ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2014 Математика и механика № 1(27)

УДК 517.9

И.В. Рахмелевич

ОБ УРАВНЕНИЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, СОДЕРЖАЩИХ МУЛЬТИОДНОРОДНЫЕ ФУНКЦИИ ОТ ПРОИЗВОДНЫХ

Рассмотрено понятие мультиоднородной функции и сформулированы некоторые их свойства. С помощью метода разделения переменных получены решения некоторых уравнений математической физики, содержащих мультиоднородные функции от производных по пространственным переменным. Выполнен анализ решений для некоторых частных случаев.

Ключевые слова: *уравнение*, *мультиоднородная функция*, *метод разделения переменных*, *частная производная.*

В современной математической физике и ее приложениях одним из важнейших методов является метод разделения переменных (РП), который успешно применяется для решения уравнений в частных производных [1, 2]. В работе [3] с помощью этого метода получены решения некоторых уравнений, содержащих однородные функции от производных по пространственным переменным. Данная работа является логическим продолжением работы [3]. Здесь рассматривается случай, когда в уравнение входит мультиоднородная функция от производных, у которой свойство однородности выполняется для некоторых подмножеств ее множества аргументов.

1. Мультиоднородные функции и некоторые их свойства

Пусть рассматривается функция N переменных $F(p_1,\ldots, p_N)$. Предполагаем, что множество значений $I=\{1,...,N\}$ индекса i, нумерующего переменные, разбито на $K+1$ непересекающихся подмножеств $I_k \quad (k=0,1,...,K)$. Тогда вектор переменных $P=\{p_1,...,p_N\}$ можно разбить на $K+1$ непересекающихся подвекторов $P_k=\{p_i\}_{i\in I_k}$. По определению, функция F называется мультиоднородной относительно подвекторов $P_1,...,P_K$, если для произвольных значений $P_1,...,P_K$ и произвольного действительного α выполняются соотношения

$$F(P_0,P_1,...,\alpha P_k,...,P_K)=\alpha^{r_k}F(P_0,P_1,...,P_K) \qquad (1)$$

Соотношения (1) должны выполняться для всех $k=1,...,K$; показатели однородности r_k являются некоторыми действительными постоянными. Понятие мультиоднородной функции, введенное в работе [5], является обобщением классического понятия однородной функции [4]. Однако здесь, в отличие от работы [5], рассматривается более общий случай, когда имеется подвектор переменных P_0, по которым функция F не является однородной.

Отметим некоторые свойства мультиоднородных функций, которые будут использованы в дальнейшем.

Свойство 1. При всех $1 \le k \le K$, для которых $r_k > 0$,

$$F(P_0, P_1, ..., P_k, ..., P_K)\big|_{P_k = 0} = 0 . \qquad (1a)$$

Это свойство вытекает непосредственно из соотношений (1).

Свойство 2. Пусть множество значений $\Xi = \{1,\ldots,K\}$ индекса k разделено произвольно на L $(1 \le L < K)$ непересекающихся подмножеств Ξ_l $(l = 1,\ldots,L)$. Определим новую систему подвекторов $\tilde{P}_1, ..., \tilde{P}_L$ следующим образом: $\tilde{P}_l = \bigcup\limits_{k \in \Xi_l} P_k$. Тогда, если функция F является мультиоднородной относительно подвекторов $P_1, ..., P_K$ с показателями однородности r_k , то она является мультиоднородной и относительно подвекторов $\tilde{P}_1, ..., \tilde{P}_L$ с показателями однородности $\tilde{r}_l = \sum\limits_{k \in \Xi_l} r_k$. В частности, если функция F является мультиоднородной относительно любой системы подвекторов $P_1, ..., P_K$, то она является однородной в обычном смысле относительно вектора переменных $\tilde{P} = \bigcup\limits_{k=1}^{K} P_k$.

Это свойство также можно получить из соотношений (1), применив эти соотношения последовательно для всех значений k, принадлежащих одному и тому же подмножеству Ξ_l .

2. Уравнение, содержащее мультиоднородную функцию

Рассмотрим уравнение относительно неизвестной функции $u(t, x_1, ..., x_N)$

$$L_t u = F\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right). \qquad (2)$$

Здесь $L_t \equiv \sum\limits_{m=1}^{M} a_m(t) \dfrac{\partial^m}{\partial t^m}$ – линейный дифференциальный оператор по переменной t.

Пусть $p_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ $(i = 1,\ldots, N)$. Далее, предположим, что вектор $P = \{p_1, ..., p_N\}$ можно разбить на $K+1$ непересекающихся подвекторов $P_0, P_1, ..., P_K$ таким образом, что функция F является мультиоднородной относительно подвекторов $P_1, ..., P_K$. Вектор независимых пространственных переменных $X = \{x_1, ..., x_N\}$ разбиваем на соответствующие подвекторы $X_k = \{x_i\}_{i \in I_k}$ и введем также соответствующие векторы производных $\dfrac{\partial}{\partial X_k} = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right\}_{i \in I_k}$ $(k = 0, 1, ..., K)$.

Применяя метод РП к уравнению (2), решение будем искать в виде

$$u(t, X) = T_0(t) + V_0(X_0) + \sum_{k=1}^{K} T_k(t) V_k(X_k) . \qquad (3)$$

Подставим выражение (3) в уравнение (2) и, учитывая соотношения мультиоднородности (1), приводим это уравнение к виду

$$\frac{L_t T_0(t)}{S(t)} + \sum_{k=1}^{K} V_k(X_k)\,\frac{L_t T_k(t)}{S(t)} = F\left(\frac{\partial V_0}{\partial X_0}, \frac{\partial V_1}{\partial X_1}, \ldots \frac{\partial V_K}{\partial X_K}\right), \tag{4}$$

$$S(t) = \prod_{k=1}^{K} [T_k(t)]^{r_k}. \tag{4a}$$

Продифференцируем уравнение (4) по X_k $(k = 1,\ldots,K)$, откуда получаем

$$\frac{L_t T_k(t)}{S(t)}\frac{\partial V_k}{\partial X_k} = \frac{\partial}{\partial X_k} F\left(\frac{\partial V_0}{\partial X_0}, \frac{\partial V_1}{\partial X_1}, \ldots \frac{\partial V_K}{\partial X_K}\right). \tag{5}$$

Так как правая часть уравнения (5) не зависит от t, то это уравнение может удовлетворяться только при выполнении условий

$$\frac{L_t T_k(t)}{S(t)} = \lambda_k, \tag{6}$$

где $k = 1,\ldots,K$.

Подставляя (6) в уравнение (4) и учитывая, что правая часть этого уравнения также не зависит от t, получим

$$\frac{L_t T_0(t)}{S(t)} = \lambda_0. \tag{6a}$$

В итоге уравнение (4) приводится к виду

$$\lambda_0 + \sum_{k=1}^{K} \lambda_k V_k(X_k) = F\left(\frac{\partial V_0}{\partial X_0}, \frac{\partial V_1}{\partial X_1}, \ldots \frac{\partial V_K}{\partial X_K}\right). \tag{7}$$

Рассмотрим частные случаи, в которых может быть удовлетворено уравнение (7).

Случай 1:

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k = 0 \ \ (k = 1,\ldots,K).$$

Тогда функции $V_k(X_k)$ должны удовлетворять уравнению

$$F\left(\frac{\partial V_0}{\partial X_0}, \frac{\partial V_1}{\partial X_1}, \ldots \frac{\partial V_K}{\partial X_K}\right) = 0. \tag{8}$$

Решение уравнения (8) будем искать в виде

$$V_k(X_k) = \Phi_k(z_k) \ \ (k = 1,\ldots,K), \ V_0(X_0) = z_0, \tag{9}$$

$$z_k = \sum_{i \in I_k} c_i x_i, \tag{9a}$$

где c_i – некоторые постоянные, $\Phi_k(z_k)$ – некоторые неизвестные дифференцируемые функции. Принимая во внимание, что $\left.\frac{\partial V_k}{\partial x_i}\right|_{i \in I_k} = c_i \Phi_k'(z_k)$, уравнение (8) сводим к следующему:

$$\prod_{k=1}^{K} [\Phi_k'(z_k)]^{r_k} F(C_0, C_1, \ldots, C_K) = 0, \tag{10}$$

где введены постоянные векторы $C_k = \{c_i\}_{i \in I_k}$. Уравнение (10) удовлетворяется в следующих случаях.

а) $$F\left(C_0, C_1, \ldots, C_K\right) = 0\,. \tag{11}$$

Тогда решение уравнения (2) в этом случае

$$u(t, X) = T_0(t) + z_0 + \sum_{k=1}^{K} T_k(t)\,\Phi_k(z_k)\ . \tag{12}$$

Здесь функции $\Phi_k(z_k)$ являются произвольными, z_k определяются формулой (9а) при $k = 0,1,\ldots,K$, причем постоянные c_i должны удовлетворять соотношению (11), а функции $T_k(t)$ при тех же значениях k должны удовлетворять уравнению

$$L_t T_k(t) = 0\,. \tag{12а}$$

б) $\Phi'_k(z_k) = 0$ при некотором фиксированном $k = k_0$, удовлетворяющем условию $r_k > 0$. Тогда решение уравнения (2) также определяется формулой (12), причем функция $\Phi_{k_0} = \mathrm{const}$, а остальные функции $\Phi_k(z_k)$ являются произвольными. При этом, в отличие от п. а), постоянные c_i также являются произвольными.

Случай 2:

$$\lambda_0 \neq 0, \quad \lambda_k = 0 \ \ (k = 1,\ldots,K)\,.$$

В этом случае левая часть уравнения (7) равна λ_0, т.е. не зависит от пространственных переменных, поэтому $V_k(X_k) = z_k$ и решение уравнения (2) запишется как

$$u(t, X) = T_0(t) + z_0 + \sum_{k=1}^{K} T_k(t)\, z_k\ . \tag{13}$$

Здесь функции $T_k(t)$ определяются из уравнения (12а), после чего функция $T_0(t)$ находится из уравнения (6а). Постоянные c_i, входящие в выражение (9а) для z_k, должны удовлетворять условию

$$F\left(C_0, C_1, \ldots, C_K\right) = \lambda_0 \tag{13а}$$

Случай 3: $\lambda_k \neq 0$ при некоторых значениях $k \in \Xi$. Множество значений $\Xi = \{1,\ldots,K\}$ индекса k разделим на два непересекающихся подмножества Ξ_1, Ξ_2 следующим образом: если $k \in \Xi_1$ $(k \in \Xi_2)$, то для данного значения k $\lambda_k \neq 0$ $(\lambda_k = 0)$ соответственно. Тогда уравнение (7) запишется следующим образом:

$$\lambda_0 + \sum_{k \in \Xi_1} \lambda_k V_k(X_k) \ = F\left(\frac{\partial V_0}{\partial X_0}, \frac{\partial V_1}{\partial X_1}, \ldots \frac{\partial V_K}{\partial X_K}\right). \tag{14}$$

Так как левая часть уравнения (14) не зависит от X_k при $k \in \Xi_2, k = 0$, то для этих значений k $V_k(X_k) = z_k$.

Далее, покажем, что уравнение (14) может быть удовлетворено только в том случае, если множество Ξ_1 включает в себя не более одного элемента. Так как левая часть (14) представляет собой сумму функций, зависящих от разных аргументов, то и правая часть этого уравнения должна быть представима в виде суммы функций, зависящих от тех же аргументов:

$$F\left(P_0, P_1, \ldots P_K\right) = \sum_{k \in \Xi_1} F_k(P_k)\,. \tag{15}$$

Пусть $l \in \Xi_1$ – некоторое фиксированное значение индекса *k*. Тогда из соотношений (1) и (15) следует

$$F(P_0, P_1, ..., \alpha P_l, ..., P_K) = \alpha^{r_l} \sum_{k \in \Xi_1} F_k(P_k). \tag{16}$$

С другой стороны, из (15) непосредственно вытекает

$$F(P_0, P_1, ..., \alpha P_l, ..., P_K) = \sum_{k \in \Xi_1} F_k(\tilde{\alpha}_k P_k) \ , \tag{17}$$

где

$$\tilde{\alpha}_k = \begin{cases} \alpha & \text{если} \quad k = l, \\ 1 & \text{если} \quad k \neq l. \end{cases} \tag{17а}$$

Сопоставляя (16) и (17), приходим к соотношению

$$\sum_{k \in \Xi_1} \left\{ \alpha^{r_l} F_k(P_k) - F_k(\tilde{\alpha}_k P_k) \right\} = 0. \tag{18}$$

Равенство (18) должно удовлетворяться при произвольных α, P_k . Так как слагаемые в левой части (18) зависят от разных аргументов , то (18) эквивалентно следующей системе равенств:

$$(\alpha^{r_l} - 1) F_k(P_k) = 0 \quad (k \in \Xi_1,\ k \neq l), \tag{19а}$$

$$\alpha^{r_l} F_l(P_l) - F_l(\alpha P_l) = 0 \tag{19б}$$

Равенства (19а) могут быть удовлетворены при произвольных α, P_k только в том случае, если $F_k(P_k) \equiv 0$ при всех $k \in \Xi_1,\ k \neq l$. Это означает, что при выбранном значении l $F(P_0, P_1, \ldots P_K) = F_l(P_l)$, т.е. множество Ξ_1 состоит из одного элемента. Поэтому сумма в левой части (14) включает только одно слагаемое, благодаря чему это уравнение можно записать в виде

$$\lambda_0 + \lambda_l V_l(X_l) = F_l\left(\frac{\partial V_l}{\partial X_l}\right). \tag{20}$$

С помощью линейной замены $\tilde{V}_l = V_l + \dfrac{\lambda_0}{\lambda_l}$ это уравнение сводится к следующему:

$$F_l\left(\frac{\partial \tilde{V}_l}{\partial X_l}\right) - \lambda_l \tilde{V}_l(X_l) = 0. \tag{20а}$$

Уравнение (20а) было рассмотрено в работе [3]. Его решение имеет вид

а) в случае $\beta_l \neq 0$ ($r_l \neq 1$):

$$\tilde{V}_l(X_l) = (\beta_l B_l)^{1/\beta_l} \left(z_l + d_l\right)^{1/\beta_l}, \quad z_l = \sum_{x_i \in X_l} c_i x_i \ ; \tag{21а}$$

б) в случае $\beta_l = 0$ ($r_l = 1$):

$$\tilde{V}_l(X_l) = \exp\left(B_l(z_l + d_l)\right). \tag{21б}$$

Здесь введены обозначения:

$$\beta_l = (r_l - 1)/r_l,\ B_l = \left(\frac{\lambda_l}{F_l(C_l)}\right)^{1/r_l}, \tag{21в}$$

c_i, d_l – произвольные постоянные, $C_l = \{c_i\}_{i \in I_l}$. Тогда решение исходного уравнения (2) для рассматриваемого случая можно записать как

$$u(t,X) = T_0(t) + z_0 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{K} T_k(t)\, z_k + T_l(t) V_l(z_l). \tag{23}$$

Здесь функции $T_k(t)$ являются решениями уравнения (12а), функция $T_0(t)$ находится из уравнения (6а), $T_l(t)$ определяется из уравнения (6), в котором необходимо заменить $k \to l$, $V_l(z_l)$ определяется формулами (21).

Случай 4: $V_k = \text{const}$ при некоторых значениях $k \in \Xi$, причем предполагаем, что для этих значений k $r_k > 0$. Разделим множество Ξ на два непересекающихся подмножества Ξ_1, Ξ_2 следующим образом: если $k \in \Xi_1$ $(k \in \Xi_2)$, то для данного значения k $V_k = \text{const}$ $(V_k \neq \text{const})$ соответственно. Из свойства (1а) мультиоднородной функции следует, что в рассматриваемом случае правая часть уравнения (7) тождественно равна 0. Тогда это уравнение можно переписать в виде

$$\tilde{\lambda}_0 + \sum_{k \in \Xi_2} \lambda_k V_k(X_k) = 0, \tag{24}$$

$$\tilde{\lambda}_0 = \lambda_0 + \sum_{k \in \Xi_1} \lambda_k V_k. \tag{24а}$$

Так как слагаемые под знаком суммы в левой части (24) зависят от разных аргументов и при этом не являются постоянными, то это уравнение может быть удовлетворено в том и только в том случае, если

$$\tilde{\lambda}_0 = 0, \quad \lambda_k = 0$$

для всех $k \in \Xi_2$. Тогда, введя функцию $\tilde{T}_0(t) = T_0(t) + \sum_{k \in \Xi_1} T_k(t) V_k$, решение уравнения (2) для данного случая запишем в виде

$$u(t,X) = \tilde{T}_0(t) + z_0 + \sum_{k \in \Xi_2} T_k(t) V_k(X_k). \tag{25}$$

Здесь функции $\tilde{T}_0(t)$, $T_k(t)$ должны удовлетворять уравнению (12а), а функции $V_k(X_k)$ являются произвольными.

Кроме рассмотренных выше решений уравнение (2) может иметь также дополнительные решения. Это вытекает из свойства 2 мультиоднородных функций, сформулированного в п. 1. Действительно, для каждой из систем подвекторов $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_L$, образованных способом, описанным в п.1, из исходной системы $P_1, \ldots, P_K$, проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше, можно получить решения, соответствующие этой системе подвекторов.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_4}\right)^2 . \qquad (26)$$

Функция в правой части этого уравнения является мультиоднородной относительно подвекторов $P_1 = \{p_1, p_2\}$, $P_2 = \{p_3, p_4\}$, где $p_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.

Решая уравнение (26) методом РП, в соответствии с описанными выше результатами, получаем следующие решения:

1) $u(t,X) = A_0 t + B_0 + \sum\limits_{k=1}^{2} (A_k t + B_k)\Phi_k(z_k)$;

2) $u(t,X) = A_0 t + B_0 + (A_1 t + B_1)V_1(x_1, x_2)$;

3) $u(t,X) = A_0 t + B_0 + (A_2 t + B_2)V_2(x_3, x_4)$;

4) $u(t,X) = T_0(t) + \sum\limits_{k=1}^{3} (A_k t + B_k) z_k$,

где $$T_0(t) = A_0 t + B_0 + \frac{\lambda_0}{A_2^2}\left\{\frac{\tilde{A}_1}{20}(A_2 t + B_2)^5 + \frac{\tilde{B}_1}{12}(A_2 t + B_2)^4\right\},$$

$$\tilde{A}_1 = \frac{A_1}{A_2}, \quad \tilde{B}_1 = B_1 - \frac{A_1}{A_2} B_2 ;$$

5) $u(t,X) = A_0 t + B_0 + T_1(t)\exp(q_1 z_1) + (A_2 t + B_2) z_2$,

где $T_1(t) = \sqrt{|\tau|}\left(A_1 I_{1/4}\left(\dfrac{\tau^2}{2A_2}\right) + B_1 K_{1/4}\left(\dfrac{\tau^2}{2A_2}\right)\right)$, $\tau = A_2 t + B_2$, $I_{1/4}, K_{1/4}$ – модифицированные функции Бесселя;

6) $u(t,X) = A_0 t + B_0 + (A_1 t + B_1) z_1 + 4 q_2 T_2(t)(z_2 + c_0)^2$,

где $T_2(t)$ определяется из уравнения $T_2''(t) - \lambda_2 (A_1 t + B_1) T_2^2(t) = 0$;

7) $u(t,X) = A_0 t + B_0 + \sqrt{q}\, T(t)\left[\dfrac{2}{3}(z + c_0)\right]^{3/2}$,

где $T(t)$ определяется из уравнения $T''(t) - \lambda T^3(t) = 0$;

8) $u(t,X) = A_0 t + B_0 + q_0^{1/3}(At + B)(z + c_0)$;

9) $u(t,X) = A_0 t + B_0 + (At + B)\Phi(z)$.

Здесь $\Phi(z)$, $\Phi_{1,2}(z_{1,2})$, $V_1(x_1, x_2)$, $V_2(x_3, x_4)$ являются произвольными дифференцируемыми функциями своих аргументов; c_i $(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$, λ, A, B, λ_k, A_k, B_k $(k = 0,1,2)$ – произвольные постоянные; q, q_k определяются выражениями $q = \dfrac{\lambda}{c_1 c_3^2 + c_2 c_4^2}$, $q_k = \dfrac{\lambda_k}{c_1 c_3^2 + c_2 c_4^2}$ $(k = 0,1,2)$; z_k определяются выражением (9а),

$z = \sum_{i=1}^{4} c_i x_i$. Решения 5), 6), 7), 8) применимы при условии $c_1 c_3{}^2 + c_2 c_4{}^2 \neq 0$; решения 1), 4), 9) – при условии $c_1 c_3{}^2 + c_2 c_4{}^2 = 0$. Уравнения для функций $T(t)$, $T_2(t)$, приведенные выше для решений 6),7), сводятся к уравнению Эмдена – Фаулера [6]; выражение для $T_1(t)$, входящее в состав решения 5), также получено в [6, с.157].

Заключение

Таким образом, в данной работе методом разделения переменных получены решения уравнения в частных производных, содержащего мультиоднородную функцию от производных первого порядка по пространственным переменным. Проанализирован вид решения для возможных частных случаев и приведен пример применения полученных в работе соотношений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полянин А.Д.*, *Зайцев В.Ф.*, *Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.
2. *Полянин А.Д.*, *Зайцев В.Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 2002.
3. *Рахмелевич И.В.* О применении метода разделения переменных к уравнениям математической физики, содержащим однородные функции от производных // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 3(23). С. 37–44.
4. *Корн Г.*, *Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984.
5. *Рахмелевич И.В.* О некоторых уравнениях в частных производных, содержащих мультиоднородные функции // Материалы III Международной заочной научно-практической конференции «Научная дискуссия: вопросы физики, математики, информатики». 2012. С. 18–23.
6. *Зайцев В.Ф.*, *Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001.

Статья поступила 03.10.2013 г.

Rakhmelevich I.V. ON EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS CONTAINING MULTI-HOMOGENEOUS FUNCTIONS OF DERIVATIVES. We introduce the concept of a multi-homogeneous function for which the homogeneity property holds for some subsets of its set of arguments. Some properties of such functions have been formulated. A class of mathematical physics equations containing a multi-homogeneous function of the first order derivatives with respect to spatial variables and a linear differential operator in time is considered. Using the method of separation of variables, we obtain solutions of equations of this kind in the form of finite sums in which each term depends on the time and spatial variables belonging to one of the above homogeneity subvectors X_k. It is shown that if all the constants of separation of variables are equal to zero, then the solution depends on arbitrary functions of some linear combinations of spatial variables z_k forming subvector X_k. For the cases of non-zero values of constants of separation of variables, we obtained solutions characterized by linear dependence on the values of z_k, solutions with the power and exponential dependence on these variables, and solutions containing arbitrary functions of variables forming subvectors X_k. The obtained results are illustrated by an example of an equation of second order in time with a multi-homogeneous function of four variables.

Keywords: equation, multi-homogeneous function, variables separation method, partial derivative.

REFERENCES

1. *Polyanin A.D., Zaytsev V.F., Zhurov A.I.* Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki. Moscow: Fizmatlit, 2005 (in Russian).
2. *Polyanin A.D., Zaytsev V.F.* Spravochnik po nelineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki: tochnye resheniya. Moscow: Fizmatlit, 2002 (in Russian).
3. *Rakhmelevich I.V.* O primenenii metoda razdeleniya peremennykh k uravneniyam matematicheskoy fiziki, soderzhashchim odnorodnye funktsii ot proizvodnykh // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. 2013. No. 3(23). P. 37–44 (in Russian).
4. *Korn G., Korn T.* Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov. Moscow: Nauka, 1984 (in Russian).
5. *Rakhmelevich I.V.* O nekotorykh uravneniyakh v chastnykh proizvodnykh, soderzhashchikh mul'tiodnorodnye funktsii // Materialy III Mezhdunarodnoy zaochnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «Nauchnaya diskussiya: voprosy fiziki, matematiki, informatiki». 2012. P. 18–23.
6. *Zaytsev V.F., Polyanin A.D.* Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam. Moscow: Fizmatlit, 2001 (in Russian).

RAKHMELEVICH Igor Vladimirovich
(Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod, Russian Federation)
E-mail: igor-kitpd@yandex.ru