

Научная статья

УДК 519.622.1

doi: 10.17223/19988621/81/3

MSC: 65L20

Численный метод решения задачи Коши для одного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто

Асият Гамзатовна Омарова

Дагестанский государственный университет, Махачкала, Россия, asya89.89@mail.ru

Аннотация. Исследована на отрезке $[0, T]$ задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто порядка $\alpha = \alpha(t)$, где $0 < \alpha(t) < 1$ – непрерывная функция. Построен численный метод решения задачи. Показано, что численное решение задачи сходится к точному решению первым порядком. Проведен вычислительный эксперимент по анализу численного решения задачи Коши. На основе вычислительного эксперимента показано, что если в качестве $\alpha(t)$ взять среднее значение, численное решение задачи также имеет первый порядок точности.

Ключевые слова: дробная производная, аппроксимация, задача Коши, разностная схема, сходимость, численные методы, вычислительный эксперимент

Для цитирования: Омарова А.Г. Численный метод решения задачи Коши для одного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 81. С. 31–38. doi: 10.17223/19988621/81/3

Original article

A numerical method of solving the Cauchy problem for one differential equation with the Caputo fractional derivative

Asiyat G. Omarova

Dagestan State University, Makhachkala, Russian Federation, asya89.89@mail.ru

Abstract. The Cauchy problem for differential equations with fractional derivatives is used in many spheres of science and technology. It was the reason for the development of various methods for its solution, both analytic and approximate ones. The search of an exact solution of differential equations with fractional derivatives by analytic methods is a complex and ineffective task; for this reason, an attempt to solve the considered problem approximately is undertaken in this paper.

The Cauchy problem for the ordinary differential equation with a fractional derivative of the Caputo order, $\alpha = \alpha(t)$ where $0 < \alpha(t) < 1$ is a continuous function, has been investi-

gated on the segment $[0, T]$. The method of finite differences which is relatively primary to implement is used for the numerical solution. A difference scheme approximating the Cauchy problem with the first order is constructed on a uniform grid. The difference problem is studied for stability and convergence with a fixed value of the function $\alpha(t)$. It is shown that the numerical solution of the problem converges to the exact solution in the first order. Explicit recurrent formulas for the numerical solution are obtained. A computational experiment upon analysis of the numerical solution of the Cauchy problem is carried out. It is shown on the basis of the computational experiment that if we take the average value for $\alpha(t)$, the first order exactness takes place.

Keywords: fractional derivative, approximation, Cauchy problem, numerical methods, computational experiment

For citation: Omarova, A.G. (2023) A numerical method of solving the Cauchy problem for one differential equation with the Caputo fractional derivative. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 81. pp. 31–38. doi: 10.17223/19988621/81/3

Введение

Основы дробного исчисления были заложены еще в XVIII в., но широко оно стало применяться в последние 15 лет. Об этом свидетельствуют работы [1–3].

Приведем небольшой перечень задач, где применимы и эффективны дифференциальные уравнения с дробными производными: обратные задачи механики, пластина в вязкой жидкости, диффузия в пористых средах, динамика турбулентной среды, задача о падении тела в атмосфере, задача теплопереноса, теория фазовых переходов, задача о релаксации, космофизика и многие другие задачи физики [3].

Задача Коши для дифференциального уравнения с дробными производными применяется во многих областях науки и техники. Это явилось причиной разработки для ее решения различных методов, как аналитических, так и приближенных. Поиск точного решения дифференциальных уравнений с дробными производными аналитическими методами является задачей сложной и малоэффективной, поэтому большое количество работ посвящено приближенным численным методам решения.

Численные методы решения задачи Коши рассмотрены в работах [4–6]. В [4] анализируются разностные методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дифференцирования, доказана устойчивость разностной схемы. В [5] рассматривается задача Коши для системы трех дифференциальных уравнений с производными дробного порядка Капуто, исследуются вопросы существования и единственности решения рассматриваемой задачи и способ его отыскания. В [6] изучен разностный метод $(2 - \alpha)$ -го порядка точности решения задачи Коши для дифференциального уравнения с оператором дробного дифференцирования Римана–Лиувилля. Получена оценка предложенного численного метода, из которой следует сходимость.

Доказательству устойчивости и сходимости разностных схем, аппроксимирующих краевые задачи для дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто, посвящены работы [7, 8].

В данной работе исследуется задача Коши с дробной производной Капуто в случае, когда порядок $\alpha = \alpha(t)$ – некоторая непрерывная функция. Для конкретных представлений функции $\alpha = \alpha(t)$ проведен вычислительный эксперимент, показывающий, что предложенный численный метод сходится к точному решению задачи.

1. Постановка задачи

В области $D = [0, T]$ рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто [9. С. 597]:

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^{\alpha(t)} u(t) &= f(t, u), t > 0, \\ u(0) &= u^{(0)}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $f(t, u) = \{f_i(t, u_1, \dots, u_m)\}_{i=1}^m$, $u(t) = \{u_i(t)\}_{i=1}^m$, – непрерывные по всем аргументам функции в замкнутой области D , $\partial_{0t}^{\alpha(t)} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \int_0^t \frac{u'(s)}{(t-s)^{\alpha(t)}} ds$ – дробная производная Капуто, $\alpha(t)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая условию $0 < \alpha(t) < 1$, $t > 0$.

Так как функции f_i , $i = 1, 2, \dots, m$, непрерывны во всей области D , то имеют место неравенства $|f_i| < M$, $i = 1, 2, \dots, m$, где $M > 0$ – некоторая константа.

Предположим, кроме того, что в области D для функций f_i выполняется условие Липшица по аргументам $(u_1, u_2, \dots, u_m)$, т.е.

$$|f_i(t, u'_1, u'_2, \dots, u'_m) - f_i(t, u''_1, u''_2, \dots, u''_m)| \leq L(|u'_1 - u''_1| + |u'_2 - u''_2| + \dots + |u'_m - u''_m|)$$

для всех точек $(t, u'_1, u'_2, \dots, u'_m)$ и $(t, u''_1, u''_2, \dots, u''_m)$ в области D , где L является константой Липшица.

Если выполнены сформулированные выше условия, то существует единственное решение $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$, ..., $u_m = u_m(t)$ системы (1), определенное при всех $|t| \leq t_0 = \min(T/M)$ и принимающее при $t = 0$ заданные начальные значения [10].

2. Численный метод решения задачи Коши для дифференциального уравнения с дробной производной

Построим численное решение задачи (1). Для этого в области D введем по переменной t равномерную сетку с шагом $\tau > 0$:

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots, N, N\tau = T\}.$$

Точное решение задачи (1) обозначим через $u_n = u(t_n)$, а приближенное решение обозначим y_n , $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Тогда для дробной производной при $t = t_n$ имеет место равенство

$$\partial_{0t}^{\alpha(t_n)} u(t_n) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha(t_n))\tau} \sum_{k=0}^n (y_{k+1} - y_k)(t_{n-k+1}^{1-\alpha(t_n)} - t_{n-k}^{1-\alpha(t_n)}) + O(\tau). \quad (2)$$

Воспользовавшись аппроксимацией (2), систему уравнений (1) заменим системой разностных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha(t_n))\tau} \sum_{k=0}^n (y_{k+1} - y_k)(t_{n-k+1}^{1-\alpha(t_n)} - t_{n-k}^{1-\alpha(t_n)}) - f(t_n, y_n) &= 0, \\ y_0 &= u_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (3)$$

Преобразуя систему разностных уравнений (3), получим явные рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} y_0 &= u_0, \\ y_1 &= y_0 + \Gamma(2 - \alpha(t_0))\tau^{\alpha(t_0)} f(t_0, y_0), \\ y_{n+1} &= y_n + \Gamma(2 - \alpha(t_n))\tau^{\alpha(t_n)} f(t_n, y_n) - \tau^{\alpha(t_n)-1} \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1} - y_k)(t_{n-k+1}^{1-\alpha(t_n)} - t_{n-k}^{1-\alpha(t_n)}), \\ n &= 0, 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (4)$$

Когда $\alpha(t) = 1$ для всех $t \in D$, из (4) получим расчетные формулы Эйлера.

Определение 1. Будем говорить, что метод (3) сходится при $t = t_n$, если $|y_n - u_n| \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$. Метод сходится на отрезке $[0, T]$, если он сходится в каждой точке $t \in [0, T]$ [11].

Исследуем сходимость разностного метода (3). Пусть $\tilde{\alpha}$ – любое произвольное значение функции $\alpha(t)$.

Обозначим через $z_n = y_n - u_n$ погрешность метода. Покажем, что $z_n \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$. Если $y_n = z_n + u_n$ подставим в равенство (3), получим разностное уравнение для погрешности

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(2 - \tilde{\alpha})\tau} \sum_{k=0}^n (z_{k+1} - z_k)(t_{n-k+1}^{1-\tilde{\alpha}} - t_{n-k}^{1-\tilde{\alpha}}) = \\ & = f(t_n, z_n + u_n) - \frac{1}{\Gamma(2 - \tilde{\alpha})\tau} \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k)(t_{n-k+1}^{1-\tilde{\alpha}} - t_{n-k}^{1-\tilde{\alpha}}). \end{aligned} \quad (5)$$

Правую часть равенства (5) представим в виде суммы $\psi_n^{(1)} + \psi_n^{(2)}$, где

$$\begin{aligned} \psi_n^{(1)} &= -\frac{1}{\Gamma(2 - \tilde{\alpha})\tau} \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k)(t_{n-k+1}^{1-\tilde{\alpha}} - t_{n-k}^{1-\tilde{\alpha}}) + f(t_n, u_n), \\ \psi_n^{(2)} &= f(t_n, u_n + z_n) - f(t_n, u_n). \end{aligned} \quad (6)$$

Функция $\psi_n^{(1)}$ называется невязкой, или погрешностью аппроксимации, разностного уравнения (3) на решении исходного уравнения (1). Будем говорить, что разностный метод аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение, если $\psi_n^{(1)} \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$. [11]. Разложим $u(t_{k+1}) = u(t_k + \tau)$ в ряд Тейлора:

$$u(t_{k+1}) \approx u(t_k) + \tau u'(t_k) + \frac{\tau^2}{2} u''(\xi_k), \quad (7)$$

где ξ_k – некоторая точка, расположенная в интервале $(t_k, t_k + \tau)$.

Подставляя (7) в (6), получим

$$\begin{aligned} \psi_n^{(1)} &= -\frac{1}{\Gamma(2 - \tilde{\alpha})} \sum_{k=0}^m u'(t_k)(t_{n-k+1}^{1-\tilde{\alpha}} - t_{n-k}^{1-\tilde{\alpha}}) - \frac{\tau}{2\Gamma(2 - \tilde{\alpha})} \sum_{k=0}^m u''(\xi_k)(t_{n-k+1}^{1-\tilde{\alpha}} - t_{n-k}^{1-\tilde{\alpha}}) + f(t_n, y_n) = \\ &= -(\partial_{0t}^{\tilde{\alpha}} u(t_n)) + f(t_n, u_n) + O(\tau) = O(\tau). \end{aligned}$$

Из этого равенства следует, что разностный метод (3) аппроксимирует задачу (1) с первым порядком.

Покажем, что функция $\psi_n^{(2)}$ удовлетворяет условию Липшица. Так как

$$\psi_n^{(2)} = f(t_n, y_n) - f(t_n, u_n) = f(t_n, u_n + z_n) - f(t_n, u_n),$$

$$|\psi_n^{(2)}| = |f(t_n, u_n + z_n) - f(t_n, u_n)| \leq L|u_n + z_n - u_n| = L|z_n|.$$

Следовательно,

$$\tau^{1-\tilde{\alpha}} z_{n+1} + (t_2^{1-\tilde{\alpha}} - 2t_1^{1-\tilde{\alpha}} + t_0^{1-\tilde{\alpha}}) z_n + \dots (t_{n+1}^{1-\tilde{\alpha}} - 2t_n^{1-\tilde{\alpha}} + t_{n-1}^{1-\tilde{\alpha}}) z_1 = \tau \Gamma(2-\tilde{\alpha}) \psi_n^{(2)} + \tau \Gamma(2-\tilde{\alpha}) \psi_n^{(1)},$$

т.е.

$$z_{n+1} = - \sum_{k=1}^n \frac{t_{n-k+2}^{1-\tilde{\alpha}} - 2t_{n-k+1}^{1-\tilde{\alpha}} + t_{n-k}^{1-\tilde{\alpha}}}{\tau^{1-\tilde{\alpha}}} z_k + \tau^{\tilde{\alpha}} \Gamma(2-\tilde{\alpha}) \psi_n^{(2)} + \tau^{\tilde{\alpha}} \Gamma(2-\tilde{\alpha}) \psi_n^{(1)}, \quad (8)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Преобразуя выражение под суммой равенства (8), получим

$$\begin{aligned} \frac{t_{n-k+2}^{1-\tilde{\alpha}} - 2t_{n-k+1}^{1-\tilde{\alpha}} + t_{n-k}^{1-\tilde{\alpha}}}{\tau^{1-\tilde{\alpha}}} &= \frac{\tau^2 \left((t_{n-k+1}^{1-\tilde{\alpha}})'' + O(\tau^2) \right)}{\tau^{1-\tilde{\alpha}}} = - \frac{\tau^{\tilde{\alpha}+1} \tilde{\alpha}(1-\tilde{\alpha})}{t_{n-k+1}^{\tilde{\alpha}+1}} + O(\tau^{3+\tilde{\alpha}}) = \\ &= - \frac{\tau^{\tilde{\alpha}+1} \tilde{\alpha}(1-\tilde{\alpha})}{\tau^{\tilde{\alpha}+1} (n-k+1)^{\tilde{\alpha}+1}} + O(\tau^{3+\tilde{\alpha}}) = - \frac{\tilde{\alpha}(1-\tilde{\alpha})}{(n-k+1)^{\tilde{\alpha}+1}} + O(\tau^{3+\tilde{\alpha}}). \end{aligned}$$

Пусть $m \leq n$ – значение k , при котором достигается $\max_{1 \leq k} |z_k|$, тогда

$$\begin{aligned} |\psi_n^{(2)}| &\leq L|y_n - u_n| = L|z_n| \leq L \max_{1 \leq k} |z_k| = L|z_m|, \\ \sum_{k=1}^n \left| \frac{t_{n-k+2}^{1-\tilde{\alpha}} - 2t_{n-k+1}^{1-\tilde{\alpha}} + t_{n-k}^{1-\tilde{\alpha}}}{\tau^{1-\tilde{\alpha}}} \right| |z_k| &\leq |z_m| \sum_{k=1}^n \frac{\tilde{\alpha}(1-\tilde{\alpha})}{(n-k+1)^{\tilde{\alpha}+1}} + O(\tau^{2+\tilde{\alpha}}). \end{aligned}$$

Тогда $|z_{n+1}| \leq (S + \tau^{\tilde{\alpha}} \Gamma(2-\tilde{\alpha}) L) |z_m| + \tau^{\tilde{\alpha}} \Gamma(2-\tilde{\alpha}) |\psi_n^{(1)}| + O(\tau^{2+\tilde{\alpha}})$, где

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n \frac{\tilde{\alpha}(1-\tilde{\alpha})}{(n-k+1)^{\tilde{\alpha}+1}} \leq \tilde{\alpha}(1-\tilde{\alpha}) + \\ &+ \int_1^n \frac{\tilde{\alpha}(1-\tilde{\alpha})}{x^{\tilde{\alpha}+1}} dx = \tilde{\alpha}(1-\tilde{\alpha}) + (1-\tilde{\alpha}) - \frac{1-\tilde{\alpha}}{n^{\tilde{\alpha}}} \leq 1 - (\tilde{\alpha})^2 < 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $|z_m| \leq q |z_m| + \tau^{\tilde{\alpha}} \Gamma(2-\tilde{\alpha}) \max_{0 \leq j \leq n} |\psi_j^{(1)}| + O(\tau^{2+\tilde{\alpha}})$, т.е.

$$(1-q) |z_m| \leq \tau^{\tilde{\alpha}} \Gamma(2-\tilde{\alpha}) \max_{0 \leq j \leq n} |\psi_j^{(1)}| + O(\tau^{2+\tilde{\alpha}}), \quad (9)$$

где $q = (1-\tilde{\alpha}^2) + \tau^{\tilde{\alpha}} \Gamma(2-\tilde{\alpha}) L$.

Из (9) при $q < 1$ и $\tau^{\tilde{\alpha}} < \frac{\tilde{\alpha}^2}{\Gamma(2-\tilde{\alpha}) L}$ следует оценка

$$\|z\| \leq \frac{\tau^{\tilde{\alpha}} \Gamma(1-\tilde{\alpha})}{1-q} \|\psi^{(1)}\| + O(\tau^{2+\tilde{\alpha}}), \quad (10)$$

где $\|z\| = \max_{1 \leq k} |z_k|$.

Из оценки (10) следует сходимость разностной схемы (3) при $\tilde{\alpha} = \alpha(t)$. Так как $\tilde{\alpha}$ было взято произвольно, следовательно, разностный метод (3) сходится для всех $\alpha(t)$.

3. Вычислительный эксперимент по анализу численного решения

Рассмотрим систему разностных уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = y^0, \\ y_1 = y_0 + \Gamma(2 - \alpha(t_0))\tau^{\alpha(t_0)} f(t_0, y_0), \\ y_{n+1} = y_n - \tau^{\alpha(t_n)-1} \sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+1} - y_i)(t_{n-i+1}^{1-\alpha(t_n)} - t_{n-i}^{1-\alpha(t_n)}) + \Gamma(2 - \alpha(t_n))\tau^{\alpha(t_n)} f(t_n, y_n). \end{cases} \quad (11)$$

Для вычислительного эксперимента исследовали тестовую задачу

$$\begin{cases} \partial_{0t}^{\alpha(t)} u(t) = -u(t) + t^2 + \frac{2t^{2-\alpha(t)}}{\Gamma(3-\alpha(t))}, & 0 < t \leq 1, \quad 0 < \alpha(t) < 1, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

точным решением которой является функция $u(t) = t^2$.

Обозначим через $\varepsilon = \max_{0 \leq n \leq N} |y_n - u(t_n)|$, где y_n , $n = 0, 1, 2, \dots, N$, – таблица чисел, полученная на основе рекуррентных формул (11), а $u(t_n)$ – точное решение.

Проверим выполнение условия Липшица для функции

$$f(t, u) = -u(t) + t^2 + \frac{2t^{2-\alpha(t)}}{\Gamma(3-\alpha(t))},$$

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| = \left| -u_1(t) + t^2 + \frac{2t^{2-\alpha(t)}}{\Gamma(3-\alpha(t))} + u_2(t) - t^2 - \frac{2t^{2-\alpha(t)}}{\Gamma(3-\alpha(t))} \right| = |u_2(t) - u_1(t)|.$$

Таким образом, $|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq L|u_1(t) - u_2(t)|$, следовательно, константа Липшица $L = 1$.

Выбор τ осуществляем из условия устойчивости $\tau^{\tilde{\alpha}} < \frac{\tilde{\alpha}^2}{\Gamma(2-\tilde{\alpha})L}$.

Значения погрешности ε при для различных $\alpha(t)$

$\alpha(t)$	$\tilde{\alpha}$	τ	$\varepsilon = \max_{0 \leq n \leq N} y_n - u(t_n) $	
			при $\alpha(t)$	при $\tilde{\alpha}$
$\alpha(t) = \frac{1}{t+1}$	0,693	$\tau < 0.4$		
		0.2	0.200607	0.193696
		0.1	0.102727	0.0993468
		0.01	0.0108135	0.0107151
		0.001	0.00110652	0.00111727
$\alpha(t) = \frac{1}{t^2+3}$	0.302	$\tau < 0.0005$		
		0.0004	0.000422696	0.000425794
		0.0002	0.000211383	0.000212949
		0.0001	0.000105703	0.000106491
$\alpha(t) = \sin(t) $	0.46	$\tau < 0.04$		
		0.03	0.0300878	0.0318397
		0.02	0.0203528	0.0215116
		0.01	0.0103327	0.0108322

Окончание таблицы

$\alpha(t)$	$\tilde{\alpha}$	τ	$\varepsilon = \max_{0 \leq n \leq N} y_n - u(t_n) $	
			при $\alpha(t)$	при $\tilde{\alpha}$
$\alpha(t) = \frac{1}{4^t}$	0.541	$\tau < 0.12$		
		0.1	0.10428	0.103953
		0.02	0.0211145	0.0215553
		0.01	0.01059	0.0108905

В таблице приведены значения погрешности ε при $\tilde{\alpha} = \int_0^1 \alpha(t) dt$ для различных функций $\alpha(t)$. Как видно из таблицы, при $\tau \rightarrow 0$ погрешность $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е. предложенный численный метод сходится к точному решению задачи.

Список источников

1. Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations : An Application-oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. Berlin : Springer-Verlag. 2010. 262 p. (Lecture Notes in Mathematics; v. 2004)
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam : Elsevier Science, 2006. 499 p. (North-Holland Mathematics Studies; v. 204)
3. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск : Артишок, 2008. 512 с.
4. Бейбалаев В.Д., Абдулаев И.А., Наврузова К.А., Гаджиева Т.Ю. О разностных методах решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дифференцирования // Вестник Дагестанского государственного университета. 2014. Вып. 6. С. 53–61.
5. Ибавов Т.И. Решение задачи Коши для системы трех дифференциальных уравнений с производной дробного порядка // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2019. № 2. С. 10–14. doi: 10.23683/0321-3005-2019-2-10-14
6. Малиева Ф.Ф., Бейбалаев В.Д. О сходимости разностного метода решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дифференцирования Римана–Лиувилля. // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2018. № 2. С. 30–34. doi: 10.23683/0321-3005-2018-2-30-34.
7. Бейбалаев В.Д., Ибавов Т.И., Омарова А.Г. Численное исследование нелинейного уравнения теплопроводности с производной дробного порядка // Вестник Дагестанского государственного университета. 2021. Вып. 2. С. 47–53. doi: 10.21779/2542-0321-2021-36-2-47-53.
8. Омарова А.Г. Об устойчивости и сходимости разностной схемы, аппроксимирующей краевую задачу для одного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2022. № 1. С. 23–27. doi: 10.18522/1026-2237-2022-1-23-27
9. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск : Наука и техника, 1987. 688 с.
10. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик, 1989. 430 с.
11. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М. : Наука, 1989. 432 с.

References

1. Diethelm K. (2010) *The Analysis of Fractional Differential Equations. An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. Lecture Notes in Mathematics, 2004*. Berlin: Springer-Verlag.

2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. (2006) *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. North-Holland Mathematics Studies. 204. Amsterdam: Elsevier Science.
3. Uchaikin V.V. (2008) *Metod drobnnykh proizvodnykh* [Method of fractional derivatives]. Ulyanovsk: Artishok.
4. Beibalaev V.D., Abdulaev I.A., Navruzova K.A., Hajiyeva T.Yu. (2014) O raznostnykh metodakh resheniya zadachi Koshi dlya obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya s operatorom drobnogo differentsirovaniya [On finite-difference methods of solving the Cauchy problem for an ordinary differential equation with an operator of fractional differentiation]. *Vestnik Dagestanskogo Gosudarstvennogo Universiteta Seriya 1. Estestvennyye nauki – Herald of Dagestan State University. Natural Sciences*. 6. pp. 53–61.
5. Ibaov T.I. (2019) Resheniye zadachi Koshi dlya sistemy trekh differentsial'nykh uravneniy s proizvodnoy drobnogo poryadka [Solution of the Cauchy problem for a system of three differential equations with a derivative of fractional order]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennyye nauki*. 2. pp. 10–14. DOI: 10.23683/0321-3005-2019-2-10-14.
6. Malieva F.F., Beybalaev V.D. (2018) O skhodimosti raznostnogo metoda resheniya zadachi Koshi dlya obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya s operatorom drobnogo differentsirovaniya Rimana – Liuvillya [On convergence of the difference method for solving the Cauchy problem for an ordinary differential equation with a Riemann–Liouville fractional differentiation operator]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennyye nauki*. 2. pp. 30–34. DOI: 10.23683/0321-3005-2018-2-30-34.
7. Beybalaev V.D., Ibaov T.I., Omarova A.G. (2021) Chislennoye issledovaniye nelineynogo uravneniya teploprovodnosti s proizvodnoy drobnogo poryadka [Numerical study of a non-linear heat equation with a fractional order derivative]. *Vestnik Dagestanskogo Gosudarstvennogo Universiteta Seriya 1. Estestvennyye nauki – Herald of Dagestan State University. Natural Sciences*. 2. pp. 47–53. DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-2-47-53.
8. Omarova A.G. (2022) Ob ustoychivosti i skhodimosti raznostnoy skhemy, approksimiruyushchey krayevuyu zadachu dlya odnogo differentsial'nogo uravneniya s drobnoy proizvodnoy Kaputo [On stability and convergence of a different scheme approximating a boundary value problem for a differential equation with a fractional Caputo derivative]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennyye nauki*. 1. pp. 23–27. DOI: 10.18522/1026-2237-2022-1-23-27.
9. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. (1993) *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Yverdon: Gordon and Breach.
10. Nakhushev A.M. (1989) *Elementy drobnogo ischisleniya i ikh primeneniye* [Elements of fractional calculus and their application]. Nalchik: Kabardino-Balkarian Scientific Center.
11. Samarskii A.A., Gulin A.V. (1989) *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow: Nauka.

Сведения об авторе:

Омарова Асият Гамзатовна – аспирант кафедры прикладной математики факультета математики и компьютерных наук Дагестанского государственного университета, Махачкала, Россия. E-mail: asya89.89@mail.ru

Information about the author:

Omarova Asiyat G. (graduate student of Department of Applied Mathematics, Dagestan State University, Makhachkala, Russian Federation). E-mail: asya89.89@mail.ru

Статья поступила в редакцию 19.04.2022; принята к публикации 03.02.2023

The article was submitted 19.04.2022; accepted for publication 03.02.2023