УДК 532.5:532.517.4

И.В. Ершов

ЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НЕВЯЗКОГО СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ ТЕРМИЧЕСКИ НЕРАВНОВЕСНОГО МОЛЕКУЛЯРНОГО ГАЗА[1]

В рамках модели двухтемпературной газовой динамики исследуется задача линейной устойчивости плоскопараллельных сдвиговых течений колебательно-возбужденного молекулярного газа. Проведено обобщение условий Рэлея и теоремы о полукруге (теорема Ховарда) на случай термически неравновесного газа. Показано, что для развития неустойчивости в сдвиговом течении термически неравновесного газа необходимо выполнение первого условия Рэлея в той же форме, что и для случаев однородной и стратифицированной несжимаемой жидкости и идеального газа. Однако более жесткое условие на комплексную фазовую скорость, известное как теорема о полукруге, удается получить лишь при некоторых дополнительных условиях. Также для случая колебательно-неравновесного газа получено обобщенное условие о необходимости существования точки перегиба на неустойчивом профиле скорости (второе условие Рэлея).

Ключевые слова: *линейная теория устойчивости*, *условия Рэлея*, *теорема о полукруге (теорема Ховарда)*, *колебательная релаксация*, *уравнения двухтемпературной газовой динамики.*

Классические результаты по линейной устойчивости плоскопараллельных течений, полученные Гельмгольцем, Кельвином и Рэлеем, рассмотревшими случай идеальной несжимаемой жидкости, были распространены на задачи о течениях идеального газа неоднородной стратифицированной и проводящей жидкостей в полях различных массовых сил [1]. В последние годы в связи с проблемами управления потоками химически реагирующих, частично ионизированных, оптически возбужденных сред возник интерес к устойчивости термически неравновесных течений молекулярных газов. Обзор результатов исследований в этой области можно найти в монографии [2].

В работах [3–6] рассматривалась диссипация крупной вихревой структуры в сдвиговом потоке слабо неравновесного и колебательно-возбужденного газов. Изучалось воздействие релаксации колебательной моды на вихревую дорожку Кармана за цилиндром [7]. На основе энергетической теории устойчивости получены оценки влияния релаксационного процесса на критическое число Рейнольдса в течении Куэтта [8–11]. Результаты всех этих работ позволяют заключить, что термическая неравновесность может существенно влиять на процессы эволюции возмущений различных пространственно-временных масштабов, ускоряя их диссипацию.

В данной работе цитированные выше результаты по устойчивости плоскопараллельных течений обобщаются на течения колебательно-возбужденного сжимаемого газа.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00064).

Основные уравнения

В координатной плоскости (x, y) рассматривается плоскопараллельное сдвиговое течение, в котором основной (несущий) поток плотности $\rho_S\,(y)$ и температуры $T_S\,(y)$ направлен вдоль оси абсцисс x и имеет профиль скорости $U_S = U_S\,(y)$. Возмущенное течение описывается системой уравнений двухтемпературной газовой динамики [2, 12]. Используя в качестве масштабирующих величин некоторые характерные длину L, скорость U_0, плотность ρ_0, температуру T_0 и образованные из них время $\tau_0 = L/U_0$ и давление $p_0 = \rho_0 U_0^2$, получим, что в безразмерных переменных эта система уравнений примет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u_i}{\partial x_i}=0,\ \rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i},$$

$$\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u_i\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+(\gamma-1)\rho T\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=\frac{\gamma_{\text{vib}}\,\rho\,(T_{\text{vib}}-T)}{\tau_{\text{VT}}(1-\gamma_{\text{vib}})}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial T_{\text{vib}}}{\partial t}+u_i\frac{\partial T_{\text{vib}}}{\partial x_i}+\frac{(T_{\text{vib}}-T)}{\tau_{\text{VT}}}=0,\quad \gamma\mathrm{M}^2 p=\rho T,\quad i,j=1,2,$$

где ρ, u_i, p, T, T_{vib}, τ_{VT} – плотность, компоненты вектора скорости, давление, статическая и колебательные температуры газа и время колебательной релаксации соответственно, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Параметры, входящие в уравнения системы (1), определяются следующим образом. Параметр $\gamma_{\text{vib}} = c_{\text{vib}}/(c_{\text{tr}} + c_{\text{rot}} + c_{\text{vib}})$ определяет долю внутренней энергии газа, приходящуюся на колебательные моды молекул, и в каком-то смысле характеризует степень неравновесности последних; $\mathrm{M} = U_0/\sqrt{\gamma R T_0}$ – число Маха, $\gamma = (c_{\text{tr}} + c_{\text{rot}} + R)/(c_{\text{tr}} + c_{\text{rot}})$ – показатель адиабаты, R – газовая постоянная и c_{tr}, c_{rot}, c_{vib} – удельные теплоемкости при постоянном объеме, определяющие соответственно энергоемкость поступательных, вращательных и колебательной мод молекул газа. Все определенные здесь теплоемкости предполагаются постоянными.

Система (1) описывает распространенную в аэродинамике ситуацию, когда характерные времена микроскопических процессов энергообмена между различными степенями свободы молекул газа оцениваются системой неравенств [2, 12]: $\tau_{\text{TT}} \sim \tau_{\text{RT}} \ll \tau_{\text{VV}} \ll \tau_{\text{VT}} \sim \tau_0$. Причем в этом случае поступательные и вращательные степени свободы молекул с малыми соизмеримыми временами релаксации $\tau_{\text{TT}} \sim \tau_{\text{RT}}$ на временах порядка характерного времени течения τ_0 образуют квазиравновесный термостат с температурой потока T. В подсистеме же колебательных уровней энергии по истечению времени τ_{VT} устанавливается квазиравновесное распределение с колебательной температурой T_{vib}. Обмен энергией между колебательной модой и квазиравновесными степенями свободы молекул газа описывается релаксационным уравнением Ландау – Теллера с характерным временем τ_{VT}.

Нижний предел $\gamma_{\text{vib}} = 0$ соответствует случаю невозбуждения колебательной моды молекул. С другой стороны, равнораспределение энергии по степеням свободы молекул не является здесь верхним пределом для параметра γ_{vib}, поскольку закон равнораспределения энергии неприменим в неравновесной ситуации, описываемой системой уравнений (1), когда разрыв между статической температурой потока T и колебательной температурой T_{vib} может быть достаточно велик. В [12] показано, что при $T = 300$ K неравновесная теплоемкость $c_{\mathrm{vib}} \approx 1{,}8R$. Используя равнораспределение энергии в состоянии термодинамического квазиравновесия по поступательным и вращательным модам молекул, получаем, что параметр $\gamma_{\mathrm{vib}} \approx 0{,}42$. С ростом разрыва между температурами T_{vib} и T значение γ_{vib} увеличивается, приближаясь в пределе к единице, когда энергия колебательной моды молекул существенно превышает температуру квазиравновесного термостата, определяемого поступательными и вращательными степенями свободы молекул. Таким образом, параметр γ_{vib} может изменяться в пределах $0 \le \gamma_{\mathrm{vib}} \le 1$.

Мгновенные значения полей возмущенного течения представим как суммы стационарных величин несущего потока и малых пульсаций, зависящих от времени и координат:

$$u_x = U_S(y) + \hat{u}_x,\;\; u_y = \hat{u}_y,\;\; \rho = \rho_S(y) + \hat{\rho},$$

$$T = T_S(y) + \hat{T},\;\; T_{\mathrm{vib}} = T_S(y) + \hat{T}_{\mathrm{vib}},\;\; p = \frac{1}{\gamma \mathrm{M}^2} + \hat{p}. \tag{3}$$

Подстановка (3) в систему (1) и ее линеаризация относительно стационарного решения приводит к системе уравнений для малых возмущений:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + U_S \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x} + \rho_S \left(\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial y} \right) + \hat{u}_y \frac{\partial \rho_S}{\partial y} = 0,$$

$$\rho_S \left(\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial t} + U_S \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} + \hat{u}_y \frac{\partial U_S}{\partial y} \right) + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = 0,$$

$$\rho_S \left(\frac{\partial \hat{u}_y}{\partial t} + U_S \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} = 0, \tag{4}$$

$$\rho_S \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + U_S \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} + \hat{u}_y \frac{\partial T_S}{\partial y} \right) + (\gamma - 1) \left(\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_y}{\partial y} \right) - \frac{\gamma_{\mathrm{vib}}\, \rho_S\, (\hat{T}_{\mathrm{vib}} - \hat{T})}{\tau_{\mathrm{VT}}\, (1 - \gamma_{\mathrm{vib}})} = 0,$$

$$\frac{\partial \hat{T}_{\mathrm{vib}}}{\partial t} + U_S \frac{\partial \hat{T}_{\mathrm{vib}}}{\partial x} + \hat{u}_y \frac{\partial T_{\mathrm{vib},S}}{\partial y} + \frac{(\hat{T}_{\mathrm{vib}} - \hat{T})}{\tau_{\mathrm{VT}}} = 0,\;\; \gamma \mathrm{M}^2\, \hat{p} = \rho_S\, \hat{T} + \hat{\rho}\, T_S.$$

Принимается, что при $y = y_1$ и $y = y_2$ все возмущения обращаются в нуль и периодичны по продольной координате x.

Характеристики устойчивости

Периодические по x возмущения рассматривались в виде бегущих плоских волн

$$\boldsymbol{q}(x, y, t) = \boldsymbol{q}_0(y) \exp[\, i\alpha (x - ct)] ,$$

$$\boldsymbol{q}(x, y, t) = (\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{\rho}, \hat{T}, \hat{T}_{\mathrm{vib}}, \hat{p}),\;\; \boldsymbol{q}_0(y) = (u, \alpha v, \rho, \theta, \theta_{\mathrm{v}}, p), \tag{5}$$

где α – волновое число вдоль периодической переменной x, $c = c_r + ic_i$ – комплексная фазовая скорость, i – мнимая единица. Подставляя (5) в уравнения системы (4), получаем, что компоненты вектора амплитуд $\boldsymbol{q}_0(y)$ будут удовлетворять следующим уравнениям:

$$D\rho+\alpha\rho_S' v+\rho_S\sigma=0,\ \rho_S Du+\alpha\rho_S vU_S'+i\alpha p=0,\ \alpha\rho_S Dv+p'=0,$$

$$\rho_S D\theta+\alpha\rho_S\, vT_S'+(\gamma-1)\sigma-\frac{\gamma_{\text{vib}}\,\rho_S}{\tau_{\text{VT}}\,(1-\gamma_{\text{vib}})}(\theta_{\text{v}}-\theta)=0,$$

$$D\theta_{\text{v}}+\alpha vT_S'+\frac{(\theta_{\text{v}}-\theta)}{\tau_{\text{VT}}}=0,\ \gamma\text{M}^2 p=\rho_S\,\theta+\rho T_S, \tag{6}$$

где $D=i\alpha\left(U_S-c\right)$, $\sigma=\alpha\left(v'+iu\right)$, а штрихи у функций здесь и далее обозначают дифференцирование по переменной y. Система (6) вместе с однородными граничными условиями

$$u\big|_{y=y_1}=v\big|_{y=y_1}=\rho\big|_{y=y_1}=\theta\big|_{y=y_1}=\theta_{\text{v}}\big|_{y=y_1}=0,$$
$$u\big|_{y=y_2}=v\big|_{y=y_2}=\rho\big|_{y=y_2}=\theta\big|_{y=y_2}=\theta_{\text{v}}\big|_{y=y_2}=0$$

определяет спектральную задачу, в которой собственными значениями являются комплексные фазовые скорости возмущений $c=c_r+ic_i$, а число Маха M и вещественное волновое число α служат параметрами.

После исключения части зависимых переменных система (6) сводится к двум уравнениям для амплитудных функций возмущений поперечной скорости и давления:

$$v'-\frac{U_S'\,v}{W}-i\,p\left[\frac{T_S-\text{M}^{*2}W^2}{W}\right]=0,\quad p'+\frac{i\alpha^2\,W}{T_S}\,v=0, \tag{7}$$

$$v\big|_{y=y_1}=v\big|_{y=y_2}=0,\quad p\big|_{y=y_1}=p\big|_{y=y_2}=0,$$

где $$\text{M}^{*2}=\text{M}^2\,m^2,\ m^2=m_r^2+i\,m_i^2,$$

$$m_r^2=\frac{R_1(1+\gamma_{\text{v}}+\alpha\tau_{\text{VT}}\,c_i)+\Delta^2}{R_1^2+\Delta^2},\ m_i^2=-\frac{\gamma_{\text{v}}}{\gamma}\frac{(\gamma-1)\Delta}{R_1^2+\Delta^2},$$

$$\gamma_{\text{v}}=\gamma_{\text{vib}}/(1-\gamma_{\text{vib}}),\ R_1=1+\gamma_{\text{v}}/\gamma+\alpha\tau_{\text{VT}}\,c_i,\ \Delta=\alpha\,\tau_{\text{VT}}\,W_r,$$

$$W=W_r+iW_i,\ W_r=U_S-c_r,\ W_i=-c_i.$$

Из (7) путем дифференцирования получаются замкнутые уравнения для v и p.

В самосопряженной форме уравнение для амплитудной функции возмущения давления записывается следующим образом:

$$\left(\frac{T_S}{W^2}\,p'\right)'-\alpha^2\left(\frac{T_S}{W^2}-\text{M}^{*2}\right)p=0. \tag{8}$$

Для дальнейшего необходимо рассмотреть для (8) квадратичную форму, которая получается умножением уравнения на комплексно-сопряженную функцию $\overline{p}$ и интегрированием по y в интервале от y_1 до y_2 с граничными условиями (7). После интегрирования по частям квадратичная форма принимает вид

$$A\equiv\int\limits_{y_1}^{y_2}\left[\frac{T_S}{W^2}\,|\,p'\,|^2+\alpha^2\left(\frac{T_S}{W^2}-\text{M}^{*2}\right)|\,p\,|^2\right]dy=0. \tag{9}$$

Действительная часть квадратичной формы A

$$\mathrm{Re}(A) = A_r = \int_{y_1}^{y_2} \left[W_r^2 - c_i^2 \right] Q\,dy - K = 0,\ \ K = \alpha^2 \mathrm{M}^2 \int_{y_1}^{y_2} m_r^2 \,|\, p \,|^2\, dy > 0, \qquad (10)$$

а мнимая часть соответственно дается выражением

$$\mathrm{Im}(A) = A_i = \int_{y_1}^{y_2} W_r \left[\, 2 c_i Q + \alpha^2 \mathrm{M}^2 Q_1 \,|\, p \,|^2 \,\right] dy = 0, \qquad (11)$$

$$Q = \frac{T_S}{|\,W\,|^4}\left(|\,p'\,|^2 + \alpha^2\,|\,p\,|^2\right) > 0,\ \ Q_1 = \frac{\gamma_{\mathrm{v}}(\gamma - 1)}{\gamma}\frac{\alpha\tau_{\mathrm{VT}}}{(R_1^2 + \Delta^2)} > 0.$$

Для проверки первого условия Рэлея достаточно заметить, что выражение в квадратных скобках под интегралом в (11) неотрицательно. Поэтому для нарастающих возмущений при $c_i > 0$ мнимая часть $A_i = 0$ тогда и только тогда, когда разность $W_r = U_S - c_r$ меняет знак в поле течения. Следовательно, для развития неустойчивости в рассматриваемом течении термически неравновесного газа необходимо выполнение первого условия Рэлея в той же форме, что и для случаев однородной и стратифицированной несжимаемой жидкости [1, 13] и идеального газа [14]:

$$\min U_S \equiv u < c_r < U \equiv \max U_S. \qquad (12)$$

Из (12) следует, что для любого нарастающего невязкого возмущения комплексная фазовая скорость $c = c_r + ic_i$ должна лежать в верхней полуплоскости $c_i > 0$ в полуполосе, ширина которой определяется условием (12).

Однако более жесткое условие на фазовую скорость $c = c_r + ic_i$, известное как теорема о полукруге (Howards's semicircle theorem [1, 13]), здесь удается получить лишь при некоторых дополнительных условиях (см. условие (14)).

При доказательстве теоремы о полукруге в качестве исходного соотношения рассматривается неравенство [1, 13]

$$\int_{y_1}^{y_2} (U_S - u)(U_S - U) Q\,dy = I_2 - (U + u) I_1 + uU\, I_0 \le 0, \qquad (13)$$

где $$I_0 = \int_{y_1}^{y_2} Q\,dy,\ \ I_1 = \int_{y_1}^{y_2} U_S\, Q\,dy,\ \ I_2 = \int_{y_1}^{y_2} U_S^2\, Q\,dy.$$

Используя выражения (10) и (11), перепишем интегралы I_k (k= 1, 2) следующим образом:

$$I_1 = c_r I_0 - \frac{J}{2c_i},\ \ I_2 = 2c_r I_1 - (c_r^2 - c_i^2) I_0 + K,\ \ J = \alpha^2 \mathrm{M}^2 \int_{y_1}^{y_2} W_r\, Q_1 \,|\, p\,|^2\, dy.$$

Подстановка этих выражений в неравенство (13) позволяет преобразовать его к виду

$$\left[\left(c_r - \frac{u+U}{2}\right)^2 + c_i^2 - \frac{(U-u)^2}{4}\right] I_0 + \frac{J}{c_i}\left(\frac{u+U}{2} - c_r\right) + K \le 0.$$

При выполнении условия

$$J\left(\frac{u+U}{2}-c_r\right)+c_iK\ge 0 \tag{14}$$

имеет место неравенство

$$\left(c_r-\frac{u+U}{2}\right)^2+c_i^2\le\frac{(U-u)^2}{4},$$

и тогда справедлива теорема о полукруге [1, 13]: « Для любой неустойчивой моды при $c_i > 0$ значения комплексной фазовой скорости $c = c_r + ic_i$ лежат в верхней полуплоскости в полукруге радиуса $r_0=|U-u|/2$ с центром в точке $c_r=(U+u)/2$ ». Таким образом, условие (14) является достаточным для справедливости теоремы о полукруге.

Для идеального газа (т.е. когда γ_{vib}=0) получаем, что $J\to 0$ и для нарастающих возмущений при $c_i > 0$ из (10) следует неравенство $c_i K > 0$. В результате достаточное условие (14) выполняется и имеет место теорема о полукруге. В силу отмеченной непрерывности перехода к случаю идеального газа неравенство (14) и теорема о полукруге будут справедливы и при малых, но конечных уровнях возбуждения, пока незнакоопределенное слагаемое в неравенстве (14) не меняет знак всего выражения. В общем же случае для произвольного уровня возбуждения выполнение неравенства (14) надо проверять при конкретных значениях входящих в него параметров.

В качестве примера проведем проверку условия (14) для плоского сжимаемого течения Кутта колебательно-возбужденного молекулярного газа с параболическим профилем статической температуры потока:

$$U_S(y)=y,\ T_S(y)=1+\frac{(\gamma-1)\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{M}^2}{2}\left(1-y^2\right),\ 0\le y\le 1, \tag{15}$$

где Pr – число Прандтля несущего потока. Отметим, что подобные профиля несущего потока использовались в работах [15–17] при исследовании устойчивости сжимаемого течения Куэтта идеального газа по отношению к малым возмущениям гидродинамических переменных.

Из условия (12) следует, что первое условие Рэлея для (15) примет вид

$$0<c_r<1. \tag{16}$$

Тогда условие (14) следует рассмотреть отдельно для интервалов $0<c_r<1/2$ и $1/2\le c_r<1$. При $0<c_r<1/2$ из развернутой записи (14) следует оценка снизу:

$$J\left(\frac{1}{2}-c_r\right)+c_iK=\left(\frac{1}{2}-c_r\right)\alpha^2\mathrm{M}^2\int_0^1\left[\frac{\gamma_{\mathrm{v}}(\gamma-1)\,\alpha\,\tau_{\mathrm{VT}}}{\gamma(R_1^2+\Delta^2)}\right](y-c_r)\,|p|^2\,dy+$$

$$+\alpha^2\mathrm{M}^2c_i\int_0^1\left[\frac{R_1(1+\gamma_{\mathrm{v}}+\alpha\,\tau_{\mathrm{VT}}\,c_i)+\Delta^2}{(R_1^2+\Delta^2)}\right]|p|^2\,dy\ge$$

$$\ge\left(\frac{1}{2}-c_r\right)\alpha^4\mathrm{M}^2\tau_{\mathrm{VT}}^2\,c_i\int_0\frac{|p|^2}{(R_1^2+\Delta^2)}\left(y^2+2ry+q\right)dy,$$

где $$r=\frac{\gamma_{\mathrm{v}}(\gamma-1)}{2\gamma\,\alpha\,\tau_{\mathrm{VT}}}-\frac{1}{2},\quad q=\frac{1}{4}-\frac{\gamma_{\mathrm{v}}(\gamma-1)}{2\gamma\,\alpha\,\tau_{\mathrm{VT}}}+\frac{R_1c_i}{\alpha\,\tau_{\mathrm{VT}}},\quad \gamma_{\mathrm{v}}=\frac{\gamma_{\mathrm{vib}}}{1-\gamma_{\mathrm{vib}}}.$$

Из последнего интеграла видно, что неравенство (14) будет выполнено, если квадратный трехчлен в подынтегральном выражении не будет иметь действительных корней на интервале интегрирования $y \in [0, 1]$. В свою очередь, для этого достаточно, чтобы $y^2 + 2ry + q \geq 0$ на интервале $0 \leq y \leq 1$. Условие комплексной сопряженности (кратности) корней выражается неравенствами

$$\frac{\gamma_{\text{vib}}(\gamma-1)}{\gamma\,\alpha\,\tau_{\text{VT}}(1-\gamma_{\text{vib}})} < 1, \quad \frac{R_1}{\alpha\,\tau_{\text{VT}}} < 1. \tag{17}$$

После исключения из (17) комплекса $\alpha\tau_{\text{VT}}$ получается неравенство

$$\gamma_{\text{vib}} < \frac{\gamma}{2(1-\gamma)},$$

которое при рассматриваемых уровнях возбуждения $0 \leq \gamma_{\text{vib}} < 1$ всегда выполнено.

При $1/2 \leq c_r < 1$ для (14) оценка снизу получается в виде

$$J\left(\frac{1}{2}-c_r\right)+c_iK = \left(\frac{1}{2}-c_r\right)\alpha^2\text{M}^2\int_0^1\left[\frac{\gamma_{\text{v}}(\gamma-1)\,\alpha\,\tau_{\text{VT}}}{\gamma(R_1^2+\Delta^2)}\right](y-c_r)\,|\,p\,|^2\,dy +$$

$$+\alpha^2\text{M}^2c_i\int_0^1\left[\frac{R_1(1+\gamma_{\text{v}}+\alpha\,\tau_{\text{VT}}\,c_i)+\Delta^2}{(R_1^2+\Delta^2)}\right]|\,p\,|^2\,dy \geq$$

$$\geq \left(c_r-\frac{1}{2}\right)\alpha^4\text{M}^2\tau_{\text{VT}}^2\,c_i\int_0^1\frac{|\,p\,|^2}{(R_1^2+\Delta^2)}\left[(y-c_r)^2-(y-c_r)\frac{\gamma_{\text{v}}(\gamma-1)}{\gamma\,\alpha\,\tau_{\text{VT}}}+\frac{R_1c_i}{\alpha\,\tau_{\text{VT}}}\right]dy.$$

В данном случае для выполнения неравенства (14) достаточно, чтобы выделенный в подынтегральном выражении квадратный трехчлен не обращался в нуль на интервале интегрирования $y \in [0, 1]$. Анализ соответствующего условия комплексной сопряженности (кратности) его корней также приводит к неравенствам (17), которые не являются ограничительными для комплекса $\alpha\tau_{\text{VT}}$, так как при $\alpha\tau_{\text{VT}} \to 0$ неравенство (14) будет выполнено. Одновременно, как было отмечено, из (14) не следует ограничения на глубину возбуждения γ_{vib}.

Таким образом, получаем, что для плоского течения Кутта колебательно-возбужденного молекулярного газа достаточное условие (14) выполняется и имеет место теорема о полукруге.

Далее рассмотрим второе условие Рэлея (обобщенное условие точки перегиба [1, 13]). Будем исходить из уравнения для амплитуды возмущения продольной скорости v (7), которое в самосопряженной форме имеет вид

$$\left(\frac{v'}{\chi}\right)' - \left[\frac{\alpha^2}{T_S}+\frac{1}{W}\left(\frac{U_S'}{\chi}\right)'\right]v = 0, \quad v\big|_{y=0} = v\big|_{y=1} = 0, \tag{18}$$

где $\chi = T_S - \text{M}^2 m^2 W^2$. Введем новую переменную $v = H\sqrt{\chi}$. После ее подстановки в уравнение (18) последнее примет вид

$$H'' - \chi^{1/2}\left(\chi^{-1/2}\right)'' H - \left[\frac{\alpha^2}{T_S}+\frac{1}{W}\left(\frac{U_S'}{\chi}\right)'\right]\chi H = 0, \quad H\big|_{y=0} = H\big|_{y=1} = 0. \tag{19}$$

Помножим уравнение (19) на комплексно-сопряженную функцию $\overline{H}$ и полученное равенство проинтегрируем по y в интервале от y_1 до y_2 с учетом однородных граничных условий. В результате получим следующую квадратичную форму:

$$F=\int_{y_1}^{y_2}\left[|H'|^2+\left(\frac{\alpha^2\chi}{T_S}+\frac{\chi}{W}\left(\frac{U_S'}{\chi}\right)'+\chi^{1/2}\left(\chi^{-1/2}\right)''\right)|H|^2\right]dy=0. \qquad (20)$$

Представим $\chi^{\pm 1/2}$ в виде

$$\chi^{\pm 1/2}=|\chi|^{\pm 1/2}e^{\pm i\varphi}=|\chi|^{\pm 1/2}[\cos\varphi\pm i\sin\varphi],\ \ \varphi=\mathrm{arctg}\left(\frac{\chi_i}{\chi_r}\right), \qquad (21)$$

где
$$\chi_r=T_S-\mathrm{M}^2(m_r^2\varepsilon_r^2-m_i^2\varepsilon_i^2),\ \chi_i=-\mathrm{M}^2(m_r^2\varepsilon_i^2+m_i^2\varepsilon_r^2),$$
$$\varepsilon_r^2=W_r^2-W_i^2,\ \varepsilon_i^2=2W_rW_i.$$

Используя равенства (21), выделим из квадратичной формы (20) ее мнимую часть F_i. В результате получим, что F_i запишется следующим образом:

$$F_i=\int_{y_1}^{y_2}\left(\frac{\alpha^2\chi_i}{T_S}|W|^2+(\chi_iW_r-\chi_rW_i)K_r'-(\chi_rW_r+\chi_iW_i)K_i'+\right.$$
$$\left.+|\chi|^{1/2}|W|^2\left[\left(|\chi|^{-1/2}\cos\varphi\right)''\sin\varphi-\left(|\chi|^{-1/2}\sin\varphi\right)''\cos\varphi\right]\right)\frac{|H|^2}{|W|^2}dy=0, \qquad (22)$$

где
$$K_r=\frac{\chi_rU_S'}{|\chi|^2},\ \ K_i=\frac{\chi_iU_S'}{|\chi|^2}.$$

При $c_i\to 0$ (или $W_i\to 0$) можно считать, что

$$m_r^2\approx\tilde m_r^2=\frac{(1+\gamma_v)(1+\gamma_v/\gamma)+\alpha^2\tau_{\mathrm{VT}}^2W_r^2}{(1+\gamma_v/\gamma)^2+\alpha^2\tau_{\mathrm{VT}}^2W_r^2},\ \ m_i^2\approx\tilde m_i^2=-\frac{\gamma_v(\gamma-1)\alpha\tau_{\mathrm{VT}}W_r}{\gamma[(1+\gamma_v/\gamma)^2+\alpha^2\tau_{\mathrm{VT}}^2W_r^2]},$$

$$\chi_r\approx\tilde\chi_r=T_S-\tilde m_r^2\mathrm{M}^2W_r^2,\ \chi_i\approx\tilde\chi_i=-\tilde m_i^2\mathrm{M}^2W_r^2,\ \varphi\approx\tilde\varphi=\mathrm{arctg}\left(\tilde\chi_i/\tilde\chi_r\right),$$

$$K_r\approx\tilde K_r=\frac{\tilde\chi_rU_S'}{|\tilde\chi|^2},\ K_i\approx\tilde K_i=\frac{\tilde\chi_iU_S'}{|\tilde\chi|^2},\ \gamma_v=\frac{\gamma_{\mathrm{vib}}}{1-\gamma_{\mathrm{vib}}},$$

а квадратичную форму (22) записать в виде

$$F_i\approx\tilde F_i=\int_{y_1}^{y_2}\tilde f(y)\frac{|H|^2}{|W|^2}dy. \qquad (23)$$

Здесь функция $\tilde f(y)$ определяется следующим образом:

$$\tilde f(y)=\frac{\alpha^2W_r^2\tilde\chi_i}{T_S}+(\tilde\chi_iW_r-\tilde\chi_rW_i)\tilde K_r'-(\tilde\chi_rW_r+\tilde\chi_iW_i)\tilde K_i'+$$
$$+|\tilde\chi|^{1/2}W_r^2\left[\left(|\tilde\chi|^{-1/2}\cos\tilde\varphi\right)''\sin\tilde\varphi-\left(|\tilde\chi|^{-1/2}\sin\tilde\varphi\right)''\cos\tilde\varphi\right]. \qquad (24)$$

Поскольку всегда $|H|^2/|W|^2>0$, то квадратичная форма $\tilde{F}_i$ (23) равна нулю тогда и только тогда, когда найдутся такие точки (или точка) y_p, в которых функция $\tilde{f}$ (24) будет обращаться в нуль:

$$\tilde{f}(y)\Big|_{y=y_\text{p}}=0. \tag{25}$$

Условие (25) обобщает на случай колебательно-неравновесного газа условие Рэлея о необходимости существования точки перегиба на неустойчивом профиле скорости [1, 13].

В случае идеального газа (т.е. когда $\gamma_\text{vib}=0$ или $\gamma_v=0$) имеем $\tilde{m}_r^2=1$, $\tilde{m}_i^2=0$. Тогда можно считать, что $\tilde{\chi}_r\approx T_S-\text{M}^2W_r^2$, $\tilde{\chi}_i=0$, $\tilde{K}_r\approx U_S'/\tilde{\chi}_r$, $\tilde{K}_i=0$, $\tilde{\varphi}=0$. В результате из (23) и (24) получаем следующее равенство:

$$\int_{y_1}^{y_2}\left[\frac{U_S''\tilde{\chi}_r-U_S'\tilde{\chi}_r'}{\tilde{\chi}_r}\right]\frac{|H|^2}{|W|^2}dy=0,$$

которое иметь место только тогда, когда выполняется условие

$$\left[\frac{U_S''\tilde{\chi}_r-U_S'\tilde{\chi}_r'}{\tilde{\chi}_r}\right]\Bigg|_{y=y_\text{p}}=0. \tag{26}$$

Например, если рассматривается плоское течение Куэтта с параболическим профилем температуры (15), то из условия (26) следует, что обобщенная точка перегиба

$$y_\text{p}=c_r\left[1+\frac{(\gamma-1)\Pr}{2}\right]^{-1}$$

и с учетом первого условия Рэлея на c_r (16) лежит внутри интервала $0\le y\le 1$.

Заключение

В рамках модели двухтемпературной газовой динамики исследована задача линейной устойчивости плоскопараллельных сдвиговых течений термически неравновесного молекулярного газа. В результате было проведено обобщение условий Рэлея и теоремы о полукруге (теорема Ховарда) для таких течений [1, 13].

Показано, что для развития неустойчивости в сдвиговом течении термически неравновесного газа необходимо выполнение первого условия Рэлея (12) в той же форме, что для случаев однородной и стратифицированной несжимаемой жидкости [1, 13] и идеального газа [14]. Однако более жесткое условие на комплексную фазовую скорость, известное как теорема о полукруге [1, 13], удается получить лишь при некоторых дополнительных условиях, которые определяются неравенством (14). Рассмотрен пример проверки достаточного условия (14) теоремы Ховарда для плоского течения Кутта колебательно-возбужденного молекулярного газа с параболическим профилем статической температуры потока (15).

Для случай колебательно-неравновесного газа получено обобщенное условие о необходимости существования точки перегиба на неустойчивом профиле скорости (второе условие Рэлея), которое определяется равенствами (24), (25).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Drazin P.G.*, *Howard L.N.* Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid // Adv. Appl. Mech. N.Y.: Acad. Press, 1966. V. 9. P. 1–89.
2. *Григорьев Ю.Н.*, *Ершов И.В*. Устойчивость течений релаксирующих молекулярных газов. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2012. 230 с.
3. *Григорьев Ю.Н.*, *Ершов И.В*. Подавление вихревых возмущений релаксационным процессом в молекулярном газе // ПМТФ. 2003. Т. 44. № 4. С. 22–34.
4. *Григорьев Ю.Н.*, *Ершов И.В.*, *Ершова Е.Е.* Влияние колебательной релаксации на пульсационную активность в течениях возбужденного двухатомного газа // ПМТФ. 2004. Т. 45. № 3. С. 15–23.
5. *Ершов И.В.*, *Зырянов К.И.* Диссипация волн Кельвина – Гельмгольца в колебательно неравновесном двухатомном газе // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 1(17). С. 68–80 .
6. *Григорьев Ю.Н.*, *Ершов И.В*. Диссипация вихревых возмущений в колебательно неравновесном газе // Теплофиз. и аэромех. 2012. Т. 19. № 3. С. 291–300.
7. *Винниченко Н.А.*, *Никитин Н.В.*, *Уваров А.В.* Вихревая дорожка Кармана в колебательно-неравновесном газе // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 5. С. 107–114.
8. *Григорьев Ю.Н.*, *Ершов И.В*. Влияние объемной вязкости на неустойчивость Кельвина – Гельмгольца // ПМТФ. 2008. Т. 49. № 3. С. 73–84.
9. *Григорьев Ю.Н.*, *Ершов И.В*. Энергетическая оценка критических чисел Рейнольдса в сжимаемом течении Куэтта. Влияние объемной вязкости // ПМТФ. 2010. Т. 51. № 5. С. 59–67.
10. *Ершов И.В*. Энергетическая оценка критических чисел Рейнольдса в течении Куэтта колебательно-неравновесного молекулярного газа // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 2(18). С. 99–112 .
11. *Григорьев Ю.Н.*, *Ершов И.В*. Критические числа Рейнольдса в течении Куэтта колебательно возбужденного двухатомного газа. Энергетический подход // ПМТФ. 2012. Т. 53. № 4. С. 57–73.
12. *Нагнибеда Е. А.*, *Кустова Е.В.* Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. СПб.: Изд-во С.-Петербурского ун-та, 2003. 272 с.
13. *Дразин Ф.* Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит, 2005. 288 с.
14. *Blumen W.* Shear layer instability of an inviscid compressible fluid // J. Fluid Mech. 1970. V. 40. Part 4. P. 769–781.
15. *Duck P.W.*, *Erlebacher G.*, *Hussaini M.Y.* On the linear stability of compressible plane Couette flow // J. Fluid Mech. 1994. V. 258. P. 131–165.
16. *Hu S.*, *Zhong X.* Linear stability of viscous supersonic plane Couette flow // Phys. Fluids. 1998. Vol. 10. No. 3. P. 709–729.
17. *Malik M.*, *Dey J.*, *Alam M.* Linear stability, transient energy growth, and the role of viscosity stratification in compressible plane Couette flow // Physical Rev. E. 2008. V. 77. Issue 3. P. 036322-1–036322-15.

Статья поступила 20.05.2013 г.

Ershov I.V. THE LINEAR STABILITY OF AN INVISCID SHEAR FLOW OF A THERMALLY NON-EQUILIBRIUM MOLECULAR GAS. The problem of the linear stability of plane-parallel shear flows of a vibrationally excited molecular gas is investigated using a two-temperature gas dynamics model. The Rayleigh conditions and the semicircle theorem (Howard's semicircle theorem) are generalized to the case of a thermally non-equilibrium gas. It is shown that the instability in a shear flow is necessarily developed under the first Rayleigh condition stated in the same form as for a homogeneous and stratified incompressible liquid and ideal gas. However, a more rigid restriction (known as the semicircle theorem) on the complex phase speed can be obtained only under some additional conditions. In addition, a generalized condition about the necessity of existence of an inflection point on an unstable speed profile (the second Rayleigh condition) is obtained.

Keywords: linear stability theory, Rayleigh conditions, semicircle theorem (Howard's semicircle theorem), vibrational relaxation, equations of two-temperature gas dynamics.

REFERENCES

1. *Drazin P.G., Howard L.N.* Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid // Adv. Appl. Mech. N.Y.: Acad. Press, 1966. V. 9. P. 1–89.
2. *Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V.* Ustoychivost' techeniy relaksiruyushchikh molekulyarnykh gazov. Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, 2012. 230 p. (in Russian).
3. *Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V.* Podavlenie vikhrevykh vozmushcheniy relaksatsionnym protsessom v molekulyarnom gaze // PMTF. 2003. V. 44. No. 4. P. 22–34(in Russian).
4. *Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V., Ershova E.E.* Vliyanie kolebatel'noy relaksatsii na pul'satsionnuyu aktivnost' v techeniyakh vozbuzhdennogo dvukhatomnogo gaza // PMTF. 2004. V. 45. No. 3. P. 15–23 (in Russian).
5. *Ershov I.V., Zyryanov K.I.* Dissipatsiya voln Kel'vina – Gel'mgol'tsa v kolebatel'no neravnovesnom dvukhatomnom gaze // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. 2012. No. 1(17). P. 68–80 (in Russian).
6. *Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V.* Dissipatsiya vikhrevykh vozmushcheniy v kolebatel'no neravnovesnom gaze // Teplofiz. i aeromekh. 2012. V. 19. No. 3. P. 291–300 (in Russian).
7. *Vinnichenko N.A., Nikitin N.V., Uvarov A.V.* Vikhrevaya dorozhka Karmana v kolebatel'no-neravnovesnom gaze // Izv. RAN. MZhG. 2005. No. 5. P. 107–114 (in Russian).
8. *Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V.* Vliyanie ob"emnoy vyazkosti na neustoychivost' Kel'vina – Gel'mgol'tsa // PMTF. 2008. V. 49. No. 3. P. 73–84 (in Russian).
9. *Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V.* Energeticheskaya otsenka kriticheskikh chisel Reynol'dsa v szhimaemom techenii Kuetta. Vliyanie ob"emnoy vyazkosti // PMTF. 2010. V. 51. No. 5. P. 59–67 (in Russian).
10. *Ershov I.V.* Energeticheskaya otsenka kriticheskikh chisel Reynol'dsa v techenii Kuetta kolebatel'no-neravnovesnogo molekulyarnogo gaza // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. 2012. No. 2(18). P. 99–112 (in Russian).
11. *Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V.* Kriticheskie chisla Reynol'dsa v techenii Kuetta kolebatel'no vozbuzhdennogo dvukhatomnogo gaza. Energeticheskiy podkhod // PMTF. 2012. V. 53. No. 4. P. 57–73 (in Russian).
12. *Nagnibeda E.A., Kustova E.V.* Kineticheskaya teoriya protsessov perenosa i relaksatsii v potokakh neravnovesnykh reagiruyushchikh gazov. SPb.: Izd-vo S.-Peterburskogo un-ta, 2003. 272 p. (in Russian).
13. *Drazin F.* Vvedenie v teoriyu gidrodinamicheskoy ustoychivosti. Moscow: Fizmatlit, 2005. 288 p. (in Russian).
14. *Blumen W.* Shear layer instability of an inviscid compressible fluid // J. Fluid Mech. 1970. V. 40. Part 4. P. 769–781.
15. *Duck P.W., Erlebacher G., Hussaini M.Y.* On the linear stability of compressible plane Couette flow // J. Fluid Mech. 1994. V. 258. P. 131–165.
16. *Hu S., Zhong X.* Linear stability of viscous supersonic plane Couette flow // Phys. Fluids. 1998. Vol. 10. No. 3. P. 709–729.
17. *Malik M., Dey J., Alam M.* Linear stability, transient energy growth, and the role of viscosity stratification in compressible plane Couette flow // Physical Rev. E. 2008. V. 77. Issue 3. P. 036322-1–036322-15.

ERSHOV Igor Valer'evich
(Novosibirsk State Agrarian University, Novosibirsk, Russian Federation)

E-mail: i_ershov@ngs.ru