

Научная статья

УДК 519.2

doi: 10.17223/19988605/61/5

Оценивание методом моментов параметра равномерного распределения длительности непродлевающегося случайного мертвого времени в рекуррентном полусинхронном потоке событий в общем и особом случаях

Александр Михайлович Горцев¹, Анна Васильевна Веткина²

^{1, 2} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ a-gortsev@mail.ru

² anyavetkina@gmail.com

Аннотация. Исследуется полусинхронный поток событий, относящийся к классу дважды стохастических потоков событий. Функционирование потока рассматривается в условиях непродлевающегося случайного мертвого времени, распределенного по равномерному закону на отрезке $[0, T^*]$. Рассматривается частный случай функционирования полусинхронного потока событий, когда такой поток является рекуррентным, в общем и особом случаях соотношения его параметров. Производится оценивание параметра T^* равномерного распределения длительности непродлевающегося случайного мертвого времени методом моментов. Приводятся результаты статистических экспериментов, показывающие адекватность полученных оценок.

Ключевые слова: рекуррентный полусинхронный поток событий; непродлевающееся случайное мертвое время; оценка параметра; метод моментов

Для цитирования: Горцев А.М., Веткина А.В. Оценивание методом моментов параметра равномерного распределения длительности непродлевающегося случайного мертвого времени в рекуррентном полусинхронном потоке событий в общем и особом случаях // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 61. С. 47–60. doi: 10.17223/19988605/61/5

Original article

doi: 10.17223/19988605/61/5

Estimation by method of moments of the parameter of the uniform distribution of the duration of unextendable random dead time in recurrent semi-synchronous events flow in general and special case

Alexander M. Gortsev¹, Anna V. Vetkina²

^{1, 2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ a-gortsev@mail.ru

² anyavetkina@gmail.com

Abstract. The paper describes recurrent semi-synchronous events flow with $p = 1$ that is a common mathematical model of information flows of messages operating in telecommunication and information-computing networks, and that belongs to the class of doubly stochastic event flows. A general and special cases are considered. Operation of the flow is considered with random unextendable dead time that has uniform distribution on the interval $[0, T^*]$. Parameter T^* of the dead time is estimated using the method of moments. Results of statistical experiments are presented.

Mathematical expectation of the duration of τ – the interval between adjacent events of the observed flow – is given for the general case by the formula

$$M(\tau | T^*) = \frac{T^*}{2} + \frac{1}{\lambda_2 + \alpha_2} + \frac{\alpha_2}{\lambda_1(\lambda_1 + \alpha_2)} + \frac{\alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1(\lambda_1 + \alpha_2)^2(\lambda_2 + \alpha_2)} \frac{1}{T^*} \left(1 - e^{-(\lambda_1 + \alpha_2)T^*}\right), T^* > 0;$$

and for special case:

$$M(\tau|T^*) = \frac{T^*}{2} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{\alpha_2}{\lambda_1(\lambda_1 + \alpha_2)} + \left[\frac{\alpha_2}{\lambda_1(\lambda_1 + \alpha_2)} \right]^2 \frac{1}{T^*} \left(1 - e^{-(\lambda_1 + \alpha_2)T^*} \right), \quad T^* \geq 0.$$

The estimate $\hat{T}^*$ is found numerically from the equation of moments $M(\tau|T^*) = C$, $C = (1/n) \sum_{k=1}^n (t_{k+1} - t_k)$, where $t_1, t_2, \dots, t_{n+1}$ are moments of occurrence of events in the observed flow. Value C is found using simulation modeling of the observed flow. Analysis of the numerical results shows that in the sense of the introduced criterion $\hat{V}(\hat{T}^*)$ (sample variance of the estimate $\hat{T}^*$), an increase in the parameter T^* has a negative effect on the quality of estimates $\hat{T}^*$, that is quite natural: increasing the parameter T^* leads to an increase in the number of lost events of the initial flow.

According to the results of the research, there are the following conclusions: 1) it is shown analytically that the equation of moments has a unique solution; 2) the results of simulation modelling show that the quality of the estimates in the sense of the introduced criterion (sample variance of the estimate $\hat{T}^*$) is quite satisfactory, and the bias of estimates $\hat{T}^*$ relative to the true value of parameter T^* doesn't exceed hundredths of values.

Keywords: recurrent semi-synchronous events flow; unextendable random dead time; uniform distribution; estimation of the parameter; method of moments

For citation: Gortsev, A.M., Vetkina, A.V. (2022) Estimation by method of moments of the parameter of the uniform distribution of the duration of unextendable random dead time in recurrent semi-synchronous events flow in general and special case. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 61. pp. 47–60. doi: 10.17223/19988605/61/5

В современных телекоммуникационных системах [1, 2] входящие потоки событий наиболее адекватно описывают дважды стохастические потоки событий – потоки, у которых случайными являются моменты наступления событий и интенсивность. Поэтому исследование дважды стохастических потоков является актуальной задачей. В общем случае дважды стохастические потоки событий являются коррелированными потоками [2].

Дважды стохастические потоки делятся на два класса: первый класс составляют потоки, сопровождающий процесс (интенсивность) которых есть непрерывный случайный процесс [3, 4]; второй – потоки, сопровождающий процесс (интенсивность) которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным (произвольным) числом состояний [5, 6].

В зависимости от того, каким образом происходит переход интенсивности из состояния в состояние, выделяется три типа дважды стохастических потоков: 1) синхронные потоки (потоки, у которых состояние сопровождающего процесса меняется в случайные моменты времени, являющиеся моментами наступления событий) [7–10]; 2) асинхронные потоки (потоки, у которых переход из состояния в состояние сопровождающего процесса происходит в случайные моменты времени и не зависит от моментов наступления событий) [11–14]; 3) полусинхронные потоки (потоки, у которых одна часть состояний сопровождающего процесса меняется в моменты наступления событий потока, другая часть состояний сопровождающего процесса меняется в произвольные моменты времени, не связанные с моментами наступления событий потока) [15–18].

На практике часто приходится иметь дело с потоками, у которых не все события доступны наблюдению. Как правило, причиной ненаблюдаемости служит мертвое время регистрирующих приборов [19], порождаемое зарегистрированным событием, так что другие события, наступившие в этот период, теряются. Регистрирующие приборы при этом делятся на два вида: с непродлевающимся мертвым временем и продлевающимся. Кроме того, длительность мертвого времени может быть как детерминированной величиной, одинаковой для всех событий, так и случайной с тем или иным законом распределения. В реальных регистрирующих устройствах величина и характер мертвого времени зависят от многих факторов, причем регистрирующие приборы обладают значением длительности мертвого времени, ограниченным сверху некоторой величиной. Переходя к случайному мертвому времени [19], вполне естественно рассматривать его распределение как равномерное на некотором отрезке.

В данной работе исследуется полусинхронный дважды стохастический поток событий с интенсивностью, являющейся кусочно-постоянным случайным процессом с двумя состояниями. На параметр потока накладывается условие, такое что исходный коррелированный поток вырождается в рекуррентный. Рассматривается два случая функционирования такого потока: общий и особый. Производится оценивание параметра длительности случайного мертвого времени, распределенного по равномерному закону. Для этого выводится аналитическая формула математического ожидания длительности интервала между соседними событиями наблюдаемого потока и находится оценка параметра равномерного распределения длительности непродлевающегося случайного мертвого времени с использованием уравнения моментов. С помощью построенной имитационной модели наблюдаемого потока реализуются статистические эксперименты для получения численных результатов оценивания.

1. Математическая модель наблюдаемого потока. Постановка задачи

Рассматривается стационарный режим функционирования полусинхронного дважды стохастического потока событий, сопровождающий процесс (интенсивность) которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями S_1 и S_2 . Будем говорить, что имеет место первое состояние процесса (потока) S_1 , если $\lambda(t) = \lambda_1$, и, наоборот, имеет место второе состояние процесса (потока) S_2 , если $\lambda(t) = \lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). Если имеет место первое состояние процесса S_1 , то в течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_1$, поступает пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_1 . Если имеет место второе состояние процесса S_2 , то в течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_2$, поступает пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_2 . Переход из состояния S_1 процесса $\lambda(t)$ в состояние S_2 возможен только в момент наступления события (свойство синхронности потока), при этом этот переход осуществляется с вероятностью p (с вероятностью $1 - p$ процесс $\lambda(t)$ остается в состоянии S_1). Переход из состояния S_2 процесса $\lambda(t)$ в состояние S_1 может осуществляться в произвольный момент времени, не связанный с моментом наступления события (свойство асинхронности потока). При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии есть случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону $F(t) = 1 - e^{-\alpha_2 t}$, $t \geq 0$, где α_2 – интенсивность смены состояния S_2 на S_1 . Так как переход из второго состояния в первое не привязан к моменту наступления события во втором состоянии, то поток называется полусинхронным дважды стохастическим потоком событий. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – скрытый марковский процесс ($\lambda(t)$ – принципиально ненаблюдаемый процесс; наблюдаемыми являются только моменты наступления событий потока).

После каждого зарегистрированного события в момент времени t_k наступает период мертвого времени случайной длительности, который порождается этим событием, так что другие события исходного потока, наступившие в течение этого периода мертвого времени, недоступны наблюдению и не вызывают его продления (непродлевающееся мертвое время). Принимается, что случайная длительность мертвого времени распределена по равномерному закону с плотностью вероятности $p(T) = 1/T^*$, где T – значение длительности мертвого времени, $0 \leq T \leq T^*$.

Исследуется частный случай функционирования полусинхронного потока событий, когда $p = 1$, т.е. такой поток, который при каждом наступлении события в первом состоянии мгновенно переходит во второе. При выполнении данного условия исходный поток, действующий в условиях детерминированного мертвого времени, становится рекуррентным потоком:

$$p(\tau_1, \tau_2 | T) = p(\tau_1 | T) p(\tau_2 | T), \quad \tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T,$$

где $p(\tau | T)$ – плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в полусинхронном потоке, $p(\tau_1, \tau_2 | T)$ – совместная плотность вероятности [20. С. 254].

Вместе с тем рассматриваются общий и особый случаи соотношения параметров данного потока: когда $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 \neq 0$ и когда $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$.

Возможный вариант возникающей ситуации приведен на рис. 1, где S_1 и S_2 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; временная ось $(0, t)$ – ось моментов наступления наблюдаемых событий в моменты времени $t_1, t_2, \dots$; временная ось $(0, t^{(1)})$ – ось наступления событий в моменты времени $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \dots$ в первом (S_1) состоянии процесса $\lambda(t)$, на которой также указаны значения длительностей $T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, \dots$ мертвых времен, порождаемых наблюдаемыми событиями потока; аналогично для временной оси $(0, t^{(2)})$; белыми кружками обозначены наблюдаемые события, черными – ненаблюдаемые, штриховкой – периоды мертвого времени; траектория процесса $\lambda(t)$ привязана к временной оси $(0, t^{(1)})$.

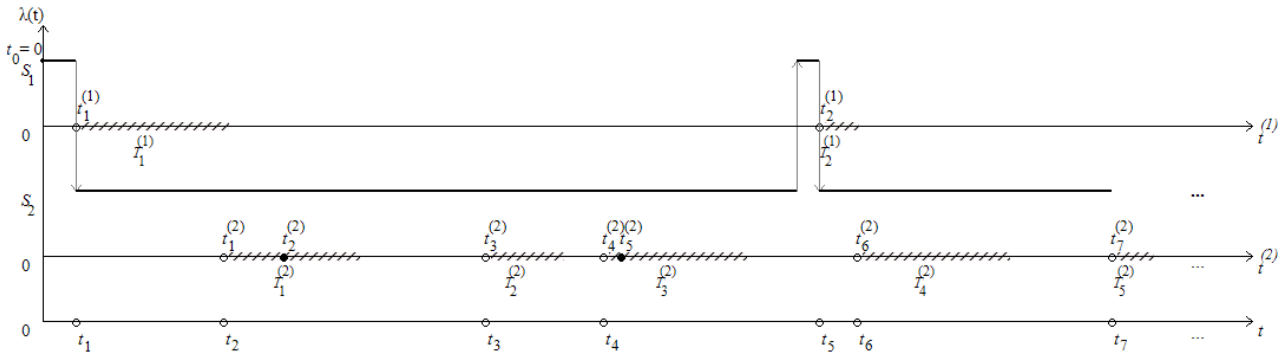


Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Fig. 1. Formation of the observed event flow

Цели данной работы:

1. На основании выборки моментов наступления событий $t_1, t_2, \dots, t_n$ наблюдаемых потоков в общем и особом случаях на временном интервале $(0, T_m)$, где T_m – время наблюдения за потоком ($t_n < T_m$), оценить параметр равномерного распределения длительности непродлевающегося случайного мертвого времени T^* .

2. Исследовать оценку $\hat{T}^*$ для общего и особого случаев рассматриваемого потока. Для этого провести статистические эксперименты, устанавливающие стационарный режим и определяющие свойства полученных оценок.

2. Уравнение моментов для оценивания параметра T^*

Введем $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \dots$, – значение длительности k -го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока ($\tau_k \geq 0$). Так как рассматривается стационарный режим функционирования наблюдаемого потока, то плотность вероятности значений длительности k -го интервала есть $p(\tau_k) = p(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого k , т.е. момент наступления события есть $\tau = 0$.

Для оценки неизвестного параметра T^* равномерного распределения длительности случайного непродлевающегося мертвого времени используется метод моментов [21]. Для этого находится теоретический момент – математическое ожидание случайной величины τ (длительность интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке) $M(\tau|T^*)$, после чего ММ-оценка параметра T^* находится численно из уравнения моментов $M(\tau|T^*) = C$, где C – выборочное среднее, $C = (1/n) \sum_{k=1}^n \tau_k$, $\tau_k = t_{k+1} - t_k > 0$, являющееся оценкой математического ожидания $M(\tau|T^*)$.

Из работы [20] имеем, что плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в полусинхронном потоке, функционирующем в условиях непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности T , в общем случае имеет вид:

$$p(\tau|T) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \gamma(T)\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau-T)} + (1-\gamma(T))(\alpha_2 + \lambda_2)e^{-(\alpha_2 + \lambda_2)(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{где } \gamma(T) = \frac{\alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 - \lambda_1 p)}{(\lambda_1 p + \alpha_2)(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2)} \left[1 - \frac{p(\lambda_1 - \lambda_2)}{(1-p)\lambda_2 - (\alpha_2 + \lambda_2)e^{(\lambda_1 p + \alpha_2)T}} \right], \quad \lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 \neq 0; \quad \tau_1, \tau_2 - \text{ смежные интервалы между наблюдаемыми событиями. Для обобщенного полусинхронного потока событий с непродлевающимся мертвым временем фиксированной длительности } T \text{ в особом случае } \lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0 \text{ справедливы формулы}$$

$$p(\tau|T) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \left[\lambda_1 - \alpha_2(1-\delta)\pi_2(T)(1-\lambda_1(\tau-T)) \right] e^{-\lambda_1(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{где } \pi_2(T) = \pi_2 - [\pi_2 - \pi_2(0|T)]e^{-(\alpha_2 + p\lambda_1)T}, \quad \pi_2 = \frac{p\lambda_1}{\alpha_2 + p\lambda_1}, \quad \pi_2(0|T) = \frac{p\lambda_1 - \pi_2[\alpha_2(1-p+\delta p) - \lambda_1(1-p)]}{\lambda_1 + [\alpha_2(1-p+\delta p) - \lambda_1(1-p)]} \frac{[1 - e^{-(\alpha_2 + p\lambda_1)T}]}{e^{-(\alpha_2 + p\lambda_1)T}},$$

δ – вероятность инициирования дополнительного события при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое ($0 \leq \delta \leq 1$).

Подчеркнем, что внесение непродлевающегося случайного мертвого времени в математическую модель полусинхронного потока событий может только изменить (в меньшую или большую сторону) корреляцию в потоке по сравнению с ситуацией отсутствия мертвого времени ($T^* = 0$) либо с ситуацией наличия детерминированного мертвого времени ($T > 0$), но не устранить ее полностью.

Тогда искомая плотность вероятности $p(\tau)$ примет вид

$$p(\tau) = \int_{(T)} p(\tau, T) dT = \int_{(T)} p(T) p(\tau|T) dT,$$

где $p(\tau, T)$ – совместная плотность вероятности значений τ и T ; условная плотность вероятности $p(\tau|T)$ определяется выражениями (1) и (2) для общего и особого случаев соответственно при подстановке параметров $p = 1$ и $\delta = 0$; равномерная плотность $p(T)$ определена в разделе 1; (T) – область интегрирования значений случайной величины – длительности непродлевающегося случайного мертвого времени. Отметим, что внесение непродлевающегося случайного мертвого времени в математическую модель для случая рекуррентного потока, когда $p = 1$ и $\delta = 0$, оставляет наблюдаемый поток в классе рекуррентных потоков.

Область значений случайной величины мертвого времени представляет собой объединение двух областей, когда $0 \leq \tau < T^*$ и когда $\tau \geq T^*$, поэтому выражение для плотности $p(\tau)$ имеет следующий вид:

$$p(\tau) = \begin{cases} p_1(\tau) = \int_0^{\tau} p(T) p(\tau|T) dT, & 0 \leq \tau < T^*, \\ p_2(\tau) = \int_0^{T^*} p(T) p(\tau|T) dT, & \tau \geq T^*. \end{cases} \quad (3)$$

Подставляя выражение (1) при $p = 1$ в (3) и учитывая, что $p(T) = 1/T^*$, $0 \leq T < T^*$ для общего случая $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 \neq 0$, находим

$$p_1(\tau) = \frac{1}{T^*} \left\{ 1 - e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-(\lambda_1 + \alpha_2)\tau} + e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau} \right\}, \quad 0 \leq \tau < T^*, \quad (4)$$

$$p_2(\tau) = \frac{1}{T^*} \left\{ e^{-\lambda_1 \tau} \left[-1 + C_3 e^{\lambda_1 T^*} + C_4 e^{-\alpha_2 T^*} \right] + e^{-(\lambda_2 + \alpha_2)\tau} \left[-1 + C_3 e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)T^*} + C_4 e^{(\lambda_2 + \alpha_2)T^*} \right] \right\}, \quad \tau \geq T^*, \quad (5)$$

$$\text{где } C_3 = -\frac{\alpha_2(\lambda_2 + \alpha_2)}{(\lambda_1 + \alpha_2)(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2)}, \quad C_4 = \frac{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\lambda_1 + \alpha_2)(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2)}.$$

Аналогично подставляя выражение (2) в (3) при $p = 1$, $\delta = 0$ для особого случая $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$, находим

$$p_1(\tau) = \frac{1}{T^*} \left\{ 1 - 2e^{-\lambda_1 \tau} + e^{-(\lambda_1 + \alpha_2)\tau} \right\}, \quad 0 \leq \tau < T^*, \quad (6)$$

$$p_2(\tau) = \frac{1}{T^*} e^{-\lambda_1 \tau} \left\{ -2 + \left[1 + \frac{\lambda_1 \alpha_2}{\lambda_1 + \alpha_2} (\tau - T^*) \right] e^{\lambda_1 T^*} + \left[1 - \frac{\lambda_1 \alpha_2}{\lambda_1 + \alpha_2} (\tau - T^*) \right] e^{-\alpha_2 T^*} \right\}, \quad \tau \geq T^*. \quad (7)$$

Отметим, что и для общего, и для особого случая рассматриваемого потока в точке $\tau = T^*$ выполняется равенство двух плотностей $p_1(T^*) = p_2(T^*)$ и неравенство их производных $p_1'(T^*) \neq p_2'(T^*)$, т.е. функция $p(\tau)$ является непрерывной и в точке $\tau = T^*$ имеет излом.

По определению математического ожидания случайной величины τ – длительности интервала между двумя соседними событиями наблюдаемого потока – с учетом формулы (3) имеем $M(\tau|T^*) = \int_0^{T^*} \tau p_1(\tau) d\tau + \int_{T^*}^{\infty} \tau p_2(\tau) d\tau$. Подставляя сюда плотности вероятности $p_1(\tau)$, $p_2(\tau)$, определенные в (4), (5) для общего случая, находим

$$M(\tau|T^*) = \frac{T^*}{2} + \frac{1}{\lambda_2 + \alpha_2} + \frac{\alpha_2}{\lambda_1(\lambda_1 + \alpha_2)} + \frac{\alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1(\lambda_1 + \alpha_2)^2(\lambda_2 + \alpha_2)} \frac{1}{T^*} \left(1 - e^{-(\lambda_1 + \alpha_2)T^*} \right), \quad T^* > 0. \quad (8)$$

Далее, подставляя формулы (6), (7) для особого случая, находим

$$M(\tau|T^*) = \frac{T^*}{2} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{\alpha_2}{\lambda_1(\lambda_1 + \alpha_2)} + \left[\frac{\alpha_2}{\lambda_1(\lambda_1 + \alpha_2)} \right]^2 \frac{1}{T^*} \left(1 - e^{-(\lambda_1 + \alpha_2)T^*} \right), \quad T^* \geq 0. \quad (9)$$

Аналитически доказано, что математическое ожидание $M(\tau|T^*)$, определяемое формулой (8) для общего случая и формулой (9) для особого случая, является возрастающей функцией переменной (параметра) T^* ($T^* \geq 0$). Из этого следует, что уравнение моментов $M(\tau|T^*) = C$ имеет единственное решение. Уравнение моментов может не иметь решения только в одном единственном случае, когда $C < M(\tau|T^* = 0)$, тогда принимается $\hat{T}^* = 0$. При этом оценки, получаемые методом моментов, являются состоятельными (выполнены условия теоремы о состоятельности оценок [21]).

3. Результаты статистических экспериментов для наблюдаемого потока

Для установления стационарного режима и определения свойств найденных оценок проведены статистические эксперименты.

Первый статистический эксперимент (установление стационарного режима). Было получено 100 реализаций ($N = 100$) имитационной модели наблюдаемого потока для общего и особого случаев при $T^* = 1; 3$ и $T_m = 50, 100, \dots, 1\,500$. Далее для каждого набора параметров было получено 100 решений уравнения моментов методом простой итерации при $\varepsilon = 0,0001$, $\Delta T^* = 0,001$. Каждое i -е решение есть значение оценки $\hat{T}_i^*$, $i = 1, \dots, 100$, параметра T^* . Заданный набор параметров для рекуррентного полусинхронного потока в общем случае: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \alpha_2 = 0,2$; в особом случае: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1,8, \alpha_2 = 0,2$.

На основании полученных данных вычислялись выборочное среднее искомым оценок $\hat{M}(\hat{T}^*) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{T}_i^*$ и их выборочная вариация $\hat{V}(\hat{T}^*) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{T}_i^* - T^*)^2$, где T^* – известное из имитационной модели значение параметра.

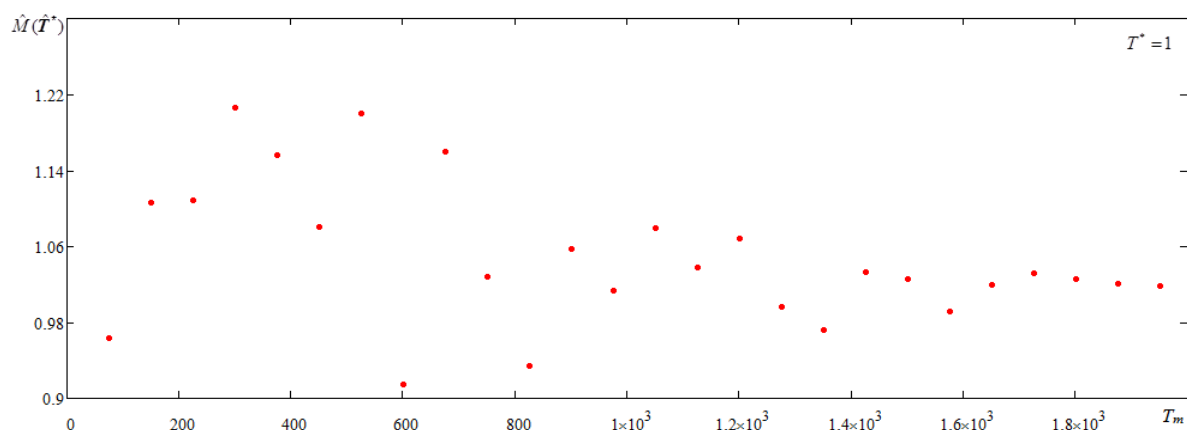
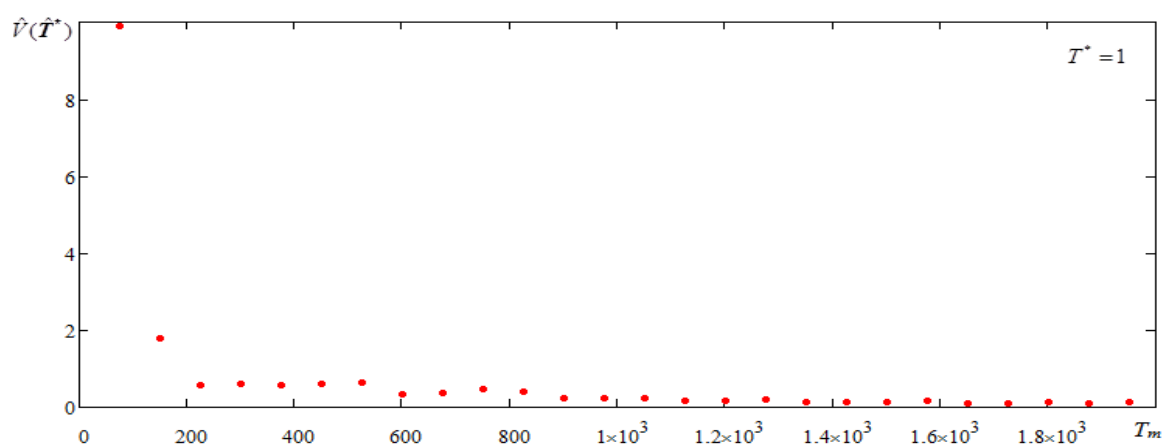
В табл. 1 приведены результаты для общего случая наблюдаемого потока при $T^* = 1$. В первой строке таблицы указано время моделирования T_m (время наблюдения за потоком) ($T_m = 50, 100, \dots, 2\,000$ ед. времени); во второй и третьей строках – выборочное среднее $\hat{M}(\hat{T}^*)$ и выборочная вариация $\hat{V}(\hat{T}^*)$ для $T^* = 1$.

Таблица 1

Численные результаты первого статистического эксперимента для $T^* = 1$, общий случай

T_m	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
$\hat{M}(T^*)$	0,9628	1,1062	1,108	1,2059	1,1562	1,0810	1,1997	0,9151	1,1594	1,0282
$\hat{V}(T^*)$	9,8829	1,7811	0,5607	0,5945	0,5632	0,6084	0,6523	0,3512	0,3633	0,4652
550	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000	1 050
0,9341	1,0573	1,0133	1,0789	1,0381	1,0684	0,9962	0,9714	1,0331	1,0255	0,9910
0,4155	0,2409	0,2246	0,2367	0,1766	0,1648	0,1976	0,1366	0,1361	0,1256	0,1571
1 100	1 150	1 200	1 250	1 300	1 350	1 400	1 450	1 500	1 550	1 600
1,0189	1,0316	1,0252	1,0204	1,0178	1,0246	1,0394	0,9830	0,9875	1,0169	0,9991
0,1034	0,1100	0,1342	0,0964	0,1271	0,0946	0,1037	0,1179	0,1085	0,0997	0,0796
1 650	1 700	1 750	1 800	1 850	1 900	1 950	2 000			
1,0007	1,0256	0,9533	1,0344	1,0140	1,0293	1,0153	0,9892			
0,0642	0,0661	0,0840	0,0770	0,0807	0,0635	0,0909	0,0696			

Для наглядности на рис. 2 и 3 приведены графики зависимостей $\hat{M}(T^*)$ и $\hat{V}(T^*)$ от значения времени моделирования T_m для $T^* = 1$, построенные по данным табл. 1.

Рис. 2. График зависимости $\hat{M}(T^*)$ от T_m при $T^* = 1$ в общем случаеFig. 2. Plot of $\hat{M}(T^*)$ versus T_m with $T^* = 1$ in general caseРис. 3. График зависимости $\hat{V}(T^*)$ от T_m при $T^* = 1$ в общем случаеFig. 3. Plot of $\hat{V}(T^*)$ versus T_m with $T^* = 1$ in general case

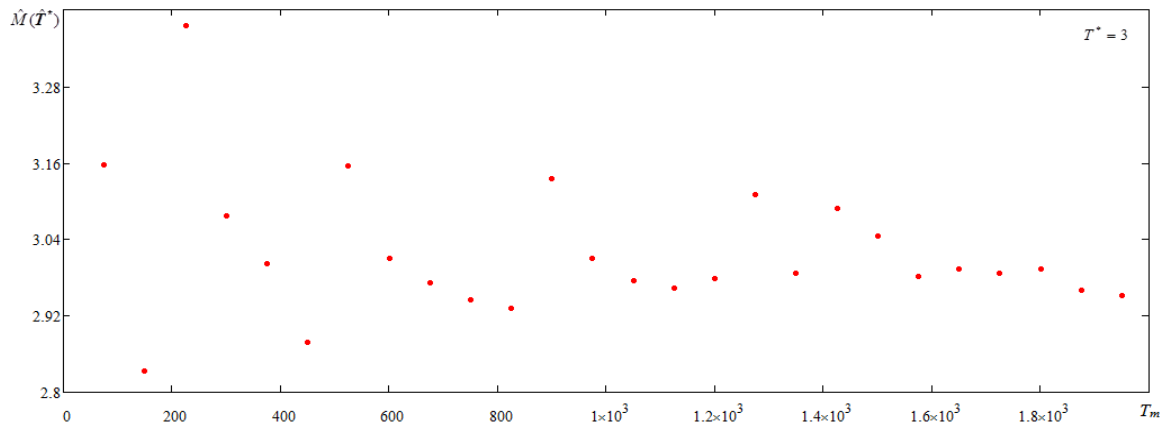
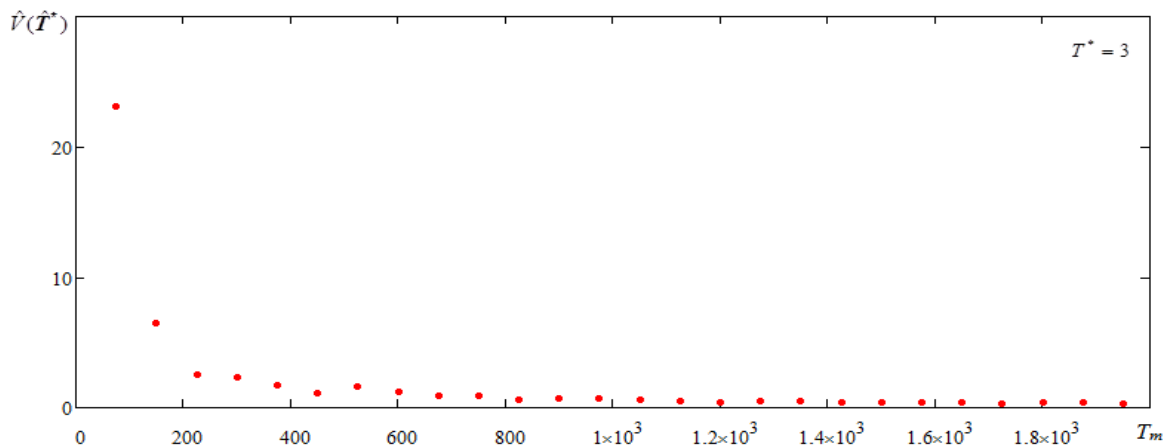
В табл. 2 приведены результаты для общего случая наблюдаемого потока при $T^* = 3$. Структура табл. 2 аналогична структуре табл. 1.

Таблица 2

Численные результаты первого статистического эксперимента для $T^* = 3$, общий случай

T_m	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
$\hat{M}(\hat{T}^*)$	3,1570	2,8336	3,3744	3,0769	3,0023	2,8782	3,1557	3,0098	2,9714	2,9456
$\hat{V}(\hat{T}^*)$	23,089	6,4750	2,5065	2,3764	1,6844	1,0933	1,6212	1,2113	0,8877	0,8757
550	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000	1 050
2,9310	3,1351	3,0106	2,9751	2,9633	2,9780	3,1098	2,9862	3,0876	3,0449	2,9822
0,5920	0,6786	0,7178	0,5904	0,4972	0,4203	0,5318	0,5243	0,3918	0,3930	0,4549
1 100	1 150	1 200	1 250	1 300	1 350	1 400	1 450	1 500	1 550	1 600
2,9933	2,9860	2,9937	2,9608	2,9516	3,0190	3,0104	2,9546	2,9979	3,0287	2,9543
0,3848	0,3413	0,4107	0,3657	0,3227	0,3035	0,2829	0,2885	0,2738	0,2367	0,2568
1 650	1 700	1 750	1 800	1 850	1 900	1 950	2 000			
2,9897	2,9656	3,0635	2,9404	3,0245	2,9945	2,9154	2,9995			
0,2090	0,2899	0,2852	0,2508	0,2480	0,1882	0,1711	0,1858			

На рис. 4 и 5 приведены графики зависимостей $\hat{M}(\hat{T}^*)$ и $\hat{V}(\hat{T}^*)$ от времени моделирования T_m для $T^* = 3$, построенные по данным табл. 2.

Рис. 4. График зависимости $\hat{M}(\hat{T}^*)$ от T_m при $T^* = 3$ в общем случаеFig. 4. Plot of $\hat{M}(\hat{T}^*)$ versus T_m with $T^* = 3$ in general caseРис.5. График зависимости $\hat{V}(\hat{T}^*)$ от T_m при $T^* = 3$ в общем случаеFig. 5. Plot of $\hat{V}(\hat{T}^*)$ versus T_m with $T^* = 3$ in general case

Из анализа результатов первого статистического эксперимента следует, что для рекуррентного полусинхронного потока событий в общем случае справедливо:

1) стационарный режим функционирования потока устанавливается при $T_m \geq 1600$ ед. времени, так как выборочное среднее $\hat{M}(\hat{T}^*)$ стремится к постоянному значению, когда $T_m \geq 1600$ ед. времени;

2) оценка $\hat{T}^*$ является смещенной оценкой; причиной смещения оценки $\hat{T}^*$ ($\hat{T}^* < T^*$) относительно истинного T^* (известного из имитационной модели) является то, что значения случайного мертвого времени T сосредоточены около теоретического среднего ($T^*/2$).

Результаты первого статистического эксперимента для особого случая приведены в табл. 3, 4 для $T^* = 1$ и $T^* = 3$ соответственно, а также на рис. 6, 7 и 8, 9 для $T^* = 1$ и $T^* = 3$ соответственно.

Таблица 3

Численные результаты эксперимента для $T^* = 1$, особый случай

T_m	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
$\hat{M}(\hat{T}^*)$	0,9133	0,9025	0,9058	0,8939	0,9135	0,9120	0,9102	0,8962	0,9076	0,9105
$\hat{V}(\hat{T}^*)$	0,0370	0,0236	0,0176	0,0139	0,0140	0,0144	0,0120	0,0114	0,012	0,0128
550	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000	1 050
0,8989	0,9081	0,911	0,9011	0,9073	0,9012	0,9050	0,9046	0,9019	0,9043	0,9040
0,0115	0,0131	0,0100	0,0108	0,0106	0,0114	0,0100	0,0108	0,0104	0,0103	0,0105
1 100	1 150	1 200	1 250	1 300	1 350	1 400	1 450	1 500	1 550	1 600
0,9031	0,9048	0,9055	0,9043	0,8792	0,9039	0,9048	0,9049	0,9040	0,9029	0,9046
0,0106	0,0091	0,0105	0,0105	0,0184	0,0101	0,0100	0,0099	0,0098	0,0099	0,0101
1 650	1 700	1 750	1 800	1 850	1 900	1 950	2 000			
0,9032	0,9038	0,9042	0,9050	0,9044	0,9042	0,9030	0,9053			
0,0098	0,0095	0,0099	0,0103	0,0098	0,0097	0,0099	0,0101			

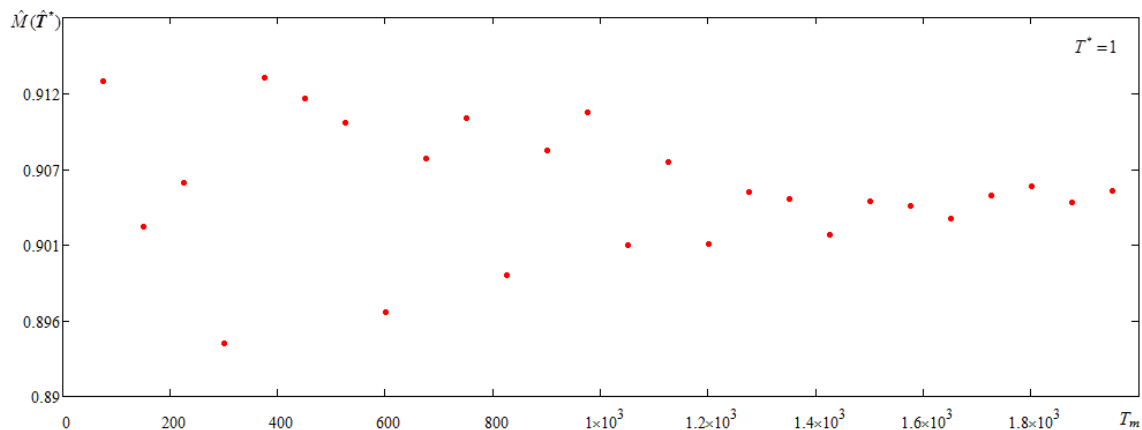


Рис. 6. График зависимости $\hat{M}(\hat{T}^*)$ от T_m при $T^* = 1$ в особом случае

Fig. 6. Plot of $\hat{M}(\hat{T}^*)$ versus T_m with $T^* = 1$ in special case

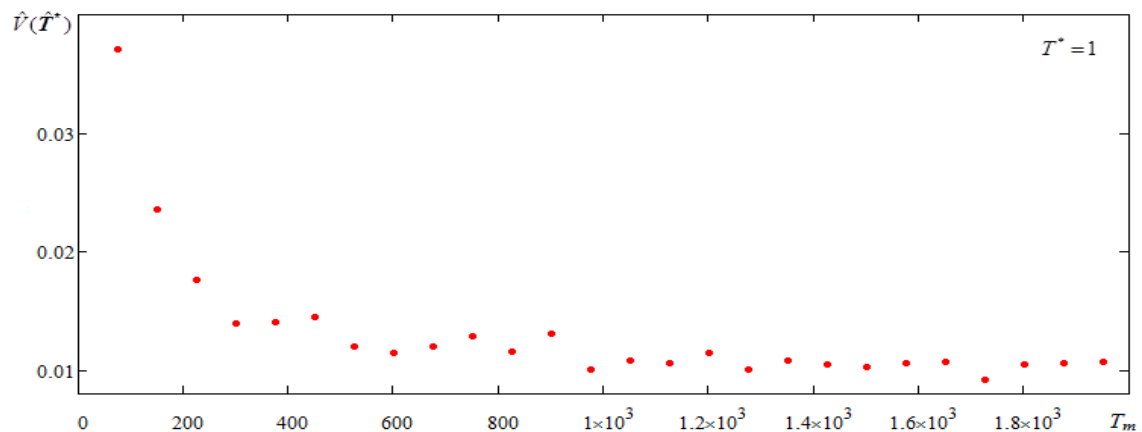


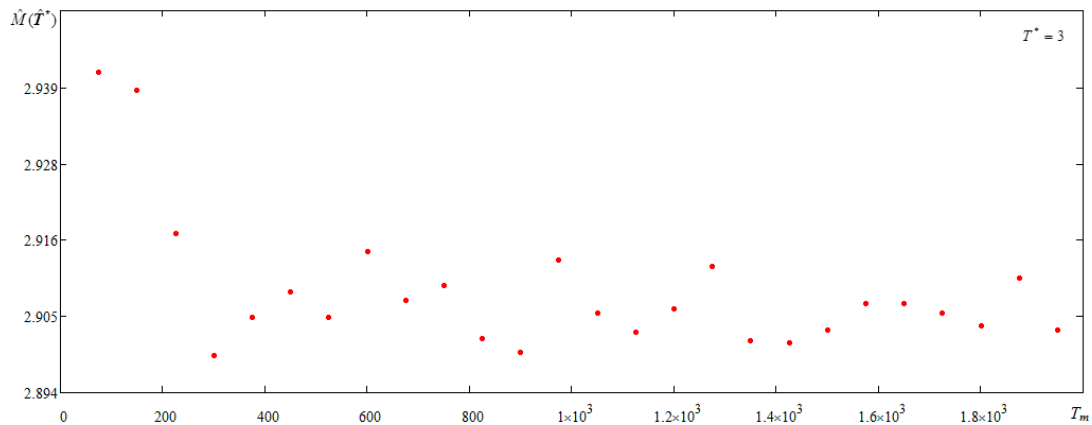
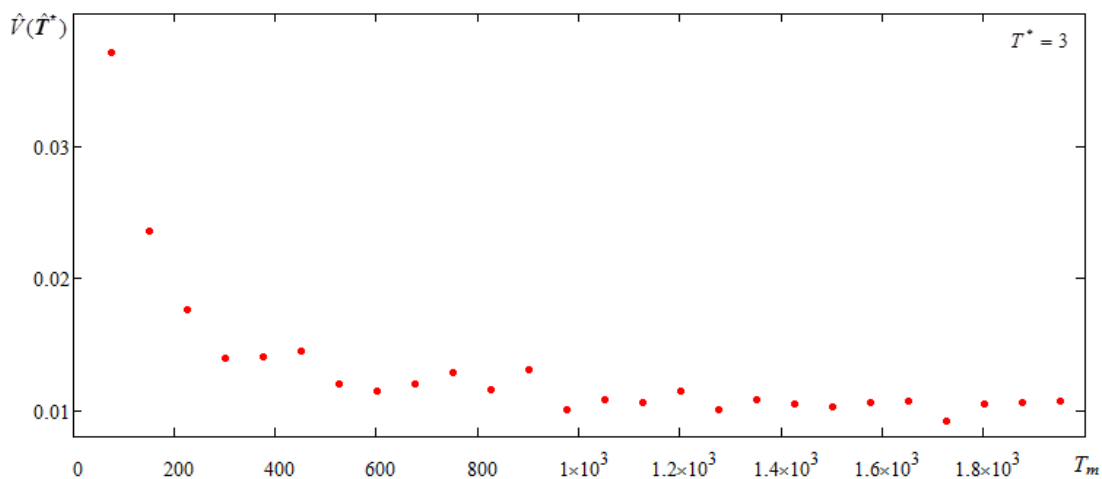
Рис. 7. График зависимости $\hat{V}(\hat{T}^*)$ от T_m при $T^* = 1$ в особом случае

Fig. 7. Plot of $\hat{V}(\hat{T}^*)$ versus T_m with $T^* = 1$ in special case

Таблица 4

Численные результаты эксперимента для $T^* = 3$, особый случай

T_m	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
$\hat{M}(\hat{T}^*)$	2,9409	2,9383	2,9173	2,8994	2,9050	2,9087	2,9050	2,9146	2,9075	2,9096
$\hat{V}(\hat{T}^*)$	0,1629	0,0890	0,0537	0,0484	0,0359	0,0350	0,0356	0,0283	0,0186	0,0262
550	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000	1 050
2,9019	2,8999	2,9134	2,9057	2,9028	2,9063	2,9125	2,9011	2,9013	2,9032	2,9070
0,0218	0,0198	0,0219	0,0185	0,0218	0,0181	0,0190	0,0162	0,0175	0,0163	0,0155
1 100	1 150	1 200	1 250	1 300	1 350	1 400	1 450	1 500	1 550	1 600
2,9070	2,9056	2,9038	2,9107	2,8707	2,9058	2,9043	2,9023	2,9037	2,9013	2,9058
0,0151	0,0144	0,0163	0,0164	0,0244	0,0144	0,0138	0,0129	0,0147	0,0131	0,0163
		1 650	1 700	1 750	1 800	1 850	1 900	1 950	2 000	
		2,9049	2,9109	2,9028	2,9065	2,9033	2,9048	2,9070	2,9101	
		0,0125	0,0144	0,0138	0,0118	0,0128	0,0128	0,0130	0,0121	

Рис. 8. График зависимости $\hat{M}(\hat{T}^*)$ от T_m при $T^* = 3$ в особом случаеFig. 8. Plot of $\hat{M}(\hat{T}^*)$ versus T_m with $T^* = 3$ in special caseРис.9. График зависимости $\hat{V}(\hat{T}^*)$ от T_m при $T^* = 3$ в особом случаеFig. 9. Plot of $\hat{V}(\hat{T}^*)$ versus T_m with $T^* = 3$ in special case

Аналогично для особого случая рассматриваемого потока следует, что:

- 1) стационарный режим функционирования потока устанавливается при $T_m \geq 1300$ ед. времени;
- 2) оценка $\hat{T}^*$ является смещенной оценкой.

Второй статистический эксперимент (исследование влияния параметра T^* на качество оценок). Второй статистический эксперимент поставлен при фиксированном времени моделирования, равном времени установления стационарного режима, полученному из первого статистического эксперимента. Варьирует параметр $T^* = 1, 2, 3, 4, 5$ остальные параметры принимаются такими же, как и в первом эксперименте.

Результаты второго статистического эксперимента для общего случая рассматриваемого потока приведены в табл. 5 ($T_m = 1\ 600$ ед. времени).

Таблица 5

Численные результаты второго статистического эксперимента, общий случай

T^*	1	2	3	4	5
$\hat{M}(T^*)$	0,9085	1,9106	2,91	3,9152	4,9104
$\hat{V}(T^*)$	0,0106	0,0106	0,016	0,0247	0,0413

На рис. 10, 11 приведены графики зависимости выборочного среднего $\hat{M}(T^*)$ и выборочной вариации $\hat{V}(T^*)$ от параметра $T^* = 1, 2, 3, 4, 5$, построенные по данным табл. 5.

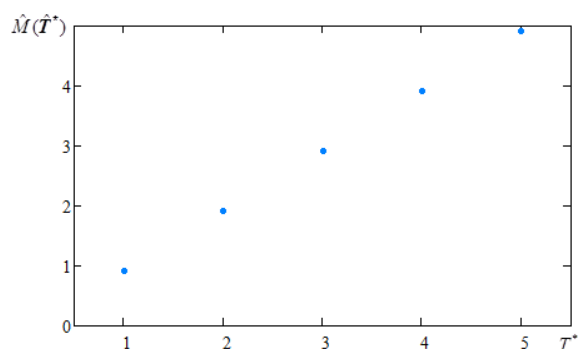


Рис. 10. График зависимости $\hat{M}(T^*)$ от T^* в общем случае
Fig. 10. Plot of $\hat{M}(T^*)$ versus T^* in general case

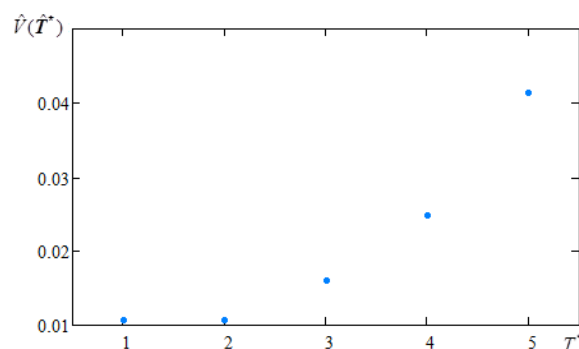


Рис. 11. График зависимости $\hat{V}(T^*)$ от T^* в общем случае
Fig. 11. Plot of $\hat{V}(T^*)$ versus T^* in general case

Результаты второго статистического эксперимента для особого случая приведены в табл. 6 ($T_m = 1\ 300$ ед. времени), а также на рис. 12, 13.

Таблица 6

Численные результаты второго статистического эксперимента, особый случай

T^*	1	2	3	4	5
$\hat{M}(T^*)$	0,8761	1,8795	2,886	3,8805	4,8837
$\hat{V}(T^*)$	0,0185	0,0187	0,0265	0,0350	0,0512

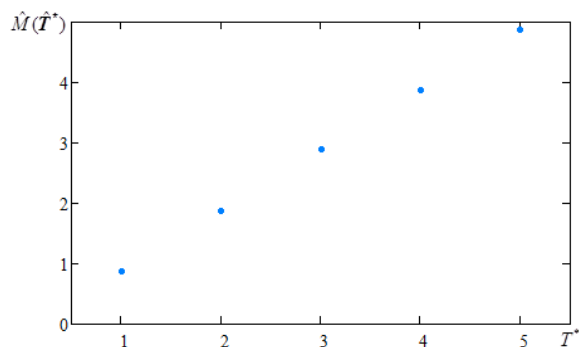


Рис. 12. График зависимости $\hat{M}(T^*)$ от T^* в общем случае
Fig. 12. Plot of $\hat{M}(T^*)$ versus T^* in general case

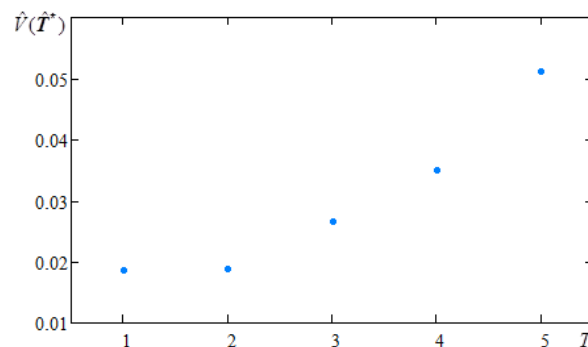


Рис. 13. График зависимости $\hat{V}(T^*)$ от T^* в общем случае
Fig. 13. Plot of $\hat{V}(T^*)$ versus T^* in general case

Данный эксперимент демонстрирует тот факт, что при увеличении значений параметра равномерного распределения мертвого времени T^* увеличивается выборочная вариация оценки. Это объясняется тем, что при больших значениях T^* увеличивается число потерянных событий исходного потока и, как следствие, ухудшается качество оценивания.

Заключение

В данной работе рассмотрен рекуррентный полусинхронный дважды стохастический поток событий в общем и особом случаях соотношения его параметров с непродлевающимся случайным мертвым временем, распределенным по равномерному закону.

Аналитически получены формулы (4), (5), определяющие плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке при случайном мертвом времени для общего случая $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 \neq 0$ и аналогичные формулы (6), (7) для особого случая $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$; выведены формулы (8), (9) для математического ожидания длительности интервала между соседними событиями для общего и особого случая соответственно.

Методом моментов найдены состоятельные ММ-оценки параметра T^* равномерного распределения длительности случайного мертвого времени; полученные оценки экспериментально исследованы на качество. Приведенные результаты численных расчетов указывают на приемлемое качество оценивания.

Список источников

1. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
2. Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.Н. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М.: Техносфера, 2018. 564 с.
3. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1955. V. 51 (3). P. 433–441.
4. Kingman Y.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60 (4). P. 923–930.
5. Neuts M.F. A versatile Markovian point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
6. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // Communication in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
7. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока событий // Вестник Томского государственного университета. 2003. № S6. С. 232–239.
8. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method // Telecommunications and Radio Engineering. 1996. V. 50 (1). P. 56–63.
9. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № S1-1. С. 24–29.
10. Nezhel'skaya L.A. Probability density function for modulated MAP event flows with unextendible dead time // Communication in Computer and Information Science. 2015. V. 564. P. 141–151.
11. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров асинхронного потока с инициированием лишних событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2006. № S18. С. 267–273.
12. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного асинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2 (19). С. 88–101.
13. Горцев А.М., Зуев В.Л. Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2 (11). С. 44–65.
14. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4 (25). С. 32–42.
15. Калягин А.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 3 (32). С. 23–32.

16. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1 (30). С. 27–37.
17. Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 269. С. 95–98.
18. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2 (27). С. 19–29.
19. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.
20. Нежелская Л.А. Оценка состояний и параметров дважды стохастических потоков событий : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Томск, 2016. 341 с.
21. Малинковский Ю.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. Ч. 2: Математическая статистика. 146 с.

References

1. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 1 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. Part 1]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 6. pp. 92–99.
2. Vishnevsky, V.M., Dudin, A.N. & Klimenok, V.N. (2018) *Stokhasticheskie sistemy s korrelirovannymi potokami. Teoriya i primeneniye v telekommunikatsionnykh setyakh* [Stochastic Systems with Correlated Flows. Theory and Application in Telecommunication Networks]. Moscow: Tekhnosfera.
3. Cox, D.R. (1955) The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 51(3). pp. 433–441. DOI: 10.1017/S0305004100030437
4. Kingman, Y.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930.
5. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markovian point process. *Journal of Applied Probability*. 16(4). pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143.
6. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process. *Communication in Statistics Stochastic Models*. 7. pp. 1–46. DOI: 10.1080/15326349108807174
7. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Otsenivaniye dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov sinkhronnogo al'terniruyushchego potoka sobytiy [Dead time period and parameter estimation of synchronous alternating flow of events]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 6. pp. 232–239.
8. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (1996) Estimation of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method. *Telecommunications and Radio Engineering*. 50(1). pp. 56–63.
9. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Estimation of the parameters of a synchronous doubly stochastic event flow by the method of moments. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. S1-1. pp. 24–29.
10. Nezhelskaya, L.A. (2015) Probability density function for modulated MAP event flows with unextendible dead time. *Communication in Computer and Information Science*. 564. pp. 141–151.
11. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2006) Otsenivaniye parametrov asinhronnogo potoka s iniciirovaniem lishnih sobytiy metodom momentov. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. S18. pp. 267–273.
12. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) The probability of wrong decisions in the estimation of states of a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(19). pp. 88–101.
13. Gortsev, A.M. & Zuevich, V.L. (2010) Optimal estimation of states of the asynchronous doubly stochastic flow of events with arbitrary number of the states. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(11). pp. 44–65.
14. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) The comparison of maximum likelihood estimation and method of moments estimation of dead time value in a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(25). pp. 32–42.
15. Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) The comparison of maximum likelihood estimation and method of moments estimation of dead time value in a generalized semisynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(32). pp. 23–32.
16. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) Maximum likelihood estimation of dead time at a generalized semisynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(30). pp. 27–37.

17. Nezhelskaya, L. (2000) Optimal'noe otsenivanie sostoyaniy polusinkhronnogo potoka sobytii v usloviyakh ego chastichnoy nablyudaemosti [Optimal estimation of the states of semi-synchronous event flow under conditions of its partial observability]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 95–98.
18. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2014) The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semisynchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(27). pp. 19–29.
19. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavsky, A.F. (1988) *Statisticheskiy analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [The statistical analysis of series of random events in physical experiment]. Minsk: Universitetskoe.
20. Nezhelskaya, L.A. (2016) *Otsenka sostoyaniy i parametrov dvazhdy stokhasticheskikh potokov sobytii* [Estimation of States and Parameters of Doubly Stochastic Event Flows]. Physics and Mathematics Dr. Diss. Tomsk.
21. Malinkovsky, Yu.V. (2004) *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Probability Theory and Mathematical Statistics]. Gomel: Francisk Skorina Gomel State University.

Информация об авторах:

Горцев Александр Михайлович – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: a-gortsev@mail.ru

Веткина Анна Васильевна – аспирант кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: anyavetkina@gmail.com

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Gortsev Alexander M. (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: a-gortsev@mail.ru

Vetkina Anna V. (Post-graduate Student, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: anyavetkina@gmail.com

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 23.08.2022; принята к публикации 29.11.2022

Received 23.08.2022; accepted for publication 29.11.2022