УДК 539.319

М.А. Осипенко

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ОБ ИЗГИБЕ ДВУХЛИСТОВОЙ РЕССОРЫ С ЛИСТАМИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Рассмотрена контактная задача об изгибе двухлистовой рессоры с односторонним контактом листов переменной толщины. Сформулирована строгая постановка задачи, установлена единственность решения и построены аналитические решения в некоторых частных случаях. Показано, что соприкосновение листов может происходить как в одной точке, так и на отрезке.

Ключевые слова: *двухлистовая рессора*, *балка*, *переменная толщина*, *изгиб*, *контактная задача*, *аналитическое решение.*

Контактная задача об изгибе двухлистовой рессоры заключается в отыскании контактных сил в системе двух консольных балок (листов) различной длины под заданной нагрузкой (рис. 1). В отсутствие этой нагрузки балки прямолинейны и плотно прилегают друг к другу. Сечения балок являются прямоугольниками одинаковой ширины, но различной переменной толщины. Под нагрузкой балки испытывают слабый совместный изгиб с возможным отставанием. Трение между балками отсутствует; изгиб каждой балки описывается моделью Бернулли – Эйлера [1]. Строгая постановка рассматриваемой контактной задачи сформулирована в [2]; там же доказана единственность решения. Аналитическое решение задачи имеется для следующих частных случаев: 1) постоянные толщины [2, 3]; 2) отношение переменных толщин меньшей и большей балок – неубывающая функция, а нагрузка – одна сила, сосредоточенная на краю большей балки [4]; 3) длины балок одинаковы, а переменные толщины и нагрузка таковы, что балки соприкасаются по всей длине [4]. Заметим, что в «технической» теории листовых рессор [5–7] решение для случая (1) известно только для нагрузки в виде силы, сосредоточенной на краю большего листа, а решения для случаев (2) и (3) являются неизвестными.

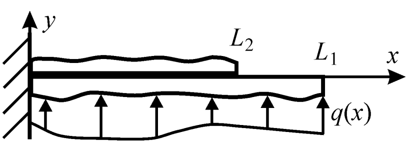

Рис. 1. Модель двухлистовой рессоры с листами переменной толщины

Целью настоящей работы является расширение и некоторое упорядочение набора частных случаев, для которых можно построить аналитическое решение. Этим построением одновременно доказывается существование решения.

Постановка контактной задачи

Балки испытывают слабый (линейный) изгиб в одной плоскости; $L_1 > L_2 > 0$ – длины балок. Согласно теории Бернулли – Эйлера [1], линии изгиба балок $y_1(x)$, $y_2(x)$ имеют вид

$$y_1(x) = \frac{12}{Ew}\int_0^x \int_0^s \frac{1}{h_1^3(t)}\left(\int_t^{L_1} (\tau - t) q(\tau)\, d\tau - \int_t^{L_2} (\tau - t) f(\tau)\, d\tau\right) dt\, ds\,, \qquad (1)$$

$$y_2(x) = \frac{12}{Ew}\int_0^x\int_0^s \frac{1}{h_2^3(t)}\int_t^{L_2}(\tau - t)f(\tau)\,d\tau\,dt\,ds\,, \tag{2}$$

где E – модуль Юнга; w – ширина сечения; $h_1(x) > 0$, $h_2(x) > 0$ – переменные толщины сечений (геометрически – при определении функций $y_1(x)$, $y_2(x)$ – толщины считаются равными нулю); $q(x)$ – заданная нагрузка; $f(x)$ – плотность сил взаимодействия балок. Задача заключается в отыскании $f(x)$. Будем считать, что эта функция имеет вид

$$p(x) + \sum\nolimits_i P_i\delta(x - x_i)\,, \tag{3}$$

где $p(x) \ge 0$ – кусочно-непрерывна, непрерывна слева при $0 < x \le L_2$ и непрерывна справа при $x = 0$; $P_i \ge 0$; $x_i > 0$ (все x_i различны); сумма конечна; δ – дельта-функция Дирака. Обозначим $r(x) = y_2(x) - y_1(x)$ (расстояние между балками). Из (1), (2) следует, что

$$r(x) = \int_0^x\int_0^s a(t)\left(\int_t^{L_2}(\tau - t)f(\tau)\,d\tau - k(t)\right)dt\,ds\,, \tag{4}$$

где $$a(x) = \frac{12}{Ew}\left(\frac{1}{h_1^3(x)} + \frac{1}{h_2^3(x)}\right),\ k(x) = \frac{1}{1 + h_1^3(x)\big/h_2^3(x)}\int_x^{L_1}(s - x)q(s)ds\,.$$

Будем считать, что $q(x) \ge 0$ непрерывна при $0 \le x \le L_1$, а $h_1(x)$ и $h_2(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы при $0 \le x \le L_2$; тогда $k(x) \ge 0$ дважды непрерывно дифференцируема при $0 \le x \le L_2$. Условие контакта балок состоит, помимо неотрицательности плотности сил взаимодействия, в том, что расстояние между балками неотрицательно, а в тех точках, где плотность сил взаимодействия положительна, – равно нулю. Окончательно приходим к следующей математической постановке задачи.

Задача. Найти функцию $f(x)$ вида (3), такую, что при $0 \le x \le L_2$

$$r(x)\begin{cases} = 0 & (f(x) > 0), \\ \ge 0 & (f(x) = 0), \end{cases} \tag{5}$$

где $r(x)$ выражается формулой (4), в которой $a(x) > 0$ непрерывна при $0 \le x \le L_2$, $k(x) \ge 0$ дважды непрерывно дифференцируема при $0 \le x \le L_2$.

Утверждение 1. Поставленная задача может иметь только одно решение.

Доказательство проведено в [2] (с использованием несколько иного представления функций (1), (2)).

Аналитическое решение задачи в некоторых частных случаях

Утверждение 2. Если $k''(x) < 0$ при $0 \le x \le L_2$, то решение поставленной задачи имеет вид

$$f(x) = F\delta(x - L_2) \tag{6}$$

(соприкосновение в одной точке, рис. 2, *а*; здесь и далее соприкосновение в точке защемления не упоминается), где

$$F = \int_0^{L_2}(L_2 - x)a(x)k(x)dx\bigg/\int_0^{L_2}(L_2 - x)^2 a(x)dx\,. \tag{7}$$

Доказательство. Очевидно, что $f(x)$ имеет вид (3). Подставляя (6) в (4) и учитывая (7), найдем, что $r(L_2) = 0$, а при $0 \le x < L_2$

$$r(x) = \int_0^x \int_0^s a(t)(L_2 - t)\big(F - b(t)\big)\,dt\,ds\,, \tag{8}$$

где
$$b(x) = k(x)\big/(L_2 - x)\,,\ b'(x) = c(x)\big/(L_2 - x)^2\,,$$

$$c(x) = k(x) + k'(x)(L_2 - x)\,,\ c'(x) = k''(x)(L_2 - x)\,.$$

Так как $c'(x) < 0$ при $0 \le x < L_2$ и $c(L_2) = k(L_2) \ge 0$, то $c(x) > 0$; следовательно, $b(x)$ возрастает при $0 \le x < L_2$. Тогда из (8) следует, что $F \ge b(0)$ (иначе $r(L_2) < 0$). Так как $b(L_2 - 0) = +\infty$ (из неравенства $k''(x) < 0$ следует, что $k(L_2) > 0$), то существует $0 \le t_* < L_2$, такое, что $F - b(t) \ge 0$ при $0 \le t \le t_*$ и $F - b(t) \le 0$ при $t_* \le t < L_2$. Отсюда, с учетом (8) и равенства $r(L_2) = 0$, нетрудно получить, что существует $0 \le x_* \le L_2$ такое, что $r(x)$ не убывает при $0 \le x \le x_*$ и не возрастает при $x_* \le x \le L_2$. Тогда из равенств $r(0) = 0$, $r(L_2) = 0$ вытекает неравенство $r(x) \ge 0$ при $0 \le x \le L_2$. Далее, $f(x)$ может быть положительна только при $x = L_2$, а $r(L_2) = 0$; таким образом, (5) выполнено.

Утверждение 3. Если $k''(x) \ge 0$ при $0 \le x \le L_2$ и $k(L_2) = 0$, то решение поставленной задачи имеет вид

$$f(x) = k''(x) \tag{9}$$

(соприкосновение по всему отрезку $0 \le x \le L_2$, рис. 2 b).

Доказательство. Очевидно, что $f(x)$ имеет вид (3). Заметим, что если $k(L_2) = 0$, то $k'(L_2) = 0$. Тогда, подставляя (9) в (4), найдем, что $r(x) = 0$ при $0 \le x \le L_2$; таким образом, (5) выполнено.

Утверждение 4. Если $k''(x) \ge 0$ при $0 \le x \le L_2$ и $k(L_2) > 0$, то решение поставленной задачи имеет следующий вид:

a) Если $\Phi(0) \le 0$, то

$$f(x) = F\delta(x - L_2) \tag{10}$$

(соприкосновение в одной точке, рис. 2, *a*).

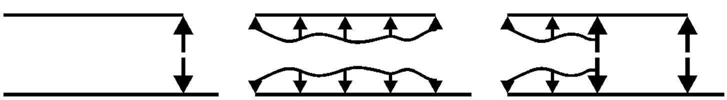

Рис. 2. Варианты сил взаимодействия листов

b) Если $\Phi(0) > 0$, то

$$f(x) = b(\lambda)\delta(x - L_2) - \frac{c(\lambda)}{L_2 - \lambda}\delta(x - \lambda) + \begin{cases} k''(x) & (0 \le x \le \lambda), \\ 0 & (\lambda < x \le L_2) \end{cases} \tag{11}$$

(соприкосновение по части отрезка $0 \le x \le L_2$ и в точке; рис. 2, *c*), где

$$\Phi(\Lambda) = \int_\Lambda^{L_2} a(x)(L_2 - x)^2\big(b(\Lambda) - b(x)\big)\,dx\,, \tag{12}$$

$$0 < \lambda < L_2 \ \text{– корень уравнения } \Phi(\Lambda) = 0\,. \tag{13}$$

Доказательство.

a) Очевидно, что $f(x)$ имеет вид (3). Подставляя (10) в (4), найдем для $r(x)$ выражение (8). Теперь $c'(x) \ge 0$ при $0 \le x < L_2$. Так как $c(L_2) = k(L_2) \ge 0$, то либо $b(x)$

неубывает при $0 \le x < L_2$, либо существует $0 \le x_{**} < L_2$ такое, что $b(x)$ невозрастает при $0 \le x \le x_{**}$ и неубывает при $x_{**} \le x < L_2$. Из (7, 12) и неравенства $\Phi(0) \le 0$ следует, что $F \ge b(0)$. Далее рассуждения аналогичны проведенным при доказательстве утверждения 2.

b) Существование корня $0 < \lambda < L_2$ следует из непрерывности $\Phi(\Lambda)$ при $0 \le \Lambda < L_2$ и значений

$$\Phi(0) > 0\,, \quad \lim_{\Lambda \to L_2 - 0} \Phi(\Lambda) = 0\,, \quad \lim_{\Lambda \to L_2 - 0} \Phi'(\Lambda) = 0\,,$$

$$\lim_{\Lambda \to L_2 - 0} \Phi''(\Lambda) = -a(L_2)k(L_2)\big/3 < 0\,.$$

Единственность корня следует из утверждения 1. При доказательстве пункта (а) было установлено, что (независимо от знака $\Phi(0)$) либо $b(x)$ неубывает при $0 \le x < L_2$, либо существует $0 \le x_{**} < L_2$ такое, что $b(x)$ невозрастает при $0 \le x \le x_{**}$ и неубывает при $x_{**} \le x < L_2$ (причем $b(L_2 - 0) = +\infty$). Из (12) следует, что в первом случае $\Phi(\lambda) < 0$, что противоречит (13). Поэтому имеет место второй случай; тогда из (12) вытекает, что $\lambda \le x_{**}$ (иначе $\Phi(\lambda) < 0$), следовательно, $b'(\lambda) \le 0$ и $c(\lambda) \le 0$. Тогда, учитывая неравенство $b(\lambda) > 0$, получаем, что (11) имеет вид (3). Подставляя (11) в (4), найдем

$$r(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le \lambda), \\ \int_\lambda^x \int_\lambda^s a(t)(L_2 - t)\big(b(\lambda) - b(t)\big)\,dt\,ds & (\lambda \le x < L_2); \end{cases} \tag{14}$$

с учетом (12, 13) также получим $r(L_2) = 0$. Из установленных выше свойств функции $b(x)$ следует, что существует $x_{**} \le t_{**} < L_2$ такое, что $b(\lambda) - b(t) \ge 0$ при $\lambda \le t \le t_{**}$ и $b(\lambda) - b(t) \le 0$ при $t_{**} \le t < L_2$. Отсюда, так же как при доказательстве утверждения 2, заключаем из (14), что $r(x) \ge 0$ при $\lambda \le x < L_2$ и, следовательно, при $0 \le x \le L_2$. Далее, $f(x)$ может быть положительна только при $0 \le x \le \lambda$ и при $x = L_2$, а $r(x) = 0$ для этих значений x; таким образом, (5) выполнено.

Некоторые замечания к полученным результатам и выводы

Если толщины листов постоянны, то утверждение 4 приводит к результатам [2, 3]. Теорема, эквивалентная утверждению 3, упомянута в [4] без доказательства. В [4] также без доказательства приведено решение контактной задачи для случая, в котором $h_2(x) / h_1(x)$ – неубывающая функция и $q(x) = P\delta(x - L_1)$. Этот случай утверждениями 2–4 не охватывается. Таким образом, в настоящей работе результаты [2–4] частично обобщены и частично дополнены.

Можно показать, что утверждения 1–4 остаются справедливыми и при заметном ослаблении требований на гладкость функции $k(x)$. Эту функцию можно считать лишь непрерывной и кусочно дважды непрерывно дифференцируемой, если понимать $k''(x)$ в “обобщенном смысле”: в точках излома $k(x)$ доопределять $k'(x)$ по непрерывности слева, а в точках разрыва $k'(x)$ (первого рода) добавлять к $k''(x)$ соответствующую δ-функцию.

Использованный в настоящей работе подход к решению контактной задачи для двух балок переменной толщины показывает, что структура решения определяется знаком функции $k''(x)$. Этот подход может быть применен как для дальнейшего исследования данной задачи (случаи, когда $k''(x)$ меняет знак), так и для решения близких контактных задач (например, для других вариантов закрепления концов балок).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 711 с.
2. *Osipenko M.A., Nyashin Yu.I., Rudakov R.N.* A contact problem in the theory of leaf spring bending // Int. J. Solids and Structures. 2003. No. 40. P. 3129–3136.
3. *Няшин Ю.И., Осипенко М.А., Рудаков Р.Н.* К теории изгиба листовой рессоры // Изв. РАН, МТТ. 2002. № 6. С. 134–143.
4. *Osipenko M.A., Nyashin Y.I., Rudakov R.N., et al.* Mathematical modelling of the foot prosthesis elastic element under bending // Russ. J. Biomechanics. 2001. V. 5. No. 2. P. 18–29.
5. *Глух Б.А., Бидерман В.Л.* Рессоры листовые / Машиностроение. Энциклопедический справочник. Т. 2. М.: Машгиз, 1948. С. 723–739.
6. *Пономарев С.Д. и др.* Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 1. М.: Машгиз, 1956. 884 с.
7. *Пархиловский И.Г.* Автомобильные листовые рессоры. М.: Машиностроение, 1978. 232 с.

Статья поступила 02.10.2013 г.

Osipenko M.A. THE CONTACT PROBLEM FOR BENDING OF A TWO-LEAF SPRING WITH VARIABLE THICKNESSES OF LEAVES. The unbonded contact problem for bending of a two-leaf spring under arbitrary loading is considered. The thickness of each leaf is variable. In the absence of loading, the leaves are right-lined and fit each other closely. The leaves are modeled as Bernoulli–Euler cantilever beams. The problem is reduced to finding the density of the leaves' interaction forces. This density consists of a piecewise continuous part and concentrated forces. A rigorous problem statement is formulated, the uniqueness of solution is established, and analytical solutions of the problem for some special cases are constructed. It is established that the classification of particular cases is determined by the sign of some function that depends on the given loading and variable thicknesses of the leaves. It is shown that the leaves may contact at one point on the tip of the short leaf, over the whole short leaf, or over a part of the short leaf and at its tip.

Keywords: two-leaf spring, beam, variable thickness, bending, contact problem, analytical solution.

REFERENCES

1. *Rabotnov Yu.N.* Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela. Moscow: Nauka, 1988. 711 p. (in Russian).
2. *Osipenko M.A., Nyashin Yu.I., Rudakov R.N.* A contact problem in the theory of leaf spring bending // Int. J. Solids and Structures. 2003. No. 40. P. 3129–3136.
3. *Nyashin Yu.I., Osipenko M.A., Rudakov R.N.* K teorii izgiba listovoy ressory // Izv. RAN, MTT. 2002. No. 6. P. 134–143 (in Russian).
4. *Osipenko M.A., Nyashin Y.I., Rudakov R.N., et al.* Mathematical modelling of the foot prosthesis elastic element under bending // Russ. J. Biomechanics. 2001. V. 5. No. 2. P. 18–29.
5. *Glukh B.A., Biderman V.L.* Ressory listovye / Mashinostroenie. Entsiklopedicheskiy spravochnik. V. 2. Moscow: Mashgiz, 1948. P. 723–739 (in Russian).
6. *Ponomarev S.D., et al.* Raschety na prochnost' v mashinostroenii. V. 1. Moscow: Mashgiz, 1956. 884 p. (in Russian).
7. *Parkhilovskiy I.G.* Avtomobil'nye listovye ressory. Moscow: Mashinostroenie, 1978. 232 p. (in Russian).

OSIPENKO Michael Anatol'evich
(Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation)
E-mail: oma@theormech.pstu.ac.ru