

УДК 517.18:514.1

Р.А. Богданова

КЛАССИФИКАЦИЯ ДВУМЕТРИЧЕСКИХ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ДВУМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЙ РАНГА 3¹

Проведена классификация двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий ранга 3 аналитическим методом.

Ключевые слова: *двуметрическая феноменологически симметричная геометрия, функциональное уравнение.*

В традиционной евклидовой геометрии (и при ориентации на идеи Клейна и при взятии за основу подхода Римана) упорядоченной паре точек сопоставляется некоторый инвариант, который (поскольку наделен свойствами обычного расстояния) кладется в основу мероопределения, позволяющего воспроизводить объекты этой геометрии: длины, углы, площади, объёмы и прочее. Около полувека назад зародилось и активно развивается иное направление в основаниях геометрии (в рамках более широкой концепции физических структур [1]). В идейном плане данное направление (представленное такими авторами, как Ю.И. Кулаков, Г.Г. Михайличенко, В.Х. Лев, В.А. Кыров) опирается на круг представлений, очерченный ещё Германом Гельмгольцем в его знаменитой работе 1868 г. «О фактах, лежащих в основании геометрии» [2] (наличие функциональной связи между координатами точек). Исследователи, придерживающиеся этого направления, сопоставляют паре точек не один инвариант, а несколько. По устоявшейся в среде упомянутых лиц традиции эти инварианты именуют *метриками*², а теорию, описывающую данные инварианты, называют *полиметрической феноменологически симметричной геометрией*.

Предлагаемая работа выполнена в рамках описанной выше концепции, чем и объясняется употребление терминов «метрика» и «метрический» в смысле, характерном для данной концепции, и применяемом только в ней. Это, в частности, позволяет соотносить результаты, полученные автором данной работы с результатами иных исследователей, развивающих указанное направление.

Целью исследования является построение классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий [3, 4] ранга³ 3 аналитическим методом, которая (классификация) ранее была построена Г.Г. Михайличенко групповым методом [3].

¹ Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-01-90806.

² При том, что свойства этих инвариантов обычно далеки от свойств метрики в обычном смысле и от свойств квадратичной метрики. Стоит отметить, что широко применяемая в линейной алгебре и в геометрии квадратичная метрика «просто метрикой» не является (она, в частности, может не быть положительно определенной, может быть и вырожденной, то есть двум различным точкам сопоставлять нулевое расстояние). Метрический тензор, для которого $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ не является знакоопределенным, рассматривается, в частности, в [5] (неопределенная риманова метрика).

³ Указанной здесь геометрии присваивается ранг 3 в том смысле, что для построения двукомпонентной метрической функции используются три текущие точки.

Наш подход применения аналитического метода состоит в исследовании функциональных отображений и решении возникающих функционально-дифференциальных уравнений. Перейдем к точным формулировкам, которые приведем по монографии [4].

Пусть имеется множество M_2 , являющееся гладким двумерным многообразием, а также отображение некоторого $G_f \subseteq M_2 \times M_2$ в R^2 , сопоставляющее каждой паре точек $(A, B) \in G_f$ два вещественных числа $f(A, B) = (f^1(A, B), f^2(A, B)) \in R^2$.

Если x, y – локальные координаты двумерного многообразия M_2 , то для отображения $f(A, B)$ можно записать его локальное координатное представление:

$$f(A, B) = (f^1(A, B), f^2(A, B)) = (f^1(x_A, y_A, x_B, y_B), f^2(x_A, y_A, x_B, y_B)), \quad (1)$$

где x_A, y_A, x_B, y_B – локальные координаты текущих точек A и B пары $(A, B) \in G_f$.

Следуя [3], будем точки многообразия M_2 обозначать i, j, k и соответственно их координаты x_i, y_i и т.п.

Здесь и везде далее поскольку $i = (x_i, y_i)$, $j = (x_j, y_j)$, то $f^1(i, j), f^2(i, j)$ есть некоторые функции $f^1(x_i, y_i, x_j, y_j)$, $f^2(x_i, y_i, x_j, y_j)$ и, в частности,

$$\frac{\partial f^1(i, j)}{\partial x_i} = \frac{\partial f^1(x_i, y_i, x_j, y_j)}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial x_i} = \frac{\partial f^2(x_i, y_i, x_j, y_j)}{\partial x_i}. \quad (2)$$

В отношении вектор-функции $f(A, B) = (f^1(A, B), f^2(A, B))$ будем предполагать выполнение следующих аксиом:

A1. Область определения G_f вектор-функции $f(A, B) = (f^1(A, B), f^2(A, B))$ есть открытое и плотное множество в $M_2 \times M_2$.

A2. Вектор-функция f в локальных координатах имеет гладкость того порядка, который достаточен для наших целей.

A3. (Аксиома невырожденности). Для координатного представления вектор-функции $f(A, B) = (f^1(A, B), f^2(A, B))$ выполняются следующие неравенства:

$$\frac{\partial(f^1(i, j), f^2(i, j))}{\partial(x_i, y_i)} \neq 0, \quad \frac{\partial(f^1(i, j), f^2(i, j))}{\partial(x_j, y_j)} \neq 0, \quad (3)$$

где x_i, y_i и x_j, y_j – локальные координаты текущих точек i и j пары $(i, j) \in G_f$ (следует учитывать правила обозначений, принятые нами в (2)).

Заметим, что при условии (3) ранг касательного отображения для отображения (1) равен 2, то есть максимален.

Рассмотрим гладкое отображение $F_U: U \rightarrow E \subseteq R^6$, где $U \subseteq M_2 \times M_2 \times M_2$, сопоставляющее тройке $\langle i, j, k \rangle$ точку

$$z = (f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k)) \in R^6,$$

область определения которого U , очевидно, открыта и плотна в $M_2 \times M_2 \times M_2$.

Далее, пусть имеется ещё одно гладкое отображение $\Phi: E \rightarrow S \subseteq R^2$, где $E \subseteq R^6$, которое сопоставляет точке $z \in R^6$ пару чисел $(\Phi_1(z), \Phi_2(z)) \in R^2$. Данные построения поясняет рис. 1.

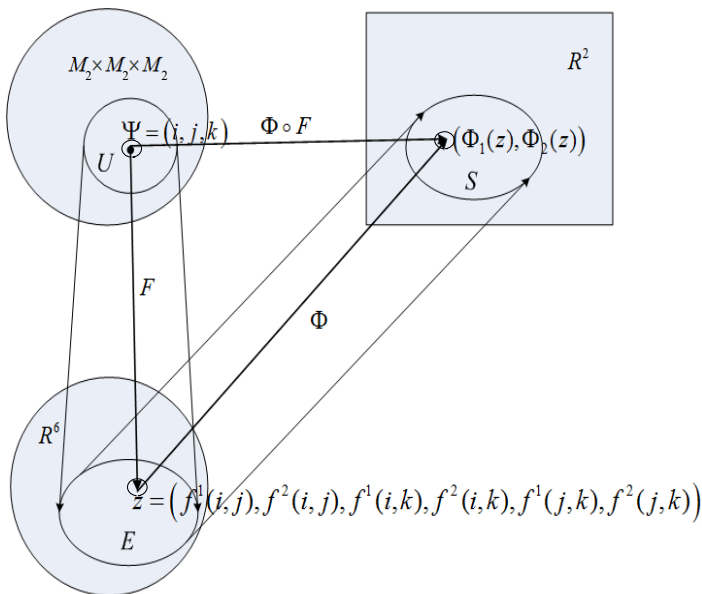


Рис. 1. Диаграмма отображений

Определение. Будем говорить, что вектор-функция $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$ задает на гладком двумерном многообразии M_2 *двуметрическую феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 3*, если кроме аксиом **A1**, **A2**, **A3** выполняется аксиома **A4**. Вектор-функция $f(i, j)$ называется метрической функцией [3].

A4. (Аксиома феноменологической симметрии.) Существует плотное в U множество, для каждой точки Ψ которого, то есть для тройки $\langle i, j, k \rangle$ и некоторой ее окрестности $\varepsilon(\langle i, j, k \rangle)$ найдется такое достаточно гладкое отображение $\Phi: E \rightarrow S \subseteq R^2$, определенное в некоторой области $E \subset R^6$, содержащей точку $z = F(\langle i, j, k \rangle)$, что в ней ранг якобиевой матрицы отображения Φ равен 2 и множество $F(\varepsilon(\langle i, j, k \rangle))$ является подмножеством множества нулей функции Φ , то есть

$$\Phi_m(f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k)) = 0, \quad (m = 1, 2) \quad (4)$$

для всех троек $\langle i, j, k \rangle$ из $\varepsilon(\langle i, j, k \rangle)$.

Если данная аксиома выполнена для отображения

$$\begin{aligned} & \Phi(f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k)) = \\ & = (\Phi_1(f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k)), \\ & \Phi_2(f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k))), \end{aligned}$$

то на множестве E величины $f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k)$ связаны двумя независимыми функциональными соотношениями (4).

Функциональная матрица отображения F_U

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1(i,j)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i,j)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^1(i,k)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i,k)}{\partial x_i} & 0 & 0 \\ \frac{\partial f^1(i,j)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i,j)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^1(i,k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i,k)}{\partial y_i} & 0 & 0 \\ \frac{\partial f^1(i,j)}{\partial x_j} & \frac{\partial f^2(i,j)}{\partial x_j} & 0 & 0 & \frac{\partial f^1(j,k)}{\partial x_j} & \frac{\partial f^2(j,k)}{\partial x_j} \\ \frac{\partial f^1(i,j)}{\partial y_j} & \frac{\partial f^2(i,j)}{\partial y_j} & 0 & 0 & \frac{\partial f^1(j,k)}{\partial y_j} & \frac{\partial f^2(j,k)}{\partial y_j} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f^1(i,k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(i,k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^1(j,k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(j,k)}{\partial x_k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f^1(i,k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^2(i,k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^1(j,k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^2(j,k)}{\partial y_k} \end{pmatrix} \quad (5)$$

имеет 6 строк и 6 столбцов, а ранг этой матрицы есть ранг касательного отображения.

Лемма 1. Если вектор-функция $f(i,j) = (f^1(i,j), f^2(i,j))$ и аналогичные ей удовлетворяют аксиомам **A1**, **A2**, **A3**, то ранг матрицы (5) не менее 4.

Справедливость леммы следует из того, что минор четвертого порядка Δ_4 , занимающий «северо-восточный угол» матрицы, отличен от нуля.

Замечание. Понижение ранга матрицы до четырех равносильно тому, что каждый из двух первых столбцов матрицы есть линейная комбинация базисных столбцов (то есть столбцов с номерами 3,4,5,6). Требование разложимости по базисным столбцам первого столбца налагает ограничения на производные функции $f^1(i,j)$ и аналогичных ей функций. Такое же требование, предъявленное ко второму столбцу, налагает точно те же ограничения на производные функции $f^2(i,j)$ по тем же аргументам. Исследуем следствия из разложимости первого столбца и убедимся в том, что они не только необходимы для выполнения условия $\text{rang}(A) = 4$, но и достаточны. Этот результат – центральный для нашей работы, и оформляем его следующей теоремой:

Теорема 1.

1. Если ранг отображения F_U равен 4 на открытом и плотном в U множестве, то вектор-функция $f(i,j) = (f^1(i,j), f^2(i,j))$, удовлетворяющая аксиомам **A1**, **A2**, **A3**, задает на гладком двумерном многообразии M_2 двуметрическую феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 3 (то есть удовлетворяет аксиоме **A4**).

2. Система аксиом **A1**, **A2**, **A3**, **A4** совместна, то есть существует модель соответствующей аксиоматической теории – набор вектор-функций $f(i,j) = (f^1(i,j), f^2(i,j))$, для которых выполнены все четыре аксиомы.

Доказательство пункта 1.

Пусть для тройки $\langle i, j, k \rangle \in U$ ранг отображения F_U равен 4. Из леммы 1 и **Замечания** следует, что для некоторой окрестности тройки (i, j, k) ранг функциональной матрицы (5) не менее 4 и равен для неё этому значению. Согласно теоре-

ме математического анализа о функциональной зависимости [6], для некоторой окрестности $\varepsilon(\langle i, j, k \rangle)$ найдется такое достаточно гладкое отображение $\Phi: E \rightarrow R^2$, определенное в соответствующей области $E \subset R^6$, содержащей точку $z = (f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k))$, в которой $\text{rang}(\Phi) = 2$, что имеет место уравнение (4).

Поскольку ранг матрицы (5) для исходной тройки $\langle i, j, k \rangle$ равен 4 и максимален в окрестности $\varepsilon(\langle i, j, k \rangle)$, из этой же теоремы о функциональной зависимости следует, что найдется такая его окрестность $\varepsilon' \subseteq \varepsilon$ и соответствующая область $E' \subseteq E$, для которых множество значений $F(\varepsilon')$ совпадает с множеством нулей функции Φ в E , являясь гладкой без особых точек поверхностью в R^6 . **Пункт 1 доказан.**

Доказательство пункта 2. По лемме 1 ранг матрицы не менее 4. Докажем, что ранг матрицы (5) не более 4.

Для доказательства продифференцируем уравнение (4) по каждой из 6 координат $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k$ точек тройки $\langle i, j, k \rangle$. В результате получим 6 линейных однородных уравнений относительно 6 производных функции Φ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i, j)} \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i, j)} \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i, k)} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i, k)} \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i, j)} \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial y_i} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i, j)} \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial y_i} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i, k)} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i, k)} \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i, j)} \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i, j)} \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(j, k)} \frac{\partial f^1(j, k)}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(j, k)} \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial x_j} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i, j)} \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial y_j} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i, j)} \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial y_j} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(j, k)} \frac{\partial f^1(j, k)}{\partial y_j} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(j, k)} \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial y_j} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i, k)} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i, k)} \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(j, k)} \frac{\partial f^1(j, k)}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(j, k)} \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i, k)} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_k} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i, k)} \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_k} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(j, k)} \frac{\partial f^1(j, k)}{\partial y_k} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(j, k)} \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial y_k} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

($m=1,2$),

матрица которой совпадает с функциональной матрицей (5) с точностью до транспонирования.

Предположим, что ранг матрицы системы (6) равен 5 или 6. Тогда система (6) будет иметь только одно линейно независимое ненулевое решение или ни одного, так как их число равно разности между числом переменных в системе (6) и рангом ее матрицы. Однако уравнения системы (6) имеют, по крайней мере, два таких решения в некоторой окрестности $\varepsilon(\langle i, j, k \rangle)$, так как по аксиоме **A4** $\text{rang } \Phi = 2$ в точке $z = F(\langle i, j, k \rangle)$. Ниже, в ходе анализа систем уравнений, мы убедимся в существовании метрической вектор-функции $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$, удовлетворяющей аксиомам **A1**, **A2**, **A3**, **A4**, причем $\text{rang } \Phi = 2$.

Теорема 2. С точностью до гладкого преобразования $\chi(\tilde{f}) \rightarrow f$ и замены локальных координат x, y существуют две и только две невырожденные метрические вектор-функции вида $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$, задающие на гладком двумерном многообразии M_2 двуметрическую феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 3. Компоненты этих метрических вектор-функций могут быть представлены следующими каноническими [3] выражениями:

$$1. f^1(i, j) = x_i - x_j, \quad f^2(i, j) = y_i - y_j; \quad (7)$$

$$2. f^1(i, j) = (x_i - x_j)y_i, \quad f^2(i, j) = (x_i - x_j)y_j. \quad (8)$$

Доказательство. Учитывая **Замечание**, сделанное нами выше, сводим требование $\text{rang}(A) = 4$ к обращению в нуль миноров пятого порядка, окаймляющих базисный минор четвертого порядка, содержащих элементы первого и второго столбцов. Тогда, применяя для окаймления строки пятую и шестую и приравнявая полученные миноры нулю, приходим к функционально-дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} & A_2^1(i, k)A_0(j, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} - A_2^2(i, k)A_0(j, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \\ & + A_2^1(j, k)A_0(i, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} - A_2^2(j, k)A_0(i, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \\ & A_1^1(i, k)A_0(j, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} - A_1^2(i, k)A_0(j, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \\ & + A_1^1(j, k)A_0(i, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} - A_1^2(j, k)A_0(i, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \\ & (\alpha = 1, 2). \end{aligned} \quad (9)$$

Коэффициенты при произвольных компонент функции $f(i, j)$ в уравнениях системы (9) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A_1^1(i, k) &= \frac{\frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i}}{\frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_k}} \frac{\frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i}}{\frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_k}}, & A_1^2(i, k) &= \frac{\frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_i}}{\frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_k}} \frac{\frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_i}}{\frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_k}}, \\ A_2^1(i, k) &= \frac{\frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i}}{\frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_k}} \frac{\frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i}}{\frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_k}}, & A_2^2(i, k) &= \frac{\frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_i}}{\frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_k}} \frac{\frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_i}}{\frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_k}}, \\ A_0(i, k) &= \frac{\frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_i}}{\frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i}} \frac{\frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_i}}{\frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i}} \neq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогично определяются $A_1^1(j, k), A_1^2(j, k), A_2^1(j, k), A_2^2(j, k), A_0(j, k)$.

Выпишем матрицу этой системы:

$$\begin{pmatrix} A_1^1(i, k)A_0(j, k) & -A_1^2(i, k)A_0(j, k) & A_1^1(j, k)A_0(i, k) & -A_1^2(j, k)A_0(i, k) \\ A_2^1(i, k)A_0(j, k) & -A_2^2(i, k)A_0(j, k) & A_2^1(j, k)A_0(i, k) & -A_2^2(j, k)A_0(i, k) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Лемма 2. Ранг системы уравнений (9) равен 2.

Доказательство леммы 2.

Заметим, что применив условие (3) к точкам j и k , мы получаем неравенства

$$\frac{\partial(f^1(j, k), f^2(j, k))}{\partial(x_j, y_j)} \neq 0; \quad \frac{\partial(f^1(j, k), f^2(j, k))}{\partial(x_k, y_k)} \neq 0. \quad (12)$$

Выделим в матрице (11) квадратную подматрицу второго порядка, содержащую отличный от нуля определитель $A_0(i, k)$, для определителя которой в силу (12) справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} -A_1^1(j, k)A_0(i, k) & A_1^2(j, k)A_0(i, k) \\ -A_2^1(j, k)A_0(i, k) & A_2^2(j, k)A_0(i, k) \end{vmatrix} = \\ & = -(A_0(i, k))^2 \times \left(\frac{\partial f^1(j, k)}{\partial y_j} \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial x_j} - \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial y_j} \frac{\partial f^1(j, k)}{\partial x_j} \right) \times \\ & \times \left(\frac{\partial f^1(j, k)}{\partial y_k} \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial x_k} - \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial y_k} \frac{\partial f^1(j, k)}{\partial x_k} \right) \neq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, ранг системы (9) равен 2.

Заменяя величины $A_\mu^\beta(i, k)$, $A_\mu^\beta(j, k)$, где $\mu, \beta = 1, 2$, в уравнениях (9) на

$$\tilde{A}_\mu^\beta(i, k), \tilde{A}_\mu^\beta(j, k)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1^1(i, k_0) &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_k} \end{array} \right|_{k=k_0}, & \tilde{A}_1^2(i, k_0) &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_k} \end{array} \right|_{k=k_0}, \\ \tilde{A}_2^1(i, k_0) &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_k} \end{array} \right|_{k=k_0}, & \tilde{A}_2^2(i, k_0) &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_k} \end{array} \right|_{k=k_0}, \\ \tilde{A}_0(i, k_0) &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i} \end{array} \right|_{k=k_0}, \end{aligned}$$

получим систему двух независимых дифференциальных уравнений в частных производных относительно компонент метрической вектор-функции $f(i, j)$:

$$\begin{aligned}
& \tilde{A}_2^1(i, k_0) \tilde{A}_0(j, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} - \tilde{A}_2^2(i, k_0) \tilde{A}_0(j, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \\
& + \tilde{A}_2^1(j, k_0) \tilde{A}_0(i, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} - \tilde{A}_2^2(j, k_0) \tilde{A}_0(i, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \\
& \tilde{A}_1^1(i, k_0) \tilde{A}_0(j, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} - \tilde{A}_1^2(i, k_0) \tilde{A}_0(j, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \\
& + \tilde{A}_1^1(j, k_0) \tilde{A}_0(i, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} - \tilde{A}_1^2(j, k_0) \tilde{A}_0(i, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \\
& (\alpha = 1, 2).
\end{aligned} \tag{13}$$

Поделив почленно уравнения системы (13) на произведение $\tilde{A}_0(i, k_0) \tilde{A}_0(j, k_0) \neq 0$ и вводя новые обозначения коэффициентов, получим более простую ее запись

$$\left. \begin{aligned}
\lambda_1(x_i, y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \sigma_1(x_i, y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \lambda_1(x_j, y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \sigma_1(x_j, y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} &= 0, \\
\lambda_2(x_i, y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \sigma_2(x_i, y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \lambda_2(x_j, y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \sigma_2(x_j, y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} &= 0,
\end{aligned} \right\}, \tag{14}$$

в которой

$$\begin{aligned}
\lambda_\alpha(x_i, y_i) &= \frac{\tilde{A}_\alpha^1(i, k_0)}{\tilde{A}_0(i, k_0)}, \quad \sigma_\alpha(x_i, y_i) = -\frac{\tilde{A}_\alpha^2(i, k_0)}{\tilde{A}_0(i, k_0)}, \\
\lambda_\alpha(x_j, y_j) &= \frac{\tilde{A}_\alpha^1(j, k_0)}{\tilde{A}_0(j, k_0)}, \quad \sigma_\alpha(x_j, y_j) = -\frac{\tilde{A}_\alpha^2(j, k_0)}{\tilde{A}_0(j, k_0)}
\end{aligned}$$

и $\lambda_\alpha^2(x, y) + \sigma_\alpha^2 \neq 0$ по лемме 2, где $\alpha = 1, 2$.

Рассмотрим функции двух вещественных аргументов, а именно, $\varphi(X, Y) \in C^2$, $\psi(X, Y) \in C^2$, для которых

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(X, Y)} \neq 0. \tag{15}$$

В уравнениях системы (14) произведем локально обратимую гладкую замену координат

$$\zeta_i = \varphi(x_i, y_i), \eta_i = \psi(x_i, y_i), \zeta_j = \varphi(x_j, y_j), \eta_j = \psi(x_j, y_j). \tag{16}$$

Якобиан замены имеет вид

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial \varphi(x_i, y_i)}{\partial x_i} & \frac{\partial \psi(x_i, y_i)}{\partial x_i} & 0 & 0 \\
\frac{\partial \varphi(x_i, y_i)}{\partial y_i} & \frac{\partial \psi(x_i, y_i)}{\partial y_i} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{\partial \varphi(x_j, y_j)}{\partial x_j} & \frac{\partial \psi(x_j, y_j)}{\partial x_j} \\
0 & 0 & \frac{\partial \varphi(x_j, y_j)}{\partial y_j} & \frac{\partial \psi(x_j, y_j)}{\partial y_j}
\end{vmatrix}$$

и в силу (15) отличен от нуля. Тогда первое уравнения системы (14) запишется в такой форме:

$$\begin{aligned} & \left(\lambda_1(x_i, y_i) \frac{\partial \varphi(x_i, y_i)}{\partial x_i} + \sigma_1(x_i, y_i) \frac{\partial \varphi(x_i, y_i)}{\partial y_i} \right) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \zeta_i} + \\ & + \left(\lambda_1(x_i, y_i) \frac{\partial \psi(x_i, y_i)}{\partial x_i} + \sigma_1(x_i, y_i) \frac{\partial \psi(x_i, y_i)}{\partial y_i} \right) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \eta_i} + \\ & + \left(\lambda_1(x_j, y_j) \frac{\partial \varphi(x_j, y_j)}{\partial x_j} + \sigma_1(x_j, y_j) \frac{\partial \varphi(x_j, y_j)}{\partial y_j} \right) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \zeta_j} + \\ & + \left(\lambda_1(x_j, y_j) \frac{\partial \psi(x_j, y_j)}{\partial x_j} + \sigma_1(x_j, y_j) \frac{\partial \psi(x_j, y_j)}{\partial y_j} \right) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \eta_j} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$(\alpha = 1, 2).$$

Для второго уравнения системы (14) получим аналогичную по виду запись.

Если функции φ и ψ для точек $i(x_i, y_i)$, $j(x_j, y_j)$ соответственно взять из решений дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \lambda_1(x_i, y_i) \frac{\partial \varphi(x_i, y_i)}{\partial x_i} + \sigma_1(x_i, y_i) \frac{\partial \varphi(x_i, y_i)}{\partial y_i} &= 1, \\ \lambda_1(x_i, y_i) \frac{\partial \psi(x_i, y_i)}{\partial x_i} + \sigma_1(x_i, y_i) \frac{\partial \psi(x_i, y_i)}{\partial y_i} &= 0, \\ \lambda_1(x_j, y_j) \frac{\partial \varphi(x_j, y_j)}{\partial x_j} + \sigma_1(x_j, y_j) \frac{\partial \varphi(x_j, y_j)}{\partial y_j} &= 1, \\ \lambda_1(x_j, y_j) \frac{\partial \psi(x_j, y_j)}{\partial x_j} + \sigma_1(x_j, y_j) \frac{\partial \psi(x_j, y_j)}{\partial y_j} &= 0, \end{aligned}$$

где $\lambda_1(x, y)^2 + \sigma_1(x, y)^2 \neq 0$, то для уравнения (17) получим максимально простой его вид

$$\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \zeta_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \zeta_j} = 0.$$

Присваивая новым переменным $\zeta_i, \zeta_j, \eta_i, \eta_j$ соответственно имена x_i, x_j, y_i, y_j , запишем преобразованные уравнения системы (14) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} = 0, \quad \lambda(x_i, y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \\ & + \sigma(x_i, y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \lambda(x_j, y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \sigma(x_j, y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$(\alpha = 1, 2).$$

Продифференцируем второе уравнение системы (18) вначале по переменной x_i , а затем по x_j . Сложив результаты дифференцирования, получим третье уравнение, которое расширит исходную систему (18):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial x_j} &= 0, \\ \lambda(x_i, y_i) \frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial x_i} + \sigma(x_i, y_i) \frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial y_i} + \lambda(x_j, y_j) \frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial x_j} + \sigma(x_j, y_j) \frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial y_j} &= 0, \\ \frac{\partial \lambda(x_i, y_j)}{\partial x_i} \frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma(x_i, y_i)}{\partial x_i} \frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial y_i} + \frac{\partial \lambda(x_j, y_j)}{\partial x_j} \frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma(x_j, y_j)}{\partial x_j} \frac{\partial f^\alpha(i,j)}{\partial y_j} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

($\alpha=1,2$),

причем слагаемые со вторыми частными производными в последнем уравнении уничтожаются с учетом первого уравнения.

Лемма 3. Ранг касательного отображения для отображения (1), подчиненного условиям (19), остается максимальным (то есть равным 2) только тогда, когда ранг матрицы системы (19) не более двух.

Доказательство. Для отображения (1) в обозначениях, используемых в формулах (2), (5) и далее, имеем матрицу касательного отображения вида

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1(i,j)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^1(i,j)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^1(i,j)}{\partial x_j} & \frac{\partial f^1(i,j)}{\partial y_j} \\ \frac{\partial f^2(i,j)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i,j)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i,j)}{\partial x_j} & \frac{\partial f^2(i,j)}{\partial y_j} \end{pmatrix}.$$

Если ранг системы линейных уравнений (19) на частные производные более двух, то на столбцы матрицы B получаем три независимых линейных уравнения и ранг данной матрицы понижается до 1.

Обратим в нуль все миноры третьего порядка матрицы системы (19). Получаем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} -\sigma(x_i, y_i) \frac{\partial \sigma(x_j, y_j)}{\partial x_j} + \sigma(x_j, y_j) \frac{\partial \sigma(x_i, y_i)}{\partial x_i} &= 0; \\ -\lambda(x_j, y_j) \frac{\partial \sigma(x_j, y_j)}{\partial x_j} + \sigma(x_j, y_j) \frac{\partial \lambda(x_j, y_j)}{\partial x_j} + \lambda(x_i, y_i) \frac{\partial \sigma(x_j, y_j)}{\partial x_j} - \sigma(x_j, y_j) \frac{\partial \lambda(x_i, y_i)}{\partial x_i} &= 0; \\ \sigma(x_i, y_i) \frac{\partial \sigma(x_j, y_j)}{\partial x_j} - \sigma(x_j, y_j) \frac{\partial \sigma(x_i, y_i)}{\partial x_i} &= 0; \\ -\sigma(x_i, y_i) \frac{\partial \lambda(x_j, y_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma(x_i, y_i)}{\partial x_i} \lambda(x_j, y_j) - \lambda(x_i, y_i) \frac{\partial \sigma(x_i, y_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial \lambda(x_i, y_i)}{\partial x_i} \sigma(x_i, y_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Первое (и равносильное ему третье) уравнение, записанное в виде

$$\frac{1}{\sigma(x_j, y_j)} \frac{\partial \sigma(x_j, y_j)}{\partial x_j} = \frac{1}{\sigma(x_i, y_i)} \frac{\partial \sigma(x_i, y_i)}{\partial x_i}, \text{ с учетом произвольности точек } i, j \text{ рав-$$

носильно независимости отношения $\frac{1}{\sigma(A)} \frac{\partial \sigma(A)}{\partial x}$ от выбора точки A , то есть при-

водит к уравнению $\frac{\partial \sigma(x, y)}{\partial x} = a \sigma(x, y)$, где $a = \text{const}$. Второе (как и равносиль-

ное ему четвертое) уравнение, записанное в виде

$$\frac{\partial \lambda(x_i, y_i)}{x_i} - a\lambda(x_i, y_i) = \frac{\partial \lambda(x_j, y_j)}{\partial x_j} - a\lambda(x_j, y_j) = \text{const} = b,$$

приводит к уравнению $\frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial x} = b + a\lambda(x, y)$, где $a = \text{const}$, $b = \text{const}$.

Таким образом, получаем систему из двух дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial x} = a\lambda(x, y) + b, \quad \frac{\partial \sigma(x, y)}{\partial x} = a\sigma(x, y), \quad (21)$$

где $a = \text{const}$, $b = \text{const}$.

При интегрировании системы (21) отдельно рассмотрим три случая:

1. $a = 0$, $b = 0$; **2.** $a = 0$, $b \neq 0$; **3.** $a \neq 0$.

В первом случае система (21) будет иметь следующие решения:

$$\lambda(x, y) = \tilde{\lambda}(y), \quad \sigma(x, y) = \tilde{\sigma}(y).$$

В результате подстановки данных решений в (18), получим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \\ \tilde{\lambda}(y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \tilde{\sigma}(y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \tilde{\lambda}(y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \tilde{\sigma}(y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$(\alpha = 1, 2)$

где $\tilde{\sigma}(y) \neq 0$, как следствие условия (12).

В системе (22) произведем локально обратимую замену координат

$$\tilde{x} = x + \tilde{\varphi}(y), \quad \tilde{y} = \tilde{\psi}(y), \quad (23)$$

где $\tilde{\psi}' \neq 0$. Тогда первое уравнение системы (22) сохранит свой простой вид в новых координатах, а второе – изменит:

$$\begin{aligned} &\left(\tilde{\lambda}(y_i) + \tilde{\sigma}(y_i) \frac{\partial \tilde{\varphi}(y_i)}{\partial y_i} \right) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \tilde{x}_i} + \tilde{\sigma}(y_i) \frac{\partial \tilde{\psi}(y_i)}{\partial y_i} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \tilde{y}_i} + \\ &+ \left(\tilde{\lambda}(y_j) + \tilde{\sigma}(y_j) \frac{\partial \tilde{\varphi}(y_j)}{\partial y_j} \right) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \tilde{x}_j} + \tilde{\sigma}(y_j) \frac{\partial \tilde{\psi}(y_j)}{\partial y_j} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \tilde{y}_j} = 0. \end{aligned}$$

Функции $\tilde{\varphi}(y)$ и $\tilde{\psi}(y)$ в замене координат (23) возьмем из решения дифференциальных уравнений $\tilde{\lambda}(y) + \tilde{\sigma}(y) \frac{\partial \tilde{\varphi}(y)}{\partial y} = 0$, $\tilde{\sigma}(y) \frac{\partial \tilde{\psi}(y)}{\partial y} = 1$. После присваивания новым переменным $\tilde{x}_i, \tilde{x}_j, \tilde{y}_i, \tilde{y}_j$ соответственно имен x_i, x_j, y_i, y_j система (22) примет вид

$$\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (24)$$

Решением этой системы уравнений является вектор-функция $f^\alpha(x_i, x_j, y_i, y_j) = \theta^\alpha(x_i - x_j, y_i - y_j)$, где $\alpha = 1, 2$. Взяв наиболее простой базис первых интегралов полученного решения и считая допустимым применение обра-

тимости гладкого преобразования $\chi^\alpha(f^1, f^2) \rightarrow f^\alpha$, в котором $\alpha = 1, 2$, получаем первое каноническое выражение (7).

Во втором случае $a = 0, b \neq 0$ система (21) будет иметь следующие решения:

$$\lambda(x, y) = bx + b\tilde{\lambda}(y), \quad \sigma(x, y) = b\tilde{\sigma}(y),$$

где $\tilde{\sigma}(y) \neq 0$. Тогда система (18) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \\ (x_i + \tilde{\lambda}(y_i)) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \tilde{\sigma}(y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + (x_j + \tilde{\lambda}(y_j)) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \tilde{\sigma}(y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\alpha = 1, 2.$$

К уравнениям системы (25) применим локально обратимую замену координат (23) и присвоим новым переменным $\tilde{x}_i, \tilde{x}_j, \tilde{y}_i, \tilde{y}_j$ соответственно имена x_i, x_j, y_i, y_j , после чего система (25) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \\ x_i \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + x_j \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} &= 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\alpha = 1, 2.$$

Решением системы дифференциальных уравнений (26) является вектор-функция $f^\alpha(x_i, y_i, x_j, y_j) = \theta^\alpha((x_i - x_j) \exp(-y_i), (y_i - y_j) \exp(-y_j))$, $\alpha = 1, 2$, которая с точностью до гладкого преобразования $\chi^\alpha(f^1, f^2) \rightarrow f^\alpha$ и замены координат $\exp(-y_i) \rightarrow y_i, \exp(-y_j) \rightarrow y_j$ может быть записана во второй канонической форме (8).

Рассмотрим последний случай, когда $a \neq 0$. Дифференциальные уравнения (21) на коэффициенты системы (18) будут иметь следующие решения:

1. В случае, когда $a \neq 0, b = 0$,

$$\lambda(x, y) = e^{ax} \tilde{\lambda}(y), \quad \sigma(x, y) = e^{ax} \tilde{\sigma}(y). \quad (27)$$

2. В случае, когда $a \neq 0, b \neq 0$,

$$\lambda(x, y) = e^{ax} \tilde{\lambda}(y) - \frac{b}{a}, \quad \sigma(x, y) = e^{ax} \tilde{\sigma}(y), \quad (28)$$

в которых $\tilde{\sigma}(y) \neq 0$. После подстановки каждого из решений (27), (28) исходная система (18) будет иметь один и тот же вид, а именно

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \\ e^{ax_i} \tilde{\lambda}(y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + e^{ax_i} \tilde{\sigma}(y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + e^{ax_j} \tilde{\lambda}(y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + e^{ax_j} \tilde{\sigma}(y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\alpha = 1, 2.$$

Произведем в полученной системе локально обратимую замену координат: $\tilde{x} = ax + \tilde{\varphi}(y)$, $\tilde{y} = \tilde{\psi}(y)$. Тогда система (29), с учетом присваивания новым переменным $\tilde{x}_i, \tilde{x}_j, \tilde{y}_i, \tilde{y}_j$ соответственно имен x_i, x_j, y_i, y_j , будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} = 0, \quad e^{ax_i} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + e^{ax_j} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \quad (\alpha = 1, 2) \quad (30)$$

Решением системы уравнений (30) является вектор-функция $f^\alpha(i, j) = \theta^\alpha(x_i - x_j, y_i \exp(-(x_i - x_j)) - y_j)$, которая с точностью до преобразований $\tilde{f}^1 = \chi^1(f^1, f^2) = \exp(f^1) \cdot f^2$, $\tilde{f}^2 = \chi^2(f^1, f^2) = f^2$ и замены координат $\exp(x) \rightarrow \tilde{y}$, $y / \exp(x) \rightarrow \tilde{x}$ (с учетом присваивания новым переменным $\tilde{x}_i, \tilde{x}_j, \tilde{y}_i, \tilde{y}_j$ соответственно имен x_i, x_j, y_i, y_j) совпадает с каноническим выражением (8). Теорема 2 доказана.

Заметим, что двуметрическая феноменологически симметричная геометрия ранга 3 допускает физическую интерпретацию в термодинамике при описании термодинамических состояний [7].

Автор выражает глубокую благодарность д.ф.-м.н., профессору Г.Г. Михайличенко за постановку задачи и полезные обсуждения, а также д.ф.-м.н., профессору С.П. Гулько, к.ф.-м.н., доценту М.С. Бухтяку, к.ф.-м.н., доценту Кырову В.А. за многочисленные полезные замечания и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кулаков Ю.И. Теория физических структур. Новосибирск: Альфа Виста, 2004. 851 с.
2. Гельмгольц Г. О фактах, лежащих в основании геометрии // Об основаниях геометрии. М., 1956. С. 365–388.
3. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии. Барнаул: Изд-во Барнаульского государственного педагогического университета, 2004. 132 с.
4. Михайличенко Г.Г. Полиметрические геометрии. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2001. 144 с.
5. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1981. 344 с.
6. Зорич В.А. Математический анализ: учебник. Ч. I. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: ФАЗИС, 1997. 554 с.
7. Михайличенко Г.Г. Математические основы и результаты теории физических структур. Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2012. 146 с.

Статья поступила 02.11.2012 г.

Bogdanova R.A. CLASSIFICATION OF TWO-METRIC PHENOMENOLOGICALLY SYMMETRIC TWO-DIMENSIONAL GEOMETRIES OF RANG 3. Two-metric phenomenologically symmetric two-dimensional geometry are set on a two-dimensional variety M_2 by a function of a couple of points $f(i, j)$ which we call the metric function. One of defining properties of this geometry is so-called phenomenological symmetry to which the special attention was paid for the first time by Yu. I. Kulakov who made it the basic principle of his theory of physical structures. The essence of phenomenological symmetry is that, in an sn -dimensional space between all mutual $sm(m-1)/2$ distances (that is used as the metric function) for $m = n + 2$ arbitrary points, there is a functional relation. In the first part of this work, main definitions and axioms used further in the proof of theorems are given. In the second part of work presents a classification of two-metric

phenomenologically symmetric two-dimensional geometries of rank 3 ($s = 2$ and $n = 1$) carried out by the analytical method in which the geometrical meaning of the studied functional and differential relations is used: first of all, a smooth replacement of local coordinates which allows one to reduce solutions of the differential equations to the simplest form. The specified reduction of solutions of the differential equations allows one to compare our solutions with results of other authors.

Keywords: two-metric phenomenologically symmetric geometry, functional equation

REFERENCES

1. Kulakov Yu.I. Teoriya fizicheskikh struktur. Novosibirsk: Al'fa Vista, 2004. 851 p. (in Russian).
2. Gel'mgol'ts G. O faktakh, lezhashchikh v osnovanii geometrii // Ob osnovaniyakh geometrii. Moscow, 1956. P. 365–388 (in Russian).
3. Mikhaylichenko G.G. Dvumernye geometrii. Barnaul: Izd-vo Barnaul'skogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta, 2004. 132 p. (in Russian).
4. Mikhaylichenko G.G. Polimetricheskie geometrii. Novosibirsk: Novosib. gos. un-t, 2001. 144 p. (in Russian).
5. Kobayasi Sh., Nomidzu K. Osnovy differentsial'noy geometrii. V. 1. Moscow: Nauka, 1981. 344 p. (in Russian).
6. Zorich V.A. Matematicheskiy analiz: uchebnik. Ch. I. Izd. 2-e, ispr. i dop. Moscow: FAZIS, 1997. 554 p. (in Russian).
7. Mikhaylichenko G.G. Matematicheskie osnovy i rezul'taty teorii fizicheskikh struktur. Gorno-Altaysk: RIO GAGU, 2012. 146 p. (in Russian).

BOGDANOVA Rada Alexandrovna

(Gorno-Altaysk State University, Gorno-Altaysk, Russian Federation)

E-mail: bog-rada@yandex.ru