

**В Е С Т Н И К
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2023

№ 82

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

**РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), И.А. Колесников (отв. секретарь по разделу «Математика»), А.Д. Сидоров (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, В.Г. Бутов, И.М. Васенин, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, Е.Л. Лобода, Г.О. Рябова, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Е. А. Тимошенко, М.А. Шеремет, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Ivan A. Kolesnikov (Executive Editor of the Mathematics Section), Aleksey D. Sidorov (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimatov, Aleksey M. Bubenchikov, Vladimir G. Butov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Egor L. Loboda, Galina O. Ryabova, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Egor A. Timoshenko, Mikhail A. Sheremet, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://journals.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Молчанова Е.А. Локализованные собственные функции в асимптотической модели спектральной задачи	5
Паньженский В.И., Дыранова Ю.В. Левоинвариантная парасасакиева структура на групповой модели вещественного расширения плоскости де-Ситтера	14
Trubaev N.A. Solution of the parameter problem of the Schwarz–Christoffel conformal mapping of the interior (exterior) of a circle onto the interior (exterior) of a polygon	28
Халилов Э.Г. Исследование приближенного решения интегрального уравнения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в двумерном пространстве	39

МЕХАНИКА

Антонов Е.А., Грибова О.В. Динамика микромеханического гироскопа типа R-L с двумя точечными массами в режиме свободных колебаний	55
Белов С.В., Бельков А.В., Жуков А.П., Павлов М.С., Пономарев С.В. Тепловое состояние малого спутника при различной плотности расположения электронных плат	66
Добрица Д.Б., Христенко Ю.Ф. О некоторых особенностях разрушения высокоскоростных частиц на гофрированных противометеорных сеточных экранах	82
Ищенко А.Н., Буркин В.В., Дьячковский А.С., Чупашев А.В. Подводный старт суперкавитирующего ударника из лабораторной баллистической установки	97
Колчанова Е.А., Колчанов Н.В. Пассивная конвективная вентиляция в двойном воздушно-пористом слое с внутренним тепловыделением, зависящим от доли твердой фазы	108
Мадалиев М.Э. Численное моделирование турбулентных потоков на основе двухжидкостной модели турбулентности	120
Монсеева К.М., Кантарбаева А.И., Крайнов А.Ю. Особенности формирования пламени пропано-воздушной смеси в узком канале	141
Орданьян С.С., Несмелов Д.Д., Новоселов Е.С. Статистическая оценка механических характеристик горячепрессованной керамики в системе ZrB_2-SiC	150
Русяк И.Г., Тенев В.А. Методы и алгоритмы решения задачи оптимизации конструкции заряда с целью повышения начальной скорости снаряда	161

CONTENTS

MATHEMATICS

Molchanova E.A. Localized eigenfunctions in the asymptotic model of the spectral problem	5
Pan'zhenskii V.I., Dyranova Y.V. Left-invariant para-Sasakian structure on the group model of the real extension of the de Sitter plane	14
Trubaev N.A. Solution of the parameter problem of the Schwarz–Christoffel conformal mapping of the interior (exterior) of a circle onto the interior (exterior) of a polygon	28
Khalilov E.H. Investigation of an approximate solution of the integral equation of the exterior Dirichlet boundary value problem for the Helmholtz equation in the two-dimensional space	39

MECHANICS

Antonov E.A., Gribova O.V. Dynamics of a micromechanical dual-mass gyroscope of <i>RL</i> -type in a free oscillation mode	55
Belov S.V., Bel'kov A.V., Zhukov A.P., Pavlov M.S., Ponomarev S.V. A thermal state of a small satellite at various packing density of electronic circuit boards	66
Dobritsa D.B., Khristenko Yu.F. On some features of the destruction of high-speed particles on debris corrugated mesh shields	82
Ishchenko A.N., Burkin V.V., D'yachkovskiy A.S., Chupashev A.V. Underwater launching of a supercavitating projectile out of a ballistic test setup	97
Kolchanova E.A., Kolchanov N.V. Passive convective ventilation in a double air-porous layer with internal heat generation depending on solid fraction	108
Madaliev M.E. Numerical simulation of turbulent flows on the basis of a two-fluid model of turbulence	120
Moiseeva K.M., Kantarbaeva A.I., Krainov A.Yu. Peculiarities of the flame formation of a propane–air mixture in a narrow channel	141
Ordan'yan S.S., Nesmelov D.D., Novoselov E.S. Statistical evaluation of mechanical characteristics of hot-pressed ceramics in ZrB_2 –SiC system	150
Rusyak I.G., Tenenev V.A. Methods and algorithms for solving the problem of optimizing the charge design intended to increase the initial velocity of a projectile	161

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 519.6

doi: 10.17223/19988621/82/1

MSC: 41A60

**Локализованные собственные функции
в асимптотической модели спектральной задачи****Евгения Александровна Молчанова***Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова,
Абакан, Россия, mevgen2001@mail.ru*

Аннотация. В двумерной краевой задаче на собственные значения производится асимптотическое разделение переменных на основе ожидаемой формы решения, которая предполагается локализованной в окрестности некоторых точек или линий.

Ключевые слова: спектральная задача, асимптотический метод, локализация собственных функций

Для цитирования: Молчанова Е. А. Локализованные собственные функции в асимптотической модели спектральной задачи // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 82. С. 5–13. doi: 10.17223/19988621/82/1

Original article

**Localized eigenfunctions in the asymptotic model
of the spectral problem****Evgeniya A. Molchanova***Khakas State University, Abakan, Russian Federation, mevgen2001@mail.ru*

Abstract. Localized eigenfunctions in the two-dimensional spectral problem containing a small parameter with higher derivatives are constructed on the expected solution form. Localization in this context means that the solution exponentially decays in both directions starting from the "weakest" point or line. The constructions are based on the algorithm introduced by V.P. Maslov. A modification of this algorithm for the thin shell theory problems is given as an application. The paper shows implementation of the algorithm to obtain formulas giving eigenvalues and corresponding eigenfunctions. An example of solving a specific problem is given, illustrating stages of the applied asymptotic model.

Keywords: spectral problem, asymptotic method, localization of eigenfunctions

For citation: Molchanova, E.A. (2023) Localized eigenfunctions in the asymptotic model of the spectral problem. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 82. pp. 5–13. doi: 10.17223/19988621/82/1

Цель работы – построение локализованных собственных функций и соответствующих собственных значений для уравнений в частных производных с малым параметром [1, 2].

Построение собственных значений и соответствующих им собственных функций для краевых задач с частными производными представляет в общем случае трудно разрешимую задачу. Аналитическое решение может быть построено, как правило, лишь для областей, допускающих разделение переменных, после чего исходная задача сводится к более простой одномерной краевой задаче.

В уравнениях, содержащих малый параметр при старшей производной, можно использовать прием асимптотического разделения переменных [3–5]. Дальнейшее упрощение связано с частными предположениями о форме решений. В одних случаях решение занимает всю область интегрирования, в других – локализуется в окрестности точек или линий, которые принято называть «наиболее слабыми». В зависимости от ожидаемой формы решения используются различные варианты формальных асимптотических разложений, из которых одного-двух первых приближений достаточно для аппроксимации и для хорошего численного результата. Локализованные решения для уравнений в частных производных с малым параметром могут быть построены по алгоритму В.П. Маслова [6]. Локализация понимается в том смысле, что решение экспоненциально затухает в обе стороны от «наиболее слабой» точки или линии. Модифицируя алгоритм Маслова в соответствии с предметной сущностью, его можно применять к решению различных прикладных задач. В частности, его можно использовать в теории оболочек [7].

Пусть имеем класс оболочек, включающий в себя цилиндрические и близкие к цилиндрическим оболочки. При отсутствии симметрии, например при некоторой некруговой срединной поверхности или косых краях, естественно ожидать локализации собственных форм.

Исходная система уравнений

$$\varepsilon^4 \Delta^4 w + \Delta_R \Phi - \lambda w = 0, \quad \varepsilon^4 \Delta^2 \Phi - \Delta_R w = 0, \quad \Delta = \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (1)$$

$$\Delta_R = \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{A_2}{A_1} \frac{1}{R_2} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{A_1}{A_2} \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{R_{12}} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{R_{12}} \frac{\partial}{\partial s} \right)$$

имеет восьмой порядок и содержит две переменные – s и φ [8].

В системе (1) используются следующие обозначения: $w = R\varepsilon^4 w_*$, $Eh\Phi = \Phi_*$, $\varepsilon^8 = h^2 [12(1 - \nu^2)R^2]^{-1}$, $\lambda = \lambda^* \varepsilon^{-4} R^2$, $\lambda^* = \rho w^2 E^{-1}$ – спектральный параметр, w_* , Φ_* – нормальный прогиб и функция напряжений, $w_* = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2} w_n(\xi, s)$, $\xi = \varepsilon^{-1/2}(\varphi - \varphi_0)$, w_n – полиномы по ξ , A_1, A_2 – коэффициенты первой квадратич-

ной формы, R_1, R_2, R_{12} – радиусы кривизны поверхности, близкой к поверхности нулевой гауссовой кривизны, которая задается векторным уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \mu f(s, \varphi) \vec{n}_0. \quad (2)$$

Координата s отсчитывается вдоль образующей, φ – вдоль направляющей, функция $f(s, \varphi)$ описывает отклонение от поверхности нулевой гауссовой кривизны, μ – малый параметр. Радиус-вектор $\vec{r}_0$ определяет положение точки на поверхности нулевой кривизны, орт внешней нормали $\vec{n}_0$ которой образует правую тройку с ортами координатных линий s, φ . Для определения коэффициентов A_1, A_2 и радиусов R_1, R_2, R_{12} дифференцируем с помощью деривационных формул Гаусса–Вейнгартена радиус-вектор (2) по s, φ , обозначая производную по координате ее индексом снизу. Возводя в квадрат векторы $\partial \vec{r} / \partial s, \partial \vec{r} / \partial \varphi$ получаем

$$A_1^2 = 1 + \mu^2 f_s^2, \quad A_2^2 = 1 + 2\mu f K + \mu^2 (f_\varphi^2 + f^2 K^2), \quad (3)$$

где обозначено $K(\varphi) = A_2^0 / R_2^0$ отношение параметров, относящихся к поверхности нулевой кривизны.

Асимптотические разложения для R_1, R_2, R_{12} оказываются более громоздкими, чем разложения (3) для A_1, A_2 . Для дальнейшего достаточно оставить лишь старшие члены с указанием асимптотического порядка отброшенных слагаемых:

$$\frac{1}{R_1} = -\mu f_{ss} + O(\mu^2), \quad \frac{1}{R_{12}} = \mu f_{s\varphi} + O(\mu^2), \quad \frac{1}{R_2} = K - \mu(K^2 f + f_{\varphi\varphi}) + O(\mu^2).$$

Решение, локализованное вблизи φ_0 , отыскивается в виде асимптотических разложений

$$w(s, \varphi, \varepsilon) = w(s) \cdot \exp\{i\varepsilon^{-1}[q(\varphi - \varphi_0) + 0.5a(\varphi - \varphi_0)^2]\}, \quad (4)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_2 + \varepsilon^2 \lambda_4 + \dots,$$

что приводит к последовательности уравнений

$$H_0 w_0 = 0, \quad H_0 w_1 + H_1 w_0 = 0, \quad H_0 w_2 + H_1 w_1 + H_2 w_0 = 0, \dots, \quad (5)$$

в которой

$$H_0 w_0 = \frac{K^2(\varphi_0)}{q^4} w_0^{IV} + \frac{K(\varphi_0)}{q^2} [(f'' w_0)'' + f'' w_0] + [q^4 + f'^2 - \lambda_0] w_0,$$

$$H_1 w_0 = (a \frac{\partial H_0}{\partial q} + \frac{\partial H_0}{\partial \varphi}) \xi w_0 - i \frac{\partial H_0}{\partial q} \frac{\partial w_0}{\partial \xi}, \quad (6)$$

$$H_2 w_0 = 0.5(a^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial q^2} + 2a \frac{\partial^2 H_0}{\partial q \partial \varphi} + \frac{\partial^2 H_0}{\partial \varphi^2}) \xi^2 w_0 - i(a \frac{\partial^2 H_0}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 H_0}{\partial q \partial \varphi}) \xi \frac{\partial w_0}{\partial \xi} -$$

$$- 0.5 \frac{\partial H_0}{\partial q^2} (i a w_0 + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2}) - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial q \partial \varphi} w_0 - \lambda_2 w_0.$$

Параметр q определяет изменяемость в направлении φ .

Уравнения (1), дополненные соответствующими граничными условиями, образуют последовательность краевых задач для определения коэффициентов асимптотических разложений (4). Кроме основного параметра λ_0 эти задачи содержат еще два параметра – q, φ_0 . Учитывая минимальное свойство низшего соб-

ственного значения, при построении нижней части спектра можно использовать условия минимума функции $\lambda_0(q, \varphi_0)$. Так, для краевой задачи нулевого приближения имеем условия

$$\frac{\partial \lambda_0}{\partial q} = \frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial q^2} \frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \varphi_0^2} - \frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial q \partial \varphi_0} > 0. \quad (7)$$

Обозначим q^0 и φ_0^0 те значения, при которых функция $\lambda_0(q, \varphi_0)$ достигает минимума: $\lambda_0 = \lambda_0^0$.

Для определения производных, входящих в (7), дифференцируем по параметрам краевую задачу нулевого приближения

$$H_0 w_0 = 0, \quad w_0 = \frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2} = 0 \quad \text{при } s = s_1(\varphi_0), s = s_2(\varphi_0).$$

Дифференцирование по параметру q дает одну краевую задачу:

$$H_0 w_q + \frac{\partial H_0}{\partial q} w_0 - \frac{\partial \lambda_0}{\partial q} w_0 = 0; \quad w_q = 0, \quad \frac{\partial^2 w_q}{\partial s^2} = 0.$$

Дифференцирование по параметру φ_0 дает другую краевую задачу:

$$H_0 w_\varphi + \frac{\partial H_0}{\partial \varphi_0} w_0 - \frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi_0} w_0 = 0; \quad w_\varphi + \frac{\partial w_0}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial s^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial s^3} = 0.$$

Обе задачи можно символически записать в одной форме:

$$H_0 z + G(s) = 0; \quad z + g_{0j} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + g_{2j} = 0, \quad j = 1, 2.$$

Условие существования решения этой неоднородной задачи определяется следующим выражением:

$$\int_{s_1}^{s_2} w_0 G ds + \frac{K^2(\varphi)}{q^4} (g_{0j} \frac{\partial^3 w_0}{\partial s^3} + g_{2j} \frac{\partial w_0}{\partial s}) \Big|_{s_1}^{s_2} = 0. \quad (8)$$

При помощи (8) первое из условий (7) приобретают вид:

$$\int_{s_1}^{s_2} w_0 \frac{\partial H_0}{\partial q} w_0 ds = 0, \quad \int_{s_1}^{s_2} w_0 \frac{\partial H_0}{\partial q} w_0 ds + 2 \frac{K^2}{q^4} \frac{\partial w_0}{\partial s} \frac{\partial^3 w_0}{\partial s^3} \Big|_{s_1}^{s_2} = 0, \quad (9)$$

а вторые производные функции $\lambda_0(q, \varphi_0)$ определяются из равенств

$$\begin{aligned} \int_{s_1}^{s_2} w_0 (2 \frac{\partial H_0}{\partial q} w_q + \frac{\partial^2 H_0}{\partial q^2} w_0) ds - \lambda_{qq} \int_{s_1}^{s_2} w_0^2 ds = 0, \quad w_{qq} = \frac{\partial^2 w_{qq}}{\partial s^2} \Big|_{s_1}^{s_2} = 0, \\ \int_{s_1}^{s_2} w_0 (2 \frac{\partial H_0}{\partial \varphi_0} w_\varphi + \frac{\partial^2 H_0}{\partial \varphi_0^2} w_0) ds - \lambda_{\varphi\varphi} \int_{s_1}^{s_2} w_0^2 ds + \frac{K^2}{q^4} \left[\left(\frac{\partial w_0}{\partial s} + 2 \frac{\partial w_\varphi}{\partial s} \right) \frac{\partial^3 w_0}{\partial s^3} \cdot 2 \right] \Big|_{s_1}^{s_2} = 0, \\ w_{\varphi\varphi} + \frac{\partial w_0}{\partial s} + 2 \frac{\partial w_\varphi}{\partial s} = \frac{\partial^2 w_{\varphi\varphi}}{\partial s^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial s^3} + 2 \frac{\partial^3 w_\varphi}{\partial s^3} = 0, \\ \int_{s_1}^{s_2} w_0 (2 \frac{\partial H_0}{\partial q} w_\varphi + \frac{\partial^2 H_0}{\partial q \partial \varphi} w_0 + \frac{\partial H_0}{\partial \varphi} w_{\varphi q}) ds - \\ - \lambda_{q\varphi} \int_{s_1}^{s_2} w_0^2 ds + \frac{K}{q^4} \left[\left(\frac{\partial w_{q\varphi}}{\partial s} \frac{\partial^3 w_0}{\partial s^3} + \frac{\partial^3 w_{q\varphi}}{\partial s^3} \frac{\partial w_0}{\partial s} \right) \right] \Big|_{s_1}^{s_2}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$w_{q\varphi} + \frac{\partial w_q}{\partial s} = \frac{\partial^2 w_{q\varphi}}{\partial s^2} + \frac{\partial^3 w_{q\varphi}}{\partial s^3} = 0.$$

Краевая задача нулевого приближения имеет решение

$$w_0(\xi, s) = W_0(\xi)w_0^0(s), \quad (11)$$

где $w_0^0(s)$ – собственная функция задачи при условиях $\frac{\partial \lambda_0}{\partial q} = \frac{\partial \lambda_0}{\partial \varphi_0} = 0$, $W_0(\xi)$ – пока не определенная функция.

В первом приближении имеем краевую задачу

$$H_0 w_1 + [\xi W_0 (a \frac{\partial H_0}{\partial \varphi_0} + \frac{\partial H_0}{\partial \varphi_0}) - i W_0' \frac{\partial H_0}{\partial q}] w_0^0 = 0, \quad (12)$$

$$w_1 + \xi W_0 \frac{\partial w_0^0}{\partial s} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial s^2} + \xi W_0 \frac{\partial^3 w_0^0}{\partial s^3} = 0 \quad \text{при } s = s_1, s = s_2,$$

решением которой является функция

$$w_1(\xi, s) = W_1(\xi)w_1^0(s) + \xi W_0(a w_q + w_{\varphi}) - i W_0' w_q, \quad (13)$$

где w_q, w_{φ} – решение задач (9) при $w_0 = w_0^0$, $W_1(\xi)$ – пока не определенная функция.

Краевую задачу второго приближения составляют уравнение

$$H_0 w_2 + H_1 w_1 + H_2 w_0 = 0 \quad (14)$$

и граничные условия $w = \frac{\partial w}{\partial s} = 0$.

С использованием равенств (8), (9) можно показать, что условие существования решения w_2 этой задачи записывается в виде уравнения

$$L W_0 \equiv -0.5 \lambda_{qq} W_0'' + b \xi W_0' + (-\lambda_2 + 0.5b + c \xi^2) W_0 = 0, \quad (15)$$

где $b = i(a \lambda_{q\varphi} + \lambda_{\varphi\varphi})$, $2c = a^2 \lambda_{q\varphi} + 2a \lambda_{q\varphi} + \lambda_{\varphi\varphi}$.

При $c = 0$, $\lambda_2 = (n + 0.5)b$ уравнение (15) является уравнением Эрмита и имеет решение $W_0 = H_n(\xi)$, где H_n – полином Эрмита степени n [9].

Из квадратного уравнения $c = 0$ в силу условия $\frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial q^2} \frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \varphi_0^2} - (\frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial q \partial \varphi_0})^2 > 0$

находится единственная величина

$$a = (-\lambda_{q\varphi} + i \sqrt{\lambda_{qq} \lambda_{\varphi\varphi} - \lambda_{q\varphi}^2}) / \lambda_{qq} \quad (16)$$

такая, что $\text{Im } a > 0$. Параметр a характеризует затухаемость при удалении от «наиболее слабой» образующей φ_0 . Условие $\text{Im } a > 0$ обеспечивает убывание решения с ростом $|\varphi - \varphi_0|$. Так как теперь действительная часть $\text{Re } b$ параметра b равна $\sqrt{\lambda_{qq} \lambda_{\varphi\varphi} - \lambda_{q\varphi}^2}$, имеем серию собственных значений

$$\lambda^{(n)} = \lambda_0^0 + \varepsilon(n + \frac{1}{2}) \sqrt{\lambda_{qq} \lambda_{\varphi\varphi} - \lambda_{q\varphi}^2} + O(\varepsilon^2). \quad (17)$$

Соответствующие действительные собственные функции являются линейными комбинациями действительной и мнимой частей решения (4), которое можно представить в виде:

$$w = (\operatorname{Re} w_* + i \operatorname{Im} w_*) \exp \left\{ i\varepsilon^{-1} \left[q(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{2} (\operatorname{Re} a + i \operatorname{Im} a)(\varphi - \varphi_0)^2 \right] \right\} =$$

$$= (\operatorname{Re} w_* \cos z - \operatorname{Im} w_* \sin z) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \operatorname{Im} a \xi^2 \right\},$$

где $\xi = \varepsilon^{-1/2}(\varphi - \varphi_0)$, $z = \varepsilon^{-1/2}q\xi + 0.5\operatorname{Re} a \xi^2$.

Описанный алгоритм, основывающийся на минимизации функции $\lambda(q, \varphi_0)$, можно истолковывать как метод замораживания коэффициентов.

Действительно, заменяя зависящие от φ функции их значениями при $\varphi = \varphi_0$, мы решаем некоторую опорную задачу, отвечающую замороженным функциям.

В качестве примера рассмотрим применение алгоритма к решению спектральной задачи для оболочки, близкой к эллиптическому цилиндру длиной l , заданному в полярной системе координат уравнением

$$\rho(\theta) = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \delta^2 \cos^2 \theta}}, \quad \delta = \sqrt{1 - \beta^2 / \alpha^2}. \quad (19)$$

Отклонение срединной поверхности от идеального цилиндра считаем не зависящим от окружной координаты и имеющим форму параболы

$$f(s) = 4As(s-l)l^{-2}, \quad (20)$$

где A – амплитудный множитель.

Выбрав граничные условия, например $w_0(0) = w_0(l) = 0$, $w_0''(0) = w_0''(l) = 0$, решаем спектральную задачу $H_0 w_0 = 0$, из которой следует формула

$$\lambda_0 = q^4 + l^{-4} (K(\varphi_0) \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2 - 8A)^2, \quad (21)$$

задающая функцию $\lambda_0(q, \varphi_0)$ параметров q и φ_0 .

Выпишем необходимые для дальнейшего производные по параметрам q , φ_0 от функции $\lambda(q, \varphi_0)$, обозначая дифференцирование нижними индексами

$$\lambda_q = 4q^3 - 4 \frac{K}{q} \left(\frac{\pi n}{ql^2}\right)^2 \left(K \cdot \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2 - 8A\right), \quad (22)$$

$$\lambda_{qq} = 12q^2 + 12K \cdot \left(\frac{\pi n}{q^2 l^2}\right)^2 \left(K \cdot \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2 - 8A\right) + 8 \frac{K^2}{q^2} \left(\frac{\pi n}{ql}\right)^4, \quad (23)$$

$$\lambda_\varphi = 2K_\varphi \cdot \left(\frac{\pi n}{ql^2}\right)^2 \left(K \cdot \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2 - 8A\right), \quad (24)$$

$$\lambda_{\varphi\varphi} = 2 \left(\frac{\pi n}{ql^2}\right)^2 \left(K_{\varphi\varphi} \cdot \left(K \cdot \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2 - 8A\right) + K_\varphi^2 \cdot \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2\right), \quad (25)$$

$$\lambda_{q\varphi} = -\frac{4}{q} \left(\frac{\pi n}{ql^2}\right)^2 K_\varphi \left(K \cdot \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2 - 8A\right) - \frac{4}{q} \left(\frac{\pi n}{q}\right)^4 K \cdot K_\varphi. \quad (26)$$

«Наиболее слабыми» линиями являются образующие $\theta = \pi/2$, $\theta = 3\pi/2$, на которых равенства (24), (25) показывают, что на наиболее слабых образующих кривизна на $K(\varphi_0)$ достигает минимума. При этом $K_{\min} = \frac{1-\delta}{\beta}$, β – малая полуось эллипса.

Для определения значений кривизны используем известную формулу

$$K(\theta) = \frac{\rho^2 + 2\rho_\theta^2 - \rho\rho_{\theta\theta}}{(\rho^2 + \rho_\theta^2)^{3/2}}. \quad (27)$$

Дифференцируя (27) по θ дважды, получаем для $\theta = \pi/2$, $\theta = 3\pi/2$

$$K_{\theta\theta} = \frac{3(1+\delta^4)\delta^2}{b}, \quad K_{\phi\phi} = K_\theta K. \quad (28)$$

Значения q^0 определяются исходя из условия $\lambda_q = 0$ уравнением восьмой степени

$$q^8 + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 (1-\delta^2) f q^2 - (1-\delta^2)^2 + (K_\phi)^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 = 0. \quad (29)$$

В таблице содержатся результаты расчетов для нескольких значений множителя A при $l = 2.56$, $\delta = 0,745$. Данные последней колонки получаются по формуле $\lambda_0 = \lambda_0^0 + \varepsilon \lambda_2$, в которой $\varepsilon^{-1} = 6.38$.

Результаты расчетов для различных значений множителя A

A	q^0	λ_{qq}	$\lambda_{\phi\phi}$	λ_2	λ_0^0	λ_0
-6	1.5462	58.079	9.1723	11.5403	69.2934	71.1035
-4	1.4513	51.580	7.1199	9.5818	34.1739	35.6768
-2	1.3114	43.164	4.7464	7.1567	11.7672	12.8897
0	1.0233	33.510	1.7600	3.8398	1.54573	2.1480

Пользуясь результатами расчетов, можно построить собственные функции.

Возьмем, например, данные последней строки таблицы и изобразим на рис. 1 четную осцилляционную компоненту из (18) $\exp\{-0.5 \operatorname{Im} a \xi^2\} \cos(z)$.

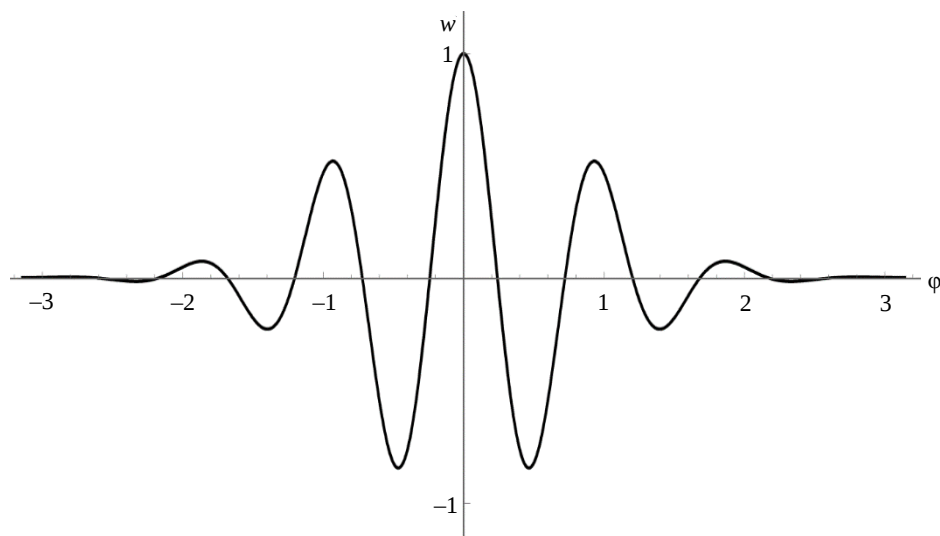


Рис. 1. График одномерной четной осцилляционной компоненты

Fig. 1. Graph of one-dimensional symmetric oscillation component

Умножая ее на главную часть $w_0^0(s) = \sin(\frac{\pi s}{l})$ разложения решения w_* , получим двумерную собственную функцию.

Аналогично строятся нечетная компонента и общее решение (18).

Таким образом, имеем следующие результаты: с помощью асимптотического разделения переменных по алгоритму В.П. Маслова построены двумерные собственные функции, локализованные в окрестности так называемых «наиболее слабых» линий. Показано применение рассматриваемого алгоритма к задаче теории тонких оболочек. Выведена формула для собственных значений.

Список источников

1. Молчанова Е.А. Численно-аналитическое определение собственных значений краевой задачи // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование : материалы Междунар. конф. (Улан-Удэ, 22–27 июня 2015 г.). Улан-Удэ : Изд-во ВСГУТУ, 2015. С. 196–198.
2. Молчанова Е.А. Определение низших собственных значений краевой задачи // Информационные технологии в моделировании и управлении: подходы, методы, решения : материалы II Всеросс. науч. конф. с междунар. участием (22–24 апреля 2019 г.). Тольятти : Изд. Качалин А.В., 2019. С. 281–285.
3. Аргатов И.И. Введение в асимптотическое моделирование в механике. СПб. : Политехника, 2012. 302 с.
4. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук. 1957. Т. 12, вып. 5 (77). С. 3–122.
5. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М. : Высшая школа, 1990. 208 с.
6. Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в линейных уравнениях. М. : Наука, 1977. 384 с.
7. Товстик П.Е. Двумерные задачи устойчивости и колебаний оболочек нулевой гауссовой кривизны // Доклады АН СССР. 1983. Т. 271, № 1. С. 69–71.
8. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М. : Наука, 1979. 384 с.
9. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Физматлит, 2001. 576 с.

References

1. Molchanova E.A. (2015) Chislenno-analiticheskoye opredeleniye sobstvennykh znacheniy krayevoy zadachi [Numerically-analytical determination of eigenvalues of the boundary value problem]. *Differential Equations and Mathematical Modeling: Materials of the International Conference, Ulan-Ude, 2015*. Ulan-Ude: VSGUTU. pp. 196–198.
2. Molchanova E.A. (2019) Opredeleniye nizshikh sobstvennykh znacheniy krayevoy zadachi [Determination of lower eigenvalues of the boundary value problem]. *Information Technologies in Modeling and Control: Approaches, Methods, Solutions: Materials of the 2nd All-Russia Scientific Conference with International Participation, Togliatti, April 22–24, 2019*. Togliatti: Kachalin. pp. 281–285.
3. Argatov I.I. (2012) Vvedeniye v asimptoticheskoye modelirovaniye v mekhanike [Introduction to asymptotic modeling in mechanics]. St. Petersburg: Politehnika.
4. Vishik M.I., Lyusternik L.A. (1957) Regular degeneracy and boundary layer for linear differential equations with a parameter. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*. 12(5). pp. 3–122.

5. Vasilyeva A.B., Butuzov V.F. (1990) *Asimptoticheskiye metody v teorii singulyarnykh vozmushcheniy* [Asymptotic methods in the theory of singular perturbations]. Moscow: Vysshaya shkola.
6. Maslov V.P. (1977) *Kompleksnyy metod VKB v lineynykh uravneniyakh* [Complex WKB method in linear equations]. Moscow: Nauka.
7. Tovstik P.E. (1983) Dvumernyye zadachi ustoychivosti i kolebaniy obolochek nulevoy gaussovoy krivizny [Two-dimensional problems of stability and oscillations of shells of zero Gaussian curvature]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 271(1), pp. 69–71.
8. Gol'denveyzer A.L., Lidskiy B.V., Tovstik P.E. (1979) *Svobodnyye kolebaniya tonkikh uprugikh obolochek* [Free vibrations of thin elastic shells], Moscow: Nauka.
9. Zaitsev V.F., Polyanin A.D. (2001) *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nyim uravneniyam* [Handbook on ordinary differential equations]. Moscow: Fizmatlit.

Сведения об авторе:

Молчанова Евгения Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий и систем Хакасского государственного университета им. Н.Ф. Катанова, Абакан, Россия. E-mail: mevgen2001@mail.ru

Information about the author:

Molchanova Evgeniya A. (Candidate of Physics and Mathematics, Khakas State University, Abakan, Russian Federation). E-mail: mevgen2001@mail.ru

Статья поступила в редакцию 18.05.2022; принята к публикации 31.03.2023

The article was submitted 18.05.2022; accepted for publication 31.03.2023

Научная статья

УДК 514.76

MSC: 53D10; 53C50

doi: 10.17223/19988621/82/2

Левоинвариантная парасасакиева структура на групповой модели вещественного расширения плоскости де-Ситтера

Владимир Иванович Паньженский¹, Юлия Вячеславовна Дыранова²

^{1,2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ kaf-geom@yandex.ru

² udom26@bk.ru

Аннотация. Установлено, что на групповой модели вещественного расширения плоскости де-Ситтера существует левоинвариантная параконтактная метрическая структура, которая является нормальной и, следовательно, парасасакиевой. Данная структура допускает группу Ли автоморфизмов максимальной размерности. Найдены базисные векторные поля ее алгебры Ли. Доказано, что связность Леви-Чивиты и контактная метрическая связность с кососимметрическим кручением согласованы с контактным распределением.

Ключевые слова: параконтактная структура, автоморфизм, контактная метрическая связность, контактные геодезические, усеченная связность

Для цитирования: Паньженский В.И., Дыранова Ю.В. Левоинвариантная парасасакиева структура на групповой модели вещественного расширения плоскости де-Ситтера // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 82. С. 14–27. doi: 10.17223/19988621/82/2

Original article

Left-invariant para-Sasakian structure on the group model of the real extension of the de Sitter plane

Vladimir I. Pan'zhenskii¹, Yulia V. Dyranova²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russian Federation

¹ kaf-geom@yandex.ru

² udom26@bk.ru

Abstract. In this paper, a group model for a real extension of the de Sitter plane is proposed. This group contains a group of special matrices, which is a subgroup of the general linear group. It is established that there exists a left-invariant contact metric structure on this group, which is normal and, therefore, para-Sasakian. The basis vector fields of the Lie algebra of infinitesimal automorphisms are found. The Lie group of automorphisms

has the maximum dimension and, in addition to the Levi-Civita connection, it also retains a contact metric connection with skew-symmetric torsion. In this connection, all structural tensors of the para-Sasakian structure, as well as the torsion and curvature tensors, are covariantly constant. Using a nonholonomic field of orthonormal frames adapted to the contact distribution, an orthogonal projection of the Levi-Civita connection onto the contact distribution is found, which is a truncated connection. Passing to natural coordinates, differential equations of geodesics of the truncated connection and Levi-Civita connection are found. Thus, the Levi-Civita contact geodesic connections coincide with the truncated connection geodesics. This means that through each point in each contact direction there is a unique Levi-Civita geodesic connection tangent to the contact distribution. The Levi-Civita connection, like the contact metric connection, is consistent with the contact distribution.

Keywords: paracontact structure, automorphism, contact metric connection, contact geodesics, truncated connection

For citation: Pan'zhenskii, V.I., Dyranova, Y.V. (2023) Left-invariant para-Sasakian structure on the group model of the real extension of the de Sitter plane. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 82. pp. 14–27. doi: 10.17223/19988621/82/2

Введение

В настоящее время не ослабевает интерес к исследованию контактных, почти контактных, параконтактных метрических структур, заданных на нечетномерных многообразиях [1–14]. Если многообразие является группой Ли, то естественно рассматривать левоинвариантные структуры. Имеется немного примеров групп Ли, допускающих параконтактные метрические структуры, для которых вычислены все определяющие их тензоры.

В данной работе в качестве такого примера предлагается групповая модель G вещественного расширения плоскости де-Ситтера $DS^2 \times \mathbf{R}$. Группа G является матричной группой Ли относительно операции умножения матриц и подгруппой полной линейной группы $GL(3, \mathbf{R})$. Доказано, что на группе G не существует левоинвариантных параконтактных метрических структур (η, ξ, ϕ, g) с метрикой прямого произведения, но существует левоинвариантная параконтактная метрическая структура с псевдоримановой метрикой, отличной от метрики прямого произведения.

Требования, которым должна удовлетворять такая структура, не определяют ее однозначно. Поэтому, чтобы выделить единственную «каноническую» структуру, необходимо выбрать подходящее (чаще всего наиболее простое) решение уравнений, которые должны выполняться для контактной формы η и структурного эндоморфизма ϕ . В этом случае псевдориманова метрика g определяется однозначно. В данной работе частное решение соответствующих уравнений выбрано так, что ограничение метрики g на контактное распределение $H = \ker \eta$ является метрикой де-Ситтера, а сама структура нормальной и, следовательно, парасасакиевой. Установлено, что группа Ли автоморфизмов парасасакиевой структуры имеет максимальную размерность. Найдены базисные векторные поля ее алгебры Ли.

Линейная связность ∇ называется согласованной с распределением H , если через каждую точку p в каждом касательном направлении $v_p \in H_p$ проходит един-

ственная геодезическая, касающаяся распределения H (контактная геодезическая) [8, 9]. Если ∇ – связность Леви-Чивиты (псевдо)римановой метрики g , то ортогональная проекция $\bar{\nabla}$ на распределении H является линейной связностью на H и называется усеченной связностью [15, 16]. Доказано, что контактные геодезические связности Леви-Чивиты ∇ и контактной метрической связности $\tilde{\nabla}$ совпадают с геодезическими усеченной связности $\bar{\nabla}$ и, следовательно, эти связности согласованы с контактным распределением H .

1. Параконтактная метрическая структура

Параконтактной метрической структурой на $(2n + 1)$ -мерном гладком многообразии M называется четверка тензорных полей (η, ξ, ϕ, g) , где η – линейная дифференциальная форма, ξ – векторное поле, ϕ – эндоморфизм модуля векторных полей на M , g – псевдориманова метрика, удовлетворяющая следующим условиям

$$\phi^2 = id - \eta \otimes \xi, \quad (1)$$

$$g(\phi X, \phi Y) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y), \quad (2)$$

$$d\eta(X, Y) = g(X, \phi Y). \quad (3)$$

Из (3) следует, что

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0. \quad (4)$$

Условие (4) означает, что форма η является контактной, а ранг дифференциальной 2-формы $d\eta$ равен $2n$. В равенствах (1)–(4) используются следующие обозначения: $\otimes$ – тензорное произведение, $\wedge$ – внешнее произведение, d – внешний дифференциал, X и Y – произвольные векторные поля на M . Для параконтактной метрической структуры имеют место равенства [17, 18]

$$\eta(\xi) = 1, \quad d\eta(X, \xi) = 0, \quad \phi(\xi) = 0, \quad \eta \circ \phi = 0, \quad g(X, \xi) = \eta(X),$$

а из (2)–(3) следует, что

$$g(X, Y) = -d\eta(\phi X, Y) + \eta(X) \cdot \eta(Y). \quad (5)$$

Отметим также, что $2n$ -мерное контактное распределение $H = \ker \eta$ называют горизонтальным, 1 -мерное распределение $V = \ker d\eta$ – вертикальным.

2. Параконтактная метрическая структура на вещественном расширении плоскости де-Ситтера

Рассмотрим множество G , элементами (точками) которого являются матрицы следующего вида:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & y & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где x, y, z – действительные числа: $x, y, z \in \mathbf{R}, y > 0$.

Множество G является группой Ли относительно операции умножения матриц и подгруппой полной линейной группы $GL(3, \mathbf{R})$. Умножая (6) на произвольную

матрицу из группы G , заключаем, что левые сдвиги на G определяются следующими формулами:

$$\bar{x} = bx + a, \quad \bar{y} = by, \quad \bar{z} = z + c. \quad (7)$$

Дифференцируя (7) по параметрам a, b, c , находим левоинвариантные векторные поля на G – базис алгебры Ли группы Ли G :

$$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = x\partial_1 + y\partial_2, \quad X_3 = \partial_3. \quad (8)$$

где $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $\partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}$ – естественный базис гладких векторных полей

на G . Структурные уравнения этой группы – скобки Ли (коммутаторы) базисных векторных полей – имеют вид:

$$[X_1, X_2] = X_1, \quad [X_1, X_3] = 0, \quad [X_2, X_3] = 0,$$

откуда следует, что G является разрешимой группой, но не является нильпотентной.

Нетрудно установить, что псевдориманова метрика

$$ds^2 = \frac{dx^2 - dy^2}{y^2} + dz^2 \quad (9)$$

левоинвариантна и является метрикой прямого произведения на вещественном расширении $DS^2 \times \mathbf{R}$ плоскости де-Ситтера DS^2 . Действительно, в касательном пространстве единицы группы рассмотрим псевдоевклидову метрику

$$ds^2 = dx^2 - dy^2 + dz^2$$

и сдвинем ее в произвольную точку

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \bar{z} \\ 0 & \bar{y} & \bar{x} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из равенств (7) следует, что

$$x = \frac{\bar{x} - a}{b}, \quad y = \frac{\bar{y}}{b}, \quad z = \bar{z} - c,$$

$$dx = \frac{d\bar{x}}{b}, \quad dy = \frac{d\bar{y}}{b}, \quad dz = d\bar{z}, \quad d\bar{s}^2 = \frac{d\bar{x}^2 - d\bar{y}^2}{b^2} + d\bar{z}^2.$$

Так как для единицы группы $x=0, y=1, z=0$, то $b=\bar{y}$, что и доказывает наше утверждение.

Таким образом, группа G с левоинвариантной метрикой (9) является групповой моделью вещественного расширения плоскости де-Ситтера.

Рассмотрим вопрос существования левоинвариантных параконтактных метрических структур на группе G . Все левоинвариантные дифференциальные 1-формы можно найти, интегрируя уравнения инвариантности

$$X_a^p \partial_p \eta_i + \partial_i X_a^p \eta_p = 0$$

(производная Ли от формы η вдоль векторных полей X_a (8) должна обращаться в нуль $L_{X_a}\eta = 0$). В результате получаем следующее семейство левоинвариантных 1-форм:

$$\eta = \frac{c_1}{y} dx + \frac{c_2}{y} dy + c_3 dz, \quad (10)$$

где c_1, c_2, c_3 – постоянные. Так как $d\eta = \frac{c_1}{y^2} dx \wedge dy$ и $\eta \wedge d\eta = \frac{c_1 c_3}{y^2} dx \wedge dy \wedge dz$, то

при $c_1 c_3 \neq 0$ найденные формы являются контактными.

Оказывается, что не существует левоинвариантных параконтактных метрических структур с псевдоримановой метрикой прямого произведения (9). Действительно, условие (3) в координатах имеет следующий вид:

$$(d\eta)_{ij} = g_{ip} \varphi_j^p,$$

откуда следует, что

$$\varphi_j^i = g^{ip} (d\eta)_{pj}.$$

Так как для метрики (9)

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} y^2 & 0 & 0 \\ 0 & -y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а

$$(d\eta)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c_1}{y^2} & 0 \\ -\frac{c_1}{y^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$\varphi_j^i = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим требование (2). Для метрики (9) это требование в координатах имеет следующий вид:

$$\frac{1}{y^2} \varphi_i^1 \varphi_j^1 - \frac{1}{y^2} \varphi_i^2 \varphi_j^2 + \varphi_i^3 \varphi_j^3 = -g_{ij} + \eta_i \eta_j.$$

Если теперь положить $i=1, j=3$, то получим, что $c_1 c_3 = 0$, т.е. $\eta \wedge d\eta = 0$, что и доказывает наше утверждение.

Рассмотрим теперь группу G , оставив пока в стороне тот факт, что она является моделью вещественного расширения плоскости де-Ситтера. Существуют ли на G левоинвариантные параконтактные метрические структуры? Для ответа на этот вопрос среди левоинвариантных форм (10) выделим форму

$$\eta = \frac{1}{y} dx + dz. \quad (11)$$

Эту форму можно получить, сдвинув форму Дарбу $ydx + dz$ из единицы группы в произвольную точку. Заметим, что векторные поля $e_1 = y\partial_1 - \partial_3$ и $e_2 = y\partial_2$ по-

рождают контактное распределение H : $\eta(e_1) = \eta(e_2) = 0$, а $[e_1, e_2] = -\partial_1$ и $\eta(\partial_1) \neq 0$. Это означает, что векторные поля, принадлежащие H , не образуют подалгебру алгебры Ли векторных полей на G , т.е. распределение H является неголономным. Условия $\eta(\xi) = 1$ и $d\eta(X, \xi) = 0$ однозначно определяют характеристическое векторное поле

$$\xi = \partial_3. \quad (12)$$

Все левоинвариантные эндоморфизмы можно найти, интегрируя уравнения

$$X_a^p \partial_p \varphi_j^i + \partial_j X_a^p \varphi_p^i - \partial_p X_a^i \varphi_j^p = 0.$$

Общее решение этой системы имеет вид:

$$\varphi_j^i = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ \frac{1}{y}c_1^3 & \frac{1}{y}c_2^3 & c_3^3 \end{pmatrix},$$

где c_j^i – произвольные постоянные. Из условия $\varphi(\xi) = 0$ следует, что $c_3^1 = c_3^2 = c_3^3 = 0$, а из $\eta \circ \varphi = 0$ получаем, что $c_1^3 = -c_1^1$, $c_2^3 = -c_2^1$. Требование (1) накладывает на постоянные c_j^i следующие условия:

$$c_1^{12} + c_2^1 c_1^2 = 1, \quad c_1^1 c_2^1 + c_2^1 c_2^2 = 0, \quad c_1^2 c_1^1 + c_2^2 c_1^2 = 0, \quad c_1^2 c_1^1 + c_2^{22} = 1.$$

Эти условия будут выполняться, если положить $c_1^1 = c_2^2 = 0$, $c_2^1 = c_1^2 = 1$.

В этом случае эндоморфизм φ примет вид:

$$\varphi_j^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y} & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

и вместе с контактной формой η (11), характеристическим векторным полем ξ (12) и, как следует из равенства (5), псевдоримановой метрикой

$$ds^2 = \frac{dx^2 - dy^2}{y^2} + \left(\frac{1}{y} dx + dz \right)^2 \quad (14)$$

определяет на G левоинвариантную параконтактную метрическую структуру.

Заметим, что ограничение метрики (14) на контактное распределение

$$ds^2|_H = \frac{dx^2 - dy^2}{y^2}$$

является метрикой де-Ситтера и вместе с вполне неголономным контактным распределением $H = \ker \eta$ определяет на группе G псевдосубриманову структуру. Так как, очевидно, $L_\xi g = 0$, то параконтактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) является k -контактной. Более того, данная структура является нормальной и, следовательно, парасасакиевой, так как условие нормальности [5]

$$[\varphi, \eta](X, Y) - d\eta(X, Y)\xi = 0,$$

где $[\varphi, \eta](X, Y) = \varphi^2[X, Y] + [\varphi X, \eta Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \eta[\varphi X, Y]$ – кручение Нейенхайса, которое в координатах имеет вид:

$$\varphi_j^p \partial_p \varphi_k^i - \varphi_k^p \partial_p \varphi_j^i + \varphi_p^i \partial_j \varphi_k^p - \varphi_p^i \partial_k \varphi_j^p - d\eta_{jk} \xi^i = 0,$$

выполняется тождественно. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 1. На групповой модели вещественного расширения плоскости де-Ситтера существует левоинвариантная парасасакиева структура (η, ξ, φ, g) , структурные тензоры которой определяются формулами (11)–(14).

Векторное поле $X = X^p \partial_p$ называется инфинитезимальным автоморфизмом параконтактной структуры, если однопараметрическая локальная группа диффеоморфизмов $f_t = \exp tX$, порожденная полем X , является группой автоморфизмов. Это означает, что производная Ли вдоль X от η, ξ, φ, g обращается в нуль:

$$L_X \eta = 0, \quad L_X \xi = 0, \quad L_X \varphi = 0, \quad L_X g = 0.$$

В координатах мы имеем следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} X^p \partial_p \eta_i + \partial_i X^p \eta_p &= 0, \\ X^p \partial_p \xi^i - \partial_p X^i \xi^p &= 0, \\ X^p \partial_p \varphi_j^i + \partial_j X^p \varphi_p^i - \partial_p X^i \varphi_j^p &= 0, \\ X^p \partial_p g_{ij} + \partial_i X^p g_{pj} + \partial_j X^p g_{ip} &= 0. \end{aligned}$$

Интегрируя данную систему, находим ее общее решение

$$X^1 = \frac{1}{2} b_4 (x^2 + y^2) + b_2 x + b_1, \quad X^2 = b_4 x y + b_2 y, \quad X^3 = -b_4 y + b_3.$$

Постоянным b_1, b_2, b_3, b_4 соответствуют следующие базисные векторные поля алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов:

$$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = x \partial_1 + y \partial_2, \quad X_3 = \partial_3, \quad X_4 = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \partial_1 + x y \partial_2 - y \partial_3. \quad (15)$$

Ненулевые скобки Ли указанных векторных полей имеют вид:

$$[X_1, X_2] = X_1, \quad [X_1, X_4] = X_2, \quad [X_2, X_4] = X_4,$$

откуда следует, что группа Ли автоморфизмов парасасакиевой структуры является неразрешимой. Заметим, что первые три векторных поля являются левоинвариантными и, следовательно, определяют подгруппу параллельных переносов, а векторное поле X_4 является оператором вращения, который порождает стационарную подгруппу группы автоморфизмов, и мы имеем следующее утверждение

Теорема 2. Группа Ли инфинитезимальных автоморфизмов парасасакиевой структуры (11)–(14) имеет максимальную размерность. Базисные векторные поля ее алгебры имеют вид (15).

3. Связности, согласованные с распределением

Пусть M – гладкое многообразие, H – распределение на M . Линейную связность ∇ назовем согласованной с распределением H , если через каждую точку $p \in M$ в каждом касательном направлении $v_p \in H_p$ проходит единственная геодезическая, касающаяся распределения H (контактная геодезическая) [8, 9].

Пусть g – (псевдо)риманова метрика на M , ∇ – связность Леви-Чивиты. Ортогональная проекция $\bar{\nabla}$ связности ∇ на распределении H является линейной связностью на H и называется усеченной связностью.

На вещественном расширении плоскости де-Ситтера $H^2 \times \mathbf{R}$ с парасасакиевой структурой (η, ξ, φ, g) имеем две естественные линейные связности: связность Леви-Чивиты $\nabla(\Gamma_{ji}^k)$ – метрическая связность без кручения, и контактная метрическая связность $\tilde{\nabla}(\tilde{\Gamma}_{ji}^k)$ с кососимметрическим кручением. Эта связность определяется следующей формулой [7, 9]:

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + \frac{1}{2} d\eta(X, Y) \wedge \eta(Z).$$

Так же как и связность Леви-Чивиты ∇ , контактная метрическая связность $\tilde{\nabla}$ инвариантна относительно группы автоморфизмов парасасакиевой структуры. Для контактной формы (11) форма кручения $S = d\eta \wedge \eta$ имеет вид:

$$S = \frac{1}{y^2} dx \wedge dy \wedge dz.$$

Коэффициенты связности Леви-Чивиты псевдоримановой метрики (14) образуют следующие матрицы:

$$\Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2y} & 0 \\ -\frac{3}{2y} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{y} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{y} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{y^2} & 0 \\ \frac{1}{y^2} & 0 & \frac{1}{2y} \\ 0 & \frac{1}{2y} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор кручения $\tilde{S}(\tilde{S}_{ij}^k = S_{ijp} g^{pk})$ связности $\tilde{\nabla}$ имеет следующие компоненты:

$$\tilde{S}_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{y} & 0 \\ \frac{1}{y} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{y^2} & 0 \\ -\frac{2}{y^2} & 0 & -\frac{1}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{2} \tilde{S}_{ij}^k$, то

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{y} & 0 \\ -\frac{1}{y} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}_{ij}^2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{y} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что в связности $\tilde{\nabla}$ все структурные тензоры парасасакиевой структуры, а также тензор кручения и тензор кривизны ковариантно постоянны.

Теорема 3. Связность Леви-Чивиты и контактная метрическая связность согласованы с контактным распределением.

Доказательство. Для доказательства данного утверждения достаточно убедиться, что контактные геодезические связностей ∇ и $\tilde{\nabla}$ (они имеют одни и те же геодезические) совпадают с геодезическими усеченной связности $\bar{\nabla}$.

Рассмотрим неголономное поле ортонормированных реперов $\{p, e_i\}$, адаптированных к структуре почти произведения $H \oplus V$:

$$e_1 = u\partial_1 - \partial_3, \quad e_2 = u\partial_2, \quad e_3 = \partial_3, \quad (e_i e_j = 0, \quad e_1^2 = 1, \quad e_2^2 = -1, \quad e_3^2 = 1, \quad i \neq j).$$

Первые два поля e_1 и e_2 лежат в контактном распределении H : $\eta(e_1) = \eta(e_2) = 0$, а $e_3 = \xi \in V$. Разложения коммутаторов векторных полей e_i

$$[e_i, e_j] = \Omega_{ij}^k e_k$$

являются структурными уравнениями поля реперов $\{p, e_i\}$, а коэффициенты Ω_{ij}^k определяют объект неголономности.

Для рассматриваемого поля реперов имеем следующие структурные уравнения:

$$[e_1, e_2] = -(e_1 + e_3), \quad [e_1, e_3] = 0, \quad [e_2, e_3] = 0,$$

поэтому $\Omega_{12}^1 = -\Omega_{21}^1 = -\Omega_{21}^3 = -1$.

Для связности Леви-Чивиты имеем следующую вычислительную формулу [19]:

$$g(\nabla_X Y, Z) = \\ = \frac{1}{2} \{ Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z]) \}.$$

Пусть Υ_{ij}^k – коэффициенты связности Леви-Чивиты в ортонормированном репере $\{p, e_i\}$: $\nabla_{e_i} e_j = \Upsilon_{ij}^k e_k$. Полагая $X = X^i e_i$, $Y = Y^j e_j$, $Z = Z^k e_k$, находим, что

$$\Upsilon_{ij}^k = \frac{1}{2} (\Omega_{ij}^k + \delta^{ks} \Omega_{si}^e \delta_{je} + \delta^{ks} \Omega_{sj}^e \delta_{ie}),$$

где $\delta_{ij} = \delta^{ij} = 0$, $i \neq j$; $\delta_{11} = \delta^{11} = \delta_{33} = \delta^{33} = 1$, $\delta_{22} = \delta^{22} = -1$, откуда

$$\Upsilon_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Upsilon_{ij}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Upsilon_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для усеченной связности $\bar{\nabla}$: $\bar{\nabla}_{e_i} e_j = \bar{\Upsilon}_{ij}^k e_k$; $i, j, k = 1, 2$, где $\bar{\Upsilon}_{ij}^k = \Upsilon_{ij}^k$, имеем

$$\bar{\Upsilon}_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\Upsilon}_{ij}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Горизонтальная (контактная) кривая γ ($\dot{\gamma} \in H$)

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s),$$

(s – естественный параметр) называется геодезической усеченной связности $\bar{\nabla}$, если $\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$, где $\dot{\gamma}$ – поле касательных векторов кривой γ .

Найдем сначала уравнения параллельного векторного поля v вдоль кривой γ : $\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}v = 0$. Имеем следующие разложения векторных полей $\dot{\gamma}$ и v по естественному базису $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ и неголономному $\{e_1, e_2\}$:

$$\dot{\gamma} = \dot{x}\partial_1 + \dot{y}\partial_2 + \dot{z}\partial_3 = u^1e_1 + u^2e_2, \quad v = v^1\partial_1 + v^2\partial_2 + v^3\partial_3 = w^1e_1 + w^2e_2.$$

Так как $e_1 = y\partial_1 - \partial_3$, $e_2 = y\partial_2$, то $u^1 = \frac{1}{y}\dot{x}$, $u^2 = \frac{1}{y}\dot{y}$, $w^1 = \frac{1}{y}v^1$, $w^2 = \frac{1}{y}v^2$.

Условия горизонтальности векторных полей $\dot{\gamma}$ и v имеют вид:

$$\dot{z} = -\frac{1}{y}\dot{x}, \quad v^3 = -\frac{1}{y}v^1.$$

Теперь распишем уравнения параллельного переноса, заменяя неголономные координаты естественными, учитывая, что

$$\bar{\nabla}_{e_1}e_1 = -e_2, \quad \bar{\nabla}_{e_1}e_2 = -e_1, \quad \bar{\nabla}_{e_2}e_1 = 0, \quad \bar{\nabla}_{e_2}e_2 = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}v &= \bar{\nabla}_{u^ie_j}(w^je_j) = u^ie_j(w^j)e_j + u^iw^j + \bar{\nabla}_{e_i}e_j = u^1e_1(w^1)e_1 + u^1e_1(w^2)e_2 + \\ &\quad + u^2e_2(w^1)e_1 + u^2e_2(w^2)e_2 + u^1w^1(-e_2) + u^1w^2(-e_1) = \\ &= \frac{1}{y}\dot{x}\left[y\partial_1\left(\frac{1}{y}v^1\right) - \partial_3\left(\frac{1}{y}v^1\right)\right](y\partial_1 - \partial_3) + \frac{1}{y}\dot{x}\left[y\partial_1\left(\frac{1}{y}v^2\right) - \partial_3\left(\frac{1}{y}v^2\right)\right]y\partial_2 + \\ &+ \frac{1}{y}\dot{y}\left[y\partial_2\left(\frac{1}{y}v^1\right)\right](y\partial_1 - \partial_3) + \frac{1}{y}\dot{y}\left[y\partial_2\left(\frac{1}{y}v^2\right)\right]y\partial_2 - \frac{1}{y}\dot{x}v^1\partial_2 - \frac{1}{y}\dot{x}\frac{1}{y}v^2(y\partial_2 - \partial_3) = \\ &= \left\{\left(\dot{x}\partial_1v^1 + \dot{y}\partial_2v^1 + \dot{z}\partial_3v^1\right) - \frac{1}{y}(\dot{y}v^1 + \dot{x}v^2)\right\}\partial_1 + \\ &+ \left\{\left(\dot{x}\partial_1v^2 + \dot{y}\partial_2v^2 + \dot{z}\partial_3v^2\right) - \frac{1}{y}(\dot{x}v^1 + \dot{y}v^2)\right\}\partial_2 + \\ &+ \left\{-\frac{1}{y}(\dot{x}\partial_1v^1 + \dot{y}\partial_2v^1 + \dot{z}\partial_3v^1) + \frac{1}{y^2}(\dot{y}v^1 + \dot{x}v^2)\right\}\partial_3 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем следующие уравнения параллельного переноса вектора v вдоль кривой γ :

$$\frac{dv^1}{ds} - \frac{1}{y}(\dot{y}v^1 + \dot{x}v^2) = 0, \quad \frac{dv^2}{ds^2} - \frac{1}{y}(\dot{x}v^1 + \dot{y}v^2) = 0, \quad v^3 + \frac{1}{y}v^1 = 0.$$

Полагая $v = \dot{\gamma}$, находим дифференциальные уравнения геодезических усеченной связности $\bar{\nabla}$:

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{2}{y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} = 0, \quad \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{1}{y}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 0, \quad \frac{dz}{ds} + \frac{1}{y}\frac{dx}{ds} = 0.$$

Дифференцируя последнее уравнение – условие горизонтальности векторного поля $\dot{\gamma}$, находим

$$\frac{d^2 z}{ds^2} - \frac{1}{y^2} \frac{dy}{ds} \frac{dx}{ds} + \frac{1}{y} \frac{d^2 x}{ds^2} = 0,$$

или, учитывая первое уравнение,

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{1}{y^2} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} = 0$$

Таким образом, функции $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$, определяющие геодезические связности $\bar{\nabla}$, являются решением следующей системы:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{ds^2} - \frac{2}{y} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} &= 0, \quad \frac{d^2 y}{ds^2} - \frac{1}{y} \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 - \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 = 0, \\ \frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{1}{y^2} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} &= 0, \quad \frac{dz}{ds} + \frac{1}{y} \frac{dx}{ds} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Связности Леви-Чивиты ∇ и контактная метрическая связность имеют одни и те же геодезические, а их дифференциальные уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{ds^2} - \frac{3}{y} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds} \frac{dz}{ds} &= 0, \quad \frac{d^2 y}{ds^2} - \frac{2}{y} \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 - \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 - \frac{dx}{ds} \frac{dz}{ds} = 0, \\ \frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{2}{y^2} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + \frac{1}{y^2} \frac{dy}{ds} \frac{dz}{ds} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Так как для контактных геодезических должно выполняться условие

$$\frac{dz}{ds} + \frac{1}{y} \frac{dx}{ds} = 0,$$

то, подставляя вместо $\frac{dz}{ds}$ в уравнения (17) $-\frac{1}{y} \frac{dx}{ds}$, получим уравнения (16). Это

означает, что геодезические усеченной связности $\bar{\nabla}$ совпадают с контактными геодезическими связностями ∇ и $\tilde{\nabla}$, т.е. связность Леви-Чивиты и контактная метрическая связность согласованы с контактным распределением. ■

Список источников

1. Галаев С.В. Почти контактные метрические пространства с N -связностью // Известия Саратовского университета. Новая сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, № 3. С. 258–264. doi: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-258-264
2. Галаев С.В. ∇_N -Эйнштейновы почти контактные метрические многообразия // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. Т. 70. С. 5–15. doi: 10.17223/19988621/70/1
3. Банару М.Б. О почти контактных метрических 1-гиперповерхностях келеровых многообразий // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55, № 4. С. 719–723. doi: 10.1134/S0037446614040016
4. Банару М.Б. О почти контактных метрических гиперповерхностях с малыми типовыми числами в W_4 -многообразиях // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика, механика. 2018. № 1. С. 67–70. doi: 10.3103/S0027132218010072

5. Смоленцев Н.К. Левоинвариантные пара-сасакиевы структуры на группах Ли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. Т. 62. С. 27–37. doi: 10.17223/19988621/62/3
6. Смоленцев Н.К., Шагабудинова И.Ю. О парасасакиевых структурах на пятимерных алгебрах Ли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. Т. 69. С. 37–52. doi: 10.17223/1988621/69/4
7. Panzhensky V.I., Klimova T.R. Contact metric connection on the Heisenberg group // Russian Mathematics. 2018. V. 62 (11). P. 45–52. doi: 10.3103/S1066369X18110051
8. Паньженский В.И., Растрепина А.О. Контактная и почти контактная структуры на вещественном расширении плоскости Лобачевского // Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки. 2021. Т. 163, № 3-4. С. 291–303. doi: 10.26907/2541-7746.2021.3-4.291-303.
9. Паньженский В.И., Растрепина А.О. Левоинвариантная парасасакиева структура на группе Гейзенберга // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. Т. 75. С. 38–51. doi: 10.17223/19988621/75/4
10. Diatta A. Left inuariant contact structures on Lie groups // Diff. Geom. and its Appl. 2008. V. 26 (5). P. 544–552. doi: 10.1016/j.difgeo.2008.04.001
11. Calvaruso G. Three-dimensional homogeneous almost contact metric structures // Journal of Geometry and Physics. 2013. V. 69. P. 60–73. doi: 10.1016/j.geomphys.2013.03.001
12. Calvaruso G., Perrone A. Left-invariant hypercontact structures on three-dimensional Lie groups // Periodica Mathematica Hungarica. 2014. V. 69. P. 97–108. doi: 10.1007/s10998-014-0054-z
13. Calvaruso G., Martin-Molina V. Paracontact metric structures on the unit tangent sphere bundle // Annadi di Matematica Pura ed Applicata (1923-). 2015. V. 194. P. 1359–1380. doi: 10.1007/s10231-014-0424-4
14. Calvaruso G., Perrone A. Five-dimensional paracontact Lie algebras // Differential Geometry and Its Applications. 2016. V. 45. P. 115–129. doi: 10.1007/s00605-011-0308-2
15. Вершик А.М., Фадеев Л.Д. Лагранжева механика в инвариантном изложении // Проблемы теоретической физики. Л. : Изд-во ЛГУ, 1975. С. 129–141.
16. Вершик А.М., Гершкович В.Я. Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М. : ВИНТИ, 1987. Т. 16. С. 5–85.
17. Blair D.E. Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Mathematics. Berlin ; Heidelberg ; New York: Springer-Verlag, 1976. 148 p. doi: 10.1007/BFb0079307
18. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса : Печатный дом, 2013. 458 с.
19. Громол Д., Клинггенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом / пер. с нем. Ю.Д. Бурого; под ред. и с доп. В.А. Топоногова. М. : Мир, 1971. 343 с.

References

1. Galaev S.V. (2015) Pochti kontaktnyye metricheskiye prostranstva s N-svyaznost'yu [Almost contact metric spaces with N-connection]. *Izvestiya Saratovskogo Universiteta Novaya Seriya – Matematika Mekhanika Informatika*. 15. pp. 258–264. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-258-264.
2. Galaev S.V. (2021) ∇^N -Eynshteynovy pochti kontaktnyye metricheskiye mnogoobraziya [∇^N -Einstein almost contact metric manifolds]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 70. pp. 5–15. DOI: 10.17223/19988621/70/1.

3. Banaru M.B. (2014) On almost contact metric 1-hypersurfaces in Kählerian manifolds. *Siberian Mathematical Journal*. 55. pp. 585–588. DOI: 10.1134/S0037446614040016.
4. Banaru M.B. (2018) The almost contact metric hypersurfaces with small type numbers in W_4 -manifolds. *Moscow University Mathematics Bulletin*. 73. pp. 38–40. DOI: 10.3103/S0027132218010072.
5. Smolentsev N.K. (2019) LevoInvariantnyye para-sasakiyevy struktury na gruppakh Li [Leftinvariant para-Sasakian structures on Lie groups]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 62. pp. 27–37. DOI: 10.17223/19988621/62/3.
6. Smolentsev N.K., Shagabudinova, I.Y. (2021) O parasasakiyevykh strukturakh na pyatimernykh algebrakh Li [On parasasakian structures on five-dimensional Lie algebras]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 69. pp. 37–52. DOI: 10.17223/19988621/69/4.
7. Pan'zhenskii V.I., Klimova T.R. (2018) The contact metric connection on the Heisenberg group. *Russian Mathematics*. 62(11). pp. 45–52. DOI: 10.3103/S1066369X18110051.
8. Pan'zhenskii V.I., Rastrepina A.O. (2021) Kontaktnaya i pochtii kontaktnaya struktury na veshchestvennom rasshirenii ploskosti Lobachevskogo [Contact and almost contact structures on the real extension of the Lobachevsky plane]. *Uchenyye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskiye Nauki*. 163, pp. 291–303. DOI: 10.26907/2541-7746.2021.3-4.291-303.
9. Pan'zhenskii V.I., Rastrepina A.O. (2022) LevoInvariantnaya parasasakiyeva struktura na gruppe Geyzenberga [Left-invariant para-Sasakian structure on the Heisenberg group]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 75. pp. 38–51. DOI: 10.17223/19988621/75/4.
10. Diatta A. (2008) Left invariant contact structures on Lie groups. *Differential Geometry and its Applications*. 26(5). pp. 544–552. DOI: 10.1016/j.difgeo.2008.04.001.
11. Calvaruso G. (2013) Three-dimensional homogeneous almost contact metric structures. *Journal of Geometry and Physics*. 69. pp. 60–73. DOI: 10.1016/j.geomphys.2013.03.001.
12. Calvaruso G., Perrone A. (2014) Left-invariant hypercontact structures on three-dimensional Lie groups. *Periodica Mathematica Hungarica*. 69. pp. 97–108. DOI: 10.1007/s10998-014-0054-z.
13. Calvaruso G., Martín-Molina V. (2015) Paracontact metric structures on the unit tangent sphere bundle. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. 194. pp. 1359–1380. DOI: 10.1007/s10231-014-0424-4.
14. Calvaruso G., Perrone A. (2016) Five-dimensional paracontact Lie algebras. *Differential Geometry and Its Applications*. 45. pp. 115–129. DOI: 10.1007/s00605-011-0308-2.
15. Vershik A.M., Faddeev L.D. (1975) Lagranzheva mekhanika v invariantnom izlozhenii [Lagrangian mechanics in invariant form]. *Problemy teoreticheskoy fiziki*. Leningrad: LGU. pp. 129–141.
16. Vershik A.M., Gershkovich V.Ya. (1987) Negolonomnyye dinamicheskiye sistemy. Geometriya raspredeleniy i variatsionnyye zadachi [Nonholonomic dynamical systems. Geometry of distributions and variational problems]. *Itogi Nauki i Tekhniki*. 16. pp. 5–85. Moscow: VINITI.
17. Blair D.E. (1976) *Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag. DOI: 10.1007/BFb0079307.
18. Kirichenko V.F. (2013) *Differentsial'no-geometricheskie struktury na mnogoobraziyakh* [Differential-Geometric Structures on Manifolds]. Odessa: Pechatnyy Dom.
19. Gromoll D., Klingenberg W., Meyer W. (1971) Rimanova geometriya v tselom [Riemannian Geometry as a Whole]. Moscow: Mir.

Сведения об авторах:

Паньженский Владимир Иванович – кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математическое образование» Педагогического института им. В.Г. Белинского Пензенского государственного университета, Пенза, Россия. E-mail: kaf-geom@yandex.ru

Дыранова Юлия Вячеславовна – магистрант факультета физико-математических и естественных наук Педагогического института им. В.Г. Белинского Пензенского государственного университета, Пенза, Россия. E-mail: udom26@bk.ru

Information about the authors:

Pan'zhenskii Vladimir I. (Candidate of the Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department "Mathematical Education" of the V.G. Belinsky Pedagogical Institute of the Penza State University, Penza, Russian Federation). E-mail: kaf-geom@yandex.ru

Dyranova Yulia V. (Master's student of the Faculty of Physical, Mathematical and Natural Sciences V.G. Belinsky Pedagogical Institute of the Penza State University, Penza, Russian Federation). E-mail: udom26@bk.ru

Статья поступила в редакцию 08.12.2021; принята к публикации 31.03.2023

The article was submitted 08.12.2021; accepted for publication 31.03.2023

Original article

UDK 517.542

MSC: 30C20

doi: 10.17223/19988621/82/3

Solution of the parameter problem of the Schwarz–Christoffel conformal mapping of the interior (exterior) of a circle onto the interior (exterior) of a polygon

Nikolai A. Trubaev

Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russian Federation, trubaevn@umail.ru

Abstract. We propose an analytical solution of the parameter problem of the Schwarz–Christoffel conformal mapping of the interior (exterior) of a circle onto the interior (exterior) of a polygon by use of the behavior of the Newtonian simple layer and logarithmic potentials equal to a constant inside of a simply connected domain.

Keywords: conformal mapping, Schwarz–Christoffel parameter problem, potential method

For citation: Trubaev, N.A. (2023) Solution of the parameter problem of the Schwarz–Christoffel conformal mapping of the interior (exterior) of a circle onto the interior (exterior) of a polygon. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 82. pp. 28–38. doi: 10.17223/19988621/82/3

Научная статья

Решение проблемы параметров Кристоффеля–Шварца конформного отображения внутренности (внешности) круга на внутренность (внешность) многоугольника

Николай Алексеевич Трубаев

Российский университет транспорта (МИИТ), Москва, Россия, trubaevn@umail.ru

Аннотация. Приведено аналитическое решение проблемы параметров Кристоффеля–Шварца конформного отображения внутренности (внешности) круга на внутренность (внешность) многоугольника с использованием свойств ньютоновского простого слоя и логарифмического потенциалов, равных константе внутри односвязной области.

Ключевые слова: конформное отображение, проблема параметров Кристоффеля–Шварца, метод потенциала

Для цитирования: Трубаев Н.А. Решение проблемы параметров Кристоффеля–Шварца конформного отображения внутренности (внешности) круга на внутренность (внешность) многоугольника // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 82. С. 28–38. doi: 10.17223/19988621/82/3

Introduction

In this paper, the potential method [1, 2] which was popular in Russia in 1920s–1960s, is used for finding the solution of the problem indicated in the heading. As far as the author knows, the problem has no analytical solution [3–10]. The main results of [1] in a brief presentation with modern notation are given in the first section [11]. Some comments about the method will be made in conclusion.

1. Newtonian potential equal to a constant inside of a simply connected three-dimensional domain

A Newtonian source $1/r(p, q)$, where $r(p, q)$ is the distance between the points $q(y_1, y_2, y_3)$ and $p(x_1, x_2, x_3)$, $r = \sqrt{\sum_1^3 (x_i - y_i)^2}$, is a harmonic function of p in the space $\mathbb{R}^3$, with the exception of the point of source q , that is, in $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{q\}$. The function

$$V(p, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\varphi(q)}{r(p, q)} dS_q, \quad (1)$$

where φ is the density function and S is a two-dimensional surface in $\mathbb{R}^3$, is commonly referred as a Newtonian potential of the simple layer [1, 2]. If S is the boundary of a simply connected domain Θ , (1) is a harmonic function in Θ or in $\mathbb{R}^3 \setminus \Theta$. The potential (1) has the limit values of the normal derivative of external normal n_p at the point $p \in S$, $S \in C_1$, from the inside (index plus) and from the outside (index minus) of the domain Θ :

$$\left[\frac{\partial V(p, \varphi)}{\partial n_p} \right]^\pm = \pm \varphi(p) + \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\frac{\varphi(q)}{r(p, q)} \right) dS_q, \quad (2)$$

where the integral is singular and exists in the sense of the principal value.

The potential (1) satisfies the condition of radiation; therefore, the representation of a harmonic function in $\mathbb{R}^3 \setminus \Theta$ obtained by use of it and satisfying the condition of radiation is unique. As the integral in (1) has a weak singularity, (1) is a continuous function in $\mathbb{R}^3$; therefore, the representation by the potential (1) of a harmonic function in Θ is also unique because any unique representation (1) of a solution of the Dirichlet problem in $\mathbb{R}^3 \setminus \Theta$ corresponds with unique representation (1) of a solution of the Dirichlet problem in Θ with the same boundary values on S .

Therefore, there is the unique function φ_0 , $\int_S \varphi_0^2 dS = 1$, at which the potential (1) $V(p, \varphi_0)$ is equal to a constant inside of the simply connected domain with the boundary $S \in C_1$. In the general case, the form of φ_0 is not known; in the particular case, when S

is the surface of a full sphere, φ_0 is a constant c_0 , easily calculated through the value of the potential in the center of the full sphere:

$$2\hat{R}c_0, \quad (3)$$

where $\hat{R}$ is the radius.

The expressions (4) follow from (2).

$$\left[\frac{\partial V(p, \varphi_0)}{\partial n_p} \right]^+ = 0, \quad \left[\frac{\partial V(p, \varphi_0)}{\partial n_p} \right]^- = -2\varphi_0. \quad (4)$$

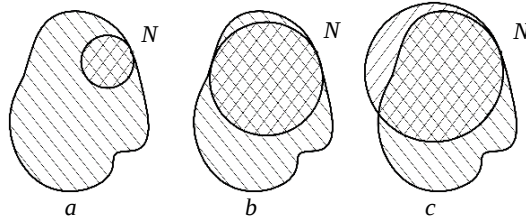


Fig. 1. Definition of the harmonic function of the difference of two potentials

If we consider the harmonic function defined by the difference of two potentials (1) in which one of them is specified on the smooth boundary of a simply connected domain and the other is specified on the surface of the full sphere located inside of this domain, when both potentials are equal to the same constant inside this domain and inside this full sphere, we obtain the limit expressions of the normal derivative from outside of the domain at the point N (Fig. 1a):

$$-2\varphi_0(N) + 2c_0 \geq 0, \quad (5)$$

since the harmonic function outside the domain has the smallest values equal to zero at the tangency point N and at the infinitely distant boundary.

Indeed, the potential (1) with density $\varphi = c_0$, $c_0 > 0$, specified at the full sphere's boundary, is equal inside the full sphere to the value in the center (3), and monotonically decreases to zero from the boundary of this full sphere towards any infinitely distant point. Therefore, at all points of the boundary of the domain (Fig. 1a), with the exception of the point N , the values of the potential specified on the boundary of the full sphere are less than (3) but larger than zero, and at the point N the value is equal to (3). Therefore, taking into account (4), condition (5) is satisfied since the difference of the potentials on the boundary of the domain is greater than zero or equal to it and at the infinitely distant boundary is zero, and this difference, being a harmonic function outside the domain, reaches the maximum and minimum values at the boundary of the definitional domain and cannot have negative values. Therefore, the limit value of the normal derivative of the potential's difference at the point N from outside of the domain (Fig. 1a) cannot be negative (5).

Let us increase the radius of the full sphere so that the tangency at the point N is preserved and the potential specified at its boundary is equal to the same constant inside the full sphere. Then, the value of c_0 will decrease inversely to the ratio of current and original radiuses (3), the second item of the sum (5) will decrease. Starting with a certain value of the radius, inequality (5) will cease to be satisfied. This is possible if

the full sphere ceases to be completely located in the domain (Fig. 1c), the potential's difference will have negative values on the boundary of the union of the domain and the full sphere at the points of the full sphere outside of the domain. Therefore, for the inscribed full sphere the inequality (5) goes over into the equality (Fig. 1b). By this equality we can determine φ_0 through sequentially inscribing of a full sphere at a point of the boundary of the domain, by the value of the radius of the inscribed full sphere and the value of the given constant equal to the potentials.

The given algorithm for determining the values of φ_0 for a simply connected domain with a smooth boundary, $S \in C_1$, can be used for a piecewise-smooth boundary as it is applicable in the process of approach of rounding radius at unregular (angular) points of a piecewise-smooth boundary to zero. The potential obtained in this way will be equal to a given constant at all points of the simply connected domain with a piecewise-smooth boundary but will not have representation (1) at some irregular points of the boundary, at which the integral in (1) diverges due to the presence of singularity of the φ_0 . (Since the values of φ_0 are inversely proportional to the radius of the inscribed full sphere, $|\varphi_0| \rightarrow \infty$, if the radius tends to zero. At some such points, the degree of singularity of φ_0 allows us to calculate (1).)

(The function φ_0 is used in physics. If we will locate the electrical charges interacting according to Coulomb's law on an electric conductor, they will be distributed on the surface of the electric conductor in accordance with the density φ_0 with an accuracy to a coefficient, generating a constant electrical potential inside the conductor. The analysis carried out in this section shows that the electric charges on the electrical conductor occupying a simply connected domain with a piecewise smooth boundary S in vacuum cannot be in a stable state if there is no integral $\int_S \varphi_0(p) dS_p$ (if it diverges). They will flow out from the conductor until the total amount of the charges will be zero.)

2. Logarithmic potential equal to a constant inside of a simply connected two-dimensional domain

The algorithm given in the previous section for the Newtonian potential in the three-dimensional case cannot be repeated for the logarithmic potential (6) because it does not satisfy the radiation condition in the two-dimensional case and does not approach zero at the infinitely distant boundary:

$$\bar{V}(p, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_S \ln \left(\frac{1}{r(p, q)} \right) \varphi(q) dS_q, \quad (6)$$

where $r(p, q)$ is the distance between the points $q(y_1, y_2)$ and $p(x_1, x_2)$, $r = \sqrt{\sum_1^2 (x_i - y_i)^2}$.

Let us use the three-dimensional problem for generalization for the two-dimensional problem. Since the potential $V(p, \varphi_0)$ is equal to a constant inside of the simply connected domain, the section of a body elongated along the axis x_3 with a constant cross section corresponds to the two-dimensional problem in the plane Ox_1x_2 (Fig. 2).

Let us consider the integration element of the infinitely elongated domain with a constant cross section (Fig. 2):

$$dS_{3q} = r(p, q) d\alpha / \cos(\alpha) dL. \quad (7)$$

Let the point $p(z_1, z_2, 0)$ be the observation point, $q(y_1, y_2, y_3)$ be the integration point, $a(a_1, a_2, a_3)$ be the difference of coordinates: $a_i = z_i - y_i$, $i = 1, 2, 3$, and $q_p(y_1, y_2, 0)$ be the intermediate point (Fig. 3). In Fig. 3, dL is the element of integration along the perimeter of the cross section in Ox_1x_2 . The angle α is located in a plane parallel to the axis x_3 passing through the points p, q and is measured from the plane Ox_1x_2 .

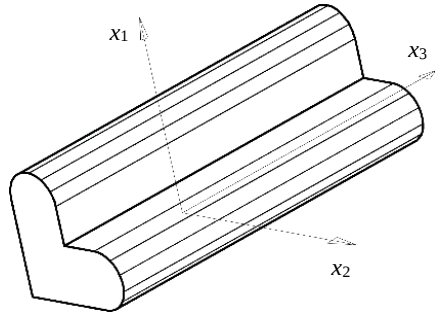


Fig. 2. Domain elongated along the axis x_3 with a constant cross section

Let us consider expression (2) equal to a zero constant in the domain (Fig. 2). Since the values of φ_0 found by the algorithm described in the previous section are the same in each transverse section, parallel to the plane Ox_1x_2 , far from the L-shaped ends, and the influence of the integrals of L-shaped ends at the points of the plane Ox_1x_2 approaches zero at the approach of the extended along Ox_3 size infinity, we can consider expression (2) for the potential equal to a constant inside the domain (Fig. 2), when its size extended along the axis x_3 approaches infinity. In this expression, the integral over the surface extended along the axis x_3 will remain only, let us denote this surface as S_3 , the integrals of the L-shaped ends will become zero.

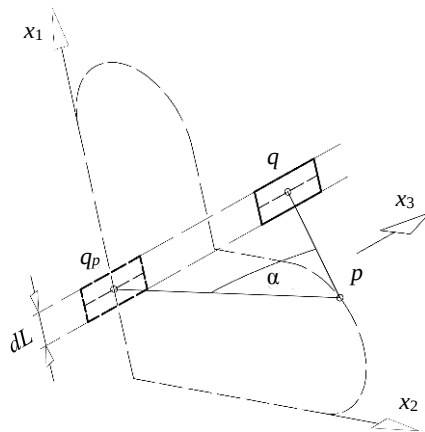


Fig. 3. Element of integration $dS_{3q} = r(p, q)d\alpha / \cos(\alpha)dL$

The expression corresponds to the element of integration over the infinite surface S_3 of the domain infinitely extended along the axis x_3 (Fig. 2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\frac{\varphi_0(q)}{r(p, q)} \right) dS_{3q} &= - \frac{a_1 n_1 + a_2 n_2}{r(p, q)^2 \cos(\alpha)} \varphi_0(q) d\alpha dL = \\ &= - \frac{(a_1 n_1 + a_2 n_2) \cos(\alpha)}{r(p, q_p)^2} \varphi_0(q_p) d\alpha dL, \end{aligned}$$

where (7) and the equality $r(p, q) = r(p, q_p) / \cos(\alpha)$ are taken into account (Fig. 3). (When the points p and q are located on the straight line parallel to Ox_3 , their two other coordinates coincide, and the expression in the brackets is equal to zero, hence the contribution to the integral sum is zero.) Therefore, the integral in (2) on the infinite surface S_3 infinitely extended along the axis x_3 (Fig. 2) is equal to

$$\begin{aligned} \int_{S_3} \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\frac{\varphi_0(q)}{r(p, q)} \right) dS_{3q} &= - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_L \frac{(a_1 n_1 + a_2 n_2) \cos(\alpha)}{r(p, q_p)^2} \varphi_0(q_p) dL d\alpha = \\ &= - \sin(\alpha) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_L \frac{a_1 n_1 + a_2 n_2}{r(p, q_p)^2} \varphi_0(q_p) dL = -2 \int_L \frac{a_1 n_1 + a_2 n_2}{r(p, q_p)^2} \varphi_0(q_p) dL. \end{aligned} \quad (8)$$

It is easy to see that the last expression (8) coincides with the expression of the integral of the normal derivative of the logarithmic potential (6). Thus, in the limit, we have received the expressions of the limiting values of the normal derivative of the logarithmic potential (6) at the boundary of the two-dimensional domain, which coincides with the cross section of the three-dimensional domain (Fig. 2):

$$\begin{aligned} \lim_{S_3 \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial V(p, \varphi_0)}{\partial n_p} \right]^{\pm} &= \left[\frac{\partial \bar{V}(p, \varphi_0)}{\partial n_p} \right]^{\pm} = \pm \varphi_0(p) + \frac{1}{\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_p} \ln \left(\frac{1}{r(p, q)} \right) \varphi_0(q) dS_q = \\ &= \pm \varphi_0(p) - \frac{1}{\pi} \int_L \frac{a_1 n_1 + a_2 n_2}{r(p, q_p)^2} \varphi_0(q_p) dL, \end{aligned} \quad (9)$$

where the integral exists in the sense of the principal value at the points on the smooth parts of a piecewise-smooth boundary (the calculation of the summand outside the integral in (9) is similar to the calculation of $\frac{\varphi(p)}{\pi} \int_{S_R} \frac{d}{x_1^2 + d^2} dx_1$ in [12, p. 70]), that is,

$$\left[\frac{\partial \bar{V}(p, \varphi_0)}{\partial n_p} \right]^+ = 0, \quad \left[\frac{\partial \bar{V}(p, \varphi_0)}{\partial n_p} \right]^- = -2\varphi_0. \quad (10)$$

Since (10) were obtained by generalization of the three-dimensional case, the potential equal to a constant inside a simply connected two-dimensional domain has no representation (6) at some irregular points of the two-dimensional boundary where $|\varphi_0| \rightarrow \infty$.

Thus, in the two-dimensional case, we can use the algorithm for finding the density function φ_0 of the logarithmic potential $\bar{V}(p, \varphi_0)$ (6), equal to a constant inside of the two-dimensional simply connected domain with a piecewise-smooth boundary, similar to finding φ_0 in the three-dimensional case; instead of inscribed full spheres, we have to use inscribed circles.

3. Conformal mapping of the interior (exterior) of a circle onto the interior (exterior) of a polygon

Conformal mapping of the interior (exterior) of a circle onto the interior (exterior) of a polygon can be performed by the function [5, p. 179]

$$\varpi(z) = C \int_{z_0}^z (z - e_1)^{(\tilde{\gamma}_1-1)} (z - e_2)^{(\tilde{\gamma}_2-1)} \dots (z - e_n)^{(\tilde{\gamma}_n-1)} dz + C_1, \quad (11)$$

where $\tilde{\gamma}_k$ are the interior (exterior) angles of the corners of the polygon measured in radians divided by π , $0 < \tilde{\gamma}_k < 2$; e_k are the points of the unit circle corresponding to the vertices of the polygon, $|e_k| = 1$; and z_0 , C , C_1 are some constants.

In (9), from the equality of the derivative of the Newtonian potential to zero in the limiting case the equality to zero of the derivative of the logarithmic potential follows; however, we do not know the value of constant to which the logarithmic potential with the density φ_0 is equal inside of the two-dimensional simply connected domain of the cross section (Fig. 2). If we set the logarithmic potential with the unit density at the boundary of a unit circle, equal to its value in the center, inscribed in the domain of the form of a polygon with rounded corners (Fig. 4), and require that the logarithmic potential specified on the boundary of this domain has to be equal to the same constant, the densities of these potentials at the tangent point will not coincide. That is, the density of the potential φ_0 on the boundary of the domain at the tangent point will differ from the unit density at the boundary of the circle by the coefficient κ . At a different point of the boundary of the domain (Fig. 4), φ_0 will be equal to κ/R , where R is the radius of the inscribed circle at this point.

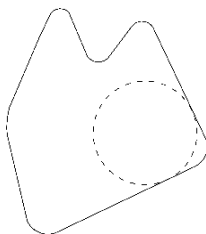


Fig. 4. Polygon with rounded corners

If we obtain the conformal mapping of the interior of the unit circle (Fig. 4) onto the interior of the domain (Fig. 4), the sources of the logarithmic potential at the boundary of the circle will be distributed along the boundary of the domain and generate inside the domain the same constant potential. The total amount of the sources before and after the mapping will be equal to 2π . That is,

$$\int_0^J \varphi_0(q) dL_q = \int_0^J \frac{\kappa}{R(q)} dL_q = \int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi,$$

where J is the perimeter of the boundary of the domain. This corresponds to the replacement of the integration variable:

$$dL_q = \frac{R(q)}{\kappa} d\alpha.$$

Consequently,

$$\int_0^L \frac{\kappa}{R(q)} dL_q = \alpha, \quad (12)$$

where L is the distance along the boundary of the considered simply connected domain, α is the angle of the sector of the unit circle corresponding to L before the mapping, and

$$\kappa = 2\pi / \int_0^J \frac{1}{R(q)} dL_q.$$

Let the boundary of the domain (Fig. 4) be divided into N elements with the beginning and the end in the middles of the adjacent polygon legs (N is equal to the number of vertices of the polygon). Thus, the element with the number i corresponding to the contour AA_1BC_1C of the polygon legs adjacent at the angle β_i with the length L_i (Fig. 5) corresponds to the integral

$$D_i = \int_0^{L_i} \frac{1}{R(q)} dL_q = \bar{c}_i + \delta_i \frac{1}{\sin(\beta_i/2)\cos(\beta_i/2)} \left(\ln \left(\frac{\hat{b}_{i1}}{a} \right) + \ln \left(\frac{\hat{b}_{i2}}{a} \right) \right) + \delta_i v_i + (1 - \delta_i) g_i,$$

$$\text{where } \begin{cases} \delta_i = 1 & , \quad \beta_i < \pi, \\ \delta_i = 0 & , \quad \beta_i > \pi, \end{cases}$$

the first summand $\bar{c}_i$ is the value of the integral over the arc A_1BC_1 (if $\beta_i < \pi$, $\bar{c}_i = \beta_i$); the second summand is the value of the integral over the parts of the segments of straight lines $[AA_1]$, $[C_1C]$, having symmetric by β_i part of the segment of the straight line on the adjacent polygon leg: $\hat{b}_{i1} \leq b_{i1}$, $\hat{b}_{i2} \leq b_{i2}$ (Fig. 5); the third summand v_i is the value of the integral over the part of $[AA_1]$ or $[C_1C]$ for which there is no the symmetric by β_i part of the straight line on the adjacent polygon leg¹; the fourth summand is the value of the integral over $[AA_1]$ and $[C_1C]$ in the case $\beta > \pi$; the value of a is assumed to be the same for all elements.

Indeed, if the segment $[AA_1]$ has a symmetric segment on the adjacent polygon leg $\hat{b}_{i1} = b_{i1}$ (Fig. 5), it corresponds to the integral [13, p. 253–254] in the local coordinate system (Fig. 6):

$$\int_a^{\hat{b}_{i1}} f(x, y(x)) (1 + y'(x)^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\sin(\beta_i/2)\cos(\beta_i/2)} \ln \left(\frac{\hat{b}_{i1}}{a} \right), \quad (13)$$

where $y(x)$ is the equation of the line $[AA_1]$: $y(x) = \tan(\beta_i/2)x$;

$$f(x, y(x)) = \frac{1}{R(q)} = \frac{1}{\sin(\beta_i/2)x}.$$

The expression for $[C_1C]$ is similar to (13), where $\hat{b}_{i1}$ is replaced by $\hat{b}_{i2}$, $\hat{b}_{i2} \leq b_{i2}$ (Fig. 5).

¹ For the case shown in Fig. 5, the third summand is equal to zero. The third summand is larger than zero, for example, if the half of the length of one of the two considered adjacent polygon legs is larger than the length of the other.

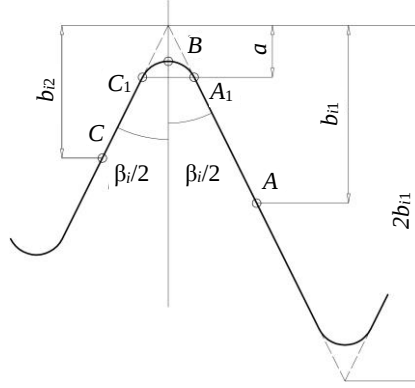


Fig. 5. The line AA_1BC_1C of the boundary of the polygon with rounded corners.

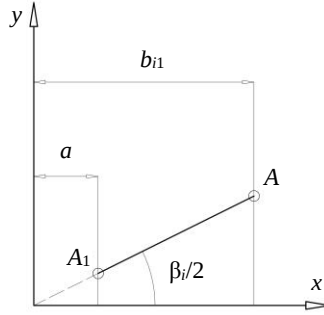


Fig. 6. The integration over the line AA_1 .

We get the coefficient $\kappa = 2\pi / \sum_{j=1}^N D_j$, and the value of the angle of the unit circle (12) corresponding to the line AA_1BC_1C is $\alpha_i = \kappa D_i$.

Let us consider the limit expression for α_i when $a \rightarrow 0$. Since at this approach $\ln(1/a) \rightarrow \infty$ and the values of $\bar{c}_i$, $\ln(\hat{b}_{i1})$, $\ln(\hat{b}_{i2})$, $\delta_i v_i$, $(1-\delta_i)g_i$ are finite, we obtain

$$\tilde{\alpha}_i = \lim_{a \rightarrow 0} \alpha_i = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{D_i}{\sum_{j=1}^N D_j} 2\pi = 2\pi \frac{\delta_i}{\sin(\beta_i/2) \cos(\beta_i/2)} / \sum_{j=1}^N \delta_j \frac{1}{\sin(\beta_j/2) \cos(\beta_j/2)},$$

$$\sum_{i=1}^N \tilde{\alpha}_i = 2\pi, \quad \tilde{\alpha}_i > 0 \text{ if } \beta_i < \pi, \quad \tilde{\alpha}_i = 0 \text{ if } \beta_i > \pi.$$

As the integral (13) and the similar integral for $\hat{b}_{i2}$ at $\beta_i < \pi$ approach the same value tending towards infinity as $a \rightarrow 0$ when the rest summands in the expression of D_i are finite, the angular coordinates in radians on the unit circle correspond to the vertices of the polygon before the mapping:

$$\chi_1 = \tilde{\alpha}_1 / 2, \quad \chi_i = \chi_{i-1} + \tilde{\alpha}_{i-1} / 2 + \tilde{\alpha}_i / 2, \quad 2 \leq i \leq N.$$

These coordinates χ_i are the parameters of the Schwarz–Christoffel integral (11). Since we know these parameters, we can easily determine the values of the constants z_0 , C , C_1 . Thus, the parameter problem of the conformal mapping of the interior (exterior) of a circle onto the interior (exterior) of a polygon is solved.

Conclusion

The paper presents the solution by the method of potential of the parameter problem of the conformal mapping of the interior (exterior) of a circle onto the interior (exterior) of a polygon which has been sought for more than 150 years. This solution for the first time was published in [14] and discussed in [15].

The primary formulation of the potential method is given in the works of A.M. Lyapunov (1857–1918) [16]. It was created with the aim of finding the conditions for existence and uniqueness of solutions of the Dirichlet and Neumann problems, there was no purpose to solve the problems numerically at that time. Therefore, the restrictions that the considered boundary conditions have to be the Dirichlet conditions or the Neumann conditions on a smooth boundary of a simply connected domain seemed not very rigid. With the advent of available computers, these conditions have become too rigid for numerical calculations in which the boundary conditions are usually mixed, and the greatest interest is the calculations of the points in which the gradient of the required solution has a singularity – irregular points of a piecewise-smooth boundary and points at which the boundary conditions change their type. In the two-dimensional case, these points could be considered by mapping of the solution for a half-plane onto a wedge; in the three-dimensional case, there was no such algorithm. This led to a gradual extinction of interest in the potential method as a numerical tool.

The paper [12] contains the previously unknown form of a harmonic function in spherical coordinates and its representation by the potentials of a double or simple layer, which allows us to use the potential method for numerical calculations of the Dirichlet, Neumann, and mixed Dirichlet–Neumann problems on a piecewise-smooth boundary. That is, the main drawback of the traditional formulation of the method is eliminated. The author hopes to show that other reasons of unpopularity of the potential method can be eliminated also.

References

1. Gyunter N.M. (1953) *Teoriya potentsiala i ee primeneniye k osnovnym zadacham matematicheskoi fiziki* [Potential Theory and Its Application to Basic Problems of Mathematical Physics]. Moscow: State Publishing House of technical and theoretical literature
2. Sretenskii L.N. (1946) *Teoriya n'yutonovskogo potentsiala* [Theory of the Newtonian potential]. Moscow: State Publishing House of technical and theoretical literature
3. Koppenfelds W., Stallmann F. (1959) *Praxis der Konformen Abbildung*. Berlin: Springer-Verlag
4. Fil'chakov P.F. (1964) *Priblizhennyye metody konformnykh otobrazhenii* [Approximate methods of conformal mappings]. Kiev: Naukova dumka
5. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. (1973) *Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* [Methods of the theory of functions of complex variable]. Moscow: Nauka
6. Ivanov V.I., Popov V.Yu. (2002) *Konformnyye otobrazheniya i ikh prilozheniya* [Conformal mapping and their applications]. Moscow: URSS

7. Driscoll T.A., Trefethen L.N. (2002) Schwarz-Christoffel Mapping. Cambridge: Cambridge University Press
8. Zhambaa S., Kasatkina T.V., Bubenchikov A.M. (2016) *Ob opredelenii konstant v integrale Kristoffelya-Shvartsa po metodu P. P. Kufareva* [Determination of the constants in the Christoffel–Schwarz integral by P.P. Kufarev’s method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5. pp. 21–27
9. Zhambaa S. (2018) *Chislennaya realizatsiya metoda P. P. Kufareva opredeleniya konstant v integrale Shvartsa-Kristoffelya* [Numerical implementation of P. P. Kufarev method for determination of the constants in Schwarz-Christoffel integral]. Dissertation. Tomsk State University
10. Avkhadiev F.G. (2019) *Konformnye otobrazheniya i kraevye zadachi* [Conformal mappings and boundary-value problems]. Kazan: Kazan Federal University
11. Trubaev N.A. (2021) The numerical solving of one inverse problem of the theory of the Newtonian potential, *Modern Science*, 1-1, pp. 335–344
12. Trubaev N.A. (2019) The behavior of solutions of the Dirichlet, Neumann and mixed Dirichlet Neumann problems in the vicinity of sharp edges of a piecewise smooth boundary, *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute*, 173, pp. 65–88
13. Bronshtein I.N., Semendyaev K.A. (1986) *Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchikhsya VTUZov* [Handbook of Mathematics]. Moscow: Nauka
14. Trubaev N.A. (2020) The applications of the theory of the Newtonian potential. *Materials of the XXIX International Scientific and Practical Conference “Innovative Research As a Locomotive of the Development of Modern Science: from Theoretical Paradigms to Practice.”* Moscow: NITs MISI, pp. 163–185
15. Trubaev N.A. (2022) Reshenie problemy parametrov Kristoffelya-Shvartsa konformnogo otobrazheniya vnutrennosti (vneshnosti) kruga na vnutrennost' (vneshnost') mnogougol'nika [Solution of the parameter problem of Schwarz-Christoffel conformal mapping of interior (exterior) of a circle onto interior (exterior) of a polygon]. *Proceedings of the N.I. Lobachevsky Mathematical Center, Materials of the Lobachevsky Readings International Conference*, Kazan: Kazan Federal University. 62. pp. 109–111
16. Lyapunov A.M. (1949) *Raboty po teorii potentsiala* [Works on potential theory]. Moscow: State Publishing House of technical and theoretical literature

Information about the author:

Trubaev Nikolai A. (Ph.D., Mechanical Engineering, Engineer of department “Computer Aided Design” of the Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russian Federation). E-mail: trubaevn@umail.ru, ORCID: 0000-0001-9863-2484

Сведения об авторе:

Трубаев Николай Алексеевич – кандидат технических наук, инженер кафедры «Системы автоматизированного проектирования» Российского университета транспорта (МИИТ), Москва, Россия. E-mail: trubaevn@umail.ru, ORCID: 0000-0001-9863-2484

The article was submitted 18.08.2022; accepted for publication 31.03.2023

Статья поступила в редакцию 18.08.2022; принята к публикации 31.03.2023

Научная статья

УДК 519.64

doi: 10.17223/19988621/82/4

MSC: 65R20; 31B10

Исследование приближенного решения интегрального уравнения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в двумерном пространстве

Эльнур Гасан оглы Халилов

*Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности,
Баку, Азербайджан, elnurkhalil@mail.ru*

Аннотация. Дано обоснование метода коллокации для интегрального уравнения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в двумерном пространстве. Предложен новый метод построения квадратурной формулы для потенциалов простого и двойного слоев, дающий возможность определить скорость сходимости этих квадратурных формул, на основе которых рассматриваемое интегральное уравнение заменяется системой алгебраических уравнений, при этом устанавливаются существование и единственность решения данной системы. Доказывается сходимость решения системы алгебраических уравнений к значению точного решения интегрального уравнения в опорных точках и указывается скорость сходимости метода. Кроме того, построена последовательность, сходящаяся к точному решению внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в двумерном пространстве.

Ключевые слова: внешняя краевая задача Дирихле, уравнение Гельмгольца, потенциалы простого и двойного слоев, функция Ханкеля, квадратурные формулы, метод коллокации

Для цитирования: Халилов Э.Г. Исследование приближенного решения интегрального уравнения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в двумерном пространстве // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 82. С. 39–54. doi: 10.17223/19988621/82/4

Original article

Investigation of an approximate solution of the integral equation of the exterior Dirichlet boundary value problem for the Helmholtz equation in the two-dimensional space

Elnur H. Khalilov

Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan, elnurkhalil@mail.ru

Abstract. Since in many cases it is impossible to find an exact solution of the exterior Dirichlet boundary value problem for the Helmholtz equation in the two-dimensional

space, there is a growing interest in studying its approximate solution. One of the methods for solving the exterior Dirichlet boundary value problem for the Helmholtz equation in the two-dimensional space is its reduction to a curvilinear integral equation. Note that the main advantage of applying the method of integral equations to the study of exterior boundary value problems is that such an approach allows us to reduce the problem posed for an unbounded domain to a problem for a bounded domain of lower dimension. In this work, we substantiate the application of the collocation method for the integral equation

$$\varphi + K\varphi - i\eta S\varphi = 2f$$

of the exterior Dirichlet boundary value problem for the Helmholtz equation in two-dimensional space, here

$$(S\varphi)(x) = 2 \int_L \Phi_k(x, y) \varphi(y) dl_y, \quad x \in L,$$

$$(K\varphi)(x) = 2 \int_L \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial v(y)} \varphi(y) dl_y, \quad x \in L,$$

$\eta \neq 0$ is an arbitrary real number, $L \subset R^2$ is a closed and twice continuously differentiable curve, f is a given continuous function on L , φ is the desired continuous function on L , $v(y)$ is an outer unit normal at the point $y \in L$, and $\Phi_k(x, y)$ is a fundamental solution of the Helmholtz equation, i.e.,

$$\Phi_k(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|} & \text{at } k = 0, \\ \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - y|) & \text{at } k \neq 0, \end{cases}$$

where $H_0^{(1)}$ is a zero-degree Hankel function of the first kind defined by the formula $H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iN_0(z)$,

$$J_0(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

is a Bessel function of zero degree,

$$N_0(z) = \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{z}{2} + C \right) J_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^m \frac{1}{l} \right) \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

is a Neumann function of zero degree, and $C = 0.57721...$ is the Euler constant. We propose a new method for constructing a quadrature formula for the potentials of the simple and double layers $(S\varphi)(x)$ and $(K\varphi)(x)$, respectively, which makes it possible to determine the rate of convergence of these quadrature formulas. Based on these quadrature formulas, we replace the integral equation under consideration by a system of algebraic equations, and establish the existence and uniqueness of a solution to the resulting system. We prove as well the convergence of the solution of the system of algebraic equations to the value of the exact solution of the integral equation at the reference points, and indicate the rate of convergence of the method. In addition, a sequence is constructed that converges to an exact solution of the exterior Dirichlet boundary value problem for the Helmholtz equation in the two-dimensional space.

Keywords: exterior Dirichlet boundary value problem, Helmholtz equation, potentials of simple and double layers, Hankel function, quadrature formulas, collocation method

For citation: Khalilov, E.H. (2023) Investigation of an approximate solution of the integral equation of the exterior Dirichlet boundary value problem for the Helmholtz

equation in the two-dimensional space. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 82. pp. 39–54. doi: 10.17223/19988621/82/4

Введение и постановка задачи

Пусть $D \subset R^2$ – ограниченная область с дважды непрерывно дифференцируемой границей L , а f – заданная непрерывная функция на L . Рассмотрим внешнюю краевую задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца: найти функцию $u \in C^{(2)}(R^2 \setminus \bar{D}) \cap C(R^2 \setminus D)$, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ в $R^2 \setminus \bar{D}$, условию излучения Зоммерфельда

$$\left(\frac{x}{|x|}, \text{gradu}(x) \right) - i k u(x) = o\left(\frac{1}{|x|^{1/2}} \right), \quad x \rightarrow \infty,$$

равномерно по всем направлениям $x/|x|$ и граничному условию

$$u(x) = f(x) \quad \text{на } L,$$

где Δ – оператор Лапласа, k – волновое число, причем $\text{Im } k \geq 0$.

Известно, что в частных случаях (когда область является кругом, квадратом и др.) можно найти точное решение внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в двумерном пространстве. Однако во многих случаях невозможно найти точное решение внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца. В связи с этим возникает интерес к исследованию приближенного решения данной краевой задачи. Одним из методов решения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца является ее приведение к интегральному уравнению (см.: [1]). Отметим, что основное преимущество применения метода интегральных уравнений к исследованию внешних краевых задач заключается в том, что подобный подход позволяет свести задачу, поставленную для неограниченной области, к задаче для ограниченной области меньшей размерности. О. Панич [2], Х. Бракхаге и П. Вернер [3], а также Р. Лейс [4] независимо друг от друга показали, что комбинация потенциалов простого и двойного слоев

$$u(x) = \int_L \left(\frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \nu(y)} - i \eta \Phi_k(x, y) \right) \varphi(y) dl_y, \quad x \in R^2 \setminus \bar{D},$$

с непрерывной плотностью φ представляет собой решение внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца, если φ является решением интегрального уравнения

$$\varphi + K\varphi - i\eta S\varphi = 2f,$$

которое запишем в виде:

$$\varphi + A\varphi = 2f, \tag{1}$$

здесь $\eta \neq 0$ – произвольное вещественное число, $\nu(x)$ – единичная внешняя нормаль в точке $x \in L$,

$$A\varphi = K\varphi - i\eta S\varphi, \quad (S\varphi)(x) = 2 \int_L \Phi_k(x, y) \varphi(y) dl_y,$$

$$(K\varphi)(x) = 2 \int_L \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) dl_y, \quad x \in L,$$

$\Phi_k(x, y)$ – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, т.е.

$$\Phi_k(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|} & \text{при } k = 0, \\ \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - y|) & \text{при } k \neq 0, \end{cases}$$

где $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка, определяемая формулой

$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + i N_0(z)$, $J_0(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$ – функция Бесселя нулевого

порядка, $N_0(z) = \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{z}{2} + C \right) J_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^m \frac{1}{l} \right) \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$ – функция Неймана

нулевого порядка, а $C = 0.57721...$ – постоянная Эйлера.

Так как интегральные уравнения в замкнутом виде решаются лишь в очень редких случаях, первостепенное значение приобретает разработка приближенных методов решения интегральных уравнений с соответствующим теоретическим обоснованием. Отметим, что в работах [5–8] дано обоснование метода коллокации для интегральных уравнений различных краевых задач для уравнения Гельмгольца в трехмерном пространстве. Однако известно, что в трехмерном пространстве фундаментальное решение уравнения Гельмгольца имеет вид:

$$\Phi_k(x, y) = \frac{\exp(ik|x - y|)}{4\pi|x - y|}, \quad x, y \in R^3, \quad x \neq y,$$

и поэтому интегральные операторы, участвующие в уравнении (1), строго отличаются от интегральных операторов, участвующих в интегральных уравнениях внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в трехмерном пространстве. Кроме того, в работах [9, 10], построив квадратурные формулы для логарифмических потенциалов простого и двойного слоев, дано обоснование метода коллокации для интегральных уравнений некоторых краевых задач для уравнения Лапласа в двумерном пространстве. В работах же [11, 12] исследованы приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений внешней краевой задачи с импедансным условием для уравнения Гельмгольца в двумерном пространстве, а в работе [13] построена квадратурная формула для потенциалов простого и двойного слоев и исследовано приближенное решение уравнения (1). Однако в этой работе для построения квадратурных формул использована асимптотическая формула для функций Ханкеля первого рода нулевого порядка, которая не дает возможности определить скорость сходимости этих квадратурных формул, а значит, и невозможно определить скорость сходимости метода.

Следует отметить, что до сих пор не построены квадратурные формулы для потенциалов простого и двойного слоев без использования асимптотической формулы для функций Ханкеля первого рода нулевого порядка. Учитывая это, в данной работе предложен новый метод построения квадратурных формул для

потенциалов простого и двойного слоев, который дает возможность определить скорость сходимости построенных квадратурных формул. Кроме того, в работе дано обоснование метода коллокации для интегрального уравнения (1) и построена последовательность, сходящаяся к точному решению внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в двумерном пространстве.

1. Построение квадратурной формулы

Предположим, что замкнутая и дважды непрерывно дифференцируемая кривая $L \subset R^2$ задана параметрическим уравнением $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $t \in [a, b]$. Разобьем промежуток $[a, b]$ на $n > 2M_0(b-a)/d$ равных частей: $t_p = a + \frac{(b-a)p}{n}$, $p = \overline{0, n}$, где

$$M_0 = \max_{t \in [a, b]} \sqrt{(x'_1(t))^2 + (x'_2(t))^2} < +\infty$$

(см.: [14. С. 560]) и d – стандартный радиус (см.: [15. С. 400]). В качестве опорных точек возьмем $x(\tau_p)$, $p = \overline{1, n}$, где $\tau_p = a + \frac{(b-a)(2p-1)}{2n}$. Тогда кривая L

разбивается на элементарные части: $L = \bigcup_{p=1}^n L_p$, где $L_p = \{x(t): t_{p-1} \leq t \leq t_p\}$.

Известно (см.: [9]):

(1) $\forall p \in \{1, 2, \dots, n\}: r_p(n) \sim R_p(n)$, где

$$r_p(n) = \min \left\{ \left| x(\tau_p) - x(t_{p-1}) \right|, \left| x(t_p) - x(\tau_p) \right| \right\},$$

$$R_p(n) = \max \left\{ \left| x(\tau_p) - x(t_{p-1}) \right|, \left| x(t_p) - x(\tau_p) \right| \right\},$$

а запись $a(n) \sim b(n)$ означает, что

$$C_1 \leq \frac{a(n)}{b(n)} \leq C_2,$$

где C_1 и C_2 – положительные постоянные, не зависящие от n ;

(2) $\forall p \in \{1, 2, \dots, n\}: R_p(n) \leq d/2$;

(3) $\forall p, j \in \{1, 2, \dots, n\}: r_j(n) \sim r_p(n)$;

(4) $r(n) \sim R(n) \sim \frac{1}{n}$, где $R(n) = \max_{p=1, n} R_p(n)$, $r(n) = \min_{p=1, n} r_p(n)$.

В дальнейшем такое разбиение будем называть разбиением кривой L на «регулярные» элементарные части.

Поступая точно так же, как и в доказательстве леммы 2.1 работы [7], можно показать справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Существуют такие постоянные $C'_0 > 0$ и $C'_1 > 0$, не зависящие от n , для которых при $\forall p, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \neq p$, и $\forall u \in L_j$ справедливы следующие неравенства:*

$$C'_0 |y - x(\tau_p)| \leq |x(\tau_j) - x(\tau_p)| \leq C'_1 |y - x(\tau_p)|.$$

Через $C(L)$ обозначим пространство всех непрерывных функций на L с нормой $\|\varphi\|_\infty = \max_{x \in L} |\varphi(x)|$ и для функции $\varphi \in C(L)$ введем модуль непрерывности вида

$$\omega(\varphi, \delta) = \max_{\substack{|x-y| \leq \delta \\ x, y \in L}} |\varphi(x) - \varphi(y)|, \quad \delta > 0.$$

Пусть

$$\Phi_k^n(x, y) = \frac{i}{4} H_{0,n}^{(1)}(k|x-y|), \quad x, y \in L, \quad x \neq y,$$

где

$$H_{0,n}^{(1)}(z) = J_{0,n}(z) + i N_{0,n}(z), \quad J_{0,n}(z) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

и

$$N_{0,n}(z) = \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{z}{2} + C \right) J_{0,n}(z) + \sum_{m=1}^n \left(\sum_{l=1}^m \frac{1}{l} \right) \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}.$$

Несложно заметить, что

$$\frac{\partial \Phi_k^n(x, y)}{\partial v(y)} = \frac{i}{4} \left(\frac{\partial J_{0,n}(k|x-y|)}{\partial v(y)} + i \frac{\partial N_{0,n}(k|x-y|)}{\partial v(y)} \right),$$

где

$$\frac{\partial J_{0,n}(k|x-y|)}{\partial v(y)} = (y-x, v(y)) \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m k^{2m} |x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1} (m-1)! m!}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{0,n}(k|x-y|)}{\partial v(y)} &= \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{k|x-y|}{2} + C \right) \frac{\partial J_{0,n}(k|x-y|)}{\partial v(y)} + \frac{2(y-x, v(y))}{\pi |x-y|^2} J_{0,n}(k|x-y|) + \\ &+ (y-x, v(y)) \sum_{m=1}^n \left(\sum_{l=1}^m \frac{1}{l} \right) \frac{(-1)^{m+1} k^{2m} |x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1} (m-1)! m!}. \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть L – замкнутая и дважды непрерывно дифференцируемая кривая в R^2 , $\varphi \in C(L)$ и

$$\begin{aligned} a_{pj} &= \frac{2(b-a)|\operatorname{sgn}(p-j)|}{n} \left(\frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} - i \eta \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \right) \times \\ &\times \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2}. \end{aligned}$$

Тогда выражение

$$(A_n \varphi)(x(\tau_p)) = \sum_{j=1}^n a_{pj} \varphi(x(\tau_j))$$

в опорных точках $x(\tau_p)$, $p = \overline{1, n}$, является квадратурной формулой для интеграла $(A\varphi)(x)$, $x \in L$, причем справедлива следующая оценка:

$$\max_{p=1, n} \left| (A\varphi)(x(\tau_p)) - (A_n\varphi)(x(\tau_p)) \right| \leq M \left(\omega(\varphi, 1/n) + \|\varphi\|_{\infty} \frac{\ln n}{n} \right).$$

Здесь и далее через M будем обозначать положительные постоянные, разные в различных неравенствах.

Доказательство. Сначала покажем, что выражение

$$(S_n\varphi)(x(\tau_p)) = \frac{2(b-a)}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} \varphi(x(\tau_j))$$

в опорных точках $x(\tau_p)$, $p = \overline{1, n}$, является квадратурной формулой для интеграла $(S\varphi)(x)$, $x \in L$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} (S\varphi)(x(\tau_p)) - (S_n\varphi)(x(\tau_p)) &= 2 \int_{L_p} \Phi_k(x(\tau_p), y) \varphi(y) dy + \\ &+ 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \int_{L_j} (\Phi_k(x(\tau_p), y) - \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))) \varphi(y) dy + \\ &+ 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \int_{L_j} \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) (\varphi(y) - \varphi(x(\tau_j))) dy + \\ &+ 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \left(\sqrt{(x'_1(t))^2 + (x'_2(t))^2} - \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} \right) \varphi(x(\tau_j)) dt. \end{aligned}$$

Слагаемые в последнем равенстве обозначим через $h_1^n(x(\tau_p))$, $h_2^n(x(\tau_p))$, $h_3^n(x(\tau_p))$ и $h_4^n(x(\tau_p))$ соответственно.

Очевидно, что

$$|J_0(k|x-y|)| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(|k| \text{diam } L)^{2m}}{4^m (m!)^2} \leq M, \quad \forall x, y \in L, \quad (2)$$

и

$$\left| \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^m \frac{1}{l} \right) \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} \left(\frac{k|x-y|}{2} \right)^{2m} \right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^m \frac{1}{l} \right) \frac{(|k| \text{diam } L)^{2m}}{4^m (m!)^2} \leq M, \quad \forall x, y \in L, \quad (3)$$

следовательно,

$$|\Phi_k(x, y)| \leq M |\ln|x-y||, \quad \forall x, y \in L, \quad x \neq y. \quad (4)$$

Тогда, применяя формулу вычисления криволинейного интеграла, находим

$$|h_1^n(x(\tau_p))| \leq 2 \|\varphi\|_{\infty} \int_{L_p} |\Phi_k(x(\tau_p), y)| dy \leq M \|\varphi\|_{\infty} \int_0^{R(n)} |\ln \tau| d\tau \leq M \|\varphi\|_{\infty} R(n) |\ln R(n)|.$$

Пусть $y \in L_j$ и $j \neq p$. Учитывая лемму 1, имеем

$$\begin{aligned} \left| |x(\tau_p) - y|^q - |x(\tau_p) - x(\tau_j)|^q \right| &\leq M q |x(\tau_j) - y| |x(\tau_p) - y|^{q-1} \leq \\ &\leq M q R(n) (\text{diam } L)^{q-1} \end{aligned} \quad (5)$$

и

$$\begin{aligned} \left| \ln(k|x(\tau_p) - y|) - \ln(k|x(\tau_p) - x(\tau_j)|) \right| &= \left| \ln \left(1 + \frac{|x(\tau_p) - x(\tau_j)|}{|x(\tau_p) - y|} \right) \right| \leq \\ &\leq \left| \ln \left(1 + \frac{|x(\tau_j) - y|}{|x(\tau_p) - y|} \right) \right| \leq M \frac{R(n)}{|x(\tau_p) - y|}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $q \in \mathbb{N}$. Тогда, принимая во внимание неравенства (2), (3), (5) и (6), получаем

$$\begin{aligned} &\left| \Phi_k(x(\tau_p), y) - \Phi_k(x(\tau_p), x(\tau_j)) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\left(\frac{k|x(\tau_p) - y|}{2} \right)^{2m} - \left(\frac{k|x(\tau_p) - x(\tau_j)|}{2} \right)^{2m} \right) \right| + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \left| \left(\ln \frac{k|x(\tau_p) - x(\tau_j)|}{2} + C \right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\left(\frac{k|x(\tau_p) - y|}{2} \right)^{2m} - \left(\frac{k|x(\tau_p) - x(\tau_j)|}{2} \right)^{2m} \right) \right| + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \left| \left(\ln(k|x(\tau_p) - y|) - \ln(k|x(\tau_p) - x(\tau_j)|) \right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{k|x(\tau_p) - y|}{2} \right)^{2m} \right| + \\ &+ \frac{1}{4} \left| \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^m \frac{1}{l} \right) \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} \left(\left(\frac{k|x(\tau_p) - y|}{2} \right)^{2m} - \left(\frac{k|x(\tau_p) - x(\tau_j)|}{2} \right)^{2m} \right) \right| \leq \frac{MR(n)}{|x(\tau_p) - y|}. \end{aligned}$$

Кроме того, учитывая неравенства

$$\left| J_0(k|x - y|) - J_{0,n}(k|x - y|) \right| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{|k|^{2m}|x - y|^{2m}}{4^m(m!)^2} \leq \frac{M}{(n+1)!}, \quad \forall x, y \in L, \quad (7)$$

и

$$\left| N_0(k|x - y|) - N_{0,n}(k|x - y|) \right| \leq \frac{M|\ln|x - y||}{(n+1)!}, \quad \forall x, y \in L, \quad (8)$$

имеем:

$$\left| \Phi_k(x(\tau_p), x(\tau_j)) - \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \right| \leq \frac{M|\ln|x(\tau_p) - x(\tau_j)||}{(n+1)!} \leq \frac{M}{(n+1)!|x(\tau_p) - y|}.$$

В результате находим, что

$$\begin{aligned} &\left| \Phi_k(x(\tau_p), y) - \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \right| \leq \left| \Phi_k(x(\tau_p), y) - \Phi_k(x(\tau_p), x(\tau_j)) \right| + \\ &+ \left| \Phi_k(x(\tau_p), x(\tau_j)) - \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \right| \leq \frac{M}{|x(\tau_p) - y|} \left(R(n) + \frac{1}{(n+1)!} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left| h_2^n(x(\tau_p)) \right| \leq M \|\varphi\|_\infty \left(R(n) + \frac{1}{(n+1)!} \right) \int_{r(n)}^{\text{diam} L} \frac{d\tau}{\tau} \leq M \|\varphi\|_\infty \left(R(n) + \frac{1}{(n+1)!} \right) \left| \ln R(n) \right|.$$

Из неравенства (4), получаем, что

$$\int_L |\Phi_k(x, y)| dl_y$$

сходится как несобственный и

$$\int_L |\Phi_k(x, y)| dl_y \leq M, \quad \forall x \in L.$$

Тогда из неравенств (7) и (8) получим

$$\int_L |\Phi_k^n(x, y)| dl_y \leq \int_L |\Phi_k(x, y)| dl_y + \int_L |\Phi_k(x, y) - \Phi_k^n(x, y)| dl_y \leq M, \quad \forall x \in L, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

В итоге, принимая во внимание лемму 1, находим

$$\left| h_3^n(x(\tau_p)) \right| \leq M \omega(\varphi, R(n)) \int_L |\Phi_k^n(x(\tau_p), y)| dl_y \leq M \omega(\varphi, R(n)).$$

Очевидно, что

$$\left| \sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2} - \sqrt{(x_1'(\tau_j))^2 + (x_2'(\tau_j))^2} \right| \leq MR(n), \quad \forall t \in [t_{j-1}, t_j]. \quad (9)$$

Пусть $y \in L_j$ и $j \neq p$. С учетом леммы 1 и неравенств (2) и (3) имеем

$$\left| J_{0,n}(k|x(\tau_p) - x(\tau_j)|) \right| \leq \sum_{m=0}^n \frac{(|k| \text{diam} L)^{2m}}{4^m (m!)^2} \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

и

$$\left| N_{0,n}(k|x(\tau_p) - x(\tau_j)|) \right| \leq M \left| \ln |x(\tau_p) - y| \right|, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

следовательно,

$$\left| \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \right| \leq M \left| \ln |x(\tau_p) - y| \right|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} \left| h_4^n(x(\tau_p)) \right| &\leq M \|\varphi\|_\infty R(n) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left| \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \right| dt \leq \\ &\leq M \|\varphi\|_\infty R(n) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \int_{L_j} \left| \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \right| dl_y \leq \\ &\leq M \|\varphi\|_\infty R(n) \int_L \left| \ln |x(\tau_p) - y| \right| dl_y \leq M \|\varphi\|_\infty R(n). \end{aligned}$$

Суммируя полученные оценки для выражений $h_1^n(x(\tau_p))$, $h_2^n(x(\tau_p))$, $h_3^n(x(\tau_p))$

и $h_4^n(x(\tau_p))$ и принимая во внимание соотношение $R(n) \sim \frac{1}{n}$, получаем, что

$$\max_{p=1, n} \left| (S\varphi)(x(\tau_p)) - (S_n\varphi)(x(\tau_p)) \right| \leq M \left(\omega(\varphi, 1/n) + \|\varphi\|_\infty \frac{\ln n}{n} \right).$$

Теперь докажем, что выражение

$$(K_n \varphi)(x(\tau_p)) = \frac{2(b-a)}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} \varphi(x(\tau_j))$$

в опорных точках $x(\tau_p)$, $p = \overline{1, n}$, является квадратурной формулой для интеграла $(K\varphi)(x)$, $x \in L$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} (K\varphi)(x(\tau_p)) - (K_n \varphi)(x(\tau_p)) &= 2 \int_{L_p} \frac{\partial \Phi_k(x(\tau_p), y)}{\partial v(y)} \varphi(y) dl_y + \\ &+ 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \int_{L_j} \left(\frac{\partial \Phi_k(x(\tau_p), y)}{\partial v(y)} - \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \right) \varphi(y) dl_y + \\ &+ 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \int_{L_j} \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} (\varphi(y) - \varphi(x(\tau_j))) dl_y + \\ &+ 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \left(\sqrt{(x'_1(t))^2 + (x'_2(t))^2} - \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} \right) \varphi(x(\tau_j)) dt. \end{aligned}$$

Слагаемые в последнем равенстве обозначим через $\delta_1^n(x(\tau_p))$, $\delta_2^n(x(\tau_p))$, $\delta_3^n(x(\tau_p))$ и $\delta_4^n(x(\tau_p))$ соответственно.

Так как (см.: [15. С. 403])

$$|(y - x, v(y))| \leq M |x - y|^2, \quad (10)$$

то

$$\left| \frac{\partial J_0(k|x-y|)}{\partial v(y)} \right| \leq M |x - y|^2 \quad (11)$$

и

$$\left| \frac{\partial N_0(k|x-y|)}{\partial v(y)} \right| \leq M (|x - y|^2 |\ln|x - y|| + |x - y|^2 + 1), \quad (12)$$

а значит,

$$\left| \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial v(y)} \right| \leq M, \quad \forall x, y \in L, x \neq y. \quad (13)$$

Тогда, учитывая формулу вычисления криволинейного интеграла, получим

$$|\delta_1^n(x(\tau_p))| \leq M \|\varphi\|_\infty \int_0^{R(n)} d\tau \leq M \|\varphi\|_\infty R(n).$$

Пусть $y \in L_j$ и $j \neq p$. Из леммы 1 и неравенства (10) очевидно, что

$$|(y - x(\tau_p), v(y)) - (x(\tau_j) - x(\tau_p), v(x(\tau_j)))| = |(y - x(\tau_j), v(y))| +$$

$$+\left|\left(x(\tau_j)-x(\tau_p), v(y)-v(x(\tau_j))\right)\right| \leq M\left|y-x(\tau_p)\right| R(n) . \quad (14)$$

Тогда, учитывая неравенства (5), получаем, что

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial J_0(k|x(\tau_p)-y|)}{\partial v(y)} - \frac{\partial J_0(k|x(\tau_p)-x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \right| \leq \\ & \leq \left| \left(y-x(\tau_p), v(y) \right) - \left(x(\tau_j)-x(\tau_p), v(x(\tau_j)) \right) \right| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|k|^{2m} |x(\tau_p)-y|^{2m-2}}{2^{2m-1} (m-1)! m!} + \\ & + \left| \left(x(\tau_j)-x(\tau_p), v(x(\tau_j)) \right) \right| \times \\ & \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|k|^{2m} \left| |x(\tau_p)-x(\tau_j)|^{2m-2} - |x(\tau_p)-y|^{2m-2} \right|}{2^{2m-1} (m-1)! m!} \leq M\left|y-x(\tau_p)\right| R(n) . \quad (15) \end{aligned}$$

Кроме того, из леммы 1 и неравенств (10) и (14) имеем

$$\left| \frac{\left(y-x(\tau_p), v(y) \right)}{|x(\tau_p)-y|^2} - \frac{\left(x(\tau_j)-x(\tau_p), v(x(\tau_j)) \right)}{|x(\tau_p)-x(\tau_j)|^2} \right| \leq \frac{M R(n)}{|x(\tau_p)-y|} .$$

Тогда, принимая во внимание неравенства (2), (6), (11), (12), (14) и (15), нетрудно показать, что

$$\left| \frac{\partial N_0(k|x(\tau_p)-y|)}{\partial v(y)} - \frac{\partial N_0(k|x(\tau_p)-x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \right| \leq \frac{M R(n)}{|x(\tau_p)-y|} .$$

В результате находим

$$\left| \frac{\partial \Phi_k(x(\tau_p), y)}{\partial v(y)} - \frac{\partial \Phi_k(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \right| \leq \frac{M R(n)}{|x(\tau_p)-y|} .$$

Также, учитывая неравенство

$$\left| \frac{\partial \Phi_k(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} - \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \right| \leq \frac{M \ln |x(\tau_p)-y|}{n!} , \quad (16)$$

получаем, что

$$\left| \frac{\partial \Phi_k(x(\tau_p), y)}{\partial v(y)} - \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \right| \leq M \left(\frac{R(n)}{|x(\tau_p)-y|} + \frac{|\ln |x(\tau_p)-y||}{n!} \right) .$$

В итоге

$$\begin{aligned} \left| \delta_2^n(x(\tau_p)) \right| & \leq M \|\Phi\|_{\infty} \left(R(n) \int_{r(n)}^{\text{diam } L} \frac{d\tau}{\tau} + \frac{1}{n!} \int_{r(n)}^{\text{diam } L} |\ln \tau| d\tau \right) \leq \\ & \leq M \|\Phi\|_{\infty} \left(R(n) |\ln R(n)| + \frac{1}{n!} \right) . \end{aligned}$$

Пусть $y \in L_j$ и $j \neq p$. Так как из леммы 1 и неравенств (13) и (16) очевидно, что

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \right| \leq \left| \frac{\partial \Phi_k(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \right| + \\ & + \left| \frac{\partial \Phi_k(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} - \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \right| \leq \frac{M \left| \ln |x(\tau_p) - y| \right|}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (17)$$

то

$$\left| \delta_3^n(x(\tau_p)) \right| \leq 2 \omega(\varphi, R(n)) \int_L \left| \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(y)} \right| dl_y \leq M \omega(\varphi, R(n)).$$

Кроме того, учитывая лемму 1 и неравенства (9) и (17), получим

$$\begin{aligned} \left| \delta_4^n(x(\tau_p)) \right| & \leq M \|\varphi\|_\infty R(n) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left| \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \right| dt \leq \\ & \leq M \|\varphi\|_\infty R(n) \int_L \left| \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \right| dl_y \leq M \|\varphi\|_\infty R(n). \end{aligned}$$

В результате, суммируя полученные оценки для выражений $\delta_1^n(x(\tau_p))$, $\delta_2^n(x(\tau_p))$, $\delta_3^n(x(\tau_p))$ и $\delta_4^n(x(\tau_p))$ и учитывая соотношение $R(n) \sim \frac{1}{n}$, имеем

$$\max_{p=1, n} \left| (K\varphi)(x(\tau_p)) - (K_n\varphi)(x(\tau_p)) \right| \leq M \left(\omega(\varphi, 1/n) + \|\varphi\|_\infty \frac{\ln n}{n} \right).$$

Этим и завершается доказательство теоремы 1.

2. Обоснование метода коллокации

Пусть C^n – пространство n -мерных векторов $z^n = (z_1^n, z_2^n, \dots, z_n^n)^T$, $z_l^n \in C$, $l = \overline{1, n}$, с нормой $\|z^n\| = \max_{l=1, n} |z_l^n|$, где запись a^T означает транспонирование вектора a . Используя построенную квадратурную формулу для интеграла $(A\varphi)(x)$, $x \in L$, уравнение (1) заменяем системой алгебраических уравнений относительно z_l^n – приближенных значений $\varphi(x(\tau_l))$, $l = \overline{1, n}$, которую запишем в виде:

$$(I^n + A^n)z^n = 2f^n, \quad (18)$$

где I^n – единичный оператор в пространстве C^n , $A^n = (a_{lj})_{l,j=1}^n$, $f^n = p^n f$, а $p^n : C(L) \rightarrow C^n$ – линейный ограниченный оператор, определяемый формулой

$$p^n f = (f(x(\tau_1)), f(x(\tau_2)), \dots, f(x(\tau_n)))^T.$$

Теорема 2. Уравнения (1) и (18) имеют единственные решения $\varphi_* \in C(L)$ и $z_*^n \in C^n$ соответственно, причем $\|z_*^n - p^n \varphi_*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ с оценкой

$$\|z_*^n - p^n \varphi_*\| \leq M \left(\omega(f, 1/n) + \|f\|_\infty \frac{\ln n}{n} \right).$$

Доказательство. Для обоснования метода коллокации будем пользоваться теоремой Г.М. Вайникко о сходимости для линейных операторных уравнений (см.: [16]). Проверим выполнение условий теоремы 4.2 из работы [16], при этом обозначения и необходимые определения и предложения возьмем из [16]. В работах [2–4] доказано, что $\text{Ker}(I + A) = \{0\}$. Кроме того, операторы $I^n + A^n$ фредгольмовы с нулевым индексом и операторы $p^n : C(L) \rightarrow C^n$ линейны и ограничены. Принимая во внимание способ разбиения кривой L на «регулярные» элементарные части, получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|p^n g\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{l=1, n} |g(x(\tau_l))| = \max_{x \in L} |g(x)| = \|g\|_\infty, \quad \forall g \in C(L).$$

Следовательно, система операторов $P = \{p^n\}$ является связывающей для пространств $C(L)$ и C^n . Тогда $f^n \xrightarrow{P} f$, и, принимая во внимание теорему 1, получаем, что по определению 2.1 из работы [16] $I^n + A^n \xrightarrow{PP} I + A$. Так как по определению 3.2 из работы [16] $I^n \rightarrow I$ устойчиво, то по предложению 3.5 и по определению 3.3 из работы [16] осталось проверить условие компактности, которое ввиду предложения 1.1 из [16] равносильно условию $\forall \{z^n\}, z^n \in C^n, \|z^n\| \leq M$; существует относительно компактная последовательность $\{A_n z^n\} \subset C(L)$ такая, что

$$\|A_n z^n - p^n(A_n z^n)\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

В качестве $\{A_n z^n\}$ выберем последовательность

$$(A_n z^n)(x) = (K_n z^n)(x) - i\eta(S_n z^n)(x),$$

где

$$(K_n z^n)(x) = 2 \sum_{j=1}^n z_j^n \int_{L_j} \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial v(y)} dl_y, \quad x \in L,$$

$$(S_n z^n)(x) = 2 \sum_{j=1}^n z_j^n \int_{L_j} \Phi_k(x, y) dl_y, \quad x \in L.$$

Очевидно, что $\{A_n z^n\} \subset C(L)$ и

$$\|(A_n z^{2n})(x)\| \leq M \|z^n\|, \quad \forall x \in L.$$

Тогда, принимая во внимание условие $\|z^n\| \leq M$, получаем равномерную ограниченность последовательности $\{A_n z^n\}$.

Теперь возьмем любые точки $x', x'' \in L$ такие, что $|x' - x''| < d/2$. Тогда, поступая точно так же, как и в работе [9], можно показать, что

$$\left| (A_n z^n)(x') - (A_n z^n)(x'') \right| \leq M \|z^n\| |x' - x''| |\ln |x' - x''||, \quad \forall x', x'' \in L.$$

Отсюда непосредственно вытекает равностепенная непрерывность последовательности $\{A_n z^n\}$. Тогда из теоремы Арцеля следует относительная компактность последовательности $\{A_n z^n\}$. Кроме того, поступая точно так же, как и в доказательстве теоремы 1, получим

$$\|A^n z^n - p^n(A_n z^n)\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

В результате, применяя теорему 4.2 из работы [16], находим, что уравнения (1) и (18) имеют единственные решения $\varphi_* \in C(L)$ и $z_*^n \in C^n$ соответственно, причем

$$c_1 \delta_n \leq \|z_*^n - p^n \varphi_*\| \leq c_2 \delta_n,$$

где

$$c_1 = 1/\sup_n \|I^n + A^n\| > 0, \quad c_2 = \sup_n \|(I^n + A^n)^{-1}\| < +\infty, \quad \delta_n = \|(I^n + A^n)(p^n \varphi_*) - 2f^n\|.$$

Принимая во внимание оценки погрешности квадратурной формулы для интеграла $(A\varphi)(x)$, $x \in L$, получаем

$$\begin{aligned} \delta_n &= \|(I^n + A^n)(p^n \varphi_*) - 2p^n f\| = \|p^n \varphi_* + A^n(p^n \varphi_*) - p^n(\varphi_* + A\varphi_*)\| = \\ &= \|A^n(p^n \varphi_*) - p^n(A\varphi_*)\| = \max_{l=1, n} \left| \sum_{j=1}^n a_{lj} \varphi_*(x(\tau_j)) - (A\varphi_*)(x(\tau_l)) \right| \leq \\ &\leq M \left(\omega(\varphi_*, 1/n) + \|\varphi_*\|_\infty \frac{\ln n}{n} \right). \end{aligned}$$

Кроме того, принимая во внимание неравенства

$$\omega(S\varphi_*, h) \leq M \|\varphi_*\| h |\ln h|, \quad \omega(K\varphi_*, h) \leq M \|\varphi_*\| h |\ln h|,$$

имеем

$$\begin{aligned} \omega(\varphi_*, 1/n) &= \omega(2f - A\varphi_*, 1/n) \leq \omega(2f, 1/n) + \omega(A\varphi_*, 1/n) \leq \\ &\leq M \left(\omega(f, 1/n) + \|\varphi_*\|_\infty \frac{\ln n}{n} \right). \end{aligned}$$

В результате, учитывая, что

$$\|\varphi_*\|_\infty = 2 \|(I + A)^{-1} f\|_\infty \leq 2 \|(I + A)^{-1}\| \|f\|_\infty,$$

получаем доказательство теоремы.

Следствие 1. Пусть $x_0 \in R^2 \setminus \overline{D}$, и $z^n = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*)^T$ является решением системы алгебраических уравнений (18). Тогда последовательность

$$u_n(x_0) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi_k^n(x_0, x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} - i\eta \Phi_k^n(x_0, x(\tau_j)) \right) \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} z_j^*$$

сходится к значению $u(x_0)$ решения $u(x)$ внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в точке x_0 , причем

$$|u_n(x_0) - u(x_0)| \leq M \left(\omega(f, 1/n) + \|f\|_\infty \frac{\ln n}{n} \right).$$

Список источников

1. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М. : Мир, 1987. 311 с.
2. Панич О.И. К вопросу о разрешимости внешних краевых задач для волнового уравнения и для системы уравнений Максвелла // Успехи математических наук. 1965. Т. 20, № 1. С. 221–226.
3. Brakhage H., Werner P. Über das Dirichletsche Aussenraumproblem für die Helmholtzsche Schwingungsgleichung // Archiv der Mathematik. 1965. Bd. 16 (1). S. 325–329.
4. Leis R. Zur Dirichletschen Randwertaufgabe des Aussenraums der Schwingungsgleichung // Mathematische Zeitschrift. 1965. Bd. 90 (3). S. 205–211.
5. Каширин А.А., Смагин С.И. О численном решении задач Дирихле для уравнения Гельмгольца методом потенциалов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52 (8). С. 1492–1505.
6. Каширин А.А., Смагин С.И., Талтыкина М.Ю. Применение мозаично-скелетонного метода при численном решении трехмерных задач Дирихле для уравнения Гельмгольца в интегральной форме // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56 (4). С. 625–638.
7. Халилов Э.Г. Обоснование метода коллокации для одного класса поверхностных интегральных уравнений // Математические заметки. 2020. Т. 107 (4). С. 604–622.
8. Халилов Э.Г. Исследование приближенного решения некоторых классов поверхностных интегральных уравнений первого рода // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 74. С. 43–54.
9. Бахшалыева М.Н., Халилов Э.Г. Обоснование метода коллокации для интегрального уравнения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. Т. 61, № 6. С. 936–950.
10. Халилов Э.Г., Бахшалыева М.Н. Исследование приближенного решения интегрального уравнения, соответствующего смешанной краевой задаче для уравнения Лапласа // Уфимский математический журнал. 2021. Т. 13, № 1. С. 86–98.
11. Turc C., Boubendir Y., Riahi M.K. Well-conditioned boundary integral equation formulations and Nyström discretizations for the solution of Helmholtz problems with impedance boundary conditions in two-dimensional Lipschitz domains // Journal Integral Equations Applications. 2017. V. 29 (3). P. 441–472.
12. Yaman O.I., Ozdemir G. Numerical solution of a generalized boundary value problem for the modified Helmholtz equation in two dimensions // Mathematics and Computers in Simulation. 2021. V. 190. P. 181–191.
13. Kress R. Boundary integral equations in time-harmonic acoustic scattering // Mathematical and Computer Modeling. 1991. V. 15 (3-5). P. 229–243.
14. Мухомелевич Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М. : Физ.-мат. лит., 1962. 599 с.
15. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1976. 527 с.
16. Вайникко Г.М. Регулярная сходимость операторов и приближенное решение уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. 1979. Т. 16. С. 5–53.

References

1. Colton D.L., Kress R. (1983) *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. John Wiley & Sons. 271 p.
2. Panich O.I. (1965) K voprosu o razreshimosti vneshnikh krayevykh zadach dlya volnovoogo uravneniya i dlya sistemy uravneniy Maksvela [On the solvability of exterior boundary value problems for the wave equation and a system of Maxwell's equations]. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*. 20(1). pp. 221–226.
3. Brakhage H., Werner P. (1965) Über das Dirichletsche Aussenraumproblem für die Helmholtzsche Schwingungsgleichung. *Archiv der Mathematik*. 16(1). pp. 325–329. DOI: 10.1007/BF01220037.

4. Leis R. (1965) Zur Dirichletschen Randwertaufgabe des Aussenraums der Schwingungsgleichung. *Mathematische Zeitschrift*. 90(3). pp. 205–211. DOI: 10.1007/BF01119203.
5. Kashirin A.A., Smagin S.I. (2012) Potential-based numerical solution of Dirichlet problems for the Helmholtz equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 52(8). pp. 1173–1185. DOI: 10.1134/S0965542512080052.
6. Kashirin A.A., Smagin S.I., Taltykina M.Yu. (2016) Mosaic-skeleton method as applied to the numerical solution of three-dimensional Dirichlet problems for the Helmholtz equation in integral form. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 56(4). pp. 612–625. DOI: 10.1134/S0965542516040096.
7. Khalilov E.H. (2020) Justification of the collocation method for a class of surface integral equations. *Mathematical Notes*. 107(4). pp. 663–678. DOI: 10.1134/S0001434620030335.
8. Khalilov E.H. (2021) Issledovaniye priblizhennogo resheniya nekotorykh klassov poverkhnostnykh integral'nykh uravneniy pervogo roda [Investigation of an approximate solution of some classes of surface integral equations of the first kind]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 74. pp. 43–54.
9. Bakhshaliyeva M.N., Khalilov E.H. (2021) Justification of the collocation method for an integral equation of the exterior Dirichlet problem for the Laplace equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 61(6). pp. 923–937. DOI: 10.1134/S0965542521030039.
10. Khalilov E.H., Bakhshaliyeva M.N. (2021) Issledovaniye priblizhennogo resheniya integral'nogo uravneniya, sootvetstvuyushchego smeshannoy krayevoy zadache dlya uravneniya Laplasy [Study of approximate solution to integral equation associated with the mixed boundary value problem for the Laplace equation]. *Ufimskiy matematicheskiy zhurnal – Ufa Mathematical Journal*. 13(1). pp. 85–97. DOI: 10.13108/2021-13-1-85.
11. Turc C., Boubendir Y., Riahi M.K. (2017) Well-conditioned boundary integral equation formulations and Nyström discretizations for the solution of Helmholtz problems with impedance boundary conditions in two-dimensional Lipschitz domains. *Journal of Integral Equations and Applications*. 29(3). pp. 441–472. DOI: 10.1216/JIE-2017-29-3-441.
12. Yaman O.I., Özdemir G. (2021) Numerical solution of a generalized boundary value problem for the modified Helmholtz equation in two dimensions. *Mathematics and Computers in Simulation*. 190. pp. 181–191. DOI: 10.1016/j.matcom.2021.05.013.
13. Kress R. (1991) Boundary integral equations in time-harmonic acoustic scattering. *Mathematical and Computer Modeling*. 15(3–5). pp. 229–243. DOI: 10.1016/0895-7177(91)90068-I.
14. Muskhelishvili N.I. (1962) *Singulyarnyye integralnyye uravneniya* [Singular integral equations], Moscow: Fizmatlit.
15. Vladimirov V.S. (1976) *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics], Moscow: Nauka.
16. Vainikko G.M. (1981) Regular convergence of operators and approximate solution of equations. *Journal of Soviet Mathematics*. 15. pp. 675–705. DOI: 10.1007%2FBF01377042.

Сведения об авторе:

Халилов Эльнур Гасан оглы – доктор математических наук, профессор кафедры общей и прикладной математики Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности, Баку, Азербайджан, elnurkhalil@mail.ru

Information about the author:

Khalilov Elnur H. (Doctor of Mathematical Sciences, Professor of the General and Applied Mathematics Department of Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan). E-mail: elnurkhalil@mail.ru

Статья поступила в редакцию 07.03.2022; принята к публикации 31.03.2023

The article was submitted 07.03.2022; accepted for publication 31.03.2023

МЕХАНИКА

MECHANICS

Научная статья

УДК 531.383

doi: 10.17223/19988621/82/5

Динамика микромеханического гироскопа типа $R-L$ с двумя точечными массами в режиме свободных колебаний**Егор Александрович Антонов¹, Ольга Валерьевна Грибова²**¹ ПАО «Туполев», Москва, Россия, Ve.no.m@yandex.ru² Национальный исследовательский университет «МЭИ»,
Москва, Россия, gribovaov@mail.ru

Аннотация. Рассматривается микромеханический гироскоп типа $R-L$ в режиме свободных колебаний. Для рассматриваемой расчетной схемы гироскопа построена соответствующая функция Лагранжа и получены уравнения движения в линейной постановке задачи. Найдено решение в переменных амплитуда–фаза при помощи метода осреднения Крылова–Боголюбова. В итоге получены уравнения для угла прецессии гироскопа и исследовано поведение гироскопа в орбитальных координатах.

Ключевые слова: микромеханический гироскоп, свободные колебания, угол прецессии, камертон

Для цитирования: Антонов Е.А., Грибова О.В. Динамика микромеханического гироскопа $R-L$ типа с двумя точечными массами в режиме свободных колебаний // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 82. С. 55–65. doi: 10.17223/19988621/82/5

Original article

Dynamics of a micromechanical dual-mass gyroscope of RL -type in a free oscillation mode**Egor A. Antonov¹, Olga V. Gribova²**¹ Joint Stock Company “Tupolev”, Moscow, Russian Federation, Ve.no.m@yandex.ru

² National Research University "Moscow Power Engineering Institute",
Moscow, Russian Federation, gribovaov@mail.ru

Abstract. This paper presents the analysis of a mechanical and theoretical model of a micromechanical *RL*-type gyroscope (MMG). The behavior of the resonator in a free oscillation mode is studied by solving the problem in a linear formulation. The main part of the paper is devoted to the mathematical model development for a dual-mass MMG with a disk-shaped resonator, which is fixed on the elastic leg on a movable base. The important condition of the problem implies the arbitrary angular velocity of the base Ω . The derived equations are analyzed in terms of orbital coordinates (r, k, θ, χ) . The equations determining the precession angle (θ) of the considered gyroscope are obtained. A brief analysis of the proposed dependences and the corresponding conclusions about the behavior of the system under free oscillations are presented.

Keywords: micromechanical gyroscope, free oscillations, precession angle, tuning fork

For citation: Antonov, E.A., Gribova, O.V. (2023) Dynamics of a micromechanical dual-mass gyroscope of *RL*-type in a free oscillation mode. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 82. pp. 55–65. doi: 10.17223/19988621/82/5

Введение

Сегодня создание высокоточных устройств навигации на базе микромеханических гироскопов (ММГ) открывает новые возможности в области управления движением объектов в аэрокосмической, робототехнической областях, медицине, а также в развлекательной сфере жизнедеятельности человека. Такие микроустройства имеют ряд неоспоримых преимуществ перед аналогами: сверхмалые габариты и масса, минимальное энергопотребление [1, 2]. Однако достигнутая на сегодняшний день точность ММГ не допускает применения таких устройств в автономных режимах и системах, так как реальные условия работы (вибрация, акустические воздействия, меняющаяся температура) существенно влияют на точностные характеристики подобных гироскопов, и им требуется постоянная коррекция.

Вопрос повышения точностных характеристик гироскопических датчиков приводит к обширному кругу проблем, связанных как с технологическим аспектом (изготовление резонаторов), так и с научно-исследовательскими изысканиями. Анализ и решение задач, связанных с повышением нечувствительности ММГ к реальным условиям работы, – актуальная на сегодняшний день проблема, над которой активно трудятся ученые и инженеры во многих странах [3, 4].

Описание рассматриваемой модели гироскопа

На рис. 1 представлена упрощенная расчетная схема чувствительного элемента рассматриваемого микромеханического гироскопа типа *R-L*.

Рассматривается ММГ, чувствительным элементом которого является диск с закрепленными друг напротив друга на упругих подвесах (пружинах) двумя точечными массами. Диск крепится на упругой ножке к основанию, вращающемуся с произвольной угловой скоростью Ω .

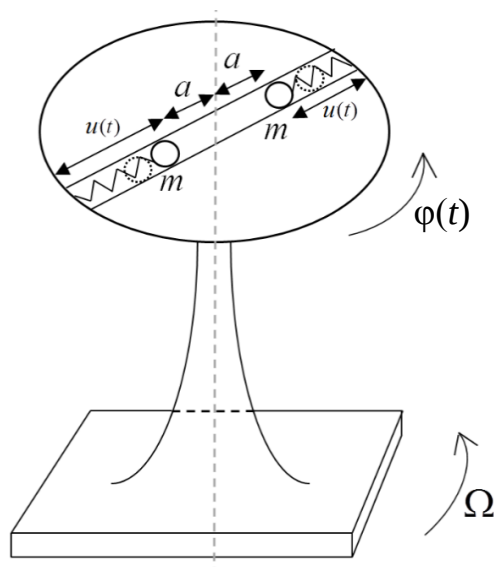


Рис. 1. Расчетная схема чувствительного элемента
Fig. 1. Design scheme of a sensing element

Цель работы – получение уравнений, описывающих движение данной теоретико-механической модели ММГ, представленного на рис. 1, и их качественный анализ.

Уравнения движения

Рассмотрим связанную систему «подвижное основание – упругая ножка – диск – точечная масса». Угловая скорость основания Ω в работе будет рассматриваться как произвольная (по терминологии В.Ф. Журавлёва [5], т.е. Ω соизмеримо меньше собственной частоты колебаний ω_0 , иначе прибор будет неработоспособен). Также стоит отметить, что массу диска в данной постановке задачи считаем пренебрежимо малой величиной.

Кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии вращения диска и кинетической энергии двух масс:

$$T = \frac{1}{2} I (\dot{\phi} + \Omega)^2 + m \left(\dot{u}^2 + (a + u)^2 (\dot{\phi} + \Omega)^2 \right), \quad (1)$$

где I – момент инерции упругой ножки камертона, соединяющей основание гироскопа и диск, Ω – угловая скорость основания, ϕ – угол кручения упругой ножки (малая величина $\phi \ll 1$), m – точечная масса, $u(t)$ – обобщенная координата, которая описывает колебание инерционной массы m в каждый момент времени, $2a$ – расстояние между точечными массами m в резонаторе в состоянии покоя. Дифференцирование по времени далее будем обозначать точкой.

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = \frac{1}{2} C \phi^2 + \frac{1}{2} k u^2 + \frac{1}{2} k u^2 = \frac{1}{2} C \phi^2 + k u^2, \quad (2)$$

где C – жесткость на кручение упругой ножки камертона, k – жесткость пружин, к которым прикреплены точечные массы m .

Лагранжиан системы

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} I (\dot{\phi} + \Omega)^2 + m (\dot{u}^2 + (a + u)^2 (\dot{\phi} + \Omega)^2) - \frac{1}{2} C \phi^2 - k u^2. \quad (3)$$

Для простоты дальнейших вычислений введем параметр $\psi = \psi(t) = u(t)/a \ll 1$ – нормализованная обобщенная координата, где в качестве нормирующего параметра взята величина a . Подставив указанную замену в уравнение (3), получим выражение

$$L = \frac{1}{2} I (\dot{\phi} + \Omega)^2 + m a^2 (\dot{\psi}^2 + (\psi + 1)^2 (\dot{\phi} + \Omega)^2) - \frac{1}{2} C \phi^2 - a^2 k \psi^2. \quad (4)$$

Далее преобразуем (4), оставляя квадратичные слагаемые [6] и слагаемые первого порядка малости. Лагранжиан принимает вид:

$$L = \frac{1}{2} I (\dot{\phi} + \Omega)^2 + m a^2 (\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 + 4 \Omega \dot{\phi} \psi) - \frac{1}{2} C \phi^2 - a^2 k \psi^2. \quad (5)$$

Общий вид уравнений Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} + Q_i, \quad (6)$$

где q_i – обобщенная координата, Q_i – внешние обобщенные силы, которые действуют в направлении обобщенных координат q_i , Φ – диссипативные силы.

Найдем все слагаемые левой части уравнений (6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= I (\dot{\phi} + \Omega) + 2 m a^2 \dot{\phi} + 4 m a^2 \Omega \psi; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \ddot{\phi} (I + 2 m a^2) + 4 m a^2 \Omega \dot{\psi}; \\ \frac{\partial L}{\partial \phi} &= -C \phi; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = 2 m a^2 \dot{\psi}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = 2 m a^2 \ddot{\psi}; \quad \frac{\partial L}{\partial \psi} = 4 m a^2 \Omega \dot{\phi} - 2 a^2 k \psi.$$

В итоге получим систему уравнений движения чувствительного элемента, рассматриваемого ММГ:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + 2 j \Omega \dot{\psi} + \omega_1^2 \phi &= 0; \\ \ddot{\psi} - 2 \Omega \dot{\phi} + \omega_2^2 \psi &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $j = \frac{2 m a^2}{I + 2 a^2 m}$ – безразмерный массово-инерционный параметр системы,

$\omega_1 = \omega = \sqrt{\frac{C}{I + 2 a^2 m}}$ и $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – собственные частоты колебаний упругой ножки камертона и массы на упругом подвесе.

Учтем, что собственные частоты связаны следующим образом: $\omega_2 = \omega + \Delta \omega$, где $\Delta \omega$ – рассогласование частот, далее в задаче считаем, что $|\Delta \omega| \ll \omega$.

Диссипацию, присутствующую в колебательной системе, задаем функцией Релея

$$\Phi = \frac{1}{2} G_1 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} G_2 \dot{\psi}^2, \quad (9)$$

где G_1 – коэффициент, который определяет энергию рассеивания при скручивании упругой ножки камертона; G_2 – коэффициент, учитывающий рассеивание энергии при движении инерционной массы m .

С учетом связи собственных частот и функции Релея (9) перепишем систему (8):

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} + 2j\Omega\dot{\psi} + \omega^2\phi &= -2\gamma_1\omega\dot{\phi}; \\ \ddot{\psi} - 2\Omega\dot{\phi} + \omega^2\psi &= -2\gamma_2\omega\dot{\psi} - 2\omega\Delta\omega\psi,\end{aligned}\quad (10)$$

где γ_1 и γ_2 – безразмерные коэффициенты затухания.

Введем замену переменных

$$\phi = x\sqrt{j}, \quad \psi = y. \quad (11)$$

В новых переменных система уравнений (10) приняла вид:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2\sqrt{j}\Omega\dot{y} + \omega^2x &= -2\gamma_1\omega\dot{x}; \\ \ddot{y} - 2\sqrt{j}\Omega\dot{x} + \omega^2y &= -2\gamma_2\omega\dot{y} - 2\omega\Delta\omega y.\end{aligned}\quad (12)$$

Уравнения (12) описывают линейные свободные колебания рассматриваемой механической системы на подвижном основании, вращающемся с произвольной скоростью Ω .

С целью удобства анализа полученных уравнений введем замену в правой части (12):

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2\sqrt{j}\Omega\dot{y} + \omega^2x &= F_1; \\ \ddot{y} - 2\sqrt{j}\Omega\dot{x} + \omega^2y &= F_2,\end{aligned}\quad (13)$$

где

$$F_1 = -2\gamma_1\omega\dot{x}; \quad F_2 = -2\gamma_2\omega\dot{y} - 2\omega\Delta\omega y. \quad (14)$$

Анализ динамики чувствительного элемента

Решение системы (13) будем искать, основываясь на методике осреднения Крылова–Боголюбова [6].

Общий вид решения в переменных амплитуда–фаза имеет вид:

$$\begin{aligned}x &= A(t)\cos(\omega_1 t + \alpha(t)) + B(t)\cos(\omega_2 t + \beta(t)); \\ y &= A(t)\sin(\omega_1 t + \alpha(t)) + B(t)\sin(\omega_2 t + \beta(t)).\end{aligned}\quad (15)$$

Найдем решение однородной системы уравнений

$$\begin{aligned}\ddot{x}_0 + 2\sqrt{j}\Omega\dot{y}_0 + \omega^2x_0 &= 0; \\ \ddot{y}_0 - 2\sqrt{j}\Omega\dot{x}_0 + \omega^2y_0 &= 0,\end{aligned}\quad (16)$$

в виде:

$$\begin{aligned}x_0 &= A_0\cos(\omega_2 t + \alpha_0) + B_0\cos(\omega_2 t + \beta_0); \\ y_0 &= A_0\sin(\omega_1 t + \alpha_0) + B_0\sin(\omega_2 t + \beta_0),\end{aligned}\quad (17)$$

где A_0 , B_0 , α_0 и β_0 – константы, а частоты ω_1 и ω_2 – корни однородной системы (16)

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sqrt{j}\Omega + \sqrt{\omega^2 + j\Omega^2}, \\ \omega_2 &= \sqrt{j}\Omega - \sqrt{\omega^2 + j\Omega^2}.\end{aligned}\quad (18)$$

Так как выше было сказано, что угловая скорость основания – величина произвольная, но для работоспособности прибора должно выполняться условие $|\Omega| \ll |\omega|$, корни однородного уравнения примут вид:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sqrt{j}\Omega + \omega; \\ \omega_2 &= \sqrt{j}\Omega - \omega.\end{aligned}\tag{19}$$

Далее будем искать непосредственно решение системы (13) в виде (15), где $A(t)$, $B(t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ – медленные функции времени, для сокращения объемов дальнейших выкладок опустим в обозначениях амплитуд и фаз зависимость от времени и введем замены

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \omega_1 t + \alpha; \\ \lambda_2 &= \omega_2 t + \beta.\end{aligned}\tag{20}$$

Найдем обобщенные скорости, продифференцировав (15) по времени:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega_1 A \sin \lambda_1 - \omega_2 B \sin \lambda_2; \\ \dot{y} &= \omega_1 A \cos \lambda_1 + \omega_2 B \cos \lambda_2.\end{aligned}\tag{21}$$

Для системы (21) запишем соответствующее уравнение совместности:

$$\begin{aligned}\dot{A} \cos \lambda_1 - A \dot{\alpha} \sin \lambda_1 + \dot{B} \cos \lambda_2 - B \dot{\beta} \sin \lambda_2 &= 0; \\ \dot{A} \sin \lambda_1 + A \dot{\alpha} \cos \lambda_1 + \dot{B} \sin \lambda_2 + B \dot{\beta} \cos \lambda_2 &= 0.\end{aligned}\tag{22}$$

Продифференцируем по времени еще раз уравнения (21) для нахождения обобщенных ускорений:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\dot{A} \omega_1 \sin \lambda_1 - A \omega_1 (\dot{\alpha} + \omega_1) \cos \lambda_1 - \dot{B} \omega_2 \sin \lambda_2 - B \omega_2 (\dot{\beta} + \omega_2) \cos \lambda_2; \\ \ddot{y} &= \dot{A} \omega_1 \cos \lambda_1 - A \omega_1 (\dot{\alpha} + \omega_1) \sin \lambda_1 + \dot{B} \omega_2 \cos \lambda_2 - B \omega_2 (\dot{\beta} + \omega_2) \sin \lambda_2.\end{aligned}\tag{23}$$

Подставим полученные обобщенные скорости (21) и обобщенные ускорения (23) в исходную систему уравнений (13). Преобразовав полученные выражения, совместно с уравнениями совместности запишем следующую систему четырех дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}-\dot{A} \omega_1 \sin \lambda_1 - A \omega_1 \dot{\alpha} \cos \lambda_1 - \dot{B} \omega_2 \sin \lambda_2 - B \omega_2 \dot{\beta} \cos \lambda_2 &= F_1; \\ \dot{A} \omega_1 \cos \lambda_1 - A \omega_1 \dot{\alpha} \sin \lambda_1 + \dot{B} \omega_2 \cos \lambda_2 - B \omega_2 \dot{\beta} \sin \lambda_2 &= F_2; \\ \dot{A} \cos \lambda_1 - A \dot{\alpha} \sin \lambda_1 + \dot{B} \cos \lambda_2 - B \dot{\beta} \sin \lambda_2 &= 0; \\ \dot{A} \sin \lambda_1 + A \dot{\alpha} \cos \lambda_1 + \dot{B} \sin \lambda_2 + B \dot{\beta} \cos \lambda_2 &= 0.\end{aligned}\tag{24}$$

Теперь проведем следующие преобразования:

- умножим четвертое уравнение в (24) на ω_2 и сложим с первым уравнением;
- умножим третье уравнение в (24) на ω_2 и вычтем из второго уравнения;
- умножим четвертое уравнение в (24) на ω_1 и сложим с первым уравнением;
- умножим третье уравнение в (24) на ω_1 и вычтем из него второе уравнение.

В итоге система (24) примет вид:

$$\begin{aligned}-\dot{A}(\omega_1 - \omega_2) \sin \lambda_1 - A \dot{\alpha}(\omega_1 - \omega_2) \cos \lambda_1 &= F_1; \\ \dot{A}(\omega_1 - \omega_2) \cos \lambda_1 - A \dot{\alpha}(\omega_1 - \omega_2) \sin \lambda_1 &= F_2; \\ \dot{B}(\omega_1 - \omega_2) \sin \lambda_2 + B \dot{\beta}(\omega_1 - \omega_2) \cos \lambda_2 &= F_1; \\ \dot{B}(\omega_1 - \omega_2) \cos \lambda_2 - B \dot{\beta}(\omega_1 - \omega_2) \sin \lambda_2 &= -F_2.\end{aligned}\tag{25}$$

Теперь разрешим полученную систему уравнений (25) относительно $\dot{A}$, $\dot{\alpha}$, $\dot{B}$, $\dot{\beta}$, проведя следующие преобразования, а также вернемся от замен λ_1 и λ_2 к исходным выражениям:

- умножим второе уравнение в (25) на $\cos \lambda_1$, а первое на $\sin \lambda_1$, и вычтем одно из другого;
- умножим второе уравнение в (25) на $\sin \lambda_1$, а первое на $\cos \lambda_1$, и сложим их;
- умножим четвертое уравнение в (25) на $\cos \lambda_2$, а третье на $\sin \lambda_2$, и сложим их;
- умножим четвертое уравнение в (25) на $\sin \lambda_2$, а третье на $\cos \lambda_2$, и вычтем одно из другого.

В итоге получена система уравнений для медленных амплитуд и фаз:

$$\begin{aligned} -\dot{A} &= \frac{1}{2\omega} (F_1 \sin(\omega_1 t + \alpha) - F_2 \cos(\omega_1 t + \alpha)); \\ -A\dot{\alpha} &= \frac{1}{2\omega} (F_1 \cos(\omega_1 t + \alpha) + F_2 \sin(\omega_1 t + \alpha)); \\ \dot{B} &= \frac{1}{2\omega} (F_1 \sin(\omega_2 t + \beta) - F_2 \cos(\omega_2 t + \beta)); \\ B\dot{\beta} &= \frac{1}{2\omega} (F_1 \cos(\omega_2 t + \beta) + F_2 \sin(\omega_2 t + \beta)), \end{aligned} \quad (26)$$

где F_1 и F_2 равны с учетом (15) и (21)

$$\begin{aligned} F_1 &= -2\gamma_1 \omega (-\omega_1 A \sin(\omega_1 t + \alpha) - \omega_2 B \sin(\omega_2 t + \beta)); \\ F_2 &= -2\gamma_2 \omega (\omega_1 A \cos(\omega_1 t + \alpha) + \omega_2 B \cos(\omega_2 t + \beta)) - \\ &\quad - 2\omega \Delta \omega (A \sin(\omega_1 t + \alpha) + B \sin(\omega_2 t + \beta)). \end{aligned} \quad (27)$$

Так как переменные $A(t)$, $B(t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ – медленные функции времени, можно применить процедуру осреднения Крылова–Боголюбова [6]. Воспользуемся общей формулой

$$\langle f(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) d\tau. \quad (28)$$

В результате осреднения правых частей системы (24) получим следующие выражения для $\dot{A}$, $\dot{\alpha}$, $\dot{B}$, $\dot{\beta}$:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\frac{\gamma}{2} (\omega + \sqrt{j}\Omega) A; \quad \dot{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{2}; \\ \dot{B} &= -\frac{\gamma}{2} (\omega - \sqrt{j}\Omega) B; \quad \dot{\beta} = -\frac{\Delta\omega}{2}, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.

Решение системы (29) имеет вид:

$$\begin{aligned} A &= A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}(\omega + \sqrt{j}\Omega)t}; \quad B = B_0 e^{-\frac{\gamma}{2}(\omega - \sqrt{j}\Omega)t}; \\ \alpha - \alpha_0 &= \frac{\Delta\omega}{2} t; \quad \beta - \beta_0 = -\frac{\Delta\omega}{2} t, \end{aligned} \quad (30)$$

где A_0 , B_0 , α_0 , β_0 – начальные условия.

Анализировать поведение чувствительного элемента лучше всего в торoidalных координатах (r, k, θ) [5], где θ – угол ориентации волновой картины

(угол прецессии); r и k – нормализованные амплитуды основной и квадратурной волн колебаний, главные полуоси эллипса (рис. 2, а).

Вид решения в орбитальных координатах имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} X &= r \cos \theta \cos(\omega t + \chi) - k \sin \theta \sin(\omega t + \chi); \\ Y &= r \sin \theta \cos(\omega t + \chi) + k \cos \theta \sin(\omega t + \chi), \end{aligned} \quad (31)$$

где χ – фаза, которая характеризует изменение частоты колебаний и задает положение фазовой точки в начальный момент времени.

Запишем уравнения перехода от переменных амплитуда–фаза к переменным Ван-дер-Поля p_1, p_2, q_1, q_2 :

$$\begin{aligned} p_1 &= -A \sin(\sqrt{j}\Omega + \alpha) + B \sin(\sqrt{j}\Omega + \beta); \\ q_1 &= A \cos(\sqrt{j}\Omega + \alpha) + B \cos(\sqrt{j}\Omega + \beta); \\ p_2 &= A \cos(\sqrt{j}\Omega + \alpha) - B \cos(\sqrt{j}\Omega + \beta); \\ q_2 &= A \sin(\sqrt{j}\Omega + \alpha) + B \sin(\sqrt{j}\Omega + \beta). \end{aligned} \quad (32)$$

В таком случае можно записать выражение для угла прецессии

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\theta &= \frac{2(p_1 p_2 + q_1 q_2)}{p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2}, \\ \theta &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2(p_1 p_2 + q_1 q_2)}{p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2} \right) = \frac{1}{2} (2\sqrt{j}\Omega t + \alpha + \beta) = \sqrt{j}\Omega t + \tilde{\theta} = \sqrt{j}\Omega t, \end{aligned} \quad (33)$$

где $\tilde{\theta} = \alpha + \beta$ – дополнительная медленная прецессия волновой картины, определяющая величину ухода прибора.

Выражение для фазы χ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\chi &= \frac{2(q_1 p_1 + q_2 p_2)}{p_1^2 - q_1^2 + p_2^2 - q_2^2}, \\ \chi &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2(q_1 p_1 + q_2 p_2)}{p_1^2 - q_1^2 + p_2^2 - q_2^2} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin(\alpha - \beta)t}{\cos(\alpha - \beta)t} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \Delta\omega t}{\cos \Delta\omega t} \right) = \frac{\Delta\omega t}{2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Перепишем теперь выражения (32) через орбитальные координаты:

$$\begin{aligned} p_1 &= -r \cos \theta \sin \chi - k \sin \theta \cos \chi; \\ q_1 &= r \cos \theta \cos \chi - k \sin \theta \sin \chi; \\ p_2 &= -r \sin \theta \sin \chi + k \cos \theta \cos \chi; \\ q_2 &= r \sin \theta \cos \chi + k \cos \theta \sin \chi. \end{aligned} \quad (35)$$

Полная энергия колебаний E (сумма амплитуд, возведенных в квадрат, по каждой из обобщенных координат) в таком случае записывается в следующем виде:

$$E = p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2 = r^2 + k^2. \quad (36)$$

Момент количества движения X , который определяет «стоячую волну» колебаний (она возникает в том случае, когда $X = 0$), равен

$$X = 2(p_2 q_1 - p_1 q_2) = 2rk. \quad (37)$$

Далее проведем следующую цепочку преобразований для нахождения полуосей r и k ($r > k$):

$$\begin{aligned} E + X &= r^2 + k^2 + 2rk = (r+k)^2; \quad E - X = (r-k)^2; \\ r + k &= \sqrt{E+X}; \quad r - k = \sqrt{E-X}, \end{aligned} \quad (38)$$

в итоге

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{E+X} + \sqrt{E-X}; \\ k &= \sqrt{E+X} - \sqrt{E-X}. \end{aligned} \quad (39)$$

После всех подстановок и преобразований получим следующие выражения [7]:

$$\begin{aligned} r &= A + B; \\ k &= A - B; \\ \theta &= \sqrt{j\Omega}t; \\ \chi &= \frac{1}{2}(\alpha - \beta)t = \frac{\Delta\omega t}{2}, \end{aligned} \quad (40)$$

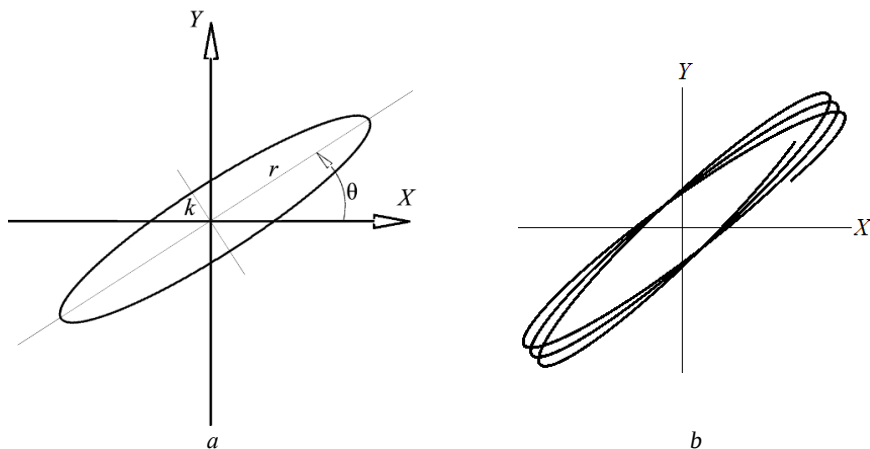


Рис. 2. Траектории движения фазовой точки на координатной плоскости в случаях неподвижного (а) и подвижного (б) основания

Fig. 2. Trajectories of the phase point motion on a coordinate plane in the case of the (a) fixed and (b) moving base

На подвижном основании фазовая точка описывает фигуру Лиссажу (рис. 2, б), которая со временем «заметет» всю координатную плоскость.

Из анализа полученных зависимостей следует, что на подвижном основании при линейной постановке задачи возникает расщепление частот. На основании полученных выражений (30) можно утверждать, что в режиме свободных колебаний значения фаз α и β никак не влияют на значение угла прецессии θ .

Заключение

В представленной работе был проанализирован гироскоп R-L типа (см. рис. 1) с резонатором в виде диска, на котором закреплены на упругих подвесах две то-

чечные массы и который, в свою очередь, закреплен на подвижном основании, вращающемся с произвольной угловой скоростью, при помощи упругой ножки. Построена теоретико-механической модель такого гироскопа при помощи формализма Лагранжа и метода усреднения Крылова–Боголюбова. В конечном итоге был произведен переход к орбитальным координатам и проведен анализ полученных зависимостей, который показал, что в режиме свободных колебаний при линейной постановке задачи значения фаз α и β никак не влияют на изменение угла прецессии θ .

Список источников

1. Матвеев В.В., Распопов В.Я. Приборы и системы ориентации, стабилизации и навигации на МЭМС-датчиках. Тула : Изд-во ТулГУ, 2017. 225 с.
2. Mammadov A.Z. The model of inertial navigation system on base of mems sensors for unmanned aerial vehicles // Кронос. 2019. № 10 (37). С. 24–29.
3. Матвеев В.В., Погорелов М.Г. Анализ погрешностей микромеханических гироскопов методом вариаций Аллана // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2015. Вып. 3. С. 123–135.
4. Baranova E.A., Evstifeev M.I., Eliseev D.H. Simulation of Translational Vibrations Effect on Torque-to-Balance RR-Type MEMS Gyroscope // Gyroscopy and Navigation. 2018. Vol. 9 (1). P. 50–56.
5. Журавлев В.Ф. Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1997. № 6. С. 27–35.
6. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М. : Наука, 1974. 503 с.
7. Меркурьев И.В., Подалков В.В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. М. : Физматлит, 2009. 228 с.

References

1. Matveev V.V., Raspopov V.Ya. (2017) *Pribory i sistemy orientatsii, stabilizatsii i navigatsii na MEMS-datchikakh* [Devices and systems of orientation, stabilization, and navigation based on MEMS sensors]. Tula: Tula State University Publishing House.
2. Mammadov A.Z. (2019) The model of inertial navigation system on base of mems sensors for unmanned aerial vehicles. *Kronos*. 10(37). pp. 24–29.
3. Matveev V.V., Pogorelov M.G. (2015) Analiz pogreshnostey mikromekhanicheskikh giroskopov metodom variatsiy Allana [Error analysis of micromechanical gyroscopes by Allan variance]. *Izvestiya TulGU – Bulletin of Tula State University*. 3. pp. 123–135.
4. Baranova E.A., Evstifeev M.I., Eliseev D.H. (2018) Simulation of translational vibrations effect on torque-to-balance RR-type MEMS gyroscope. *Gyroscopy and Navigation*. 9(1). pp. 50–56. doi: 10.1134/S2075108718010029
5. Zhuravlev V.F. (1997) Upravlyaemyy mayatnik Fuko kak model' odnogo klassa svobodnykh giroskopov [A controlled Foucault pendulum as a model of a class of free gyros]. *Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*. 6. pp. 27–35.
6. Bogolyubov N.N., Mitropol'skiy Yu.A. (1974) *Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow: Nauka.
7. Merkuriev I.V., Podalkov V.V. (2009) *Dinamika mikromekhanicheskogo i volnovogo tverdotel'nogo giroskopov* [Dynamics of micromechanical and wave solid-state gyroscopes]. Moscow: Fizmatlit.

Сведения об авторах:

Антонов Егор Александрович – кандидат технических наук, начальник бригады ПАО «Туполев», Москва, Россия. E-mail: Ve.no.m@yandex.ru

Грибова Ольга Валерьевна – старший преподаватель кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин Национального исследовательского университета «МЭИ», Москва, Россия. E-mail: gribovaov@mail.ru

Information about the authors:

Antonov Egor A. (Candidate of Technical Sciences, Joint Stock Company “Tupolev”, Moscow, Russian Federation). E-mail: Ve.no.m@yandex.ru.

Gribova Olga V. (Senior Lecturer, National Research University “Moscow Power Engineering Institute”, Moscow, Russian Federation). E-mail: gribovaov@mail.ru

Статья поступила в редакцию 27.12.2021; принята к публикации 31.03.2023

The article was submitted 27.12.2021; accepted for publication 31.03.2023

Научная статья

УДК 536.3 + 629.783

doi: 10.17223/19988621/82/6

Тепловое состояние малого спутника при различной плотности расположения электронных плат

Сергей Викторович Белов¹, Алексей Викторович Бельков²,
Андрей Петрович Жуков³, Михаил Сергеевич Павлов⁴,
Сергей Васильевич Пономарев⁵

1, 2, 3, 4, 5 Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ belovsv@niipmm.tsu.ru

² aleksei-belkov@niipmm.tsu.ru

³ zh@niipmm.tsu.ru

⁴ mcpavlov@niipmm.tsu.ru

⁵ psv@niipmm.tsu.ru

Аннотация. Малые космические аппараты CubeSat не имеют активных систем терморегулирования, однако для сохранения работоспособности имеющихся радиоэлектронных компонент необходимо поддерживать их температуру в определенном интервале. В данной работе рассмотрено влияние на тепловое состояние космического аппарата 1U CubeSat тепловыделения на платах радиоэлектронного оборудования при различной плотности их расположения (различном количестве плат). Учитывались поглощенное излучение от внешних источников, излучение с внешних поверхностей корпуса CubeSat, тепловыделение на платах, перенос излучения внутри корпуса.

Ключевые слова: CubeSat, космический аппарат, тепловое состояние, излучение, форм-фактор

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Программы развития ТГУ («Приоритет-2030»).

Для цитирования: Белов С.В., Бельков А.В., Жуков А.П., Павлов М.С., Пономарев С.В. Тепловое состояние малого спутника при различной плотности расположения электронных плат // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 82. С. 66–81. doi: 10.17223/19988621/82/6

Original article

A thermal state of a small satellite at various packing density of electronic circuit boards

Belov Sergey V.¹, Bel'kov Aleksey V.², Zhukov Andrey P.³,
Pavlov Mikhail S.⁴, Ponomarev Sergey V.⁵

1, 2, 3, 4, 5 Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ belovsv@niipmm.tsu.ru

² aleksei-belkov@niipmm.tsu.ru

³ zh@niipmm.tsu.ru

⁴ mcpavlov@niipmm.tsu.ru

⁵ psv@niipmm.tsu.ru

Abstract. To reduce the cost of CubeSat satellites, an industrial level of performance for radio-electronic components designed for ground operations is applied. A specific temperature range should be maintained for such electronic components to operate under space flight conditions. Since the CubeSat spacecraft does not have an active temperature regulation system, the thermal conditions are determined by the balance between inactive absorbed and radiated energy flows, including internal heat release. This paper considers the effect of heat release from circuit boards of different packing density in the electronic equipment on the 1U CubeSat thermal conditions. Both the absorbed radiation from external sources, the radiation from the CubeSat external surfaces, the inner heat release, and the re-radiation between the surfaces within the spacecraft are taken into account. The formulated problem is solved numerically. The results show the effect of circuit board packing density on the amplitudes of temperature oscillations and on the average temperatures of satellite structural elements.

Keywords: CubeSat, spacecraft, thermal conditions, radiation, form factor

Acknowledgments: This work was supported by the Tomsk State University Development Program ("Priority 2030").

For citation: Belov, S.V., Bel'kov, A.V., Zhukov, A.P., Pavlov, M.S., Ponomarev, S.V. (2023) A thermal state of a small satellite at various packing density of electronic circuit boards. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 82. pp. 66–81. doi: 10.17223/19988621/82/6

Введение

CubeSat – стандарт малых космических аппаратов (КА), разработанный в 1999 г. Калифорнийским политехническим и Стэнфордским университетами [1]. Изначально спутники CubeSat предназначались для учебных задач – обучения студентов в процессе создания реального КА и работы с ним во время космического полета. Применение данного стандарта позволило снизить стоимость проектирования, изготовления и вывода на орбиту КА. Стандарт регламентирует геометрию корпусов спутников типа CubeSat на основе базового модуля кубической формы (размеры $100 \times 100 \times 100$ мм). КА с таким корпусом должен иметь массу и стоимость не более 1.33 кг и 1 000 \$ соответственно [2]. При масштабировании базового модуля может быть получен корпус с объемом, достаточным для обеспечения требуемой функциональности КА. Радиоэлектронное содержание модуля CubeSat включает обычные промышленные компоненты, причем электроника космического исполнения не используется [3]. Так, в спутнике PhoneSat типа CubeSat в качестве бортового компьютера был использован смартфон [4]. В настоящее время уровень развития КА типа CubeSat позволяет решать задачи, связанные с передачей информации, дистанционным зондированием Земли, биологическими исследованиями, изучением космического излучения [2, 5, 6].

В основном стандарт CubeSat задает геометрические параметры корпуса КА, в котором располагаются платы с электронными компонентами. Базовый модуль

CubeSat, показанный на рис. 1, имеет объем корпуса около 1 дм³. Модуль включает рельсы 1 сечением 8.5 × 8.5 мм, которые вместе соединительными элементами 2 образуют силовой каркас. При выведении КА на орбиту рельсы скользят по направляющим пускового контейнера, из которого выталкивается КА. Длина рельсов равна 113.5 мм, они выступают за границы корпуса на 0.5–7.0 мм. Платы 4 соединены с корпусом элементами крепления 3. Стенки корпуса 5 крепятся к силовому каркасу. В свою очередь, на них размещаются панели солнечных батарей. Начало системы координат, связанной с модулем, располагается в геометрическом центре куба с осью Z, направленной параллельно рельсам.

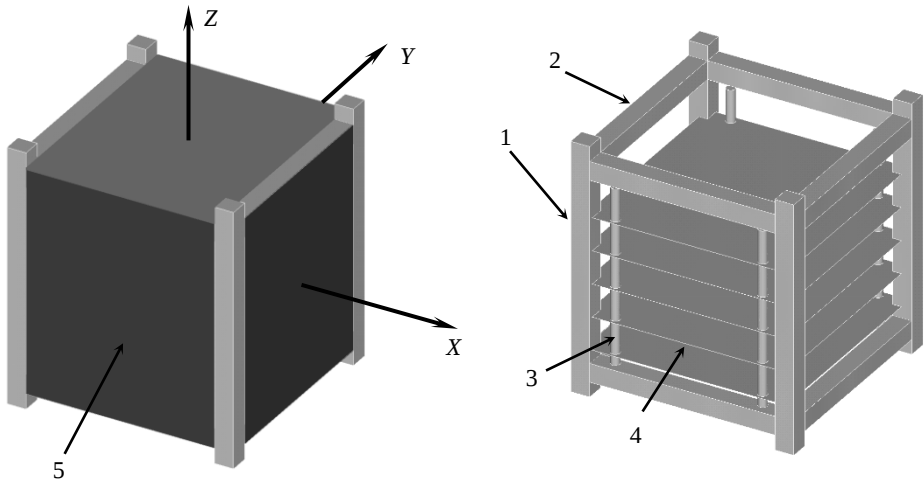


Рис. 1. Схема базового модуля CubeSat (форм-фактор 1U):

1 – рельс; 2 – соединительный элемент каркаса; 3 – элемент крепления плат;
4 – плата с электронными компонентами; 5 – стенка корпуса

Fig. 1. Design of a CubeSat core module (1U form factor): (1) rail, (2) connecting frame element, (3) bracing element for circuit boards, (4) circuit board with electronic components, and (5) frame wall

Корпусу базового модуля присвоен форм-фактор 1U. При масштабировании корпуса в 2, 3 и более раз соответственно вводятся форм-факторы 2U, 3U и т.д. С увеличением форм-фактора расширяются функциональные возможности КА, появляются разворачиваемые элементы конструкции, системы ориентации, сложные научные приборы [7–13]. Геометрические характеристики корпусов форм-факторов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Размеры модулей CubeSat

Форм-фактор	1U	2U	3U	6U	12U
Размер по X, мм	100.0	100.0	100.0	100.0	226.3
Размер по Y, мм	100.0	100.0	100.0	226.3	226.3
Размер по Z, мм (длина рельса)	135.5	227.0	340.5	366.0	366.0

Как правило, CubeSat КА выводят на низкие околоземные орбиты с расчетным сроком активного существования, не превышающим одного года. В большинстве случаев КА не имеют конструктивной защиты электронной аппаратуры от космической радиации. Однако важнейшей проблемой для таких КА является обеспечение теплового режима электронных компонент. Несмотря на некоторые различия в имеющихся данных [14–16], эксплуатационный температурный диапазон для электронных компонент определяется в пределах 233–358 К (–40.15–84.85°C), для аккумуляторных батарей 253–333 К (–20.15–59.85°C). Малые размеры корпуса спутника не позволяют размещать в нем активные системы терморегулирования. Поэтому тепловой баланс на заданном температурном уровне может поддерживаться: пассивными методами терморегулирования (подбор характеристик отражения и поглощения поверхностей корпуса КА) [16, 17]; режимом работы электронного оборудования; подогревом аккумуляторных батарей [14, 18].

Необходимо отметить, что размеры корпуса КА определяют площадь панелей солнечных батарей, размещенных на его внешних поверхностях. Они, особенно для КА с форм-фактором 1U, представляют весьма ограниченный источник электрической энергии. Чтобы увеличить доступную электрическую мощность, на КА с форм-фактором 3U и выше предлагается использовать дополнительные разворачиваемые панели солнечных батарей [7, 19, 20]. Полученная электроэнергия используется для питания радиоэлектронных устройств КА, вызывая нагрев плат, и накапливается в аккумуляторной батарее. При попадании КА в область тени электропитание аппаратуры обеспечивают аккумуляторы. Поэтому распределение температуры по элементам конструкции КА будет определяться не только падающим излучением от внешних источников, но и тепловыделением внутри корпуса КА. В соответствии со стандартом PC/104 [21] расстояние между платами устанавливается равным 15 мм (рис. 2, а), в то же время в предложениях по созданию российского аналога стандарта CubeSat [22] данный параметр уменьшен до 6 мм (рис. 2, б).

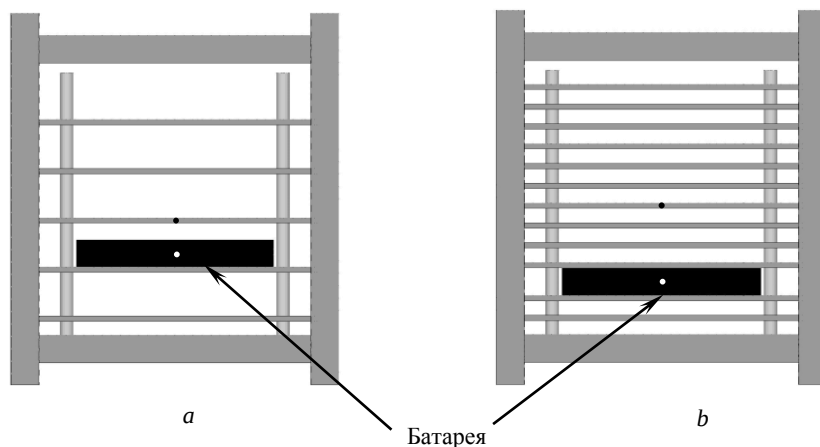


Рис. 2. Расположение плат и аккумуляторной батареи при межплатных расстояниях: 15 мм (а), 6 мм (б)

Fig. 2. Arrangement of circuit boards and accumulator battery at the following board-to-board spaces: (a) 15 and (b) 6 mm

Представляет интерес рассмотреть влияние плотности размещения плат с тепловыделяющими электронными компонентами на тепловое состояние CubeSat КА на примере корпуса с форм-фактором 1U.

Постановка задачи

Рассматривается КА (см. рис. 1), движущийся по круговой орбите в плоскости земного экватора на высоте 300 км. Ось Z системы координат КА направлена перпендикулярно плоскости экватора, ось Y направлена к центру Земли. КА занимает объем V , имеющий сложную топологию и заполненный сплошной средой. Пустоты внутри корпуса КА объему V не принадлежат. Объем V ограничен внешними (S_{out}) и внутренними (S_{in}) поверхностями: первые облучаются внешними источниками излучения; вторые взаимодействуют с излучением от внутренних источников. Тепловое состояние КА в момент времени t описывается нестационарным уравнением теплопроводности

$$c\rho T_{,t} = k\Delta T + q_v \quad (1)$$

с начальными условиями

$$T(t = 0) = T_0, (x, y, z) \in V, \quad (2)$$

и с граничными условиями

$$k \cdot T_{,n} = q_{rad(out)}, (x, y, z) \in S_{out}, \quad (3)$$

$$k \cdot T_{,n} = q_{rad(in)}, (x, y, z) \in S_{in}, \quad (4)$$

где $T = T(t, x, y, z)$ – температура материала КА в момент времени t в точке с координатами x, y, z ; $c = c(x, y, z)$, $\rho = \rho(x, y, z)$ и $k = k(x, y, z)$ – удельная теплоемкость, плотность и теплопроводность сплошной среды; $q_v = q_v(x, y, z)$ – плотность внутренних тепловых источников; $q_{rad(out)}$ и $q_{rad(in)}$ – плотности потоков излучения от внешних и внутренних источников, поглощенных свободными поверхностями. Распределения теплофизических параметров c , ρ и k в объеме V конкретизируются на этапе численного решения в соответствии с характеристиками материалов конструктивных элементов КА.

Внутренними источниками излучения являются поверхности, находящиеся внутри корпуса, в том числе и поверхности стенок корпуса, чьи нормали направлены внутрь корпуса. Правая часть выражения (4) является плотностью результирующего потока излучения к поверхности S_{in} в точке (x, y, z) . Этот поток представляет собой разность между поглощенным поверхностью потоком энергии и излученным потоком энергии.

Расчет теплообмена излучением внутри корпуса КА с учетом многократного поглощения и отражения является очень сложной задачей. Поэтому в данной работе используется широко распространенный подход [23], при котором поверхности будут условно считаться диффузно-серыми. Для таких поверхностей коэффициенты излучения ε и поглощения α полагаются равными.

Если представить S_{in} в виде совокупности I диффузно-серых поверхностей $S_i = \sum_i S_i$, образующих замкнутую область, то плотность потока излучения ψ_i , теряемого поверхностью S_j , определяется из решения системы уравнений [23]

$$\sum_{i=1}^I \left(\frac{\delta_{ji} - \Phi_{ji}}{\varepsilon_i} - \Phi_{ji} \frac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i} \right) \psi_i = \sum_{i=1}^I (\delta_{ji} - \Phi_{ji}) \sigma_0 T_i^4, \quad (5)$$

где Φ_{ij} – фактор видимости – доля полной излученной поверхностью i энергии, попадающая на поверхность j , $\Phi_{ij} = \frac{1}{S_i} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\cos \beta_i \cos \beta_j}{\pi R^2} dS_i dS_j$ (рис. 3), ε_i – коэффициент излучения поверхности S_i ; σ_0 – постоянная Стефана-Больцмана; T_i – температура поверхности S_i . Тогда для точки (x_i, y_i, z_i) , которая является центром поверхности S_i , плотность потока энергии $q_{rad(in)}$ определяется как

$$q_{rad(in)}(x_i, y_i, z_i) = -\psi_i.$$

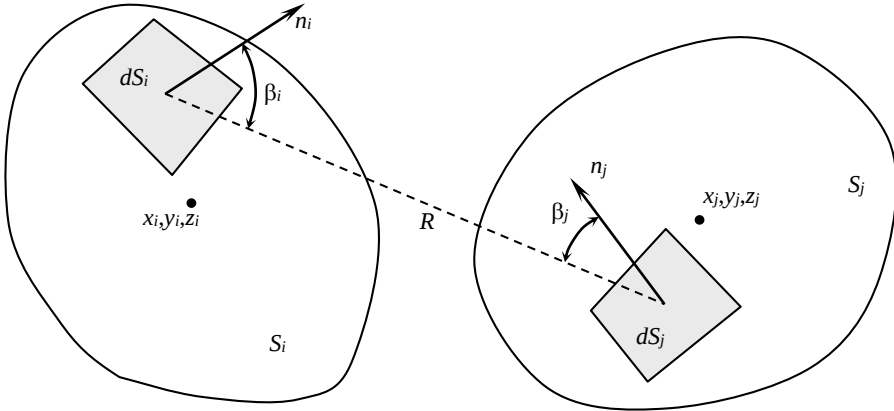


Рис. 3. Параметры для определения фактора видимости поверхностей
Fig. 3. Parameters for determining the surface view factor

Величина $q_{rad(out)}$ из правой части уравнения (3) определяется излучением Солнца (q_{sun}), отражением солнечного излучения от Земли (q_{alb}), тепловым излучением Земли (q_{earth}), собственным излучением КА (q_{sat}),

$$q_{rad(out)} = q_{sun} + q_{alb} + q_{earth} - q_{sat}. \quad (6)$$

Выражение для q_{sun} имеет вид:

$$q_{sun} = \alpha_{out} Q_{sun} (\bar{n} \cdot \bar{n}_{sun}) \varphi,$$

где Q_{sun} – Солнечная постоянная, 1 367 Вт/м²; $\bar{n}$ – вектор нормали к внешней поверхности корпуса КА; α_{out} – коэффициент поглощения внешней поверхности корпуса КА; $\bar{n}_{sun}$ – вектор, направленный к Солнцу; φ – параметр, выражающий затенение поверхности (затенение $\varphi = 0$, нет затенения $\varphi = 1$).

Для отраженного излучения

$$q_{alb} = \alpha_{out} Q_{sun} \Phi_{sat-earth} b,$$

где $\Phi_{sat-earth}$ – фактор видимости; b – коэффициент альбедо, $b = 0.3$.

Поток теплового излучения Земли

$$q_{earth} = \alpha_{out} Q_{earth} \Phi_{sat-earth},$$

где Q_{earth} – плотность инфракрасного излучения Земли, 237 Вт/м².

Собственное излучение КА представляется в виде:

$$q_{sat} = \sigma_0 (\varepsilon_{out} T^4 - \alpha_{out} T_{\infty}^4),$$

где T_{∞} – температура излучения открытого космоса, 2.7 К, ε_{out} – коэффициент излучения внешней поверхности корпуса КА.

Граничные условия дополняются следующими допущениями:

- влияние аэродинамических факторов на тепловое состояние КА не учитывается;
- платы 4 и стенки корпуса 5 не имеют теплового контакта с рельсами 1 (см. рис. 1);
- остальные части конструкции КА соединены между собой плотно, так что в местах соединения не вносится дополнительного теплового сопротивления.

Свойства материалов, тепловая мощность, параметры геометрической и конечно-элементной моделей

Задача (2)–(4) решалась численно, методом конечных элементов. Факторы видимости Φ_{ij} в выражении (5), необходимые для задания граничных условий (4), вычислялись на основе метода Монте-Карло [24], полагая, что энергия с площадки i излучается посредством некоторого количества случайно ориентированных лучей, где каждый луч переносит равное количество энергии. При этом только часть лучей на своем пути встретится с поверхностью j . Для решения поставленной задачи использовался программный пакет NX. В данном программном пакете реализованы как процедура решения уравнения теплопроводности, так и методы вычисления правых частей в выражениях (3) и (4) и факторов видимости.

В табл. 2 приведены необходимые термические свойства материалов и свободных поверхностей. Следует отметить, что литературные источники показывают значительные различия в значениях данных характеристик [24]. Поэтому в табл. 2 во многих случаях приведены усредненные величины.

Таблица 2

Термические свойства материалов и поверхностей

Часть конструкции КА	Коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К)	Удельная теплоемкость, Дж/(кг·К)	Плотность, кг/м ³	Коэффициент излучения	Коэффициент поглощения
Корпус [25], [26]	140.0	948.0	2 810.0	0.4	0.4
Солнечная батарея [27]	45.5	327.0	6 250.0	0.85	0.91
Электронная плата [25]	0.64	975.0	2 120.0	0.22	0.85
Батарея [25]	23.0	1 110.0	2 247.0	0.7	0.85

Для построения геометрической модели КА, необходимой для создания соответствующей конечно-элементной модели, использовались вышеприведенные размеры корпуса и рельсов. Другие геометрические параметры брались из литературных источников или из измерений физических аналогов, доступных авторам данной работы. Толщина стенок корпуса 5 (см. рис. 1) – 1.27 мм, на их внешних поверхностях находится фотоэлектрический слой толщиной 80 мкм, имеющий КПД преобразования падающего излучения 30% [27]. Размеры аккумуляторной батареи (см. рис. 2) – 60 × 60 × 9 мм [25].

Тепловая мощность батареи и плат оценивалось по данным работы [28], которые усреднялись по времени одного оборота вокруг Земли и по количеству плат. В результате тепловая мощность для всех плат, расположенных с шагом 15 мм (см. рис. 2, *a*), принята одинаковой, постоянной по времени и равной 0.1562 Вт. Для плат, расположенных с шагом 6 мм (см. рис. 2, *b*), рассмотрено два случая. В первом тепловыделение отдельной платы также берется равным 0.1562 Вт. Во втором случае величина этого параметра определяется из условия равенства суммарных мощностей тепловыделения плат для обеих конструкций, показанных на рис. 3, и составляет 0.0651 Вт. Тепловыделение батареи (NiCd) – 0.75 Вт.

Количество элементов в численной модели, число лучей, необходимых для расчета факторов видимости, определялись из расчетов по определению сходимости решения задачи. Конечно-элементная модель КА, соответствующая конструкции, показанной на рис. 2, *a*, содержала 17 655 элементов. Другая модель (рис. 2, *b*) имела 24 980 элементов. С каждой грани объемного элемента, принадлежащей поверхности, исходило по 400 лучей.

Для всей модели начальная температура $T_0 = 0^\circ\text{C}$.

Результаты расчетов

Рассмотрены следующие варианты расчетов:

- внутренние тепловые источники не работают;
- тепловыделение на батарее, на платах – нет;
- тепловыделение на платах, на батарее – нет (внутреннее сопротивление батареи бесконечно мало);
- тепловыделение на батарее и на платах.

На рис. 4–6 представлены рассчитанные зависимости $T(t)$ для аккумуляторной батареи и отдельной платы, ближайшей к геометрическому центру внутреннего объема корпуса КА, причем время t измерялось в оборотах вокруг Земли. Для круговой орбиты с высотой 300 км время одного оборота вокруг Земли составляет $5.42 \cdot 10^3$ с.

Приведенная на графиках температура батареи соответствует точке геометрического центра батарейного объема, а температура платы относится к точке в ее центральной области как показано на рис. 2 *a* и *b*.

На рис. 4 и 5 приведены графики $T(t)$, которые соответствуют расположению плат с шагом 15 мм (5 плат, см. рис. 2, *a*) и с шагом 6 мм (12 плат, см. рис. 2, *b*), с тепловыделением на каждой плате по 0.1562 Вт. Рисунок 6 соответствует шагу 6 мм с тепловыделением на каждой плате по 0.0651 Вт.

Зависимости $T(t)$ имеют осциллирующий характер с периодом, равным одному обороту, из чего можно заключить, что колебания температуры связаны с орбитальным движением КА. Для данного КА переход от однородного начального распределения температуры к установившемуся динамическому процессу занимает по времени от 4 до 6 оборотов, что видно из рис. 4–6. Такое различие можно объяснить тем, что при плотном расположении плат (шаг 6 мм) в корпусе КА содержится 2.4 раза большая масса, что должно приводить к увеличению времени установления.

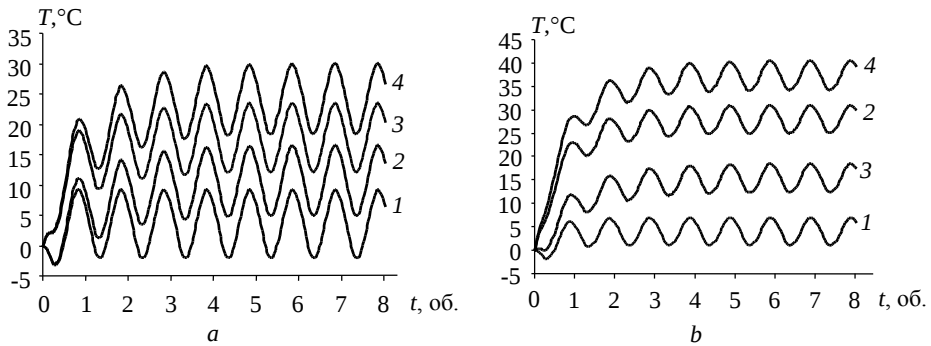


Рис. 4. Зависимости температур платы (а) и батареи (b) от времени (обороты вокруг Земли).

Шаг расположения плат 15 мм, мощность тепловыделения на плате 0.1562 Вт:

1 – бат. (–), плат. (–); 2 – бат. (+), плат. (–); 3 – бат. (–), плат. (+); 4 – бат. (+), плат. (+).

Обозначено: (–) – нет тепловыделения; (+) – есть тепловыделение

Fig. 4. Temperature of the (a) circuit board and (b) battery as a function of time (rotations around the Earth) for a circuit board location step of 15 mm and a circuit board heat emission rate of 0.1562 W: (1) battery (–), circuit board (–), (2) battery (+), circuit board (–), (3) battery (–), circuit board (+), and (4) battery (+), circuit board (+).

Notations: (–) without and (+) with heat emission

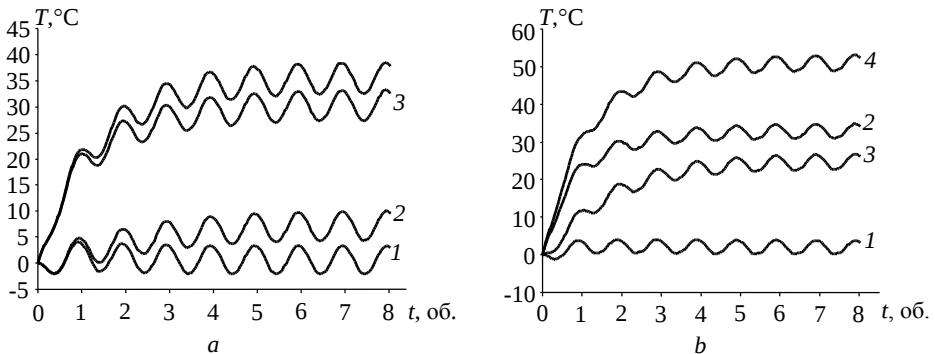


Рис. 5. Зависимости температур платы (а) и батареи (b) от времени (обороты вокруг Земли).

Шаг расположения плат 6 мм, мощность тепловыделения на плате 0.1562 Вт:

1 – бат. (–), плат. (–); 2 – бат. (+), плат. (–); 3 – бат. (–), плат. (+); 4 – бат. (+), плат. (+).

Обозначено: (–) – нет тепловыделения; (+) – есть тепловыделение

Fig. 5. Temperature of the (a) circuit board and (b) battery as a function of time (rotations around the Earth) for a circuit board location step of 6 mm and a circuit board heat emission rate of 0.1562 W: (1) battery (–), circuit board (–), (2) battery (+), circuit board (–), (3) battery (–), circuit board (+), and (4) battery (+), circuit board (+).

Notations: (–) without and (+) with heat emission

В табл. 3 приведены средние амплитуды колебаний температуры (разница между максимумом и минимумом) после периода установления для различных условий расчета, а также разницы в амплитудах колебаний между горячим случаем (на рис. 4–6 имеет индекс 4) и холодным случаем (имеет индекс 1). Резуль-

таты показывают, что на амплитуды колебаний значительное влияние оказывает плотность расположения плат, и они достаточно слабо зависят от внутреннего тепловыделения. Амплитуды уменьшаются при переходе к более плотному расположению плат. Это можно объяснить экранирующим влиянием соседних плат и уменьшением областей видимости стенок КА со стороны поверхности рассматриваемой платы, особенно в ее центральной области. Относительные изменения амплитуд колебаний, приведенные в табл. 3, составили от 3.9 до 14.4% от средних значений.

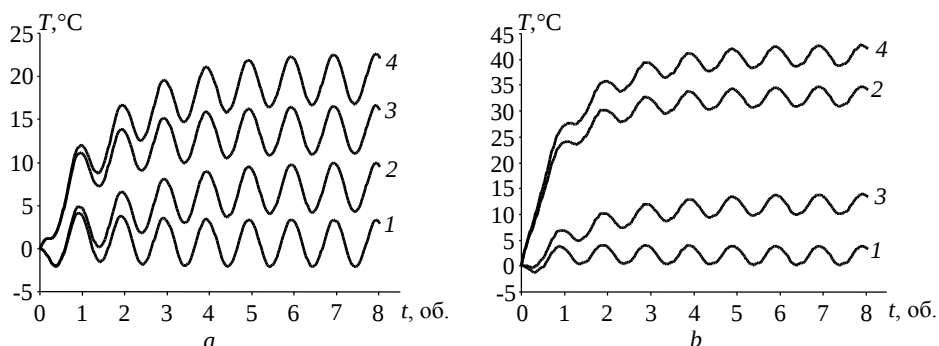


Рис. 6. Зависимости температур платы (а) и батареи (b) от времени (обороты вокруг Земли).

Шаг расположения плат 6 мм, мощность тепловыделения на плате 0.0651 Вт:

1 – бат. (–), плат. (–); 2 – бат. (+), плат. (–); 3 – бат. (–), плат. (+); 4 – бат. (+), плат. (+).

Обозначено: (–) – нет тепловыделения; (+) – есть тепловыделение

Fig. 6. Temperature of the (a) circuit board and (b) battery as a function of time (rotations around the Earth) for a circuit board location step of 6 mm and a circuit board heat emission rate of 0.0651 W: (1) battery (–), circuit board (–), (2) battery (+), circuit board (–), (3) battery (–), circuit board (+), and (4) battery (+), circuit board (+).

Notations: (–) without and (+) with heat emission

Таблица 3

Характеристики колебаний температуры при различных условиях расчета

Условия расчета, объекты наблюдения	Шаг 15 мм, 5 плат, 0.1562 Вт на плате		Шаг 6 мм, 12 плат, 0.1562 Вт на плате		Шаг 6 мм, 12 плат, 0.0651 Вт на плате	
	Плата	Батарея	Плата	Батарея	Плата	Батарея
Средняя амплитуда колебаний, °C	11.47	6.06	5.71	3.90	5.63	3.78
Разница амплитуд колебаний между горячим и холодным случаями, °C	0.45	0.45	0.52	0.56	0.35	0.35
Относительное изменение амплитуды, %	3.9	7.4	9.1	14.4	6.2	9.3

При редком расположении плат (шаг 15 мм, 5 плат) общая тепловая мощность плат составила 0.78 Вт, что сравнимо с тепловой мощностью батареи. Как видно

из представленных на рис. 4 зависимостей $T(t)$, работающие источники тепловыделения оказывают определяющее влияние на средние температуры платы и аккумуляторной батареи. При этом наиболее значимым является собственное тепловыделение элемента конструкции. Средняя температура батареи при неработающих источниках тепла составила 4.1°C , при тепловыделении только батареей ее температура составила 28.1°C , а при тепловыделении только на платах температура батареи почти в два раза меньше – 15.5°C . Схожая картина имеет место и в других расчетных случаях как для батареи, так и для платы.

Наибольший нагрев рассматриваемых компонент КА наблюдается в случае плотного расположения плат (шаг 6 мм, 12 плат) с тепловыделением на каждой плате 0.1562 Вт. Тогда совокупность плат представляет источник тепла мощностью около 1.9 Вт, что в 2.5 раза превышает тепловую мощность аккумуляторной батареи. При работе всех источников тепла средняя температура батареи увеличилась 1.36 раза по сравнению с предыдущим случаем и достигла 51°C , средняя температура рассматриваемой платы возросла в 1.44 раза и составила около 36°C (см. рис. 5).

Увеличение суммарной тепловой мощности плат, связанной с увеличением их числа в корпусе КА, может быть не обеспечено мощностью источников электрической энергии, которыми располагает CubeSat КА. Поэтому был рассмотрен случай, когда платы располагаются в корпусе КА более плотно и в большем количестве (см. рис. 2, *b*, шаг 6 мм, 12 плат), и на всех платах выделяется по 0.0651 Вт. Тогда их суммарная тепловая мощность равна мощности плат исходного варианта КА (см. рис. 2, *a*, шаг 15 мм, 5 плат). В результате средняя температура в наблюдаемой точке выделенной платы (нагреваются только платы; см. рис. 6, *a*, 3) равна 13.9 и 19.8°C (нагреваются платы и батарея; см. рис. 6, *a*, 4). Средняя температура платы в исходном варианте КА в аналогичных условиях составила 18.1°C (см. рис. 4, *a*, 3) и 24.5°C (см. рис. 4, *a*, 4). Наблюдаемое в данном случае снижение температуры платы связано с меньшей мощностью тепловыделения на самой плате, несмотря на сохранение общей тепловой мощности плат.

Сравнение средних температур батареи в аналогичных условиях показывает, что если тепловыделение происходит только на батарее, то ее температура составляет 32.9°C (см. рис. 6, *b*, 3) и 28.1°C (см. рис. 4, *b*, 3). При работе всех источников тепла средняя температура батареи равна 40.8°C (см. рис. 6, *b*, 4) и 37.5°C (см. рис. 4, *b*, 4). По сравнению с исходным вариантом расположения плат температура батареи повысилась соответственно на 4.8 и 3.3°C . Такое повышение температуры объясняется тем, что плата над аккумуляторной батареей расположена с малым зазором (см. рис. 2, *b*), около 1 мм. В этом случае потеря тепла батареей происходит не за счет излучения в пространство, как в исходном варианте (см. рис. 2, *a*), а излучением через малый зазор между платой и батареей, теплопроводностью через толщу платы и излучением с поверхности платы.

Заключение

Численно исследовано влияние плотности расположения радиоэлектронных плат полезной нагрузки на нестационарное тепловое состояние КА 1U CubeSat при его движении по орбите. В корпусе КА платы расположены параллельно.

Мощности тепловыделения на платах и аккумуляторной батарее полагались постоянными во времени. Рассмотрено два варианта расположения плат: редкое, с шагом 15 мм, и плотное, с шагом 6 мм, причем увеличение плотности расположения сопровождалось увеличением количества плат с 5 до 12. Приведены расчетные температуры батареи, а также платы, которая расположена вблизи геометрического центра корпуса. Показано, что температуры батареи и платы осциллируют. Осцилляции обусловлены орбитальным движением КА, а их амплитуды уменьшаются при увеличении плотности расположения плат. Увеличение плотности расположения плат при сохранении мощности тепловыделения каждой платы приводит к пропорциональному росту суммарной мощности тепловыделения в корпусе КА. В результате этого увеличиваются средние температуры батареи и рассматриваемой платы. При сохранении суммарной мощности на исходном уровне средние температуры снижаются. В целом во всех расчетных случаях температуры батареи и платы не превысили эксплуатационных пределов.

Список источников

1. CubeSat Design Specification Review 14.1. The CubeSat Program. Cal Poly SLO, 2022. 34 p. URL: https://static1.squarespace.com/static/5418c831e4b0fa4ecac1bacd/t/62193b7fc9e72e0053f00910/1645820809779/CDS+REV14_1+2022-02-09.pdf (accessed: 07.09. 2022)
2. Saeed N., Elzanaty A., Almorad H., Dahrouj H., Al-Naffouri T.Y., Alouini M-S. CubeSat Communications: Recent Advances and Future Challenges // IEEE Communications Surveys & Tutorials. 2020. V. 22 (3). P. 1839–1862. doi: 10.1109/COMST.2020.2990499
3. Гансвинд И.Н. Малые космические аппараты в дистанционном зондировании Земли // Исследования Земли из космоса. 2019. № 5. С. 82–88. doi: 10.23670/IRJ.2018.78.12.053
4. Вахрушев Н.В., Пьянков И.Н., Рязанов М.Н. Обзор форм-фактора спутников CubeSat // Студенческая наука XXI века. 2016. № 3(10). С. 100–106.
5. Padgen M.R., Chinn T.N., Friedericks C.R., Lera M.P., Chin M., Parra M.P., Piccini M.E., Ricco A.J., Spremo S.M. The EcAMSat fluidic system to study antibiotic resistance in low Earth orbit: Development and lessons learned from space flight // Acta Astronautica. 2020. V. 173. P. 449–459. doi: 10.1016/j.actaastro.2020.02.031
6. Kovar P., Sommer M., Matthiae D., Reitz G. Measurement of cosmic radiation in LEO by 1U CubeSat // Radiation Measurements. 2020. V. 139. Art. 106471. doi: 10.1016/j.radmeas.2020.106471
7. Olatunji J.R., Acheson C., Szmigiel M., Wimbush S.C., Long N.J. Orbital and thermal modelling of a 3U CubeSat equipped with a high-temperature superconducting coil // Acta Astronautica. 2022. V. 190. P. 413–429. doi: 10.1016/j.actaastro.2021.10.027
8. Ikeya K., Sakamoto H., Nakanishi H., Furuya H., Tomura T., Ide R., Iijima R., Iwasaki Y., Ohno K., Omoto K., Furuya E., Hayashi T., Kato M., Koide S., Kurosaki M., Nakatsuka Y., Okuyama S., Kashiya R., Nakamura J., Nio W., Tsunemitsu T., Yamazaki Y., Taga K., Hohmann B., Amamoto T., Chubachi T., Tamura S., Okada H., Watanabe A., Kawabata N., Hori T., Ito H., Kuratomi T., Shimoda Y., Hidaka N., Watanabe K., Torisaka A., Yamazaki M. Significance of 3U CubeSat OrigamiSat-1 for space demonstration of multifunctional deployable membrane // Acta Astronautica. 2020. V. 173. P. 363–377. doi: 10.1016/j.actaastro.2020.04.016
9. Marzioli P., Gugliermetti L., Santoni F., Delfini A., Piergentili F. Nardi L., Metelli G., Benvenuto E., Massa S., Bennici E. CultCube: Experiments in autonomous in-orbit cultivation onboard a 12-units CubeSat platform // Life Sciences in Space Research. 2020. V. 25. P. 42–52. doi: 10.1016/j.lssr.2020.02.005

10. Akyildiz I.F., Jornet J.M., Nie S. A new CubeSat design with reconfigurable multi-band radios for dynamic spectrum satellite communication networks // *Ad Hoc Networks*. 2019. V. 86. P. 166–178. doi: 10.1016/j.adhoc.2018.12.004
11. Liu J., Zhao P., Wu C., Chen K., Ren W., Liu L., Tang Y., Ji C., Sang X. SIASAIL-I solar sail: From system design to on-orbit demonstration mission // *Acta Astronautica*. 2022. V. 192. P. 133–142. doi: 10.1016/j.actaastro.2021.11.034
12. Hakima H., Bazzocchi M.C.F. Cubesat with dual robotic manipulators for debris mitigation and remediation // *Advances in the Astronautical Sciences 5th IAA Conference on University Satellite Missions and Cubesat Workshop*, Rome, Italy, 28 January – 31 January 2020. V. 173. P. 149–162.
13. Белоконов И.В., Тимбай И.А., Баранова Е.В. Выбор проектных параметров наноспутника формата CubeSat с пассивной системой стабилизации // *Гироскопия и навигация*. 2020. Т. 28, № 1 (108). С. 81–100. doi: 10.17285/0869-7035.0025
14. Наноспутниковая платформа CubeSat “OrbiCraft-Pro”. М., 2019. URL: [https://sputnix.ru/tpl/docs/Описание%20ОрбиКрафт-Про%20\(рус.\).pdf](https://sputnix.ru/tpl/docs/Описание%20ОрбиКрафт-Про%20(рус.).pdf) (дата обращения: 07.09.2022).
15. Rathinam A. Design and Development of UWE-4: Integration of Electric Propulsion Units, Structural Analysis and Orbital Heating Analysis : Thesis for Master of Science Degree. Lisboa, 2019. doi: 10.13140/RG.2.2.34427.72485
16. Reyesa L.A., Cabriales-Gómez R., Chávez C.E., Bermúdez-Reyes B., López-Botello O., Zambrano-Robledo P. Thermal modeling of CIIASat nanosatellite: A tool for thermal barrier coating selection // *Applied Thermal Engineering*. 2020. V. 166. Art. 114651. doi: 10.1016/j.applthermaleng.2019.114651
17. Cervone A., Toppo F., Speretta S., Menicucci A., Turan E., Di Lizia P., Massari M., Franzese V., Giordano C., Merisio G., Labate D., Pilato G., Costa E., Bertels E., Thorvaldsen A., Kukharenska A., Vennekens J., Walker R. LUMIO: A CubeSat for observing and characterizing micro-meteoroid impacts on the lunar far side // *Acta Astronautica*. 2022. V. 195. P. 309–317. doi: 10.1016/j.actaastro.2022.03.032
18. Guedes M.B.V. Cubesat Structural and Thermal Analysis Methodology ISTsat-1 Design : Thesis ... Master of Science Degree in Aerospace Engineering. Lisboa, 2019.
19. Santoni F., Piergentili F., Donati S., Perelli M., Negri A., Marino M. An innovative deployable solar panel system for cubesats // *Acta Astronautica*. 2014. V. 95 (1). P. 210–217. doi: 10.1016/j.actaastro.2013.11.011
20. Akyildiz I.F., Jornet J.M., Nie S. A new CubeSat design with reconfigurable multi-band radios for dynamic spectrum satellite communication networks // *Ad Hoc Networks*. 2003. V. 86. P. 166–178. doi: 10.1016/j.adhoc.2018.12.004
21. PC/104 Pluse Specification v. 2.0. 2003. 28 p. URL: <https://resources.winsystems.com/specs/PC104PlusSpec.pdf> (accessed: 07.09.2022).
22. Чмырев В.М., Нестеров Б.Ф. Возможности и компетенции по созданию российской группировки наноспутников стандарта CubeSat // АО «Технологии ГЕОСКАН». 2018 URL: http://spaceresearch.ssau.ru/sites/all/themes/venture_theme/Concor/7.pdf (дата обращения: 07.09.2022).
23. Уонг Х. Основные формулы и данные по теплообмену для инженеров : справочник : пер с англ. М. : Атомиздат, 1979. 216 с.
24. Hajji A.R., Mirhosseini M., Saboonchi A., Moosavi A. Different Methods for Calculating a View Factor in Radiative Applications: Strip to In-Pane Parallel Semi-Cylinder // *Journal of Engineering Thermophysics*. 2015. V. 24 (2). P. 169–180. doi: 10.1134/s1810232815020071
25. Morsch F.E., Seman L.O., Nicolau V. Simulation of a CubeSat with internal heat transfer using finite volume method // *Applied Thermal Engineering*. 2021. V. 193. Art. 117039. doi: 10.1016/j.applthermaleng.2021.117039
26. Morsch F.E., Nicolau V., Paiva K., Possamai T. A comprehensive attitude formulation with spin for numerical model of irradiance for CubeSats and Picosats // *Applied Thermal Engineering*. 2019. V. 168. Art. 114859. doi: 10.1016/j.applthermaleng.2019.114859

27. Aboobakar S.F.C. Dynamic and Thermal Models for ECOSat-III : Thesis ... Master of Science Degree in Aerospace Engineering. Lisboa, 2016.
28. Corpino S., Caldera M., Nichele F., Masoero M., Viola N. Thermal design and analysis of a nanosatellite in low Earth orbit // *Acta Astronautica*. 2015. V. 115. P. 247–261. doi: 10.1016/J.ACTAASTRO.2015.05.012

References

1. CubeSat Design Specification Review 14.1. The CubeSat Program. Cal Poly SLO, 2022. Access mode: https://static1.squarespace.com/static/5418c831e4b0fa4ecac1bacd/t/62193b7fc9e72e0053f00910/1645820809779/CDS+REV14_1+2022-02-09.pdf
2. Saeed N., Elzanaty A., Almorad H., Dahrouj H., Al-Naffouri T.Y., Alouini M.-S. (2020) CubeSat communications: recent advances and future challenges. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*. 22(3). pp. 1839–1862. doi: 10.1109/COMST.2020.2990499
3. Gansvind I.N. (2020) Small satellites in remote sensing of the Earth. *Izvestiya, Atmospheric and Ocean Physics*. 56(9). pp. 1177–1181. doi: 10.23670/IRJ.2018.78.12.053
4. Vakhrushev N.V., P'yankov I.N., Ryazanov M.N. (2016) Obzor form-faktora sputnikov CubeSat [CubeSat satellites form-factor overview]. *Studencheskaya nauka XXI veka*. 3(10). pp. 100–106.
5. Padgen M.R., Chinn T.N., Friedericks C.R., Lera M.P., Chin M., Parra M.P., Piccini M.E., Ricco A.J., Spremo S.M. (2020) The EcAMSat fluidic system to study antibiotic resistance in low Earth orbit: development and lessons learned from space flight. *Acta Astronautica*. 173. pp. 449–459. doi: 10.1016/j.actaastro.2020.02.031
6. Kovar P., Sommer M., Matthiae D., Reitz G. (2020) Measurement of cosmic radiation in LEO by 1U CubeSat. *Radiation Measurements*. 139. Article 106471. doi: 10.1016/j.radmeas.2020.106471
7. Olatunji J.R., Acheson C., Szmigiel M., Wimbush S.C., Long N.J. (2022) Orbital and thermal modelling of a 3U CubeSat equipped with a high-temperature superconducting coil. *Acta Astronautica*. 190. pp. 413–429. doi: 10.1016/j.actaastro.2021.10.027
8. Ikeya K., Sakamoto H., Nakanishi H., Furuya H., Tomura T., Ide R., Iijima R., Iwasaki Y., Ohno K., Omoto K., Furuya E., Hayashi T., Kato M., Koide S., Kurosaki M., Nakatsuka Y., Okuyama S., Kashiwayama R., Nakamura J., Nio W., Tsunemitsu T., Yamazaki Y., Taga K., Hohmann B., Amamoto T., Chubachi T., Tamura S., Okada H., Watanabe A., Kawabata N., Hori T., Ito H., Kuratomi T., Shimoda Y., Hidaka N., Watanabe K., Torisaka A., Yamazaki M. (2020) Significance of 3U CubeSat OrigamiSat-1 for space demonstration of multifunctional deployable membrane. *Acta Astronautica*. 173. pp. 363–377. doi: 10.1016/j.actaastro.2020.04.016
9. Marzioli P., Gugliermetti L., Santoni F., Delfini A., Piergentili F., Nardi L., Metelli G., Benvenuto E., Massa S., Bennici E. (2020) CultCube: Experiments in autonomous in-orbit cultivation on-board a 12-units CubeSat platform. *Life Sciences in Space Research*. 25. pp. 42–52. doi: 10.1016/j.lssr.2020.02.005
10. Akyildiz I.F., Jornet J.M., Nie S. (2019) A new CubeSat design with reconfigurable multi-band radios for dynamic spectrum satellite communication networks. *Ad Hoc Networks*. 86. pp. 166–178. doi: 10.1016/j.adhoc.2018.12.004
11. Liu J., Zhao P., Wu C., Chen K., Ren W., Liu L., Tang Y., Ji C., Sang X. (2022) SIASAIL-I solar sail: from system design to on-orbit demonstration mission. *Acta Astronautica*. 192. pp. 133–142. doi: 10.1016/j.actaastro.2021.11.034
12. Hakima H., Bazzocchi M.C.F. (2020) Cubesat with dual robotic manipulators for debris mitigation and remediation. *Advances in the Astronautical Sciences 5th IAA Conference on University Satellite Missions and CubeSat Workshop, Rome, Italy*. 173. pp. 149–162.

13. Belokonov I.V., Timbai I.A., Barinova E.V. (2020). Design parameters selection for CubeSat nanosatellite with a passive stabilization system. *Gyroscopy and Navigation*. 11(2). pp. 149–161. doi: 10.1134/52075108720020029
14. *Nanosputnikovaya platforma CubeSat* (2019) [CubeSat nanosatellite platform] “OrbiCraftPro”, Moscow. Access mode: [https://sputnix.ru/tpl/docs/Описание%20ОрбиКрафт-Про%20\(рус.\).pdf](https://sputnix.ru/tpl/docs/Описание%20ОрбиКрафт-Про%20(рус.).pdf)
15. Rathinam A. (2019) *Design and Development of UWE-4: Integration of Electric Propulsion Units, Structural Analysis and Orbital Heating Analysis*. Thesis, Lisboa. doi: 10.13140/RG.2.2.34427.72485
16. Reyesa L.A., Cabriales-Gómez R., Chávez C.E., Bermúdez-Reyes B., López-Botello O., Zambrano-Robledo P. (2020) Thermal modeling of CIIASat nanosatellite: a tool for thermal barrier coating selection. *Applied Thermal Engineering*. 166. Article 114651. doi: 10.1016/j.applthermaleng.2019.114651
17. Cervone A., Topputo F., Speretta S., Menicucci A., Turan E., Di Lizia P., Massari M., Franzese V., Giordano C., Merisio G., Labate D., Pilato G., Costa E., Bertels E., Thorvaldsen A., Kukharenska A., Vennekens J., Walker R. (2022) LUMIO: A CubeSat for observing and characterizing micro-meteoroid impacts on the lunar far side. *Acta Astronautica*. 195. pp. 309–317. doi: 10.1016/j.actaastro.2022.03.032
18. Guedes M.B.V. (2019) *Cubesat Structural and Thermal Analysis Methodology ISTsat-1 Design*. Thesis, Lisboa.
19. Santoni F., Piergentili F., Donati S., Perelli M., Negri A., Marino M. (2014) An innovative deployable solar panel system for CubeSats. *Acta Astronautica*. 95(1). pp. 210–217. doi: 10.1016/j.actaastro.2013.11.011
20. Akyildiz I.F., Jornet J.M., Nie S. (2003) A new CubeSat design with reconfigurable multi-band radios for dynamic spectrum satellite communication networks. *Ad Hoc Networks*. 86. pp. 166–178. doi: 10.1016/j.adhoc.2018.12.004
21. PC/104 Pluse Specification v. 2.0. (2003) Access mode: <https://resources.winsystems.com/specs/PC104PlusSpec.pdf>
22. Chmirev V.M., Nesterov B.F. (2018) *Vozmozhnosti i kompetentsii po sozdaniyu rossiyskoy gruppировки nanosputnikov standarta CubeSat* [Capabilities and competences for the creation of Russian nanosatellites grouping by CubeSat standard]. AO “Tekhnologiya GEOSKAN”. Access mode: http://spaceresearch.ssau.ru/sites/all/themes/venture_theme/Concor/7.pdf
23. Wong H.Y. (1977) *Handbook of Essential Formulae and Data on Heat Transfer for Engineers*. London–New York: Longman.
24. Hajji A.R., Mirhosseini M., Saboonchi A., Moosavi A. (2015) Different methods for calculating a view factor in radiative applications: strip to in-pane parallel semi-cylinder. *Journal of Engineering Thermophysics*. 24(2). pp. 169–180. doi: 10.1134/s1810232815020071
25. Morsch F.E., Seman L.O., Nicolau V.D. (2021) Simulation of a CubeSat with internal heat transfer using finite volume method. *Applied Thermal Engineering*. 193. Article 117039. doi: 10.1016/j.applthermaleng.2021.117039
26. Morsch F.E., Nicolau V., Paiva K., Possamai T. (2020) A comprehensive attitude formulation with spin for numerical model of irradiance for CubeSats and Picosats. *Applied Thermal Engineering*. 168. Article 114859. doi: 10.1016/j.applthermaleng.2019.114859
27. Aboobakar S.F.C. (2016) *Dynamic and Thermal Models for ECOSat-III*. Thesis, Lisboa.
28. Corpino S., Caldera M., Nichele F., Masoero M., Viola N. (2015) Thermal design and analysis of a nanosatellite in low Earth orbit. *Acta Astronautica*. 115. pp. 247–261. doi: 10.1016/J.ACTAASTRO.2015.05.012

Сведения об авторах:

Белов Сергей Викторович – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: belovsv@niipmm.tsu.ru

Бельков Алексей Викторович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: aleksei-belkov@niipmm.tsu.ru

Жуков Андрей Петрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: zh@niipmm.tsu.ru

Павлов Михаил Сергеевич – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: mcpavlov@niipmm.tsu.ru

Пономарев Сергей Васильевич – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, заведующий отделом Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: psv@niipmm.tsu.ru

Information about the authors:

Belov Sergey V. (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: belovsv@niipmm.tsu.ru

Bel'kov Aleksey V. (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: aleksei-belkov@niipmm.tsu.ru

Zhukov Andrey P. (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: zh@niipmm.tsu.ru

Pavlov Mikhail S. (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mcpavlov@niipmm.tsu.ru

Ponomarev Sergey V. (Doctor of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: psv@niipmm.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 09.11.2022; принята к публикации 31.03.2023

The article was submitted 09.11.2022; accepted for publication 31.03.2023

Научная статья

УДК 539.3:629.78

doi: 10.17223/19988621/82/7

О некоторых особенностях разрушения высокоскоростных частиц на гофрированных противометеорных сеточных экранах

Дмитрий Борисович Добрица¹, Юрий Федорович Христенко²

¹ АО «НПО им. С.А. Лавочкина», Химки, dobritsaDB@laspace.ru

² Томский государственный университет, Томск, Россия, hrr@niipmm.tsu.ru

Аннотация. Исследован процесс воздействия высокоскоростных частиц на гофрированные сеточные металлические экраны. С использованием сеточного лагранжева метода Уилкинса в 3D-постановке решен ряд задач численного моделирования высокоскоростного соударения при различных углах наклона гофры и разном положении точки первоначального контакта экрана с ударником. Проведено сравнение параметров запреградного облака продуктов разрушения в различных задачах при одинаковом расстоянии, преодоленном пробившей экран частицей, с целью выбора оптимального угла наклона гофры.

Ключевые слова: высокоскоростное соударение, сеточный экран, противометеорная защита, численное моделирование

Для цитирования: Добрица Д.Б., Христенко Ю.Ф. О некоторых особенностях разрушения высокоскоростных частиц на гофрированных противометеорных сеточных экранах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 82. С. 82–96. doi: 10.17223/19988621/82/7

Original article

On some features of the destruction of high-speed particles on debris corrugated mesh shields

Dmitriy B. Dobritsa¹, Yury F. Khristenko²

¹ Lavochkin Association, Khimki, Russian Federation, dobritsaDB@laspace.ru

² Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, hrr@niipmm.tsu.ru

Abstract. This paper studies the impact of high-speed particles on corrugated metal mesh shields. Numerical solutions to a number of problems on high-speed interaction at different corrugation angles and positions of the initial contact point of the shield and impactor are solved using the grid Wilkins Lagrangian method in a three-dimensional formulation. The parameters of the behind-the-barrier cloud of destruction products are

compared for various problems with the same distance traveled by the particle perforating the shield. Thus, the optimal inclination angle of the corrugation is revealed.

Keywords: high-speed impact, mesh shield, debris protection, numerical simulation

For citation: Dobritsa, D.B., Khristenko, Yu.F. (2023) On some features of the destruction of high-speed particles on debris corrugated mesh shields. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 82. pp. 82–96. doi: 10.17223/19988621/82/7

Введение

Защита космических аппаратов (КА) и их узлов от воздействия метеоро-техногенных тел (МТТ) является одним из актуальных направлений исследований и практических работ в космонавтике, так как соударение с высокоскоростными частицами представляет собой серьезную угрозу для штатного функционирования КА.

Сеточные экраны применяются в космонавтике в течение значительного времени, баллистические уравнения для них разработаны в 90-е гг. прошлого века [1]. Экспериментальные исследования пробития сеточных экранов достаточно трудоемки, так как для построения баллистической кривой требуется провести большой объем экспериментов с различными комбинациями основных параметров соударения – массы ударника, скорости и угла соударения, причем следует учитывать неопределенность, возникающую из-за разной реакции при попадании ударника в различные точки экрана с учетом его неоднородности. Поэтому наиболее распространены комбинированные исследования [2–5] с применением эксперимента и численного моделирования, что позволяет получить наиболее полную картину соударения, особенно при выборе в качестве защитного экрана геометрически неоднородной структуры (например, гофрированной сетки).

Данная работа является продолжением серии авторских работ, посвященных исследованию противометеорной защиты в виде гофрированных сеточных экранов [6–10]. Рост эффективности сеточной преграды при гофрировании был обоснован экспериментально [9]. В проведенном с использованием легкогазовой двухступенчатой установки эксперименте ударники в виде алюминиевых шариков диаметром 1.5 мм ускорялись до скоростей порядка 5 км/с.

В работе [10] представлены результаты численного моделирования, направленного на выявление влияния угла гофрирования металлической сетки на ее защитные свойства при использовании в качестве противометеорного экрана. Проводилось моделирование соударения шарика диаметром 1.5 мм с металлической сеткой под углом от 15 до 75° (с соблюдением идентичности удельной массы экрана, рассчитанной по нормали к вектору скорости). Итоги работы показали резкое возрастание степени дробления ударника при угле соударения α не менее 60° с проявлением «эффекта терки», выражающегося в интенсивном дроблении контактирующего края высокоскоростного тела, проникающего через сеточную преграду.

Исследование кумулятивного эффекта при пробитии плоских (образованных наложением проволоки) сеток проводилось в работах [3, 11]. В работе [11] оценка кумулятивного эффекта дана в виде относительного приращения максимальной скорости частиц ударника к первоначальной скорости соударения.

Настоящая работа является продолжением работы [10], ее целями являются:

1) проведение численного моделирования высокоскоростного соударения сферической частицы с тканой металлической сеткой на комплексе собственной разработки, отличном от использовавшегося в работе [10], и сравнение полученных результатов;

2) сравнение параметров главного фрагмента запреградного облака продуктов разрушения (ЗОПР) для разных углов наклона гофры при условии одинакового пробега ударника во всех задачах, что позволяет учитывать габаритные ограничения в реальной противометеорной конструкции, не позволяющие произвольным образом увеличивать расстояние от внешнего защитного экрана до защищаемой стенки;

3) сравнение результатов решения задачи для различных вариантов положения первоначального контакта ударника и сеточной преграды;

4) оценка кумулятивного эффекта, возникающего при высокоскоростном пробитии сеточных преград с различным углом наклона.

Численное моделирование высокоскоростного взаимодействия твердых тел с защитными конструкциями, рассматриваемыми в данной работе, позволяет воспроизвести характерные особенности физических процессов, протекающих при соударении, а также оценить работоспособность защитных экранов и подобрать их оптимальные схемы. В лагранжевой 3D-постановке рассматривается процесс фрагментации высокоскоростного ударника на сеточных преградах при различных углах соударения.

Определяющие соотношения

Для описания процессов деформирования и дробления твердых тел используется модель прочного сжимаемого идеально упругопластического тела. Основные соотношения, описывающие движение сплошной среды, базируются на законах сохранения массы, импульса и энергии и замыкаются соотношениями Прандтля–Рейсса при условии текучести Мизеса [12–14]. Уравнение состояния берется в форме Ми – Грюнайзена [12].

Для расчета упругопластических течений используется метод Уилкинса [13, 14], реализованный на тетраэдрических ячейках.

Для моделирования контактных взаимодействий используется метод расчета поверхности контакта соударяющихся тел, в котором их границы участвуют симметричным образом [15–17]. Граничные условия на контактных поверхностях предполагают идеальное скольжение и непротекание по нормали в зоне контакта. Моделирование разрушения осуществляется при помощи раздвоения разностной сетки по узлам в областях возникновения макронарушений сплошности материала и явного описания поверхности разрушения [18]. В качестве критерия разрушения используется деформационный критерий разрушения [19], срабатывающий при превышении критического значения эквивалентной пластической деформации в узле пространственной сетки. При выполнении критического условия в узле происходит раздвоение с образованием свободной поверхности в виде микротрещины с плоскостью, совпадающей с главной площадкой, соответствующей σ_1 . В качестве модели пластических деформаций материала используется модель Штейнберга–Гуинана [20].

Исходные данные в задачах численного моделирования

С помощью численного моделирования исследован ряд задач высокоскоростного соударения сферической частицы с гофрированными экранами из металлической сетки. В качестве ударника использован алюминиевый шарик диаметром 1.5 мм, движущийся со скоростью 5 км/с. Алюминий наилучшим образом подходит для моделирования техногенного вещества (плотность частиц самых значимых диапазонов размеров – 0.1–0.25 см и 0.25–0.5 см – составляет согласно ГОСТ 25645.167–2005 соответственно 2.5 и 2.7 г/см³), а также метеороидов в виде хондритов.

Гофрированный сеточный защитный экран смоделирован как наклонный участок тканой стальной сетки, при предположении, что шаг гофры существенно больше характерного размера метеороида (рис. 1).

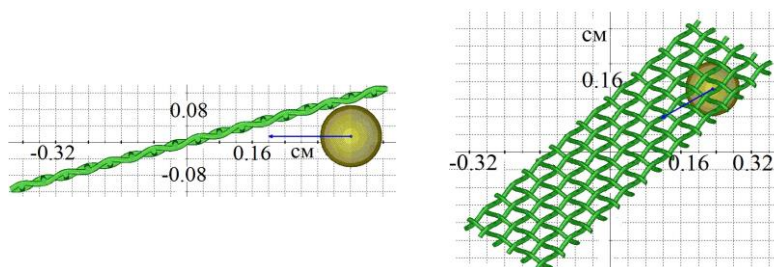


Рис. 1. Начальная конфигурация. Угол наклона гребней гофры 75°

Fig. 1. Initial configuration. The angle of inclination of corrugation ridges is 75°

Построение тетраэдрических сеток при разбиении простых фигур (шар, цилиндр – проволока сетки) выполнено прямыми методами на основе шаблонов [21].

Удар во всех задачах численного моделирования (ЧМ) осуществлен по нормали к экрану, т.е. угол соударения α , измеренный от нормали к экрану, аналогичен углу наклона гофры (для плоской сетки без гофрирования $\alpha = 0^\circ$). Исследовано влияние угла α на характер разрушения частицы и эффективность защитных свойств подобного экрана. В эксперименте из работы [9] в качестве гофрированной мелкой сетки использовалась стальная сетка с проволокой диаметром $d_w = 0.2$ мм и апертурой (размер просвета) $l_a = 0.356$ мм. Шаг такой сетки $h = 0.556$ мм ($h = l_a + d_w$), ее поверхностная плотность $\rho_A = 0.95$ кг/м². При $\alpha = 45^\circ$, как в эксперименте, удельная масса такого экрана (т.е. его поверхностная плотность, рассчитанная относительно перпендикулярной к направлению удара плоскости) составляет $\rho_A = 1.34$ кг/м². При изменении α удельная масса экрана оставалась неизменной, что обеспечивалось изменением диаметра проволоки с сохранением одинакового шага сетки, параметры которой представлены в табл. 1.

Поскольку темп решения задачи при появлении большого количества осколков значительно замедляется из-за роста длительности работы процедур реализации контактных алгоритмов, во всех задачах использовано упрощение, заключающееся в ограничении рассматриваемого объема, на котором фиксируются контакты фрагментов, после проникновения ударника через защитный экран –

после этого момента контакты фиксируются только в районе главного фрагмента ударника.

Таблица 1

Параметры сетки для гофрированных сеточных экранов равной удельной массы

Угол наклона α , град.	0	15	30	45	60	75
Диаметр проволоки d_w , мм	0.25	0.243	0.231	0.200	0.178	0.130
Апертура ячейки сетки l_a , мм	0.306	0.313	0.325	0.356	0.378	0.426
Шаг сетки h , мм	0.556	0.556	0.556	0.556	0.556	0.556

В табл. 2 приведены рассчитанные конфигурации с указанием количества ячеек в задачах.

Таблица 2

Количество тетраэдрических ячеек в различных вариантах счетной задачи

Угол наклона α , град.	0	15	30	45	60	75
Удар в горизонтальную проволоку	563 328	530 928	639 360	379 296	452 448	–
Удар в центр просвета ячейки сетки	511 488	530 928	639 360	379 296	452 448	557 952
Удар в узел	628 560	583 200	578 016	338 112	503 136	608 128
Удар в вертикальную проволоку	–	583 200	578 016	338 112	503 136	–

Для задачи с $\alpha = 75^\circ$ рассмотрены только варианты попадания ударника в вертикально направленную проволоку или между соседними вертикальными проволоками. Для $\alpha = 0^\circ$ удар в горизонтальную проволоку аналогичен удару в вертикальную проволоку.

На рис. 2 схематически показаны различные варианты конфигураций точки первоначального контакта ударника и преграды, которые использованы в данной работе.

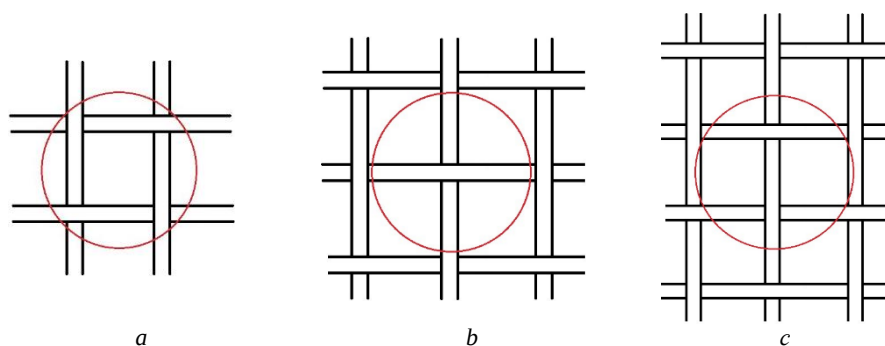


Рис 2. Конфигурации точки первоначального контакта ударника и преграды:

a – удар в центр просвета ячейки; b – удар в узел; c – удар в проволоку

Fig. 2. Initial configurations of an impactor-barrier contact point: (a) impact to the center of a cell gap, (b) impact to the node, and (c) impact to the wireline

Результаты моделирования и их обсуждение

На рис. 3 отражено состояние пары «ударник–преграда» для выбранных типов расчетных конфигураций в момент проникновения за защитный экран, который определяется как положение, при котором все ячейки наибольшего фрагмента ударника (учитывая, что он разрушается при прохождении через преграду) прошли через плоскость экрана. При углах соударения 60° и более видна гораздо более значительная степень дробления ударника, чем при прямом соударении. Для угла соударения 75° (см. рис. 3, *f*) расчет на момент фиксации велся по упрощенному алгоритму – все мелкие фрагменты, которые отдалялись от створа сеточной преграды, в процессе расчета были удалены.

В табл. 3 отражены результаты численного расчета основных характеристик ударника в момент проникновения за защитный экран, в том числе в сравнении с данными из работы [10], в которой не проводился расчет для угла 0° . В качестве варианта первоначальной конфигурации для данной работы взят удар в вертикальную проволоку сетки.

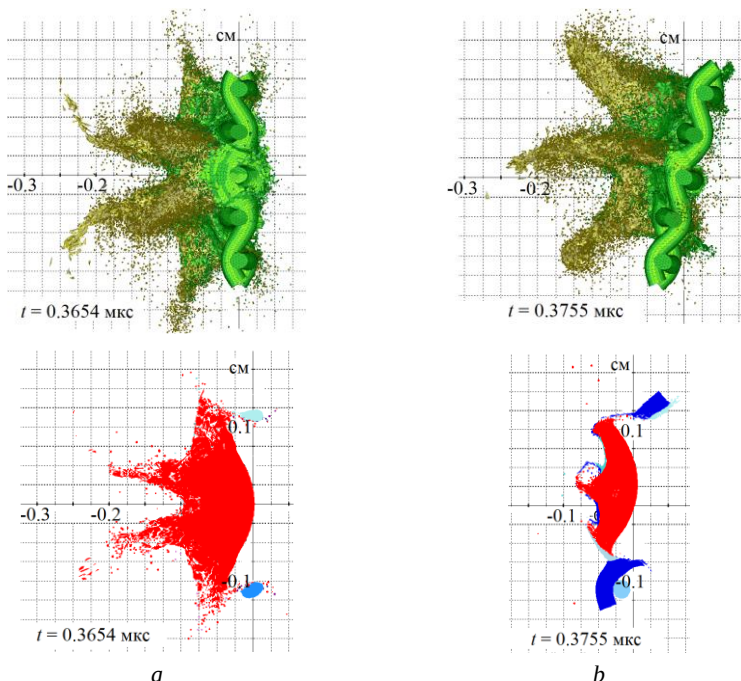


Рис. 3, а, б. Результат численного решения задачи взаимодействия ударника – сферической частицы размером 1.5 мм с сеточным экраном на скорости 5 км/с, в момент проникновения за экран. Верхний рисунок – 3D-вид; нижний рисунок – вид в сечении для углов гофры: а – 0° ; б – 15°

Fig. 3, a, b. Numerical solution to the problem of the interaction between the impactor (a spherical particle 1.5 mm in size) and the mesh shield at a speed of 5 km/s at the moment of the impactor penetration beyond the shield. Top figure is a 3D view; bottom figure is a sectional view for various corrugation angles: (a) 0° , and (b) 15°

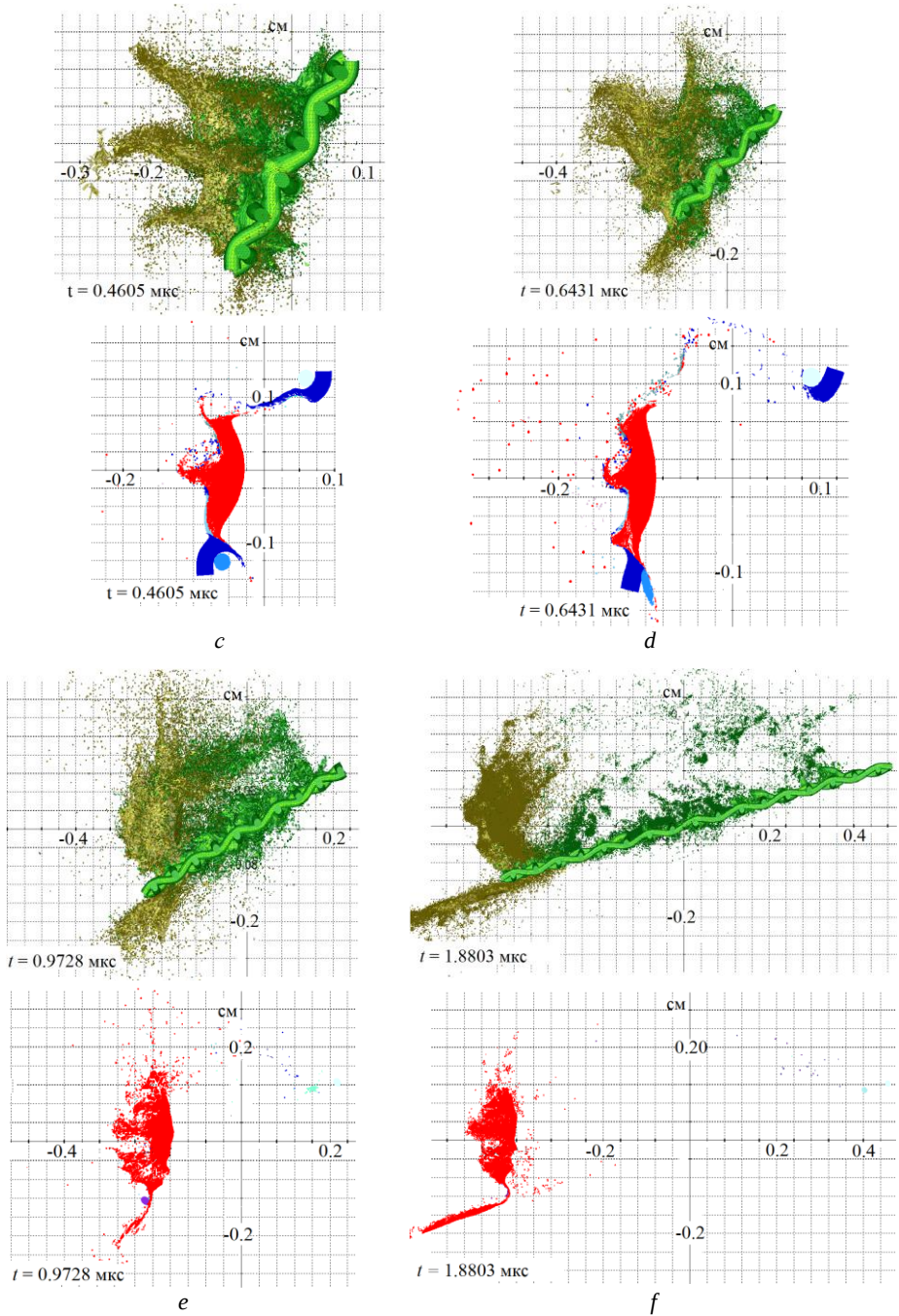


Рис. 3, c, d, e, f. Верхний рисунок – 3D-вид; нижний рисунок – вид в сечении для углов гофры: c – 30°; d – 45°; e – 60°; f – 75°

Fig. 3, c, d, e, f. Top figure is a 3D view; bottom figure is a sectional view for various corrugation angles: (c) 30°, (d) 45°, (e) 60°, and (f) 75°

Таблица 3

Распределение массы ударника в облаке фрагментов, %. Сравнение результатов

Угол наклона гофры, град.		0	15	30	45	60	75
M_{mf}/M_0	Расчет [10]	—	0.80	0.66	0.60	0.55	0.12
	Данная работа	0.57	0.59	0.51	0.42	0.30	0.13
Мелкие фрагменты, пробившие сетку	Расчет [10]	—	0.20	0.34	0.32	0.31	0.33
	Данная работа	0.43	0.41	0.48	0.51	0.57	0.52
M_e/M_0	Расчет [10]	—	0.0	0.0	0.08	0.14	0.55
	Данная работа	0.0	0.0	0.01	0.07	0.13	0.35

Примечание. M_{mf} – масса основного фрагмента, пробившего сетку, M_0 – первоначальная масса ударника, M_e – масса срикшетировавших фрагментов ударника.

Полученные результаты свидетельствуют о возрастании эффективности гофрированного сеточного экрана, при значениях угла $\alpha > 45^\circ$.

На рис. 4, 5 показан процесс проникания ударника через сеточную преграду при $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 60^\circ$ соответственно как результат решения задачи ЧМ.

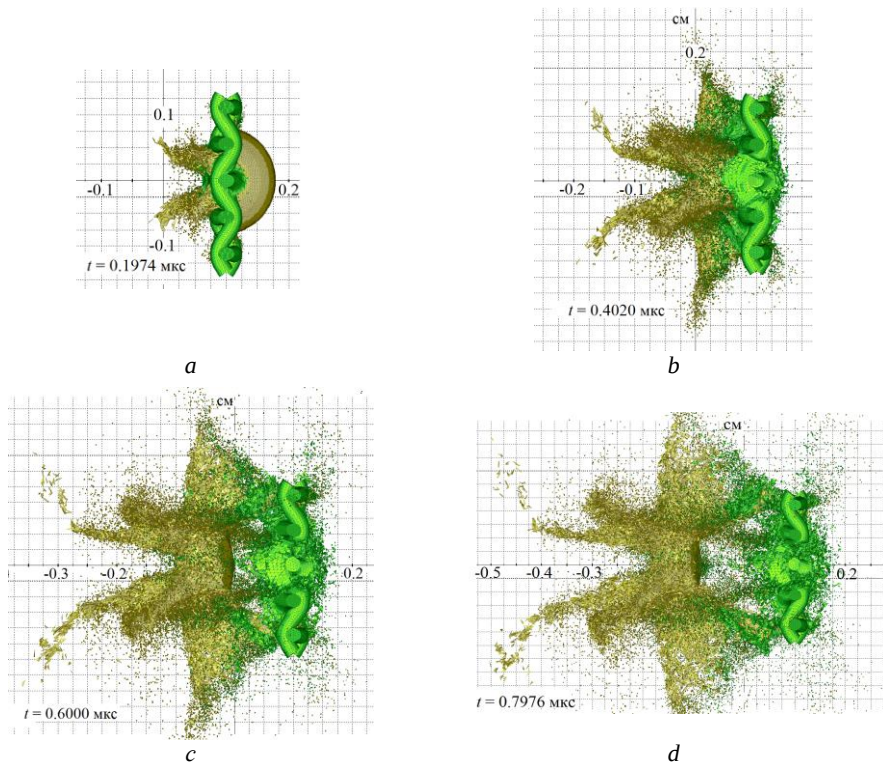


Рис. 4, a, b, c, d. Результат численного решения задачи взаимодействия ударника с сеточным экраном для угла гофры $\alpha = 0^\circ$ в различные моменты времени:

a – 0.2 мкс; b – 0.4 мкс; c – 0.6 мкс; d – 0.8 мкс; e – 1.0 мкс; f – 1.2 мкс

Fig. 4, a, b, c, d. Numerical solution to the problem of the interaction between the impactor and the mesh shield for a corrugation angle $\alpha = 0^\circ$ at different time instants: (a) 0.2, (b) 0.4, (c) 0.6, and (d) 0.8

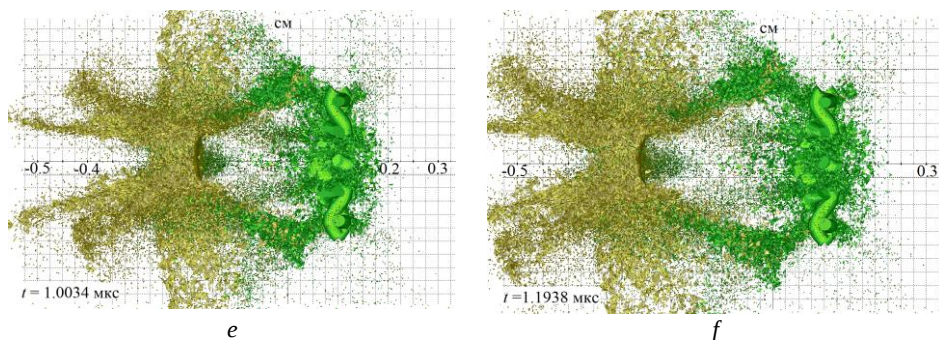


Рис. 4, e, f. Результат численного решения в различные моменты времени:

a – 0.2 мкс; *b* – 0.4 мкс; *c* – 0.6 мкс; *d* – 0.8 мкс; *e* – 1.0 мкс; *f* – 1.2 мкс

Fig. 4, e, f. Numerical solution to the problem at different time instants: (e) 1.0, and (f) 1.2 μ s

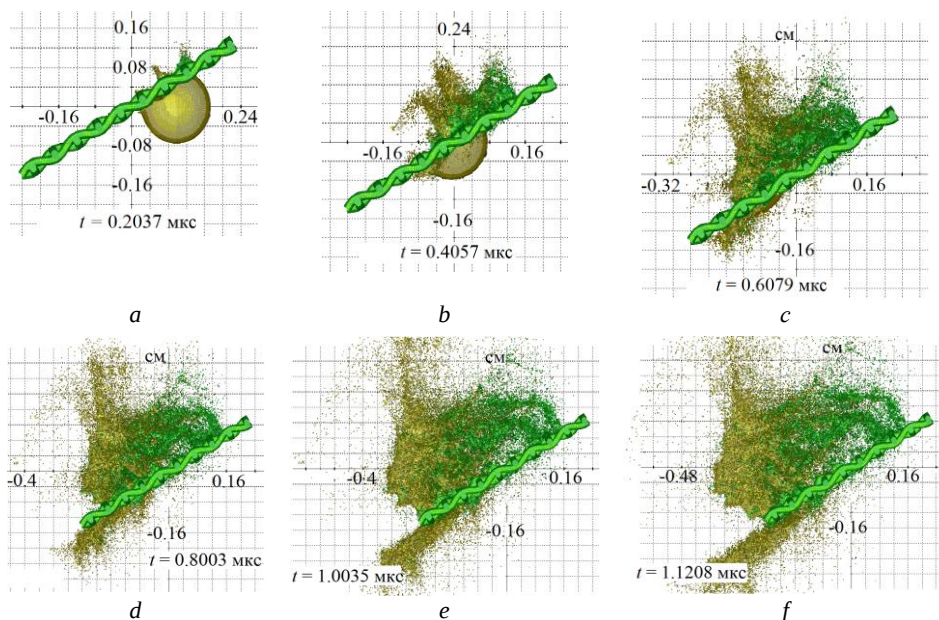


Рис. 5. Результат численного решения задачи взаимодействия ударника с защитным экраном для угла гофры $\alpha = 60^\circ$ в различные моменты времени: *a* – 0.2 мкс; *b* – 0.4 мкс; *c* – 0.6 мкс; *d* – 0.8 мкс; *e* – 1.0 мкс; *f* – 1.1 мкс

Fig. 5. Numerical solution to the problem of the interaction between the impactor and the protective shield for a corrugation angle $\alpha = 60^\circ$ at different time instants: (a) 0.2, (b) 0.4, (c) 0.6, (d) 0.8, (e) 1.0, and (f) 1.1 μ s

Для угла соударения 60° характерно отсутствие направленного вдоль траектории ударника кумулятивного эффекта, проявляющегося при прямом соударении в виде характерных шупальцеобразных локальных скоплений (как на рис. 4) высокоскоростных фрагментов. На рис. 6 представлено численное решение задачи для углов от $0, 30$ и 60° в момент проникания ударника за защитный экран в градации по скорости движения фрагментов. Очевидно, что для большого угла

наклона кумулятивный выброс частиц в направлении защищаемой конструкции не представляет собой значимой угрозы.

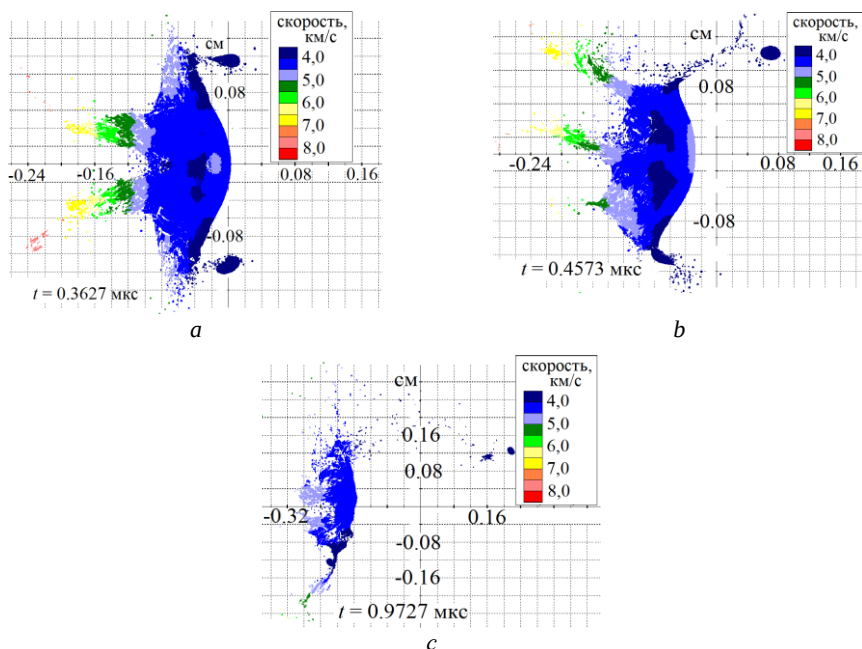


Рис. 6. Результат численного решения для угла гофры: $a - \alpha = 0^\circ$, $b - \alpha = 30^\circ$, $c - \alpha = 60^\circ$, в сечении с градацией по скорости
Fig. 6. Numerical solution at corrugation angles: $\alpha = (a) 0^\circ$, $(b) 30^\circ$, and $(c) 60^\circ$, in a section with speed gradation

Проведено сравнение параметров главного фрагмента запреградного облака продуктов разрушения (ЗОПР) в задачах с ударом в вертикальную проволоку для разных углов наклона гофры при условии одинакового пробега ударника. Будем считать пробегом ударника при проникновении за защитный экран расстояние между проекцией координаты центра масс ударника в начальный и конечный момент расчета на прямую, образованную первоначальной координатой ударника и вектором его скорости, учитывая, что в начальный момент времени ударник вплотную подошел к преграде. За основу в данной работе взят максимальный пробег ударника при проникновении за защитный экран с параметром $\alpha = 60^\circ$, который составил 4.3 мм. Выбор экрана с параметром $\alpha = 60^\circ$ обусловлен фактором ограниченности вычислительных ресурсов, поскольку для экрана с параметром $\alpha = 75^\circ$ пробег ударника до проникновения за защитный экран составляет 8.35 мм, а время расчета во второй половине задач резко возрастает из-за роста числа вторичных фрагментов. Кроме того, вариант с параметром $\alpha = 75^\circ$ нецелесообразен ввиду появления значительного отделенного фрагмента (см. рис. 3, f), движущегося параллельно сетке и способного пробить ее на изгибе гофры.

В табл. 4 отражены полученные в результате ЧМ параметры ЗОПР в момент пробега ударника 4.3 мм в каждой задаче. Данное условие соблюдалось из пред-

положения, что габаритный размер защитного экрана, измеренный вдоль нормали к защищаемой стенке, в реальных конструкциях будет ограничен, и было бы логичным во всех задачах ЧМ исходить из равных условий по расстоянию между экраном и стенкой защищаемой конструкции.

Таблица 4

Основные характеристики заэкранного облака продуктов разрушения при пробеге ударника 4.3 мм при первоначальном контакте в вертикальной проволоке

Параметр	Угол наклона гофры, град.				
	0	15	30	45	60
V_{01} , км/с	4.008	4.006	3.971	4.030	4.003
d_{01} , мм	1.058	1.012	1.007	1.007	0.923
W_r , Дж	33.748	32.644	29.344	28.824	24.393
W_{mf} , Дж	13.935	12.196	11.951	12.630	9.632
M_{mf}/M_0	0.3515	0.3071	0.3029	0.3031	0.2333

Примечание. V_{01} – скорость центра ЗОПР, d_{01} – диаметр максимального фрагмента, W_r – суммарная кинетическая энергия продуктов разрушения, W_{mf} – кинетическая энергия максимального движущегося фрагмента.

Анализ полученных результатов в части параметров ЗОПР показывает, что скорость максимального фрагмента остается примерно равной в задачах с одинаковыми углом гофры, разница не превышает 1.5%. Как видно из таблицы, снижение опасности осколочных фрагментов при увеличении угла наклона гофры наблюдается для угла наклона $\alpha = 60^\circ$, однако тенденция более плавная, чем в табл. 3, где зафиксированы параметры ударника в момент проникания за экран, различный для каждого угла наклона.

Значение кинетической энергии максимального фрагмента для угла наклона $\alpha = 60^\circ$ составляет 69% от максимального значения энергии, зафиксированного для угла $\alpha = 0^\circ$, а соответственное значение суммарной кинетической энергии ЗОПР составляет 72% от максимального.

Рассмотрены задачи с различными вариантами положения первоначального контакта ударника и сеточной преграды, результаты представлены в табл. 5. Для сравнения характеристик выбраны значения при первоначальном контакте ударника и преграды в вертикальной проволоке.

Таблица 5

Суммарная кинетическая энергия ЗОПР, Дж при пробеге ударника 4.3 мм при различных вариантах первоначального контакта

Вариант первоначального контакта	Угол наклона гофры, град.				
	0	15	30	45	60
В центр просвета ячейки	34.025	32.989	29.587	28.243	24.137
В узел	32.254	31.548	29.070	27.939	23.812
В вертикальную проволоку	33.748	32.644	29.344	28.824	24.393
В горизонтальную проволоку		33.096	29.981	29.552	24.389
Расхождение min/max, %	5.20	4.68	3.04	5.46	2.38

Результаты решения задач ЧМ для различного первоначального положения точки контакта ударника и преграды показывают, что расхождение значения кинетической энергии

тической энергии в различных вариантах не превышает 5.5% (для угла $\alpha = 45^\circ$), минимальная разница наблюдается для угла $\alpha = 60^\circ$. Из полученных результатов следует также, что для задач с углом наклона гофры 0 и 15° заметна градация между обработкой экраном удара «в узел» и «в просвет», но при повышении угла наклона это различие практически исчезает.

Настоящее исследование подтверждает сделанные в работе [10] выводы об улучшении работоспособности защитного экрана при больших углах гофрирования. Среди представленных вариантов экранов наиболее эффективным с точки зрения угла наклона гофры является экран с $\alpha = 60^\circ$.

Заключение

Методом численного моделирования в лагранжевой 3D-постановке решен ряд задач высокоскоростного соударения сферического алюминиевого ударника с гофрированной преградой из стальной тканой сетки при различных углах наклона гофры, а также при различных положениях точки первоначального контакта ударника и преграды. Исследованы параметры запреградного облака продуктов разрушения, полученного в результате решения задач ЧМ.

Результаты численного моделирования согласуются с результатами проведенных на аналогичных конструкциях экспериментов. Подтвердилось предположение, что наклонная сеточная преграда эффективнее прямой преграды из сетки (с равной приведенной массой) за счет «эффекта терки», т.е. интенсивного дробления контактирующего края ударника. Определен оптимальный угол наклона гофры сеточного экрана, составляющий $\alpha = 60^\circ$, при условии одинакового пробега главного фрагмента осколочного облака в разных задачах. Анализ результатов ЧМ для различных положений точки первоначального контакта ударника с преградой показал, что для выбранных параметров проволоочной сетки и ударника различие положения не играет значительной роли, однако для задач с углом наклона гофры менее 30° экран лучше отрабатывает удар «в узел», чем удар «в просвет», при повышении угла наклона это различие практически исчезает. Кумулятивный эффект при заданной конфигурации ударника и конфигурациях экранов проявляется также только для углов наклона гофры не более 30° , причем наиболее опасной с точки зрения появления локального скопления высокоскоростных фрагментов является конфигурация с углом гофрирования 0° . Полученные выводы могут использоваться при проектировании сеточных экранов для защиты от метеорно-техногенных воздействий.

Список источников

1. Christiansen E.L., Kerr J.H. Mesh Double-Bumper Shield: A Low-Weight Alternative for Spacecraft Meteoroid and Orbital Debris Protection // International Journal of Impact Engineering. 1993. V. 14. P. 169–180. doi: 10.1016/0734-743X(93)90018-3
2. Lin M., Pang B.J., Cheng J. Experimental and Numerical Study on the Mesh Bumper by Hypervelocity Impact // Advanced Materials Research. 2012. V. 457–458. P. 108–112. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMR.457-458.108
3. Guan G.S., Niu R.T. Numerical simulation of hypervelocity impact on mesh bumper causing fragmentation and ejection // Key Engineering Materials. 2013. V. 525–526. P. 401–404. doi: 10.4028/www.scientific.net/KEM.525-526.401

4. Guan G.S., Pu D.D., Ha Y. Investigation into Damage of Stainless Steel Mesh/AL Plate Multi-Shock Shield under Hypervelocity AL-Spheres Impact // *Key Engineering Materials*. 2013. V. 525–526. P. 397–400. doi: 10.4028/www.scientific.net/KEM.525-526.397
5. Myagkov N.N., Shumikhin T.A. Studying the redistribution of kinetic energy between the morphologically distinct parts of the fragments cloud formed from high-velocity impact fragmentation of an aluminum sphere on a steel mesh // *AIMS Materials Science*. 2019. V. 6 (5). P. 685–696. doi: 10.3934/mat.2019.5.685
6. Добрица Д.Б., Пашков С.В., Христенко Ю.Ф. Исследование эффективности сеточных гофрированных экранов для защиты космических аппаратов от воздействия метеоро-техногенных частиц // *Космические исследования*. 2020. Т. 58, № 2. С. 131–137. doi: 10.31857/S0023420620020028
7. Dobritsa D.B., Pashkov S.V., Khristenko Yu.F. Protective properties of pleated wire mesh shields for spacecraft protection against meteoroids and space debris // *AIP Conference Proceedings*. 2021. V. 2318. Art. 140006. doi: 10.1063/5.0037000
8. Dobritsa D.B., Yashchenko B.Yu., Pashkov S.V., Khristenko Yu.F. About evaluating the durability of corrugated mesh screens for meteoroid protection // *AIP Conference Proceedings*. 2021. V. 2318. Art. 140004. doi: 10.1063/5.0037002
9. Добрица Д.Б., Яценко Б.Ю., Пашков С.В., Христенко Ю.Ф. Экспериментальное исследование стойкости гофрированных сеточных противометеорных экранов // *Вестник НПО им. С.А. Лавочкина*. 2021. № 1 (51). С. 24–32. doi: 10.26162/LS.2021.51.1.004
10. Добрица Д.Б., Яценко Б.Ю., Пашков С.В., Христенко Ю.Ф. К вопросу о геометрии гофрирования и ее влиянии на защитные свойства противометеорного экрана из металлической сетки // *Вестник НПО им. С.А. Лавочкина*. 2021. № 4 (54). С. 50–55. doi: 10.26162/LS.2021.54.4.008
11. Myagkov N.N., Shumikhin T.A., Bezrukov L.N. Experimental and numerical study of peculiarities at high-velocity interaction between a projectile and discrete bumpers // *International Journal of Impact Engineering*. 2010. V. 37. P. 980–994. doi: 10.1016/j.ijimpeng.2010.04.001
12. Физика взрыва : в 2 т. / под ред. Л.П. Орленко. Изд. 3-е, перераб. М. : Физматлит, 2002. Т. 2. 656 с.
13. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений // *Вычислительные методы в гидродинамике* / под ред. С.С. Григоряна, Ю.Д. Шмыглевского. М. : Мир, 1967. С. 212–263.
14. Wilkins M.L. Computer simulation of dynamic phenomena. Berlin : Springer-Verlag, 1999. 246 p.
15. Фомин В.М., Гулидов А.И., Сапожников Г.А., Шабалин И.И., Бабаков В.А., Куропатенко В.Ф., Киселев А.Б., Тришин Ю.А., Садырин А.И., Киселев С.П., Головнев И.Ф. Высокоскоростное взаимодействие тел. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 1999. 600 с.
16. Гулидов А.И., Шабалин И.И. Численная реализация граничных условий в динамических контактных задачах. Новосибирск, 1987. 37 с. (Препринт ИТПМ СО АН СССР; № 12-87).
17. Гулидов А.И., Шабалин И.И. Расчет контактных границ с учетом трения при динамическом взаимодействии деформируемых тел // *Численные методы решения задач теории упругости и пластичности : материалы IX Всесоюз. конф.* Новосибирск, 1988. С. 70–75.
18. Chen Y.M., Wilkins M.L. Stress analysis of crack problems with a three-dimensional, time dependent computer program // *International Journal of Fracture*. 1976. V. 12 (4). P. 607–617.
19. Теоретические и экспериментальные исследования высокоскоростного воздействия тел / под ред. А.В. Герасимова. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2007. 572 с.
20. Steinberg D.J., Cochran S.G., Guinan M.W. A constitutive model for metals applicable at high-strain rate // *Journal of Applied Physics*. 1980. V. 51 (3). P. 1498–1504. doi: 10.1063/1.327799
21. Галанин М.П., Щеглов И.А. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: прямые методы. М., 2006. 32 с. (Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша; № 10).

References

1. Christiansen E.L., Kerr J.H. (1993) Mesh double-bumper shield: a low-weight alternative for spacecraft meteoroid and orbital debris protection. *International Journal of Impact Engineering*. 14. pp. 169–180. doi: 10.1016/0734-743X(93)90018-3
2. Lin M., Pang B.J., Cheng J. (2012) Experimental and numerical study on the mesh bumper by hypervelocity impact. *Advanced Materials Research*. 457–458. pp. 108–112. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMR.457-458.108
3. Guan G.S., Niu R.T. (2013) Numerical simulation of hypervelocity impact on mesh bumper causing fragmentation and ejection. *Key Engineering Materials*. 525–526. pp. 401–404. doi: 10.4028/www.scientific.net/KEM.525-526.401
4. Guan G.S., Pu D.D., Ha Y. (2013) Investigation into damage of stainless steel mesh/AL plate multi-shock shield under hypervelocity AL-spheres impact. *Key Engineering Materials*. 525–526. pp. 397–400. doi: 10.4028/www.scientific.net/KEM.525-526.397
5. Myagkov N.N., Shumikhin T.A. (2019) Studying the redistribution of kinetic energy between the morphologically distinct parts of the fragments cloud formed from high-velocity impact fragmentation of an aluminum sphere on a steel mesh. *AIMS Materials Science*. 6(5). pp. 685–696. doi: 10.3934/matricsci.2019.5.685
6. Dobritsa D.B., Pashkov S.V., Khristenko Yu.F. (2020) Study of the efficiency of corrugated mesh shields for spacecraft protection against meteoroids and manmade space debris. *Cosmic Research*. 58(2). pp. 105–110. doi: 10.1134/S0010952520020021
7. Dobritsa D.B., Pashkov S.V., Khristenko Yu.F. (2021) Protective properties of pleated wire mesh shields for spacecraft protection against meteoroids and space debris. *AIP Conference Proceedings*. 2318. Article 140006. doi: 10.1063/5.0037000
8. Dobritsa D.B., Yashchenko B.Yu., Pashkov S.V., Khristenko Yu.F. (2021) About evaluating the durability of corrugated mesh screens for meteoroid protection. *AIP Conference Proceedings*. 2318. Article 140004. doi: 10.1063/5.0037002
9. Dobritsa D.B., Yashchenko B.Yu., Pashkov S.V., Khristenko Yu.F. (2021) Eksperimental'noe issledovanie stoykosti gofrirovannykh setochnykh protivometeornykh ekranov [Experimental study of the resistance of corrugated mesh micrometeoroid/orbital debris shields]. *Vestnik NPO im. S.A. Lavochkina*. 51(1). pp. 24–32. doi: 10.26162/LS.2021.51.1.004
10. Dobritsa D.B., Yashchenko B.Yu., Pashkov S.V., Khristenko Yu.F. (2021) K voprosu o geometrii gofrirovaniya i eyo vliyaniya na zashchitnye svoystva protivometeorogo ekrana iz metallicheskoj setki [On the question of the geometry of corrugation and its influence on the protective properties of the metal mesh meteoroid protection shield]. *Vestnik NPO im. S.A. Lavochkina*. 54(4). pp. 50–55. doi: 10.26162/LS.2021.54.4.008
11. Myagkov N.N., Shumikhin T.A., Bezrukov L.N. (2010) Experimental and numerical study of peculiarities at high-velocity interaction between a projectile and discrete bumpers. *International Journal of Impact Engineering*. 37. pp. 980–994. doi: 10.1016/j.ijimpeng.2010.04.001
12. *Fizika vzryva* [Physics of explosion] (2002) Ed. by Orlenko L.P. Moscow: Fizmatlit.
13. Wilkins M.L. (1964) Calculation of elastic-plastic flow. *Methods of Computational Physics*. 3.
14. Wilkins M.L. (1999) *Computer Simulation of Dynamic Phenomena*. Berlin: Springer-Verlag.
15. Fomin V.M., Gulidov A.I., Sapozhnikov G.A., Shabalin I.I., Babakov V.A., Kuropatenko V.F., Kiselev A.B., Trishin Yu.A., Sadyrin A.I., Kiselev S.P., Golovnev I.F. (1999) *Vysokoskorostnoe vzaimodeystvie tel* [High-speed interaction of bodies]. Novosibirsk: Izdatel'stvo SO RAN.
16. Gulidov A.I., Shabalin I.I. (1987) *Chislennaya realizatsiya granichnykh usloviy v dinamicheskikh kontaktnykh zadachakh* [Numerical implementation of boundary conditions in dynamic contact problems]. Novosibirsk: Preprint / ITPM SO AN SSSR.
17. Gulidov A.I., Shabalin I.I. (1988) Raschet kontaktnykh granits s uchetom treniya pri dinamicheskom vzaimodeystvii deformiruemykh tel [Calculation of contact boundaries with account for friction at a dynamic interaction of deformable bodies]. *Proceedings of the IX All-*

- Union Conference on Numerical Methods for solving the problems of the theory of elasticity and plasticity, Novosibirsk. pp. 70–75.*
18. Chen Y.M., Wilkins M.L. (1976) Stress analysis of crack problems with a three-dimensional, time dependent computer program. *International Journal of Fracture*. 12(4). pp. 607–617. doi: 10.1007/BF00034646
 19. *Teoreticheskie i eksperimental'nye issledovaniya vysokoskorostnogo vozdeystviya tel* [Theoretical and experimental studies of high-speed interaction of bodies] (2007) Ed. by Gerasimov A.V. Tomsk: Izdatel'stvo Tomskogo Universiteta.
 20. Steinberg D.J., Cochran S.G., Guinan M.W. (1980) A constitutive model for metals applicable at high-strain rate. *Journal of Applied Physics*. 51(3). pp. 1498–1504. doi: 10.1063/1.327799
 21. Galanin M.P., Sheglov I.A. (2006) Razrabotka i realizatsiya algoritmov trekhmernoy triangulyatsii slozhnykh prostranstvennykh oblastey: pryamye metody [Development and implementation of algorithms for constrained volume triangulations: direct methods]. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha – Keldysh Institute Preprints*. 10. pp. 1–32.

Сведения об авторах:

Добрица Дмитрий Борисович – кандидат технических наук, ведущий математик отдела «Исследования внешних воздействующих факторов и проектирования защиты от них», АО «НПО им. С.А. Лавочкина», Химки, Россия. E-mail: dobritsaDB@laspase.ru

Христенко Юрий Федорович – старший научный сотрудник, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник отдела механики деформируемого твердого тела Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: hrs@niipmm.tsu.ru

Information about the authors:

Dobritsa Dmitriy B. (Candidate of Technical Sciences, Lavochkin Association, Khimki, Russian Federation). E-mail: dobritsaDB@laspase.ru

Khristenko Yuriy F. (Doctor of Technical Sciences, Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: hrs@niipmm.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 04.07.2022; принята к публикации 31.03.2023

The article was submitted 04.07.2022; accepted for publication 31.03.2023

Научная статья

УДК 531.3, 532.1

doi: 10.17223/19988621/82/8

Подводный старт суперкавитирующего ударника из лабораторной баллистической установки

Александр Николаевич Ищенко¹, Виктор Владимирович Буркин²,
Алексей Сергеевич Дьячковский³, Андрей Владимирович Чупашев⁴

1, 2, 3, 4 Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ ichan@niipmm.tsu.ru

² v.v.burkin@mail.ru

³ lex_okha@mail.ru

⁴ chupashevav@gmail.ru

Аннотация. Рассматриваются особенности подводного старта суперкавитирующих ударников из канала лабораторной баллистической установки. Приводятся примеры экспериментальной реализации подводного выстрела и описываются быстропротекающие высокоэнергетические процессы, сопровождающие выход ударника из канала баллистической установки в воду. Проводится баллистическое проектирование перспективной лабораторной метательной установки и делаются оценки дальности суперкавитирующего движения ударников, выпущенных из ее канала.

Ключевые слова: гидробаллистическая трасса, суперкавитация, ударник, кавитатор, баллистическая установка, подводный выстрел

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-19-00233)

Для цитирования: Ищенко А.Н., Буркин В.В., Дьячковский А.С., Чупашев А.В. Подводный старт суперкавитирующего ударника из лабораторной баллистической установки // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 82. С. 97–107. doi: 10.17223/19988621/82/8

Original article

Underwater launching of a supercavitating projectile out of a ballistic test setup

Aleksandr N. Ishchenko¹, Viktor V. Burkin²,
Aleksey S. D'yachkovskiy³, Andrey V. Chupashev⁴

1, 2, 3, 4 Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ ichan@niipmm.tsu.ru

² v.v.burkin@mail.ru

³ lex_okha@mail.ru⁴ chupashevav@gmail.ru

Abstract. This paper considers the investigation of the high-speed motion of specifically-shaped inert bodies (projectiles) in water. The main purpose is to determine the peculiar properties of underwater launching of supercavitating projectiles out of the bore of a test ballistic setup. Preliminary calculations of the inner ballistic parameters of a shot are performed for the given launcher and then compared with the corresponding experimental data. Examples of experimentally fired underwater shots are presented. The high-speed high-energy processes associated with the projectile released out of the bore and entering water are described. It is shown that during the underwater launching, the complex gas-dynamic conditions of multi-phase processes following the projectile release out of the bore can significantly affect the trajectory of its further motion in water. Using the experimental and calculation methods with the classical loading scheme and an acceleration bore 0.5 mm long or less under given conditions, it has been determined that the pressure at the accelerator exit increases stepwise and can significantly change the flow conditions of the projectile at the start and its further trajectory. Taking into consideration the revealed peculiarities of underwater shots and a set of technical specifications and mass-size parameters, a perspective launching ballistic setup has been designed and used to estimate the motion range of the released supercavitating projectile.

Keywords: hydroballistic track, supercavitation, projectile, cavitator, ballistic setup, underwater launch

Acknowledgments: This research was supported by the Russian Science Foundation (project No. 19-19-00233).

For citation: Ishchenko, A.N., Burkin, V.V., D'yachkovskiy, A.S., Chupashev A.V. (2023) Underwater launching of a supercavitating projectile out of a ballistic test setup. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 82. pp. 97–107. doi: 10.17223/19988621/82/8

Введение

Высокоскоростное движение инертных твердых тел в воде возможно благодаря явлению суперкавитации [1–2], при котором большая часть тела особой формы (ударника) не граничит с водой, а движется в разреженной полости, попутно в ней стабилизируясь [3–9]. Проектирование корпусов ударников под различные подводные баллистические задачи является актуальным направлением исследований, так как в данной сфере общепринятые теоретические подходы к проектированию формы тел еще не сформированы, а существующие образцы подводных ударников по большей части являются продуктами экспериментальных исследований.

На базе НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета производятся экспериментально-теоретические исследования высоккоэнергетических быстротекущих процессов в различных средах. На гидробаллистической трассе института проводятся лабораторные баллистические испытания функционирования в воде ударников различных типов [10]. В [11] приведены некоторые подходы для оценки дальности движения суперкавитирующих ударников в воде с учетом различных глубин залегания траектории, описаны неко-

торые экспериментальные результаты в диапазоне скоростей метания до 1600 м/с, дающие хорошее согласование с расчетами. Там же показано, что для обеспечения наибольшей дальности движения на различных глубинах требуется сообщить ударнику как можно большее количество кинетической энергии при старте. Одним из перспективных способов решения этой задачи является пушечный старт ударника. Поэтому для эффективного применения суперкавитирующих ударников под водой требуется решать взаимосвязанные задачи проектирования их формы под заданные условия движения, проектирования баллистической установки и условий ее заряжания для обеспечения начальной скорости входа в воду.

Сам процесс выстрела предъявляет к конструкции ударника и постановке эксперимента ряд требований. Например, ранее отработанная схема метания подкалиберного ударника подразумевает помещение ударника в сборку, состоящую из ведущих устройств и поддона, которые перед входом в воду необходимо увести от ударника [9]. Это требует наличия воздушного участка траектории, отделяющего срез канала ствола установки от поверхности воды. В таком случае обеспечение минимального угла атаки ударника перед касанием границы раздела сред становится весьма нетривиальной задачей, так как суперкавитирующие ударники обычно неустойчивы при движении на воздухе. Из положительных преимуществ описанной схемы метания следует отметить возможность достижения высоких скоростей ударника и изменения его размеров в широком диапазоне [10].

В некоторых практических приложениях может потребоваться реализация старта суперкавитирующего ударника из погруженной в воду баллистической установки. В этом случае применяемые при метании подкалиберного ударника ведущие устройства могут существенно повлиять на начальный участок движения ударника в воде. Поэтому в данном случае целесообразно применение калиберных ударников с ведущими поясками, которые остаются на корпусе ударника на траектории в воде. Изменение конструкции ударника приводит к изменению калибра баллистической установки, узлов ее сопряжения с трассой и определению новых условий заряжания.

Цель работы заключается в изучении особенностей подводного пушечного старта суперкавитирующего ударника и оценке параметров перспективной лабораторной метательной установки для подводного старта суперкавитирующих ударников.

Проведение лабораторных испытаний подводного пушечного старта суперкавитирующего ударника

В основу проектируемой установки и ударников легли материалы предыдущих работ, в которых применялись ударники диаметром 7 мм [10]. Ударники были снабжены ведущими поясками различного типа, вследствие чего потребовалось применение установки со стволом диаметром 8 мм.

Задача отработки способа обтюрирования и центрирования ударника в канале установки решалась с применением методов высокоскоростной видеорегистрации. Было разработано и изготовлено несколько образцов суперкавитирующих ударников из различных материалов с разными ведущими поясками (рис. 1). Масса образца ударника из меди составляла 27 г, из стали – 23 г, из сплава ВНЖ – 53 г.

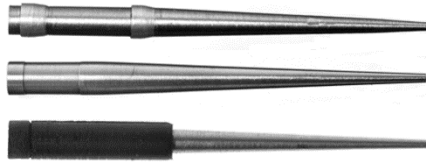


Рис. 1. Внешний вид некоторых образцов суперкавитирующих ударников
Fig. 1. Design of some samples of supercavitating projectiles

Подводный выстрел сопровождается повышенным динамическим воздействием на воду в баллистической трассе из-за истечения струи пороховых газов, которая может вносить возмущения на начальном участке движения ударника и сказываться на прицельности стрельбы. Для оценки влияния подводного старта на параметры движения ударника в рамках данной работы проведена специальная серия экспериментов. Предварительные испытания проводились на баллистической установке с диаметром ускорительного канала 8 мм, длиной 0.2 м, конструкция которой позволяет погрузить ее под воду и изолировать ускорительный канал от воды. В этой серии также выяснялась величина давления форсирования для новых ударников, влияющая на газодинамическую картину выстрела.

Для осуществления подводного старта суперкавитирующего ударника в условиях лабораторного стенда потребовалось провести модернизацию гидробаллистической трассы под новые условия эксперимента. Общая схема проведения испытаний приведена на рис. 2.

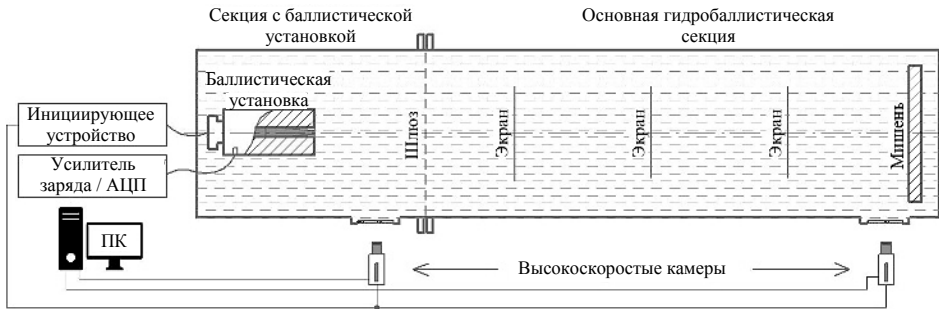


Рис. 2. Основные элементы экспериментальной установки
Fig. 2. Basic elements of the experimental setup

Металлическая мишень устанавливается в воде на расстоянии 11.8 м от дульного среза баллистической установки. Регистрация начальной V_0 и конечной $V_{11.8}$ скоростей ударника, а также наблюдение за сопровождающими выход ударника из канала баллистической установки процессами производится с применением высокоскоростной съемки. По мере необходимости дополнительные камеры устанавливаются на любом участке траектории, например у мишени. На трассе в воде установлены лавсановые экраны, по пробоинам в которых можно восстановить траекторию движения ударника. Перед заряданием разделительный шлюз перекрывается и из секции с баллистической установкой удаляется вода. После помещения ударника в ускорительный канал дульный срез баллистической установки герметизируется от воды с помощью тонкой полимерной мембраны. После

заряжания секция с баллистической установкой затопливается водой и объединяется с основной гидробаллистической трассой. Таким образом, исключается попадание воды в канал ствола.

В ходе выполнения программы экспериментальных исследований отработывался ряд методических и конструкционных решений, обеспечивающих штатное ускорение ударника в стволе до максимально возможных скоростей при сохранении максимального давления в камере баллистической установки, не превышающего 400 МПа. Также отработывались технологические решения, позволяющие сохранять целостность ударника при движении по ускорительному каналу и при последующем глиссировании в воде.

Для определения параметров заряжания баллистической установки был произведен расчет внутрибаллистических параметров выстрела с применением математической модели и численной методики расчета внутрикамерных процессов [12]. На рис. 3 представлены результаты расчета в виде зависимости дульной скорости ударника (*a*) и величины давления, реализующегося на срезе канала установки (*b*) от длины ускорительного канала.

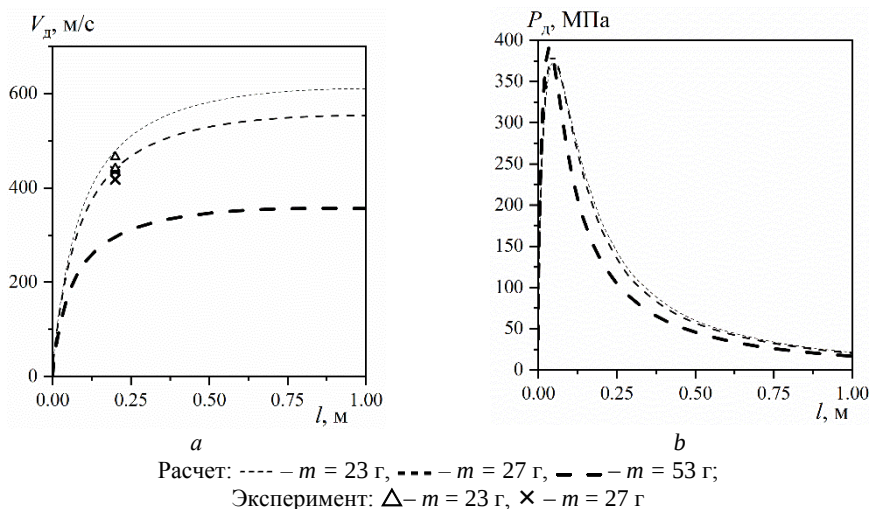


Рис. 3. Зависимость дульной скорости ударников различных масс (*a*) и величины дульного давления (*b*) от длины ускорительного канала
Fig. 3. Dependences of the (*a*) muzzle velocity of projectiles of various masses and (*b*) muzzle pressure on the acceleration bore length

На рис. 3, *a* символами показаны экспериментальные данные для ударников массами 23 и 27 г, подтверждающие воспроизводимость дульной скорости и достоверность результатов расчетов. Согласно расчету (см. рис. 3, *b*), при выходе ударника из канала ускорителя давление на дульном срезе баллистической установки достигает 180 МПа. В этих условиях скорость струи пороховых газов превышает скорость ударника, и ее истечение в окружающую среду может сказаться на формировании суперкаверны и движении ударника. На рис. 4, *a, б* приведены последовательности фотографий, на которых запечатлены два характерных сценария развития процессов при выходе ударника из канала.

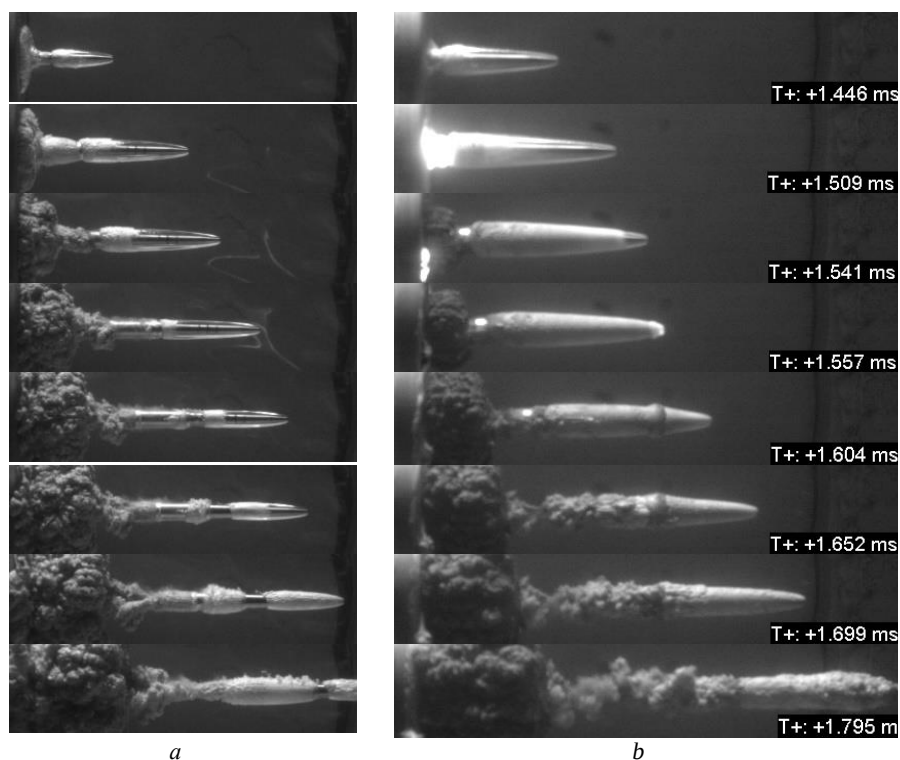


Рис. 4. Фотографии процесса входа ударника в воду из канала баллистической установки:
a – без проникновения пороховых газов в суперкаверну;
b – с проникновением пороховых газов в суперкаверну

Fig. 4. Pictures of the projectile entering water out of a ballistic setup bore:
 (a) without and (b) with penetration of powder gases into a supercavern

В обоих случаях, до тех пор пока ударник полностью не покидает дульный срез, прорыва пороховых газов в воду из ускорительного канала не наблюдается, вокруг ударника формируется прозрачная суперкаверна. В случае рис. 4, *a* после освобождения ударником канала ускорителя начинается истечение пороховых газов в воду с образованием темной полости, свидетельствующей о присутствии в ней продуктов сгорания порохового заряда. Одновременно поверхность суперкаверны вокруг ударника теряет прозрачность, что указывает на присутствие возмущений на ее поверхности. Вместе с этим длина и диаметр суперкаверны уменьшаются, и отдельные участки корпуса ударника несимметрично замываются водой. Наблюдаемое сужение каверны можно объяснить локальным повышением давления в среде вокруг дульного среза метательной установки.

Увеличением радиуса кавитатора можно компенсировать сужение суперкаверны и предотвратить «замывание» ударника. В таком случае (см. рис. 4, *b*), после того как ударник покидает канал ускорителя, струя продуктов сгорания устремляется в суперкаверну, постепенно обгоняя ударник. В момент времени $T = 1.557$ мс (см. рис. 4, *b*) происходит столкновение фронта продуктов сгорания с передней частью суперкаверны, в месте удара наблюдается кратковременная

вспышка, происходит локальное расширение границ полости. К моменту времени $T = 1.795$ мс (см. рис. 4, *b*) основная масса продуктов сгорания, попавшая в каверну, достигает передней ее части, чем объясняются расширение и хаотическое возмущение ее границ вокруг ударника.

Влияние наблюдаемых на рис. 4 процессов на движение ударника в воде можно проследить по изменению параметров его движения на траектории. На рис. 5 приведены зависимости скорости ударников от пройденного пути в воде (*a*) и траектории суперкавитирующих ударников, полученные по пробойнам в лавсановых экранах (*b*).

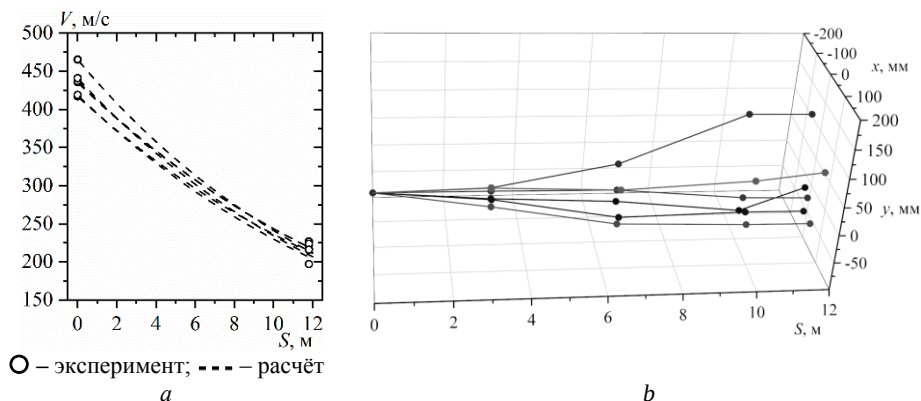


Рис. 5. Зависимости скоростей (*a*) и траекторий движения (*b*) суперкавитирующих ударников от пройденного пути в воде

Fig. 5. Dependences of the (*a*) velocities and (*b*) motion trajectories of supercavitating projectiles on the distance traveled in water

В расчете полагается, что ударник движется в режиме суперкавитации, т.е. касается воды только по поверхности кавитатора, и его перемещение рассматривается как движение плоского диска в воде с радиусом кавитатора и массой, равной массе всего ударника [10]. Отклонение расчетных значений скорости от экспериментальных в конце траектории ($S = 11.8$ м) составило не более 3 %, что свидетельствует о реализации суперкавитирующего режима движения ударников на траектории в воде и справедливости применяемых в расчетах допущений. Пробойны от ударников в мишени, расположенной на дистанции 11.8 м, укладываются в круг радиусом 125 мм (см. рис. 5, *b*). Необходимо отметить, что наблюдаемое отклонение ударников формируется после выхода из ствола в самом начале траектории, далее ударники преимущественно сохраняют приобретенное направление движения. Таким образом, подтверждается, что возмущения, полученные при взаимодействии ударника и каверны со струей продуктов сгорания, могут существенно сказаться на траектории его дальнейшего движения в воде. Очевидно, что амплитуда таких возмущений будет тем больше, чем выше дульное давление выстрела и выше скорость истечения пороховых газов из канала установки.

Данное обстоятельство необходимо учитывать при проектировании баллистической установки для осуществления подводного старта суперкавитирующих ударников и их последующего прицельного движения в воде.

Расчет параметров лабораторной метательной установки для подводного старта суперкавитирующего ударника

Баллистическое проектирование метательной установки производилось на основе следующих исходных данных: диаметр канала – 8 мм, метаемые массы – 20–55 г, объем зарядной камеры – 20 см³, максимальное давление в зарядной камере – 400 МПа. Требовалось определить длину канала, чтобы выдерживалось оптимальное соотношение между начальной скоростью и дальностью суперкавитирующего движения ударника в воде. Оценка параметров лабораторной метательной установки для подводного старта суперкавитирующих ударников проводилась с привлечением методики расчета внутрибаллистических процессов, описанной в [12].

На рис. 6 приведены результаты расчета параметров выстрела для ударников массами 23, 27 и 53 г. Показаны зависимости давления на срезе канала ускорителя, зависимости дульной скорости ударника (*a*) и дальности суперкавитирующего движения ударников в воде (на глубине $h = 0.25$ м) (*b*) от длины ускорительного канала.

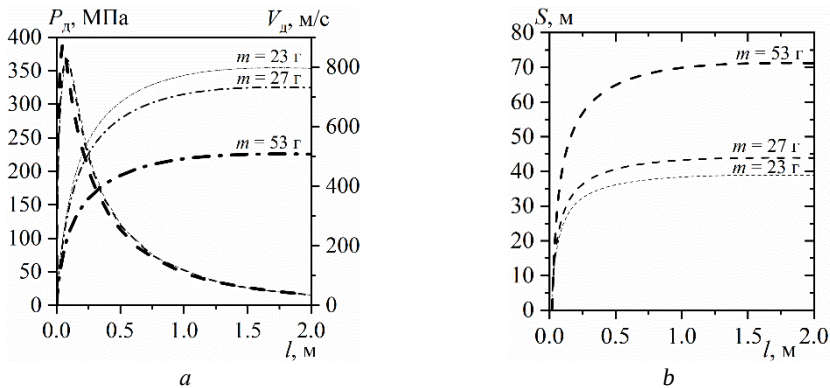


Рис. 6. Зависимости дульного давления (штриховая линия) и скорости (штрихпунктирная линия) (*a*), дальности суперкавитирующего движения в воде ($h = 0.25$ м) (*b*) от длины ускорительного канала для ударников различных масс

Fig. 6. Dependences of the (*a*) muzzle pressure (the dashed line) and muzzle velocity (the dash-dot line) and (*b*) the range of supercavitating motion in water ($h = 0.25$ м) on the acceleration bore length for projectiles of various masses

Согласно расчету, для достижения максимальной дульной скорости и дальности суперкавитирующего движения на глубине траектории $h = 0.25$ м целесообразно применение ускорительного канала длиной не более 1 м, при этом достигается горизонтальная дальность суперкавитирующего движения в воде до 38, 43 и 70 м для ударников массами 23, 27 и 53 г соответственно. Величина дульного давления при длине ствола в 1 м составит 53 МПа (см. рис. 6, *a*). Это в 3.6 раза меньше, чем при длине ствола в 0.2 м, что существенно снижает воздействие струи пороховых газов на ударник и каверну в период последействия. Дальнейшее удлинение канала ускорителя еще больше снижает величину дульного давления, однако увеличивает габариты и массу баллистической установки, обеспечивая прирост скорости и дальности не более чем на 3%.

С ростом глубины погружения траектории увеличивается величина гидростатического давления, что приводит к сужению суперкаверны [1, 11]. На рис. 7 приведены расчетные зависимости дальности суперкавитирующего движения в горизонтальной плоскости для ударников рассматриваемых масс, выпущенных из ускорительного канала длиной 1 м.

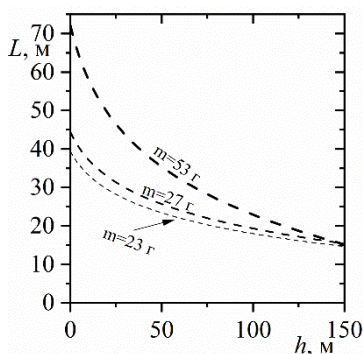


Рис. 7. Зависимость дальности суперкавитирующего движения ударника от глубины залегания траектории

Fig. 7. Dependence of the range of projectile supercavitating motion on the underwater depth of the trajectory

Согласно расчетным зависимостям на рис. 7, при длине ускорительного канала 1 м ударники всех рассматриваемых конфигураций, двигаясь в режиме суперкавитационного обтекания, способны преодолевать в воде не менее 15 м пути на глубинах до 150 м.

Заключение

В ходе проведенного исследования произведена модернизация суперкавитирующих ударников и предложены технические решения, позволяющие проводить пушечный старт ударников из погруженной в воду баллистической установки в лабораторных условиях. Изучены особенности быстропротекающих высокоэнергетических процессов, сопровождающих выход ударника из канала баллистической установки в воду. Полученные данные могут быть использованы для верификации результатов расчетов параметров периода последствия пороховых газов при пушечном старте ударников из затопленного ствола.

Расчетно-экспериментальным путем показано, что в условиях, схожих с условиями гидробаллистического стенда ($h = 0.25$ м), применение ускорительного канала длиной 1 м для метания ударников массами 23, 27 и 53 г обеспечит достижение горизонтальной дальности суперкавитирующего движения в воде 38, 43 и 70 м соответственно. На глубинах до 150 м ударники рассмотренных конфигураций способны преодолевать в воде не менее 15 м пути.

Список источников

1. Логвинович Г.В. Некоторые вопросы глиссирования и кавитации // Труды ЦАГИ. 1980. № 2052. С. 250–270.
2. Пирсол И. Кавитация / пер. с англ. Ю.Ф. Журавлева. М. : Мир, 1975. 95 с.

3. Васин А.Д. Задачи гидродинамики и гидроупругости высокоскоростного движения в воде : дис. д-ра техн. наук. М., 1999. 282 с.
4. Савченко Ю.Н., Власенко Ю.Д., Семенов В.Н. Экспериментальные исследования высокоскоростных кавитационных течений // Гидромеханика. 1998. № 72. С. 103–111.
5. Савченко Ю.Н. Моделирование суперкавитационных процессов // Прикладная гидромеханика. 2000. Т. 2. № 3. С. 75–86.
6. Ahn S.S. An integrated approach to the design of supercavitating underwater vehicles : Ph.D. dissertation / School of Aerospace Engineering Georgia Institute of Technology. Atlanta, GA, 2007.
7. Vlasenko Y. Experimental investigation of supercavitation flow regimes at subsonic and transonic speeds // Proc. In Fifth Int. Symp. on Cavitation (Osaka, Japan). 8 p. doi: 10.1615/InterJFluidMechRes.v28.i5.110
8. Guo Z., Zhang W., Xiao X., Wei G., Ren P. An investigation into horizontal water entry behaviors of projectiles with different nose shapes // International Journal Impact Engineering. 2012. V. 49. P. 43–60.
9. Ping W., Jian H., Tingfeng C. Analysis on the stability of supercavitation projectile // Applied Mechanics and Materials. 2012. V. 157–158. P. 58–61.
10. Ischenko A., Burkin V., Diachkovskii A. et al. Visualization of high-speed interaction of bodies in water // AIP Conference Proceedings. 2016. V. 1770. Art. 030011.
11. Ищенко А.Н., Буркин В.В., Дьячковский А.С. и др. Исследование параметров движения инертных конических моделей в воде // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 71. С. 78–89.
12. Хоменко Ю.П., Ищенко А.Н., Касимов В.З. Математическое моделирование внутрибаллистических процессов в ствольных системах. Новосибирск : Изд-во СО РАН. 1999. 255 с.

References

1. Logvinovich G.V. (1980) Nekotorye voprosy glissirovaniya i kavitatsii [Some issues of planing and cavitation]. *Trudy TSAGI – TsAGI Science Journal*. 2052. pp. 250–270.
2. Pirsol I. (1972) *Cavitation*. London: Mills and Boon.
3. Vasin A.D. (1999) *Zadachi gidrodinamiki i gidrouprugosti vysokoskorostnogo dvizheniya v vode* [Problems of hydrodynamics and hydroelasticity of high-speed motion in water]. Dissertation, State Research Center TsAGI.
4. Savchenko Yu.N., Vlasenko Yu.D., Semenenko V.N. (1998) Eksperimental'nye issledovaniya vysokoskorostnykh kavitatsionnykh techeniy [Experimental studies of high-speed cavitation flows]. *Gidromekhanika*. 72. pp. 103–111.
5. Savchenko Yu.N. (2000) Modelirovanie superkavitatsionnykh protsessov [Modeling of supercavitation processes]. *Prikladnaya gidromekhanika*. 2(3). pp. 75–86.
6. Ahn S.S. (2007) *An Integrated Approach to the Design of Supercavitating Underwater Vehicles*. Dissertation, Georgia Institute of Technology.
7. Vlasenko Yu. (2003) Experimental investigation of supercavitation flow regimes at subsonic and transonic speeds. *Proceedings of the Fifth International Symposium on Cavitation, Osaka, Japan*.
8. Guo Z., Zhang W., Xiao X., Wei G., Ren P. (2012) An investigation into horizontal water entry behaviors of projectiles with different nose shapes. *International Journal Impact Engineering*. 49. pp. 43–60. doi: 10.1016/j.ijimpeng.2012.04.004
9. Ping W., Jian H., Tingfeng C. (2012) Analysis on the stability of supercavitation projectile. *Applied Mechanics and Materials*. 157–158. pp. 58–61. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMM.157-158.58
10. Ischenko A.N., Burkin V.V., Diachkovskii, A.S., Korolov L.V., Chupashev A.V., Zyкова A.I. (2016) Visualization of high-speed interaction of bodies in water. *AIP Conference Proceedings*. 1770. Article 030011.

11. Ishchenko A.N., Burkin V.V., D'yachkovskiy A.S., Chupashev A.V. (2021) Issledovanie parametrov dvizheniya inertnykh konicheskikh modeley v vode [Investigation of underwater motion parameters for inert conical models]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 71. pp. 78–89. doi: 10.17223/19988621/71/7
12. Khomenko Yu.P., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z. (1999) *Matematicheskoe modelirovanie vnutriballisticheskikh protsessov v stvol'nykh sistemakh* [Mathematic simulation of intraballistic processes in barrel systems]. Novosibirsk: SB RAS Publishing House.

Сведения об авторах:

Ищенко Александр Николаевич – доктор физико-математических наук, директор Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

Буркин Виктор Владимирович – кандидат физико-математических наук, заведующий сектором 71 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: v.v.burkin@mail.ru

Дьячковский Алексей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: lex_okha@mail.ru

Чупашев Андрей Владимирович – младший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: chupashevav@gmail.ru

Information about the authors:

Ishchenko Aleksandr N. (Doctor of Physics and Mathematics, Director, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

Burkin Viktor V. (Candidate of Physics and Mathematics, Head of Department, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: v.v.burkin@mail.ru

D'yachkovskiy Aleksey S. (Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lex_okha@mail.ru

Chupashev Andrey V. (Junior Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: chupashevav@gmail.ru

Статья поступила в редакцию 27.10.2022; принята к публикации 31.03.2023

The article was submitted 27.10.2022; accepted for publication 31.03.2023

Научная статья

УДК 532.5

doi: 10.17223/19988621/82/9

Пассивная конвективная вентиляция в двойном воздушно-пористом слое с внутренним тепловыделением, зависящим от доли твердой фазы

Екатерина Андреевна Колчанова¹, Николай Викторович Колчанов²

^{1,2} *Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия*

¹ *kolchanovaea@gmail.com*

² *kolchanovn@gmail.com*

Аннотация. Численно, методом стрельбы, исследуется пороговое возбуждение тепловой конвекции воздуха в пористом тепловыделяющем массиве, ограниченном сверху воздушной областью. Такая двухслойная воздушно-пористая система расположена между двумя горизонтальными теплопроводными пластинами одинаковой температуры. Учитывается зависимость мощности тепловыделения от объемной доли твердой фазы. Зафиксировано понижение порога крупномасштабной и локальной конвекции с ростом доли твердой фазы в пористом субслое и повышением относительной толщины воздушного субслоя. Изучена зависимость критических параметров от числа Дарси при заданной твердой фазе.

Ключевые слова: внутреннее тепловыделение, двухслойная система, объемная доля твердой фазы, локальная и крупномасштабная конвекция, пассивная вентиляция воздуха, пористая среда, влияние числа Дарси

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10045, <https://rscf.ru/project/21-71-10045/>

Для цитирования: Колчанова Е.А., Колчанов Н.В. Пассивная конвективная вентиляция в двойном воздушно-пористом слое с внутренним тепловыделением, зависящим от доли твердой фазы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 82. С. 108–119. doi: 10.17223/19988621/82/9

Original article

Passive convective ventilation in a double air-porous layer with internal heat generation depending on solid fraction

Ekaterina A. Kolchanova¹, Nikolay V. Kolchanov²

^{1,2} *Perm State University, Perm, Russian Federation*

¹ *kolchanovaea@gmail.com*

² *kolchanovn@gmail.com*

Abstract. The convective stability of a two-layered system consisting of a heat-generating porous region underlying an air region has been numerically studied. The linear dependence

of the heat release on the solid volume fraction is taken into account in the porous region. The equal constant temperature values are fixed on the external impermeable boundaries of the system. The critical internal Rayleigh-Darcy number at which the convection is induced in the system in the form of two-dimensional roll patterns with a given wave number has been determined. The convective flow is possible due to the formation of unstable density stratification in the presence of internal heat release.

Two types of stationary convection, namely, the local and the large-scale convection, have been studied. The local flow arises in the air sublayer and scarcely penetrates into the porous sublayer. The large-scale convection covers both sublayers. The change in the convective regime occurs with the growth of one or another parameter of the system and indicates the variation of the instability type. It is accompanied by an abrupt (by times and tens of times) change in the critical wave number of roll patterns.

Numerical calculations show a decrease in the onset value for both types of convection with increasing solid volume fraction ϕ in the porous sublayer and increasing relative thickness d of the air sublayer. The growth of the Darcy number (the dimensionless permeability of the porous sublayer) also causes destabilization of the air motionless state at the given ϕ and d . The variation of the convection regime from a large-scale flow to a local one occurs with increasing relative thickness of the air sublayer, whereas an opposite transition from the local to the large-scale convection regime is observed with increasing Darcy number.

Keywords: internal heat release, two-layered system, solid fraction, local and large-scale convection, passive air ventilation, porous medium, effect of the Darcy number

Acknowledgments: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 21-71-10045, <https://rscf.ru/en/project/21-71-10045/>).

For citation: Kolchanova, E.A., Kolchanov, N.V. (2023) Passive convective ventilation in a double air-porous layer with internal heat generation depending on solid fraction. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 82. pp. 108–119. doi: 10.17223/19988621/82/9

Введение

Пассивная конвективная вентиляция воздуха характерна для биологически активных пористых сред, способных выделять тепло. Например, такая ситуация возможна в массивах сельскохозяйственной продукции (корнеплодов, сена и др.), тепловыделение внутри которых зависит от плотности насыпи. Конвективное течение воздуха в таком пористом массиве ускоряет отвод тепла от перегретых участков по сравнению с обычным механизмом теплопередачи за счет теплопроводности. В нашей работе уделяется внимание вопросу о том, как будут меняться порог конвекции и критическое волновое число конвективных течений при добавлении слоя воздуха над тепловыделяющим пористым массивом и росте объемной доли твердой фазы. Изучается также зависимость критических параметров от числа Дарси, представляющего собой безразмерную проницаемость массива при заданной твердой фазе.

Для конвективных систем, частично заполненных пористой средой, характерны по крайней мере два типа течений. Это локальные течения, которые формируются в свободной от пористой среды области, и крупномасштабные течения, охватывающие всю систему. Пороговое возбуждение такого рода течений на фоне

линейного профиля температуры исследовалось, например, в [1] для трехслойной системы, состоящей из субслоя жидкости, окруженного двумя пористыми субслоями одинаковой проницаемости, или в [2, 3] для двухслойной системы жидкость – пористая среда. Конвекция воздуха в зазоре между двумя горизонтально ориентированными цилиндрами, частично заполненном пористой средой, рассмотрена в [4]. Линейный тепловой профиль формируется при наличии перепада температур на внешних границах системы. В условиях внутреннего тепловыделения, происходящего с постоянной в объеме пористой среды мощностью, конвективное движение возникает на фоне параболического теплового профиля даже при отсутствии перепада температуры на внешних границах среды [5–7]. Конвекция за счет внутреннего тепловыделения в трехслойной системе, состоящей из двух жидкостных субслоев, разделенных пористым субслоем, изучалась в [8]. Двухслойная жидкостно-пористая конфигурация рассмотрена в [9].

В отличие от предшествующих работ мы исследуем влияние зависимости внутреннего тепловыделения от объемной доли твердой фазы на порог локальной и крупномасштабной внутренней конвекции.

Постановка задачи

Рассматривается пористый массив, который заполняет горизонтальный субслой, граничащий сверху с воздушным субслоем (рис. 1). Твердый каркас массива способен выделять тепло. Мощность тепловыделения в общем объеме насыщенного воздухом пористого массива линейно зависит от доли твердой фазы. Система сопряженного воздушного и пористого субслоев ограничена сверху и снизу непроницаемыми теплопроводными плоскостями одинаковой температуры. При отсутствии течения максимальная температура в такой конфигурации отмечается в точке, приближающейся к границе раздела субслоев с ростом объемной доли твердой фазы. Конвекцию в этом случае можно сгенерировать только при наличии внутреннего тепловыделения.

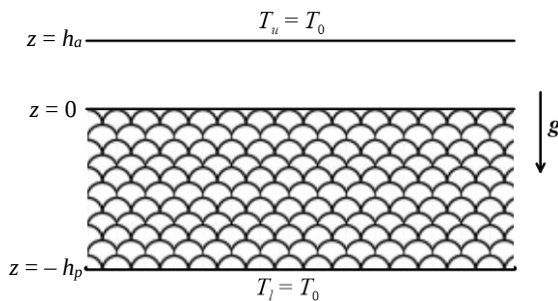


Рис. 1. Двухслойная система, состоящая из воздушного субслоя, расположенного над тепловыделяющим пористым субслоем, в поле силы тяжести

Fig. 1. A two-layered system consisting of an air sublayer overlying a heat-generating porous sublayer in the gravitational field

Уравнения конвекции в каждом из субслоев записываются в приближении Буссинеска [10, 11]. Они содержат уравнение движения, уравнение теплопроводности и уравнение неразрывности в воздушном субслое:

$$\frac{\partial \mathbf{V}_a}{\partial t} + (\mathbf{V}_a \nabla) \mathbf{V}_a = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P_a + \nu \Delta \mathbf{V}_a + g\beta(T_a - T_0) \gamma, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_a}{\partial t} + (\mathbf{V}_a \nabla) T_a = \chi_a \Delta T_a, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_a = 0, \quad (3)$$

в пористом субслое:

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P_p - \frac{\nu}{K} \mathbf{V}_p + g\beta(T_p - T_0) \gamma, \quad (4)$$

$$b \frac{\partial T_p}{\partial t} + (\mathbf{V}_p \nabla) T_p = \chi_{eff} \Delta T_p + \phi \frac{Q_s}{(\rho_0 C)_a}, \quad (5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_p = 0, \quad (6)$$

с условиями на верхней и нижней непроницаемых теплопроводных границах двухслойной системы:

$$z = h_a : \mathbf{V}_a = 0, T_a = T_0, \quad (7)$$

$$z = -h_p : V_{pz} = 0, T_p = T_0,$$

и на границе раздела субслоев:

$$z = 0 : V_{az} = V_{pz}, V_{ax} = 0, -P_a + 2(\rho_0 \nu) \nabla_z V_{az} = -P_p, \quad (8)$$

$$T_a = T_p, \kappa_a \nabla_z T_a = \kappa_p \nabla_z T_p.$$

Тепловыделение в пористом субслое считается медленным процессом по сравнению с процессом распространения тепловых и гидродинамических возмущений в системе. Считается, что оно происходит с постоянной мощностью Q во всем объеме субслоя. Для однородной пористой среды объемную мощность можно представить в виде линейной зависимости $Q = \phi Q_s$ от доли твердой фазы ϕ , где Q_s – мощность тепловыделения в единице объема твердой фазы.

Переходя к безразмерным переменным, получим уравнения в воздушном субслое:

$$\frac{Da}{Pr_p} \left[\frac{\partial \mathbf{V}_a}{\partial t} + b(\mathbf{V}_a \nabla) \mathbf{V}_a \right] = -\nabla P_a + Da \Delta \mathbf{V}_a + R_l \Theta_a \gamma, \quad (9)$$

$$\frac{\kappa}{b} \frac{\partial \Theta_a}{\partial t} + \kappa(\mathbf{V}_a \nabla) \Theta_a = \Delta \Theta_a, \quad (10)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_a = 0, \quad (11)$$

в пористом субслое:

$$0 = -\nabla P_p - \mathbf{V}_p + R_l \Theta_p \gamma, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \Theta_p}{\partial t} + (\mathbf{V}_p \nabla) \Theta_p = \Delta \Theta_p + 2\phi, \quad (13)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_p = 0, \quad (14)$$

с условиями на верхней и нижней непроницаемых теплопроводных границах двухслойной системы:

$$z = d : \mathbf{V}_a = 0, \Theta_a = 0,$$

$$z = -1: V_{pz} = 0, \Theta_p = 0, \quad (15)$$

и на границе раздела субслоев:

$$z = 0: V_{az} = V_{pz}, V_{ax} = 0, -P_a + 2Da \nabla_z V_{az} = -P_p, \\ \Theta_a = \Theta_p, \nabla_z \Theta_a = \kappa \nabla_z \Theta_p. \quad (16)$$

Уравнения (9)–(14) и граничные условия (15)? (16) приведены в терминах безразмерных переменных величин, для которых введены следующие обозначения: $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_a^* / [\chi_{eff}/h_p]$ – скорость в воздушном субслое, $\mathbf{V}_p = \mathbf{V}_p^* / [\chi_{eff}/h_p]$ – скорость фильтрации, $P = P^* / [\rho_0 v \chi_{eff}/K]$ – давление без учета гидростатической добавки, $\Theta = (T^* - T_0) / [Q_s h_p^2 / 2(\rho_0 C)_a \chi_{eff}]$ – отклонение температуры от ее значения на верхней и нижней границах двухслойной системы. Здесь ρ_0 – плотность воздуха при температуре T_0 на внешних границах системы, v – кинематическая вязкость воздуха, $\chi_{eff} = \kappa_p / (\rho_0 C)_a$ – эффективная температуропроводность пористого субслоя, $\chi_a = \kappa_a / (\rho_0 C)_a$ – температуропроводность воздуха, κ – теплопроводность, $(\rho_0 C)$ – объемная теплоемкость, K – проницаемость, ϕ – объемная доля твердой фазы в пористом субслое, g – ускорение свободного падения, β – коэффициент объемного расширения, h_a, h_p – толщины воздушного и пористого субслоев, γ – орт вертикальной оси z . Символом * отмечены размерные величины, а индексами a и p – величины в воздушном и пористом субслоях соответственно.

Безразмерные комплексы, которые возникают в результате перехода к безразмерным переменным, следующие: $R_l = (g\beta Q_s K h_p^3) / (2v\kappa_p \chi_{eff})$ – внутреннее число Рэлея–Дарси, нормированное на объемную долю твердой фазы, $Da = K/h_p^2$ – число Дарси, $Pr_p = b v / \chi_{eff}$ – число Прандтля для пористого субслоя, $d = h_a/h_p$ – отношение толщин воздушного и пористого субслоев, $\kappa = \kappa_p/\kappa_a$ – отношение теплопроводностей субслоев, $b = (\rho_0 C)_p / (\rho_0 C)_a$ – отношение объемных теплоемкостей субслоев.

Мы рассматриваем слабые течения при малых числах Рейнольдса в пористой среде небольшой проницаемости, для которой справедлива модель Дарси (см. уравнение (4)) при $Da < 10^{-3}$ [11]. Считается также, что теплообмен между твердой и воздушной фазами происходит очень быстро, так что локально температуры обеих фаз равны друг другу. Коэффициент теплообмена h , обратно пропорциональный числу Дарси [11], в этом случае принимает большое значение.

Система (9)–(16) допускает стационарное равновесное решение, при котором воздух в субслоях не движется ($\mathbf{V}_a = 0, \mathbf{V}_p = 0$), а температура зависит от вертикальной координаты:

$$\hat{\Theta}_a(z) = \Theta_i (1 - z/d), \quad (17)$$

$$\hat{\Theta}_p(z) = (\Theta_i - \phi z)(1 + z), \quad (18)$$

где $\Theta_i = \kappa \phi d / (1 + \kappa d)$ – температура на границе раздела субслоев.

Исследуем равновесное решение $(\hat{\mathbf{V}}, \hat{\Theta}, \hat{P})$ на устойчивость относительно малых возмущений $(\tilde{\mathbf{V}}(z), \tilde{\Theta}(z), \tilde{P}(z)) \cdot \exp\{\lambda t + i k x\}$, периодических по горизонтальной оси x с волновым числом k , где λ – скорость роста возмущений. Применяя линейный анализ устойчивости, запишем уравнения для амплитуд возмущений, исключив при этом с помощью операции $(\text{rotrot})_z$ давление и горизонтальные компоненты скорости [10, 11] в воздушном субслое:

$$\lambda \frac{Da}{Pr_p} \Delta \tilde{V}_{az} = Da \Delta^2 \tilde{V}_{az} - k^2 R_I \tilde{\Theta}_a, \quad (19)$$

$$\lambda \frac{\kappa}{b} \tilde{\Theta}_a + \kappa (\tilde{V}_{az} \nabla_z) \hat{\Theta}_a = \Delta \tilde{\Theta}_a, \quad (20)$$

в пористом субслое:

$$0 = \Delta \tilde{V}_{pz} + k^2 R_I \tilde{\Theta}_p, \quad (21)$$

$$\lambda \tilde{\Theta}_p + (\tilde{V}_{pz} \nabla_z) \hat{\Theta}_p = \Delta \tilde{\Theta}_p, \quad (22)$$

с условиями на внешних границах двухслойной системы:

$$\begin{aligned} z = d: \quad \tilde{V}_{az} = 0, \quad \nabla_z \tilde{V}_{az} = 0, \quad \tilde{\Theta}_a = 0, \\ z = -1: \quad \tilde{V}_{pz} = 0, \quad \tilde{\Theta}_p = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

и на границе раздела субслоев:

$$\begin{aligned} z = 0: \quad \tilde{V}_{az} = \tilde{V}_{pz}, \quad Da (\nabla_z^3 \tilde{V}_{az} - 3k^2 \nabla_z \tilde{V}_{az}) = -\nabla_z \tilde{V}_{pz}, \\ \nabla_z \tilde{V}_{az} = 0, \quad \tilde{\Theta}_a = \tilde{\Theta}_p, \quad \nabla_z \tilde{\Theta}_a = \kappa \nabla \tilde{\Theta}_p, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\Delta = (\nabla_z^2 - k^2)$ и $\Delta^2 = (\nabla_z^4 - 2k^2 \nabla_z^2 + k^4)$.

Методика решения и валидация

Краевая задача (19)–(24) моделируется с помощью численного метода стрельбы, основанного на алгоритме построения фундаментальной системы решений с применением ортогонализации векторов частных решений [12]. Исследуется устойчивость механического равновесия воздуха относительно малых монотонных возмущений с $\text{Im}(\lambda) = 0$ [10, 11]. Граница устойчивости определяется при $\text{Re}(\lambda) = 0$, когда возмущения не нарастают и не затухают, т.е. нейтральны. Для удобства нейтральная кривая $Ra_I(k)$ строится в терминах внутреннего числа Рэлея–Дарси $Ra_I = \phi R_I$ [11]. Минимум этой кривой дает пороговое число Ra_{I*} , при котором в системе возникает конвективное движение в виде двумерных валов с волновым числом k^* .

Численные расчеты проводятся для двухслойной системы с пористым массивом, имеющим следующие тепловые свойства:

$$\kappa_p = (1 - \phi) \kappa_a + \phi \kappa_s, \quad (25)$$

$$(\rho_0 C)_p = (1 - \phi) (\rho_0 C)_a + \phi (\rho_0 C)_s, \quad (26)$$

где отношения $\kappa_s/\kappa_a = 16$ и $(\rho_0 C)_s/(\rho_0 C)_a = 3 \cdot 10^3$ выбраны характерными для биологически активной среды, твердые элементы которой способны выделять тепло и содержат в своем составе воду, например для корнеплодов [13]. Проницаемость среды связана с объемной долей твердой фазы формулой Кармана–Козени: $K = D_p^2 (1 - \phi)^3 / (180 \phi^2)$, где D_p – средний размер твердого включения (гранулы) в среде [14].

Интерес к заданию указанных тепловых параметров связан двумя причинами. Во-первых, результаты моделирования могут быть полезны с точки зрения анализа эффективности управления тепломассопереносом в овоще- и зернохранилищах с целью предотвращения перегрева отдельных участков сырья, способного

выделять тепло за счет биологической активности. Во-вторых, мы изучаем ситуацию, когда с академической точки зрения интересно воспроизвести два возможных режима конвекции: локальный и крупномасштабный. Локализацию течения в воздушном субслое легко получить, так как теплопроводность воздуха мала по сравнению с теплопроводностью твердой фазы большинства тепловыделяющих сред. Пористая среда в этом случае будет выступать как твердый теплопроводный массив, где течения не возникает. Для наблюдения проникающей крупномасштабной конвекции нужно рассмотреть тепловыделяющую пористую среду с низкой теплопроводностью. Здесь возможна конкуренция между двумя конвективными режимами при изменении других параметров двухслойной системы, например относительной толщины воздушного субслоя, объемной доли твердой фазы, числа Дарси и др.

Для валидации численного моделирования рассмотрим предельный случай тепловыделяющего пористого слоя ($d = 0$) с твердыми теплопроводными границами одинаковой температуры. Решение для порога внутренней конвекции в этом слое, полученное в терминах критических параметров Ra_I^* и k^* , не зависит от объемной доли твердой фазы и отношения тепловых свойств твердой и воздушной фаз. Ниже в таблице мы приводим результаты проведенных численных расчетов в сравнении с данными предшествующих работ [5–7]. Как видно, имеется хорошее количественное согласие численных данных.

Сравнение результатов с данными предшествующих работ в предельном случае тепловыделяющего пористого слоя с твердыми границами одинаковой температуры

Источники численных данных	Ra_I^*	k^*
Данные Кулацки и Рамчандани [5]	235.67	4.67
Данные Нури-Боружерди и др. [6] для малых чисел Дарси	235.69	4.68
Данные Кузнецова и Нилда [7]	246.0	4.53
Данные нашей работы	235.69	4.68

Результаты численного моделирования

Первоначально изучим изменение критических параметров с ростом объемной доли твердой фазы и отношения толщин субслоев при фиксированном отношении $D_p/h_p = 0.1$. На рис. 2, *a*, *b* представлены графики порогового внутреннего числа Рэлея–Дарси и волнового числа валиковых конвективных течений в зависимости от отношения толщин воздушного и пористого субслоев d при разных фиксированных значениях объемной доли твердой фазы ϕ . Ниже кривых $Ra_{I*}(d)$ на рисунке имеется область параметров, при которых воздух в субслоях остается неподвижным, выше этих кривых – область параметров, при которых монотонным образом возбуждается конвекция. Из графиков видно, что с увеличением твердой фазы, а значит, с усилением тепловыделения, порог конвекции понижается. В этом случае течение в системе возбудить проще, но оно локализуется в воздушном субслое, так как рост параметра ϕ приводит к уплотнению пористой среды (кривые 3 на рис. 2, *a*, *b*). Крупномасштабная длинноволновая конвекция, охватывающая оба субслоя, характерна для систем с малой объемной долей твердой фазы и / или малой толщиной воздушного субслоя (кривые 1 на рис. 2, *a*, *b*).

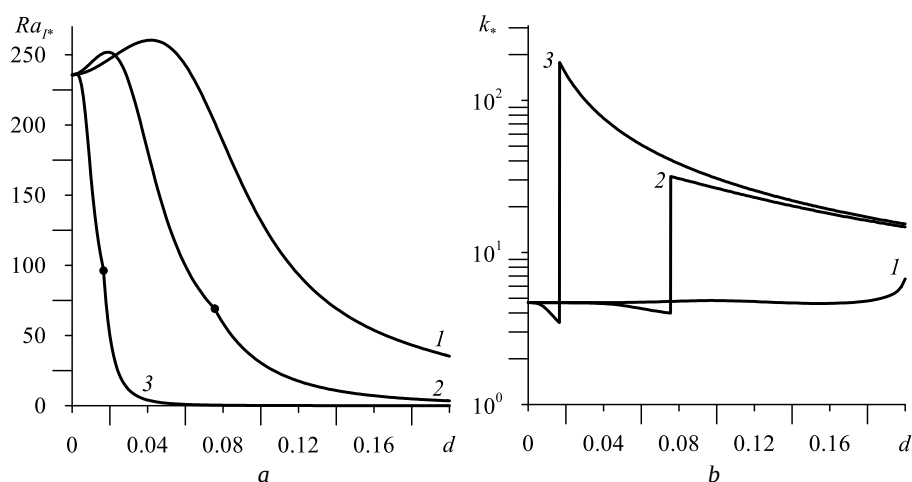


Рис. 2. Пороговые кривые в зависимости от отношения толщин воздушного и пористого субслоев d , соответствующие границе устойчивости равновесия воздуха в двухслойной системе при разных значениях объемной доли твердой фазы ϕ : 0.2 (кривые 1), 0.4 (кривые 2), 0.8 (кривые 3). Точки кривых 2 и 3 на рис. 2, a соответствуют изломам кривых 2 и 3 на рис. 2, b : a – минимальное внутреннее число Рэлея–Дарси, b – критическое волновое число валиковых течений

Fig. 2. Onset curves for critical parameters versus depth ratio d corresponding to the stability boundary for the air motionless state in a two-layered domain at different values of the solid fraction ϕ : 0.2 (curves 1), 0.4 (curves 2), and 0.8 (curves 3). The solid points on curves 2 and 3 in Fig. 2(a) stand for the breaks of curves 2 and 3 in Fig. 2(b): (a) a minimal internal Rayleigh–Darcy number and (b) a critical wave number of roll flows

Увеличивая толщину воздушного субслоя при промежуточном фиксированном значении $0.2 < \phi < 0.8$, можно получить критическое отношение толщин субслоев d_{cr} , при котором происходит резкий переход от крупномасштабной длинноволновой конвекции к локальному коротковолновому течению (см., например, кривые 2 на рис. 2, a , b). Этот переход показан точками на рис. 2, a . Волновое число при таком переходе может возрастать в десять и более раз (см. рис. 2, b). Характерный размер локальных валов π/k_* определяется в основном толщиной воздушного субслоя. Отметим, что под переходом в данной ситуации понимается смена характера неустойчивости или режима конвекции. Эволюция того или иного режима с ростом надкритического значения внутреннего числа Рэлея–Дарси является предметом наших будущих исследований.

На втором этапе рассмотрим изменение критических параметров с ростом числа Дарси, имеющего смысл безразмерной проницаемости пористого субслоя при фиксированном значении объемной доли твердой фазы $\phi = 0.6$. На рис. 3, a , b представлены пороговые кривые, которые показывают зависимости критического внутреннего числа Рэлея–Дарси, нормированного на Da , и критического волнового числа от числа Дарси соответственно. Ожидаемо, что с ростом безразмерной проницаемости порог конвекции понижается, т.е. при заданной фиксированной мощности тепловыделения течение сравнительно легко генерируется в среде с большой проницаемостью (см. рис. 3, a). С повышением числа Дарси происхо-

дит переход от локальной к крупномасштабной проникающей конвекции. Этот переход наблюдается при $d = 0.03$ и $d = 0.05$ и сопровождается скачкообразным уменьшением волнового числа (кривые 1 и 2 на рис. 3, *b*).

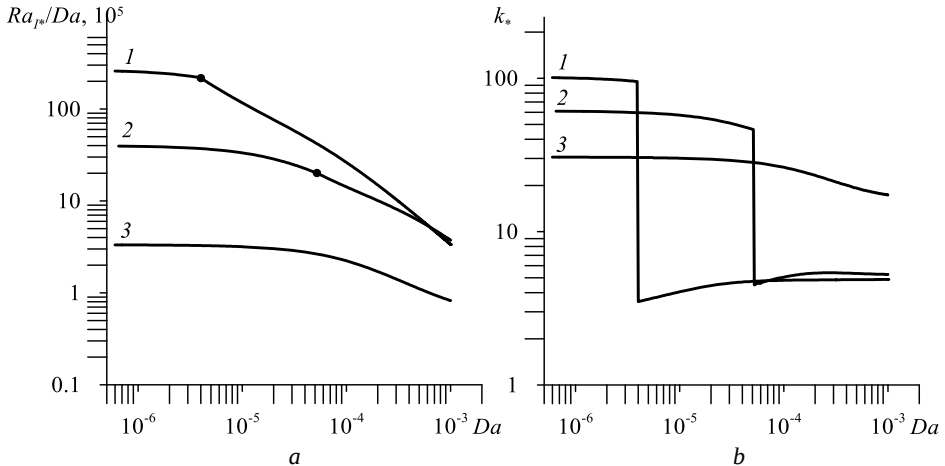


Рис. 3. Пороговые кривые в зависимости от числа Дарси Da при $\phi = 0.6$, соответствующие границе устойчивости равновесия воздуха в двухслойной системе при разных значениях отношения толщин субслоев d : 0.03 (кривые 1), 0.05 (кривые 2), 0.10 (кривые 3). Точки кривых 2 и 3 на рис. 2, *a* соответствуют изломам кривых 2 и 3 на рис. 2, *b*: *a* – минимальное внутреннее число Рэлея–Дарси, *b* – критическое волновое число валиковых течений

Fig. 3. Onset curves for critical parameters versus the Darcy number Da at $\phi = 0.6$ corresponding to the stability boundary for the air motionless state in a two-layered domain at different values of the depth ratio d : 0.03 (curves 1), 0.05 (curves 2), and 0.10 (curves 3). The solid points of curves 2 and 3 in Fig. 2(a) stand for the breaks of curves 2 and 3 in Fig. 2(b): (a) a minimal internal Rayleigh–Darcy number and (b) a critical wave number of roll flows

Плавное изменение критического волнового числа характерно для систем с относительно большой толщиной воздушного субслоя (кривая 3 на рис. 3, *b*).

Заключение

Исследована конвективная устойчивость двухслойной системы, состоящей из пористого тепловыделяющего массива, ограниченного сверху воздушной областью. Учтена линейная зависимость тепловыделения в массиве от объемной доли твердой фазы. Численно, методом стрельбы, определено критическое внутреннее число Рэлея–Дарси, при котором в системе генерируется конвекция в виде двумерных валов с заданным волновым числом. Конвективное течение возможно за счет формирования неустойчивой стратификации по плотности при наличии внутреннего тепловыделения. В этой ситуации на внешних непроницаемых границах двухслойной системы поддерживаются постоянные одинаковые температуры.

Изучено два вида режимов стационарной конвекции: локальная и крупномасштабная. Локальное конвективное течение формируется в верхнем воздушном субслое и практически не проникает в нижний пористый субслой. Крупномасштабная конвекция охватывает оба субслоя. Смена конвективного режима про-

исходит с ростом того или иного параметра системы и говорит о смене характера неустойчивости. Она сопровождается резким (в разы и десятки раз) изменением критического волнового числа валов.

Ниже приводятся основные выводы, которые можно сделать по результатам исследования:

1. Зафиксировано понижение порога крупномасштабной и локальной конвекции с ростом объемной доли твердой фазы ϕ в пористом субслое и относительной толщины d воздушного субслоя. В этом случае задается постоянное значение отношения среднего размера твердого включения (гранулы) в пористой среде к общей ее толщине $D_p/h_p = 0.1$.

2. При заданных значениях объемной доли твердой фазы ($\phi = 0.6$) и относительной толщины воздушного субслоя ($d = 0.03, 0.05$ или 0.10) получена дестабилизация механического равновесия воздуха с ростом числа Дарси. Число Дарси представляет собой безразмерную проницаемость пористого субслоя.

3. Определено, что смена режима конвекции с крупномасштабного течения на локальное происходит с повышением относительной толщины воздушного субслоя. При увеличении числа Дарси, наоборот, наблюдается переход от локальной конвекции к крупномасштабной.

Список источников

1. Lyubimova T.P., Muratov I.D. Interaction of the longwave and finite-wavelength instability modes of convection in a horizontal fluid layer confined between two fluid-saturated porous layers // *Fluids*. 2017. V. 2 (3). Art. 39. doi: 10.3390/fluids20300391
2. Kolchanova E., Lyubimov D., Lyubimova T. The onset and nonlinear regimes of convection in a two-layer system of fluid and porous medium saturated by the fluid // *Transport in Porous Media*. 2013. V. 97. P. 25–42. doi: 10.1007/s11242-012-0108-8
3. Mccurdy M., Moore N., Wang X. Convection in a coupled free flow-porous media system // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2019. V. 79. P. 2313–2339. doi: 10.1137/19M1238095
4. Ait saada M., Chikh S., Campo A. Natural Convection Reduction in a Composite Air/Porous Annular Region With Horizontal Orientation // *Journal of Heat Transfer*. 2009. V. 131. Art. 022601. doi: 10.1115/1.2993544
5. Kulacki F., Ramchandani R. Hydrodynamic instability in a porous layer saturated with a heat generating fluid // *Wärme und Stoffübertragung-Thermo and Fluid Dynamics*. 1975. V. 8. P. 179–185. doi: 10.1007/BF01681559
6. Nouri-Borujerdi A., Noghrehabadi A.R., Rees D.A.S. Influence of Darcy number on the onset of convection in a porous layer with a uniform heat source // *International Journal of Thermal Sciences*. 2008. V. 47. P. 1020–1025. doi: 10.1016/j.ijthermalsci.2007.07.014
7. Kuznetsov A.V., Nield D.A. The effect of strong heterogeneity on the onset of convection induced by internal heating in a porous medium: A layered model // *Transport in Porous Media*. 2013. V. 99. P. 85–100. doi: 10.1007/s11242-013-0175-5
8. Shalbaf S., Noghrehabadi A., Assari M.R., Dezfali A.D. Linear stability of natural convection in a multilayer system of fluid and porous layers with internal heat sources // *Acta Mechanica*. 2013. V. 224. P. 1103–1114. doi: 10.1007/s00707-012-0793-y
9. Lisboa K.M., Su J., Cotta R.M. Single domain integral transform analysis of natural convection in cavities partially filled with heat generating porous medium // *Numerical Heat Transfer. Part A*. 2018. doi: 10.1080/10407782.2018.1511141
10. Герицун Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М. : Наука, 1972. 392 с.

11. Nield D.A., Bejan A. Convection in porous media. Switzerland : Springer, 2017. 988 p.
12. Лобов Н.И., Любимов Д.В., Любимова Т.П. Численные методы решения задач теории гидродинамической устойчивости : учеб. пособие. Пермь : Изд-во ПГУ, 2004. 101 с.
13. Алтухов И.В., Очиров В.Д. Теплофизические характеристики как основа расчета постоянной времени нагрева сахаросодержащих корнеплодов в процессах тепловой обработки // Вестник КрасГАУ. 2010. № 4. С. 134–139.
14. Carman P.C. Fluid flow through granular beds // Transactions of the Institution of Chemical Engineers. 1937. V. 15. P. S32–S48. doi: 10.1016/S0263-8762(97)80003-2

References

1. Lyubimova T.P., Muratov I.D. (2017) Interaction of the longwave and finite-wavelength instability modes of convection in a horizontal fluid layer confined between two fluid-saturated porous layers. *Fluids*. 2-3(39). doi: 10.3390/fluids20300391
2. Kolchanova E., Lyubimov D., Lyubimova T. (2013) The onset and nonlinear regimes of convection in a two-layer system of fluid and porous medium saturated by the fluid. *Transport in Porous Media*. 97. pp. 25–42. doi: 10.1007/s11242-012-0108-8
3. Mccurdy M., Moore N., Wang X. (2019) Convection in a coupled free flow-porous media system. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 79. pp. 2313–2339. doi: 10.1137/19M1238095
4. Ait saada M., Chikh S., Campo A. (2009) Natural convection reduction in a composite air/porous annular region with horizontal orientation. *Journal of Heat Transfer*. 131. Article 022601. doi: 10.1115/1.2993544
5. Kulacki F., Ramchandani R. (1975) Hydrodynamic instability in a porous layer saturated with a heat generating fluid. *Wärme und Stoffübertragung – Thermo and Fluid Dynamics*. 8. pp. 179–185. doi: 10.1007/BF01681559
6. Nouri-Borujerdi A., Noghrehabadi A.R., Rees D.A.S. (2008) Influence of Darcy number on the onset of convection in a porous layer with a uniform heat source. *International Journal of Thermal Sciences*. 47. pp. 1020–1025. doi: 10.1016/j.ijthermalsci.2007.07.014
7. Kuznetsov A.V., Nield D.A. (2013) The effect of strong heterogeneity on the onset of convection induced by internal heating in a porous medium: a layered model. *Transport in Porous Media*. 99. pp. 85–100. doi: 10.1007/s11242-013-0175-5
8. Shalhaf S., Noghrehabadi A., Assari M.R., Dezfali A.D. (2013) Linear stability of natural convection in a multilayer system of fluid and porous layers with internal heat sources. *Acta Mechanica*. 224. pp. 1103–1114. doi: 10.1007/s00707-012-0793-y
9. Lisboa K.M., Su J., Cotta R.M. (2018) Single domain integral transform analysis of natural convection in cavities partially filled with heat generating porous medium. *Numerical Heat Transfer, Part A*. doi: 10.1080/10407782.2018.1511141
10. Gershuni G.Z., Zhukovitskii E.M. (1976) *Convective Stability of Incompressible Fluids*. Jerusalem: Keter Publications, Wiley.
11. Nield D.A., Bejan A. (2017) *Convection in Porous Media*. Switzerland: Springer.
12. Lobov N.I., Liubimov D.V., Liubimova T.P. (2004) *Chislennyye metody resheniya zadach teorii gidrodinamicheskoy ustoychivosti. Uchebnoe posobie* [Numerical methods for solving problems of hydrodynamic stability theory. A textbook]. Perm: PSU.
13. Altukhov I.V., Ochirov V.D. (2010) Teplofizicheskie kharakteristiki kak osnova raschyota postoyannoy vremeni nagreva sakharosoderzhashchykh korneplodov v protsessakh teplovoy obrabotki [Thermalphysic characteristics as the basis of calculation of the heating time constant of the sacchariferous root crops in the thermal processing processes]. *Vestnik KrasGAU – The Bulletin of KrasGAU*. 4. pp. 134–139.
14. Carman P.C. (1937) Fluid flow through granular beds. *Transactions of the Institution of Chemical Engineers*. 15. pp. S32–S48. doi: 10.1016/S0263-8762(97)80003-2

Сведения об авторах:

Колчанова Екатерина Андреевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики физического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета, Пермь, Россия. E-mail: kolchanovaea@gmail.com

Колчанов Николай Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики физического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета, Пермь, Россия. E-mail: kolchanovn@gmail.com

Information about the authors:

Kolchanova Ekaterina A. (Candidate of Physics and Mathematics, Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: kolchanovaea@gmail.com

Kolchanov Nikolay V. (Candidate of Physics and Mathematics, Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: kolchanovn@gmail.com

Статья поступила в редакцию 10.03.2022; принята к публикации 31.03.2023

The article was submitted 10.03.2022; accepted for publication 31.03.2023

Научная статья

УДК 532.5

doi: 10.17223/19988621/82/10

Численное моделирование турбулентных потоков на основе двухжидкостной модели турбулентности

Муродил Эркинжон угли Мадалиев

*Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева Академии наук
Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан, Ферганский политехнический институт,
Фергана, Узбекистан, Madaliev.ME2019@mail.ru, m.e.madaliyev@ferpi.uz*

Аннотация. Обсуждаются возможности двухжидкостной модели турбулентности для решения сложных физических задач: отрывного обтекания квадратного цилиндра, ламинарно-турбулентного течения во внезапно расширяющемся канале. Для численной реализации систем гидродинамических уравнений использована конечно-разностная схема, где вязкостные члены аппроксимировались центральной разностью неявным образом, а для конвективных членов использована явная схема против потока. На каждом временном шаге коррекция для скоростей проводилась через давление по процедуре SIMPLE. Для оценки адекватности полученные численные результаты сопоставлены с известными экспериментальными данными. Сравнения численных результатов показали, что двухжидкостная модель проста в реализации, требует меньше вычислительных ресурсов и способна с большой точностью предсказывать ламинарные и турбулентные течения.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, отрывное течение, двухжидкостная модель, метод контрольного объема

Для цитирования: Мадалиев М.Э. Численное моделирование турбулентных потоков на основе двухжидкостной модели турбулентности // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 82. С. 120–140. doi: 10.17223/19988621/82/10

Original article

Numerical simulation of turbulent flows on the basis of a two-fluid model of turbulence

Murodil E. Madaliev

*Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures named after M.T. Urazbaev of the
Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan,
Fergana Polytechnic Institute, Fergana, Republic of Uzbekistan, Madaliev.ME2019@mail.ru,
m.e.madaliyev@ferpi.uz*

Abstract. This paper discusses the capabilities of a two-fluid turbulence model for solving complex physical problems such as separated flow around a square cylinder and laminar-

turbulent flow in a suddenly expanding channel. The numerical solution to the system of hydrodynamic equations is implemented using a finite-difference scheme. At each time step, the velocities are corrected through pressure calculations according to the SIMPLE algorithm. For verification purposes, the obtained numerical results are compared with available experimental data. A comparison of numerical results has shown that the two-fluid model is easy to implement, requires less computational resources and is capable of predicting laminar and turbulent flows with high accuracy.

Keywords: Navier-Stokes equations, separated flow, two-fluid model, finite volume method

For citation: Madaliev, M.E. (2023) Numerical simulation of turbulent flows on the basis of a two-fluid model of turbulence. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 82. pp. 120–140. doi: 10.17223/19988621/82/10

Введение

В настоящее время для построения математических моделей турбулентности существует несколько подходов. Первым является гипотеза о применимости уравнений Навье–Стокса для описания турбулентности. Все модели, построенные на основе данного подхода, называются методами прямого моделирования (DNS) [1] и крупных вихрей (LES) [2–3]. Однако для реализации таких методов требуется разрешение нестационарных уравнений с расчетными ячейками менее колмогоровского масштаба в трехмерной постановке и необходимо проведение интегрирования очень мелкими шагами по времени. Поэтому требуется использование мощных суперкомпьютеров, а их широкое практическое применение, по оценкам специалистов, может начаться лишь в конце нынешнего столетия.

Вторым подходом для описания турбулентности является подход Рейнольдса. В основе данного подхода лежит так называемое уравнение Навье–Стокса, осредненное по Рейнольдсу (RANS). При таком подходе в уравнениях гидродинамики после осреднения по времени возникают напряжения Рейнольдса, которые необходимо определить. Следовательно, полученная система уравнений получается незамкнутой, и все модели, которые направлены на замыкание данной системы, называются полуэмпирическими RANS-моделями [4–8].

Еще одним подходом к решению проблемы турбулентности является двухжидкостной подход Сполдинга [9, 10]. Суть данного подхода заключается в том, что турбулентный поток делится на две жидкости по некоторым отличительным признакам потока. Однако двухжидкостной подход Сполдинга не получил дальнейшего развития из-за того, что для замыкания систем уравнений, как в моделях RANS, привлекались еще дополнительные уравнения на основе различных гипотез. В результате число решаемых уравнений удваивалось по сравнению с RANS-моделями, а это увеличивало вычислительное время.

Данный подход после достаточно долгой паузы получил свое развитие в работах [11, 12], в которых показано, что турбулентный поток можно представить в виде гетерогенной смеси двух жидкостей с различными скоростями и температурами. Такая возможность математически доказывается на основе первой гипотезы Рейнольдса (скорость турбулентного потока состоит из осредненной и флук-

тирующей скоростей) и молярного движения в турбулентном течении. 3. Маликовым предложена двухжидкостная модель, в которой основной параметр турбулентности – эффективная молярная вязкость – определяется по теории кинетики и гипотезе Прандтля, поэтому дополнительные эмпирические уравнения не привлекаются. В работах [11, 13] такая модель использована для исследования обтекания пластины, свободной турбулентной струи и вращающегося потока. Показано, что новая двухжидкостная модель турбулентности имеет высокую точность, проста для решения инженерных задач и способна адекватно описывать анизотропную турбулентность. В этой работе для моделирования турбулентного переноса не использована обобщенная гипотеза Буссинеска и не вводится турбулентное число Прандтля. Вместо них использованы параметры, более понятные с точки зрения физики. Поэтому в настоящей работе поставлена цель показать, что разработанная двухжидкостная модель обладает универсальностью и способна с большой точностью описывать различные сложные турбулентные течения.

Работа состоит из шести разделов. В первом разделе на основе двухжидкостной модели численно исследуется отрывное обтекание квадратного цилиндра. В втором разделе обсуждаются результаты и проводится сравнение с экспериментальными данными. В третьем разделе проводится численное исследование турбулентного потока в ламинарно-турбулентного течения во внезапно расширяющемся канале. В четвертом разделе обсуждаются результаты и проводится сравнение с экспериментальными данными. В пятом разделе рассматривается турбулентное течение во внезапно расширяющемся канале. В шестом разделе обсуждаются полученные результаты и сравниваются с известными опытными данными.

Нестационарная система уравнений турбулентности по двухжидкостной модели имеет следующий вид [14]:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} + \bar{V}_j \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\rho \partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_i} \right) - \vartheta_j \vartheta_i \right], \\ \frac{\partial \vartheta_i}{\partial t} + \bar{V}_j \frac{\partial \vartheta_i}{\partial x_j} &= -\rho \vartheta_j \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v_{ji} \left(\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{F_{si}}{\rho} + \frac{F_{fi}}{\rho}, \\ \frac{\partial \rho \bar{V}_j}{\partial x_j} &= 0, \quad v_{ji} = 3v + 2 \left| \frac{\vartheta_i \vartheta_j}{\text{def}(\vec{V})} \right| \quad i \neq j, \\ v_{ii} &= 3v + \frac{1}{\text{div} \vec{\vartheta}} \left| \frac{\vartheta_k \vartheta_k}{\text{def}(\vec{V})} \right| \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_k}, \quad \vec{F}_f = -\rho K_f \vec{\vartheta}, \quad \vec{F}_s = \rho C_s \text{rot} \vec{V} \times \vec{\vartheta}. \end{aligned} \right. \quad (1)$$

Здесь $\bar{V}_i, \vartheta_i$ – соответственно осредненная и относительная скорости турбулентного потока, $\bar{p}$ – осредненное гидростатическое давление, v – молекулярная кинематическая вязкость, v_{ji} – эффективная молярная вязкость, F_{si} – поперечная сила Сefмена, обусловленная сдвиговым полем скорости, F_{fi} – сила трения, K_f – коэффициент трения. Постоянные коэффициенты равны $C_1 = 0.7825$, $C_2 = 0.306$, $C_s = 0.2$. Остальные обозначения подробно представлены в статье [11].

Отрывное обтекание квадратного цилиндра

Режимы отрывных течений вязкой жидкости около плохо обтекаемых тел или инженерных конструкций часто встречаются в природе и технике. Периодическое выпадение вихрей, возникающее, когда поток проходит квадратный блок, имеет большое значение для инженерного гидравлического проектирования. В инженерной практике экономичное и безопасное проектирование различных конструкций, таких как опоры мостов, башни, дымоходы и морские платформы, которые подвергаются воздействию потоков жидкости, требует надежного расчета величин, направлений и частоты воздействий сил на конструкцию, а также прогнозирования колебаний скорости потока вокруг конструкции [15–18].

Д. Лин и соавт. [19] использовали закрытый канал, в который поместили квадратное препятствие с длиной стороны $D = 4$ см. Лазерная доплеровская velocиметрия (ЛДВ) использовалась для регистрации мгновенной скорости. Входная постоянная скорость U_0 составляла 0,535 м/с, что давало число Рейнольдса $Re_D = U_0 D / \nu$, равное 21 400. Физическая схема течения и границы расчетной области показаны на рис. 1.

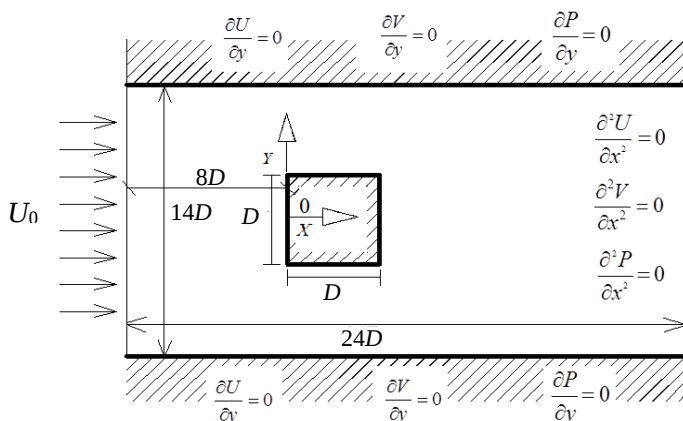


Рис. 1. Принципиальная схема поперечного обтекания квадратного цилиндра

Fig. 1. Schematic diagram of a transverse flow around a square cylinder

Начало введенной декартовой системы координат находится в центре левой части квадрата, в точке 0. Ширина канала во входном и выходном сечении имеет размер $14D$. Длина канала имеет размер $24D$. Квадратное препятствие расположено в координатах $x \in [0, D]$.

Расчетные сетки

Поток, обтекающий квадратный блок, представляет собой сложный поток из-за крупномасштабной периодичности разделения. Ожидается, что модель даст высокоточное предсказание сложного обтекания препятствия. Что касается двухжидкостной модели, в работе [14] показано, что она способна давать приемлемые результаты и на грубой сетке. В работе было использовано три различных вида сгущенной сетки с различным сгущением, размер сетки 300×300 ячеек.

Для этого использовано преобразование систем координат $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$.

Как видно из рис. 2, сетка была сгущена в центральной части сечений А–А, В–В.

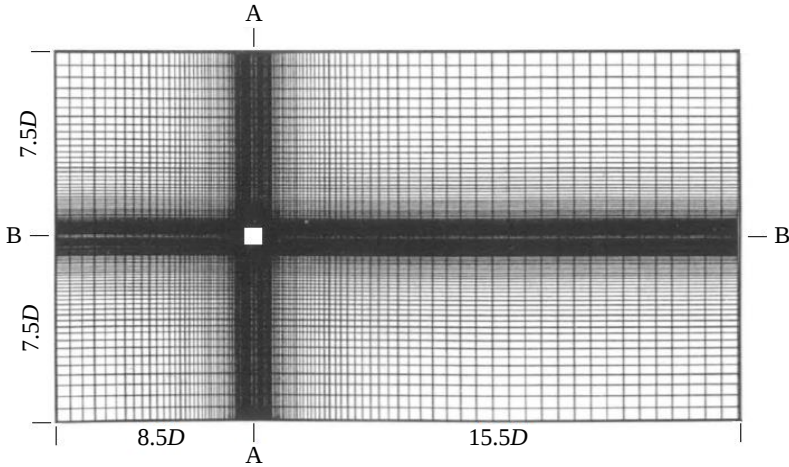


Рис. 2. Сгущенная сетка размером 300×300

Fig. 2. Condensed grid size 300×300

В центральной части сечений А–А $= x_c$, В–В $= y_c$ было использовано следующее преобразование по координатам X и Y :

$$\begin{aligned}\xi &= x_c \left\{ 1 + \operatorname{sh} \left[\tau_x (x - B_x) \right] / \operatorname{sh} (\tau_x B_x) \right\}, \\ \eta &= y_c \left\{ 1 + \operatorname{sh} \left[\tau_y (y - B_y) \right] / \operatorname{sh} (\tau_y B_y) \right\},\end{aligned}\quad (2)$$

$$\begin{aligned}B_x &= \frac{1}{2\tau_x} \ln \left[\frac{1 + (e^{\tau_x} - 1)(x_c / 24D)}{1 + (e^{-\tau_x} - 1)(x_c / 24D)} \right], \quad 0 < \tau_x < \infty, \\ B_y &= \frac{1}{2\tau_y} \ln \left[\frac{1 + (e^{\tau_y} - 1)(y_c / 16D)}{1 + (e^{-\tau_y} - 1)(y_c / 16D)} \right], \quad 0 < \tau_y < \infty,\end{aligned}\quad (3)$$

где τ_x , τ_y – параметры растяжения, которые изменяются от нуля до больших значений. В статье использованы для первой сетки $\tau_x = 1.1$, $\tau_y = 1.5$, для второй сетки $\tau_x = 4.1$, $\tau_y = 2$, для третьей сетки $\tau_x = 8.1$, $\tau_y = 5$.

Система уравнений (1) после преобразования координат в безразмерных параметрах имеет вид:

$$\begin{aligned}& \left[\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial V_x}{\partial \xi} + V_y \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial V_x}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial \xi} \right] = \\ & = \frac{1}{\operatorname{Re}} \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial V_x}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 V_x}{\partial \eta^2} \right) - \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta_x \vartheta_x}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \vartheta_y \vartheta_x}{\partial \eta};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial V_y}{\partial \xi} + V_y \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial V_y}{\partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial \eta} = \\
 & = \frac{1}{\text{Re}} \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial V_y}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 V_y}{\partial \eta^2} \right) - \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta_y \vartheta_x}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \vartheta_y \vartheta_x}{\partial \eta}; \\
 & \frac{\partial \vartheta_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta_x}{\partial \xi} + V_y \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \vartheta_x}{\partial \eta} = - \left(\vartheta_x \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial V_x}{\partial \xi} + \vartheta_y \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial V_x}{\partial \eta} \right) + \\
 & + C_s \left(- \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial V_y}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial V_x}{\partial \eta} \right) \vartheta_y \right) + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(2v_{xx} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta_x}{\partial \xi} \right) \right) + \\
 & + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(v_{xy} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \vartheta_x}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta_y}{\partial \xi} \right) \right) - C_r \vartheta_x; \\
 & \frac{\partial \vartheta_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta_y}{\partial \xi} + V_y \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \vartheta_y}{\partial \eta} = - \left(\vartheta_x \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta_y}{\partial \xi} + \vartheta_y \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial V_y}{\partial \eta} \right) + \\
 & + C_s \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial V_y}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial V_x}{\partial \eta} \right) \vartheta_x \right) + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(v_{xy} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta_y}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \vartheta_x}{\partial \eta} \right) \right) + \\
 & + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2v_{yy} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \vartheta_y}{\partial \eta} \right) - C_r \vartheta_y.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Для численной реализации система уравнений (4) приведена к безразмерному виду соотношением всех скоростей к средней скорости входящего потока, а всех линейных размеров – к размеру квадрата D .

На всех неподвижных твердых стенках поставлены очевидные граничные условия прилипания: $V_x|_{\Gamma} = 0$ и $V_y|_{\Gamma} = 0$, где Γ – твердая граница. На выходе канала для всех задач для горизонтальной, вертикальной скоростей и относительных скоростей приняты условия экстраполяции второго порядка точности. На входе применяются равномерные профили продольной составляющей скорости с $V_x = U_0$, поперечная составляющая скорости и давление равны нулю: $V_y = P = 0$. Для численной реализации системы (4) на входе для относительных скоростей были заданы следующие условия: $\vartheta_x = 0.03$, $\vartheta_y = 0$.

Метод решения

В работе для разностной аппроксимации исходных уравнений применен метод контрольного объема SIMPLE [20]. При этом вязкостные члены аппроксимировались неявными центральной разностью, а для конвективных членов использована полунявная схема первого порядка точности против потока для всех задач [21]. Обезразмеренную систему уравнений (4) можно представить в матричном виде:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + V_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + V_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(B \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \Phi^*. \tag{5}$$

Здесь

$$\Phi = \begin{pmatrix} V_x, V_y \\ \vartheta_x \\ \vartheta_y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{Re}, \frac{1}{Re} \\ 2v_{xx} \\ v_{xy} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{Re}, \frac{1}{Re} \\ v_{xy} \\ 2v_{yy} \end{pmatrix},$$

$$\Pi^\Phi = \begin{pmatrix} -\frac{\partial p}{\rho \partial x} - \frac{\partial \vartheta_x \vartheta_y}{\partial y} - \frac{\partial \vartheta_x \vartheta_x}{\partial x}, -\frac{\partial p}{\rho \partial y} - \frac{\partial \vartheta_y \vartheta_y}{\partial y} - \frac{\partial \vartheta_x \vartheta_y}{\partial x} \\ -\left(\vartheta_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \vartheta_y \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_{xy} \left(\frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} \right) \right) + C_s \left(-\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vartheta \right) - K_f \vartheta_x \\ -\left(\vartheta_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + \vartheta_y \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v_{xy} \left(\frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} \right) \right) + C_s \left(\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) u \right) - K_f \vartheta_y \end{pmatrix}.$$

Полунеявная схема против потока имеет первый порядок точности с погрешностью аппроксимации $O((\Delta t), (\Delta x), (\Delta y))$. Применив полунеявный метод к нелинейному уравнению двухжидкостной модели турбулентности, получаем следующую разностную схему:

$$\frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{(F_e + |F_e|)\Phi_{i+1,j}^n + (|F_e| + |F_w| + F_e - F_w)\Phi_{i,j}^n - (F_w + |F_w|)\Phi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} +$$

$$+ \frac{\Phi_{i,j+1}^n (F_n - |F_n|) + \Phi_{i,j}^n ((|F_n| + F_n) + (|F_s| - F_s)) - \Phi_{i,j-1}^n (|F_s| + F_s)}{2\Delta y} =$$

$$= \frac{1}{Re} \left(\frac{\Phi_{i+1,j}^n - 2\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i-1,j}^n}{\Delta x} + \frac{\Phi_{i,j+1}^{n+1} - 2\Phi_{i,j}^{n+1} + \Phi_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} \right) - \Pi^\Phi,$$

здесь

$$F_e = \frac{(\Phi_{i+1,j}^n + \Phi_{i,j}^n)}{2},$$

$$F_w = \frac{(\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i-1,j}^n)}{2},$$

$$F_n = \frac{(\Phi_{i,j+1}^n + \Phi_{i,j}^n)}{2},$$

$$F_s = \frac{(\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i,j-1}^n)}{2}.$$

Чтобы определить неизвестные значения, использована схема прогонки, которой была подробно описана в статье [21]. Интегрирование велось с шагом по времени $\Delta t < 0.005$.

Результаты расчетов и их обсуждение

На рис. 3 представлена безразмерная усредненная по времени скорость потока вдоль центральной линии области результатов моделирования, и ее можно ис-

пользовать для определения длины зоны разделения, или зоны рециркуляции, за квадратным блоком.

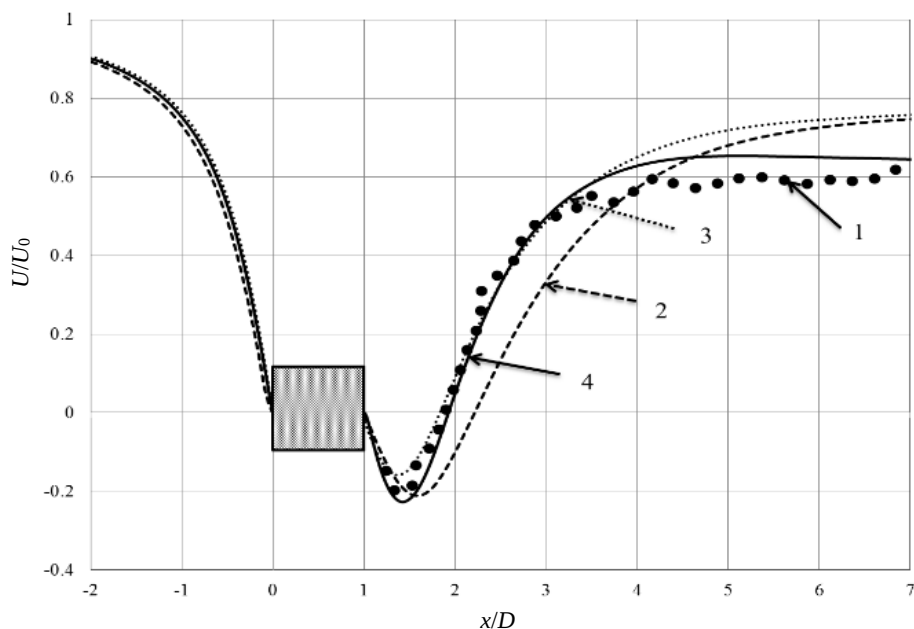


Рис. 3. Безразмерная усредненная по времени скорость потока вдоль центральной линии области: 1 – экспериментальные результаты Д. Лина и др. [19], 2 – двухжидкостная модель в первой сетке, 3 – двухжидкостная модель во второй сетке, 4 – двухжидкостная модель в третьей сетке

Fig. 3. Dimensionless time-averaged velocity of the flow along the central line of the region: (1) experimental results by Lin et al. [19], (2) two-fluid model in the first grid, (3) two-fluid model in the second grid, and (4) two-fluid model in the third grid

Экспериментальное измерение вихревого выброса доступно за квадратным блоком, оно показывает, что вращающийся поток наблюдался от $x/D = 1$ до 4, после этого U/U_0 относительно постоянно: в эксперименте Д. Лина и соавт. [19] эта величина составляет примерно 0.6; численные результаты двухжидкостного подхода на первой и второй сетках равны 0.75; при использовании третьего варианта сетки результат равен 0.64 до конца канала. За препятствием, для $x/D > 4$, величина усредненных по времени скоростей потока уменьшается на 40% в экспериментальной работе Д. Лина и соавт. и на 25–36% при двухжидкостном подходе на первой, второй и третьей сетках по сравнению со скоростью входного свободного потока.

На рис. 4 представлены усредненные по времени профили осевой скорости в нескольких поперечных сечениях.

На рис. 5 представлены усредненные по времени профили вертикальной скорости в нескольких поперечных сечениях.

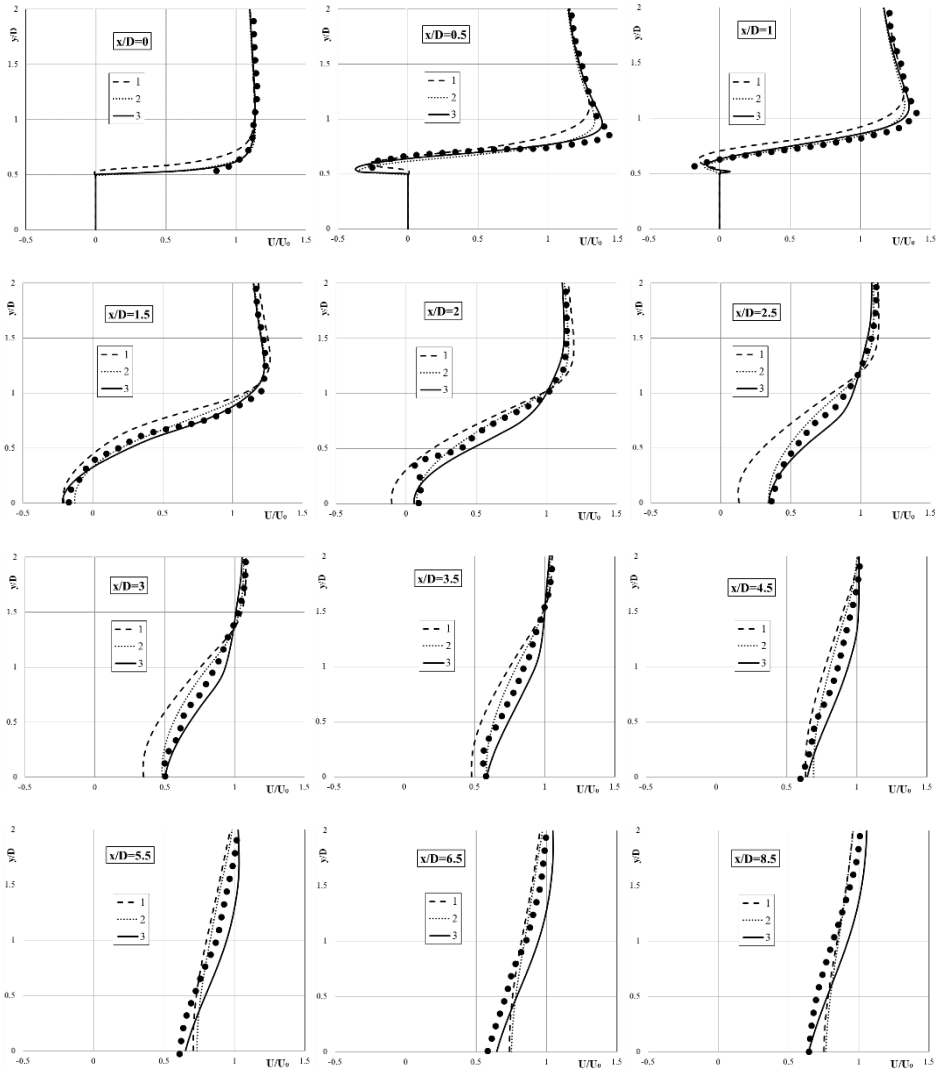


Рис. 4. Рассчитанные и измеренные усредненные по времени профили осевой скорости в нескольких поперечных сечениях: (●) – экспериментальные результаты Д. Лина и др., 1 – двухжидкостная модель в первой сетке, 2 – двухжидкостная модель во второй сетке, 3 – двухжидкостная модель в третьей сетке

Fig. 4. Calculated and measured time-averaged axial velocity profiles in several cross-sections: (●) experimental results by Lin et al., (1) two-fluid model in the first grid, (2) two-fluid model in the second grid, and (3) two-fluid model in the third grid

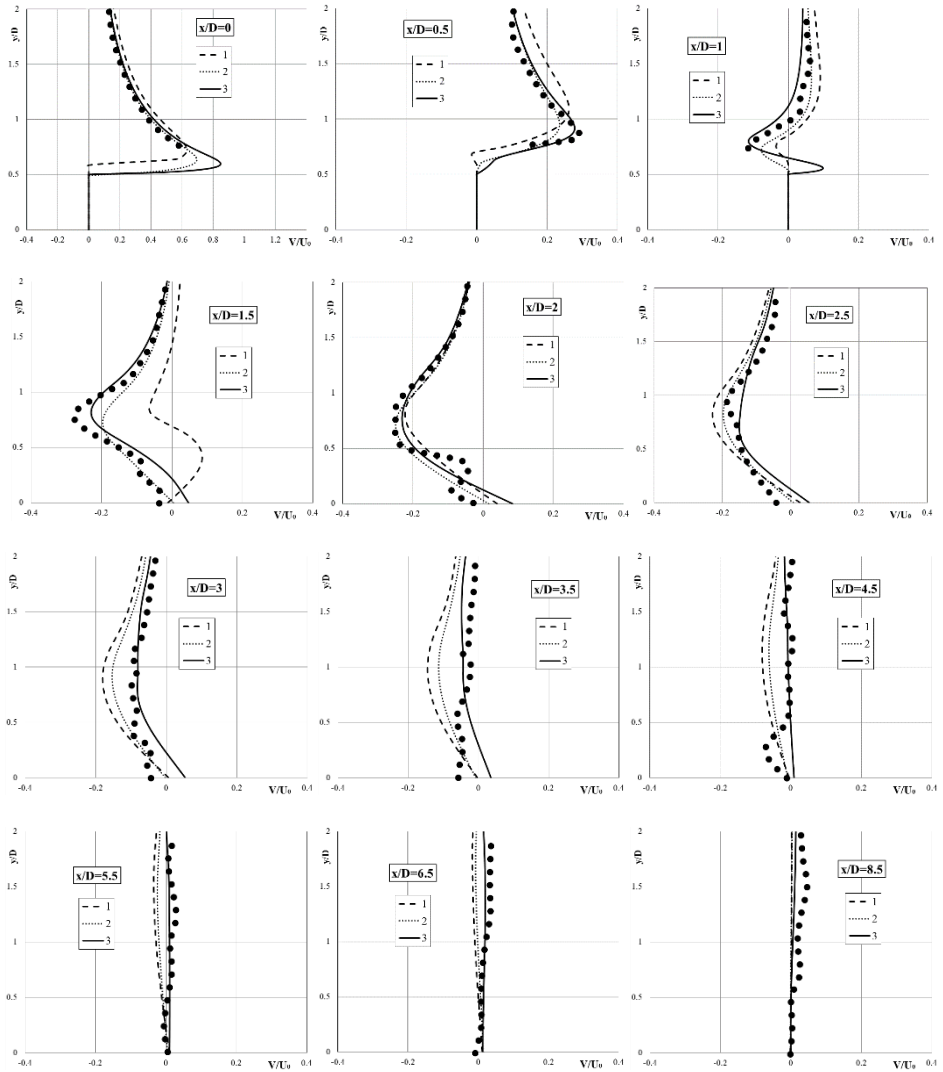


Рис. 5. Рассчитанные и измеренные усредненные по времени профили вертикальной скорости в нескольких поперечных сечениях вдоль верхней поверхности квадратного цилиндра: (●) – экспериментальные результаты Д. Лина и др., 1 – двухжидкостная модель в первой сетке, 2 – двухжидкостная модель во второй сетке, 3 – двухжидкостная модель в третьей сетке

Fig. 5. Calculated and measured time-averaged vertical velocity profiles in several cross-sections along the upper surface of the square cylinder: (●) experimental results by Lin et al., (1) two-fluid model in the first grid, (2) two-fluid model in the second grid, and (3) two-fluid model in the third grid

Ламинарное течение во внезапно расширяющемся канале

Течение в плоском канале с внезапным расширением относится к наиболее простому классу отрывных течений, когда точка отрыва потока является фиксированной. Теоретический расчет таких течений представляет большие трудности из-за образования сложных отрывных и возвратно-циркуляционных течений в области за уступом. Первые расчеты стационарных двумерных ламинарных отрывных течений несжимаемой жидкости в каналах были изучены еще Г. Блазиусом в 1910 г. аналитически в виде рядов [22]. В дальнейшем эта задача использовалась многими учеными для изучения механизмов отрывных течений и тестирования разностных схем решения уравнений Навье–Стокса.

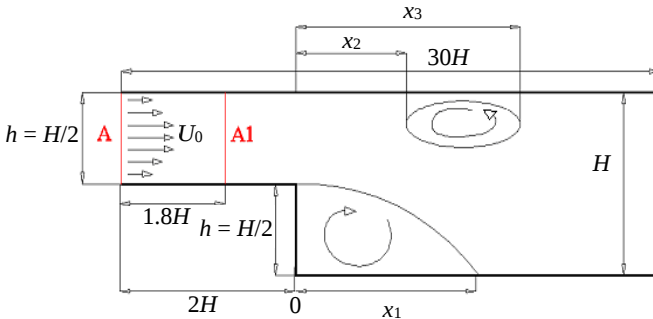


Рис. 6. Схема расчетной области в плоском канале с обратным уступом
Fig. 6. Computational domain in a flat backward-facing step

Рассматривается двумерное ламинарное течение в плоском канале с внезапным расширением. Физическая картина анализируемого течения и конфигурация расчетной области представлены на рис. 6. Начало введенной декартовой системы координат находится в левом нижнем углу уступа. Ширина канала в левом входном сечении имеет размер h , а в правом выходном сечении канала — $H = 2h$. Высота уступа равна, соответственно, h . Во входном сечении канала задавался параболический профиль течения Пуазейля для продольной скорости U , а вертикальная скорость V была равна нулю. При введении безразмерных величин за масштаб длины принимается ширина канала h , за масштаб скорости принята средняя по сечению скорость U_0 на входе в канал; x_1 — расстояние до повторного присоединения первичного вихря, x_2 — расстояние до начала вторичного вихря, x_3 — расстояние до конца вторичного вихря.

Расчетные сетки

В настоящем исследовании были использованы два образца расчетной сетки, которые представлены на рис. 7. Как видно из рисунка, сгущения сеток около горизонтальных стенок не проведены, потому что, как показано в работе [11], двухжидкостная модель способна с большой точностью описывать закон стенки и с грубой сеткой. В указанной работе показано, что для адекватного описания течения около твердой стенки достаточно двух расчетных узлов внутри пограничного слоя.

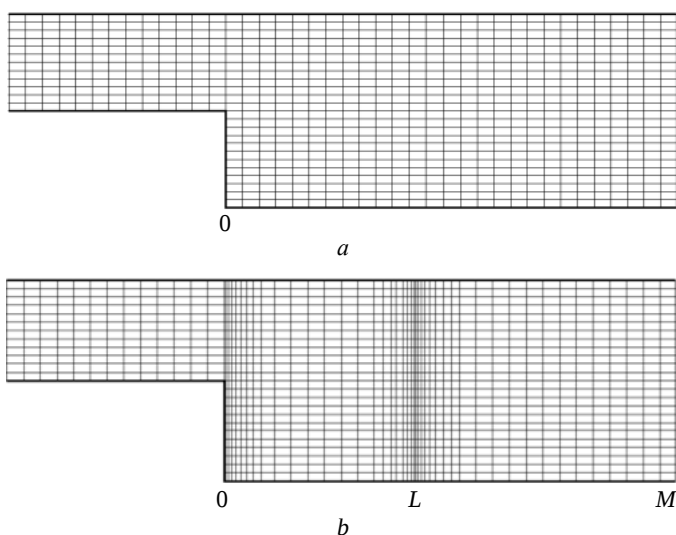


Рис. 7. Расчетные сетки: *a* – равномерная сетка размером 300×100 ,
b – сгущенная сетка размером 400×100

Fig. 7. Computational grids: (a) uniform grid size 300×100 and (b) condensed grid size 400×100

Как видно из рис. 7, *б*, сгущение сетки производилось в областях отрыва и присоединения потоков. Для этого использовано преобразование систем координат $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$.

При $0 < x < L$:

$$\xi = \frac{\alpha + (1 - \alpha) \left(\ln \left(\left\{ \beta + \left[x(2\alpha + 1)/L \right] - 2\alpha \right\} / \left\{ \beta - \left[x(2\alpha + 1)/L \right] + 2\alpha \right\} \right) \right)}{\ln[(\beta + 1)/(\beta - 1)]}, \quad (6)$$

$$\eta = y/h.$$

При $L < x < M$:

$$\xi = 1 - \left(\ln \left(\left\{ \beta + 1 - x/M \right\} / \left\{ \beta - 1 + x/M \right\} \right) \right) / \left(\ln[(\beta + 1)/(\beta - 1)] \right), \quad (7)$$

$$1 < \beta < \infty, \quad \eta = y/h.$$

Данное преобразование при $\alpha = 1/2$ позволяет измельчить расчетную сетку как в сечении $x = 0$, так и при $x = L$. В работе использовано значение $\beta = 1.054$. В простом варианте сетки (см. рис. 7, *a*) использовано 40×50 узлов при $x < 0$, 260×100 при $x > 0$. В сгущенном варианте сетки (см. рис. 7, *б*) использовано 100×50 узлов при $x < 0$, 200×100 – при $0 < x < L$, 100×100 – при $x > L$. Для сетки со сгущением при $x < 0$ количество узлов было 100×50 , при $0 < x < L$ – 300×100 , при $x > L$ – 100×100 . Для получения стационарного решения при числе Рейнольдса системы (4) $Re > 800$ после формирования квазипериодического режима произведено осреднение результатов по времени.

На входе, в сечении А, согласно работе [23] ставились параметры, полученные на расстоянии $1.8H$ от него (см. рис. 6). Этот тип граничного условия называется граничным условием копирования $A(V_x, V_y, p) = A1(V_x, V_y, p)$.

Результаты расчетов и их обсуждение

При более высоких числах Рейнольдса поток за счет рециркуляции приобретает анизотропную турбулентность. Это объясняет расхождения между экспериментальными и численными результатами, приведенными на рис. 8 при числах Рейнольдса $Re = 1\,290$. На этих рисунках U – безразмерная продольная скорость.

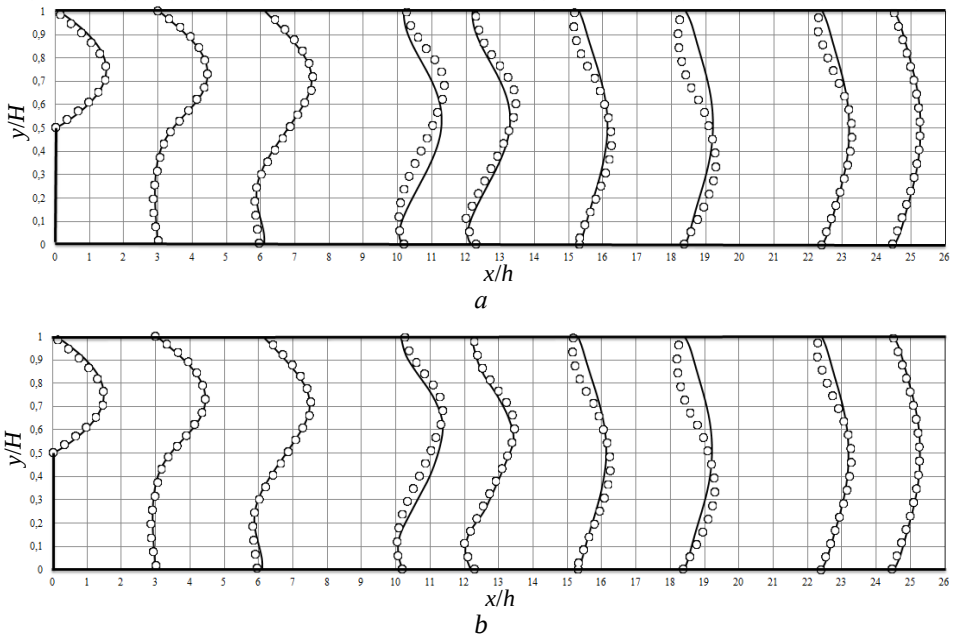


Рис. 8. Профили для $(U + x/h)$ при $Re = 1\,290$ на равномерной сетке (а), на сгущенной сетке (б): (о) – Армали и др./ (эксперимент) [24], (—) двухжидкостная модель

Fig. 8. Profiles for $(U + x/h)$ at $Re = 1290$ on the (a) uniform and (b) condensed grid: (o) Armali et al. (experiment) [24] and (—) two-fluid model

Из рис. 8 видно, что двухжидкостная модель очень хорошо описывает параметр $(U + x/h)$ при $x/h < 10$ для $Re = 1\,290$. Небольшие отклонения от экспериментальных данных наблюдаются в диапазоне $12 < x/h < 16$.

На рис. 9 приведены результаты для местоположения повторного присоединения первичного и вторичного вихрей в зависимости от числа Рейнольдса.

Из рис. 9 видно, что двухжидкостная модель очень хорошо описывает ламинарную область течения при $Re < 900$ и турбулентную область при $Re > 4\,000$. Отклонение численных результатов от экспериментальных данных наблюдается для переходной области $900 < Re < 4000$.

Однако результаты двухжидкостной модели существенно лучше, чем результаты других работ [23, 24]. Видно, что сгущение расчетной сетки несколько улучшает результаты.

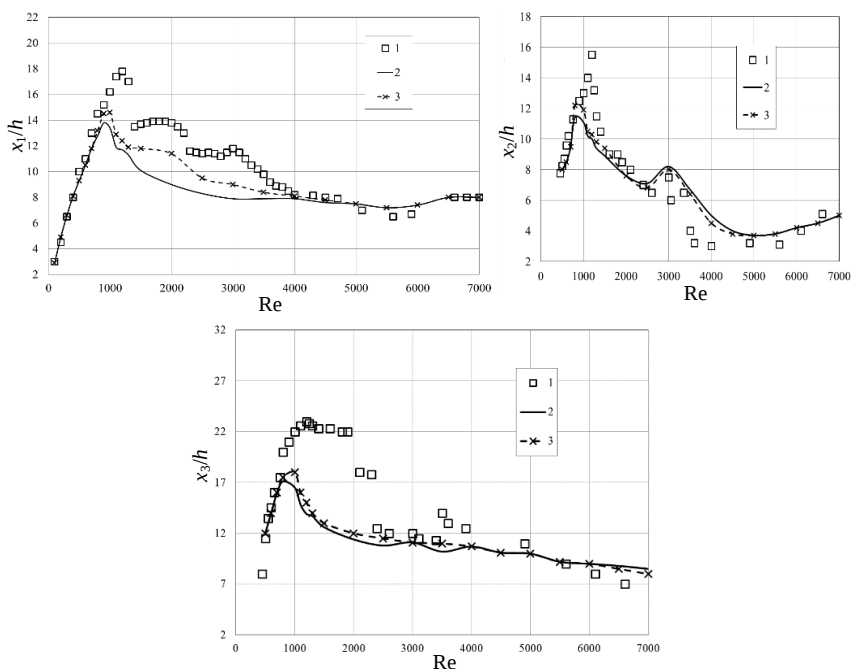


Рис. 9. Результаты местоположения первичного и вторичного вихрей при изменении числа Рейнольдса: 1 – Армали и др. (эксперимент) [24], 2 – двухжидкостная модель с равномерной сеткой, 3 – двухжидкостная модель со сгущенной сеткой

Fig. 9. Results of the primary and secondary vortex location at the varying Reynolds number: (1) Armali et al (experiment) [24], (2) two-fluid model with a uniform grid, and (3) two-fluid model with a condensed grid

Турбулентное течение во внезапно расширяющемся канале

В работе [25] на основе новой двухжидкостной модели проведено исследование во внезапно расширяющемся канале для турбулентных потоков. При этом использована регулярная грубая сетка. Однако можно предполагать о влиянии изменений расчетной сетки на результаты исследования. Поэтому целью настоящей работы является апробация новой модели для сгущенной сетки. Кроме этого, в работе для сравнения представлены результаты моделей грубой сетки из статьи [25] и экспериментальные данные [26].

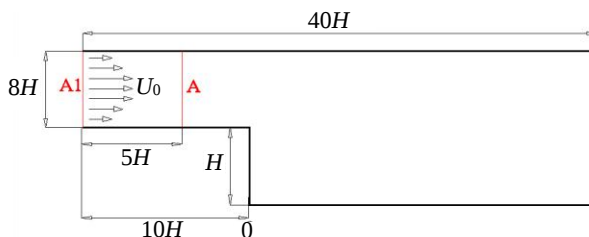


Рис. 10. Схема расчетной области в плоском канале с обратным уступом
Fig. 10. Computational domain in a flat backward-facing step

Рассматривается двумерное турбулентное течение в плоском канале с внезапным расширением в виде уступа. Физическая картина анализируемого течения и конфигурация расчетной области представлены на рис. 10, а остальные значения представлены в базе данных NASA [26]. На входной области задается особый вид граничных условий копированием [27].

Исследования расчетной сетки

В данном исследовании были использованы два образца расчетной сетки (см. рис. 7). Также было применено преобразование систем координат (см. формулы (5), (6)). Система уравнений (4) приводилась к безразмерному виду соотношением всех скоростей к средней скорости на входе, а пространственные размеры – к высоте уступа H . Число Рейнольдса было равно $Re_H = H\bar{U}_0 / \nu = 36000$, где $\bar{U}_0$ – средняя скорость на входе. На входе расчетной области задавались начальные безразмерные возмущения относительных скоростей $u = 10^{-4}$, $\vartheta = 0$ [28]. Интегрирование велось шагом по времени $\Delta t = 0.0001$. Для получения стационарного решения системы (4) после формирования квазипериодического режима произведено осреднение результатов по времени.

Результаты расчетов и их обсуждение

На рис. 11 приведены графики в различных сечениях канала для безразмерной продольной скорости по результатам моделей турбулентности.

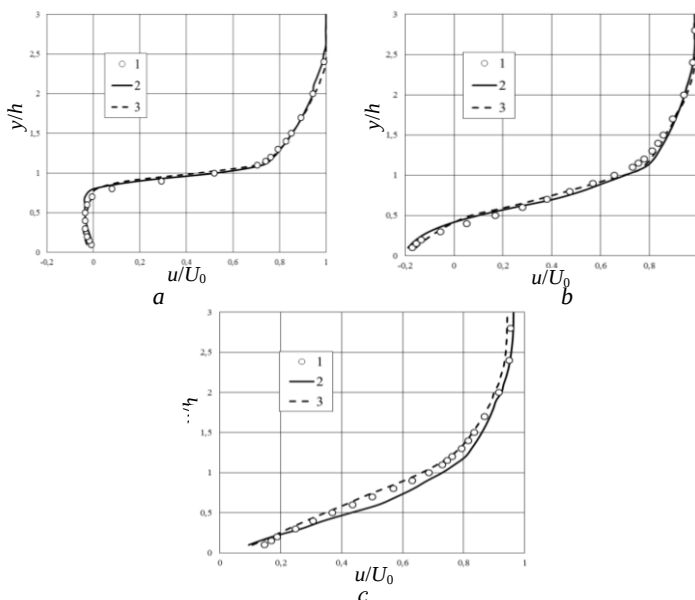


Рис. 11. Профили безразмерной аксиальной скорости при $x = H$ (а), при $x = 4H$ (б), при $x = 6H$ (в): 1 – эксперимент, 2 – двухжидкостная модель в грубой сетке,

3 – двухжидкостная модель в сгущенной сетке

Fig. 11. Profiles of the dimensionless axial velocity at $x = (a) H$, $(b) 4H$, and $(c) 6H$: (1) experiment, (2) two-fluid model in a coarse grid, and (3) two-fluid model in a condensed grid

Для сравнения приведены также экспериментальные данные. На рисунках представлены профили осевой составляющей скорости U в различных сечениях на расстояниях от входа в широкий канал.

На рис. 12 представлены профили турбулентного напряжения в различных измеренных сечениях на расстояниях от входа в широкий канал.

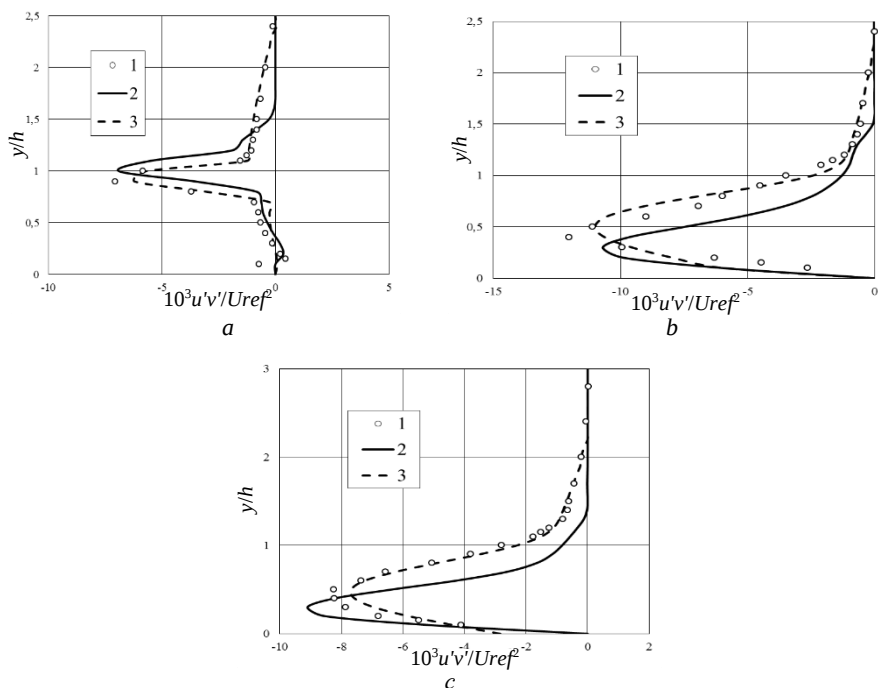


Рис. 12. Профили турбулентного напряжения при $x = H$ (а), при $x = 4H$ (б), , при $x = 6H$ (в): 1 – эксперимент, 2 – двухжидкостная модель в грубой сетки, 3 – двухжидкостная модель в сгущенной сетке

Fig. 12. Turbulent stress profiles at $x =$ (a) H , (b) $4H$, and (c) $6H$: (1) experiment, (2) two-fluid model in a coarse grid, and (3) two-fluid model in a condensed grid

Заключение

Настоящая работа посвящена развитию двухжидкостной модели турбулентности З.М. Маликова и численного метода расчета параметров в переменных скорость–давление. Данная модель позволяет глубже изучить механизм образования и эволюцию вихревых структур за плохо обтекаемыми телами и с внезапным расширением канала при различных числах Рейнольдса. В работе для разностной аппроксимации двухжидкостных уравнений применен известный алгоритм SIMPLE. Анализ устойчивости полунявной схемы против потока показывает, что она устойчива при любом шаге по времени, т.е. абсолютно устойчива.

Несмотря на применение достаточно грубой и мелкой сетки со сгущением, полученные с использованием двухжидкостной модели результаты неплохо согласуются с экспериментальными данными. При использовании сгущенной сетки

результаты более точно согласуются с опубликованными экспериментальными данными (см. рис. 3–5).

Для ламинарного, переходного и турбулентного течений потока определены местоположения повторного присоединения первичного вихря, начала и конца вторичного вихря (см. рис. 9), а также рассчитаны профили продольной скорости в различных сечениях (см. рис. 8). Показано, что двухжидкостная модель турбулентности дает более близкие результаты к экспериментальным данным. Особенно хорошее соответствие наблюдается для ламинарного и турбулентного режимов течения. Несколько хуже результаты для переходного режима. По всей видимости, это связано тем, что коэффициенты поправки для двухжидкостной модели получены для развитой турбулентности, и для переходной области необходимо их калибровать заново. Однако это требует дополнительных исследований.

Для турбулентного течения несжимаемой вязкой жидкости в коротком плоском канале с обратным уступом с использованием новой двухжидкостной турбулентной модели продемонстрированы профили скорости (см. рис. 11), турбулентного напряжения (см. рис. 12) для различных сечений канала, а также показано влияние расчетной сетки на результаты исследования. При использовании довольно грубой и сгущенной сеток для численной реализации гидродинамических уравнений показано, что полученные результаты удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными, особенно на сгущенной сетке.

В целом, учитывая точность, а также простоту численной реализации двухжидкостной модели, ее можно рекомендовать для исследования отрывных потоков с рециркуляцией потока.

Список источников

1. *Trias F.X., Gorobets A., Oliva A.* Turbulent flow around a square cylinder at Reynolds number 22,000: A DNS study // *Computers & Fluids*. 2015. V. 123. P. 87–98.
2. *Bouris D., Bergeles G.* 2D LES of vortex shedding from a square cylinder // *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 1999. V. 80. P. 31–46.
3. *Cao Y., Tamura T.* Large-eddy simulations of flow past a square cylinder using structured and unstructured grids // *Computers & Fluids*. 2016. V. 137. P. 36–54.
4. *Кагенов А.М., Костюшин К.В., Алигасанова К.Л., Котоногов В.А.* Математическое моделирование взаимодействия составной сверхзвуковой струи с преградой // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2020. № 68. С. 72–79. doi: 10.17223/19988621/68/7
5. *Глазунов А.А., Еремин И.В., Жильцов К.Н., Костюшин К.В., Тырышкин И.М., Шуваринов В.А.* Численное исследование определения величин пульсаций давления и собственных акустических частот в камерах сгорания с наполнителем сложной формы // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2018. № 53. С. 59–72. doi: 10.17223/19988621/53/6
6. *Биматов В.И., Савкина Н.В., Фарапонов В.В.* Сверхзвуковое обтекание и аэродинамические характеристики острого конуса для различных моделей турбулентной вязкости // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2016. № 5 (43). С. 35–42. doi: 10.17223/19988621/43/4
7. *Турбаев Р.Р., Шваб А.В.* Численное исследование аэродинамики закрученного турбулентного течения и процесса классификации частиц в вихревой камере центробежного аппарата // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2020. № 65. – С. 137–147. doi: 10.17223/19988621/65/11

8. Маликов З.М., Мадалиев М.Э. Численное исследование закрученного турбулентного течения в канале с внезапным расширением // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 72. С. 93–101. doi: 10.17223/19988621/72/8
9. Spalding D.B. Chemical reaction in turbulent fluids // J. Physico-chemical Hydrodyn. 1983. V. 4. P. 323–336.
10. Spalding D.B. A turbulence model for buoyant and combusting flows // 4th Int. Conf. on Numerical methods in Thermal Problems, Swansea, 15–18 July 1984.
11. Malikov Z. Mathematical Model of Turbulence Based on the Dynamics of Two Fluids // Applied Mathematic Modeling. 2020. V. 82. P. 409–436.
12. Malikov Z.M., Madaliev M.E. Numerical Simulation of Two-Phase Flow in a Centrifugal Separator // Fluid Dynamics. 2020. V. 55 (8). P. 1012–1028.
13. Malikov Z.M. Mathematical model of turbulent heat transfer based on the dynamics of two fluids // Applied Mathematic Modeling. 2021. V. 91. P. 186–213.
14. Malikov Z.M., Madaliev M.E. Numerical simulation of flow in a two-dimensional flat diffuser based on two fluid turbulence models // Computer Research and Modeling. 2021. V. 13 (6). P. 1115–1126.
15. Younis B.A., Przulj V.P. Computation of turbulent vortex shedding // Comput Mech. 2006. V. 37. P. 408–425.
16. Rodi W. Comparison of LES and RANS calculations of the flow around bluff bodies // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 1997. V. 69-71. P. 55–75.
17. Rodi W. On the simulation of turbulent flow past bluff bodies // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 1993. V. 46-47. P. 3–19.
18. Bosch G., Rodi W. Simulation of vortex a shedding past a square cylinder with different turbulence models // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1998. V. 28. P. 601–616.
19. Lyn D.A., Einav S., Rodi W., Park J.H. A laser-Doppler velocimetry study of ensemble-averaged characteristics of the turbulent near wake of a square cylinder // Journal of Fluid Mechanics. 1995. V. 304. P. 285–319.
20. Patankar S.V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Washington–New York–London : Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
21. Madaliev M.E. Numerical Calculation of an Air Centrifugal Separator Based on the SARC Turbulence Model // J. Appl. Comput. Mech. 2020. V. 6 (SI). P. 1133–1140. doi: 10.22055/JACM.2020.31423.1871
22. Blasius H. Laminare Stromung in Kanalen Wecselnder Briete // Zeitschrift filer Mathematik und Physik. 1910. V. 10. P. 225–223.
23. Kopera M.A. Direct Numerical Simulation of Turbulent Flow over a Backward-Facing Step : Thesis Submitted to the University of Warwick for the degree of Doctor of Philosophy School of Engineering March 2011.
24. Armaly B.F., Durst F., Pereira J.C.F., Schonung B. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow // J. Fluid Mech. 1983. V. 127. P. 473–496.
25. Маликов З.М., Мадалиев М.Э. Численное моделирование течения в плоском внезапно расширяющемся канале на основе новой двухжидкостной модели турбулентности // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2021. № 4 (97). С. 24–39.
26. Cristopher R. Turbulence modeling Resource // NASA Langley Research Center. URL: <http://turbmodels.larc.nasa.gov/>. (04.04.2019)
27. Lund T., Wu X., Squires, K. Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations. Journal of Computational Physics. 1998. V. 140 (2). P. 233–258.
28. Турубаетв Р.Р., Шваб А.В. Численное исследование аэродинамики закрученного потока в вихревой камере комбинированного пневматического аппарата // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 47. С. 87–98. doi: 10.17223/19988621/47/9

References

1. Trias F.X., Gorobets A., Oliva A. (2015) Turbulent flow around a square cylinder at Reynolds number 22,000: A DNS study. *Computers & Fluids*. 123. pp. 87–98. doi: 10.1016/j.compfluid.2015.09.013
2. Bouris D., Bergeles G. (1999) 2D LES of vortex shedding from a square cylinder. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 80(1–2). pp. 31–46. doi: 10.1016/S0167-6105(98)00200-1
3. Cao Y., Tamura T. (2016) Large-eddy simulations of flow past a square cylinder using structured and unstructured grids. *Computers & Fluids*. 137. pp. 3654. doi: 10.1016/j.compfluid.2016.07.013
4. Kagenov A.M., Kostyushin K.V., Aligasanova K.L., Kotonogov V.A. (2020) Matematicheskoe modelirovanie vzaimodeystviya sostavnoy sverkhzvukovoy strui s pregradoy [Mathematical modeling of a supersonic twin jet interaction with an obstacle]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 68. pp. 72–79. doi: 10.17223/19988621/68/7
5. Glazunov A.A., Eremin I.V., Zhiltsov K.N., Kostyushin K.V., Tyryshkin I.M., Shuvarikov V.A. (2018) Chislennoe issledovanie opredeleniya velichin pul'satsiy davleniya i sobstvennykh akusticheskikh chastot v kamerakh sgoraniya s napolnitelem slozhnoy formy [Numerical investigation of the pressure pulsation magnitude and natural aeroacoustic frequencies in the combustion chambers with a charge of a complex shape]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 53. pp. 59–72. doi: 10.17223/19988621/53/6
6. Bimatov V.I., Savkina N.V., Faraponov V.V. (2016) Sverkhzvukovoe obtekanie i aerodinamicheskie kharakteristiki ostrogo konusa dlya razlichnykh modeley turbulentnoy vyazkosti [Supersonic flow over a sharp cone and its aerodynamic characteristics for different models of turbulent viscosity]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(43). pp. 35–42. doi: 10.17223/19988621/43/4
7. Turubaev R.R., Shvab A.V. (2020) Chislennoe issledovanie aerodinamiki zakruchennogo turbulentnogo techeniya i protsessa klassifikatsii chastits v vikhrevoi kamere tsentrobezhnogo apparata [Numerical study of swirling turbulent flow aerodynamics and classification of particles in a vortex chamber of a centrifugal machine]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 65. pp. 137–147. doi: 10.17223/19988621/65/11
8. Malikov Z.M., Madaliev M.E. (2021) Chislennoe issledovanie zakruchennogo turbulentnogo techeniya v kanale s vnezapnym rasshireniyem. [Numerical study of a swirling turbulent flow through a channel with an abrupt expansion]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 72. pp. 93–101. doi: 10.17223/19988621/72/8
9. Spalding D.B. (1983) Chemical reaction in turbulent fluids. *Journal of Physico-chemical Hydrodynamics*. 4. pp. 323–336.
10. Spalding D.B. (1984). A turbulence model for buoyant and combusting flows. *Proceedings of the 4th International Conference on Numerical Methods in Thermal Problems, Swansea*.
11. Malikov Z. (2020) Mathematical model of turbulence based on the dynamics of two fluids. *Applied Mathematical Modelling*. 82. pp. 409–436. doi: 10.1016/j.apm.2020.01.047
12. Malikov Z.M., Madaliev M.E. (2020) Numerical simulation of two-phase flow in a centrifugal separator. *Fluid Dynamics*. 55(8). pp. 1012–1028. doi: 10.1134/S0015462820080066
13. Malikov Z.M. (2021) Mathematical model of turbulent heat transfer based on the dynamics of two fluids. *Applied Mathematical Modelling*. 91. 186–213. doi: 10.1016/j.apm.2020.09.029

14. Malikov Z.M., Madaliev M.E. (2021) Numerical simulation of flow in a two-dimensional flat diffuser based on two fluid turbulence models. *Computer Research and Modeling*. 13(6). pp. 1115–1126. doi: 10.20537/2076-7633-2021-13-6-1149-1160
15. Younis B.A., Przulj V.P. (2006) Computation of turbulent vortex shedding. *Computational Mechanics*. 37. pp. 408–425. doi: 10.1007/s00466-005-0713-2
16. Rodi W. (1997) Comparison of LES and RANS calculations of the flow around bluff bodies. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 69–71. pp. 55–75. doi: 10.1016/S0167-6105(97)00147-5
17. Rodi W. (1993) On the simulation of turbulent flow past bluff bodies. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 46–47. pp. 3–19. doi: 10.1016/B978-0-444-81688-7.50005-X
18. Bosch G., Rodi W. (1998) Simulation of vortex shedding past a square cylinder with different turbulence models. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 28. pp. 601–616. doi: 10.1002/(SICI)1097-0363(19980930)28:4<601::AID-FLD732>3.0.CO;2-F
19. Lyn D.A., Einav S., Rodi W., Park J.H. (1995) A laser-Doppler velocimetry study of ensemble-averaged characteristics of the turbulent near wake of a square cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*. 304. pp. 285–319. doi: 10.1017/S0022112095004435
20. Patankar S.V. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Washington–New York–London: Hemisphere Publishing Corporation.
21. Madaliev M.E. (2020) Numerical calculation of an air centrifugal separator based on the sarc turbulence model. *Journal of Applied and Computational Mechanics*. 6(SI). pp. 1133–1140. doi: 10.22055/JACM.2020.31423.1871
22. Blasius H. (1910) Laminare Stromung in Kanalen Wecselnder Briete. *Zeitschrift fñler Mathematik und Physik*. 10. pp. 225–233.
23. Kopera M.A. (2011) *Direct Numerical Simulation of Turbulent Flow over a Backward-Facing Step*. Ph.D. thesis, University of Warwick.
24. Armaly B.F., Durst F., Pereira J.C.F., Schonung B. (1983) Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 127. pp. 473–496. doi: 10.1017/S0022112083002839
25. Malikov Z.M., Madaliev M.E. (2021) Chislennoe modelirovanie techeniya v ploskom vnezapno rasshiryayushchemsya kanale na osnove novoy dvuzhidkostnoy modeli turbulentnosti [New two-fluid turbulence model-based numerical simulation of flow in a flat suddenly expanding channel]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.E. Baumana. Seriya «Estestvennye nauki» – Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*. 4(97). pp. 24–39. doi: 10.18698/1812-3368-2021-4-24-39
26. Cristopher R. (2019) *Turbulence Modeling Resource*. NASA Langley Research Center. URL: <http://turbmodels.larc.nasa.gov>.
27. Lund T., Wu X., Squires K. (1998) Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations. *Journal of Computational Physics*. 140(2). pp. 233–258. doi: 10.1006/jcph.1998.5882
28. Turubaev R.R., Shvab A.V. (2017) Chislennoe issledovanie aerodinamiki zakruchennogo potoka v vikhreвой kamere kombinirovannogo pnevmaticheskogo apparata [Numerical study of swirled flow aerodynamics in the vortex chamber of the combined pneumatic machine]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 47. pp. 87–98. doi: 10.17223/19988621/47/9

Сведения об авторе:

Мадалиев Муродил Эркинжон угли – PhD, старший научный сотрудник Института механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан, старший преподаватель Ферганского политехнического института, Фергана, Узбекистан. E-mail: Madaliev.ME2019@mail.ru, m.e.madaliev@ferpi.uz

Information about the author:

Madaliev Murodil E. (PhD, Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures named after M.T. Urazbaev of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan, Fergana Polytechnic Institute, Fergana, Republic of Uzbekistan).
E-mail: Madaliev.ME2019@mail.ru, m.e.madaliyev@ferpi.uz

Статья поступила в редакцию 12.03.2022; принята к публикации 31.03.2023

The article was submitted 12.03.2022; accepted for publication 31.03.2023

Научная статья

УДК 533

doi: 10.17223/19988621/82/11

Особенности формирования пламени пропано-воздушной смеси в узком канале

Ксения Михайловна Моисеева¹, Аружан Ильясовна Кантарбаева²,
Алексей Юрьевич Крайнов³

^{1, 2, 3} *Томский государственный университет, Томск, Россия*

¹ *Moiseeva_KM@t-sk.ru*

² *arukantar@gmail.com*

³ *akrainov@ftf.tsu.ru*

Аннотация. Представлены результаты численного исследования особенностей распространения пламени пропано-воздушной смеси в узком цилиндрическом канале. Постановка задачи основана на подходах газовой динамики реагирующих сред. Метод решения построен на основе метода Ван-Леера для определения потоков на гранях расчетных ячеек. Из решения задачи получены закономерности формирования искривленного фронта горения. Определена видимая скорость распространения пламени в каналах различного радиуса. Полученные результаты качественно соответствуют данным экспериментальных исследований, описанным в научной литературе.

Ключевые слова: скорость горения, пропано-воздушная смесь, математическое моделирование

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке стипендии Президента СП-134.2022.1.

Для цитирования: Моисеева К.М., Кантарбаева А.И., Крайнов А.Ю. Особенности формирования пламени пропано-воздушной смеси в узком канале // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 82. С. 141–149. doi: 10.17223/19988621/82/11

Original article

Peculiarities of the flame formation of a propane-air mixture in a narrow channel

Kseniya M. Moiseeva¹, Aruzhan I. Kantarbaeva², Aleksey Yu. Krainov³

^{1, 2, 3} *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

¹ *Moiseeva_KM@t-sk.ru*

² arukantar@gmail.com

³ akrainov@ftf.tsu.ru

Abstract. This paper presents a numerical study of the features of propane-air mixture flame propagation in a narrow cylindrical channel. The main purpose of the study is to determine the effect of the channel width on the combustion characteristics of a propane-air mixture with a composition close to stoichiometric. The problem is formulated using the methods of reactive gas dynamics. The solution method is based on the Van Leer method for determining flows on the faces of computational cells. The peculiarities of the combustion front formation and its propagation along the channel are revealed and analyzed. The formation of the curved flame front is shown to have a cyclical nature. The visible flame velocity is obtained as a function of the channel radius. The proposed physical and mathematical model can be used to determine the thermal conditions of operating cylindrical burners.

Keywords: burning velocity, propane-air mixture, mathematical modeling

Acknowledgments: This work was financially supported by the Presidential Scholarship SP-134.2022.1.

For citation: Moiseeva, K.M., Kantarbaeva, A.I., Krainov, A.Yu. (2023) Peculiarities of the flame formation of a propane–air mixture in a narrow channel. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 82. pp. 141–149. doi: 10.17223/19988621/82/11

Введение

Вопросы устойчивого распространения пламени газовых смесей неоднократно исследовались как экспериментально, так и теоретически. Тем не менее остаются моменты, требующие изучения. В частности, одним из привлекающих внимание исследователя вопросов является формирование тюльпанообразных пламен, отличающихся сложной структурой фронта горения.

Такого рода задачи решались, например, в работах [1–11]. В [1] вопрос неоднородности фронта горения газовой смеси исследовался для описания перехода горения в детонацию. В [2] проведено экспериментальное исследование колебательного распространения пропано-воздушного пламени в длинной вертикальной трубе, закрытой с одного края. Сделаны аналитические оценки с определением областей различных режимов горения в зависимости от числа Фруда. В работе [3] проведены эксперименты по сжиганию водородо-воздушной и стехиометрической пропано-воздушной смеси в замкнутом канале, показано формирование тюльпанообразного пламени.

Вопрос причин возникновения пламен со сложной структурой фронта (тюльпанообразных пламен) исследовался неоднократно. Например, в работах [4–8] структура такого пламени объясняется эффектом Дарье–Ландау, вихревым движением продуктов горения, неустойчивостью Тейлора. В работе [3] в качестве объяснения эффекта образования тюльпанообразного пламени предложено совокупное влияние пограничного слоя, турбулентного потока, гидродинамической неустойчивости пламени. Указано, что причиной образования тюльпанообразного пламени не является повышение давления в объеме. В [9] показано, что фор-

мирование тюльпанообразного пламени происходит из-за взаимодействия между движением продуктов сгорания от закрытого торца канала и течением смеси в направлении распространения волны горения. При столкновении продуктов сгорания и несгоревшей смеси идет разрушение вытянутого вдоль стенок фронта горения с формированием тюльпанообразной формы фронта. В работе [10] отмечается, что волна давления, возникающая при расширении фронта пламени в сторону боковых стенок, отвечает за периодическое торможение пламени и играет важную роль в формировании тюльпанообразного пламени. Изменение формы тюльпанообразного фронта пламени исследовано в работе [11]. Показано, что при изменении фронта пламени резко уменьшается скорость движения газа в канале.

Характеристики установившегося режима горения пропано-воздушной смеси известны. В частности, зависимость минимальной энергии искрового зажигания и нормальной скорости горения пропано-воздушной смеси от коэффициента избытка горючего приведена в [12, 13]. В области моделирования горения газовых смесей также существует ряд работ, позволяющих с достаточной точностью воспроизводить данные экспериментальных исследований. Приближения физико-математических моделей в последнее время включают детальную химическую кинетику, турбулизацию потока, вязкость газа. Однако для практических применений такие модели могут оказаться тяжелыми в силу длительности вычислительного алгоритма.

Использование подходов газовой динамики реагирующих сред помогает достаточно подробно описывать газодинамику течения и процессы, происходящие при изменении давления в газе. В частности, на подходе газовой динамики реагирующих сред основаны работы [14, 15], в которых были построены физико-математические модели, позволяющие воспроизвести экспериментальные данные [12, 13].

В настоящей работе поставлена задача исследования структуры пламени пропано-воздушной смеси при горении в узком цилиндрическом канале с использованием подходов газовой динамики. Цель работы – определение влияния ширины канала на особенности сгорания пропано-воздушной смеси с составом, близким к стехиометрическому.

Математическая модель и метод решения

Физико-математическая модель основана на работах [14, 16]. Решается задача воспламенения и горения пропано-воздушной смеси, записанная в цилиндрических координатах в двумерной постановке. Очаг воспламенения расположен в области $0 \leq x \leq x_0$, $0 \leq r \leq r_0$. В области очага задается повышенная температура газа при атмосферном давлении. В газе протекает экзотермическая химическая реакция суммарного второго порядка, первого по окислителю и по горючему. Теплоотдача излучением от продуктов сгорания не учитывается. Диссоциация молекул продуктов сгорания при высокой температуре также не учитывается. Коэффициенты диффузии и теплопроводности зависят от температуры. Газовая постоянная определяется составом смеси. Учитываются тепловое расширение и последующее движение газа. Рассматривается закрытый с торцов канал.

Физико-математическая постановка задачи включает уравнения сохранения массы, импульса и энергии газа, сохранения массы горючей компоненты и окислителя в газе, записанные в двумерной осесимметричной постановке. На стенках канала задаются условия непротекания.

Задача решалась численно с использованием метода Ван-Леера [17]. Корректность решения была проверена сравнением решений тестовой задачи по методу Годунова и методу Ван-Леера. Отличие в результатах расчета было минимальным, при этом наблюдалась экономия времени расчета. Слагаемые в правых частях уравнений, описывающие процессы переноса за счет теплопроводности и диффузии, аппроксимировались явно на трехточечном шаблоне. Шаг по пространству вдоль осевого и радиального направлений задавался постоянным и равным $\Delta h_x = \Delta h_r = 4 \cdot 10^{-5}$ м. Шаг по времени определялся из условия устойчивости [14]:

$$\frac{1}{\Delta t} < \frac{1}{\Delta t_x} + \frac{1}{\Delta t_r}, \quad \text{где} \quad \Delta t_x = \frac{h_x}{\max[|u_g| + c_g]}, \quad \Delta t_r = \frac{h_r}{\max[|v_g| + c_g]},$$

c_g – скорость звука в газе, u_g – осевая составляющая скорости газа, v_g – радиальная составляющая скорости газа.

Метод решения и результаты

Расчет задачи был выполнен при следующих значениях исходных величин: $Q_{ch} = 42.45$ МДж/кг, $E_a = 171.16$ кДж/моль, $R_u = 8.31$ Дж/(моль·К), $r_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ м, $T_0 = 1500$ К, $T_{gb} = 300$ К, $p_{gb} = 0.1$ МПа, $\lambda_0 = 0.025$ Вт/(м·К),

$$\mu_g = \frac{\rho_{air}^0 a_{air,b} + \rho_f^0 a_{f,b}}{\rho_{air}^0 a_{air,b} / \mu_{air} + \rho_f^0 a_{f,b} / \mu_f}, \quad \rho_f^0 = 1.83 \text{ кг/м}^3, \quad \alpha_{ch} = 3.6,$$

$$c_{pg} = 29.174 \mu_g^{-1} \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}), \quad c_{vg} = 20.864 \mu_g^{-1} \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}), \quad \mu_f = 44 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль},$$

$$\mu_{air} = 29.04 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}, \quad \rho_{air}^0 = 1.2 \text{ кг/м}^3, \quad k_0 = 3.9 \cdot 10^{11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}).$$

Результаты расчета представлены на рис. 1–5. На рис. 1 показана картина развития горения пропано-воздушной смеси с составом, близким к стехиометрическому, при горении в закрытом канале протяженностью 0.2 м, радиусом 0.02 м.

Согласно рис. 1, в начале процесса имеет место расширение пламени в радиальном и осевом направлениях. При этом вдоль осевого направления пламя вытягивается из-за поджата боковыми стенками (0.5 мс, 1 мс). После достижения пламенем боковых стенок имеет место распространение пламени в сторону левого торца. Фронт пламени искривляется, формируются вытянутые «лепестки пламени» (2.1 мс, 2.3 мс). Далее неустойчивость гасится, «лепестки» сливаются (2.5 мс). После формирования практически однородного вдоль радиального направления пламени начинается следующий этап формирования неустойчивости. Пламя разделяется на два вытянутых лепестка (2.6 мс, 3.1 мс), далее на поверхности лепестков происходит дополнительное разделение (3.2 мс, 3.3 мс). После происходит очередное сглаживание неоднородности с последующим формированием структуры, состоящей из трех лепестков (3.5 мс, 3.6 мс). Наблюдаемая циклическая неустойчивость качественно близка к описаниям [2, 3].

Представленные результаты, как показало численное решение, не являются следствием возникновения ударных волн или волн разрежения. Скорее, следует

такой же вывод, как в работе [3], – искривление поверхности пламени влияет на давление газа в канале. Неоднородное распределение давления по объему канала вызывает неоднородное поле скоростей течения газа. Движение газа приводит к существенному искривлению фронта реакции. На рис. 2 представлены распределения давления газа, соответствующие распределениям температуры на рис. 1. Рисунок 2 построен для половины канала. Видно, что есть слабая зависимость давления в области фронта пламени от формы пламени.

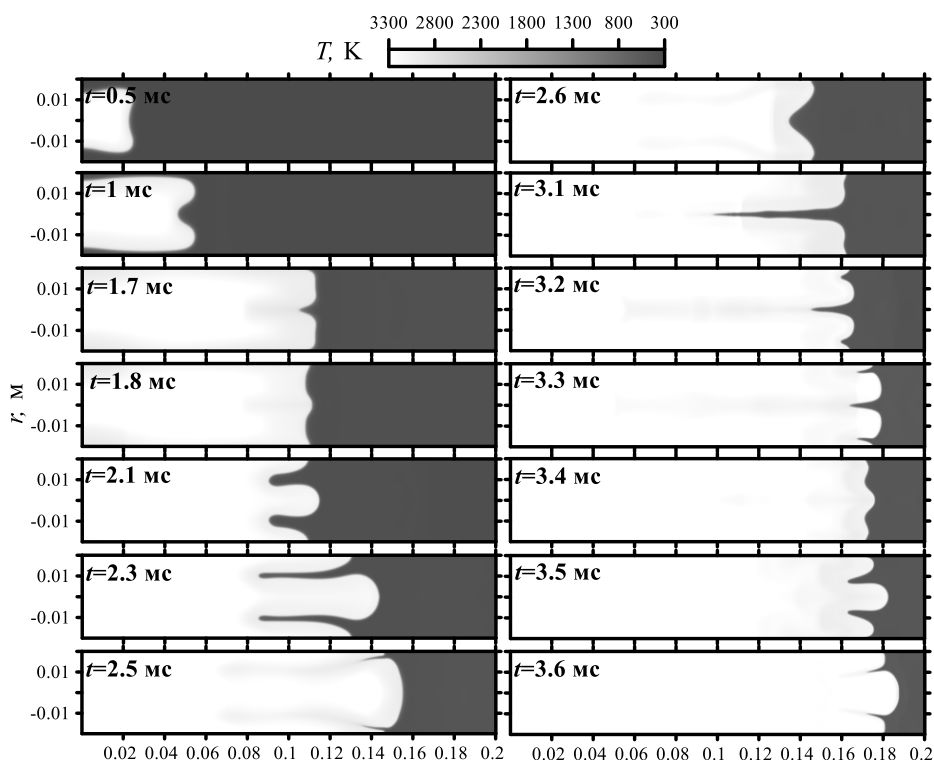


Рис. 1. Распределение температуры газа по пространству. Коэффициент избытка горючего 0.96

Fig. 1. Distribution of gas temperature in the region. The fuel–air equivalence ratio is 0.96

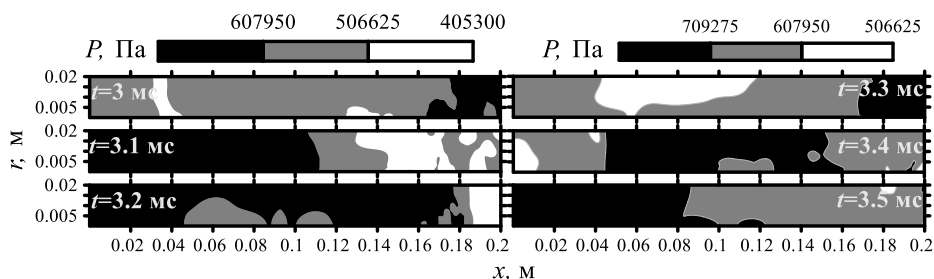


Рис. 2. Распределение давления газа по пространству. Коэффициент избытка горючего 0.96

Fig. 2. Distribution of gas pressure in the region. The fuel–air equivalence ratio is 0.96

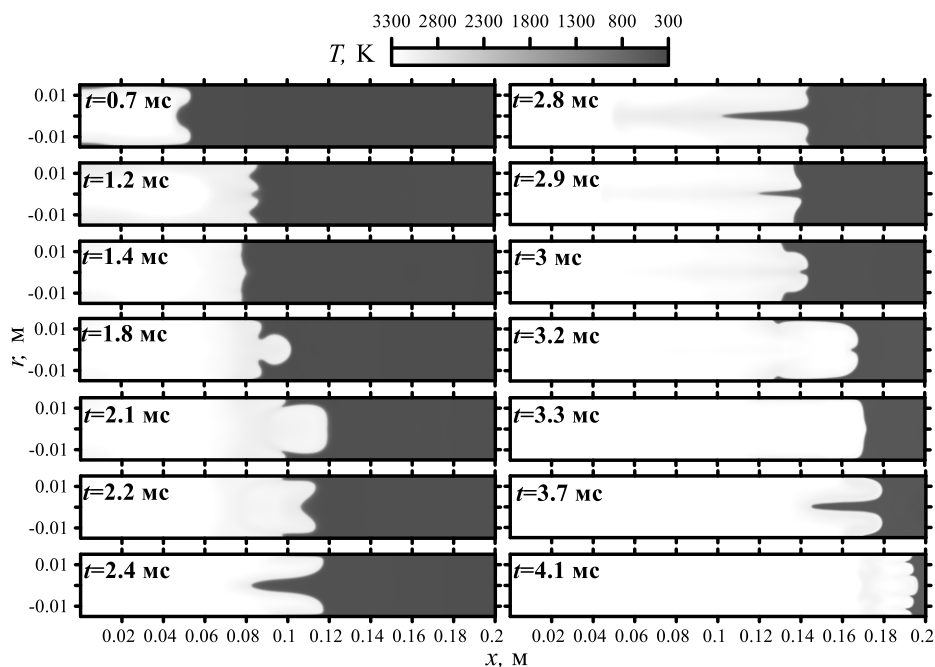


Рис. 3. Распределение температуры газа по пространству. Коэффициент избытка горючего 0.96
Fig. 3. Distribution of gas temperature in the region. The fuel–air equivalence ratio is 0.96

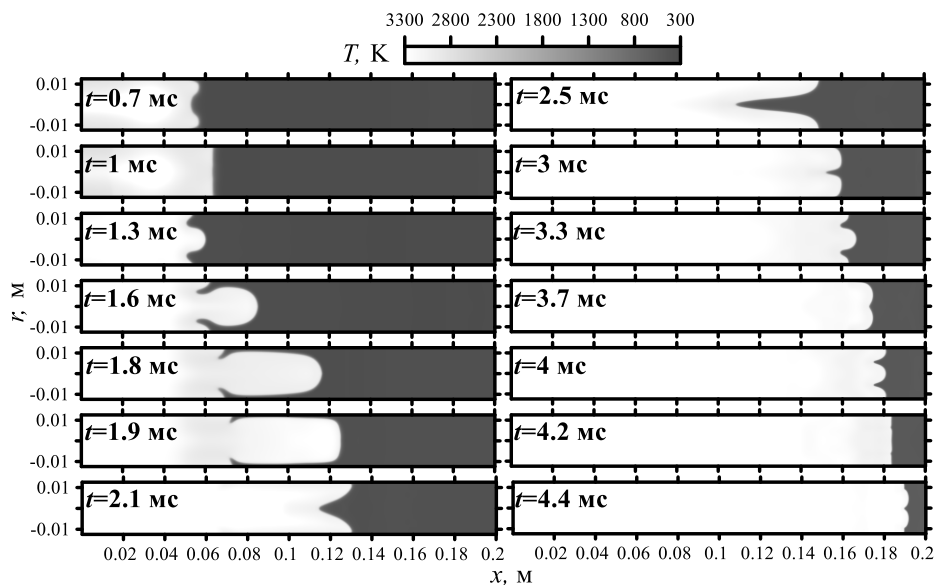


Рис. 4. Распределение температуры газа по пространству. Коэффициент избытка горючего 0.96
Fig. 4. Distribution of gas temperature in the region. The fuel–air equivalence ratio is 0.96

Изменение радиуса канала может повлиять на форму фронта пламени, в том числе снизить или же, наоборот, увеличить кривизну фронта пламени. На рис. 3, 4 представлены результаты исследования закономерностей формирования и распространения пламени пропано-воздушной смеси в узком цилиндрическом канале радиуса 0.015 м (рис. 3) и 0.0125 м (рис. 4).

Согласно рис. 3, 4, при уменьшении радиуса канала фронт пламени по мере распространения в канале меняет свою форму. В отличие от рис. 1, на рис. 3, 4 появляется пальцеобразное пламя, растягивающееся вдоль оси канала (1.8 мс, рис. 3; 1.6–1.9 мс, рис. 4). Кроме того, на рис. 3 видно формирование неустойчивости с пятью «лепестками» при достижении пламенем окрестностей правого торца канала. В канале радиуса 0.0125 неустойчивость слабая, периодически структура фронта пламени становится однородной вдоль радиуса канала.

Сравнивая рис. 1, 3, 4 можно заметить, что уменьшение радиуса канала приводит к уменьшению видимой скорости распространения пламени.

Наблюдаемые закономерности развития неустойчивости, а также снижения скорости пламени с уменьшением радиуса канала соответствуют данным из научной литературы. В частности, этапы развития неустойчивого горения соответствуют [3]. Механизм ускорения пламени в узких каналах аналитически объяснен в [18].

Заключение

Проведено численное исследование особенностей формирования и распространения фронта горения пропано-воздушной смеси в узком цилиндрическом канале. Показан циклический характер формирования искривленного фронта пламени. Показано, что видимая скорость пламени зависит от радиуса канала. Дано объяснение неустойчивости, возникающей при горении газа с составом, близким к стехиометрическому, в узком цилиндрическом канале.

Список источников

1. Иванов М.Ф., Киверин А.Д., Яковенко И.С. Самоподдерживаемый режим ускорения пламени в канале и механизм формирования детонации // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 8 (20). С. 1–15.
2. Алексеев М.М., Семенов О.Ю. Физическое моделирование тюльпанообразного пламени при горении газов в цилиндрической вертикальной трубе // Вестник кибернетики. 2021. № 1 (41). С. 63–70.
3. Shen X., He X., Sun J. A comparative study on premixed hydrogen–air and propane–air flame propagations with tulip distortion in a closed duct // Fuel. 2015. V. 161. P. 248–253. doi: 10.1016/j.fuel.2015.08.043
4. Bychkov V., Akkerman V., Fru G., Petchenko A., Eriksson L.E. Flame acceleration in the early stages of burning in tubes // Combustion and Flame. 2007. V. 150 (4). P. 263–76. doi: 10.1016/j.combustflame.2007.01.004
5. Dunn-Rankin D., Barr P.K., Sawyer R.F. Numerical and experimental study of “tulip” flame formation in a closed vessel // Symposium (International) on Combustion. 1988. V. 21 (1). P. 1291–301. doi: 10.1016/S0082-0784(88)80360-6
6. Dunn-Rankin D., Sawyer R.F. Tulip flames: changes in shape of premixed flames propagating in closed tubes // Experiments in Fluids. 1998. V. 24. P. 130–40. doi: 10.1007/s003480050160
7. Hackert C.L., Ellzey J.L., Ezekoye O.A. Effects of thermal boundary conditions on flame shape and quenching in ducts // Combustion and Flame. 1998. V. 112 (1-2). P. 73–84. doi: 10.1016/S0010-2180(97)81758-0.

8. Xiao H., Houim R.W., Oran E.S. Formation and evolution of distorted tulip flames // *Combustion and Flame*. 2015. V. 162 (11). P. 4084–4101. doi: 10.1016/j.combustflame.2015.08.020
9. Ponizy B., Claverie A., Veyssière B. Tulip flame – the mechanism of flame front inversion // *Combustion and Flame*. 2014. V. 161 (12). P. 3051–3062. doi: 10.1016/j.combustflame.2014.06.001
10. Xiao H., Wang O., Shen X., Guo S., Sun J. An experimental study of distorted tulip flame formation in a closed duct // *Combustion and Flame*. 2013. V. 160 (9). P. 1725–1728. doi: 10.1016/j.combustflame.2013.03.011
11. Xiao H., Makarov D., Suna J., Molkov V. Experimental and numerical investigation of premixed flame propagation with distorted tulip shape in a closed duct // *Combustion and Flame*. 2012. V. 159 (4). P. 1523–1538. doi: 10.1016/j.combustflame.2011.12.003
12. Льюис Б., Эльбе Г. Горение, пламя и взрывы в газах / пер. с англ. под ред. К.И. Щелкина, А.А. Борисова. М. : Мир, 1968.
13. Щетинков Е.С. Физика горения газов. М. : Наука, 1965.
14. Moiseeva K.M., Krainov A.Yu., Krainov D.A. Numerical investigation on burning rate of propane-air mixture // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2019. V. 696. Art. 012011. doi: 10.1088/1757-899X/696/1/012011
15. Моисеева К.М., Крайнов А.Ю. Искровое зажигание горючих газов и газовзвесей. Томск : STT, 2020.
16. Moiseeva K.M., Krainov A.Yu. Simulation of combustion of methane-air mixture in two-dimensional approximation // *Journal of Physics: Conference Series*. 2022. Art. 012013. doi: 10.1088/1742-6596/2150/1/012013
17. van Leer B. Flux-vector splitting for the Euler equations // Eighth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics: Proceedings of the Conference, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Germany, June 28 – July 2, 1982 / ed. E. Krause. P. 507–512. (Lecture Notes in Physics; v. 170).
18. Семёнов В.Н. Физика быстропотекающих процессов. Горение и детонация газовых смесей. М. : Ин-т проблем безопасного развития атомной энергии, 2006.

References

1. Ivanov M.F., Kiverin A.D., Yakovenko I.S. (2013) Samopodderzhivaemyy rezhim uskoreniya plameni v kanale i mekhanizm formirovaniya detonatsii [Self-sustaining regime of flame acceleration in channel and mechanism of detonation formation]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii – Engineering Journal: Science and Innovation*. 8(20). pp. 1–15.
2. Alekseev M.M., Semenov O.Yu. (2021) Fizicheskoe modelirovaniye tyul'panoobraznogo plameni pri gorenii gazov v tsilindricheskoy vertikal'noy trube [Tulip flame physical modeling during gaseous combustion in a cylindrical vertical pipe]. *Vestnik kibernetiki – Proceedings in Cybernetics*. 1(41). pp. 63–70. doi: 10.34822/1999-7604-2021-1-63-70
3. Shen X., He X., Sun J. (2015) A comparative study on premixed hydrogen–air and propane–air flame propagations with tulip distortion in a closed duct. *Fuel*. 161. pp. 248–253. doi: 10.1016/j.fuel.2015.08.043
4. Bychkov V., Akkerman V., Fru G., Petchenko A., Eriksson L.E. (2007) Flame acceleration in the early stages of burning in tubes. *Combustion and Flame*. 150(4). pp. 263–76. doi: 10.1016/j.combustflame.2007.01.004
5. Dunn-Rankin D., Barr P.K., Sawyer R.F. (1988) Numerical and experimental study of “tulip” flame formation in a closed vessel. *Symposium (International) on Combustion*. 21(1). pp. 1291–301. doi: 10.1016/S0082-0784(88)80360-6
6. Dunn-Rankin D., Sawyer R.F. (1998) Tulip flames: changes in shape of premixed flames propagating in closed tubes. *Experiments in Fluids*. 24. pp.130–40. doi: 10.1007/s003480050160
7. Hackert C.L., Ellzey J.L., Ezekoye O.A. (1998) Effects of thermal boundary conditions on flame shape and quenching in ducts. *Combustion and Flame*. 112(1–2). pp. 73–84. doi: 10.1016/S0010-2180(97)81758-0

8. Xiao H., Houim R.W., Oran E.S. (2015) Formation and evolution of distorted tulip flames. *Combustion and Flame*. 162(11). pp. 4084–4101. doi: 10.1016/j.combustflame.2015.08.020
9. Ponizy B., Claverie A., Veyssière B. (2014) Tulip flame – the mechanism of flame front inversion. *Combustion and Flame*. 161(12). pp. 3051–3062. doi: 10.1016/j.combustflame.2014.06.001
10. Xiao H., Wang O., Shen X., Guo S., Sun J. (2013) An experimental study of distorted tulip flame formation in a closed duct. *Combustion and Flame*. 160(9). pp. 1725–1728. doi: 10.1016/j.combustflame.2013.03.011
11. Xiao H., Makarov D., Suna J., Molkov V. (2012) Experimental and numerical investigation of premixed flame propagation with distorted tulip shape in a closed duct. *Combustion and Flame*. 159(4). pp. 1523–1538. doi: 10.1016/j.combustflame.2011.12.003
12. Lewis B., von Elbe G. (1987) *Combustion, Flames and Explosions of Gases*. New York–London: Academic Press.
13. Shchetnikov E.S. (1965) *Fizika goreniya gazov* [Gas burning physics]. Moscow: Nauka.
14. Moiseeva K.M., Krainov A.Yu., Krainov D.A. (2019) Numerical investigation on burning rate of propane–air mixture. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 696. Article 012011. doi: 10.1088/1757-899X/696/1/012011
15. Moiseeva K.M., Krainov A.Yu. (2020) *Iskrovoe zazhiganiye goryuchikh gazov i gazovzvesey: monografiya*. [Spark ignition of combustible gases and gas suspensions: a monograph]. Tomsk: STT.
16. Moiseeva K.M., Krainov A.Yu. (2022) Simulation of combustion of methane–air mixture in two-dimensional approximation. *Journal of Physics: Conference Series*. Article 012013. doi: 10.1088/1742-6596/2150/1/012013
17. van Leer B. (1982) Flux-vector splitting for the Euler equations. *Proceedings of the Eighth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics. Lecture Notes in Physics*. 170. pp. 507–512. doi: 10.1007/3-540-11948-5_66
18. Semyonov V.N. (2006) *Fizika bystroprotekayushchikh protsessov. Gorenie i detonatsiya gazovykh smesey* [Physics of high-speed processes. Combustion and detonation of gas mixtures]. Moscow: Nuclear Safety Institute of the Russian Academy of Sciences.

Сведения об авторах:

Моисеева Ксения Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: Moiseeva_KM@t-sk.ru

Кантарбаева Аружан Ильясовна – магистрант физико-технического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: arukantar@gmail.com

Крайнов Алексей Юрьевич – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

Information about the authors:

Moiseeva Kseniya M. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: Moiseeva_KM@t-sk.ru

Kantarbaeva Aruzhan I. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: arukantar@gmail.com

Krainov Aleksey Yu. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: akrainov@ftf.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 16.10.2022; принята к публикации 31.03.2023

The article was submitted 16.10.2022; accepted for publication 31.03.2023

Научная статья

УДК 666.3

doi: 10.17223/19988621/82/12

Статистическая оценка механических характеристик горячепрессованной керамики в системе $\text{ZrB}_2\text{--SiC}$

Сукяс Семенович Орданьян¹, Дмитрий Дмитриевич Несмелов²,
Евгений Сергеевич Новоселов³

^{1, 2, 3} Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет), Санкт-Петербург, Россия

² dnesmelov@yandex.ru

³ lehmann330@gmail.com

Аннотация. Исследовано влияние введения добавки 5 мол. % LaB_6 на модуль Вейбулла горячепрессованной керамики в системе $\text{ZrB}_2\text{--SiC}$, полученной методом горячего прессования при температуре изотермической выдержки 1 900°C и давлении 30 МПа в течение 15 мин в среде аргона. Получены образцы с относительной плотностью 91–92%, пределом прочности при изгибе 300–315 МПа и твердостью по Виккерсу 14–15 ГПа. Введение в состав керамики добавки LaB_6 сопровождается увеличением модуля Вейбулла от $m = 9.5$ до $m = 15.5$ в случае расчета с использованием значений предела прочности и от $m = 22.0$ до $m = 31.4$ в случае расчета с использованием значений твердости. Величина m , рассчитанная по значениям твердости, несколько завышена в связи с локальным характером воздействия пирамиды Виккерса. Увеличение модуля Вейбулла при введении добавки LaB_6 связано с повышением однородности структуры керамики за счет формирования более развитой сети межфазных границ в образцах трехкомпонентного состава.

Ключевые слова: керамика, прочность, твердость, структура, модуль Вейбулла

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 19-73-10180 с использованием оборудования инжинирингового центра СПбГТИ(ТУ).

Для цитирования: Орданьян С.С., Несмелов Д.Д., Новоселов Е.С. Статистическая оценка механических характеристик горячепрессованной керамики в системе $\text{ZrB}_2\text{--SiC}$ // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 82. С. 150–160. doi: 10.17223/19988621/82/12

Statistical evaluation of mechanical characteristics of hot-pressed ceramics in ZrB₂–SiC system

Sukyas S. Ordan'yan¹, Dmitriy D. Nesmelov², Evgeniy S. Novoselov³

^{1,2,3} Saint Petersburg State Institute of Technology, Saint Petersburg, Russian Federation

² dnesmelov@yandex.ru

³ lehmann330@gmail.com

Abstract. The effect of the addition of 5 mol.% LaB₆ on the Weibull modulus of hot-pressed ceramics in ZrB₂–SiC is studied in this paper. The samples with a relative density of 91–92%, a flexural strength of 300–315 MPa, and a Vickers hardness of 14–15 GPa are obtained by hot pressing at an isothermal holding temperature of 1900°C and a pressure of 30 MPa within 15 minutes in an argon atmosphere. The addition of LaB₆ induces an increase in the Weibull modulus of ceramics from 9.5 up to 15.5 when calculating using the bending strength, and from 22.0 up to 31.4 when calculating using the hardness. The values calculated using the hardness are somewhat overestimated due to the local impact of the Vickers pyramid. An increase in the Weibull modulus with the addition of LaB₆ is associated with increasing homogeneity of the ceramic structure due to the formation of a more developed system of interphase boundaries in three-component samples.

Keywords: ceramics, strength, hardness, structure, Weibull modulus

Acknowledgments: This work was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (project No. 19-73-10180) using the equipment of the Engineering Centre of Saint-Petersburg State Institute of Technology.

For citation: Ordan'yan, S.S., Nesmelov, D.D., Novoselov, E.S. (2023) Statistical evaluation of mechanical characteristics of hot-pressed ceramics in ZrB₂–SiC system. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 82. pp. 150–160. doi: 10.17223/19988621/82/12

Введение

Как известно, керамика – хрупкий материал, чувствительный к дефектам структуры. Значения механических характеристик керамики распределяются в широком диапазоне даже при испытании в одинаковых условиях номинально одинаковых образцов из одной партии, что связано со случайным распределением пор, микротрещин, инородных включений различных размеров в объеме образца. Таким образом, для того чтобы получить по возможности полную информацию о механических характеристиках керамики, необходимо проводить статистическую оценку прочности. Оценка методами статистической обработки данных выборки результатов предела прочности при изгибе керамики показала хорошее совпадение экспериментальных данных с несколькими видами распределения [1–7]. В частности, распределение Вейбулла позволяет оценить структурную неодно-

родность материала. Распределение вероятности по теории Вейбулла может быть определено либо двухпараметрическим выражением:

$$P(x_0) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{x_i}{x_0} \right)^m \right], \quad (1)$$

либо трехпараметрическим:

$$P(x_0) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{x_i - x_n}{x_0} \right)^m \right], \quad (2)$$

где x_n – минимальное значение измеренной характеристики; x_0 – нормирующий параметр распределения Вейбулла; m – показатель однородности материала (модуль Вейбулла), является безразмерной величиной и указывает меру разброса данных. Величина m увеличивается с уменьшением разброса; x_i – значение измеренной характеристики.

Величины x_i , x_0 , m не являются константами материала, они характеризуют конкретную технологию, партию образцов определенной геометрии с определенным состоянием поверхности.

Расчет по уравнениям (1) и (2) для керамики позволяет получать близкие значения m и x_0 , следовательно, обработка результатов измерений может проводиться по более простой зависимости (1) [5–7].

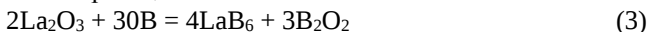
Для керамических материалов, работающих в условиях экстремально высоких температур и механических воздействий, оценка однородности структуры и воспроизводимости механических характеристик имеет особенно важное значение. В большинстве работ, посвященных надежности сверхвысокотемпературной керамики (УНТС), для статистической оценки прочности и других механических свойств применяется распределение Вейбулла [8–13].

Структура спеченных сверхвысокотемпературных материалов (а следовательно, и их механические свойства) в значительной степени зависит от фазового состава спекаемой порошковой системы. В последние годы наблюдается тенденция к усложнению состава композиционных керамик на основе ZrB_2 [13–17]. В частности, помимо традиционного компонента сверхвысокотемпературных керамик SiC применяют модифицирующие добавки гексаборидов РЗМ [16, 17].

Цель настоящей работы – статистическая оценка предела прочности при изгибе горячепрессованной керамики в системе ZrB_2 –SiC с добавкой LaB_6 с использованием двухпараметрического уравнения Вейбулла. Также предпринята попытка применить распределение Вейбулла к оценке разброса значений твердости, определенной методом индентирования пирамиды Виккерса.

Материалы и методы

В работе использовали коммерческие порошки ZrB_2 квалификации «Ч» производства ОАО ДЗХР и порошок SiC Sika Tech GC13 (Saint-Gobain, 99,5% SiC). Порошок LaB_6 синтезировали по реакции



с использованием в качестве исходных компонентов порошков оксида лантана La_2O_3 (ЛАО-Д, 99,999%) и аморфного бора (Б-99А, 99%). Чистоту синтезированного LaB_6 контролировали методами рентгеновской дифракции и рентгеноспектрального микроанализа. Порошок был представлен фазой кубического гексаборида лантана без содержания других кристаллических фаз. Примесь кислорода,

адсорбированного поверхностью частиц, составила 1,2 мас. %. Было приготовлено два опытных состава: ZS (80 мол. % ZrB_2 ; 20 мол. % SiC) и ZSL (80 мол. % ZrB_2 ; 15 мол. % SiC ; 5 мол. % LaB_6). В составе ZSL добавка гексаборида лантана предназначена для ограничения роста зерен основной фазы.

Смешение порошков проводили в атриторе Union Process HD-01 при частоте вращения вала 300 об./мин в течение 2 ч в среде высокоочищенного бензина БР-2 с использованием мелющих тел из SiC . Образцы в виде таблеток диаметром 35 мм и высотой 5 мм получали методом горячего прессования с использованием установки Thermal Technology HP20-3560-20 при температуре изотермической выдержки 1900°C и давлении 30 МПа в течение 15 мин в среде аргона. После горячего прессования образцы были разрезаны с помощью отрезного станка с алмазным диском на прямоугольные призмы габаритами $3 \times 3 \times 30$ мм для проведения испытания на прочность при изгибе, а также отполированы для проведения микроструктурного и микромеханического анализа.

Анализ структуры и элементного состава образцов проводили с помощью РЭМ Tescan VEGA 3 SBH с приставкой для рентгеноспектрального микроанализа Aztec X-Act. Фазовый состав исследовали методом рентгеновской дифракции с помощью порошкового дифрактометра Rigaku SmartLab 3 ($\text{Cu-K}\alpha$ излучение, Ni-фильтр, диапазон углов 2θ от 10 до 80°).

Измерение предела прочности при изгибе проводили по трехточечной схеме на установке Shimadzu AG-50kNXD с постоянной скоростью нагружения. Погрешность измерения составляла 1% от измеряемой величины. Для каждого исследованного состава было проведено пятнадцать измерений.

Измерение твердости проводили методом индентирования по пятнадцати отпечаткам алмазной пирамиды Виккерса на модернизированном твердомере ПМТ-3 под нагрузкой 30 Н. Погрешность измерения составляла 5% от измеряемой величины. Расчет значения твердости вели по формуле

$$Hv = 1854 \cdot \frac{P}{D^2}, \text{ ГПа}, \quad (4)$$

где P – нагрузка на индентор, Н; D – диагональ отпечатка, мкм.

Распределение Вейбулла строили с использованием двухпараметрического уравнения (1).

Результаты и обсуждение

В результате горячего прессования были получены спеченные образцы с относительной плотностью 92% (ZS) и 91% (ZSL). SEM-снимки микроструктуры образцов представлены на рис. 1.

В структуре образцов ZS (см. рис. 1, а) присутствует две твердых фазы: светлая фаза – диборид циркония, темная фаза – карбид кремния. Пористость образцов ZS составляет около 8%, однако на снимке поры трудно различить вследствие близости их оттенка к цвету зерен SiC . Аналогичная структура характерна и для состава ZSL (см. рис. 1, б). Зерна LaB_6 серого оттенка равномерно распределены в структуре между зернами ZrB_2 и SiC . Пористость керамики ZSL составляет около 9%.

Фазовый состав образцов был представлен только исходными фазами ZrB_2 , SiC и LaB_6 . Микрофотографии отпечатков алмазной пирамиды Виккерса представлены на рис. 2.

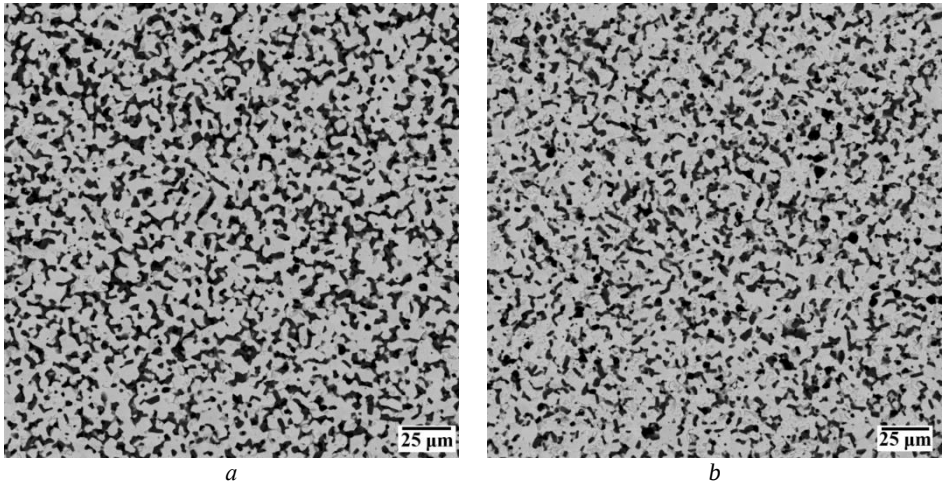


Рис. 1. SEM-снимки микроструктуры горячепрессованных образцов ZS (a) и ZSL (b)
Fig. 1. SEM micrographs of hot-pressed samples of (a) ZS and (b) ZSL

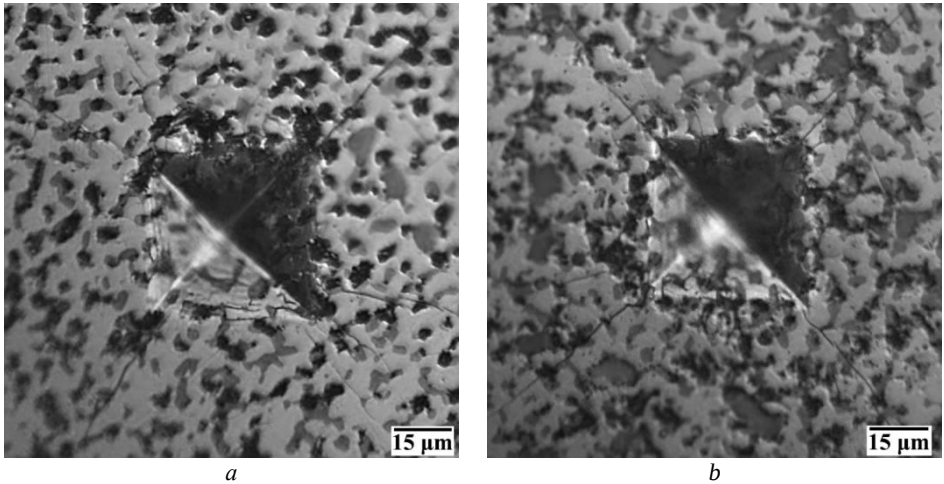


Рис. 2. Оптические микрофотографии отпечатков пирамиды Виккерса в образцах ZS (a) и ZSL (b)
Fig. 2. Optical micrographs of Vickers pyramid indentations in (a) ZS and (b) ZSL samples

Вокруг отпечатков наблюдается выкрашивание зерен SiC из матрицы ZrB_2 , что характерно как для состава ZS, так и для ZSL. Радиальные трещины в углах отпечатка имеют среднюю длину 50 мкм.

Результаты определения предела прочности и твердости образцов сведены в табл. 1, 2. Там же представлены результаты расчета параметров уравнения Вейбулла по уравнению (1), в котором в качестве измеренной величины фигурировал предел прочности при изгибе $\chi = \sigma_n$ (см. табл. 1) или твердость по Виккерсу $\chi = Hv$ (см. табл. 2).

Таблица 1

Предел прочности и параметры уравнения Вейбулла образцов ZS и ZSL

№ испытания, состав	$\sigma_{изг}$, МПа	$P(\sigma_{изг})$	m	R^2	№ испытания, состав	$\sigma_{изг}$, МПа	$P(\sigma_{изг})$	m	R^2
1, ZS	262	0.06	9.5	0.94	1, ZSL	263	0.06	15.5	0.97
2, ZS	271	0.13			2, ZSL	275	0.13		
3, ZS	286	0.19			3, ZSL	282	0.19		
4, ZS	287	0.25			4, ZSL	289	0.25		
5, ZS	296	0.31			5, ZSL	292	0.31		
6, ZS	297	0.38			6, ZSL	293	0.38		
7, ZS	301	0.44			7, ZSL	300	0.44		
8, ZS	313	0.50			8, ZSL	301	0.50		
9, ZS	321	0.56			9, ZSL	306	0.56		
10, ZS	323	0.63			10, ZSL	307	0.63		
11, ZS	333	0.69			11, ZSL	310	0.69		
12, ZS	335	0.75			12, ZSL	314	0.75		
13, ZS	343	0.81			13, ZSL	321	0.81		
14, ZS	365	0.88			14, ZSL	326	0.88		
15, ZS	387	0.94			15, ZSL	341	0.94		
Среднее	315				Среднее	301			

Таблица 2

Твердость по Виккерсу и параметры уравнения Вейбулла образцов ZS и ZSL

№ испытания, состав	H_v , ГПа	$P(\sigma_{изг})$	m	R^2	№ испытания, состав	H_v , ГПа	$P(\sigma_{изг})$	m	R^2
1, ZS	13.2	0.06	22.0	0.91	1, ZSL	13.8	0.06	31.4	0.93
2, ZS	13.2	0.13			2, ZSL	14.5	0.13		
3, ZS	13.3	0.19			3, ZSL	14.7	0.19		
4, ZS	13.5	0.25			4, ZSL	14.8	0.25		
5, ZS	13.7	0.31			5, ZSL	14.9	0.31		
6, ZS	13.7	0.38			6, ZSL	15.0	0.38		
7, ZS	14.0	0.44			7, ZSL	15.0	0.44		
8, ZS	14.1	0.50			8, ZSL	15.1	0.50		
9, ZS	14.1	0.56			9, ZSL	15.1	0.56		
10, ZS	14.2	0.63			10, ZSL	15.2	0.63		
11, ZS	14.3	0.69			11, ZSL	15.2	0.69		
12, ZS	14.6	0.75			12, ZSL	15.2	0.75		
13, ZS	14.9	0.81			13, ZSL	15.4	0.81		
14, ZS	15.0	0.88			14, ZSL	15.7	0.88		
15, ZS	15.1	0.94			15, ZSL	15.8	0.94		
Среднее	14.1				Среднее	15.0			

По полученным данным строили распределение Вейбулла, представленное на рис. 3, 4. Значения, рассчитанные из экспериментальных данных, аппроксимировали линейным уравнением

$$y = \alpha_0 x - \alpha_1, \quad (5)$$

где параметры α_0 и α_1 определяли с помощью метода наименьших квадратов, при этом модуль Вейбулла соответствует параметру α_0 . Нормирующий параметр находили из соотношения

$$\sigma_0 = e^{\frac{\alpha_1}{\alpha_0}}. \quad (6)$$

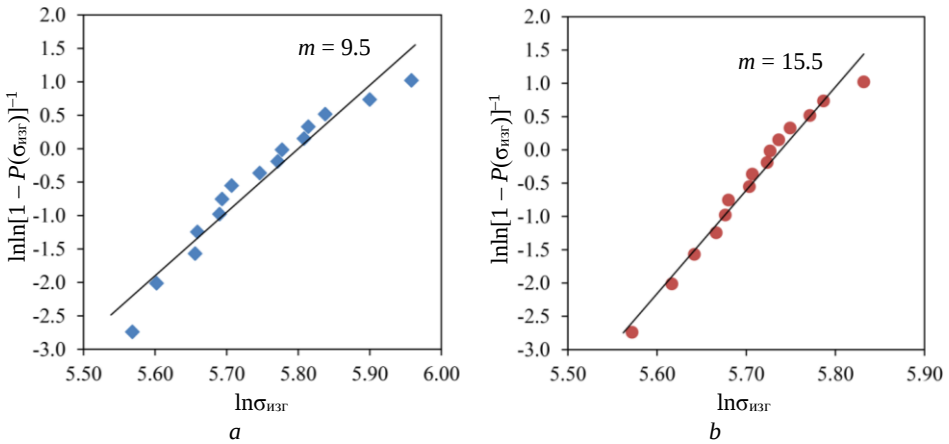


Рис. 3. Распределение Вейбулла, построенное по значениям предела прочности при изгибе образцов ZS (a) и ZSL (b)

Fig. 3. Weibull plots of the bending strength of (a) ZS and (b) ZSL samples

Коэффициент детерминации R^2 составил 0.94 для образцов ZS и 0.97 для ZSL, что свидетельствует об адекватности модели. Значения модуля Вейбулла для двух составов существенно различаются (для ZS $m = 9.5$ и для ZSL $m = 15.5$), что в первую очередь связано с более широким разбросом значений предела прочности образцов ZS. Опираясь на известные литературные данные [8–10], полученные значения m можно назвать достаточно высокими для керамических материалов, что указывает на высокую однородность структуры спеченных материалов.

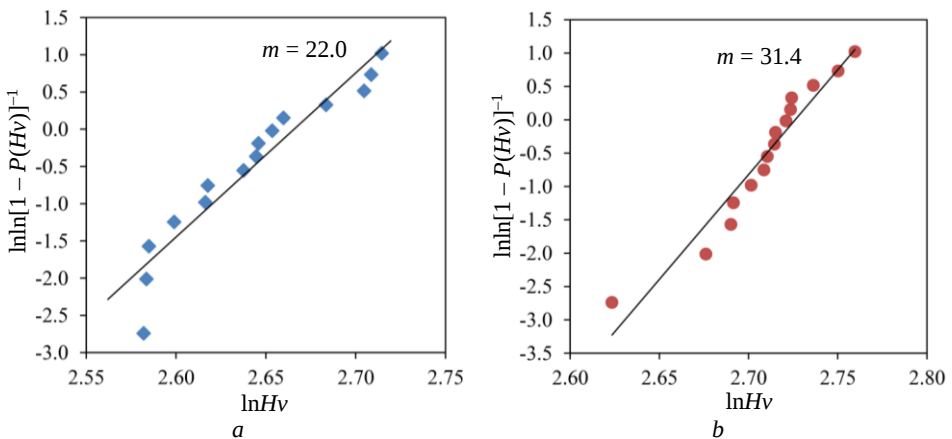


Рис. 4. Распределение Вейбулла, построенное по значениям твердости по Виккерсу образцов ZS (a) и ZSL (б)

Fig. 4. Weibull plots of Vickers hardness of (a) ZS and (b) ZSL samples

Задачей оценки разброса значений твердости было сравнение двух экспериментальных составов между собой. При этом не ставилась цель получения абсолютных значений модуля Вейбулла, поскольку построение распределения Вейбулла с использованием значений твердости по Виккерсу не является общепринятой практикой, и в литературе нет прямых аналогов для сопоставления результатов. Как и в случае статистической оценки предела прочности при изгибе, модуль Вейбулла образцов ZSL ($m = 31.4$) оказался выше, чем у образцов ZS ($m = 22.0$). Следует отметить, что разброс значений твердости образцов ZS при этом меньше, чем у образцов ZSL. Адекватность уравнения регрессии расчетным точкам в случае твердости была несколько ниже, чем в случае предела прочности, на что указывают более низкие значения R^2 (см. табл. 2).

Завышенные значения m можно объяснить локальным характером воздействия пирамиды Виккерса. Повлиять на значение твердости способен только тот дефект структуры, который расположен вблизи отпечатка индентора. Вероятность существования такого дефекта существенно ниже, чем вероятность нахождения дефекта в случайном месте в объеме образца при поперечном изгибе.

Таким образом, введение в керамику на основе системы $\text{ZrB}_2\text{-SiC}$ добавки LaB_6 сопровождается увеличением модуля Вейбулла, рассчитанного как по значениям предела прочности при изгибе, так и по значениям твердости по Виккерсу. Увеличение модуля Вейбулла можно трактовать как повышение однородности структуры. При этом средние значения предела прочности, твердости и пористости образцов ZS и ZSL различаются незначительно. Этот факт позволяет предположить, что основной вклад в повышение однородности структуры происходит за счет формирования более развитой сети межфазных границ в образцах трехкомпонентного состава.

Заключение

Методом горячего прессования при температуре изотермической выдержки 1 900°C и давлении 30 МПа в течение 15 мин в среде аргона получены спеченные материалы в системе $\text{ZrB}_2\text{-SiC}$ как без добавок, так и с добавкой 5 мол. % LaB_6 . Образцы характеризуются относительной плотностью 91–92%, пределом прочности при изгибе 300–315 МПа и твердостью по Виккерсу 14–15 ГПа. Введение в состав керамики добавки LaB_6 сопровождается увеличением модуля Вейбулла. В случае расчета с использованием значений предела прочности при поперечном изгибе модуль Вейбулла увеличивается от $m = 9.5$ до $m = 15.5$. Модуль Вейбулла, рассчитанный с использованием значений твердости по Виккерсу, увеличивается от $m = 22.0$ для образцов без добавки до $m = 31.4$ для образцов с добавкой LaB_6 . Величина m , рассчитанная по значениям твердости, несколько завышена в связи с локальным характером воздействия пирамиды Виккерса. Увеличение модуля Вейбулла при введении добавки LaB_6 можно объяснить повышением однородности структуры керамики за счет формирования более развитой сети межфазных границ в образцах трехкомпонентного состава.

Список источников

1. Weibull W. A statistical distribution function of wide applicability // Journal of Applied Mechanics. 1951. V. 18 (3). P. 293–297. doi: 10.1115/1.4010337

2. Richerson D.W., Lee W.E. Modern ceramic engineering: properties, processing, and use in design. Boca Raton : CRC press, 2018. 836 p. doi: 10.1201/9780429488245
3. Murthy D.N.P., Xie M., Jiang R. Weibull models. New York : John Wiley & Sons, 2004. 408 p.
4. Carlsson L.A., Adams D.F., Pipes R.B. Experimental characterization of advanced composite materials. Boca Raton : CRC press, 2014. 379 p.
5. Lu C. A reassessment of the strength distributions of advanced ceramics // Journal of the Australian Ceramic Society. 2008. V. 44 (2). P. 38–41.
6. Ono K. A simple estimation method of Weibull modulus and verification with strength data // Applied Sciences. 2019. V. 9 (8). Art. 1575. P. 1–39. doi: 10.3390/app9081575
7. Danzer R., Supancic P., Pascual J., Lube T. Fracture statistics of ceramics–Weibull statistics and deviations from Weibull statistics // Engineering Fracture Mechanics. 2007. V. 74 (18). P. 2919–2932. doi: 10.1016/j.engfracmech.2006.05.028
8. Liu G., Meng S., An J., Sun S., Ding X. The evaluation of reliability for zirconium diboride composite with additives of graphite // International Journal of Refractory Metals and Hard Materials. 2009. V. 27 (5). P. 868–871. doi: 10.1016/j.ijrmhm.2009.04.003
9. Wang L., Kong D., Fang G., Liang J. High-temperature tensile strength and fracture behavior of ZrB₂–SiC-graphite composite // International Journal of Applied Ceramic Technology. 2017. V. 14 (1). P. 31–38. doi: 10.1111/ijac.12613
10. Makurunge P., Sigalas I., Binner J. Scale characterisation of an oxidised (Hf, Ti) C–SiC ultra-high temperature ceramic matrix composite // Journal of the European Ceramic Society. 2021. V. 41 (1). P. 167–175. doi: 10.1016/j.jeurceramsoc.2020.08.048
11. Povolny S.J., Seidel G.D., Tallon C. Numerical investigation of thermomechanical response of multiscale porous ultra-High temperature ceramics // Ceramics International. 2022. V. 48 (8). P. 11502–11517. doi: 10.1016/j.ceramint.2022.01.006
12. Grigoriev O.N., Galanov B.A., Kotenko V.A., Ivanov S.M., Koroteev A.V., Brodnikovskiy N.P. Mechanical properties of ZrB₂–SiC (ZrSi₂) ceramics // Journal of the European Ceramic Society. 2010. V. 30 (11). P. 2173–2181. doi: 10.1016/j.jeurceramsoc.2010.03.022
13. Zou J., Liu J., Zhao J., Zhang G.J., Huang S., Qian B., Vleugels J., Van der Biest O., Shen J.Z. A top-down approach to densify ZrB₂–SiC–BN composites with deeper homogeneity and improved reliability // Chemical Engineering Journal. 2014. V. 249. P. 93–101. doi: 10.1016/j.cej.2014.03.089
14. Grigoriev O., Neshpor I., Vedel D., Mosina T., Silvestroni L. Influence of chromium diboride on the oxidation resistance of ZrB₂–MoSi₂ and ZrB₂–SiC ceramics // Journal of the European Ceramic Society. 2021. V. 41 (4). P. 2207–2214. doi: 10.1016/j.jeurceramsoc.2020.12.036
15. Sengupta P. et al. Effect of TiC addition on structure and properties of spark plasma sintered ZrB₂–SiC–TiC ultrahigh temperature ceramic composite // Journal of Alloys and Compounds. – 2021. V. 850. Art. 156668. doi: 10.1016/j.jallcom.2020.156668
16. Kashyap S.K., Mitra R. Microstructure and composition of multi-layered oxide scale evolved during isothermal exposure of ZrB₂–SiC–LaB₆ composite to air at 1500°C // Philosophical Magazine Letters. 2021. V. 101 (7). P. 265–276. doi: 10.1080/09500839.2021.1912426
17. Kashyap S.K., Mitra R. Densification behavior involving creep during spark plasma sintering of ZrB₂–SiC based ultra-high temperature ceramic composites // Ceramics International. 2020. V. 46 (4). P. 5028–5036. doi: 10.1016/j.ceramint.2019.10.246

References

1. Weibull W. (1951) A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of Applied Mechanics*. 3(18) pp. 293–297. doi: 10.1115/1.4010337
2. Richerson D.W., Lee W.E. (2018) *Modern Ceramic Engineering: Properties, Processing, and Use in Design*. Boca Raton: CRC Press. doi: 10.1201/9780429488245
3. Murthy D.N.P., Xie M., Jiang R. (2004) *Weibull Models*. New York: John Wiley & Sons.
4. Carlsson L.A., Adams D.F., Pipes R.B. (2014) *Experimental Characterization of Advanced Composite Materials*. Boca Raton: CRC Press.

5. Lu C. (2008) A reassessment of the strength distributions of advanced ceramics. *Journal of the Australian Ceramic Society*. 2(44). pp. 38–41.
6. Ono K. (2019) A simple estimation method of Weibull modulus and verification with strength data. *Applied Sciences*. 8(9). Article 1575. pp. 1–39. doi: 10.3390/app9081575
7. Danzer R., Supancic P., Pascual J., Lube T. (2007) Fracture statistics of ceramics–Weibull statistics and deviations from Weibull statistics. *Engineering Fracture Mechanics*. 8(18). pp. 2919–2932. doi: 10.1016/j.engfracmech.2006.05.028
8. Liu G., Meng S., An J., Sun S., Ding X. (2009) The evaluation of reliability for zirconium diboride composite with additives of graphite. *International Journal of Refractory Metals and Hard Materials*. 5(27). pp. 868–871. doi: 10.1016/j.ijrmhm.2009.04.003
9. Wang L., Kong D., Fang G., Liang J. (2017) High-temperature tensile strength and fracture behavior of ZrB₂–SiC–graphite composite. *International Journal of Applied Ceramic Technology*. 1(14). pp. 31–38. doi: 10.1111/ijac.12613
10. Makurunje P., Sigalas I., Binner J. (2021) Scale characterisation of an oxidised (Hf, Ti) C–SiC ultra-high temperature ceramic matrix composite. *Journal of the European Ceramic Society*. 1(41). pp. 167–175. doi: 10.1016/j.jeurceramsoc.2020.08.048
11. Povolny S.J., Seidel G.D., Tallon C. (2022) Numerical investigation of thermomechanical response of multiscale porous ultra-High temperature ceramics. *Ceramics International*. 48(8). pp. 11502–11517. doi: 10.1016/j.ceramint.2022.01.006
12. Grigoriev O.N., Galanov B.A., Kotenko V.A., Ivanov S.M., Koroteev A.V., Brodnikovskiy N.P. (2010) Mechanical properties of ZrB₂–SiC (ZrSi₂) ceramics. *Journal of the European Ceramic Society*. 11(30). pp. 2173–2181. doi: 10.1016/j.jeurceramsoc.2010.03.022
13. Zou J., Liu J., Zhao J., Zhang G.J., Huang S., Qian B., Vleugels J., Van der Biest O., Shen J.Z. (2014) A top-down approach to densify ZrB₂–SiC–BN composites with deeper homogeneity and improved reliability. *Chemical Engineering Journal*. 249. pp. 93–101. doi: 10.1016/j.cej.2014.03.089
14. Grigoriev O., Neshpor I., Vedel D., Mosina T., Silvestroni L. (2021) Influence of chromium diboride on the oxidation resistance of ZrB₂–MoSi₂ and ZrB₂–SiC ceramics. *Journal of the European Ceramic Society*. 4(41). pp. 2207–2214. doi: 10.1016/j.jeurceramsoc.2020.12.036
15. Sengupta P., Sahoo S.S., Bhattacharjee A., Basu S., Manna I. (2021) Effect of TiC addition on structure and properties of spark plasma sintered ZrB₂–SiC–TiC ultrahigh temperature ceramic composite. *Journal of Alloys and Compounds*. 850. Article 156668. doi: 10.1016/j.jallcom.2020.156668
16. Kashyap S.K., Mitra R. (2021) Microstructure and composition of multi-layered oxide scale evolved during isothermal exposure of ZrB₂–SiC–LaB₆ composite to air at 1500° C. *Philosophical Magazine Letters*. 7(101). pp. 265–276. doi: 10.1080/09500839.2021.1912426
17. Kashyap S.K., Mitra R. (2020) Densification behavior involving creep during spark plasma sintering of ZrB₂–SiC based ultra-high temperature ceramic composites. *Ceramics International*. 4(46). pp. 5028–5036. doi: 10.1016/j.ceramint.2019.10.246

Сведения об авторах:

Орданьян Сукяс Семенович – профессор кафедры химической технологии тугоплавких неметаллических и силикатных материалов Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета), Санкт-Петербург, Россия.

Несмелов Дмитриевич – доцент кафедры химической технологии тугоплавких неметаллических и силикатных материалов Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета), Санкт-Петербург, Россия. E-mail: dnesmelov@yandex.ru

Новоселов Евгений Сергеевич – инженер кафедры химической технологии тугоплавких неметаллических и силикатных материалов Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета), Санкт-Петербург, Россия. E-mail: lehmann330@gmail.com

Information about the authors:

Ordan'yan Sukyas S. (Doctor of Technical Sciences, Professor, Saint Petersburg State Institute of Technology, Saint Petersburg, Russian Federation).

Nesmelov Dmitriy D. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Saint Petersburg State Institute of Technology, Saint Petersburg, Russian Federation). E-mail: dnesmelov@yandex.ru

Novoselov Evgeniy S. (Engineer, Saint Petersburg State Institute of Technology, Saint Petersburg, Russian Federation). E-mail: lehmann330@gmail.com

Статья поступила в редакцию 11.03.2022; принята к публикации 31.03.2023

The article was submitted 11.03.2022; accepted for publication 31.03.2023

Научная статья

УДК 536.46

doi: 10.17223/19988621/82/13

Методы и алгоритмы решения задачи оптимизации конструкции заряда с целью повышения начальной скорости снаряда

И.Г. Русяк¹, В.А. Тененев²

^{1,2} *Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашикова, Ижевск, Россия*

¹ *primat@istu.ru*

² *v.tenenev@gmail.com*

Аннотация. Сформулирована математическая постановка задачи структурно-параметрического синтеза конструкции заряда, состоящего из последовательно расположенных пороховых элементов трубчатой и зерновой формы различных марок, с целью повышения начальной скорости снаряда. Целевой параметр (дульная скорость) и контролируемые параметры (максимальные давления в заснарядном пространстве) определяются из решения газодинамической задачи внутренней баллистики для комбинированного заряда различных конструктивных схем заряжания. Разработан алгоритм решения задачи на основе генетического алгоритма. Общая схема и основные этапы его реализации рассмотрены на модельном примере.

Ключевые слова: внутренняя баллистика, математическая модель, конструкция заряда, структурно-параметрическая оптимизация, генетический алгоритм

Для цитирования: Русяк И.Г., Тененев В.А. Методы и алгоритмы решения задачи оптимизации конструкции заряда с целью повышения начальной скорости снаряда // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 82. С. 161–176. doi: 10.17223/19988621/82/13

Original article

METHODS AND ALGORITHMS FOR SOLVING THE PROBLEM OF OPTIMIZING THE CHARGE DESIGN INTENDED TO INCREASE THE INITIAL VELOCITY OF A PROJECTILE

Ivan G. Rusyak¹, Valentin A. Tenenev²

^{1,2} *Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation*

¹ *primat@istu.ru*

² *v.tenenev@gmail.com*

Abstract. A mathematical model of the structural and parametric synthesis of a charge composed of sequentially arranged tubular and granular powder elements is formulated for increasing the muzzle velocity of a projectile. A target parameter (the muzzle velocity)

Keywords: internal ballistics, mathematical model, charge design, structural and parametric optimization, genetic algorithm

Введение

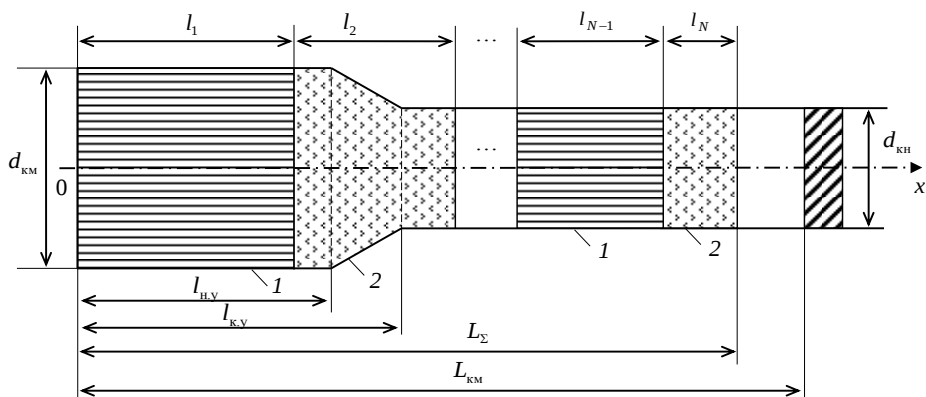


Рис. 1. Общая схема комбинированного заряда: 1 – трубчатый порох; 2 – зерновой порох
Fig. 1. General scheme of a combined charge: (1) tubular and (2) grained gunpowder

Рассмотрим задачу структурно-параметрического синтеза конструкции заряда для двух типов пороховых элементов (трубчатый, зерновой) с заданным количеством компонентов каждого типа пороха. Таким образом, рассматривается заряд, состоящий из N компонентов. В предположении последовательного расположения пороховых элементов трубчатой и зерновой формы различных марок общая схема комбинированного заряда представлена на рис. 1.

В качестве допущений полагается, что воспламенитель сгорает мгновенно и создает начальное давление p_v . При этом теплофизические параметры продуктов горения воспламенителя совпадают с параметрами основного заряда. Массой воздуха в камере сгорания пренебрегается. Основной заряд воспламеняется сразу по всей поверхности в момент сгорания воспламенителя. Снаряд начинает двигаться после достижения в камере давления форсирования p_Φ ($p_\Phi \geq p_v$). Теплообменом с горячей поверхностью заряда пренебрегается (скорость тепловой волны близка к скорости горения). Трение и теплообмен продуктов горения с поверхностью канала ствола не учитываются.

1. Математическая модель внутренней баллистики выстрела для комбинированного заряда

Дополнительно принимается, что пороховые элементы различных компонентов заряда движутся независимо друг от друга (закономерность их движения определяется исключительно силовым взаимодействием с газовой фазой). Примем также, что плотность пороховых элементов различных компонентов заряда и теплофизические характеристики их продуктов горения одинаковы.

В рамках принятых допущений соответствующая система уравнений внутренней баллистики артиллерийского выстрела, описывающая течение гетерогенной реагирующей смеси с учетом межгранулярного взаимодействия в двумерной осесимметричной постановке для схемы заряжания из N компонентов заряда, имеет следующий вид [1, 3]. Уравнения движения среды, состоящей из газовой фазы и нескольких твердых фаз.

Для газовой фазы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r \rho m}{\partial t} + \frac{\partial r \rho m v_x}{\partial x} + \frac{\partial r \rho m v_r}{\partial r} &= r G, \\ \frac{\partial r \rho m v_x}{\partial t} + \frac{\partial r (p + \rho v_x^2) m}{\partial x} + \frac{\partial r \rho m v_x v_r}{\partial r} &= p \frac{\partial r m}{\partial x} + r \sum_{i=1}^{N_p} G_i w_{xi} - r \tau_x, \\ \frac{\partial r \rho m v_r}{\partial t} + \frac{\partial r \rho m v_x v_r}{\partial x} + \frac{\partial r (p + \rho v_r^2) m}{\partial r} &= p \frac{\partial r m}{\partial r} + r \sum_{i=1}^{N_p} G_i w_{ri} - r \tau_r, \\ \frac{\partial r m e_v}{\partial t} + \frac{\partial \left(r \sum_{i=1}^{N_p} a_i \Lambda_{0i} (1 - \psi_i) e_{wi} \right)}{\partial t} + \frac{\partial r m (e_v + p) v_x}{\partial x} + \frac{\partial r m (e_v + p) v_r}{\partial r} &+ \\ + \frac{\partial \left(r \sum_{i=1}^{N_p} a_i \Lambda_{0i} (1 - \psi_i) (e_{wi} + p) w_{xi} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(r \sum_{i=1}^{N_p} a_i \Lambda_{0i} (1 - \psi_i) (e_{wi} + p) w_{ri} \right)}{\partial r} &= r G Q, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\varepsilon = \frac{p(1-\alpha\rho)}{(k-1)\rho}, \quad e_v = \rho\varepsilon + \rho \frac{v_x^2 + v_r^2}{2}, \quad e_{wi} = \delta \frac{w_{xi}^2 + w_{ri}^2}{2}.$$

Для i -го компонента твердой фазы $i = \overline{1, N}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r a_i}{\partial t} + \frac{\partial r a_i w_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial r a_i w_{ri}}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial r \delta a_i \Lambda_{0i} (1-\psi_i) w_{xi}}{\partial t} + \frac{\partial r (p + \delta w_{xi}^2) a_i \Lambda_{0i} (1-\psi_i)}{\partial x} + \frac{\partial r \delta a_i \Lambda_{0i} (1-\psi_i) w_{xi} w_{ri}}{\partial r} &= \\ &= p \frac{\partial r a_i \Lambda_{0i} (1-\psi_i)}{\partial x} - r G_i w_{xi} + r \tau_{xi}, \\ \frac{\partial r \delta a_i \Lambda_{0i} (1-\psi_i) w_{ri}}{\partial t} + \frac{\partial r \delta a_i \Lambda_{0i} (1-\psi_i) w_{xi} w_{ri}}{\partial x} + \frac{\partial r (p + \delta w_{ri}^2) a_i \Lambda_{0i} (1-\psi_i)}{\partial r} &= \\ &= p \frac{\partial r a_i \Lambda_{0i} (1-\psi_i)}{\partial r} - r G_i w_{ri} + r \tau_{ri}. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения горения пороховых элементов записываются в виде:

– до фазы распада пороховых элементов $z_i \leq 1$ или $\psi_i \leq \psi_{pi} = \kappa_i(1 + \lambda_i + \mu_i)$:

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} + w_{xi} \frac{\partial z_i}{\partial x} + w_{ri} \frac{\partial z_i}{\partial r} = \frac{u_{ki}}{e_{li}}, \quad \sigma_i(z_i) = 1 + 2\lambda_i z_i + 3\mu_i z_i^2, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + w_{xi} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + w_{ri} \frac{\partial \psi_i}{\partial r} = \kappa_i \sigma_i(z_i) \frac{u_{ki}}{e_{li}}; \quad (4)$$

– после распада пороховых элементов $\psi_i > \psi_{pi} = \kappa_i(1 + \lambda_i + \mu_i)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + w_{xi} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + w_{ri} \frac{\partial \psi_i}{\partial r} &= \kappa_i \sigma_i(\psi_i) \frac{u_{ki}}{e_{li}}, \quad \sigma_i(\psi_i) = \sigma_i(\psi_{pi}) \sqrt{\frac{1-\psi_i}{1-\psi_{pi}}}, \\ \psi_{pi} \leq \psi_i \leq 1, \quad \sigma_i(\psi_{pi}) &= 1 + 2\lambda_i + 3\mu_i. \end{aligned} \quad (5)$$

Пористость газопороховой смеси определяется по формуле

$$m = 1 - \sum_{i=1}^N a_i \Lambda_{0i} (1 - \psi_i), \quad (6)$$

а текущие геометрические размеры пороховых элементов – по формулам

$$d_i = d_{0i} + 2z_i e_{li}, \quad D_i = D_{0i} - 2z_i e_{li}, \quad L_i = L_{0i} - 2z_i e_{li}.$$

Для трубчатых пороховых элементов $e_{li} = \frac{D_{0i} - d_{0i}}{4}$ и $\kappa_i = 1 + \beta_i$, $\lambda_i = -\frac{\beta_i}{1 + \beta_i}$,

$\mu_i = 0$, где $\beta_i = \frac{2e_{li}}{L_{0i}}$.

Для зерновых пороховых элементов $e_{li} = \frac{D_{0i} - 3d_{0i}}{8}$ и $\kappa_i = \frac{(Q_i + 2P_i)\beta_i}{Q_i}$,

$\lambda_i = \frac{2(3 - P_i)\beta_i}{Q_i + 2P_i}$, $\mu_i = -\frac{6\beta_i^2}{Q_i + 2P_i}$, где $P_i = \frac{D_{0i} + 7d_{0i}}{L_{0i}}$, $Q_i = \frac{D_{0i}^2 - 7d_{0i}^2}{L_{0i}^2}$, $\beta_i = \frac{2e_{li}}{L_{0i}}$.

Функции массового и силового взаимодействия между фазами имеют вид [7]:

$$G_i = \begin{cases} a_i S_{0i} \sigma_i(z_i) \delta u_{ki}(p), & \text{если } z_i \leq 1 \text{ или } \psi_i \leq \psi_{pi}, \\ a_i S_{0i} \sigma_i(\psi_i) \delta u_{ki}(p), & \text{если } z_i > 1 \text{ или } \psi_i > \psi_{pi}, \end{cases}$$

$$\tau_{xi} = \lambda_0 \frac{\rho(v_x - w_{xi}) \sqrt{(v_x - w_{xi})^2 + (v_r - w_{ri})^2}}{2} a_i \frac{S_{\sigma i}}{4}, \quad (7)$$

$$\tau_{ri} = \lambda_0 \frac{\rho(v_r - w_{ri}) \sqrt{(v_x - w_{xi})^2 + (v_r - w_{ri})^2}}{2} a_i \frac{S_{\sigma i}}{4},$$

где λ_0 – коэффициент сопротивления порохового зерна в слое (для трубчатых пороховых элементов принимается $\lambda_0 = 0$); $S_{\sigma i}$ – текущая ограничивающая поверхность зернового порохового элемента: до распада зернового порохового элемента

$S_{\sigma i} = 2\pi \frac{D_i^2}{4} + \pi D_i L_i = \pi D_i \left(\frac{D_i}{2} + L_i \right)$, после распада $S_{\sigma i} = S_{0i} \sigma_i(\psi_i)$; S_{0i}, L_{0i} – на-

чальные поверхность и объем порохового элемента; $G = \sum_{i=1}^{N_p} G_i$; $\tau_x = \sum_{i=1}^{N_p} \tau_{xi}$;

$$\tau_r = \sum_{i=1}^{N_p} \tau_{ri}.$$

В приведенных выше уравнениях t – время; ρ – плотность пороховых газов заряда; m – пористость заряда (объем пустот в единице объема); v_x, v_r, w_{xi}, w_{ri} – проекции скорости движения газа и i -го компонента твердой фазы на оси цилиндрической системы координат соответственно; p – давление; τ_{xi}, τ_{ri} – проекции силы сопротивления движению продуктов горения в слое зерновых пороховых элементов на оси цилиндрической системы координат; G_i – газоприход продуктов горения с поверхности i -го компонента порохового заряда в единице объема за секунду; $Q = \frac{f}{k-1}$ – теплотворная способность (потенциал) пороха; $f = RT_v$ –

сила пороха; ω_i – масса i -го компонента заряда; R – удельная газовая постоянная продуктов горения; T_v – температура продуктов горения пороха в замкнутом объеме; $\theta+1$ – показатель адиабаты для смеси газов; $\theta = \frac{R}{c_v}$; c_v – теплоемкость про-

дуктов горения при постоянном объеме; $\varepsilon = c_v T$ – внутренняя энергия единицы массы пороховых газов; T – температура пороховых газов; α – коволюм пороховых газов; δ – плотность материала пороха; a_i – счетная концентрация пороховых элементов в единице объема i -го компонента заряда $i = \overline{1, N}$; $u_{ki}(p) = u_{li} p^v$ –

скорость горения пороховых элементов i -го компонента заряда; $z_i = \frac{e_i}{e_{li}}$ – относи-

тельная толщина сгоревшего свода порохового элемента; $2e_{li}$ – первоначальная толщина сгоревшего свода порохового элемента; ψ_i – относительная доля сго-

ревшего пороха порохового элемента; $\sigma_i(\psi_i)$ – отношение текущей поверхности горения порохового элемента к первоначальной; $\kappa_i, \lambda_i, \mu_i$ – коэффициенты формы порохового элемента; d_{0i}, D_{0i}, L_{0i} – первоначальные внутренний, внешний диаметры и длина порохового элемента.

Уравнения для скорости движения $v_{сн}$ и перемещения $x_{сн}$ снаряда имеют вид:

$$q \frac{dv_{сн}}{dt} = \left(2\pi \int_0^{\frac{d_{кн}}{2}} p(t, x_{сн}, r) r dr \right) \eta(p_{сн} - p_{\phi}), \quad \frac{dx_{сн}}{dt} = v_{сн}, \quad (8)$$

где q – масса снаряда; $x_{сн}$ – координата положения снаряда в стволе; $p_{сн}$ – усредненное давление на торец снаряда; $d_{кн}$ – диаметр канала ствола; $\eta(\xi)$ – функция Хэвисайда.

Систему уравнений (1)–(8) необходимо дополнить начальными и граничными условиями.

В качестве начальных условий задаются условия покоя и условия, отвечающие состоянию продуктов горения в момент полного сгорания воспламенителя массой ω_b в замкнутом объеме:

$$\begin{aligned} \text{при } t = 0, \quad 0 \leq x \leq L_{км}, \quad 0 \leq r \leq R_{км}(x) \\ v_x = 0, \quad v_r = 0, \quad p = p_b, \quad \rho = \Delta_b, \quad T = T_v, \quad v_{сн} = 0, \quad x_{сн} = L_{км}, \\ w_{xi} = 0, \quad w_{ri} = 0, \quad z_i = 0, \quad \psi_i = 0, \quad a_i = \frac{\omega_i}{\Lambda_{0i} \delta W_i}, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $R_{км}(x)$ – переменный радиус камеры; ω_b – масса воспламенителя; ω – общая масса заряда; ω_i, W_i – масса и объем, занимаемый i -м компонентом заряда; $p_b = \frac{\Delta_b f}{1 - \alpha \Delta_b}$ – давление, развиваемое воспламенителем; $\Delta_b = \frac{\omega_b}{W_{км} - \omega / \delta}$ – плотность заряжания воспламенителя; $W_{км}$ – объем камеры.

Суть граничных условий состоит в том, что на непроницаемых границах объема задаются условия непротекания (обращения в нуль нормальных компонентов скорости газовой и твердой фаз у стенки). На оси канала задаются условия симметрии для искомых функций.

Для решения системы уравнений (1)–(8) используется метод С.К. Годунова [4–6], при этом решение задачи о распаде произвольного разрыва реализовано по схеме Ошера с применением локальной аппроксимации для уравнения состояния неидеального газа [7, 8]. Для повышения устойчивости расчета скорости движения компонентов твердой фазы применена модификация метода с неявным выделением проекций скорости из функций силового взаимодействия (7) между газовой и твердой фазами τ_{xi}, τ_{ri} . Например, для скорости w_{xi} соответствующая модификация имеет вид:

$$\tau_{xi} = \lambda_0 \frac{\rho(v_x - w_{xi}) \sqrt{(v_x - w_{xi})^2 + (v_r - w_{ri})^2}}{2} a_i \frac{S_{\sigma i}}{4} = T_{0xi} - w_{xi} T_{1xi}.$$

Для переменной $q_{xi} = \delta a_i \Lambda_{0i} (1 - \psi_i) w_{xi}$ переход с временного слоя n на $n + 1$ осуществляется по схеме:

$$q_{xi}^{n+1} = \frac{q_{xi}^n \Omega^n + \left(-\sum_l M_l + (S_i + T_{0xi}) \Omega \right)^n \Delta t}{\Omega^{n+1} \left(1 + \frac{T_{1xi} \Delta t}{\delta a_i \Lambda_{0i} (1 - \psi_i)} \right)^n},$$

где M_l – потоки через грани контрольного объема, S_i – источник, Ω – объем ячейки с подвижной границей.

Для расчета скорости движения снаряда применяется метод Адамса 2-го порядка точности, требующий однократного решения газодинамической задачи на каждом шаге по времени [9].

Для сокращения времени расчета процесса выстрела при решении задачи структурно-параметрической оптимизации применялась упрощенная разностная сетка (рис. 2).

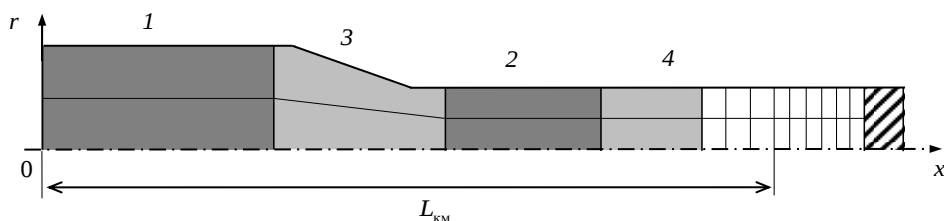


Рис. 2. Вид разностной сетки в области решения основной задачи внутренней баллистики
Fig. 2. View of the difference grid in the solution region for the basic problem of internal ballistics

Разностная сетка имеет два слоя ячеек в радиальном направлении, что оправдано при характере течения, близкого к одномерному. Размер в продольном направлении областей, соответствующих различным компонентам заряда, выбирался исходя из массы ω_i и заданной плотности заряжения Δ_i . В области от конца заряда до снаряда сетка растягивается при движении снаряда.

2. Постановка задачи структурно-параметрического синтеза конструкции заряда

Параметрами произвольного компонента заряда являются: порядковый номер, начиная от дна камеры, $i = \overline{1, N}$; L_i – длина компонента; Δ_i – плотность заряжения компонента.

При заданной геометрии камеры определяется объем, занимаемый i -м компонентом заряда:

$$W_i = \frac{\pi}{4} \int_{x_{ni}}^{x_{ki}} [d(x)]^2 dx,$$

где x_{ni}, x_{ki} – координаты начала и конца расположения i -го компонента заряда.

При заданной плотности заряжения определяется масса пороха i -го компонента заряда:

$$\omega_i = \Delta_i W_i.$$

Критерием оптимизации является повышение дульной скорости снаряда v_d при заданных массе снаряда q , геометрии зарядной камеры и канала ствола.

В качестве ограничений выступают следующие условия:

1) общая масса заряда постоянна:

$$\sum_{i=1}^N \omega_i = \omega; \quad (10)$$

2) суммарная длина комбинированного заряда L_Σ постоянна

$$\sum_{i=1}^N L_i = L_\Sigma < L_{\text{км}}; \quad (11)$$

3) максимальное давление в системе меньше заданного (допустимого)

$$p_{\text{max}} \leq p_{\text{доп}}; \quad (12)$$

4) плотность заряжения меньше предельной плотности

$$\Delta_i \leq \Delta_{\text{пр}}.$$

Для трубчатого пороха предельная плотность определяется по эмпирической формуле А.Е. Арутюняна [1]:

$$\Delta_{\text{пр}} = \Delta_{\text{пр}}^{\tau} = 0,735 \left(1 - \frac{d_0^2}{D_0^2} \right) \delta, \quad (13)$$

где d_0 , D_0 – начальные внутренний и внешний диаметры трубки. Для зернового 7-канального пороха предельную плотность заряжения будем определять по аналогичной зависимости:

$$\Delta_{\text{пр}} = \Delta_{\text{пр}}^3 = 0,735 \left(1 - \frac{7d_0^2}{D_0^2} \right) \delta, \quad (14)$$

где d_0 , D_0 – начальные внутренние диаметры каналов и внешний диаметр зерна.

Рассматриваются четыре компонента заряда ($N=4$). Индексы $i=1, 2$ соответствуют 1-канальным пороховым трубкам (трубчатые компоненты), индексы $i=3, 4$ соответствуют 7-канальным пороховым зернам (зерновые компоненты). Компоненты заряда отличаются скоростью горения, геометрией пороховых элементов и массой пороха. Остальные характеристики считаются одинаковыми.

Задача заключается в нахождении оптимального расположения частей заряда в камере и варьируемых параметров $u_{1i}, e_{1i}, L_{0i}, \omega_i$, $i=\overline{1, N}$, обеспечивающих максимальную дульную скорость снаряда v_d при ограничениях, сформулированных выше.

Оптимизационная задача имеет вид:

– целевая функция

$$v_d = f(\mathbf{X}) \rightarrow \max,$$

где $\mathbf{X} = (X_j)^T = (\langle S(N) \rangle, u_{1i}, e_{1i}, L_{0i}, \omega_i)^T$, $i=\overline{1, N}$, $j=\overline{1, 5N}$; $\langle S(N) \rangle = \langle S_1, \dots, S_N \rangle$ – перестановка, соответствующая номерам компонентов заряда;

– ограничения

$$X_j \in [X_j^{\min}, X_j^{\max}], \quad j = \overline{5, 5N}; \quad \sum_{i=1}^N X_{16+i} = \omega; \quad p_{\max} \leq p_{\text{доп}}.$$

3. Метод решения задачи структурно-параметрического синтеза конструкции заряда

Для решения задач структурно-параметрической оптимизации в последнее время широко применяются генетические алгоритмы (ГА). Они позволяют за приемлемое время получать близкие к оптимальному решения многоэкстремальных задач с произвольной целевой функцией. Такие алгоритмы просты в масштабировании, позволяя распределять вычислительную нагрузку на множество вычислительных устройств.

Для применения ГА к решению задачи структурно-параметрической оптимизации необходимо выбрать методы кодирования решения, генетические операторы отбора, скрещивания и мутации особей, выбора лидера популяции, определяющего лучшее решение с учетом ограничений.

Для решения задачи оптимизации применяется генетический алгоритм из работы [10]. Хромосома $\mathbf{X} = (X_j)$, $j = \overline{1, 5N}$ состоит из двух частей: перестановки целочисленных индексов $\langle S_1, \dots, S_N \rangle$ и вещественных значений множителей u_{li} в линейном законе скорости горения $u_{ki} = u_{li} p$, первоначальных полутолщин горящего свода пороховых элементов e_{li} , длин пороховых элементов L_{0i} и масс компонентов заряда ω_i . При этом другие размеры пороховых элементов определяются следующим образом: для трубчатых порохов $d_{0i} = 2e_{li}$, $D_{0i} = 6e_{li}$; для зерновых порохов $d_{0i} = e_{li}$, $D_{0i} = 11e_{li}$.

Специфичными при решении данной оптимизационной задачи являются операторы скрещивания и мутации. Скрещивание двух хромосом $\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2$ проводится отдельно для перестановки $\langle S(N) \rangle$ и остальной части хромосомы. Для скрещивания перестановок применяется оператор, подобный двухточечному в бинарном кодировании. Случайным образом выбираются две позиции $k_1, k_2 \in \overline{1, N}$. Скрещиваемые особи обмениваются фрагментами $\langle S_{k_1}, \dots, S_{k_2} \rangle$. Остальные числа, не входящие во фрагмент, берутся у родительской особи, начиная с позиции k_1 , исключая повтор чисел. Например, результатом скрещивания перестановок $\mathbf{S}^1 = \langle 4, 2, 3, 1 \rangle$ и $\mathbf{S}^2 = \langle 1, 4, 2, 3 \rangle$ при $k_1 = 2, k_2 = 3$ является перестановка $\mathbf{S}^3 = \langle 3, 4, 2, 1 \rangle$. Фрагмент $\langle 4, 2 \rangle$ переходит в новую особь из второй особи. Остальные числа берутся из первой, родительской особи, за исключением уже вставленных 4 и 2. Число 3 ставится перед фрагментом обмена, число 1 – после фрагмента обмена.

Скрещивание вещественной части хромосомы проводится с попеременным применением двух операторов вещественного скрещивания.

Вещественные переменные X_j нормируются: $x_j = \frac{X_j - X_j^{\min}}{X_j^{\max} - X_j^{\min}}, j = \overline{5, 5N}$.

Оператор 1:

$$x_j = a_1 x_j^{(1)} + b_1 x_j^{(2)}, j = \overline{5, 5N}.$$

Коэффициенты a_1, b_1 определяются следующим образом:

$$a_1 = \frac{1+\xi}{2}, b_1 = \frac{1-\xi}{2}, \xi = \begin{cases} (2u)^{\frac{1}{1+\beta}}, u \leq 0.5, \\ (2(1-u))^{-\frac{1}{1+\beta}}, u > 0.5, \end{cases}, \beta > 1,$$

где $u \in (0, 1)$ – случайное число.

Оператор 2:

$$x_j = a_2 x_j^{(1)} + b_2 x_j^{(2)}, j = \overline{5, 5N}.$$

Коэффициенты a_2, b_2 определяются следующим образом:

$$a_2 = 1 - b_2, b_2 = \frac{2^\varsigma}{2^L} = 2^{\varsigma-L} = 2^{-1} (2^{-u})^{L-1},$$

где $\varsigma \in [0, L)$ – случайное число, соответствующее позиции скрещивания; L – разрядность; $u = 1 - \frac{\varsigma}{L-1} \in (0, 1)$.

Оператор мутации для перестановки целочисленных индексов представляет собой случайный набор неповторяющихся чисел из отрезка $[1, N]$; для вещественной части – это набор случайных чисел из интервала $(0, 1)$.

В качестве оператора отбора используется турнирный отбор по величине целевой функции.

Ограничения на переменные $X_j, j = \overline{5, 4N}$, изменяющиеся в заданных диапазонах $[X_j^{\min}, X_j^{\max}]$, удовлетворяются операцией нормирования. При этом ограничение на суммарную массу заряда выполняется в результате дополнительной операции нормирования по общей массе заряда:

$$X_j = X_j^{\min} + x_j (X_j^{\max} - X_j^{\min}) \Rightarrow \omega_j = \frac{X_j \omega}{\sum_{j=4N+1}^{5N} X_j}, j = \overline{4N+1, 5N}.$$

Ограничение по максимальному давлению выполняется прекращением расчета процесса выстрела при превышении величины внутрибаллистического давления допустимого значения $p > p_{\text{доп}}$. Так как это давление наблюдается в первой половине процесса выстрела, то величина скорости снаряда существенно ниже величины дульной скорости. Такая особь не является допустимой, тем не менее она помещается в новую популяцию для большего разнообразия, что препятствует вырождению популяций, в которых много особей, близких к лидеру.

Учет ограничений на переменные задачи таким способом приводит задачу к виду безусловной оптимизации $f(\langle S(N) \rangle, \mathbf{x}) \rightarrow \max, \mathbf{x} \in [0, 1]$, что значительно упрощает и ускоряет поиск оптимального решения.

4. Численные результаты

Численные исследования проводились для артиллерийской системы со следующими геометрическими характеристиками: диаметр камеры $d_{\text{км}} = 0.13\text{ м}$; длина камеры $L_{\text{км}} = 0.85\text{ м}$; диаметр канала ствола $d_{\text{кн}} = 0.1\text{ м}$; начало $l_{\text{ну}} = 0.5\text{ м}$ и конец $l_{\text{ку}} = 0.8\text{ м}$ уширения камеры; длина ствола $L_{\text{д}} = 5\text{ м}$. Масса снаряда 15 кг , масса заряда $\omega = 6.1\text{ кг}$. В качестве ограничения на максимальное давление принималось $p_{\text{доп}} = 500\text{ МПа}$.

Номинальные значения параметров:

$$u_{1i} = 0.57 \cdot 10^{-9} \frac{\text{М}}{\text{с} \cdot \text{Па}}, \quad e_{1i} = 0.7\text{ мм}, \quad L_{01,2} = 180\text{ мм}, \quad L_{03,4} = 18\text{ мм},$$

$$\omega_i = \frac{\omega}{N} \text{ кг}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Максимальные значения варьируемых переменных равны номинальным значениям, умноженным на 1.2, минимальные – деленным на 1.2.

Параметры оптимизации принимались следующими: вероятность скрещивания равна 0.9; вероятность мутации – 0.1; размер популяции – 50.

На рис. 3 приведено изменение целевой функции (дульной скорости снаряда) при итерационном процессе оптимизации в зависимости от номера итерации n . Величина дульной скорости снаряда перестает изменяться на последующих итерациях.

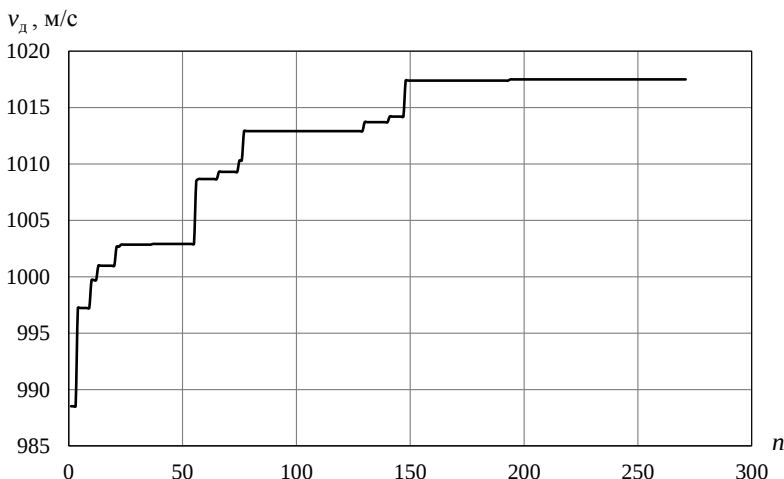


Рис. 3. Изменение целевой функции в процессе оптимизации

Fig. 3. Variation of the objective function during optimization

На рис. 4 показано распределение величины целевой функции в последней популяции в зависимости от номера особи l . При оптимизации используется принцип элитизма, когда лучшая особь с максимальным значением целевой функции попадает в новую популяцию под первым номером. Значения целевой функции $v_d = f(\mathbf{X}) < 500$ м/с соответствуют недопустимым по максимальному давлению решениям. Как уже отмечалось, это величина скорости снаряда, достигнутая при $p > p_{\text{доп}}$ с остановкой расчета процесса выстрела для данной особи. Величины целевой функции для допустимых решений характеризуют разброс дульной скорости при неоптимальных наборах переменных.

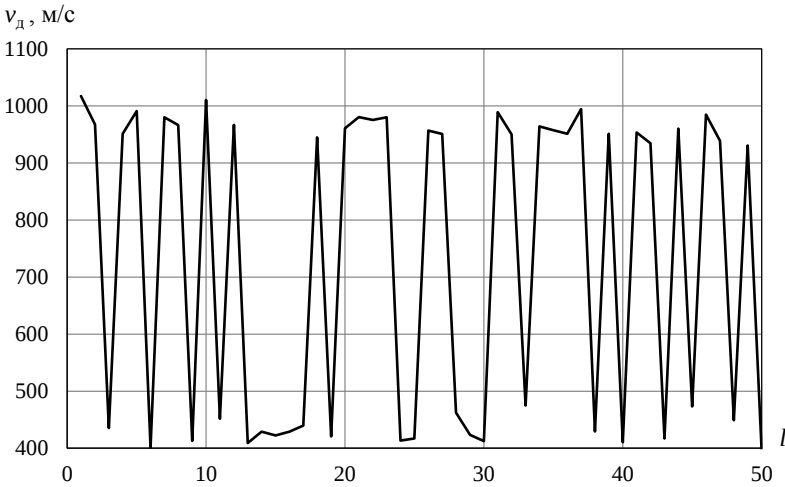


Рис. 4. Распределение значений целевой функции в последней популяции при оптимизации

Fig. 4. Distribution of objective function values in the last population during optimization

Дульная скорость снаряда при оптимизации увеличилась с 988.5 до 1 017.5 м/с. Значения варьируемых параметров на нескольких промежуточных итерациях представлены в таблице.

Изменение параметров выстрела в процессе оптимизации конструкции заряда

Параметры	Номер итерации			
	1	20	100	200
v_d , м/с	988.52	1000.98	1012.91	1017.50
$\langle S(N) \rangle$	1	4	1	2
	3	1	2	1
	4	2	3	4
	2	3	4	3
$u_{iki} \cdot 10^9$, $\frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{Па}}$	0.51	0.52	0.47	0.66
	0.53	0.50	0.48	0.52
	0.50	0.66	0.58	0.48
	0.67	0.49	0.69	0.60

Окончание табл.

Параметры	Номер итерации			
	1	20	100	200
e_{li} , мм	0.72	0.70	0.82	0.84
	0.76	0.60	0.76	0.78
	0.58	0.76	0.62	0.82
	0.68	0.78	0.64	0.78
L_{0i} , мм	161.83	209.27	162.9	160.81
	160.94	155.35	194.29	156.74
	20.23	19.81	18.99	19.30
	15.02	16.56	20.08	18.32
ω_i , кг	1.56	1.49	1.45	1.34
	1.50	1.38	1.79	1.65
	1.54	1.63	1.44	1.54
	1.50	1.60	1.42	1.57

Видно, что в процессе оптимизации компоновка заряда изменяется и устанавливается нижнее размещение трубчатых компонентов заряда с последующим расположением зерновых компонентов. Скорость горения получена наибольшей для трубчатого компонента заряда, расположенного у дна камеры. Длины пороховых трубок оказались меньше номинальных значений, а пороховых зерен – больше.

Газодинамические параметры выстрела для оптимального варианта представлены на рис. 5, 6. На рис. 5 показано изменение давления в камере сгорания и скорости движения снаряда.

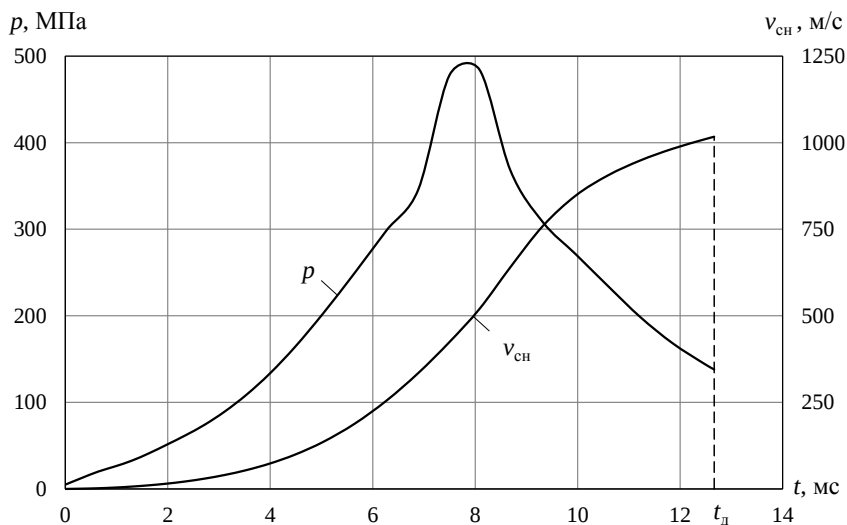


Рис. 5. Зависимости давления на дно канала и скорости снаряда от времени для оптимального варианта

Fig. 5. Time dependences of the pressure on the channel bottom and projectile velocity for the optimal option

Давление не превышает максимальный заданный уровень 500 МПа, оптимальная скорость снаряда равна 1 017.5 м/с. Изменение давления и продольной проекции скорости продуктов горения по длине камеры и ствола в момент достижения пика давления ($t = 8.08$ мс) приведено на рис. 6.

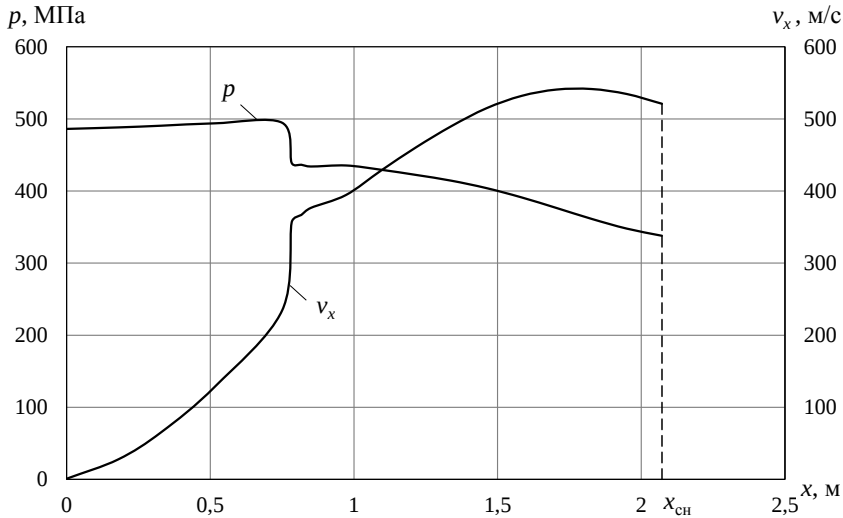


Рис. 6. Распределения давления и продольной проекции скорости продуктов горения по оси канала в момент достижения максимального давления для оптимального варианта

Fig. 6. Distributions of pressure and longitudinal projection of the velocity of combustion products along the channel axis at the moment when the maximum pressure for the optimal option is attained

Расчеты показывают, что максимальное значение давления достигается в конце камеры сгорания, при этом ограничение по максимальному давлению строго выполняется.

Заключение

Решена задача структурно-параметрического синтеза конструкции заряда, состоящего из последовательно расположенных пороховых элементов трубчатой и зерновой формы различных марок, с целью повышения начальной скорости снаряда.

Задача оптимизации решена с использованием генетического алгоритма. Доказана работоспособность разработанного алгоритма оптимизации в сочетании с решением основной задачи внутренней баллистики в газодинамической постановке.

Показана возможность увеличения дульной скорости за счет структурно-параметрической оптимизации конструкции комбинированного заряда.

Список источников

1. Русяк И.Г., Липанов А.М., Ушаков В.М. Физические основы и газовая динамика горения порохов в артиллерийских системах. М.–Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2016. 456 с.

2. Быков Н.В., Товарнов М.С. Структурно-параметрическая оптимизация комбинированных баллистических установок // Материалы XX Юбилейной междунар. конф. по вычислительной механике и современным прикладным системам (ВМСППС'2017). 2017. С. 50–51.
3. Русяк И.Г., Тененев В.А. Влияние размерности математической модели внутренней баллистики на расчетные параметры выстрела для зарядов из зерненого пороха // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 73. С. 95–110. doi: 10.17223/19988621/73/9.
4. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М. : Наука, 1976. 400 с.
5. Прокопов Г.П., Северин А.В. Экономичная реализация метода Годунова. М., 2009. 24 с. (Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша; № 29). URL: https://keldysh.ru/papers/2009/prep29/prep2009_29.pdf
6. Сафронов А.В., Фомин Ю.В. Метод численного решения уравнений газодинамики с помощью соотношения на разрывах // Труды МФТИ. 2010. Т. 2, № 2. С. 137–148.
7. Русяк И.Г., Тененев В.А. Моделирование баллистики артиллерийского выстрела с учетом пространственного распределения параметров и противодействия // Компьютерные исследования и моделирование. 2020. Т. 12, № 5. С. 1123–1147. doi: 10.20537/2076-7633-2020-12-5-1123-1147.
8. Wesseling P. Principles of Computational Fluid Dynamics. Springer, 2001. 644 p. (Springer Series in Computational Mathematics; v. 29). doi: 10.1007/978-3-642-05146-3
9. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М. : Бином. Лаборатория знаний, 2011. 640 с.
10. Тененев В.А., Якимович Б.А. Генетические алгоритмы в моделировании систем. Ижевск : Изд-во ИжГТУ, 2010. 308 с.

References

1. Rusyak I.G., Lipanov A.M., Ushakov V.M. (2016) *Fizicheskie osnovy i gazovaya dinamika goreniya porokhov v artilleriyskikh sistemakh* [Physical fundamentals and gas dynamics of gunpowder combustion in artillery systems]. Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Studies.
2. Bykov N.V., Tovarnov M.S. (2017) *Strukturno-parametricheskaya optimizatsiya kombinirovannykh ballisticheskikh ustanovok* [Structural and parametric optimization of combined ballistic setups]. *Proceedings of the XX Anniversary International Conference on Computational Mechanics and Modern Applied Software Systems*. pp. 50–51.
3. Rusyak I.G., Tenenev V.A. (2021) *Vliyanie razmernosti matematicheskoy modeli vnutrenney ballistiki na raschetnye parametry vystrela dlya zaryadov iz zernenogo porokha* [The impact of the dimension of a mathematical model of internal ballistics on design parameters of a shot for grain gunpowder charges]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 73. pp. 95–110. doi: 10.17223/19988621/73/9
4. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Ya., Krayko A.N., Prokopov G.P. (1976) *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki* [Numerical solution to multidimensional problems of gas dynamics]. Moscow: Nauka.
5. Prokopov G.P., Severin A.V. (2009) *Ekonomichnaya realizatsiya metoda Godunova* [Efficient implementation of Godunov's method]. *Preprinty IPM imeni M.V. Keldysha – Keldysh Institute Preprints*. 29. pp. 1–24. Access mode: https://keldysh.ru/papers/2009/prep29/prep2009_29.pdf.
6. Safronov A.V., Fomin Yu.V. (2010) *Metod chislennogo resheniya uravneniy gazodinamiki s pomoshch'yu sootnosheniya na razryvakh* [A method for the numerical solution of the equations of gas dynamics using the relation at discontinuities]. *Trudy MFTI – Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology*. 2(2). pp. 137–148.

7. Rusyak I.G., Tenenev V.A. (2020) Modelirovanie ballistiki artilleriyskogo vystrela s uchetom prostranstvennogo raspredeleniya parametrov i protivodavleniya [Modeling of ballistics of an artillery shot taking into account the spatial distribution of parameters and backpressure]. *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie – Computer Research and Modeling*. 12(5). pp. 1123–1147. doi: 10.20537/2076-7633-2020-12-5-1123-1147
8. Wesseling P. (2001) *Principles of Computational Fluid Dynamics*. Springer Series in Computational Mathematics. 29. doi: 10.1007/978-3-642-05146-3
9. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. (2011) *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow: Binom. Laboratoriya znaniy.
10. Tenenev V.A., Yakimovich B.A. (2010) *Geneticheskie algoritmy v modelirovanii sistem* [Genetic algorithms in system modeling]. Izhevsk: Izdatel'stvo ISTU.

Сведения об авторах:

Русяк Иван Григорьевич – доктор технических наук, профессор, действительный член Российской академии ракетных и артиллерийских наук, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета им. М.Т. Калашникова, Ижевск, Россия. E-mail: primat@istu.ru

Тенев Валентин Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика» Ижевского государственного технического университета им. М.Т. Калашникова, Ижевск, Россия. E-mail: v.tenenev@gmail.com

Information about the authors:

Rusyak Ivan G. (Doctor of Technical Sciences, Professor, Full Member of the Russian Academy of Missile and Artillery Sciences Russian Federation, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: primat@istu.ru

Tenenev Valentin A. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: v.tenenev@gmail.com

Статья поступила в редакцию 16.06.2022; принята к публикации 31.03.2023

The article was submitted 16.06.2022; accepted for publication 31.03.2023

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

2023. № 82

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано в печать 19.04.2023 г. Формат 70×100¹/₁₆.
Печ. л. 11,1; усл. печ. л. 14,5. Цена свободная.
Тираж 250 экз. Заказ № 5422.

Дата выхода в свет 21.04.2023 г.

Адрес издателя и редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Томский государственный университет

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru