

Научная статья

УДК 531.332.3

doi: 10.17223/19988621/81/8

О влиянии на форму брахистохроны эффекта Магнуса

Сергей Октябрьнович Гладков¹, Софья Борисовна Богданова²

^{1,2} *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),*

Москва, Россия

¹ *sglad51@mail.ru*

² *sonjaf@list.ru*

Аннотация. Строго аналитически показано, что учет собственного вращения тела, порождающего силу Магнуса, существенно влияет на форму брахистохроны. С помощью методов численного интегрирования приведены различные виды деформированных брахистохрон, обязанных учету этого эффекта.

Ключевые слова: эффект Магнуса, брахистохрона, уравнения движения

Для цитирования: Гладков С.О., Богданова С.Б. О влиянии на форму брахистохроны эффекта Магнуса // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 81. С. 87–96. doi: 10.17223/19988621/81/8

Original article

On the brachistochrone shape under the Magnus effect

Sergey O. Gladkov¹, Sof'ya B. Bogdanova²

^{1,2} *Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation*

¹ *sglad51@mail.ru*

² *sonjaf@list.ru*

Abstract. This paper studies the effect of the rotational motion of a body on the trajectory of its fastest descent into the gravity field. The body is considered as a ball rotating about its instantaneous axis, which is perpendicular to the pattern, with a variable angular frequency. The rotation of the ball creates a vortex flow that induces the highest pressure at the top of the ball and the least pressure at the bottom. Thus, the Magnus force (down-force), which is opposed to the reaction force of a trough, occurs. It provides an "anti-lifting" effect resulting in strong changes in the brachistochrone shape. Based on the fundamental principle of dynamics, a general vector equation of motion is obtained in the form of projections on a moving basis represented as unit vectors of the tangent and normal to the trajectory of the motion. A parametric solution to the equations describing the shape of the trough in Cartesian coordinates is obtained in the absence of dissipative forces. It follows from the resulting solution that the Magnus effect is most noticeable only for massive bodies of long radius. Using the numerical integration methods, various shapes of the deformed brachistochrone are presented as a result of the Magnus effect.

Keywords: Magnus effect, brachistochrone, equations of motion

For citation: Gladkov, S.O., Bogdanova, S.B. (2023) On the brachistochrone shape under the magnus effect. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 81. pp. 87–96. doi: 10.17223/19988621/81/8

Введение

Вопрос, которому посвящена настоящая работа (как и предыдущие статьи [1–3]), относится к классическим проблемам механики, связанным с выяснением влияния на форму брахистохроны различных внешних физических факторов, приводящих к ее существенной деформации. Ранее было рассмотрено влияние на траекторию движения таких природных проявлений, как силы сухого и вязкого сопротивления, центробежные силы, связанные с вращением брахистохроны, и т.п.

В настоящем сообщении мы продолжим изучение влияния на ее форму результата воздействия внешних природных факторов и проанализируем возможное изменение желоба при учете собственного вращения тела, которое мы выберем в форме шара (или сплошного диска), катящегося под действием силы тяжести. Задачу будем решать без учета проскальзывания, но с учетом его собственного момента инерции, а также с учетом силы Магнуса, которая при этом проявляется вполне естественным образом.

Напомним, что суть этого эффекта заключается в дополнительном воздействии на тело силы, порождаемой собственным вращением. Действительно, если имеется катящийся шар, то он должен характеризоваться своей частотой вращения ω , что естественным образом приводит, во-первых, к появлению дополнительной энергии, которую можно записать как $E' = \frac{J\omega^2}{2}$, где момент инерции

для шара $J = \frac{2}{5}ma^2$, m – его масса, a – радиус, во-вторых, дополнительной силы,

действующей перпендикулярно траектории движения и представляющей из себя силу Магнуса \mathbf{F}_M . Она определяется в виде векторного произведения (см., напр.: [4–16]):

$$\mathbf{F}_M = km[\mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega}], \quad (1)$$

где $k = \frac{\rho_c}{\rho}$, ρ_c – плотность окружающего континуума, ρ – плотность шара, m – его масса, \mathbf{V} – результирующая скорость, связанная с траекторией движения соотношением $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}}$, где конец вектора $\mathbf{r}(t)$ описывает интересующую нас траекторию движения.

Формулу (1) для дальнейшего использования удобно переписать в виде:

$$\mathbf{F}_M = km[\mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega}] = km\omega \mathbf{V}[\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{k}] = -km\omega \mathbf{V} \mathbf{n}, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ – единичный вектор касательной, направленный вдоль траектории движения, \mathbf{k} – единичный вектор по направлению частоты вращения, т.е. перпендикулярный плоскости рис. 1, \mathbf{n} – единичный вектор нормали к траектории. Как видно из формулы (2), сила Магнуса направлена против силы реакции, действующей со стороны желоба на тело.

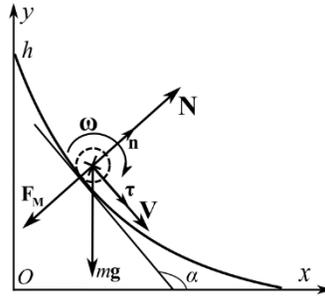


Рис. 1. Схематическое изображение постановки задачи
Fig. 1. Schematic representation of the problem formulation

Далее, поскольку сила Магнуса (1) линейна по плотности континуума, то с формальной точки зрения нам необходимо учесть и силу сопротивления Стокса, также линейную по плотности.

В свете вышесказанного мы можем теперь записать полную систему уравнений, позволяющих найти аналитическое решение задачи о возможном изменении формы брахистохроны с учетом эффекта Магнуса.

1. Основные уравнения.

Таким образом, с учетом формулы (2) имеем согласно второму закону Ньютона

$$m\dot{\mathbf{V}} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{fr} + \mathbf{F}_S - k\omega\mathbf{V}\mathbf{n}, \quad (3)$$

где \mathbf{g} – ускорение силы тяжести, а его разложение по подвижному базису $\boldsymbol{\tau}$ – \mathbf{n} имеет вид:

$$\mathbf{g} = g(\boldsymbol{\tau} \sin \alpha + \mathbf{n} \cos \alpha), \quad (4)$$

$$\mathbf{F}_{fr} = \hat{\mu}\mathbf{N} = -\mu N\boldsymbol{\tau}, \quad (5)$$

здесь $\hat{\mu}$ – тензорный коэффициент трения, μ – общепринятое обозначение коэффициента трения, N – сила реакции желоба.

Сила Стокса

$$\mathbf{F}_S = -6\pi\eta a \mathbf{V} \boldsymbol{\tau}. \quad (6)$$

Поскольку ускорение в базисе $\boldsymbol{\tau}$ – \mathbf{n} имеет вид:

$$\dot{\mathbf{V}} = \dot{V} \boldsymbol{\tau} + \frac{V^2}{R} \mathbf{n}, \quad (7)$$

то с учетом (4)–(7) векторное уравнение (3) становится таким:

$$\dot{V} \boldsymbol{\tau} + \frac{V^2}{R} \mathbf{n} = g(\boldsymbol{\tau} \sin \alpha + \mathbf{n} \cos \alpha) + \frac{N}{m} \mathbf{n} - \frac{V}{\tau} \boldsymbol{\tau} - k\omega \mathbf{V} \mathbf{n}, \quad (8)$$

где введено время релаксации

$$\frac{1}{\tau} = \frac{6\pi\eta a}{m}. \quad (9)$$

Проектируя уравнение (8) на базис $\boldsymbol{\tau}$ – \mathbf{n} , мы автоматически приходим к двум следующим уравнениям:

$$\begin{cases} \dot{V} = g \sin \alpha - \frac{\mu N}{m} - \frac{V}{\tau}, \\ N = m \left(\frac{V^2}{R} - g \cos \alpha + k \omega V \right). \end{cases} \quad (10)$$

Заметим, что верхнее уравнение в системе (10) представляет собой следствие закона сохранения полной суммарной мощности системы (см.: [17]), и была учтена формула (5). Нижнее уравнение представляет собой полную силу реакции желоба. В соответствии с алгоритмом, намеченным в работах [1, 2], полагаем, что

$$\frac{V^2}{R} = -g \cos \alpha + k \omega V. \quad (11)$$

Следовательно, силу реакции желоба с учетом формулы (11) можно вычислить, исходя из следующего общего выражения:

$$N = 2mg \left(\frac{k \omega V}{g} - \cos \alpha \right). \quad (12)$$

Полная же система уравнений с учетом (10) и (11) становится такой:

$$\begin{cases} \dot{V} = g \sin \alpha - \frac{\mu N}{m} - \frac{V}{\tau}, \\ \frac{V^2}{R} = -g \cos \alpha + k \omega V. \end{cases} \quad (13)$$

2. Анализ уравнений (13) при отсутствии диссипативных сил

Если пренебречь силами сопротивления и вспомнить, что $V = R\dot{\alpha}$, то уравнения (10) существенно упростятся, и мы получим

$$\begin{cases} \dot{V} = g \sin \alpha, \\ V \dot{\alpha} = -g \cos \alpha + k \omega V. \end{cases} \quad (14)$$

Так как $\omega = \frac{V}{a}$, где a – радиус шара, то, разделив верхнее уравнение на нижнее и вводя новую функцию

$$p = \cos \alpha, \quad (15)$$

приходим к линейному уравнению

$$p' - \frac{p}{V} = -\frac{kV}{ag}. \quad (16)$$

где $p' = \frac{dp}{dV}$.

Его решение имеет вид:

$$p = \cos \alpha = C_1 V - \frac{kV^2}{ag}, \quad (17)$$

где C_1 – константа интегрирования.

Из (16) получим

$$V = \frac{C_1 ag}{2k} - \sqrt{\left(\frac{C_1 ag}{2k}\right)^2 - \frac{ag \cos \alpha}{k}}. \quad (18)$$

В предельных случаях отсюда имеем, если $k \rightarrow 0$, то

$$V \approx -\frac{\cos \alpha}{C_1} - \frac{k \cos^2 \alpha}{C_1^3 ag}. \quad (19)$$

Напомним, что $\cos \alpha < 0$, поскольку $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$. Если же $a \rightarrow 0$, то

$$V \approx \sqrt{-\frac{ag \cos \alpha}{k}}. \quad (20)$$

Далее, в силу определений

$$\begin{cases} \dot{x} = V \cos \alpha, \\ \dot{y} = -V \sin \alpha, \end{cases}$$

с учетом общей формулы (18) приходим к следующему параметрическому решению

$$\begin{cases} x = \frac{a}{k} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda \cos \alpha}}\right) \cos \alpha d\alpha, \\ y = h - \frac{a}{k} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda \cos \alpha}}\right) \sin \alpha d\alpha, \end{cases} \quad (21)$$

где h – высота падения и введен безразмерный параметр

$$\lambda = \frac{4k}{C_1^2 ag}. \quad (22)$$

Учтено также, что

$$dt = -\frac{2}{C_1 g} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \lambda \cos \alpha}}. \quad (23)$$

Заметим, что в предельном случае, когда радиус шара $a \rightarrow \infty$ $\lambda \rightarrow 0$ (т.е. шар не катится, а просто скользит по желобу), решение (21) вырождается в следующую систему:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{k} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda \cos \alpha}}\right) \cos \alpha d\alpha \approx -\frac{a\lambda}{2k} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \cos^2 \alpha d\alpha = \\ = -\frac{1}{gC_1^2} \left(\alpha - \alpha_0 + \frac{1}{2} \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha_0\right), \\ y = h - \frac{a}{k} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda \cos \alpha}}\right) \sin \alpha d\alpha \approx \\ = h + \frac{a\lambda}{2k} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \cos \alpha \sin \alpha d\alpha = h - \frac{1}{gC_1^2} (\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha_0). \end{cases} \quad (24)$$

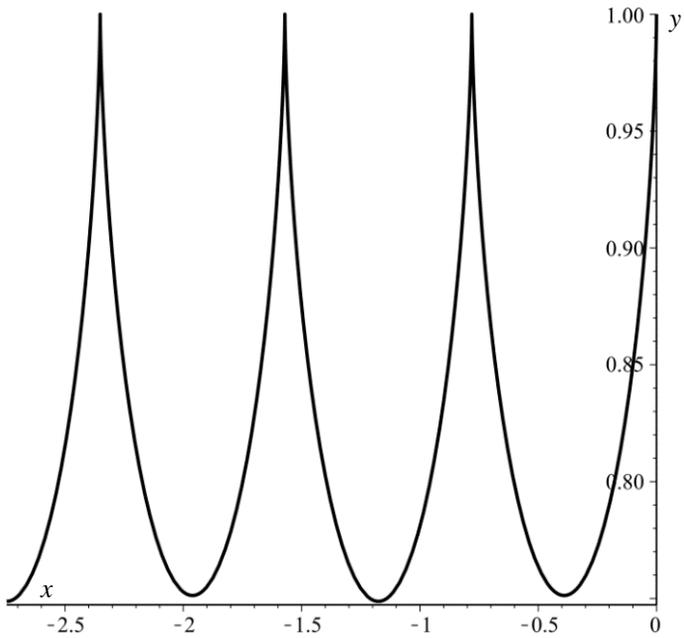


Рис. 2. Зависимость $y(x)$ для случая $\lambda = 0.01$ (большой радиус тела)
Fig. 2. Dependence $y(x)$ for $\lambda = 0.01$ (a long radius of the body)

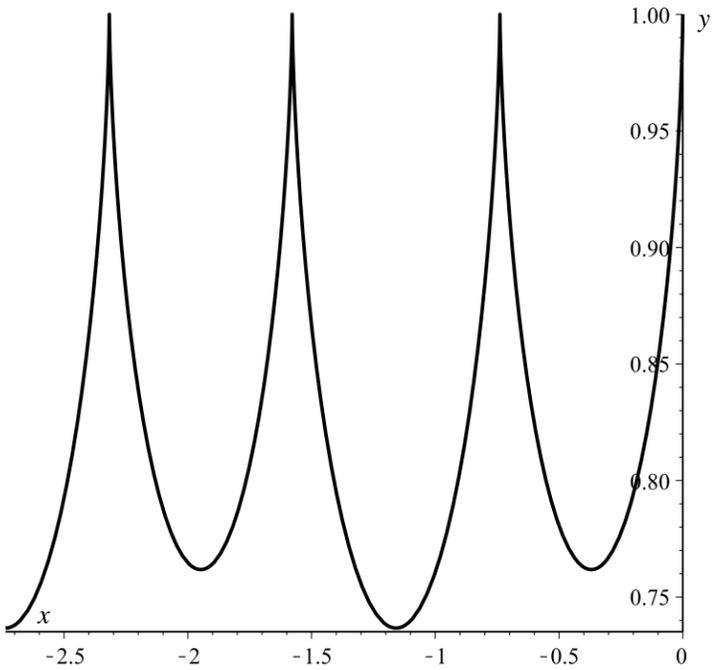


Рис. 3. Форма брахистохроны для случая $\lambda = 0.1$
Fig. 3. Brachistochrone shape at $\lambda = 0.1$

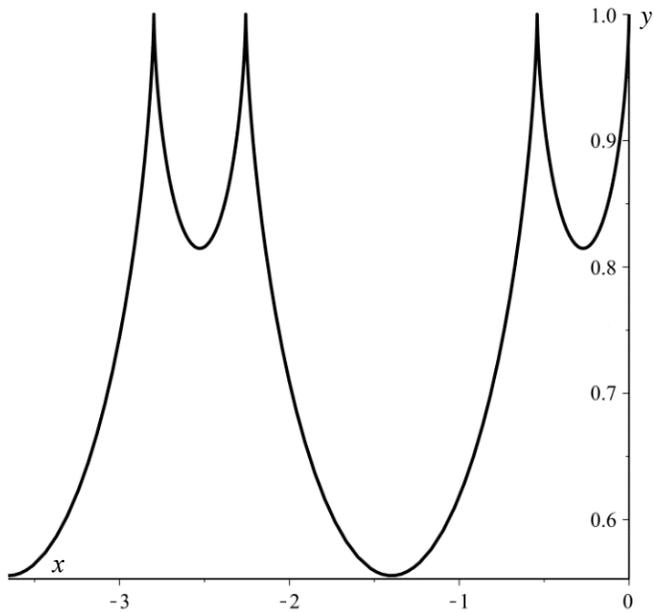


Рис. 4. Изменение формы брахистохроны при дальнейшем уменьшении радиуса тела для случая $\lambda = 0.75$

Fig. 4. Brachistochrone shape variation with a further decrease in the radius of the body at $\lambda = 0.75$

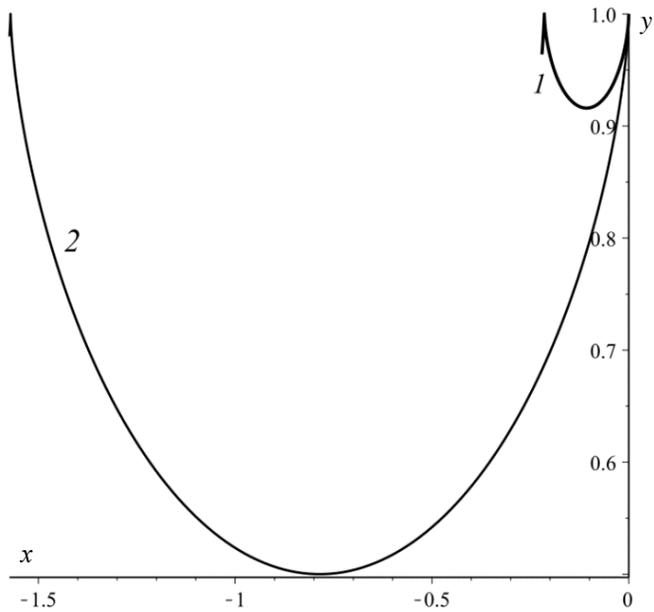


Рис. 5. Форма брахистохроны для сравнительно небольшого тела, $\lambda = 5$

Fig. 5. Brachistochrone shape for a relatively small body at $\lambda = 5$

Как видно из (24), мы пришли к уравнению брахистохроны (для нее $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$). Численное решение уравнений (21) для различных значений параметра λ , проиллюстрированное рис. 2–5, доказывает, что влияние эффекта Магнуса на форму брахистохроны существенно возрастает с уменьшением размера скатывающегося тела. Начальные условия выбраны в виде: $\alpha(0) = \alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, $V(0) = 0$.

Заключение

В заключение работы выделим несколько основных моментов.

1. Получена общая система уравнений, учитывающая влияние на уравнения движения эффекта Магнуса.
2. Проведен анализ полученных уравнений и найдено их численное решение для различных значений параметра λ .
3. Дана графическая иллюстрация численного решения.

Список источников

1. Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории движения тел с переменной массой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 65. С. 83–91. doi: 10.17223/19988621/65/6
2. Гладков С.О., Богданова С.Б. К теории пространственной брахистохроны // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 68. С. 53–60. doi: 10.17223/19988621/68/5
3. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. On a class of planar geometrical curves with constant reaction forces acting on particles moving along them // Journal of Mathematical Sciences. 2021. V. 257 (1). P. 27–30. doi: 10.1007/s10958-021-05466-4
4. Magnus G. Über eine abfallende Erscheinung bei rotierenden Körpern // Annalen der Physik. 1853. V. 164 (1). P. 1–29.
5. Platou A.S. Magnus Characteristics of Finned and Non Finned Projectiles // AIAA Journal. 1960. V. 3 (1). P. 83–90.
6. Dwyer H., Sander B.R. Magnus Forces Spinning Supersonic Cones. Part I: The Boundary Layer // AIAA Journal. 1976. V. 14 (11). P. 498–522.
7. Sturek W.B., Dwyer H., Kayser L., Nietubicz C., Reklis R., Opalka K. Computations of Magnus Effects for Yawed Spinning Body of Revolution // AIAA Journal. 1978. V. 16 (7). P. 687–692.
8. Шкадова В.П. Вращающийся цилиндр в потоке вязкой несжимаемой жидкости // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1982. Т. 14, вып. 1. С. 16–21.
9. Ландсберг Г.С. Элементарный учебник физики. М. : Наука, 1984. Т. 1: Механика. Теплота. Молекулярная физика. 606 с.
10. Pèchier M., Guillen P., Cayzac R. Magnus Effect Over Finned Projectiles // AIAA Journal of Spacecraft and Rockets. 2001. V. 38 (4). P. 542–549.
11. Бычков Н.М. Ветродвижитель с эффектом Магнуса. 1. Результаты модельных исследований // Теплофизика и аэромеханика. 2004. Т. 11, вып. 4. С. 583–596.
12. Бычков Н.М. Ветродвижитель с эффектом Магнуса. 2. Характеристики вращающегося цилиндра // Теплофизика и аэромеханика. 2005. Т. 12, вып. 1. С. 159–175.
13. Cayzac R., Carette E., Pascal D., Guillen P. Magnus effect: Physical Origins and Numerical Prediction // Journal of Applied Mechanics. 2011. V. 78 (5). P. 051005–051012.
14. Стрелков С.П. Механика. М. : Наука, 1975. 560 с.

15. Dupeux G., Le Goff A., Quéré D., Clanet C. The spinning ball spiral // *New Journal of Physics*. 2010. № 12. Art. 093004. doi: 10.1088/1367-2630/12/9/093004
16. Barkla H.M., Auchterloniet L.J. The Magnus or Robins effect on rotating spheres // *Journal of Fluid Mechanics*. 1971. V. 47 (3). P. 437–447.
17. Гладков С.О. Об одном методическом подходе при выводе основных физических уравнений // *Физическое образование в вузах*. 2021. Т. 27, вып. 2. С. 5–12.

References

1. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2020) K teorii dvizheniya tel s peremennoy massoy [To the theory of motion bodies with a variable mass]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 65. pp. 83–91. doi: 10.17223/19988621/65/6
2. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2020) K teorii prostranstvennoy brakhistokhrony [To the theory of a space brachistochrone]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 68. pp. 53–60. doi: 10.17223/19988621/68/5
3. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2021) On a class of planar geometrical curves with constant reaction forces acting on particles moving along them. *Journal of Mathematical Sciences*. 257(1). pp. 27–30. doi: 10.1007/s10958-021-05466-4
4. Magnus G. (1853) Über eine abfallende Erscheinung bei rotierenden Körpern. *Annalen der Physik*. 164(1). pp. 1–29.
5. Platou A.S. (1960) Magnus characteristics of finned and non finned projectiles. *AIAA Journal*. 3(1). pp. 83–90. doi: 10.2514/3.2791
6. Dwyer H., Sander B.R. (1976) Magnus forces spinning supersonic cones. Part I: The boundary layer. *AIAA Journal*. 14(11). pp. 498–522. doi: 10.2514/3.61389
7. Sturek W.B., Dwyer H., Kayser L., Nietubicz C., Reklis R., Opalka K. (1978) Computations of Magnus effects for yawed spinning body of revolution. *AIAA Journal*. 16(7). pp. 687–692. doi: 10.2514/3.7566
8. Shkadova V.P. (1982) Vrashchayushchiysya tsilindr v potoke vyzkoy neshzimaemoy zhidkosti [Rotating cylinder in a viscous incompressible fluid flow]. *Izvestiya AN SSSR. MZHG – Fluid Dynamics*. 17(1). pp. 12–16.
9. Landsberg G.S. (1984) *Elementarnyy uchebnyk fiziki. Tom 1. Mekhanika. Teplota. Molekulyarnaya fizika* [Elementary textbook of physics. Volume 1. Mechanics. Heat. Molecular physics]. Moscow: Nauka.
10. Péchier M., Guillen P., Cayzac R. (2001) Magnus effect over finned projectiles. *AIAA Journal of Spacecraft and Rockets*. 38(4). pp. 542–549. doi: 10.2514/2.3714
11. Bychkov N.M. (2004) Vetrodvigatel' s effektom Magnusa. 1. Rezul'taty model'nykh issledovaniy [Magnus wind turbine. 1. Results of model testing]. *Teplofizika i aeromekhanika – Thermophysics and Aeromechanics*. 11(4). pp. 567–580.
12. Bychkov N.M. (2005) Vetrodvigatel' s effektom Magnusa. 2. Kharakteristiki vrashchayushchegosya tsilindra [Magnus wind turbine. 2. Characteristics of rotating cylinder]. *Teplofizika i aeromekhanika – Thermophysics and Aeromechanics*. 12(1). pp. 159–175.
13. Cayzac R., Carotte E., Pascal D., Guillen P. (2011) Magnus effect: physical origins and numerical prediction. *Journal of Applied Mechanics*. 78(5). pp. 051005–051012. doi: 10.1115/1.4004330
14. Strelkov S.P. (1975) *Mekhanika* [Mechanics]. Moscow: Nauka.
15. Dupeux G., Le Goff A., Quéré D., Clanet C. (2010) The spinning ball spiral. *New Journal of Physics*. 12. Article 093004. doi: 10.1088/1367-2630/12/9/093004
16. Barkla H.M., Auchterloniet L.J. (1971) The Magnus or Robins effect on rotating spheres. *Journal of Fluid Mechanics*. 47(3). pp. 437–447. doi: 10.1017/S0022112071001150

17. Gladkov S.O. (2021) Ob odnom metodicheskom podkhode pri vyvode osnovnykh fizicheskikh uravneniy [About one methodical approach when deducing basic physical equations]. *Fizicheskoe obrazovanie v VUZakh*. 27(2). pp. 5–12.

Сведения об авторах:

Гладков Сергей Октябрьнович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры 311 «Прикладные программные средства и математические методы» Московского авиационного института (национального исследовательского университета), Москва, Россия. E-mail: sglad51@mail.ru

Богданова Софья Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры 311 «Прикладные программные средства и математические методы» Московского авиационного института (национального исследовательского университета), Москва, Россия. E-mail: sonjaf@list.ru

Information about the authors:

Gladkov Sergey O. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation). E-mail: sglad51@mail.ru

Bogdanova Sofya B. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation). E-mail: sonjaf@list.ru

Статья поступила в редакцию 04.04.2022; принята к публикации 03.02.2023

The article was submitted 04.04.2022; accepted for publication 03.02.2023