., Ражев А.О.* Математическая модель взаимодействия распорной траловой доски с водной средой // Морские интеллектуальные технологии. 2017. № 3 (37), т. 1. С. 154–157.
9. *Недоступ А.А., Ражев А.О., Коротков В.К.* Дискретная математическая модель гибкого подъемного тралового щитка // Морские интеллектуальные технологии. 2017. № 4 (38), т. 2. С. 207–211.
10. *Sherrod A., Jones W.* Beginning DirectX 11 Game Programming. Boston, MA : Course Technology, 2021. 372 с.
11. *Рожков С.Н., Овсянникова Н.А.* Стереоскопия в кино-, фото-, видеотехнике : терминологический словарь. М. : Парадиз, 2003. 136 с.
12. *Varcholik P.* Real-Time 3D Rendering with DirectX and HLSL: A Practical Guide to Graphics Programming. Addison-Wesley Professional, 2014. 592 с.

**References**

1. Li Y., Zou X., Zhang X., Zhang M., Chen X., Song L., Zhou Y. (2015) Modeling of the midwater trawl dynamical behavior based on R language. *International Conference on Mechatronics, Electronic, Industrial and Control Engineering (MEIC-15).* Atlantis Press. pp. 1092–1095. doi: 10.2991/meic-15.2015.248
2. Freiria P.J. (2012) Dynamic modeling of trawl fishing gear components. *Ship Science and Technology*. 6(11). pp. 5–65. doi: 10.25043/19098642.71
3. Nedostup A.A., Razhev A.O., Korotkov V.K. (2018) Modelirovanie kompozitnykh setnykh konstruktsiy metodom tochechnykh mass pri dinamicheskoy postanovke zadachi [Modelling composite net structures using the method of point masses in dynamic statement of a problem]. *Morskie intellektual'nye tekhnologii – Marine Intellectual Technologies*. 4(42). 4. pp. 254–258.
4. Beirao da Veiga L., Brezzi F., Cangiani A., Manzini G., Marini L.D., Russo A. (2013) Basic principles of virtual element methods. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 23(1). pp. 199–214. doi: 10.1142/S0218202512500492
5. Logan D.L. (2011) *A First Course in the Finite Element Method*. Cengage Learning.
6. Priour D. (2013) *A Finite Element Method for Netting: Application to Fish Cages and Fishing Gear*. Springer Briefs in Environmental Science. doi: 10.1007/978-94-007-6844-4
7. Zhuravlev V.F. (2001) *Osnovy teoreticheskoy mekhaniki* [Fundamentals of theoretical mechanics]. Moscow: Fizmatlit.
8. Nedostup A.A., Razhev A.O. (2017) Matematicheskaya model' vzaimodeystviya raspornoy tralovoy doski s vodnoy sredoy [Mathematical model of interaction of the trawl door with the aquatic environment]. *Morskie intellektual'nye tekhnologii – Marine Intellectual Technologies*. 3(37). 1. pp. 154–157.
9. Nedostup A.A., Razhev A.O., Korotkov V.K. (2017) Diskretnaya matematicheskaya model' gibkogo pod"emnogo tralovogo shchitka [Discrete mathematical model of the trawl lifting flexible hydrodynamic flap]. *Morskie intellektual'nye tekhnologii – Marine Intellectual Technologies*. 4(38). 2. pp. 207–211.
10. Sherrod A., Jones W. (2012) *Beginning DirectX 11 Game Programming*. Boston, MA: Course Technology.
11. Rozhkov S.N., Ovsyannikova N.A. (2003) *Stereoskopiya v kino-, foto-, videotekhnike* [Stereoscopy in cinema, photo, video equipment]. Moscow: Mir.
12. Varcholik P. (2014) *Real-Time 3D Rendering with DirectX and HLSL: A Practical Guide to Graphics Programming.* Addison-Wesley Professional.

***Сведения об авторах*:**
**Ражев Алексей Олегович** – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник отдела научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ управления научно-исследовательской деятельности Калининградского государственного технического университета, Калининград, Россия. E-mail: aleksej.razhev@klgtu.ru
**Недоступ Александр Алексеевич** – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой промышленного рыболовства Калининградского государственного технического университета, Калининград, Россия. E-mail: nedostup@klgtu.ru

***Information about the authors*:**
**Razhev Aleksey O.** (Candidate of Technical Sciences, Kaliningrad State Technical University, Kaliningrad, Russian Federation). E-mail: aleksej.razhev@klgtu.ru
**Nedostup Aleksandr A.** (Candidate of Technical Sciences, Kaliningrad State Technical University, Kaliningrad, Russian Federation). E-mail: nedostup@klgtu.ru

*Статья поступила в редакцию 05.03.2022; принята к публикации 03.02.2023*

*The article was submitted 05.03.2022; accepted for publication 03.02.2023*

Научная статья
УДК 533.6.011.6
doi: 10.17223/19988621/81/13

# Влияние структуры течения газа в осесимметричном канале на формирование неоднородного температурного поля в наполнителе из твердого легкоплавкого материала

**Надежда Петровна Скибина[1], Валерий Владимирович Фарапонов[2]**

*[1, 2] Томский государственный университет, Томск, Россия*
*[1] uss.skibina@gmail.com*
*[2] fff@ftf.tsu.ru*

**Аннотация.** Представлено исследование взаимодействия низкотемпературного сверхзвукового течения газа в проточном канале модельного тела с твердым легкоплавким углеводородным горючим материалом. Проведен анализ структуры течения в канале с внезапным расширением. Установлено влияние зон отрыва пограничного слоя на формирование неоднородного поля температуры в твердом горючем вследствие аэродинамического нагрева. Результаты численных расчетов дополнены экспериментальными данными, демонстрирующими оплавление углеводородного горючего под воздействием теплового потока от газа к твердому телу.
**Ключевые слова:** течение газа в канале, отрывные течения, сопряженный теплообмен, легкоплавкие материалы

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания FSWM-2020-0036.

**Для цитирования:** Скибина Н.П., Фарапонов В.В. Влияние структуры течения газа в осесимметричном канале на формирование неоднородного температурного поля в наполнителе из твердого легкоплавкого материала // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 81. С. 149–161. doi: 10.17223/19988621/81/13

Original article

# Effect of a gas flow structure in an axisymmetric channel on the inhomogeneous temperature field formation in a low-melting cylinder

**Nadezhda P. Skibina[1], Valeriy V. Faraponov[2]**

*[1, 2] Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*
*[1] uss.skibina@gmail.com*
*[2] fff@ftf.tsu.ru*

**Abstract.** This paper presents a study of the interaction between high-speed airflow and the surface of a solid low-melting material in a flowing channel of a model body. Both

numerical and experimental approaches are used to solve the problem, which allows one to perform a comprehensive analysis of the processes under study.
Numerical simulation conditions correspond to aerodynamic tests in the experimental facility. The unsteady Reynolds-averaged Navier–Stokes (URANS) equations are used to describe a gas flow. When solving the problem, the coupled heat-transfer and turbulence are taken into account. The low-temperature gas-dynamic processes are considered, while the chemical reactions and phase transition are neglected.
As a result of numerical simulations, the flow structure and regime in a flowing channel of the model are determined, as well as the pressure and temperature distributions in the near-wall region of a solid combustible material. The gas flow regime corresponds to an underexpanded jet flow with the separation of the boundary layer and the formation of the intense heat-transfer regions at the initial section of the flowing channel. According to the numerical simulation results, in aerodynamic tests with a Mach number of 6, the melting point is attained in the near-wall region of the solid combustible material (polyethylene, polyoxymethylene, and wax). Aerodynamic tests are carried out to validate the obtained results. Experimental results show that the variation in the flowing channel diameter in the thick-wall cylinder made of polyethylene and polyoxymethylene is induced by thermal expansion. In aerodynamic tests with a wax cylinder, the mass reduction and the fusion of the solid-gas interface are revealed.
**Keywords:** gas flow in a channel, separated flow, coupled heat transfer, low-melting materials

**Acknowledgments:** This work was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the state assignment (project No. FSWM-2020-0036).

**For citation:** Skibina, N.P., Faraponov, V.V. (2023) Effect of a gas flow structure in an axisymmetric channel on the inhomogeneous temperature field formation in a low-melting cylinder. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 81. pp. 149–161. doi: 10.17223/19988621/81/13

## Введение

Течения газа с отрывом пограничного слоя широко распространены при движении сплошных сред в воздухозаборных устройствах, соплах, камерах сгорания, диффузорах и эжекторах [1]. При движении газа в канале со сверхзвуковой скоростью возникают ударные волны, которые отражаются от стенок и взаимодействуют с пограничным слоем, вследствие чего происходит его отрыв или утолщение [2], возникают зоны течения с дозвуковой скоростью, формируются немонотонные распределения газодинамических параметров (например, давления и температуры) и наблюдается интенсификация тепломассообмена. При отрыве пограничного слоя вблизи стенки канала образуется область рециркуляции, где наблюдается локальное повышение температуры [2].

Исследования отрывных течений широко представлены как в экспериментальных, так и в теоретических работах. Изучается, например, влияние толщины пограничного слоя, тепловой и динамической предыстории потока на его отрыв за уступом в канале с внезапным расширением [3–5]. В работах [6, 7] с использованием дымовой визуализации и метода PIV проводится анализ вихревой структуры отрывных течений. В [8] исследуются турбулентное течение в плоском канале и локальная теплоотдача за уступом, где и в расчетах, и в экспериментах наблюдаются максимальные значения температуры и коэффициента теплоотдачи.

В рамках данной работы рассматривается нестационарная сопряженная задача теплообмена при движении сверхзвукового турбулентного потока воздуха в канале с внезапным расширением, стенки которого выполнены из твердого легкоплавкого материала. Цель исследования – анализ теплового состояния полого цилиндрического наполнителя, выполненного из твердого горючего материала. Внутренняя поверхность наполнителя продольно обтекается сверхзвуковым потоком, который формируется в проточном канале модельного тела в условиях внешнего обтекания в аэродинамической установке низкотемпературным потоком с числом Маха 6. Объектом исследования является течение газа в проточном канале модельного тела, предметом исследования – влияние структуры течения газа в канале на распределения газодинамических параметров в пограничном слое и интенсификацию теплообмена, вследствие которого в твердом горючем возникает неоднородное температурное поле. Ранее по результатам численных расчетов было установлено, что вследствие теплопередачи от газа к твердому горючему происходит формирование прогретого слоя в приповерхностной зоне материала [9], однако данные вычислительного исследования не имели практического подтверждения.

## Постановка задачи и методы исследования

В исследовании используется модельное тело осесимметричной геометрии с проточным каналом, представленное на рис. 1. Длина канала, течение в котором является объектом исследования, составляет 85 мм, высота уступа на входе – 2.5 мм. Для модельного тела были экспериментально получены распределения температуры [10] и давления [11] в пограничном слое проточного канала, а также известно, что на оси канала за уступом число Маха в потоке, рассчитанное по формуле Рэлея [12], достигает значения 1.87 ÷ 0.02.

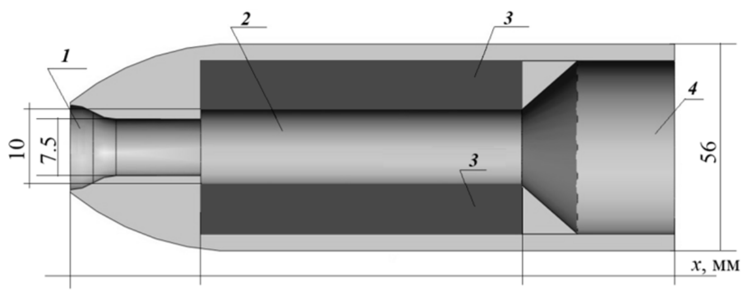



**Рис. 1.** Модельное тело с проточным каналом: *1* – воздухозаборная часть модели, *2* – осесимметричный канал с внезапным расширением, *3* – полый цилиндрический наполнитель из легкоплавкого горючего материала, *4* – выходное сопло

**Fig. 1.** Test body with a flowing channel: (*1*) air intake, (*2*) axisymmetric channel with a sudden expansion, (*3*) hollow low-melting cylinder, and (*4*) nozzle

В данной работе, направленной на изучение аэродинамического нагрева твердого горючего вследствие взаимодействия внутренней поверхности со сверхзвуковым потоком, рассматриваются наполнители из парафина, полиэтилена и полиоксиметилена [9]. Выбор материалов для исследования осуществлялся исходя из температуры, которая достигается в пограничном слое при числе Маха внешнего потока 6 и лежит в диапазоне от 313 до 473 К.

Математическая модель движения воздуха состоит из системы нестационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, дополненных уравнениями полуэмпирической модели турбулентности Ментера [13, 14]. Для численного решения задачи используется метод конечных объемов, реализованный в вычислительном комплексе ANSYS Fluent. Ввиду того что течение газа в проточном канале сопровождается ударными волнами, выбран решатель по плотности (density-based). Для интегрирования уравнений применяется неявная численная схема второго порядка точности по времени и второго порядка точности по пространству. Конвективные потоки через грани ячеек вычисляются в соответствии с методом Roe-FDS.

Задача решается в двумерной осесимметричной постановке, исследуется обтекание модельного тела потоком вязкой сжимаемой теплопроводной среды. На рис. 2 представлена схема расчетной области для численного решения задачи. Размеры внешней части пропорциональны размерам модельного тела и выбраны относительно большими, чтобы дальние граничные условия не искажали поле течения вблизи исследуемого объекта. В расчетной области выделены три типа ячеек: *1* – газ (воздух), *2* – наполнитель из легкоплавкого материала (полиэтилен, полиоксиметилен), *3* – корпус модельного тела (сталь 45).

Область решения задачи покрывалась сеткой, состоящей преимущественно из гексагональных элементов, производилось сгущение ячеек к поверхности модельного тела для разрешения пограничного слоя и выполнения условия $1 \le y^+ \le 8$ [14].

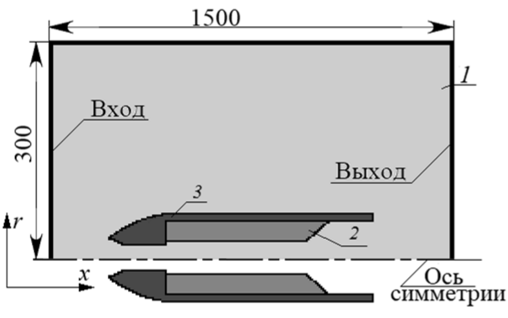



**Рис. 2.** Схема расчетной области для численного решения задачи обтекания модельного тела (размеры в мм): *1* – газ, *2* – наполнитель из легкоплавкого материала, *3* – корпус модельного тела

**Fig. 2.** Computational domain for a numerical simulation of the flow around the test body (length in mm): (*1*) gas, (*2*) low-melting cylinder, and (*3*) test body

Через левую границу на тело натекает равномерный сверхзвуковой поток воздуха с числом Маха $M_\infty = 5.91$, полным давлением $P_{total} = 7\,598.6$ кПа и полной температурой $T_{total} = 653.2$ K. Параметры течения выбраны в соответствии с условиями аэродинамического эксперимента. На поверхности модельного тела и внутренней поверхности наполнителя (*3*) выполняются условия прилипания и непротекания, а также граничное условие IV рода для учета сопряженного теплообмена.

Физическое моделирование движения воздуха в проточном канале модельного тела проводилось в сверхзвуковой аэродинамической трубе кратковременного действия [15]. Наполнитель из легкоплавкого материала (рис. 3, *a*) размещался внутри модельного тела (рис. 3, *b*), после чего осуществлялся эксперимент, в ходе которого происходило обтекание потоком с числом Маха 6, так как в данных экспериментальных условиях возможна регистрация плавления поверхности горючего при взаимодействии с потоком в проточном канале.

*a*

*b*

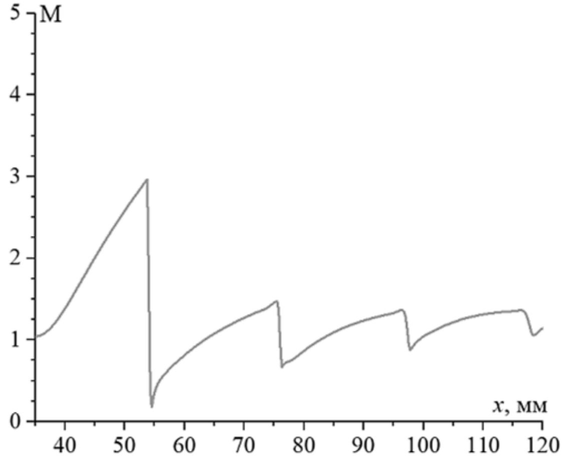
**Рис. 3.** Для физического моделирования: *a* – наполнитель из легкоплавкого материала, *b* – модельное тело для экспериментов
**Fig. 3.** For physical modeling: (*a*) low-melting cylinder and (*b*) test body for experiments

Ввиду того что в аэродинамических испытаниях затруднительно наблюдать изменения внутренней поверхности легкоплавкого горючего, влияние аэродинамического нагрева оценивалось косвенно: до и после экспериментов осуществлялось измерение диаметра внутреннего канала на оси полого цилиндра нутромером, производились взвешивание наполнителя и визуальная оценка изменений внутренней поверхности.

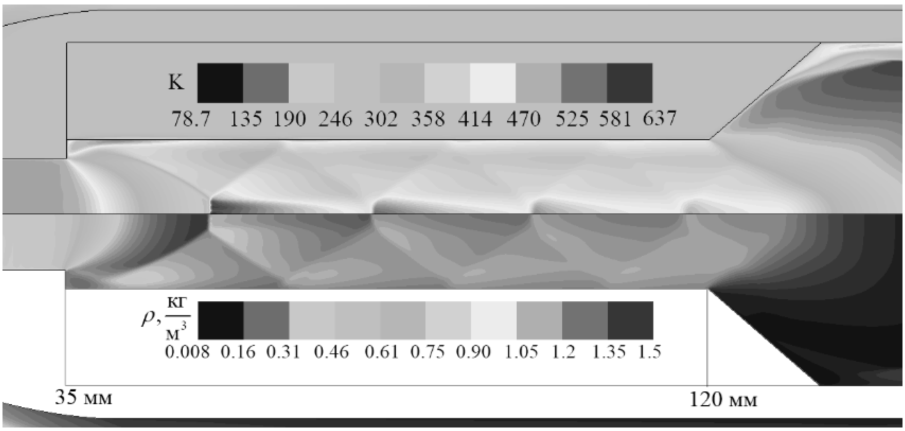
## Анализ результатов численного исследования

По результатам численного решения задачи установлено, что характер течения газа в проточном канале соответствует струйному режиму с недорасширением, о чем свидетельствуют распределение числа Маха на оси проточного канала (рис. 4, *a*) и поля температуры и плотности (рис. 4, *b*), где видны формирующиеся по длине канала бочкообразные структуры. Зоны повышенной температуры расположены в пограничном слое – вблизи внутренней поверхности наполнителя из легкоплавкого горючего, что обусловлено торможением потока.

Так как при сверхзвуковом течении газа в проточном канале формируются ударные волны, вблизи внутренней поверхности наполнителя возникают области их взаимодействия с пограничным слоем. При анализе структуры течения газа в исследуемом канале можно выделить три области, где происходит отражение ударных волн от стенки, оказывающее влияние на распределение давления и температуры в пограничном слое, однако на распределениях газодинамических параметров в пограничном слое видны четыре точки экстремума (рис. 5, *b*). Первый пик на распределении температуры соответствует координате $x \sim 45$ мм и расположен в зоне возвратного течения за уступом, возникновение которой обусловлено геометрией проточного канала. Далее вниз по потоку видны три пика, где происходит менее выраженное изменение температуры: величина температуры вблизи второго пика на ~ 35 K ниже, чем вблизи первого, а значения температуры вблизи третьего и четвертого пиков отличаются друг от друга менее чем на 5 K.




*a*

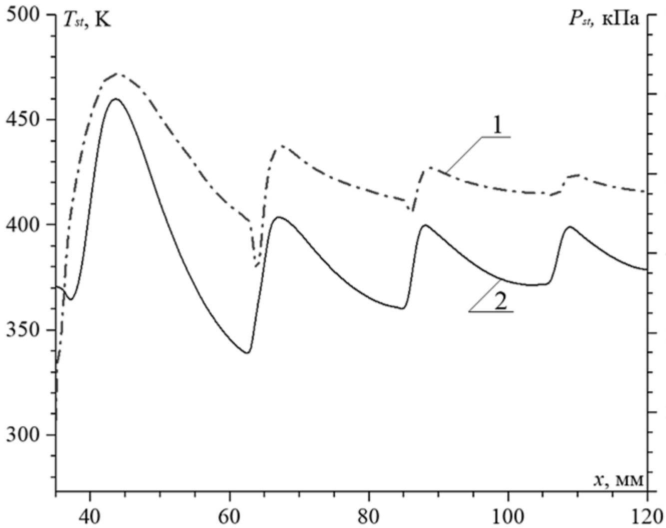



*b*

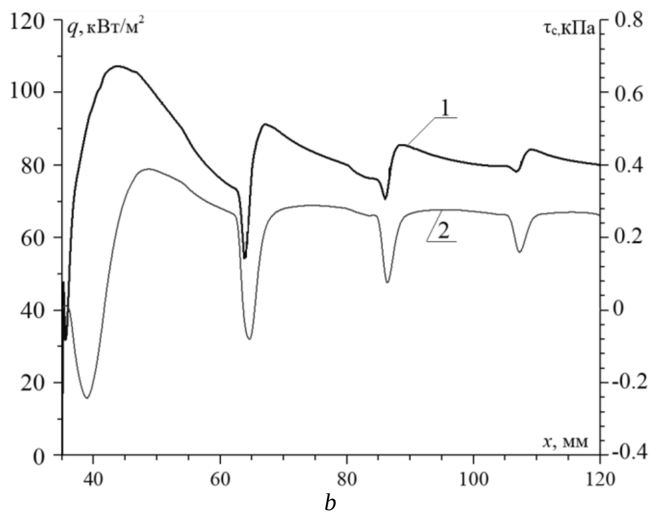
**Рис. 4.** Описание течения газа в канале: *a* – распределение числа Маха на оси проточного канала, *b* – поля температуры и плотности

**Fig. 4.** Characteristics of the gas flow in a channel: (*a*) the Mach number distribution along the flowing channel axis and (*b*) temperature and density fields

Немонотонное изменение температуры и давления в пограничном слое является следствием ударно-волнового взаимодействия, сопровождающегося также изменением величины теплового потока (кривая *1* на рис. 5, *b*) от газа к твердому телу через стенку. Наблюдается корреляция между величиной теплового потока вдоль стенки и касательным напряжением (кривая *2* на рис. 5, *b*) – наиболее интенсивная теплоотдача от газа к твердому телу происходит в отрывных зонах, где $\tau_c < 0$. Третий и четвертый экстремумы на распределениях параметров вблизи стенки не сопровождаются отрывом – величина положительного градиента давления не достигает критического значения, происходит утолщение пограничного слоя.




*a*




*b*

**Рис. 5.** Распределения газодинамических параметров в пограничном слое:
*a* – температура (*1*) и давление (*2*), *b* – тепловой поток (*1*) и касательное напряжение (*2*)
**Fig. 5.** Distribution of gas-dynamic parameters in a boundary layer:
(*a*) *1*, temperature and *2*, pressure; (*b*) *1*, heat flux and *2*, shear stress

Таким образом, по результатам численного решения задачи получено описание структуры течения газа в проточном канале, которое формируется при обтекании модельного тела внешним потоком с числом Маха 6 в аэродинамической установке. Определено, что течение газа в канале сопровождается зонами взаимодействия ударных волн с пограничным слоем и двумя областями возвратного течения, где происходят отрыв пограничного слоя и интенсификация теплообмена. Результаты математического моделирования позволяют сделать вывод, что в ходе аэродинамических испытаний с числом Маха 6 в набегающем потоке может быть зарегистрировано оплавление твердого легкоплавкого материала, возникающее под влиянием структуры течения газа на его внутреннюю поверхность.

## Экспериментальные исследования в аэродинамической трубе

В экспериментальном исследовании были использованы наполнители из полиэтилена и полиоксиметилена, внешний вид которых представлен на рис. 3, *a*. При подготовке к экспериментам производились измерение диаметра внутреннего канала, взвешивание наполнителя, после чего он размещался внутри модельного тела и проводились аэродинамические испытания: в течение времени $t_{\text{эксп}} = 5$ с тело обдувалось равномерным потоком с числом Маха 6. Температура в нагревателе $T_{\text{нагревателя}} = 693$ К, давление в баллонах $P_{\text{баллонов}} = 144.4 \cdot 10^5$ Па.

После завершения работы аэродинамической установки наполнитель извлекался из модельного тела, производились повторные взвешивание и измерение диаметра внутреннего канала, взаимодействующего с потоком воздуха. Для измерения диаметра канала использовался нутромер TESA Technology с погрешностью 5 мкм. Измерения проводились в пяти сечениях с шагом 6 мм. На рис. 6 показано изменение диаметра внутреннего канала относительно диаметра канала до аэродинамических испытаний. Расчет производился по формуле: $\Delta l = l_b - l_a$, где $l_a$ – диаметр канала до эксперимента, $l_b$ – диаметр канала после эксперимента.

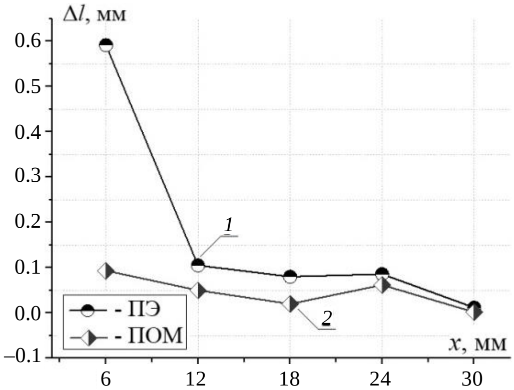



**Рис. 6.** Относительное изменение диаметра канала: *1* – полиэтилен, *2* – полиоксиметилен
**Fig. 6.** Relative change in a flowing channel diameter: (*1*) polyethylene and (*2*) polyoxymethylene

В идентичных условиях экспериментов наибольшее относительное изменение диаметра канала наблюдается для наполнителя из полиэтилена. Полученные по результатам измерений значения относительного изменения диаметра согласуются между собой, так как за уступом в канале формируется зона возвратного течения, где происходят интенсивный теплообмен и расширение материала под воздействием теплового потока от газа к твердому телу. Однако получить изменение массы или оплавление внутренней поверхности наполнителей из полиэтилена и полиоксиметилена в аэродинамических испытаниях не удалось. Для регистрации фазового перехода и уноса массы в рассмотренных материалах необходимо большее количество теплоты, что в ходе экспериментов в аэродинамической установке кратковременного действия без дополнительного подвода тепла затруднительно. На рис. 7 приведены записи с датчиков давления и температуры в аэродинамической установке [15], отражающие изменение параметров в ходе эксперимента длительностью $t_{эксп} = 5$ с.

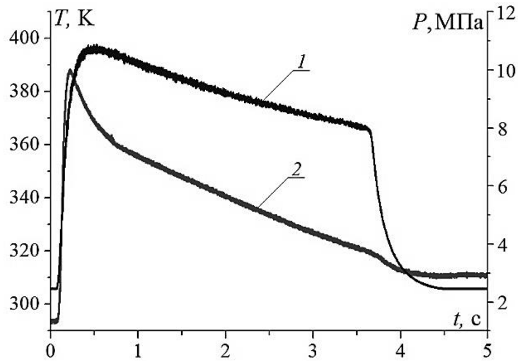



**Рис. 7.** Сигналы с датчиков полного давления (*1*) и полной температуры (*2*) в аэродинамической установке
**Fig. 7.** Data from (*1*) total pressure and (*2*) total temperature sensors in an aerodynamic facility

Для демонстрации влияния структуры течения газа в канале на оплавление поверхности легкоплавкого горючего в имеющихся экспериментальных условиях были проведены аэродинамические испытания с наполнителем, изготовленным из парафина марки П2 (рис. 8, *a*).

*a* *b*

**Рис. 8.** Наполнитель из парафина: *a* – до эксперимента, *b* – после эксперимента
**Fig. 8.** Wax cylinder: (*a*) before and (*b*) after the aerodynamic test

По результатам экспериментов при числе Маха 6 в набегающем потоке с использованием модельного тела с наполнителем из парафина было зарегистрировано уменьшение его массы на 1.8%, а также изменение внутренней поверхности, взаимодействующей с потоком: на рис. 8, *b* видны две зоны оплавления материала различной протяженности. На рис. 9 приведена фотография внутренней поверхности наполнителя из парафина после единичного эксперимента, где видно оплавление поверхности на участке, обращенном к уступу.

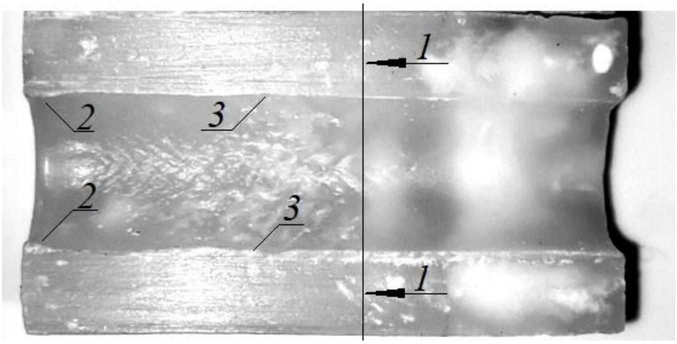



**Рис. 9.** Внутренняя поверхность наполнителя из парафина после эксперимента
**Fig. 9.** Internal surface of a wax cylinder after the aerodynamic test

На внутренней поверхности наполнителя видна граница (*1*), разделяющая участок, где возникло оплавление материала вследствие интенсивного теплообмена в пристеночной области, обусловленного структурой течения газа в проточном канале, и часть поверхности, которая не претерпела изменений. На поверхности наполнителя в развертке также видно изменение диаметра канала на входе – наплавление парафина (*2*) вблизи зоны возвратного течения за уступом, а также изменения диаметра вниз по каналу (*3*), возникающие под воздействием второй вихревой зоны.

## Заключение

По результатам вычислительного исследования получена картина сверхзвукового турбулентного течения в осесимметричном канале с обратным уступом, характерная для истечения недорасширенной струи. Локальное повышение температуры при течении газа в канале возникает при торможении в пограничном слое на стенке. Взаимодействие ударных волн с пограничным слоем на внутренней поверхности канала приводит к возникновению немонотонного распределения параметров в пристеночной области, отрыву потока от стенки (за уступом и в первой отраженной ударной волне), нарастанию толщины пограничного слоя и возникновению зон с повышенной интенсивностью теплопередачи от газа к твердому телу.

Структура сверхзвукового турбулентного течения газа определяет закономерности распределения газодинамических параметров в канале и формирования неоднородного температурного поля в твердом материале. Установлено, что наибольшие температуры достигаются вблизи поверхности твердого горючего материала на участке, обращенном к уступу в камере сгорания модельного тела, где в пристеночной области формируются две вихревые зоны.

Достоверность результатов вычислительного исследования обеспечивается экспериментальными данными, по результатам которых установлены:

1) изменение диаметра внутреннего канала вследствие расширения материала под воздействием тепла в наполнителе из полиэтилена и полиоксиметилена на 0.5 и 0.1 мм соответственно;

2) уменьшение массы наполнителя из парафина на 1.8% по результатам единичного эксперимента;

3) оплавление материала при продольном обтекании внутренней поверхности наполнителя из парафина сверхзвуковым турбулентным потоком газа на участке, обращенном к уступу.

По результатам исследования выявлено, что во внутренних сверхзвуковых течениях газа имеет место сопряженный аэродинамический нагрев стенок канала, который необходимо учитывать для корректного разрешения отрывных зон и их положения, а также анализировать его изменение в нестационарном процессе.

**Список источников**

1. *Булат П.В.* Сверхзвуковое течение в канале с расширением : дис. … канд. физ.-мат. наук. СПб., 2012. 140 с.
2. *Чжен П.* Отрывные течения. М. : Мир, 1972. Т. 1. 298 с.
3. *Терехов В.И., Богатко Т.В.* Влияние тепловой предыстории на турбулентное отрывное течение при внезапном расширении трубы // Теплофизика и аэромеханика. 2011. Т. 18, № 2. С. 225–232.
4. *Терехов В.И., Богатко Т.В.* Влияние толщины пограничного слоя перед отрывом потока на аэродинамические характеристики и теплообмен за внезапным расширением в круглой трубе // Теплофизика и аэромеханика. 2008. Т. 15, № 1. С. 99–106.
5. *Батенко С.Р., Терехов В.И.* Влияние динамической предыстории потока на аэродинамику ламинарного отрывного течения в канале за обратным прямоугольным уступом // Прикладная механика и техническая физика. 2002. Т. 43, № 6. С. 84–92.
6. *Душина О.А., Молочников В.М., Паерелий А.А., Михеев Н.И., Леманов В.В.* Структура потока за выступом в канале в условиях ламинарно-турбулентного перехода // Теплофизика и аэромеханика. 2010. Т. 17, № 3. С. 349−361.
7. *Молочников В.М., Мазо А.Б., Малюков А.В., Калинин Е.И., Михеев Н.И., Душина О.А, Паерелий А.А.* Особенности формирования вихревых структур в отрывном течении за выступом в канале при переходе к турбулентности // Теплофизика и аэромеханика. 2014. Т. 21, № 3. С. 325 –334.
8. *Носатов В.В., Семенев П.А.* Расчетно-экспериментальное исследование сверхзвукового турбулентного отрывного течения и локальной теплоотдачи в плоском канале с внезапным расширением // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 1(52). С. 66–77.
9. *Скибина Н.П., Фарапонов В.В.* Исследование взаимодействия сверхзвукового течения газа с легкоплавким материалом в камере сгорания прямоточного воздушно-реактивного двигателя на твердом топливе // Вычислительная механика сплошных сред. 2021. Т. 14, № 3. С. 278–288.
10. *Maslov E., Faraponov V., Arkhipov V., Zharova I., Kozlov E., Savkina N.* Investigation of working processes in a flowing channel of ramjet engine // Thermal Science. 2019. Vol. 23, № 2. P. 531–536.
11. *Скибина Н.П., Тыртышный С.А., Фарапонов В.В.* Экспериментально-теоретическое исследование распределения давления вдоль стенки при движении сверхзвукового потока газа в осесимметричном канале с внезапным расширением // Теплофизика и аэромеханика. 2022. Т. 29, № 1. С. 91–101.
12. *Горлин С.М., Слезингер И.И.* Аэромеханические измерения (методы и приборы). М. : Наука, 1964. 720 с.

13. *Снегирёв А.Ю.* Высокопроизводительные вычисления в технической физике. Численное моделирование турбулентных течений. СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2009. 143 с.
14. ANSYS FLUENT 12.1 Theory Guide, Solver Theory. ANSYS Inc., 2010.
15. *Звегинцев В.И.* Газодинамические установки кратковременного действия. Новосибирск : Параллель, 2014. Ч. I: Установки для научных исследований. 551 с.

**References**

1. Bulat P.V. (2012) *Sverkhzvukovoe techenie v kanale s rasshireniem* [Supersonic flow in a channel with an expansion]. Dissertation, Saint Petersburg State University.
2. Chang P.K. (1976) *Control of Separation.* New York: McGraw-Hill.
3. Terekhov V.I., Bogatko T.V. (2011) The effect of thermal prehistory on turbulent separated flow at sudden tube expansion. *Thermophysics and Aeromechanics*. 18(2). pp. 215–222. doi: 10.1134/S086986431101003X
4. Terekhov V.I., Bogatko T.V. (2008) Effect of boundary layer thickness before the flow separation on aerodynamic characteristics and heat transfer behind an abrupt expansion in a round tube. *Thermophysics and Aeromechanics*. 15(1). pp. 91–97. doi: 10.1134/S0869864308010083
5. Batenko S.R., Terekhov V.I. (2002) Effect of dynamic prehistory on aerodynamics of a laminar separated flow in a channel behind a rectangular backward-facing step. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 43(6). pp. 854–860. doi: 10.1023/A:1020712520195
6. Dushina O.A., Molochnikov V.M., Paereliy A.A., Mikheev N.I., Lemanov V.V. (2010) Structure of the channel flow behind a surface-mounted rib under conditions of laminar-turbulent transition. *Thermophysics and Aeromechanics*. 17(3). pp. 335–345. doi: 10.1134/S0869864310030030
7. Molochnikov V.M., Mazo A.B., Malyukov A.V., Kalinin E.I., Mikheev N.I., Dushina O.A., Paereliy A.A. (2014) Distinctive features of vortical structures generation in separated channel flow behind a rib under transition to turbulence. *Thermophysics and Aeromechanics*. 21(3). pp. 309–317. doi: 10.1134/S0869864314030056
8. Nosatov V.V., Semenev P.A. (2014) Raschetno-eksperimental'noe issledovanie sverkhzvukovogo turbulentnogo otryvnogo techeniya i lokal'noy teplootdachi v ploskom kanale s vnezapnym rasshireniem [Computational and experimental study of the supersonic turbulent detached flow and local heat emission in a flat duct with a sudden expansion]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya «Estestvennye nauki» – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences.* 1(52). pp. 66–77.
9. Skibina N.P., Faraponov V.V. (2021) Issledovanie vzaimodeystviya sverkhzvukovogo techeniya gaza s legkoplavkim materialom v kamere sgoraniya pryamotochnogo vozdushno-reaktivnogo dvigatelya na tvyordom toplive [Analysis of the interaction of a supersonic gas flow with a solid low melting polymer as a ramjet engine propellant]. *Vichislitel'naya mekhanika sploshnykh sred – Computational Continuum Mechanics*. 3(3). pp. 278–288. doi: 10.7242/1999-6691/2021.14.3.23
10. Maslov E., Faraponov V., Arkhipov V., Zharova I., Kozlov E., Savkina N. (2019) Investigation of working processes in a flowing channel of ramjet engine. *Thermal Science.* 23(2). pp. 531–536. doi: 10.2298/TSCI19S2531M
11. Skibina N.P., Tyrtyshny S.A., Faraponov V.V. (2022) Experimental-theoretical study of pressure distribution along the wall when a supersonic gas flow moves in an axisymmetric channel with sudden expansion. *Thermophysics and Aeromechanics*. 29(1). pp. 87–97. doi: 10.1134/S0869864322010061
12. Gorlin S.M., Slezinger I.I. (1964) *Aeromekhanicheskie izmereniya (metody i pribory)* [Aeromechanical measurements (methods and devices)]. Moscow: Nauka.
13. Snegirev A.Yu. (2009) *Vysokoproizvoditel'nye vychisleniya v tekhnicheskoy fizike. Chislennoe modelirovanie turbulentnykh techeniy.* [High-performance computing in engineering physics. Numerical modeling of turbulent flows]. Saint Petersburg: Izdatel'stvo Politekhnicheskogo universiteta.

14. ANSYS FLUENT 12.1 Theory Guide, Solver Theory (2010) ANSYS Inc.
15. Zvegintsev V.I. (2014) *Gazodinamicheskie ustanovki kratkovremennogo deystviya. Chast' I. Ustanovki dlya nauchnykh issledovaniy* [Short-duration gas-dynamic facilities. Part 1. Facilities for scientific studies]. Novosibirsk: Parallel’.

***Сведения об авторах*:**
**Скибина Надежда Петровна** – кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры динамики полета физико-технического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: uss.skibina@gmail.com
**Фарапонов Валерий Владимирович** – кандидат физико-математических наук доцент кафедры динамики полета физико-технического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: fff@ftf.tsu.ru

***Information about the authors*:**
**Skibina Nadezhda P.** (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: uss.skibina@gmail.com
**Faraponov Valeriy V.** (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: fff@ftf.tsu.ru

*Статья поступила в редакцию 17.11.2022; принята к публикации 03.02.2023*

*The article was submitted 17.11.2022; accepted for publication 03.02.2023*

*Научный журнал*

**ВЕСТНИК**
**ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.**
**МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

**2023. № 81**

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано в печать 21.02.2023 г. Формат $70\times100^{1}/_{16}$.
Печ. л. 10,1; усл. печ. л. 13,2. Цена свободная.
Тираж 250 экз. Заказ № 5350.

Дата выхода в свет 28.02.2023 г.

**Адрес издателя и редакции:** 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Томский государственный университет

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: http://publish.tsu.ru; E-mail: rio.tsu@mail.ru