

**В Е С Т Н И К
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2023

№ 83

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

**РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), И.А. Колесников (отв. секретарь по разделу «Математика»), А.Д. Сидоров (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, В.Г. Бутов, И.М. Васенин, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, Е.Л. Лобода, Г.О. Рябова, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Е. А. Тимошенко, М.А. Шеремет, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Ivan A. Kolesnikov (Executive Editor of the Mathematics Section), Aleksey D. Sidorov (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenchikov, Vladimir G. Butov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Egor L. Loboda, Galina O. Ryabova, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Egor A. Timoshenko, Mikhail A. Sheremet, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://journals.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Галанова Н.Ю. Сечения поля частных одного кольца формальных степенных рядов	5
Зенков А.В. Представления и декартовы произведения m -групп	17
Иванов А.В. О емкостной размерности подмножеств метрического компакта	24
Иванов Д.Ю. Об аппроксимации нормальной производной теплового потенциала простого слоя вблизи границы двумерной области	31
Павлов Е.А., Фурменко А.И. Об ограниченности интегрального оператора свертки в паре классических лебеговых пространств L_p и L_r	52

МЕХАНИКА

Богачева В.Э., Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Маркин А.А. К нахождению предела упругости адгезионного слоя при его нормальном разрыве	59
Евсеев Н.С., Жуков И.А., Бельчиков И.А. Исследование аэродинамики и процесса фракционного разделения мелкодисперсных частиц в сепарационной камере	74
Зув Ю.В. Влияние фазовых превращений на параметры турбулентных неизотермических газокапельных струй	86
Козин В.М. Влияние формы поперечной нагрузки на напряженно- деформированное состояние ледяного покрова	102
Ландик Л.В., Пестренин В.М., Пестренина И.В. Представительный объем и эффективные термоупругие материальные параметры композиций с периодической структурой	111
Марченко Е.С., Чайковская Т.В. Исследование напряженно-деформированного состояния губчатой костной ткани при одноосном сжатии	127
Попов И.П. Стабилизированный ротатор и основы его теории	143
Рябова Г.О. Влияние формы метеороидов на их динамику: радиационное давление и эффект Пойнтинга–Робертсона	151
Сафаров И.И., Тешаев М.Х. Нестационарные движения сферических оболочек в вязкоупругой среде	166

CONTENTS

MATHEMATICS

Galanova N.Yu. On cuts of the quotient field of a ring of formal power series	5
Zenkov A.V. Presentations and Cartesian product of m -groups	17
Ivanov A.V. On the box dimension of subsets of a metric compact space	24
Ivanov D.Yu. On approximation of the normal derivative of the single layer heat potential near the boundary of a two-dimensional domain	31
Pavlov E.A., Furmenko A.I. On the boundedness of the integral convolution operator in a pair of classical Lebesgue spaces L_p and L_r	52

MECHANICS

Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. On determining the elastic limit of an adhesive layer in the opening mode of loading	59
Evseev N.S., Zhukov I.A., Bel'chikov I.A. A Study of aerodynamics and fractional separation of fine particles in a separation chamber	74
Zuev Yu.V. Effect of phase changes on parameters of turbulent non-isothermal gas-drop jets	86
Kozin V.M. Effect of the transverse load shape on the stress-strain state of the ice cover	102
Landik L.V., Pestrenin V.M., Pestrenina I.V. A representative volume element and effective thermoelastic material parameters of compositions with periodic structure	111
Marchenko E.S., Chaykovskaya T.V. A study of the stress-strain state of cancellous bone tissue under uniaxial compression	127
Popov I.P. Stabilized rotator and foundations of its theory	143
Ryabova G.O. Influence of the shape of meteoroids on their dynamics: radiation pressure and the Poynting-Robertson effect	151
Safarov I.I., Teshaev M.Kh. Unsteady Motions of Spherical Shells in a Viscoelastic Medium	166

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 512.623.23

MSC: 13J05; 12J15

doi: 10.17223/19988621/83/1

Сечения поля частных одного кольца формальных степенных рядов

Наталья Юрьевна Галанова

Томский государственный университет, Томск, Россия, galanova@math.tsu.ru

Аннотация. При исследованиях, связанных с классификацией вещественно замкнутых полей, существенно используются поля формальных степенных рядов с мультипликативной делимой группой архимедовых классов. Рассмотрим линейно упорядоченную абелеву делимую группу $G = G(L, \mathbf{Q})$, которая состоит из слов с образующими из линейно упорядоченного множества L , подобного ординалу ω_1 , и рациональными показателями. В статье рассматриваются свойства сечений подполей поля ограниченных формальных степенных рядов $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$. Для всех $\xi_i \in L$ положим $t_i = \xi_i^{-1}$. Рассмотрим бесконечную строго убывающую последовательность $\{t_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, где $\Gamma \subseteq \omega_1 \setminus \{1\}$ есть произвольное бесконечное множество. Ряды вида $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma \cdot t_\gamma \in \mathbf{R}[[G]]$, где $r_\gamma \neq 0$ для всех $\gamma \in \Gamma$, т.е. $\text{supp}(x) = \{t_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$, назовем *рядами вида (*)*. Доказывается, что ряды вида (*) при $r_\gamma > 0$ для всех $\gamma \in \Gamma$ порождают в поле $q\mathbf{R}[[G, \aleph_0]] = K$ симметричные нефундаментальные сечения конфинальности $(\aleph_0, \aleph_0)$, в вещественном замыкании $\overline{q\mathbf{R}[[G, \aleph_0]]} = \overline{K}$ ряды (*) порождают симметричные сечения. Пусть H – наименьшее по включению вещественно замкнутое подполе поля $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$, содержащее $\overline{K}$ и все усечения ряда $x_{\omega_1} = \sum_{\gamma \in \omega_1} 1 \cdot t_\gamma$. Тогда $\overline{K} \neq H$ и элементы вещественного замыкания простого трансцендентного расширения $\overline{H}(x_{\omega_1})$, не принадлежащие H , порождают в поле H симметричные сечения типа $(\aleph_1, \aleph_1)$.

Ключевые слова: делимая линейно упорядоченная абелева группа, вещественно замкнутое поле, поле ограниченных формальных степенных рядов, симметричное сечение, конфинальность сечения, фундаментальное сечение, поле частных

Для цитирования: Галанова Н.Ю. Сечения поля частных одного кольца формальных степенных рядов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 5–16. doi: 10.17223/19988621/83/1

On cuts of the quotient field of a ring of formal power series

Nataliya Yu. Galanova

Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, galanova@math.tsu.ru

Abstract. Formal (generalized) power series with a divisible group of Archimedean classes are significantly used in studies related to the classification of real closed fields. In this paper, we investigate subfields of a real closed field of bounded formal power series by means of the cut theory. The theory of cuts for ordered fields allows us to describe their properties and find out whether ordered fields are isomorphic. We use the terminology of G. Pestov, S. Shelah, and others. A cut (A, B) of an ordered field is called *symmetric* (or a *non-ball cut*) if for each $a \in A$ there exists such $a_1 \in A$ that $a_1 + (a_1 - a) \in B$ and for each $b \in B$ there exists $b_1 \in B$ such that $b_1 - (b - b_1) \in A$. A cut (A, B) of an ordered field F is called a *fundamental cut* (or a *Scott cut*) if $\forall \varepsilon \in F^+ \exists a \in A \exists b \in B b - a < \varepsilon$. Let $L = \{\xi_\gamma\}_{\gamma \in \omega_1}$ be a well-ordered set similar to the

ordinal ω_1 . We extend this set to a divisible totally ordered Abelian group $G = \{g = \xi_{i_1}^{q_{i_1}} \xi_{i_2}^{q_{i_2}} \dots \xi_{i_n}^{q_{i_n}} \mid \xi_{i_1} > \xi_{i_2} > \dots > \xi_{i_n}; \xi_{i_j} \in L \setminus \{\xi_1\}, q_{i_j} \in \mathbf{Q}, j = \overline{1, n}, n \in \mathbf{N}\} \cup \{\xi_1\}$, with a unit $1 = \xi_1$. Denote by $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$ the field of bounded formal power series $x = \sum_{g \in G} r_g g, r_g \in \mathbf{R}$ with $|\text{supp}(x)| < \aleph_1$. Let $\overline{K} = \overline{q\mathbf{R}[[G, \aleph_0]]} \subset \mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$ be the

smallest real closed field which has G as its group of Archimedean classes.

We show that some formal power series in the record of which there is an infinite number of generators of L realize symmetric non-fundamental cuts with cofinality $(\aleph_0, \aleph_0)$ in the field K , and this series realize symmetric cuts in the field $\overline{K}$. Let H be the smallest by inclusion real closed subfield of the field $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$ containing $\overline{K}$ and all truncations of the series $x_{\omega_1} = \sum_{\gamma \in \omega_1} 1 \cdot \xi_\gamma^{-1}$. We prove that $\overline{K} \neq H$ and the elements of the real

closure of a simple transcendental extension $\overline{H(x_{\omega_1})}$ not belonging to H generate symmetric $(\aleph_1, \aleph_1)$ cuts in the field H . Question: let $\langle G, \cdot, \leq \rangle$ be a totally ordered divisible Abelian group such that $|G| = cf(G) = \alpha \geq \aleph_0$; are the fields $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$ and $\overline{q\mathbf{R}[[G, \aleph_0]]}$ ordered isomorphic?

Keywords: divisible totally ordered Abelian group, real closed field, field of bounded formal (generalized) power series, symmetric cut (non-ball cut), cofinality of a cut, fundamental cut (Scott cut), quotient field

For citation: Galanova, N.Yu. (2023) On cuts of the quotient field of a ring of formal power series. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 5–16. doi: 10.17223/19988621/83/1

1. Вещественно замкнутые поля. Поля формальных степенных рядов.

Здесь $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbf{Q}$ – поле рациональных чисел, $\mathbf{R}$ – поле вещественных чисел. Далее все поля в данной статье линейно упорядоченные и неархимедовы. Поле F называется неархимедовым, если $\exists a \in F^+$ такое, что $\forall n \in \mathbf{N} \quad a > n$. Элементы $a, b \in F \setminus \{0\}$ упорядоченного поля F называются *архимедовски эквивалентными*, если существует такое натуральное число n , что $n|a| > |b|$ и $n|b| > |a|$. Фактор-группа G_F мультипликативной группы $F \setminus \{0\}$ упорядоченного поля F по отношению архимедовской эквивалентности называется *группой архимедовых классов* поля F [1]. Будем обозначать архимедов класс поля F с представителем $x \in F$ через $\hat{x}$.

Линейно упорядоченное поле F называется *вещественно замкнутым*, если каждое упорядоченное алгебраическое расширение поля F совпадает с F . Вещественная замкнутость поля F равносильна тому, что каждый положительный элемент в F является квадратом и каждый многочлен над F нечетной степени имеет корень в F . Для каждого упорядоченного поля F существует его максимальное упорядоченное алгебраическое расширение $\bar{F}$, называемое *вещественным замыканием* данного поля [2].

Вещественно замкнутые поля являются обобщением поля вещественных чисел $\mathbf{R}$. Вещественно замкнутым полем, например, является нестандартная вещественная прямая ${}^*\mathbf{R}$, которую можно реализовать как поле ограниченных формальных степенных рядов [3, 4].

В [3] приводится обзор исследований, связанных с подходами к классификации упорядоченных полей. При этом существенно используются поля формальных степенных рядов с мультипликативной делимой группой архимедовых классов, поскольку, как доказал И. Капланский, каждое вещественно замкнутое поле F вкладывается с сохранением порядка в поле формальных степенных рядов, построенных по группе архимедовых классов G_F данного поля.

Пусть $\langle G, \cdot, \leq \rangle$ – линейно упорядоченная абелева группа, β – кардинал, $\aleph_0 < \beta \leq |G|$. Через $\mathbf{R}[[G]]$ обозначается *поле формальных степенных рядов* $x = \sum_{g \in G} r_g g$, где $r_g \in \mathbf{R}$ и носитель ряда $\text{supp}(x) = \{g \in G \mid r_g \neq 0\}$ – вполне антиупорядоченное (каждое непустое подмножество имеет наибольший элемент) подмножество группы G . Полагаем $x > 0 \Leftrightarrow r_{g_0} > 0$, $g_0 = \max(\text{supp}(x))$ [1].

Замечание 1.1. Пусть $\langle G, \cdot, \leq \rangle$ есть произвольная линейно упорядоченная абелева группа. Если $x, y \in \mathbf{R}[[G]]$, то $\text{supp}(x \cdot y) \subseteq \{g \cdot h \mid g \in \text{supp}(x), h \in \text{supp}(y)\}$ и $\text{supp}(x + y) \subseteq \text{supp}(x) \cup \text{supp}(y)$.

А.И. Кокорин и В.М. Копытов в [5] доказывают следующее утверждение (в книге рассматриваются ряды с вполне упорядоченными носителями, мы же рассматриваем ряды с вполне антиупорядоченными носителями, формулировку факта приведем с изменениями знака неравенства, соответствующего данной статье):

Лемма 1.1. [5. С. 86] Пусть $y \in \mathbf{R}[[G]]$ – такой ряд, что $y = 1 + x$, где $x = \sum_{g \in G} r_g g$ и $r_g = 0$ при $g \geq 1$. Тогда ряд $z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$ принадлежит $\mathbf{R}[[G]]$ и является обратным для ряда y .

Через $\mathbf{R}[[G, \beta]]$ обозначается поле таких формальных степенных рядов x , что $|\text{supp}(x)| < \beta$. Это поле называется *полем ограниченных формальных степенных рядов* [3].

Группы архимедовых классов упорядоченных полей $\mathbf{R}[[G]]$ и $\mathbf{R}[[G, \beta]]$ изоморфны G . Будем отождествлять группы архимедовых классов полей $\mathbf{R}[[G]]$ и $\mathbf{R}[[G, \beta]]$ с группой G .

В дальнейшем, говоря об F как о подполе поля $\mathbf{R}[[G_F]]$, мы имеем в виду вложение $\varphi: F \rightarrow \mathbf{R}[[G_F]]$ такое, что каждый архимедов класс поля $\mathbf{R}[[G_F]]$ содержит элемент из $\varphi(F)$ [3. С. 49]. При изоморфном вложении вещественно замкнутого поля F в поле $\mathbf{R}[[G_F]]$ будем отождествлять группу архимедовых классов поля $\mathbf{R}[[G_F]]$ с группой G_F .

Мультипликативная группа G называется *делимой*, если для любого $g \in G$ и любого натурального n существует решение уравнения $h^n = g$. Известно (S. MacLane [3]), что если группа G делимая, то поля $\mathbf{R}[[G]]$, $\mathbf{R}[[G, \beta]]$ вещественно замкнуты.

2. О сечениях вещественно замкнутых полей.

В обзорной статье [6] приводятся различные классификации сечений упорядоченных структур. Из упомянутых в [6] работ будем использовать терминологию и теоремы из [7–11].

Пара непустых подмножеств A и B упорядоченного поля F называется *сечением* поля F , если $A < B$ (т.е. $\forall a \in A \forall b \in B \ a < b$) и $A \cup B = F$. В этом случае сечение будем обозначать (A, B) .

Сечение (A, B) упорядоченного поля F называется *симметричным* [7], если для каждого $a \in A$ существует такое $a_1 \in A$, что $a_1 + (a_1 - a) \in B$, и для каждого $b \in B$ существует такое $b_1 \in B$, что $b_1 - (b - b_1) \in A$. В этом случае множества A и B называют *длинными берегами сечения*.

Пусть A – упорядоченное множество, $X \subset A$. Говорят, что X *конфинально* (коинициально) A , если для каждого $x \in A$ существует $y \in X$ такое, что $x \leq y$ ($x \geq y$). Наименьшая мощность среди мощностей всех множеств, конфинальных (коинициальных) A , называется *конфинальностью* (коинициальностью) A и обозначается $cf(A)$ и $coi(A)$ соответственно [3].

Сечение (A, B) упорядоченного поля F будем называть сечением типа (α, β) , если $cf(A) = \alpha$, $coi(B) = \beta$; также используются термины «конфинальность сече-

ния», «тип конфинальности сечения» [6, 8, 11]. Если сечение симметрично, то $cf(A) = coi(B)$ [4].

Пусть F – упорядоченное расширение поля K . Будем говорить, что элемент $x \in F \setminus K$ порождает сечение (A, B) в упорядоченном поле K , если $A < x < B$ [7, 11].

Сечение (A, B) упорядоченного поля F называется *фундаментальным* (или *сечением Скотта*), если $\forall \varepsilon \in F^+ \exists a \in A \exists b \in B \ b - a < \varepsilon$ [8, 11]. Если сечение (A, B) неархимедова поля F фундаментально и не производится элементом самого поля, то (A, B) будет сечением типа $(cf(G_F), cf(G_F))$ [8, 11].

Теорема 2.1. [12. Утв. 2.2]. Пусть вещественно замкнутое поле F имеет группу архимедовых классов G_F . Сечение (A, B) поля F симметрично тогда и только тогда, когда существует элемент $x \in \mathbf{R}[[G_F]] \setminus F$ такой, что $A < x < B$.

Сечение упорядоченного множества (группы, поля), которое не производится никаким элементом данного множества (группы, поля), называется *собственным* (в [11] собственные сечения упорядоченного поля называются *дедекиндовыми* сечениями).

Замечание 2.1. Если (C, D) – сечение группы архимедовых классов G вещественно замкнутого неархимедова поля F и $A = F^- \cup \{0\} \cup \{x \in F^+ \mid \hat{x} \in C\}$, $B = F \setminus A = \{x \in F^+ \mid \hat{x} \in D\}$, то (A, B) будет несимметричным сечением поля F . При этом, если (C, D) – собственное сечение группы G , то $cf(C) = cf(A)$, $coi(D) = coi(B)$. Если множество C (множество D) имеет наибольший (соответственно наименьший) элемент, то сечение (C, D) имеет тип $(1, coi(D))$ (соответственно $(cf(C), 1)$) и, поскольку архимедов класс имеет конфинальность и коинициальность $\aleph_0$, соответствующее сечение (A, B) будет иметь тип $(\aleph_0, coi(D))$ (соответственно $(cf(C), \aleph_0)$).

3. Сечения полей формальных степенных рядов с группой архимедовых классов $G = G(L, \mathbf{Q})$

Далее группа G будет фиксирована.

Рассмотрим линейно упорядоченную абелеву делимую группу $G = G(L, \mathbf{Q})$, описанную автором в [9], которая состоит из слов с образующими из линейно упорядоченного множества L , подобного ординалу ω_1 , и рациональными показателями. Рассмотрим поле ограниченных формальных степенных рядов $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$, свойства которого изучены автором в [9], и продолжим исследование свойств сечений некоторых подполей этого поля.

Пусть $L = \{\xi_\gamma\}_{\gamma \in \omega_1}$ – вполне упорядоченное множество, подобное ординалу $\omega_1 = \{1, 2, 3, \dots, \omega_0, \dots\}$. Здесь $\xi_{\gamma_1} < \xi_{\gamma_2}$, если $\gamma_1 < \gamma_2$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \omega_1$. Продолжим это множество до делимой линейно упорядоченной абелевой группы G с единицей $1 = \xi_1$,

которая состоит из конечных слов с буквами из L и показателями из поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$, следующим образом:

$$G = \{g = \xi_{i_1}^{q_1} \xi_{i_2}^{q_2} \dots \xi_{i_n}^{q_n} \mid \xi_{i_1} > \xi_{i_2} > \dots > \xi_{i_n}; \quad \xi_{i_j} \in L \setminus \{\xi_1\}, q_{i_j} \in \mathbf{Q}, j = \overline{1, n}, n \in \mathbf{N}\} \cup \{\xi_1\},$$

при этом $1 = \xi_1^q = \xi_i^0, \forall q \in \mathbf{Q}, \forall \xi_i \in L$. Буквы в нулевой степени в слове не пишем; если все показатели букв в слове равны нулю, то слово полагаем равным единице.

Пусть $g = \xi_{i_1}^{q_1} \xi_{i_2}^{q_2} \dots \xi_{i_n}^{q_n} \in G$. Обозначим $\ell(g) = \{\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_n}\} \subset L$, т.е. это множество букв, из которых состоит слово g (если $g = \xi_1$, то считаем носитель $\ell(g)$ пустым). Если $\xi_i \in L$, то положим $q(g, \xi_i) = \begin{cases} q_i, & \xi_i \in \ell(g), \\ 0, & \xi_i \notin \ell(g). \end{cases}$

Далее, для произвольных $g_1, g_2 \in G$ зададим умножение $g_1 \cdot g_2 = \xi_{i_1}^{q_1} \xi_{i_2}^{q_2} \dots \xi_{i_n}^{q_n}$ так, что $\xi_{i_j} \in \ell(g_1) \cup \ell(g_2)$, $q_{i_j} = q(g_1, \xi_{i_j}) + q(g_2, \xi_{i_j})$. Например, $\xi_{i_1}^{q_1} \cdot \xi_{i_1}^{q_2} = \xi_{i_1}^{q_1+q_2}$; $\xi_{i_1}^{q_1} \cdot \xi_{i_2}^{q_2} = \xi_{i_1}^{q_1} \xi_{i_2}^{q_2}$ при $1 < \xi_{i_2} < \xi_{i_1}$.

Зададим множество положительных элементов группы. Полагаем $g = \xi_{i_1}^{q_1} \xi_{i_2}^{q_2} \dots \xi_{i_n}^{q_n} > 1$, если $q_{i_1} > 0$. Множество $P = \{g \in G \mid g \geq 1\}$ образует коммутативную полугруппу с единицей, причем $P \cup P^{-1} = G, P \cap P^{-1} = \{1\}$. Таким образом, P образует положительный конус и задаёт линейный порядок на группе G .

Замечание 3.1. Очевидно, что для любых $h, g \in G, n \in \mathbf{N}$ выполняется $\ell(h) = \ell(h^n) \subset L$ и $\ell(g \cdot h) \subseteq \ell(g) \cup \ell(h) \subset L$.

В [10] доказаны следующие свойства поля $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$ (для вычисления мощности принимается континуум-гипотеза).

Замечание 3.2. [10].

1. $|\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]| = cf \mathbf{R}[[G, \aleph_1]] = cf(G) = \aleph_1$.
2. Поле $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$ имеет $2^{\aleph_1}$ симметричных сечений.
3. Каждое симметричное сечение поля $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$ имеет тип конфинальности $(\aleph_1, \aleph_1)$.
4. Каждое симметричное сечение поля $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$ фундаментально.

Обозначения. Пусть $K = qf \mathbf{R}[[G, \aleph_0]]$ – поле частных кольца $\mathbf{R}[[G, \aleph_0]]$. Обозначим через $\overline{K}$ наименьшее по включению вещественно замкнутое подполе поля $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$, содержащее K . Заметим, что поле $\overline{K}$ будет также и наименьшим по включению вещественно замкнутым подполем поля $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$ с группой архимедовых классов G .

Определение. Будем говорить, что ряд $x = \sum_{g \in G} r_g g$ содержит в своей записи бесконечное (конечное) число образующих из L , если $\bigcup_{g \in \text{supp}(x)} \ell(g)$ есть бесконечное (конечное) подмножество L .

Лемма 3.1. Если ряд принадлежит полю K , то он содержит в своей записи лишь конечное число образующих из L .

Доказательство. Поле K состоит из элементов вида $\frac{a_1 g_1 + \dots + a_n g_n}{b_1 h_1 + \dots + b_m h_m}$, где

$g_i, h_j \in G$, $a_i, b_j \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, $m, n \in \mathbf{N}$.

а) Рассмотрим сначала элемент $x \in \mathbf{R}[[G, \aleph_0]]$, $x = a_1 g_1 + \dots + a_n g_n$. Множество элементов из L , которые ряд x содержит в своей записи, равно $\bigcup_{i=1}^n \ell(g_i)$; очевидно,

$$\left| \bigcup_{i=1}^n \ell(g_i) \right| < \infty.$$

б) Пусть теперь $z = \frac{x}{y} \in K$, $x, y \in \mathbf{R}[[G, \aleph_0]]$, $y \neq 0$, $y = \tilde{b}_1 \tilde{h}_1 + \dots + \tilde{b}_m \tilde{h}_m$, $\tilde{b}_j \in \mathbf{R}$,

$\tilde{h}_j \in G$, $j = \overline{1, m}$, $m \in \mathbf{N}$.

Пусть $\tilde{h} = \max\{\tilde{h}_j \mid j = \overline{1, m}\}$, обозначим через $\tilde{b}$ коэффициент при $\tilde{h}$. Вынесем из y слагаемое $\tilde{b}\tilde{h}$ за скобку, получим выражение вида $y = \tilde{b}\tilde{h} \cdot (1 + b_2 h_2 + \dots + b_m h_m)$, где $h_j < 1$, $j = \overline{2, m}$.

Тогда по лемме 1.1 $(1 + b_2 h_2 + \dots + b_m h_m)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (b_2 h_2 + \dots + b_m h_m)^k$.

Положим $x_1 = \frac{x}{\tilde{b}\tilde{h}}$, тогда

$$z = \frac{x}{y} = \frac{x_1}{1 + b_2 h_2 + \dots + b_m h_m} = x_1 \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (b_2 h_2 + \dots + b_m h_m)^k\right) \in \mathbf{R}[[G, \aleph_1]] \subset \mathbf{R}[[G]].$$

Множество $\bigcup_{g \in \text{supp}(x_1)} \ell(g)$ элементов, которые входят в запись x_1 , конечно по а).

Вспоминая замечание 3.1, получаем, что множество $\bigcup_{g \in \text{supp}(z)} \ell(g)$ элементов из L , которые ряд z содержит в своей записи, входит в множество $\bigcup_{i=2}^m \ell(h_i) \cup \bigcup_{g \in \text{supp}(x_1)} \ell(g)$; последнее объединение — это конечное подмножество L . $\square$

Следствие 3.1. Если ряд из $\mathbf{R}[[G]]$ содержит в своей записи бесконечно много элементов из L , то он не принадлежит полю K и, значит, порождает в K некоторое сечение.

Определение. Для всех $\xi_i \in L$ положим $t_i = \xi_i^{-1}$. Рассмотрим бесконечную строго убывающую последовательность $\{t_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, где $\Gamma \subseteq \omega_1 \setminus \{1\}$ есть произвольное бесконечное множество. Последовательность $\{t_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ является вполне антиупорядоченным подмножеством G . Ряды вида $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma \cdot t_\gamma \in \mathbf{R}[[G]]$, где $r_\gamma \neq 0$ для всех $\gamma \in \Gamma$, т.е. $\text{supp}(x) = \{t_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$, назовем *рядами вида (*)*.

Замечание 3.3. Ряды вида (*) содержат в своей записи бесконечно много образующих из L .

Определение. Усечением (начальным отрезком) ряда $x = \sum_{g \in G} r_g g$ называется ряд вида $\sum_{g \in \text{supp}(x), g > \tilde{g}} r_g g$ для некоторого $\tilde{g} \in \text{supp}(x)$, $\tilde{g} < \max \text{supp}(x)$.

Теорема 3.1. Пусть $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} r_\gamma \cdot t_\gamma \in \mathbf{R}[[G]]$ есть ряд вида (*), причем $r_\gamma > 0$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Тогда ряд x порождает в поле K симметричное нефундаментальное сечение конфинальности $(\aleph_0, \aleph_0)$.

Доказательство. Возьмем ряд $x = \sum_{\gamma \in \Gamma \subset \omega_1} r_\gamma \cdot t_\gamma = r_{\gamma_1} \cdot t_{\gamma_1} + r_{\gamma_2} \cdot t_{\gamma_2} + \dots$ вида (*), где $r_\gamma > 0$ для всех $\gamma \in \Gamma$. По следствию 3.1 и замечанию 3.3 ряд x не принадлежит полю K . Значит, x порождает в K некоторое сечение. Обозначим сечение поля K , порожденное элементом x , через (A, B) . Таким образом, $A < x < B$.

Пусть $X_<$ – это множество усечений ряда x , имеющих конечный носитель. Множество $X_<$ представляет собой счетную возрастающую последовательность усечений: $X_< = \{x_n\}_{n=2}^\infty$, вида

$$x_n = \sum_{\gamma \in \Gamma, t_\gamma > t_{\gamma_n}} r_\gamma \cdot t_\gamma = \sum_{i=1}^{n-1} r_{\gamma_i} \cdot t_{\gamma_i} = r_{\gamma_1} \cdot t_{\gamma_1} + \dots + r_{\gamma_{n-1}} \cdot t_{\gamma_{n-1}}, \quad r_{\gamma_i} > 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}.$$

Каждый ряд x_n – это конечная сумма, и поэтому $x_n \in K$. Зададим множества

$$A_1 = \{a \in K \mid \exists n \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \quad a \leq x_n\} \subset K,$$

$$B_1 = \{b \in K \mid \exists m \in \mathbf{N} \setminus \{1\}, \quad \tilde{x}_m = x_m + r_{\gamma_{m-1}} t_{\gamma_{m-1}} \leq b\} \subset K.$$

Заметим, что $\forall n, m \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \quad x_n < x_{n+1} < x < \tilde{x}_{m+1} < \tilde{x}_m$. Поэтому $A_1 < x < B_1$. Кроме того, между A_1, B_1 нет элементов из K . Действительно, если $\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\} \quad x_n < z < x_n + r_{\gamma_{n-1}} t_{\gamma_{n-1}}$, то $\text{supp } z \supset \bigcup_{n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}} \text{supp } x_n$, а значит, ряд z содержит в своей

записи бесконечное число образующих из L и не принадлежит полю K . Отсюда следует, что (A_1, B_1) – сечение K , совпадающее с (A, B) . Из определения A_1, B_1 , $cf(A_1) = coi(B_1) = \aleph_0$. Таким образом, сечение (A, B) имеет тип конфинальности $(\aleph_0, \aleph_0)$. Конфинальность собственного фундаментального сечения всегда равна для неархимедова поля конфинальности самого поля [8]. Так как $cf(G) \geq \aleph_0$, то группа архимедовых классов G , которая вкладывается в поле K , будет полю K конфинальна, поэтому $cf(G) = cf(K) = \aleph_1$ и в поле K собственное фундаментальное сечение будет иметь тип $(cf(G), cf(G)) = (\aleph_1, \aleph_1)$ [8, 11]. Поэтому сечение (A, B) нефундаментальное.

Докажем, что сечение (A, B) – симметричное. Для этого докажем, что оба берега – длинные.

По определению, нужно доказать, что для каждого $a \in A$ существует такое $a_1 \in A$, что $a_1 + (a_1 - a) \in B$, и для каждого $b \in B$ существует такое $b_1 \in B$, что $b_1 - (b - b_1) \in A$.

Пусть $a \in A$, тогда $\exists n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ $a \leq x_n$. Найдется $a_1 = x_m$ такое, что $x_n < x_m$. Тогда

$$\begin{aligned} a_1 + (a_1 - a) &\geq x_m + x_m - x_n = \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} r_{\gamma_i} \cdot t_{\gamma_i} + \sum_{i=n}^{m-1} r_{\gamma_i} \cdot t_{\gamma_i} = \sum_{i=1}^n r_{\gamma_i} \cdot t_{\gamma_i} + r_{\gamma_n} \cdot t_{\gamma_n} + \sum_{i=n+1}^{m-1} 2r_{\gamma_i} \cdot t_{\gamma_i} \geq \\ &\geq x_{n+1} + r_{\gamma_n} \cdot t_{\gamma_n} \in B. \end{aligned}$$

Значит, $a_1 + (a_1 - a) \in B$.

Пусть $b \in B$, тогда $\exists m \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, $\tilde{x}_m = x_m + r_{\gamma_{m-1}} \cdot t_{\gamma_{m-1}} \leq b$. Положим $b_1 = \tilde{x}_{m+1}$. При этом $x_m < x < \tilde{x}_{m+1} < \tilde{x}_m \leq b$. Имеем $b_1 - (b - b_1) \leq \tilde{x}_{m+1} - (\tilde{x}_m - \tilde{x}_{m+1})$. Докажем неравенство $\tilde{x}_{m+1} - (\tilde{x}_m - \tilde{x}_{m+1}) < x_m$.

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{m+1} - (\tilde{x}_m - \tilde{x}_{m+1}) &= \sum_{i=1}^m r_{\gamma_i} \cdot t_{\gamma_i} + r_{\gamma_m} \cdot t_{\gamma_m} - \sum_{i=1}^{m-1} r_{\gamma_i} \cdot t_{\gamma_i} - r_{\gamma_{m-1}} \cdot t_{\gamma_{m-1}} + \sum_{i=1}^m r_{\gamma_i} \cdot t_{\gamma_i} + r_{\gamma_m} \cdot t_{\gamma_m} = \\ &= (r_{\gamma_1} \cdot t_{\gamma_1} + \dots + r_{\gamma_{m-2}} \cdot t_{\gamma_{m-2}}) + 0 \cdot t_{\gamma_{m-1}} + 4r_{\gamma_m} \cdot t_{\gamma_m} < (r_{\gamma_1} \cdot t_{\gamma_1} + \dots + r_{\gamma_{m-2}} \cdot t_{\gamma_{m-2}}) + r_{\gamma_{m-1}} \cdot t_{\gamma_{m-1}} = x_m. \end{aligned}$$

Итак, $b_1 - (b - b_1) \leq \tilde{x}_{m+1} - (\tilde{x}_m - \tilde{x}_{m+1}) < x_m \in A$. Значит, $b_1 - (b - b_1) \in A$. $\square$

Теорема 3.2. Пусть ряд $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} r_{\gamma} \cdot t_{\gamma} \in \mathbf{R}[[G]]$ есть ряд вида (*). Тогда ряд x не

принадлежит полю $\overline{K}$ и производит в поле $\overline{K}$ симметричное сечение.

Доказательство. Пусть ряд $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} r_{\gamma} \cdot t_{\gamma} \in \mathbf{R}[[G]]$ есть ряд вида (*). По условию множество Γ бесконечное, поэтому, по следствию 3.1, $x \notin K$. Докажем, что $x \notin \overline{K}$.

Множество $\overline{K} \setminus K$ состоит из алгебраических над K элементов, т.е. из корней многочленов с коэффициентами из $K = qf\mathbf{R}[[G, \aleph_0]]$. Умножая такой многочлен на общий знаменатель его коэффициентов, получим многочлен с коэффициентами из $\mathbf{R}[[G, \aleph_0]]$.

Таким образом, достаточно доказать, что x не является корнем многочлена с коэффициентами из $\mathbf{R}[[G, \aleph_0]]$, т.е. $\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1} \neq \alpha_n x^n$ для любых $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ из $\mathbf{R}[[G, \aleph_0]]$, $\alpha_n \neq 0$ и любого фиксированного $n \in \mathbf{N}$.

По замечанию 1.1,

$$\text{supp}(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1}) \subset \text{supp}(\alpha_0) \cup \text{supp}(\alpha_1 x) \cup \dots \cup \text{supp}(\alpha_{n-1} x^{n-1}).$$

Покажем, что $\text{supp}(\alpha_n x^n) \neq \text{supp}(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1})$. Для этого докажем, что $\text{supp}(\alpha_n x^n)$ не содержится в $\text{supp}(\alpha_0) \cup \text{supp}(\alpha_1 x) \cup \dots \cup \text{supp}(\alpha_{n-1} x^{n-1})$.

Имеем

$$x^k = \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} r_{\gamma} \cdot t_{\gamma} \right)^k = \sum_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k \in \Gamma} r_{\gamma_1} \cdot \dots \cdot r_{\gamma_k} \cdot t_{\gamma_1} \dots t_{\gamma_k},$$

$$\text{supp}(x^k) = \{t_{\gamma_1} \dots t_{\gamma_k} \in G \mid \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k \in \Gamma\}, \quad k \in \mathbf{N}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Здесь под $t_{\gamma_1} \dots t_{\gamma_k}$ будем понимать слово группы G , равное произведению слов $t_{\gamma_1}, \dots, t_{\gamma_k}$ (для записи этого слова могут потребоваться приведение подобных множителей и, возможно, перестановка множителей).

Рассмотрим элемент $\alpha_n x^n$. Имеем $\{t_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset \text{supp}(x^n)$, ряд α_n принадлежит $\mathbf{R}[[G, \mathbf{N}_0]]$ и имеет вид $\alpha_n = a_1 h_1 + \dots + a_s h_s$, где $a_i \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $h_i \in G$, $i = \overline{1, s}$, для некоторого $s \in \mathbf{N}$.

Имеем

$$\begin{aligned} \alpha_n x^n &= (a_1 h_1 + \dots + a_s h_s) \cdot \sum_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in \Gamma} r_{\gamma_1} \cdot \dots \cdot r_{\gamma_n} \cdot t_{\gamma_1} \dots t_{\gamma_n} = \\ &= \sum_{i=1}^s \sum_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in \Gamma} a_i \cdot r_{\gamma_1} \cdot \dots \cdot r_{\gamma_n} \cdot (h_i t_{\gamma_1} \dots t_{\gamma_n}). \end{aligned}$$

Зададим множество $\Gamma_1 = \{\gamma \in \Gamma \mid \xi_\gamma \notin \bigcup_{i=1}^s \ell(h_i)\}$. Заметим, что Γ_1 – бесконечное множество.

Тогда $\alpha_n x^n$ можно переписать в виде $S + \sum_{i=1}^s \sum_{\gamma \in \Gamma_1} a_i \cdot r_\gamma \cdot (h_i t_\gamma^n)$, где двойная сумма содержит бесконечно много слагаемых и эти слагаемые не являются подобными ни между собой, ни с какими-то слагаемыми из S .

Имеем $\{h_i t_\gamma^n \mid i = \overline{1, s}, \gamma \in \Gamma_1\} \subset \text{supp}(\alpha_n x^n)$. Докажем, что $\{h_i t_\gamma^n \mid i = \overline{1, s}, \gamma \in \Gamma_1\}$ не содержится в $\text{supp}(\alpha_0) \cup \text{supp}(\alpha_1 x) \cup \dots \cup \text{supp}(\alpha_{n-1} x^{n-1})$.

Допустим противное, т.е.

$$\{h_i t_\gamma^n \mid i = \overline{1, s}, \gamma \in \Gamma_1\} \subset \text{supp}(\alpha_0) \cup \text{supp}(\alpha_1 x) \cup \dots \cup \text{supp}(\alpha_{n-1} x^{n-1}).$$

Так как носитель α_0 конечный, а множество Γ_1 – бесконечное, то найдутся $\text{supp}(\alpha_k x^k)$ с $1 \leq k < n$ и бесконечное множество $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$ такие, что бесконечное множество $\{h_i t_\gamma^n \mid \gamma \in \Gamma_2\}$ войдет в $\text{supp}(\alpha_k x^k)$. Тогда

$$\{h_i t_\gamma^n \mid \gamma \in \Gamma_2\} \subset \text{supp}(\alpha_k x^k) \subset \{g \cdot h \mid g \in \text{supp}(\alpha_k), h \in \text{supp}(x^k)\}.$$

Так как $\text{supp}(\alpha_k)$ конечный, а множество Γ_2 – бесконечное, найдутся бесконечное подмножество $\Gamma_3 \subset \Gamma_2$ и $g \in \text{supp}(\alpha_k)$ такие, что $\{h_i t_\gamma^n \mid \gamma \in \Gamma_3\} \subset \{g \cdot h \mid h \in \text{supp}(x^k)\}$. Тогда $\{h_i t_\gamma^n g^{-1} \mid \gamma \in \Gamma_3\} \subset \text{supp}(x^k)$.

Поскольку $\ell(g)$ конечно, а множество Γ_3 – бесконечное, найдется элемент $\gamma_0 \in \Gamma_3$ такой, что $\xi_{\gamma_0} \notin \ell(g)$. Но тогда для всякого слова $t_{\gamma_1} \dots t_{\gamma_k} \in \text{supp}(x^k)$ имеем $t_{\gamma_1} \dots t_{\gamma_k} \neq h_i t_{\gamma_0}^n g^{-1}$, поэтому элемент $h_i t_{\gamma_0}^n g^{-1}$ не может принадлежать $\text{supp}(x^k)$.

Поскольку ряд x не принадлежит $\overline{K}$, то по теореме 2.1 он производит в $\overline{K}$ симметричное сечение. $\square$

Замечание 3.4. В [10] доказано, что $cf(G) = \aleph_1$ и каждый отрезок $[a, b]$ группы G счетный, где $a, b \in G$.

Поэтому все несимметричные сечения поля $\overline{K}$, о которых говорится в замечании 2.1, определяемые через сечения группы G , имеют конфинальность $(\aleph_0, \aleph_0)$ и нефундаментальны. Действительно, сечения группы G могут иметь только один из следующих типов: $(\aleph_0, \aleph_0)$, $(1, \aleph_0)$ или $(\aleph_0, 1)$. При этом архимедов класс элемента поля имеет конфинальность и коинициальность $\aleph_0$. Значит, все указанные типы сечений группы G переходят в поле $\overline{K}$ в несимметричные сечения конфинальности $(\aleph_0, \aleph_0)$.

Обозначение. Пусть H – наименьшее по включению вещественно замкнутое подполе поля $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$, содержащее $\overline{K}$ и все усечения ряда $x_{\omega_1} = \sum_{\gamma \in \omega_1} 1 \cdot t_\gamma$.

Теорема 3.3.

- (1) $\overline{K} \neq H$.
- (2) Элементы вещественного замыкания простого трансцендентного расширения $\overline{H(x_{\omega_1})}$, не принадлежащие H , порождают в поле H симметричные сечения типа $(\aleph_1, \aleph_1)$.

Доказательство.

- (1) Имеем $x_{\omega_0} = \sum_{n \in \mathbb{N}} 1 \cdot t_n \in H \setminus \overline{K}$, поэтому $\overline{K} \neq H$.

- (2) По теореме 3.5. из [13]. $\square$

Вопросы. Будут ли поля $K = qf\mathbf{R}[[G, \aleph_0]]$ и $\overline{K} = \overline{qf\mathbf{R}[[G, \aleph_0]]}$ равны? Будут ли поля $\overline{K}$ и H упорядоченно изоморфны? Будут ли поля H и $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$ упорядоченно изоморфны? Пусть G – линейно упорядоченная делимая абелева группа такая, что $|G| = cf(G) = \alpha \geq \aleph_0$; будут ли поля $\mathbf{R}[[G, \aleph_1]]$ и $\overline{qf\mathbf{R}[[G, \aleph_0]]}$ упорядоченно изоморфны?

Список источников

1. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. М. : Мир, 1965.
2. Бурбаки Н. Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы : пер. с фр. М. : Мир, 1965.
3. Dales H.J., Woodin H. Super-real fields. Oxford : Clarendon Press, 1996.
4. Галанова Н.Ю. Симметрия сечений в полях формальных степенных рядов и нестандартной вещественной прямой // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 1. С. 26–36.
5. Кокорин А.И., Копытов В.М. Линейно упорядоченные группы. М. : Наука, 1972.
6. Kuhlmann F.-V. Selected methods for the classification of cuts and their applications // Proceedings of the 5th Joint Conferences on Algebra, Logic and Number Theory, June 24–29. 2018. Bedlewo. Banach Center Publications, 2020. V. 121. P. 85–106. doi: 10.4064/bc121-9
7. Пестов Г.Г. К теории сечений в упорядоченных полях // Сибирский математический журнал. 2001. Т. 42, № 6. С. 1213–1456.
8. Галанова Н.Ю., Пестов Г.Г. Симметрия сечений в полях формальных степенных рядов // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 2. С. 174–185.

9. Galanova N.Yu. Symmetric and asymmetric gaps in some fields of formal power series // *Serdica Math.* 2004. V. 30. P. 495–504.
10. Galanova N.Yu. An investigation of the fields of bounded formal power series by means of theory of cuts // *Acta Appl. Math.* 2005. V. 85. P. 121–126.
11. Shelah S. Quite complete real closed fields // *Israel Journal of Mathematics.* 2004. V. 142. P. 261–272.
12. Галанова Н.Ю. Линейно упорядоченные поля с симметричными сечениями // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2017. № 46. С. 14–20. doi: 10.17223/19988621/46/2
13. Галанова Н.Ю. О симметричных сечениях одного вещественно замкнутого поля // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2018. № 53. С. 5–15. doi: 10.17223/19988621/53/1

References

1. Fuchs L. (1963) *Partially Ordered Algebraic Systems.* Pergamon Press.
2. Bourbaki N. (2003) *Algebra II. Chapters 4–7.* Springer.
3. Dales H.J., Woodin W.H. (1996) *Super-Real Fields.* Oxford: Clarendon Press.
4. Galanova N.Yu. (2003) Symmetry of sections in fields of formal power series and a non-standard real line. *Algebra and Logic.* 42. pp. 14–19. DOI: 10.1023/A:1022672606591.
5. Kokorin A.I., Kopytov V. M. (1972) *Linearly Ordered Groups.* New York: Halstead Press.
6. Kuhlmann F.-V. (2020) Selected methods for the classification of cuts and their applications. *Proceedings of the 5th Joint Conferences on Algebra, Logic and Number Theory, June 24–29. 2018. Bedlewo. Banach Center Publications.* 121. pp. 85–106. DOI: 10.4064/bc121-9.
7. Pestov G.G. (2001) On the Theory of Cuts in Ordered Fields. *Siberian Mathematical Journal.* 42. pp. 1123–1131.
8. Galanova N.Yu., Pestov G.G. (2008) Symmetry of cuts in fields of formal power series. *Algebra and Logic.* 47(2). pp. 100–106. DOI: 10.1007/s10469-008-9001-5.
9. Galanova N.Yu. (2004) Symmetric and asymmetric gaps in some fields of formal power series. *Serdica Mathematical Journal.* 30. pp. 495–504.
10. Galanova N.Yu. (2005) An investigation of the fields of bounded formal power series by means of theory of cuts. *Acta Applicandae Mathematicae.* 85. pp. 121–126.
11. Shelah S. (2004) Quite complete real closed fields. *Israel Journal of Mathematics.* 142. pp. 261–272. <https://arxiv.org/pdf/math/0112212v1.pdf>.
12. Galanova N.Yu. (2017) Lineyno uporyadochennyye polya s simmetrichnyimi secheniyami [Totally ordered fields with symmetric cuts]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 46. pp. 14–20. DOI:10.17223/19988621/46/2.
13. Galanova N.Yu. (2018) O simmetrichnykh secheniyakh odnogo veshchestvenno zamknutogo polya [On symmetric cuts of a real-closed field]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 53. pp. 5–15. DOI: 10.17223/19988621/53/1.

Сведения об авторе:

Галанова Наталья Юрьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: galanova@math.tsu.ru

Information about the author:

Galanova Nataliya Yu. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation) E-mail: galanova@math.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 30.08.2021; принята к публикации 01.06.2023

The article was submitted 30.08.2021; accepted for publication 01.06.2023

Научная статья

УДК 512.545

MSC: 06F15; 08B15

doi: 10.17223/19988621/83/2

Представления и декартовы произведения m -групп

Алексей Владимирович Зенков*Алтайский государственный аграрный университет, Барнаул, Россия,
alexey_zenkov@yahoo.com*

Аннотация. Показано, что всякая выпуклая m -подгруппа декартова произведения m -групп, допускающая точное m -транзитивное представление, есть выпуклая m -подгруппа подходящей проекции декартова произведения m -групп. Отсюда следует, что декартово произведение m -групп не допускает точного m -транзитивного представления.

Ключевые слова: m -группа, декартово произведение m -групп, m -транзитивное представление

Для цитирования: Зенков А.В. Представления и декартовы произведения m -групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 17–23. doi: 10.17223/19988621/83/2

Original article

Presentations and Cartesian product of m -groups

Alexey V. Zenkov*Altai State Agricultural University, Barnaul, Russian Federation, alexey_zenkov@yahoo.com*

Abstract. An m -group is an algebraic system G of a signature $m = \langle e, ^{-1}, \cdot, \wedge, \vee, \varphi \rangle$, where $\langle G; e, ^{-1}, \cdot, \wedge, \vee \rangle$ is a lattice-ordered group (an ℓ -group for short) and the unary operation φ can be interpreted as a second-order automorphism of the group $\langle G; e, ^{-1}, \cdot \rangle$ and the anti-isomorphism of the lattice $\langle G; \wedge, \vee \rangle$, i.e., for any $x, y \in G$ the following relations are true:

$$(xy)\varphi = (x)\varphi(y)\varphi, ((x)\varphi)\varphi = (x)\varphi^2 = x, (x \vee y)\varphi = (x)\varphi \wedge (y)\varphi, (x \wedge y)\varphi = (x)\varphi \vee (y)\varphi.$$

We denote an m -group G with the marked automorphism φ as a pair (G, φ) .

The concept of an m -group as an algebraic system was explicitly formulated by M. Giraudet and J. Rachunek. The introduction of the concept of an m -group as an algebraic system allows us to apply the methods of universal algebra to the study of *mono-*

tonic permutations groups of ordered sets. In particular, it has become possible to write down the properties of such groups in the language of identities, which necessarily leads to the creation of a theory of varieties of m -groups.

We recall the basic concepts of the representation theory of m -groups by order-preserving permutations of ordered sets. Let Ω be a chain and a be a reversible second-order automorphism of Ω . That is, $((\omega)a)a = \omega$ and $\omega \leq \omega' \Leftrightarrow (\omega)a \geq (\omega')a$ for all $\omega, \omega' \in \Omega$. Denote by $\text{Aut}(\Omega)$ the group (under composition) of all order-preserving permutations of Ω . It is well known that with respect to the pointwise order $\text{Aut}(\Omega)$ is an ℓ -group. The ℓ -group $\text{Aut}(\Omega)$ can be turned into an m -group if the operation ϕ is defined on it by the rule $(g)\phi = aga$. By a *faithful* representation of an m -group (G, ϕ) by order-preserving permutations of Ω we mean the m -isomorphism $\eta: G \rightarrow \text{Aut}(\Omega)$. We write this as (G, Ω, a) .

The representation (G, Ω, a) of an m -group (G, ϕ) is *m -transitive* if for all $\omega, \omega' \in \Omega$ there is an element $g \in G$ such that $(\omega)ga^\varepsilon = \omega'$, where $\varepsilon = 0$ or $\varepsilon = 1$. Importance of m -transitive representations of m -groups in the study of varieties m -groups is explained by the fact that every subdirect m -indecomposable m -group has a faithful m -transitive representation. Therefore, every variety of m -groups is generated by its groups that admit an m -transitive representation.

On the other hand, if a variety of m -groups is generated by a certain class of m -groups, then every m -group of this variety according to Birkhoff's theorem is a m -homomorphic image of an m -subgroup of the Cartesian product of m -groups of this class. Therefore, it is necessary to know the description of Cartesian product subgroups that admit a faithful m -transitive representation.

We prove that every convex m -subgroup of a Cartesian product of m -groups that admits a faithful m -transitive representation is an m -subgroup of a suitable projection. As a consequence, we obtain that the Cartesian product of m -groups does not admit a faithful m -transitive representation.

Keywords: m -group, Cartesian product, m -transitive representation of an m -group

For citation: Zenkov, A.V. (2023) Presentations and Cartesian product of m -groups. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 17–23. doi: 10.17223/19988621/83/2

Введение

Напомним, что решеточно упорядоченная группа (ℓ -группа) – это алгебраическая система G сигнатуры $\ell = \langle e, {}^{-1}, \cdot, \wedge, \vee \rangle$, совмещающая в себе структуру группы и решеточного порядка, связанные естественными соотношениями:

$$x(u \vee v)y = xuy \vee xvy, x(u \wedge v)y = xuy \wedge xvy.$$

Замечание. В дальнейшем во всех решетках для обозначения операций объединения и пересечения используем символы $\vee, \wedge$ соответственно. Из контекста будет понятно, о какой решетке идет речь.

Пусть G – произвольная ℓ -группа. Подгруппа A ℓ -группы G будет ее *выпуклой ℓ -подгруппой*, если: 1) A замкнута относительно объединений и пересечений

($A - \ell$ -подгруппа); 2) A есть выпуклое множество, т.е. неравенство $a_1 \leq g \leq a_2$, где $a_1, a_2 \in A, g \in G$, влечет $g \in A$. Так как теоретико-множественное пересечение любого множества выпуклых ℓ -подгрупп ℓ -группы G есть ее выпуклая ℓ -подгруппа, то на множестве $L(G)$ всех выпуклых ℓ -подгрупп ℓ -группы G естественным образом можно определить структуру *решетки*, полагая для $A, B \in L(G)$ их (решеточное) пересечение $A \wedge B$ равным их теоретико-множественному пересечению, а объединение $A \vee B$ как теоретико-множественное пересечение всех выпуклых ℓ -подгрупп ℓ -группы G , содержащих A и B . Отметим, что решетка $L(G)$ *дистрибутивна* (см., напр.: [1. Гл. 3, § 1, т. 2]).

Согласно [2], m -группой называется алгебраическая система G сигнатуры $m = \langle e, ^{-1}, \cdot, \wedge, \vee, \varphi \rangle$ такая, что $\langle G; e, ^{-1}, \cdot, \wedge, \vee \rangle$ является ℓ -группой, а одно-местная операция φ есть автоморфизм 2-го порядка группы $\langle G; e, ^{-1}, \cdot \rangle$ и анти-изоморфизм решетки $\langle G; \wedge, \vee \rangle$, т.е. φ отображает взаимно однозначно G на себя, причем верны соотношения

$$(xy)\varphi = (x)\varphi(y)\varphi, ((x)\varphi)\varphi = (x)\varphi^2 = x, (x \vee y)\varphi = (x)\varphi \wedge (y)\varphi, (x \wedge y)\varphi = (x)\varphi \vee (y)\varphi.$$

В дальнейшем m -группу G с отмеченным автоморфизмом φ записываем как *пару* (G, φ) . Пусть (G, φ) есть m -группа и H – ее ℓ -подгруппа. Тогда H называется m -подгруппой m -группы (G, φ) , если она замкнута относительно действия φ . Выпуклая нормальная m -подгруппа K m -группы (G, φ) называется ее m -идеалом. Именно m -идеалы и только они являются ядрами m -гомоморфизмов m -групп.

Пусть Φ – некоторое множество тождеств сигнатуры $m = \langle e, ^{-1}, \cdot, \wedge, \vee, \varphi \rangle$. Стандартно многообразием m -групп (m -многообразием) с базисом тождеств Φ будем называть всякий класс m -групп X , состоящий только из тех m -групп, на которых истинны все тождества Φ . Множество M всех многообразий m -групп является частично упорядоченным относительно теоретико-множественного включения; более того, M можно рассматривать как *решетку*, если для m -многообразий X и Y определить их пересечение $X \wedge Y$ как теоретико-множественное пересечение, а объединение $X \vee Y$ – как наименьшее m -многообразие, содержащее как X , так и Y .

Изучение свойств m -многообразий, в частности изучение строения решетки M , базируется на следующей хорошо известной теореме Биркгофа (см., напр.: [3. Гл. 6, § 13, т. 1]):

Теорема 1.1. Для того чтобы непустой класс X алгебраических систем сигнатуры σ был многообразием, необходимо и достаточно выполнения следующих условий: 1) декартово произведение систем из X принадлежит X ; 2) всякая подсистема системы из X принадлежит X ; 3) любой гомоморфный образ системы из X принадлежит X .

Таким образом желательно иметь «хорошее» описание m -декартовых произведений, например на языке теории групп *монотонных* подстановок линейно упорядоченных множеств.

Более подробно. Пусть Ω – некоторое (бесконечное) линейно упорядоченное множество. Взаимно однозначное отображение f (подстановка f) множества Ω на себя называется *порядковой подстановкой*, если для любых точек $\alpha, \beta \in \Omega$ неравенство $\alpha < \beta$ влечет $(\alpha)f < (\beta)f$; подстановку f назовем *антипорядковой*, если $\alpha < \beta$ влечет $(\alpha)f > (\beta)f$. Подстановка называется *монотонной*, если она является порядковой или антипорядковой. Через $\text{Aut}(\Omega)$ и $\text{Mon}(\Omega)$ обозначим группы (относительно суперпозиции) всех порядковых и всех монотонных подстановок линейно упорядоченного множества Ω соответственно. Очевидно, что $\text{Aut}(\Omega) \subseteq \text{Mon}(\Omega)$. Хорошо известно, что относительно поточечного порядка $\text{Aut}(\Omega)$ является ℓ -группой. Элемент $a \in \text{Mon}(\Omega) \setminus \text{Aut}(\Omega)$ будем называть *реверсивным автоморфизмом 2-го порядка* Ω , если $a^2 = e$. Отметим, если $\text{Aut}(\Omega) \neq \text{Mon}(\Omega)$, то реверсивный автоморфизм 2-го порядка *всегда существует*. Теперь на $\text{Aut}(\Omega)$ можно определить структуру m -группы, если для $g \in \text{Aut}(\Omega)$ положить $(g)\varphi = aga$. Будем говорить, что m -группа (G, φ) допускает *точное* представление порядковыми подстановками линейно упорядоченного множества Ω , если найдется m -изоморфизм $\eta: G \rightarrow \text{Aut}(\Omega)$. Этот факт записываем в виде (G, Ω, a) . Отметим, что для m -групп имеет место следующая теорема о представлении [4]:

Теорема 1.2. Всякая m -группа (G, φ) допускает точное представление порядковыми подстановками подходящего линейно упорядоченного множества Ω .

Таким образом всякую m -группу можно рассматривать как некоторую подгруппу группы монотонных подстановок подходящего линейно упорядоченного множества. Еще раз отметим, что в дальнейшем рассматриваются только *точные* представления, и все понятия теории представлений (не обязательно точных) относятся именно к ним. При изучении m -многообразий особую роль играют представления, которые мы называем *m -транзитивными*. Итак, представление (G, Ω, a) будет *m -транзитивным*, если для любых $\alpha, \beta \in \Omega$ найдется $x \in G_*$, что $(\alpha)x = \beta$, где $G_* = \tilde{a} \delta. (G, a) \subseteq \text{Mon}(\Omega)$. Всякая m -группа, допускающая хотя бы одно такое представление, называется *m -транзитивной*.

Из общей теории алгебраических систем известно, что всякое многообразие порождается своими подпрямо неразложимыми системами. Стало быть, при изучении m -многообразий желательно иметь хорошее описание подпрямо m -неразложимых групп. Оказывается имеет место следующая теорема [5]:

Теорема 1.3. Всякая подпрямо m -неразложимая m -группа (G, φ) допускает точное m -транзитивное представление.

Мы докажем (Теорема 2.3), что всякая выпуклая m -подгруппа декартова произведения m -групп, допускающая точное m -транзитивное представление, есть выпуклая m -подгруппа подходящей проекции декартова произведения m -групп. Отсюда получаем, что декартово произведение m -групп не допускает точного m -транзитивного представления (Следствие 2.4). Таким образом, изучение декартовых произведений m -групп несводимо к рассмотрению (точных) m -транзитивных представлений в отличие от случая подпрямо m -неразложимых m -групп.

Здесь же отметим, что подобные вопросы рассматривались и для решеточно-упорядоченных групп (см., напр.: [1]).

Более подробную информацию по теории ℓ -групп можно найти в книгах [1, 6].

Основной результат

Для выпуклой ℓ -подгруппы V ℓ -группы G через $R(G;V)$ обозначим множество правых смежных классов G по V с частичным порядком $\leq$, определяемым по правилу: $Vx \leq Vy$ тогда и только тогда, когда найдется такой $v \in V$, что $vx \leq y$.

Если этот порядок окажется *линейным*, то V называют *спрямляющей*. Хорошо известно следующее:

Предложение 2.1 [1. Гл. 3, § 3, т. 1]. Выпуклая ℓ -подгруппа V ℓ -группы G будет спрямляющей тогда и только тогда, когда для любых положительных элементов $x, y \in G \setminus V$ их пересечение $x \wedge y \notin V$.

Для элемента $x \in G$ через $|x| = x \vee x^{-1}$ обозначим его модуль. Очевидно, что модуль любого элемента неотрицателен. Элементы $x, y \in G$ являются *ортogonalными*, если $|x| \wedge |y| = e$ (этот факт обозначаем $x \perp y$). Отметим, что ортогональные элементы перестановочны. Пусть V есть спрямляющая ℓ -подгруппа ℓ -группы G . Для произвольного элемента $x \in G \setminus V$ через $x^\perp = \{g \in G \mid x \perp g\}$ обозначим его поляр. Непосредственно из определения поляры и Предложения 2.1 следует, что поляр $x^\perp$ содержится в спрямляющей V . Спрямляющая ℓ -подгруппа V m -группы (G, φ) называется *представляющей*, если она не содержит неединичных m -идеалов. Следующее утверждение доказано в [5].

Предложение 2.2. m -группа (G, φ) допускает точное m -транзитивное представление тогда и только тогда, когда она содержит представляющую ℓ -подгруппу.

Для множества m -групп $\{(F_j, \varphi_j) \mid j \in J\}$, мощность которого $|J| > 1$, через

$$F = \prod_{j \in J} F_j$$

обозначим ℓ -декартово произведение ℓ -групп множества $\{F_j \mid j \in J\}$.

Элемент $f \in F$ записываем в виде: $f = (\dots f_i \dots f_j \dots f_k \dots)$. Теперь определим отображение $\varphi: F \rightarrow F$ по правилу

$$(\varphi f) = (\dots (f_i)\varphi_i \dots (f_j)\varphi_j \dots (f_k)\varphi_k \dots).$$

Ясно, что φ есть автоморфизм 2-го порядка группы $\langle F; e^{-1}, \cdot \rangle$ и антиизоморфизм решетки $\langle F; \wedge, \vee \rangle$. Стало быть, можно рассмотреть m -группу (F, φ) , которую мы и будем называть *декартовым произведением* (m -декартовым произведением) класса m -групп $\{(F_j, \varphi_j) \mid j \in J\}$. Для каждого $j \in J$ стандартным образом определяем j -проекцию $\hat{f}_j = (\dots e \dots f_j \dots e \dots)$ элемента $f \in F$. Тогда

$$\overline{\hat{f}}_j = \hat{f}_j^{-1} = (\dots f_i \dots e \dots f_k \dots).$$

Непосредственно из определения элементов $\hat{f}_j$ и

$\bar{f}_j$ вытекает, что эти элементы ортогональны и, конечно, $f = \hat{f}_j \bar{f}_j$. Далее, несложно заметить, что множество $\hat{F}_j = \{ \hat{f}_j \mid f \in F \}$ всех j -проекций и множество $\bar{F}_j = \{ \bar{f}_j \mid f \in F \}$ образуют m -идеалы m -группы (F, φ) , более того, $F = \hat{F}_j \vee \bar{F}_j$ для каждого $j \in J$.

Рассмотрим теперь произвольную (неединичную) выпуклую m -подгруппу (G, φ) m -декартова произведения (F, φ) и предположим, что она допускает точное m -транзитивное представление. В силу Предложения 2.2 в G найдется представляющая ℓ -подгруппа V . Тогда в ℓ -группе F найдется такая *спрямляющая* ℓ -подгруппа H , что

$$V = H \cap G. \quad (*)$$

Доказательство этого, на самом деле, ключевого равенства, можно найти в [6, Proposition 12.11].

Из свойств $\hat{F}_j$ и $\bar{F}_j$ следует, что при каждом $j \in J$ верно одно и только одно из следующих условий:

1) $\hat{F}_j \subseteq H$, и тогда $\bar{F}_j \not\subseteq H$;

2) $\bar{F}_j \subseteq H$, и тогда $\hat{F}_j \not\subseteq H$.

Предположим, что для всех $j \in J$ имеет место условие 1). Тогда, учитывая условие (*), получаем $V \cap \hat{F}_j = H \cap \hat{F}_j \cap G = \hat{F}_j \cap G = \hat{F}_j \wedge G$. Ясно, что $\hat{F}_j \wedge G$ является m -идеалом m -группы (G, φ) и $\hat{F}_j \wedge G \subseteq V$. Так как V есть представляющая, то $\hat{F}_j \wedge G = e$. Следовательно, так как G есть *выпуклая* ℓ -подгруппа ℓ -группы F , верно

$$G = G \wedge F = G \wedge (\hat{F}_j \vee \bar{F}_j) = (\hat{F}_j \wedge G) \vee (\bar{F}_j \wedge G) = \bar{F}_j \wedge G = \bar{F}_j \cap G.$$

Стало быть, для каждого $j \in J$ имеет место $G \subseteq \bar{F}_j$. Следовательно, $G \subseteq \bigcap_{j \in J} \bar{F}_j$. Но последнее включение невозможно, так как $\bigcap_{j \in J} \bar{F}_j = e$. Поэтому для некоторого $j \in J$ выполнено условие 2). Рассуждая, как и выше, приходим к выводу, что $G \subseteq \hat{F}_j$. Тем самым доказана

Теорема 2.3. Выпуклая m -группа (G, φ) m -декартова произведения (F, φ) , допускающая точное m -транзитивное представление, содержится в подходящей проекции $\hat{F}_j$ декартова произведения m -групп (F, φ) .

Следствие 2.4. m -декартово произведение (F, φ) не допускает точного m -транзитивного представления.

Доказательство. Действительно, существование такого представления означало бы в силу теоремы 2.3, что $F \subseteq \hat{F}_j$ для некоторого $j \in J$, что невозможно.
#

Список источников

1. Копытов В.М. Решеточно упорядоченные группы. М. : Наука, 1984. 300 с.
2. Giraudet M., Rachůnek J. Varieties of half lattice-ordered groups of monotonic permutations of chains // Czech. Math. J. 1999. V. 49. P. 743–766.
3. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М. : Наука, 1970. 392 с.
4. Giraudet M., Lucas F. Groupes à moitié ordonnés // Fundam. Math. 1991. V. 139 (2). P. 75–89.
5. Varaksin S.V., Zenkov A.V. On representations of m -groups // Siberian Mathematical Journal. 2013. V. 54. P. 227–230.
6. Darnel M. Theory of lattice-ordered groups. New-York : Marcel Dekker, 1995. 539 p.

References

1. Kopytov V.M. (1984) *Reshetочно uporyadochennyye gruppy* [Lattice-ordered groups]. Moscow: Nauka.
2. Giraudet M., Rachůnek J. (1999) Varieties of half lattice-ordered groups of monotonic permutations of chains. *Czechoslovak Mathematical Journal*. 49. pp. 743–766.
3. Mal'cev A.I. (1973) *Algebraic Systems*. Springer.
4. Giraudet M., Lucas F. (1991) Groupes à moitié ordonnés. *Fundamenta Mathematicae*. 139(2). pp. 75–89.
5. Varaksin S.V., Zenkov A.V. (2013) On representations of m -groups. *Siberian Mathematical Journal*, 54(2). pp. 227–230.
6. Darnel M. (1995) *Theory of Lattice-Ordered Groups*. New York: Marcel Dekker.

Сведения об авторе:

Зенков Алексей Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математика, механика и инженерная графика» Алтайского государственного аграрного университета, Барнаул, Россия. E-mail: alexey_zenkov@yahoo.com

Information about the author:

Zenkov Alexey V. (Candidate of Physics and Mathematics, Altai State Agricultural University, Barnaul, Russian Federation). E-mail: alexey_zenkov@yahoo.com

Статья поступила в редакцию 28.12.2021; принята к публикации 01.06.2023

The article was submitted 28.12.2021; accepted for publication 01.06.2023

Научная статья

УДК 515.12

MSC: 54F45; 54E45

doi: 10.17223/19988621/83/3

О емкостной размерности подмножеств метрического компакта

Александр Владимирович Иванов

Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН, Петрозаводск, Россия, alvlivanov@krc.karelia.ru

Аннотация. Рассматривается вопрос о возможных значениях нижней емкостной размерности $\underline{\dim}_B$ подмножеств метрического компакта X . Введено понятие размерности $f \underline{\dim}_B X$, характеризующее асимптотику нижней емкостной размерности замкнутых ε -окрестностей конечных подмножеств компакта X при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для широкого класса метрических компактов размерность $f \underline{\dim}_B X$ совпадает с $\underline{\dim}_B X$. Доказана следующая теорема: для любого неотрицательного числа $r < f \underline{\dim}_B X$ существует замкнутое подмножество $Z_r \subset X$, для которого $\underline{\dim}_B Z_r = r$.

Ключевые слова: метрический компакт, емкостная размерность, размерность квантования, теорема о промежуточных значениях емкостной размерности

Благодарности: Финансовое обеспечение исследования осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН)

Для цитирования: Иванов А.В. О емкостной размерности подмножеств метрического компакта // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 24–30. doi: 10.17223/19988621/83/3

Original article

On the box dimension of subsets of a metric compact space

Aleksandr V. Ivanov

Institute of Applied Mathematics of the Karelian Scientific Center of Russian Academy of Sciences, Petrozavodsk, Russian Federation, alvlivanov@krc.karelia.ru

Abstract. The question about the range of the capacitarian dimension of subsets of a metric compact space is motivated by a number of well-known mathematical facts. For example, if the measure μ on the set P has no atoms, then for any non-negative real num-

ber $r < \mu(P)$ there exists a measurable subset $Y_r \subset P$ with a measure $\mu(Y_r) = r$. In the topological dimension theory, the question of intermediate values of the dimension of closed subsets of a given compact space is known. Namely, is it true that a compact space X of Lebesgue dimension $\dim X = n$ contains a closed subset of any given dimension $k < n$? The answer to this question is yes for compact metric spaces, although in the general case this is not true (as shown by V.V. Fedorchuk [1]). Similar results also include the theorem about intermediate values of the upper quantization dimension $\overline{D}(\mu)$ of probability measures proved in [2]. According to this theorem, for any non-negative real number r not exceeding the upper capacitarian dimension $\overline{\dim}_B X$ of X , there exists a probability measure μ_r on X of dimension $\overline{D}(\mu_r) = r$ with a support equal to X .

For the capacitarian dimensions (upper and lower ones $\overline{\dim}_B$ and $\underline{\dim}_B$, respectively), the question of intermediate values in general is formulated as follows: is it true that for any nonnegative real number r not exceeding the capacitarian dimension of X (upper or lower respectively), the space X contains a closed subset of the corresponding capacitarian dimension equals to r ?

For $\overline{\dim}_B$, this question was answered positively (see [2]). For the lower capacitarian dimension, a partial result was obtained in [3. Theorem 5.5] under some essential restrictions on the metric of X .

In this paper, the question of intermediate values of the lower capacitarian dimension is answered positively for $r \in [0, f\underline{\dim}_B X)$ for any metric compact space X , where $f\underline{\dim}_B X$ is a quantity, which characterize the asymptotic behavior of the lower capacitarian dimension of closed ε -neighborhoods of finite subsets of X when $\varepsilon \rightarrow 0$. Namely,

$$f\underline{\dim}_B X = \sup \{ f\underline{\dim}_B(A, X) : A \subset X, |A| < \omega_0 \},$$

where

$$\underline{\dim}_B(A, X) = \inf \{ \underline{\dim}_B B(A, \varepsilon) : \varepsilon > 0 \},$$

and $B(A, \varepsilon)$ is the closed ε -ball of the set A .

For a wide class of metric compact spaces, the equality $f\underline{\dim}_B X = \underline{\dim}_B X$ holds. The theorem proved in this paper is the strengthening of Theorem 5.5 from [3].

Keywords: metric compact space, capacitarian dimension, quantization dimension, intermediate value theorem for the capacitarian dimension

Acknowledgments: The study was carried out under state order to the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences (Institute of Applied Mathematical Research KarRC RAS).

For citation: Ivanov, A. V. (2023) On the box dimension of subsets of a metric compact space. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 24–30. doi: 10.17223/19988621/83/3

Вопрос о множестве значений емкостной размерности подмножеств метрического компакта мотивирован рядом известных математических фактов. Например, если мера μ , заданная на множестве P , не имеет атомов, то для любого неотрицательного числа $r < \mu(P)$ существует измеримое подмножество $Y_r \subset P$ с мерой $\mu(Y_r) = r$. В топологической теории размерности известен вопрос о про-

межуточных значениях размерности замкнутых подмножеств данного компакта, а именно: верно ли, что в компакте X лебеговой размерности $\dim X = n$ есть замкнутое подмножество любой наперед заданной размерности $k < n$? Для метрических компактов ответ на этот вопрос положительный, хотя в общем случае это неверно, как показал В.В. Федорчук [1]. К числу аналогичных результатов относится также теорема о промежуточных значениях верхней размерности квантования $\overline{D}(\mu)$ вероятностных мер, доказанная в [2]. Согласно этой теореме для любого числа r , не превосходящего верхней емкостной размерности $\overline{\dim}_B X$ компакта X , на X существует вероятностная мера μ_r размерности $\overline{D}(\mu_r) = r$ с носителем, равным X .

Для емкостных размерностей (верхней $\overline{\dim}_B$ и нижней $\underline{\dim}_B$) вопрос о промежуточных значениях в общем виде формулируется так:

Верно ли, что для любого неотрицательного числа r , не превосходящего емкостной размерности X (соответственно верхней или нижней), в X существует замкнутое подмножество соответствующей емкостной размерности r ?

Для $\overline{\dim}_B$ этот вопрос решен положительно (см.: [2]). Для нижней емкостной размерности в [3. Теорема 5.5] получен частичный результат при некоторых существенных ограничениях на метрику компакта X . В настоящей работе дано положительное решение вопроса для $\underline{\dim}_B$ в диапазоне $r \in [0, f \underline{\dim}_B X)$ для любого метрического компакта X , где $f \underline{\dim}_B X$ – размерностная характеристика X , равная супремуму значений $\inf \{ \underline{\dim}_B B(A, \varepsilon) : \varepsilon > 0 \}$ по непустым конечным подмножествам $A \subset X$, где $B(A, \varepsilon) = \{x : \rho(x, A) \leq \varepsilon\}$ – замкнутый ε -шар A . Полученный результат является усилением упомянутой теоремы 5.5 из [3].

Пусть (X, ρ) – метрический компакт, $A \subset X$ и $\varepsilon > 0$. Подмножество A называется ε -сетью в X , если $B(A, \varepsilon) = X$. Для метрического компакта (X, ρ) и числа $\varepsilon > 0$ через $N(X, \varepsilon)$ обозначается наименьшее число точек в ε -сети X . Верхняя и нижняя емкостные размерности компакта X определяются соответственно по формулам:

$$\overline{\dim}_B X = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(X, \varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)},$$

$$\underline{\dim}_B X = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(X, \varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$$

(если имеет место равенство $\overline{\dim}_B X = \underline{\dim}_B X$, то используют обозначение $\dim_B X$).

Определение 1. Пусть (X, ρ) – метрический компакт и A – замкнутое подмножество X . Положим

$$\underline{\dim}_B(A, X) = \inf \{ \underline{\dim}_B B(A, \delta) : \delta > 0 \},$$

$$f \underline{\dim}_B X = \sup \{ \underline{\dim}_B(A, X) : A \subset X, |A| < \omega_0 \}. \quad (1)$$

В силу монотонности нижней емкостной размерности для любого X имеет место неравенство:

$$f \dim_B X \leq \dim_B X.$$

Если в формуле (1) в качестве A рассматривать только одноточечные подмножества, то мы получим определение локальной нижней емкостной размерности $\underline{\dim}_B X$, введенное в [3]. Очевидно, что всегда

$$\underline{\dim}_B X \leq f \dim_B X. \quad (2)$$

Предложение 1. Если множество предельных точек X' компакта X конечно, то $\underline{\dim}_B X = f \dim_B X$.

Доказательство. Положим $A = X'$. Для любого $\delta > 0$ множество $X \setminus B(A, \delta)$ конечно. Обозначим его мощность через n . Для любого ε имеет место неравенство $N(B(A, \delta), \varepsilon) + n \geq N(X, \varepsilon)$, из которого следует, что $\underline{\dim}_B B(A, \delta) \geq \underline{\dim}_B X$.

Очевидно, что равенство $\underline{\dim}_B X = f \dim_B X$ справедливо для самоподобных компактов (фракталов). Автору неизвестен пример компакта X с несовпадающими размерностями $\underline{\dim}_B X$ и $f \dim_B X$.

Предложение 2. Существует метрический компакт (X, ρ) , для которого неравенство (2) является строгим.

Доказательство. В монографии Я. Песина [4. Гл. 2, пример 6.2] построен пример компакта X , который является объединением двух непересекающихся счетных замкнутых подмножеств F_1 и F_2 , и при этом

$$\underline{\dim}_B F_1 = \underline{\dim}_B F_2 < \underline{\dim}_B X.$$

В [3. Пример 5.3] показано, что $\underline{\dim}_B F_i = \underline{\dim}_B X$, $i = 1, 2$. Компакт X имеет ровно две предельные точки. Следовательно, в силу Предложения 1 $\underline{\dim}_B X < f \dim_B X = \dim_B X$.

Замечание 1. Аналог определения 1 для верхней емкостной размерности не представляет интереса, поскольку всегда $f \overline{\dim}_B X = \overline{\dim}_B X$ в силу того, что для верхней емкостной размерности выполнена теорема суммы (см.: [3]).

Следующая теорема является усилением теоремы 5.5 из [3]. В ее формулировке удалось избавиться от существенного ограничения на метрику компакта X , которое использовалось в [3], и расширен диапазон значений параметра r от $r < \underline{\dim}_B X$ до $r < f \dim_B X$.

Теорема 1. Пусть (X, ρ) – метрический компакт. Для любого неотрицательного числа $r < f \dim_B X$ существует замкнутое подмножество $Z_r \subset X$, для которого $\underline{\dim}_B Z_r = f \dim_B Z_r = r$.

Доказательство. Фиксируем положительное $r < f \dim_B X$ (для $r = 0$ утверждение теоремы очевидно). Выберем конечное подмножество $A \subset X$, для которого $\underline{\dim}_B B(A, X) = a > r$. Пусть $|A| = n$. Поскольку $\underline{\dim}_B X > r$, при достаточно малых ε выполняется неравенство

$$N(X, \varepsilon) > (1/\varepsilon)^r. \quad (3)$$

Фиксируем положительное число $\varepsilon_0 < (1/n)^{1/r}$ так, что для любого $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ имеет место неравенство (3). Для $k \in \mathbb{N}$ положим $\varepsilon_k = \varepsilon_0 / 2^k$.

Пусть $\delta_0 = \text{diam}(X)$. Положим

$$\delta_k = \sup \left\{ \delta : N(B(A, \delta), \varepsilon_k) \leq (1/\varepsilon_k)^r \right\}. \quad (4)$$

В силу неравенства (3) $\delta_k \leq \delta_0$ для любого k . Кроме того, очевидно, что $N(B(A, \varepsilon_k), \varepsilon_k) \leq n$. В силу выбора числа ε_0

$$n < (1/\varepsilon_0)^r < (1/\varepsilon_k)^r.$$

Следовательно, $\delta_k \geq \varepsilon_k$.

Покажем, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$. Предположим противное. Тогда для некоторого числа $b > 0$ множество $D = \{k : \delta_k > b\}$ бесконечно. В силу выбора множества A имеют место неравенства $\underline{\dim}_B B(A, b) \geq a > r$. Следовательно, при малых ε

$$N(B(A, b), \varepsilon) > (1/\varepsilon)^r.$$

Таким образом, существует $k \in D$, для которого $N(B(A, b), \varepsilon_k) > (1/\varepsilon_k)^r$. Отсюда следует, что $\delta_k \leq b$ – получено противоречие.

Определим теперь числа δ'_k следующим образом. Если $\delta_k = \delta_0$, то $\delta'_k = \delta_k$. При $\delta_k < \delta_0$ положим

$$\delta'_k = \frac{1}{2}(\delta_k + \min \{\delta_i : i < k, \delta_i > \delta_k\}).$$

Из определения следует, что всегда $\delta'_k \geq \delta_k$, и если $\delta'_k = \delta_k$, то $\delta'_k = \delta_0$. Поэтому для любого k выполняется неравенство

$$N(B(A, \delta'_k), \varepsilon_k) > (1/\varepsilon_k)^r. \quad (5)$$

Кроме того, $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta'_k = 0$.

Напомним, что множество $A \subset X$ называется ε -разделенным, если $\rho(x, y) > \varepsilon$ для любых двух различных точек $x, y \in A$. Поскольку максимальное (по включению) ε -разделенное подмножество компакта является его ε -сетью, в силу неравенства (5) для каждого $k \in N$ в множестве $B(A, \delta'_k)$ существует ε_k -разделенное подмножество E_k мощности $[(1/\varepsilon_k)^r]$ (квадратные скобки означают здесь целую часть числа).

Рассмотрим множество

$$M = \{k : \delta_i < \delta_k \text{ при } i > k\}.$$

Легко показать, что M бесконечно. Для каждого $k \in M$ положим

$$\delta''_k = \max \{\delta'_i : i > k\}.$$

Поскольку $\delta''_k < \delta_k$, имеет место неравенство

$$N(B(A, \delta''_k), \varepsilon_k) \leq (1/\varepsilon_k)^r.$$

Следовательно, при $k \in M$ в множестве $B(A, \delta''_k)$ можно выбрать ε_k -сеть C_k мощности $|C_k| \leq (1/\varepsilon_k)^r$. При $k \notin M$ будем считать, что множество C_k пусто.

Определим теперь искомое подмножество $Z_r \subset X$ по формуле

$$Z_r = A \cup \bigcup_{k \in N} (C_k \cup E_k).$$

Из построения множеств E_k, C_k следует, что Z_r – замкнутое подмножество X , предельными точками которого являются точки множества A . Для каждого $k \in N$ множество Z_r содержит ε_k -разделенное подмножество E_k мощности $[(1/\varepsilon_k)^r]$. Следовательно, $N(Z_r, \varepsilon_k/2) \geq [(1/\varepsilon_k)^r]$. Таким образом,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N(Z_r, \varepsilon_k/2)}{\log(2/\varepsilon_k)} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log[(1/\varepsilon_k)^r]}{\log(2/\varepsilon_k)} = r.$$

При этом в силу [4. Теорема 2.3] и соотношений $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k/2$ получаем

$$\underline{\dim}_B Z_r = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N(Z_r, \varepsilon_k/2)}{\log(2/\varepsilon_k)}.$$

Итак, $\underline{\dim}_B Z_r \geq r$. Докажем обратное неравенство. Занумеруем точки M в порядке возрастания: $M = \{k_i : i \in N\}$. Покажем, что множество

$$P_{k_i} =_{j \leq k_i} (C_j E_j)$$

является ε_{k_i} -сетью в Z_r . По построению при $k \in N$

$$C_j \cup E_j \subset B(A, \delta'_j) \subset B(A, \delta''_{k_i})$$

и C_{k_i} является ε_{k_i} -сетью в $B(A, \delta''_{k_i})$.

Следовательно, $Z_r \subset B(P_{k_i}, \varepsilon_{k_i})$, что и требовалось. При этом

$$|P_{k_i}| \leq 2 \sum_{j \leq k_i} (1/\varepsilon_j)^r = 2 \sum_{j \leq k_j} (1/\varepsilon_0)^r 2^{jr} = 2(2/\varepsilon_0)^r \frac{2^{k_i r} - 1}{2^r - 1}. \quad (6)$$

Таким образом,

$$\underline{\dim}_B Z_r \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log N(Z_r, \varepsilon_{k_i})}{\log(1/\varepsilon_{k_i})} \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log 2(2/\varepsilon_0)^r \frac{2^{k_i r} - 1}{2^r - 1}}{\log(2^{k_i} \varepsilon_0)} = r \quad (7)$$

Поскольку Z_r содержит только n предельных точек (это точки множества A), в силу Предложения 1 $\underline{\dim}_B Z_r = f \underline{\dim}_B Z_r$.

Замечание 2. Если построенное при доказательстве теоремы множество M содержит все натуральные числа, начиная с некоторого, то в силу теоремы 2.3 из [4], из неравенства (6) по аналогии с (7) вытекает, что $\underline{\dim}_B Z_r \leq r$. Следовательно, в этом случае определена размерность $\underline{\dim}_B Z_r = r$.

Замечание 3. В [3. Теорема 5.7] доказана следующая теорема о промежуточных значениях нижней размерности квантования идемпотентных мер на метрическом компакте X :

Для любого неотрицательного числа $r < l \underline{\dim}_B X$ на X существует идемпотентная мера, нижняя размерность квантования которой равна r , а носитель равен X . Это утверждение доказано в [3] при условии, что для X существует константа $p > 0$ такая, что для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ любое ε -разделенное подмножество ε -шара $B(x, \varepsilon)$ содержит не более p точек. Данное условие является существенным ограничением на метрику X и выполняется далеко не всегда.

Доказательство обсуждаемой теоремы о промежуточных значениях опирается на упомянутую выше теорему 5.5 из [3]. Полученное в настоящей работе усиление теоремы 5.5 позволяет соответственно усилить и теорему 5.7. А именно, утверждение этой теоремы верно для любого $r \in [0, f \dim_b X)$ и без каких-либо ограничений на метрику X .

Список источников

1. Федорчук В.В. Бикомпакты без промежуточных размерностей // Доклады АН СССР. 1973. Т. 213, № 4. С. 795–797.
2. Иванов А.В. О множестве значений размерности квантования вероятностных мер на метрическом компакте // Сибирский математический журнал. 2022. Т. 63, № 5. С. 1074–1080. doi: 10.33048/smzh.2022.63.509
3. Ivanov A.V. On quantization dimensions of idempotent probability measures // Topology and its Applications. 2022. Vol. 306 (1). Art. 107931. doi: 10.1016/j.topol.2021.107931
4. Песин Я.Б. Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения. Москва ; Ижевск : Ин-т компьютерных исслед., 2013. 404 с.

References

1. Fedorchuk V.V. (1973) Bicompacta without intermediate dimensions. *Soviet Mathematics – Doklady*. 14. pp. 1808–1811.
2. Ivanov A.V. (2022) On the range of the quantization dimension of probability measures on a metric compactum. *Siberian Mathematical Journal*. 63(5). pp. 903–908. DOI: 10.1134/S0037446622050093.
3. Ivanov A.V. (2022) On quantization dimensions of idempotent probability measures. *Topology and Its Applications*. 306(1). 107931. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.topol.2021.107931>.
4. Pesin Ya.B. (1997) *Dimension Theory in Dynamical Systems. Contemporary Views and Applications*. Chicago: The University of Chicago Press.

Сведения об авторе:

Иванов Александр Владимирович – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН (Петрозаводск, Республика Карелия). E-mail: alvlivanov@krc.karelia.ru

Information about the author:

Ivanov Aleksandr V. (Doctor of Physics and Mathematics, Institute of Applied Mathematics of the Karelian Scientific Center of Russian Academy of Sciences, Petrozavodsk, Russian Federation). E-mail: alvlivanov@krc.karelia.ru

Статья поступила в редакцию 18.11.2022; принята к публикации 01.06.2023

The article was submitted 18.11.2022; accepted for publication 01.06.2023

Научная статья

УДК 517.956.4, 519.644.5

MSC: 31B10, 65N38, 80M15

doi: 10.17223/19988621/83/4

Об аппроксимации нормальной производной теплового потенциала простого слоя вблизи границы двумерной области

Дмитрий Юрьевич Иванов

Российский университет транспорта, Москва, Россия, ivanovdyu@yandex.ru

Аннотация. На основе кусочно-квадратичной интерполяции получены полуаналитические аппроксимации нормальной производной теплового потенциала простого слоя, сходящиеся с кубической скоростью равномерно вблизи границы двумерной пространственной области. При некоторых упрощениях доказано, что использование ряда стандартных квадратурных формул приводит к нарушению равномерной сходимости аппроксимаций нормальной производной вблизи границы области. Теоретические выводы подтверждены результатами вычисления нормальной производной решения второй краевой задачи теплопроводности в круговой области.

Ключевые слова: квадратурная формула, нормальная производная, тепловой потенциал простого слоя, граничный элемент, коллокация, равномерная сходимость

Для цитирования: Иванов Д.Ю. Об аппроксимации нормальной производной теплового потенциала простого слоя вблизи границы двумерной области // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 31–51. doi: 10.17223/19988621/83/4

Original article

On approximation of the normal derivative of the single layer heat potential near the boundary of a two-dimensional domain

Dmitry Yu. Ivanov

Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, Russian Federation, ivanovdyu@yandex.ru

Abstract. Within the framework of the collocation boundary element method, approximations of the normal derivative (ND) of the single layer heat potential (SLHP) are obtained. The approximations uniformly converge with a cubic rate near the boundary of a two-dimensional spatial domain. For this purpose, exact integration with respect to the variable $\rho \equiv (r^2 - d^2)^{1/2}$ is used, where d and r are the distances from the observed point to the boundary of the spatial domain and to the boundary point of integration, respectively. Namely, the integrals on the boundary elements (BEs) arising after piecewise

quadratic interpolation of the density function are calculated using exact integration over the variable ρ if the values d and ρ do not exceed approximately the value D —a third of the radius of the Lyapunov circle. In other cases, the integrals on the BEs are calculated using simple Gaussian quadrature formulas (SGQF). To make exact integration over ρ possible, the smooth parts of the integrands are approximated by quadratic interpolation in the variable ρ .

In particular, in this way the direct value of the ND of the SLHP is calculated when $d = 0$ and, on the basis of this, the boundary integral equation is approximated, which makes it possible to obtain a solution of the initial-Neumann problem for the heat equation (INPHE) at a zero initial condition. It is proved that the corresponding approximations of the ND of the INPHE's solution converge with a cubic rate uniformly in the near-boundary domain, where $d \in (0, D]$. With some simplifications, it's proved that the calculation of integrals on the BEs exclusively with the help of the SGQF entails a violation of the uniform convergence of the ND SLHP approximations near the boundary of the spatial domain. The results of calculating the ND of the INPHE solution in the unit circle are presented, confirming the theoretical conclusions.

Keywords: quadrature formula, normal derivative, single layer heat potential, boundary element, collocation, uniform convergence

For citation: Ivanov, D.Yu. (2023) On approximation of the normal derivative of the single layer heat potential near the boundary of a two-dimensional domain. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 31–51. doi: 10.17223/19988621/83/4

Введение

Метод граничных элементов является одним из основных методов приближенного решения задач математической физики наряду с методом конечных элементов и методом конечных разностей. В отличие от двух последних методов граничных элементов является более аналитическим и позволяет уменьшить размерность задачи на единицу, а именно: искомая функция вычисляется в виде потенциала непосредственно в любой внутренней точке области с помощью значений так называемой функции плотности, заданной на границе области и вычисляемой, в свою очередь, с помощью граничного интегрального уравнения, размерность которого на единицу меньше размерности краевой задачи. В рамках коллокационного метода граничных элементов (КМГЭ) для вычисления потенциала осуществляется разбиение границы области на дуги – так называемые граничные элементы (ГЭ), и на каждом из таких ГЭ осуществляется полиномиальная интерполяция функции плотности. Для вычисления получающихся после этого интегралов на ГЭ, как правило, используются простые квадратурные формулы Гаусса (ПКФГ) [1. С. 21, 173], если наблюдаемая точка, в которой вычисляется интеграл, не принадлежит ГЭ. Известно [2–4], что благодаря сингулярности ядра интегрального оператора точность аппроксимаций потенциала резко снижается вблизи границы области в случаях, когда для вычисления интегралов на ГЭ применяются более или менее стандартные квадратурные формулы, например ПКФГ или квадратурные формулы Ньютона–Котеса (КФНК). В работах [2–8] для вычисления интегралов на ГЭ предлагаются специальные квадратурные формулы, позво-

ляющие увеличить точность вычисления потенциалов вблизи границы области и обеспечивающие равномерную в области сходимост аппроксимаций потенциала.

В работах [2–8] рассматривались потенциалы только для стационарных уравнений – Лапласа и Гельмгольца. В работах автора [9, 10] равномерная в области сходимост аппроксимаций потенциалов простого и двойного слоев для двумерного уравнения теплопроводности обеспечивается применением точного интегрирования по переменной $\rho \equiv (r^2 - d^2)^{1/2}$, где d и r – расстояния от наблюдаемой точки до границы пространственной области и до граничной точки интегрирования соответственно. С помощью такого интегрирования вычисляются интегралы на ГЭ, если величины d и ρ не превосходят приблизительно величины D – трети радиуса круга Ляпунова, а остальные интегралы вычисляются с помощью ПКФГ. Для того чтобы точное интегрирование по ρ стало возможным, гладкие части подынтегральных функций аппроксимируются с помощью полиномиальной интерполяции по переменной ρ .

В настоящей работе аналогичный подход используется для вычисления нормальной производной (НП) теплового потенциала простого слоя (ТППС) вблизи границы двумерной пространственной области ($d \in (0, D]$), а также прямого значения НП ТППС при $d = 0$. В разделе 2 на основе кусочно-квадратичной интерполяции получены аппроксимации НП ТППС, сходящиеся к точным значениям с кубической скоростью равномерно в приграничной области $d \in [0, D]$. С помощью таких аппроксимаций в разделе 3 получены аппроксимации НП решений начально-краевых задач теплопроводности (НКЗТ) с граничными условиями второго рода и нулевым начальным условием, сходящиеся равномерно при $d \in (0, D]$ с кубической скоростью. В разделе 4 показано, что применение для вычисления интегралов на ГЭ исключительно ПКФГ или КФНК нарушает равномерную сходимост аппроксимаций НП ТППС вблизи границы пространственной области. В разделе 5 теоретические выводы подтверждены результатами вычисления НП решения НКЗТ в круговой области.

В заключение отметим, что специальные квадратурные формулы для вычисления прямых значений производных логарифмических потенциалов простого и двойного слоев, а также прямых значений производных потенциалов для трехмерных стационарных уравнений были получены в работах [11–13].

1. Предварительные определения и замечания

Пусть Ω_+ – двумерная открытая ограниченная односвязная область с границей $\partial\Omega$. В декартовых координатах $x \equiv (x_1, x_2)$ зададим параметрические уравнения кривой $\partial\Omega$: $x_1 = \tilde{x}_1(s)$, $x_2 = \tilde{x}_2(s)$. Параметр s по модулю равен длине дуги, откладываемой от некоторой фиксированной точки и заканчивающейся в точке $\tilde{x}(s) \equiv (\tilde{x}_1(s), \tilde{x}_2(s))$, с положительным направлением против часовой стрелки. Функции $\tilde{x}_1(s)$, $\tilde{x}_2(s)$ ($s \in \mathbf{R}$), периодические с периодом $2S$ (S – половина длины $\partial\Omega$), осуществляют взаимно однозначное отображение множества $I_S \equiv [-S, S]$ на множество $\partial\Omega$. Условимся далее писать $\partial\Omega \in C^n$, если существуют непрерыв-

ные производные $\tilde{x}_i^{(l)}(s)$ ($i=1,2$, $l=\overline{0,n}$, $s \in \mathbf{R}$). Будем считать, что $\partial\Omega \in C^2$, если не оговорено особо.

Обозначим через $\mathbf{B}$ замкнутый оператор в комплексном гильбертовом пространстве $L_2 \equiv L_2(I_T)$ ($I_T \equiv [0, T]$): $(\mathbf{B}f)(t) = f'(t)$, заданный на множестве $D(\mathbf{B})$ классов функций $f \in L_2$, эквивалентных абсолютно непрерывным на промежутке I_T функциям $f(t)$, таким что $f(0) = 0$. Оператор $\mathbf{B}$ является генератором C_0 -полугруппы операторов правого сдвига $U(\tau): (U(\tau)f)(t) = f(t - \tau)$ при $\tau \leq t$, $(U(\tau)f)(t) = 0$ при $\tau > t$ ($f \in L_2$), $\mathbf{B}f = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau^{-1}(f - U(\tau)f)$ ($f \in D(\mathbf{B})$). Заметим, что $\|U(\tau)\| = 1$ при $\tau < T$, $U(\tau) = \mathbf{O}$ при $\tau \geq T$ ($\mathbf{O}$ – нулевой оператор).

Обозначим через H^n ($n \in \mathbf{Z}_+$) гильбертовы пространства функций $f \in D(\mathbf{B}^n)$ с нормами $\|f\|_{H^n} \equiv \left[\sum_{m=0}^n \|\mathbf{B}^m f\|_{L_2}^2 \right]^{1/2}$ ($H^0 \equiv L_2$). Введем в рассмотрение банаховы пространства $C_n^k(\partial\Omega)$ ($k, n \in \mathbf{Z}_+$) векторных функций $f(x)$ ($x \in \partial\Omega$) со значениями в пространстве H^n , имеющих непрерывные на множестве $\overline{I_s}$ производные $f^{(l)}(s) \equiv d^l f(\tilde{x}(s))/ds^l$ ($l=\overline{0,k}$) (непрерывность и дифференцируемость векторных функций здесь и далее предполагается в норме пространства их значений, в данном случае – H^n), с нормами $\|f\|_{C_n^k(\partial\Omega)} \equiv \max_{l=0,k} \sup_{s \in I_s} \|f^{(l)}(s)\|_{H^n}$. Введем обозначения $C(\partial\Omega) \equiv C_0^0(\partial\Omega)$, $C^k(\partial\Omega) \equiv C_0^k(\partial\Omega)$, $C_n(\partial\Omega) \equiv C_n^0(\partial\Omega)$. Зададим банаховы пространства $C_{n,m}^k(\partial\Omega) \equiv C_n^k(\partial\Omega) \cap C_{n+m}(\partial\Omega)$ с нормами $\|f\|_{C_{n,m}^k(\partial\Omega)} \equiv \|f\|_{C_n^k(\partial\Omega)} + \|f\|_{C_{n+m}(\partial\Omega)}$ ($k, n, m \in \mathbf{Z}_+$).

Пусть $p \in \mathbf{R}$. Зададим в области $\Omega' \equiv \mathbf{R}^2 \setminus \partial\Omega$ функцию $u(x)$:

$$u(x) = G_0(x)v \equiv \int_{I_T} A_0(x, \tau) e^{-p\tau} U(\tau)v d\tau \quad (x \in \Omega', v \in C(\partial\Omega)).$$

Здесь $A_0(x, \tau)f \equiv \int_{I_s} a_0(r, \tau)f(s')ds'$ ($f \in C(\partial\Omega)$),

$a_0(r, \tau) \equiv (4\pi\tau)^{-1} \exp[-r^2/(4\tau)]$, $r \equiv |r|$, $r(x, s') \equiv \tilde{x}(s') - x$. При $p=0$ функция

$u(x)$ – двумерный ГППС. Производная $z(x) \equiv \partial_m u(x)$ по направлению некоторого единичного вектора m имеет вид:

$$z(x) = G(x)v \equiv \int_{I_T} A(x, \tau) e^{-p\tau} U(\tau)v d\tau, \quad (1)$$

$$A(x, \tau)f \equiv \int_{I_s} g(x, s', \tau)f(s')ds', \quad g(x, s', \tau) \equiv a(r, \tau)(-mr), \quad a(r, \tau) \equiv r^{-1} \partial_r a_0(r, \tau).$$

Обозначим через $n(s)$ единичную нормаль к кривой $\partial\Omega$, проходящую через точку $\tilde{x}(s)$ и направленную внутрь области Ω_+ : $n(s) = (-\tilde{x}'_2(s), \tilde{x}'_1(s))$. Пусть $r_0 \equiv \tilde{x}(s') - \tilde{x}(s)$ и $r_0 \equiv |r_0|$. Зададим на множестве $\Theta \equiv \{(s, s'): \sigma \equiv s' - s \in \overline{I_s}, s \in \overline{I_s}\}$ функции $\psi_i(s, s')$ ($i=0,2$): при $s' \neq s$ равенствами $\psi_i \equiv \varphi_i/\sigma^2$, где

$$\varphi_0(s, s') \equiv r_0^2 = [\tilde{x}_1(s') - \tilde{x}_1(s)]^2 + [\tilde{x}_2(s') - \tilde{x}_2(s)]^2,$$

$$\varphi_2(s, s') \equiv -\mathbf{n}(s)\mathbf{r}_0 = \tilde{x}'_2(s)[\tilde{x}_1(s') - \tilde{x}_1(s)] - \tilde{x}'_1(s)[\tilde{x}_2(s') - \tilde{x}_2(s)],$$

а при $s' = s$ равенствами $\psi_0(s, s) \equiv 1$, $\psi_2(s, s) \equiv 2^{-1}[\tilde{x}'_2(s)\tilde{x}''_1(s) - \tilde{x}'_1(s)\tilde{x}''_2(s)]$. В силу теоремы 1 [14] при условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbf{Z}_+$) существуют непрерывные на множестве Θ производные $\partial_s^j \psi_i$ ($j = \overline{0, n}$, $i = 0, 2$).

Так как контур $\partial\Omega$ не имеет точек самопересечения, то $c_r \equiv \inf_{(s, s') \in \Theta} \psi_0 > 0$ ($c_r \leq 1$).

Справедлива оценка: $\vartheta \leq c_K |\sigma| \leq c'_K c_r^{-1/2} r_0$, где ϑ – острый угол между нормальями, проходящими через точки $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ и $\tilde{\mathbf{x}}(s')$; $c_K \equiv \sup_{s \in I_S} K(s, s)$, $c'_K \equiv \sup_{(s, s') \in \Theta} K(s, s')$ ($K(s, s') \equiv |\partial_s^2 \varphi_2|$, $K(s, s)$ – кривизна кривой в точке $\tilde{\mathbf{x}}(s)$). Поэтому величина $3D$, где $D \equiv c_r^{1/2} / (3c'_K)$, может быть взята в качестве радиуса круга Ляпунова. Введем в рассмотрение местные системы декартовых координат (ξ_s, η_s) с началами в точках $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ и осями ординат, направленными по нормали внутрь области Ω_+ . Согласно [15. С. 313] точки $\tilde{\mathbf{x}}_d(s)$ ($s \in I_S$) с местными координатами $(0, d)$ при фиксированном $d \in I_D \equiv [-D, 0) \cup (0, D]$ образуют замкнутую линию $\partial\Omega_d \in C^1$, параллельную кривой $\partial\Omega$, т.е. соответствие между точками $\tilde{\mathbf{x}}_d(s)$ и $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ взаимно однозначное ($\tilde{\mathbf{x}}_0(s) \equiv \tilde{\mathbf{x}}(s)$).

Местные координаты точек $\tilde{\mathbf{x}}(s')$ равны $(-2^{-1}\partial_s \varphi_0, -\varphi_2)$, поэтому $r^2 = |\tilde{\mathbf{x}}(s') - \tilde{\mathbf{x}}_d(s)|^2 = \varphi'_0 + d^2$, где $\varphi'_0 \equiv \varphi_0 + 2d\varphi_2$. Так как кривая $\partial\Omega$ и окружность радиуса $d \in I_D$ с центром $\tilde{\mathbf{x}}_d(s)$ имеют только одну общую точку $\tilde{\mathbf{x}}(s)$, то $2d\mathbf{n}(s)\mathbf{r}_0 < r_0^2$, следовательно, $\varphi'_0 > 0$ при $(d, s, s') \in \Upsilon$, $s \neq s'$. Зададим на множестве $\Upsilon \equiv \overline{I_D} \times \Theta$ функцию $\rho'(d, s, s')$: $\rho' = \sqrt{\varphi'_0}$, если $\sigma \geq 0$; $\rho' = -\sqrt{\varphi'_0}$, если $\sigma < 0$ ($\sqrt{1} = 1$), а также функцию $\psi'_0(d, s, s') \equiv \psi_0 + 2d\psi_2$. Так как $\psi_0(s, s) = 1$, $|\psi_2(s, s)| \equiv 2^{-1}K(s, s)$ и $D \leq 1/(3c_K)$, то при $(d, s) \in I_D \times I_S$ имеем оценку: $\psi'_0(d, s, s) \geq 2/3$. Поэтому $\psi'_0 > 0$ на множестве Υ .

Так как $r^2 = \varphi_0 + 2d\varphi_2 + d^2$, то $-\mathbf{n}(s)\mathbf{r} = 2^{-1}\partial_d r^2 = \varphi_2 + d$, поэтому функция $g(\mathbf{x}, s', \tau)$ при $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}_d(s)$, $(d, s, s') \in \Upsilon$ может быть записана в следующем виде:

$$g(\tilde{\mathbf{x}}_d(s), s', \tau) = a_1(d, \rho', \tau) \delta_1(d, s, s') + a_2(d, \rho', \tau) \delta_2(d, s, s'), \quad (2)$$

$$a_1(d, \rho, \tau) \equiv \rho^2 a(\rho^2 + d^2, \tau), \quad a_2(d, \rho, \tau) \equiv d a(\rho^2 + d^2, \tau), \quad \delta_1 \equiv \psi_2 / \psi'_0, \quad \delta_2 \equiv 1.$$

Так как $\psi'_0 > 0$ на множестве Υ , то при условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbf{Z}_+$) существуют непрерывные на множестве Υ производные $\partial_s^j \delta_i$ ($j = \overline{0, n}$).

Пусть E_s – дуга кривой $\partial\Omega$, ограниченная двумя параллельными прямыми, находящимися на расстоянии D от прямой $\tilde{\mathbf{x}}(s)\tilde{\mathbf{x}}_D(s)$, причем $\tilde{\mathbf{x}}(s) \in E_s$. Соот-

ветствующие значения σ обозначим через Ξ_s , границы отрезка Ξ_s – через Σ'_s и Σ''_s ($\Sigma'_s < \Sigma''_s$). Введем в рассмотрение множество $\Upsilon' \equiv \{(d, s, s') : d \in \overline{I_D}, s \in \overline{I_s}, \sigma \in \Xi_s\}$.

Теорема 1 (см. теорему 5 [9]). Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbf{Z}_+$). Тогда на множестве Υ' существуют положительная, ограниченная сверху функция $\delta(d, s, s') \equiv (\partial_s \rho')^{-1}$ и непрерывные производные $\partial_s^j \delta$ ($j = \overline{0, n}$).

Следствие 1. Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbf{Z}_+$). Тогда функции $\rho_{d,s}(\sigma) \equiv \rho'(d, s, s + \sigma)$ при любых фиксированных $s \in I_s$, $d \in \overline{I_D}$ диффеоморфно с гладкостью C^{n+1} отображают множества Ξ_s на соответствующие множества $\rho_{d,s}(\Xi_s)$. Функции $\tilde{\delta}_1(d, s, \rho) \equiv \delta_1(d, s, s + \sigma_{d,s}(\rho))$, $\tilde{\delta}_2(d, s, \rho) \equiv \delta(d, s, s + \sigma_{d,s}(\rho))$ ($\sigma_{d,s}(\rho)$ – функция, обратная к функции $\rho_{d,s}(\sigma)$) имеют непрерывные на множестве $\tilde{\Upsilon}' \equiv \{(d, s, \rho) : d \in \overline{I_D}, s \in \overline{I_s}, \rho \in \rho_{d,s}(\Xi_s)\}$ производные $\partial_\rho^j \tilde{\delta}_i$ ($j = \overline{0, n}$, $i = 1, 2$).

Обозначим через $\Lambda_m(z)$ и $\tilde{\Lambda}_m(z)$ ($z \in [a, b]$, $m = \overline{0, 2}$) интерполяционные многочлены Лагранжа:

$$\Lambda_m(z) \equiv \prod_{j=0 (j \neq m)}^2 \frac{z - z_j}{z_m - z_j}, \quad z_j \equiv \bar{z} + q_j h_z \quad (j = \overline{0, 2}); \quad \tilde{\Lambda}_m(z) \equiv \prod_{j=0 (j \neq m)}^2 \frac{z - \tilde{z}_j}{\tilde{z}_m - \tilde{z}_j},$$

$$\tilde{z}_j \equiv \bar{z} + \tilde{q}_j h_z \quad (j = \overline{0, 2}).$$

Здесь $h_z \equiv 2^{-1}(b - a)$, $\bar{z} \equiv 2^{-1}(a + b)$; $q_0 \equiv -1$, $q_1 \equiv 0$, $q_2 \equiv 1$; $\tilde{q}_0 \equiv -\sqrt{3}/2$, $\tilde{q}_1 \equiv 0$, $\tilde{q}_2 \equiv \sqrt{3}/2$ [16. С. 92]. Пусть $f(z)$ – трижды непрерывно дифференцируемая на промежутке $[a, b]$ функция со значениями в произвольном банаховом пространстве B . Тогда для функций $\tilde{f}_1(z) \equiv \sum_{m=0}^2 f(z_m) \Lambda_m(z)$, $\tilde{f}_2(z) \equiv \sum_{m=0}^2 f(\tilde{z}_m) \tilde{\Lambda}_m(z)$, а также первых и вторых производных функции $\tilde{f}_1(z)$ при $z \in [a, b]$ имеют место оценки:

$$\left| \tilde{f}_1(z) - f(z) \right| \leq c_\omega \sup_{z \in [a, b]} \left| f^{(3)}(z) \right| h_z^3, \quad \left| \tilde{f}_2 - f \right| \leq \tilde{c}_\omega \sup_{z \in [a, b]} \left| f^{(3)}(z) \right| h_z^3$$

$$(c_\omega \equiv 2\sqrt{3}/9, \quad \tilde{c}_\omega \equiv 4^{-1}), \quad (3)$$

$$\left| \tilde{f}_1(z) \right| \leq c_\Lambda \max_{m=0,2} \left| f(z_m) \right|, \quad \left| \tilde{f}_2(z) \right| \leq \tilde{c}_\Lambda \max_{m=0,2} \left| f(\tilde{z}_m) \right|$$

$$(c_\Lambda \equiv 3, \quad \tilde{c}_\Lambda \equiv 3^{-1}(7 + 2\sqrt{3})), \quad (4)$$

$$\left| \tilde{f}_1^{(1)}(z) \right| \leq c'_\Lambda \sup_{z \in [a, b]} \left| f^{(1)}(z) \right|, \quad \left| \tilde{f}_1^{(2)}(z) \right| \leq c''_\Lambda \sup_{z \in [a, b]} \left| f^{(2)}(z) \right| \quad (c'_\Lambda \equiv 3, \quad c''_\Lambda \equiv 2^{-1}). \quad (5)$$

2. Аппроксимация нормальной производной потенциала вблизи границы области

В этом параграфе будем полагать, что $x = \tilde{x}_d(s)$ ($d \in \overline{I_D}$, $s \in I_s$), $\mathbf{z}(x) = \partial_{n(s)} \mathbf{u}(x)$. Тогда функция $\mathbf{z}(x)$ при $p = 0$ – НП ТППС. Замкнутую об-

ласть, ограниченную кривыми $\partial\Omega_{-D}$ и $\partial\Omega_D$, обозначим через Ω_D . В силу равенства (2) и следствия 1 операторы $A(\mathbf{x}, \tau)$ ($\mathbf{x} \in \Omega_D$, $\tau > 0$) могут быть представлены в виде суммы: $A(\mathbf{x}, \tau) = \sum_{i=1}^3 A_i(\mathbf{x}, \tau)$, где

$$A_i(\mathbf{x}, \tau) f \equiv \int_{\rho_{d,s}(\Sigma'_s)}^{\rho_{d,s}(\Sigma''_s)} a_i(d, \rho, \tau) \tilde{\delta}_i(d, s, \rho) f(s + \sigma_{d,s}(\rho)) d\rho \quad (i=1, 2),$$

$$A_3(\mathbf{x}, \tau) f \equiv \int_{I_S \setminus \Xi_s} g(\mathbf{x}, s + \sigma, \tau) f(s + \sigma) d\sigma.$$

Условимся оператор A , отображающий банахово пространство B в банахово пространство C , обозначать как $A[B \rightarrow C]$, а если $C = B$, то $A[B]$. Так как любая прямая, параллельная прямой $\tilde{\mathbf{x}}(s)\tilde{\mathbf{x}}_D(s)$, пересекает границу $\partial\Omega$ внутри круга Ляпунова с центром в $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ не более чем в одной точке, то $r \geq D$, если $\sigma \in I_S \setminus \Xi_s$. Учитывая также следствие 1, получаем оценки норм операторов $A_i(\mathbf{x}, \tau) [C(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$:

$$\|A_i(\mathbf{x}, \tau)\| \leq \tilde{c}_i \tilde{c}_{i,0} y_i \quad (i=\overline{1,3}), \quad y_1(\tau) \equiv \tau^{-1/2},$$

$$y_2(d, \tau) \equiv d \tau^{-3/2} \exp[-d^2/(4\tau)], \quad y_3 \equiv 1, \quad (6)$$

$$\tilde{c}_{i,0} \equiv \sup_{(d,s,\rho) \in \tilde{\Gamma}'} |\tilde{\delta}_i| \quad (i=1, 2), \quad \tilde{c}_1 \equiv (8\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^2 \exp(-\gamma^2/4) d\gamma = (2\sqrt{\pi})^{-1},$$

$$\tilde{c}_2 \equiv (8\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\gamma^2/4) d\gamma = (4\sqrt{\pi})^{-1}, \quad \tilde{c}_{3,0} \equiv \sup_{r \geq D, \tau > 0} |g(\mathbf{x}, s', \tau)|, \quad \tilde{c}_3 \equiv 2S.$$

В силу оценок (6) имеем равномерную на множестве Ω_D ограниченность операторов $G(\mathbf{x}) [C(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$:

$$\|G(\mathbf{x})\| \leq c_G \equiv \sum_{i=1}^3 \tilde{c}_i \tilde{c}_{i,0}, \quad c_1 \equiv 2T^{1/2}, \quad c_2 \equiv \int_0^\infty y_2(d, \tau) d\tau = 2\sqrt{\pi}, \quad c_3 \equiv T. \quad (7)$$

Заметим, что неравенство $\|G(\mathbf{x})\| \leq c_G$ выполняется и при $d = 0$. В этом случае $A(\mathbf{x}, \tau) = A_1(\mathbf{x}, \tau) + A_3(\mathbf{x}, \tau)$ и функция $\mathbf{z}(x)$ при $p = 0$ суть прямое значение НПТППС на $\partial\Omega$.

Пусть $N/2 \in \mathbf{N}$, $\tilde{N} \in \mathbf{N}$, $\tau_m \equiv m h_\tau$, $\tilde{\tau}_n \equiv n \tilde{h}_\tau$ ($m, n \in \mathbf{Z}_+$), $h_\tau \equiv T/N$, $\tilde{h}_\tau \equiv h_\tau / \tilde{N}$. Зададим функции $\tilde{U}(\tau) [L_2]$ и $e(\tau)$ ($\tau \geq 0$):

$$\tilde{U}(\tau) \equiv \sum_{m=0}^2 U(\tau_{2n+1} + q_m h_\tau) \Lambda_m(\tau) \quad (\tau \in [\tau_{2n}, \tau_{2n+2}], \quad n = \overline{0, N/2-1}),$$

$$e(\tau) \equiv \sum_{m=0}^2 \exp[-p(\tilde{\tau}_{2n+1} + q_m \tilde{h}_\tau)] \Lambda_m(\tau) \quad (\tau \in [\tilde{\tau}_{2n}, \tilde{\tau}_{2n+2}], \quad n = \overline{0, N\tilde{N}/2-1}).$$

В силу оценок (4) и $\|U(\tau)\| \leq 1$, $|e^{-p\tau}| \leq e^{|p|T}$ функции $\tilde{U}(\tau)$ и $e(\tau)$ ограничены:

$\|\tilde{U}(\tau)\| \leq c_\Lambda$, $|e(\tau)| \leq c_\Lambda e^{|p|T}$. На основании оценки (3) имеем оценки:

$$\|\tilde{U}(\tau)e(\tau)f - U(\tau)e^{-p\tau}f\|_{C(\partial\Omega)} \leq c_\omega \left(\|B^3 f\|_{C(\partial\Omega)} + c_\Lambda |p|^3 \tilde{N}^{-3} \|f\|_{C(\partial\Omega)} \right) h_\tau^3 \quad (8)$$

$$(f \in C_3(\partial\Omega)).$$

Далее будем считать, что величина $\tilde{N} \in \mathbf{N}$ фиксирована. Пусть $L/2 \in \mathbf{N}$, $s_l \equiv lh_s$, $l \in \mathbf{Z}$, $h_s \equiv S/(L+1)$. Введем в рассмотрение пространства H_L векторных сеточных функций f со значениями $f_l \in L_2$, заданными в узлах $\tilde{x}(s_l)$, с нормой $\|f\|_{H_L} = \max_{-L-1 \leq l \leq L} \|f_l\|_{L_2}$. Зададим проекционные операторы $P_L [C(\partial\Omega) \rightarrow H_L]$: $(P_L f)_l = f(s_l)$ ($\|P_L\| \leq 1$). Введем также в рассмотрение операторы $\tilde{P}_L [H_L \rightarrow C(\partial\Omega)]$:

$$(\tilde{P}_L f)(s) \equiv \sum_{m=0}^2 f_{2l-1+m} \Lambda_m(s) \quad (f \in H_L, s \in [s_{2l-1}, s_{2l+1}], l = \overline{-L/2, L/2}).$$

В силу оценки (4) операторы $\tilde{P}_L$ ограничены в совокупности: $\|\tilde{P}_L\| \leq c_\Lambda$. На основании оценки (3) имеем оценки:

$$\|\tilde{P}_L P_L f - f\|_{C(\partial\Omega)} \leq c_\omega \|f^{(3)}\|_{C(\partial\Omega)} h_s^3 \quad (f \in C^3(\partial\Omega)). \quad (9)$$

Определение 1. Будем говорить, что ограниченные операторы $A_n [C \rightarrow D]$ ($n \in \mathbf{N}$) сходятся при $n \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим ограниченным операторам $B_n [C \rightarrow D]$, если $\|A_n f - B_n f\|_D \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно в шаре $\|f\|_C \leq 1$.

Введем в рассмотрение операторы $\tilde{G}(x) [H_L \rightarrow L_2]$ ($x \in \Omega_D$):

$$\tilde{G}(x)f \equiv \int_{I_\tau} A(x, \tau) e(\tau) \tilde{U}(\tau) \tilde{P}_L f d\tau \quad (f \in H_L).$$

С учетом оценок (6) и $\|\tilde{U}(\tau)\| \leq c_\Lambda$, $|e(\tau)| \leq c_\Lambda e^{|\rho|\tau}$, $\|\tilde{P}_L\| \leq c_\Lambda$ операторы $\tilde{G}(x)$ ограничены в совокупности: $\|\tilde{G}(x)\| \leq c_G c_\Lambda^3 e^{|\rho|\tau}$. С учетом оценок (8), (9) получаем неравенства

$$\|\tilde{G}(x)P_L f - G(x)f\|_{L_2} \leq c_G c_\omega \left[\left(\|B^3 f\|_{C(\partial\Omega)} + c_\Lambda p^3 \tilde{N}^{-3} \|f\|_{C(\partial\Omega)} \right) h_\tau^3 + c_\Lambda^2 e^{|\rho|\tau} \|f^{(3)}\|_{C(\partial\Omega)} h_s^3 \right]$$

$$(f \in C_{0,3}^3(\partial\Omega)),$$

позволяющие сделать утверждение:

Теорема 2. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $\tilde{G}(x)P_L [C_{0,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ ($N/2 \in \mathbf{N}$, $L/2 \in \mathbf{N}$) сходятся при $L, N \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $G(x) [C_{0,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ равномерно по $x \in \Omega_D$ с порядком аппроксимации $O(h_\tau^3 + h_s^3)$.

Введем в рассмотрение операторы $\tilde{A}_i(x, \tau)$ ($x \in \Omega_D$), аппроксимирующие операторы $A_i(x, \tau)\tilde{P}_L [H_L \rightarrow L_2]$ ($i = \overline{1, 3}$). Для этого в выражениях $A_i(x, \tau)\tilde{P}_L f$ ($i = 1, 2$) заменим функции $\tilde{\delta}_i \tilde{f}$ ($\tilde{f} \equiv \tilde{P}_L f$, $f \in H_L$) их кусочно-квадратичными интерполянтами по переменной ρ :

$$\begin{aligned}\tilde{A}_i(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{f} &\equiv \sum_{l=-L-2}^L \int_{\rho_{d,s}(\alpha_{s,l})}^{\rho_{d,s}(\alpha_{s,l+1})} a_i(d, \rho, \tau) \mathbf{B}_{i,l}(d, s, \rho) \mathbf{f} d\rho, \\ \mathbf{B}_{i,l}(d, s, \rho) \mathbf{f} &\equiv \sum_{m=0}^2 \tilde{\delta}_i(d, s, \rho_{d,s,l,m}) \tilde{\mathbf{f}}(s + \sigma_{d,s}(\rho_{d,s,l,m})) \tilde{\Lambda}_m(\rho) \\ &\quad (\rho \in [\rho_{d,s}(\alpha_{s,l}), \rho_{d,s}(\alpha_{s,l+1})]), \\ \rho_{d,s,l,m} &\equiv \bar{\rho}_{d,s,l} + \tilde{q}_m h'_{d,s,l}, \quad \bar{\rho}_{d,s,l} \equiv 2^{-1} [\rho_{d,s}(\alpha_{s,l}) + \rho_{d,s}(\alpha_{s,l+1})], \\ h'_{d,s,l} &\equiv 2^{-1} [\rho_{d,s}(\alpha_{s,l+1}) - \rho_{d,s}(\alpha_{s,l})].\end{aligned}$$

Здесь $\alpha_{s,0} \equiv 0$; $\alpha_{s,l} \equiv \min\{s_{l+k} - s, \Sigma_s''\}$, если $s_{l+k} \geq s \in (s_k, s_{k+1}]$ и $l > 0$, и $\alpha_{s,l} \equiv \max\{s_{l+k+1} - s, \Sigma_s'\}$, если $s_{l+k+1} < s$ и $l < 0$. Операторы $\mathbf{A}_3(\mathbf{x}, \tau) \tilde{\mathbf{P}}_L$ аппроксимируем с помощью ПКФГ с γ узлами:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}_3(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{f} &\equiv \sum_{l=-L-1}^L h_{s,l}'' \mathbf{B}_{3,l}(\mathbf{x}) \mathbf{f}, \quad \mathbf{B}_{3,l}(\mathbf{x}) \mathbf{f} \equiv \sum_{j=1}^{\gamma} \omega_j g(\mathbf{x}, \beta_{s,l,j}, \tau) \tilde{\mathbf{f}}(\beta_{s,l,j}), \\ \beta_{s,l,j} &\equiv \bar{\beta}_{s,l} + h_{s,l}'' z_j, \quad \bar{\beta}_{s,l} \equiv 2^{-1} (\beta_{s,l} + \beta_{s,l+1}), \quad h_{s,l}'' \equiv 2^{-1} (\beta_{s,l+1} - \beta_{s,l}),\end{aligned}$$

где $\beta_{s,l} \equiv \max\{s_l, s + \Sigma_s''\}$, если $s_l \geq s$, и $\beta_{s,l} \equiv \min\{s_l, s + \Sigma_s'\}$, если $s_l < s$. Здесь z_j – корни многочлена $P_\gamma(z) \equiv [\gamma!(2\gamma)!] (d^\gamma/dz^\gamma) (z^2 - 1)^\gamma$ на промежутке $[-1; 1]$ [16. С. 258]; для весовых коэффициентов ω_j выполняется равенство: $\sum_{j=1}^{\gamma} \omega_j = 2$ ($\omega_j > 0$) [16. С. 255].

В силу оценок (4) операторы $\mathbf{B}_{i,l} [H_L \rightarrow L_2]$ ограничены в совокупности: $\|\mathbf{B}_{i,l}\| \leq \tilde{c}_\Lambda c_\Lambda \tilde{c}_{i,0}$ ($i=1, 2$), $\|\mathbf{B}_{3,l}\| \leq 2c_\Lambda \tilde{c}_{3,0}$, и имеют место неравенства $\|\tilde{\mathbf{A}}_i(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{f}\|_{L_2} \leq \tilde{c}_i \tilde{c}_{i,0} y_i c_\Lambda \tilde{c}_\Lambda \|\mathbf{f}\|_{H_L}$ ($i=1, 2$), $\|\tilde{\mathbf{A}}_3(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{f}\|_{L_2} \leq \tilde{c}_3 \tilde{c}_{3,0} y_3 c_\Lambda \|\mathbf{f}\|_{H_L}$ ($\mathbf{f} \in H_L$). (10)

Введем в рассмотрение операторы $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) \equiv \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{G}}_i(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in \Omega_D$), где операторы $\hat{\mathbf{G}}_i(\mathbf{x}) [H_L \rightarrow L_2]$ имеют вид:

$$\hat{\mathbf{G}}_i(\mathbf{x}) \mathbf{f} \equiv \int_{I_\tau} \tilde{\mathbf{A}}_i(\mathbf{x}, \tau) e(\tau) \tilde{\mathbf{U}}(\tau) \mathbf{f} d\tau \quad (\mathbf{f} \in H_L).$$

С учетом неравенств (10) и $\|\tilde{\mathbf{U}}(\tau)\| \leq c_\Lambda$, $|e(\tau)| \leq c_\Lambda e^{|\rho|T}$ имеем оценки:

$$\|\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) \mathbf{f}\|_{L_2} \leq [\tilde{c}_\Lambda (c_1 \tilde{c}_{1,0} + c_2 \tilde{c}_{2,0}) + c_3 \tilde{c}_3 \tilde{c}_{3,0}] c_\Lambda^3 e^{|\rho|T} \|\mathbf{f}\|_{H_L} \quad (\mathbf{f} \in H_L),$$

на основании которых получаем утверждение:

Теорема 3. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) [H_L \rightarrow L_2]$ ($\mathbf{x} \in \Omega_D$, $L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$) ограничены в совокупности на множестве Ω_D .

В силу теоремы 1 при условии $\partial\Omega \in C^3$ может быть определена константа $c_h \equiv \sup_{(d,s,s') \in \Gamma''} |\partial_s p'|$. В силу следствия 1 и неравенства $r \geq D$, имеющего место, если

$\sigma \in I_s \setminus \Xi_s$, при указанной гладкости кривой $\partial\Omega$ могут быть определены константы

$$\tilde{c}_{i,j} \equiv \sup_{(d,s,\rho) \in \tilde{\Gamma}'} |\partial_{\rho}^j \tilde{\delta}_i| \quad (i=1,2, \partial\Omega \in C^{n+2}), \quad \tilde{c}_{3,j} \equiv \sup_{r \geq D, \tau > 0} |\partial_{s'}^j g(x, s', \tau)| \quad (\partial\Omega \in C^{n+1})$$

$$(j = \overline{0, n}, n \in \mathbf{Z}_+).$$

Используя неравенства (3)–(5) и $h'_{d,s,l} \leq 2^{-1} c_h h_s$, при условиях $\partial\Omega \in C^5$, $f \in C^2(\partial\Omega)$ получаем оценки:

$$\begin{aligned} & \left\| \tilde{A}_i(x, \tau) P_L f - A_i(x, \tau) \tilde{P}_L P_L f \right\|_{L_2} \leq \\ & \leq \tilde{c}_\omega \sup_{(d,s,\rho) \in \tilde{\Gamma}'} \left\| \partial_{\rho}^3 \left[\tilde{\delta}_i (\tilde{P}_L P_L f)(s + \sigma_{d,s}(\rho)) \right] \right\|_{L_2} 8^{-1} c_h^3 h_s^3 \sum_{l=-L-2}^L \int_{\rho_{d,s}(\alpha_{s,l})}^{\rho_{d,s}(\alpha_{s,l+1})} a_i(d, \rho, \tau) d\rho \leq \\ & \leq \tilde{c}_\omega \hat{c}_i \|f\|_{C^2(\partial\Omega)} 8^{-1} c_h^3 h_s^3 \tilde{c}_i y_i, \\ & \hat{c}_i \equiv \tilde{c}_{i,3} c_\Lambda + (3\tilde{c}_{i,2} \tilde{c}_{2,0} + 3\tilde{c}_{i,1} \tilde{c}_{2,1} + \tilde{c}_{i,0} \tilde{c}_{2,2}) c'_\Lambda + 3(\tilde{c}_{i,1} \tilde{c}_{2,0}^2 + \tilde{c}_{i,0} \tilde{c}_{2,1} \tilde{c}_{2,0}) c''_\Lambda \quad (i=1,2). \end{aligned} \quad (11)$$

При условиях $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $f \in C^2(\partial\Omega)$ имеем оценки [16. С. 259]:

$$\begin{aligned} & \left\| \tilde{A}_3(x, \tau) P_L f - A_3(x, \tau) \tilde{P}_L P_L f \right\|_{L_2} \leq \sup_{r \geq D, \tau > 0} \left\| \partial_{s'}^{2\gamma} \left[g(x, s', \tau) (\tilde{P}_L P_L f)(s') \right] \right\|_{L_2} h_s^{2\gamma} \tilde{c}_3 y_3 \leq \\ & \leq \hat{c}_3 \|f\|_{C^2(\partial\Omega)} h_s^{2\gamma} \tilde{c}_3 y_3, \\ & \hat{c}_3 \equiv \left[(2\gamma)! \right]^{-3} (2\gamma+1)^{-1} (\gamma!)^4 \left[\tilde{c}_{3,2\gamma} c_\Lambda + 2\gamma \tilde{c}_{3,2\gamma-1} c'_\Lambda + \gamma (2\gamma-1) \tilde{c}_{3,2\gamma-2} c''_\Lambda \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

На основании оценок (11), (12) и $\|\tilde{U}(\tau)\| \leq c_\Lambda$, $|e(\tau)| \leq \tilde{c}_\Lambda e^{|p|T}$ получаем при условиях $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geq 2$, неравенства

$$\left\| \hat{G}(x) P_L f - \tilde{G}(x) P_L f \right\|_{L_2} \leq \left[\tilde{c}_\omega (\hat{c}_1 \tilde{c}_1 c_1 + \hat{c}_2 \tilde{c}_2 c_2) 8^{-1} c_h^3 h_s^3 + \hat{c}_3 \tilde{c}_3 c_3 h_s^{2\gamma} \right] c_\Lambda^2 e^{|p|T} \|f\|_{C^2(\partial\Omega)},$$

из которых вытекает утверждение:

Теорема 4. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geq 2$. Тогда операторы $\hat{G}(x) P_L$ [$C^2(\partial\Omega) \rightarrow L_2$] ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$) сходятся при $L \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\tilde{G}(x) P_L$ [$C^2(\partial\Omega) \rightarrow L_2$] равномерно по N и $x \in \Omega_D$ с порядком аппроксимации $O(h_s^3)$.

При вычислении операторов $\hat{G}(x)$ интегрирование по τ осуществляется точно. Затем в операторах $\hat{G}_i(x)$ ($i=1,2$) вычисляются интегралы по ρ , но не все они вычисляются аналитически. В таких случаях для точного интегрирования функции $\exp(-z_n)$ и $\text{Ei}(-z_n)$ ($z_n \equiv (\rho^2 + d^2)/(4\tilde{\tau}_n)$, $n = \overline{1, N\tilde{N}}$) заменяются многочленами, образованными первыми членами разложения этих функций в ряды Маклорена, а именно: $K_M + 1$ членами со степенями $(z_n)^k$ ($k = \overline{0, K_M}$), а также логарифмическим членом $\ln(z_n)$ в случае $\text{Ei}(-z_n)$. Значения $\sigma_{d,s}(\bar{\rho}_{d,s,l} + \tilde{q}_m h'_{d,s,l})$ получаются как численные решения уравнений $\rho_{d,s}(\sigma) = \bar{\rho}_{d,s,l} + \tilde{q}_m h'_{d,s,l}$. Производ-

ные $x'_i(s)$ ($i=1,2$) вычисляются аналитически, так как аналитические выражения функций $x_i(s)$ считаются известными.

На основании теорем 2, 4 делаем следующий вывод:

Следствие 2. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geq 2$. Тогда операторы $\hat{G}(x)P_L [C_{0,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$) сходятся при $L, N \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $G(x) [C_{0,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ равномерно по $x \in \Omega_D$ с порядком аппроксимации $O(h_\tau^3 + h_s^3)$.

Введем в рассмотрение банахово пространство $C(I_T)$ классов функций $f \in L_2$, эквивалентных непрерывным на отрезке I_T функциям $f(t)$, с нормой $\|f\|_{C_T} \equiv \sup_{t \in I_T} |f(t)|$. Вследствие оценок

$$|f(t)| = \left| \int_0^t (Bf)(t') dt' \right| \leq \left[t \int_0^t |(Bf)(t')|^2 dt' \right]^{1/2} \leq \sqrt{T} \|f\|_{H^1}, \quad (t \in I_T, f \in H^1) \quad (13)$$

имеет место вложение $H^1 \subset C(I_T)$

Введем в рассмотрение банаховы пространства C_N сеточных функций f с комплексными значениями f_n , заданными в узлах τ_n ($n = \overline{0, N}$), с нормой $\|f\|_{C_N} = \max_{0 \leq n \leq N} |f_n|$. Зададим операторы $P_N [H^1 \rightarrow C_N]$: $(P_N f)_n = f(\tau_n)$, и $\hat{P}_N [C_N \rightarrow C(I_T)]$:

$$(\hat{P}_N f)(t) \equiv \sum_{m=0}^2 f_{2n+m} \Lambda_m(t) \quad (f \in C_N, t \in [\tau_{2n}, \tau_{2n+2}], n = \overline{0, N/2-1}).$$

В силу неравенств (3), (4) и (13) справедливы оценки $\|\hat{P}_N P_N\| \leq c_\Lambda \sqrt{T}$ и

$$\|\hat{P}_N P_N f - f\|_{C(I_T)} \leq c_\omega \sqrt{T} \|f\|_{H^4} h_\tau^3 \quad (f \in H^4). \quad (14)$$

Учитывая следствие 2, оценки (7), (14) и замкнутость оператора B , приходим к следующему утверждению:

Следствие 3. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geq 2$. Тогда операторы $\hat{P}_N P_N \hat{G}(x)P_L [C_{1,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow C(I_T)]$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$) сходятся при $L, N \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $G(x) [C_{1,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow C(I_T)]$ равномерно по $x \in \Omega_D$ с порядком аппроксимации $O(h_\tau^3 + h_s^3)$.

Согласно следствию 3 функции $\tilde{z}(x) \equiv \hat{P}_N P_N \hat{G}(x)P_L v$ являются аппроксимациями функции $z(x)$. В силу теоремы 3 и неравенств $\|P_L\| \leq 1$, $\|\hat{P}_N P_N\| \leq c_\Lambda \sqrt{T}$ операторы $\tilde{G}(x) [C(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ ограничены в совокупности, поэтому аппроксимации $\tilde{z}(x)$ устойчивы к возмущениям функции v в норме $C_1(\partial\Omega)$. Сформулируем основной результат настоящей работы:

Следствие 4. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geq 2$, $R > 0$. Тогда функции $\tilde{z}(x, t)$ ($L/2 \in \mathbb{N}$, $N/2 \in \mathbb{N}$) сходятся при $L, N \rightarrow \infty$ с кубической скоростью к функции $z(x, t)$ равномерно относительно $(x, t) \in \Omega_D \times I_T$ (при почти всех t) и функций $v \in C_{1,3}^3(\partial\Omega)$, удовлетворяющих неравенству $\|v\|_{C_{1,3}^3(\partial\Omega)} \leq R$. Кроме того, функции $\tilde{z}_\delta(x, t) : \tilde{z}_\delta(x) \equiv \tilde{G}(x)v_\delta$, сходятся к функции $z(x, t)$ при $L, N \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$ равномерно относительно $(x, t) \in \Omega_D \times I_T$ и функций $v \in C_{1,3}^3(\partial\Omega)$, $v_\delta \in C_1(\partial\Omega)$, удовлетворяющих условиям $\|v\|_{C_{1,3}^3(\partial\Omega)} \leq R$, $\|v_\delta - v\|_{C_1(\partial\Omega)} \leq \delta$.

3. Об аппроксимации нормальных производных решений краевых задач вблизи границы области

Пусть $\Omega_- \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_+}$. Введем в рассмотрение внутренние и внешние задачи Неймана:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{u}_\pm(x) &= \mathbf{B}\mathbf{u}_\pm(x) + p\mathbf{u}_\pm(x) \quad (x \in \Omega_\pm), \\ \partial_{n(s)} \mathbf{u}_\pm(x) &= \mathbf{w}(x) \quad (x = \tilde{x}(s), s \in I_S). \end{aligned} \quad (15_\pm)$$

Здесь $\nabla \equiv (\partial_{x_1}, \partial_{x_2})$; $\mathbf{u}_\pm(x)$ и $\mathbf{w}(x)$ – векторные функции со значениями в пространстве L_2 , заданные на множествах $\Omega_\pm$ и $\partial\Omega$ соответственно. Векторные задачи (15 $_\pm$) суть НКЗТ в области $\Omega_\pm \times I_T$ с граничными условиями второго рода и нулевым начальным условием.

Пусть $C^2(\Omega_\pm)$ и $C(\overline{\Omega_\pm})$ – пространства функций со значениями в L_2 , дважды непрерывно дифференцируемых на множестве $\Omega_\pm$ и непрерывных на замыкании этого множества $\overline{\Omega_\pm}$ соответственно.

Определение 2. Решением уравнения $\nabla^2 \mathbf{u}_\pm = \mathbf{B}\mathbf{u}_\pm + p\mathbf{u}_\pm$ называется функция $\mathbf{u}_\pm \in C^2(\Omega_\pm)$ со значениями в $D(\mathbf{B})$, обращающая уравнение $\nabla^2 \mathbf{u}_\pm = \mathbf{B}\mathbf{u}_\pm + p\mathbf{u}_\pm$ в истинное равенство.

Определение 3. Решением краевой задачи (15 $_\pm$) называется функция $\mathbf{u}_\pm \in C(\overline{\Omega_\pm})$, являющаяся решением уравнения $\nabla^2 \mathbf{u}_\pm = \mathbf{B}\mathbf{u}_\pm + p\mathbf{u}_\pm$ и имеющая с внутренней (внешней) стороны $\partial\Omega$ правильную НП $\partial_{n(s)}^\pm \mathbf{u}_\pm$ ($\partial_{n(s)}^\pm \mathbf{u}_\pm(\tilde{x}_d(s)) \rightarrow \partial_{n(s)}^\pm \mathbf{u}_\pm(\tilde{x}(s))$) при $d \rightarrow \pm 0$ равномерно относительно $s \in I_S$), определяемую равенствами $\partial_{n(s)}^\pm \mathbf{u}_\pm = \mathbf{w}$ ($x = \tilde{x}(s)$, $s \in I_S$). В случае задачи (15 $_+$) требуется также выполнение условия $|x| \|\mathbf{u}_-\|_{L_2} \|\nabla \mathbf{u}_-\|_{L_2} \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

В пространстве $C(\partial\Omega)$ зададим операторы $\mathbf{G}_\pm \equiv \mp 2^{-1} \mathbf{I} + \mathbf{G}$ ($\mathbf{I}$ – тождественный оператор), где $(\mathbf{G}f)(x) \equiv \mathbf{G}(x)f$ при $x \in \partial\Omega$, $f \in C(\partial\Omega)$.

Теорема 5. Пусть $\partial\Omega \in C^{k+2}$. Тогда операторы $\mathbf{G}_\pm [C_{n,m}^k(\partial\Omega)]$ всюду определены, ограничены и ограниченно обратимы ($k, n, m \in \mathbb{Z}_+$).

Теорема 6. Пусть $\partial\Omega \in C^2$, $x \in \Omega_{\pm}$. При любом $w \in C(\partial\Omega)$ краевая задача (15_±) однозначно разрешима и решение $u_{\pm}(x)$ имеет вид: $u_{\pm}(x) = G_0(x)G_{\pm}^{-1}w$.

Доказательство теорем 5 и 6. Пусть $p > 0$. Тогда оператор $B + pI$ порождает экспоненциально убывающую C_0 -полугруппу сжимающих операторов $e^{-pt}U(t)$, и утверждения теоремы 5 могут быть получены по аналогии со следствиями 1 и 2 работы [14], а теоремы 6 – по аналогии с заключительным утверждением работы [17]. Кроме того, обобщения данных утверждений для абстрактного гильбертова пространства вместо L_2 получены в следствиях 9 и 10 работы [18].

Докажем утверждения теорем 5 и 6 для произвольных $p \in \mathbf{R}$. Обозначим через $G'_0(x)$, $G'_{\pm}$ и $G''_0(x)$, $G''_{\pm}$ операторы $G_0(x)$, $G_{\pm}$ при $p = p' \in \mathbf{R}$ и $p = p'' > 0$ соответственно. Пусть функции $u'_{\pm}$ и $u''_{\pm}$ являются решениями краевых задач (15_±) с граничными функциями $w' \in C(\partial\Omega)$ и $w'' \in C(\partial\Omega)$ при $p = p'$ и $p = p''$ соответственно. Ограниченный оператор $E_{p'-p}: (E_{p'-p}f)(x, t) \equiv \exp[(p'' - p')t]f(x, t)$ биективно отображает пространство $C_{n,m}^k(\partial\Omega)$ само на себя при любых $k, n, m \in \mathbf{Z}_+$. Имеем равенства $G'_0(x) = E_{p'-p}G''_0(x)E_{p'-p}^{-1}$, $G'_{\pm}(x) = E_{p'-p}G''_{\pm}(x)E_{p'-p}^{-1}$, из которых следуют утверждения теоремы 5 для произвольных $p \in \mathbf{R}$, а также равенства

$$u'_{\pm}(x) = E_{p'-p}u''_{\pm}(x) = E_{p'-p}G''_0(x)(G''_{\pm})^{-1}w'' = G'_0(x)(G'_{\pm})^{-1}w',$$

при условии что $w' = E_{p'-p}w''$, из которых следуют утверждения теоремы 6 для произвольных $p \in \mathbf{R}$. Теоремы 5 и 6 доказаны.

Зададим в пространстве H_L операторы $\hat{G}_{\pm} \equiv \mp 2^{-1}I + \hat{G}$, где $(\hat{G}f)_l = \hat{G}(\tilde{x}(s_l))f$ при $l = \overline{-L/2, L/2}$, $f \in H_L$. По аналогии с теоремой 6, доказанной в работе [19], имеем следующее утверждение:

Теорема 7. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда существует $N_{\min} \in \mathbf{N}$, такое что при $N/2 \in \mathbf{N}_{\min} \equiv \{N_{\min}, N_{\min} + 1, \dots\}$, $L/2 \in \mathbf{N}$ операторы $\hat{G}_{\pm} [H_L]$ обратимы, и обратные операторы $\hat{G}_{\pm}^{-1}$ ограничены в совокупности.

С учетом следствия 2 и теорем 5, 7 делаем следующий вывод:

Следствие 5. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geq 2$. Тогда операторы $\hat{G}_{\pm}^{-1}P_L [C_{0,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow H_L]$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}_{\min}$) сходятся при $L, N \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $P_L G_{\pm}^{-1} [C_{0,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow H_L]$ с порядком аппроксимации $O(h_t^3 + h_s^3)$.

Введем в рассмотрение операторы $R_{\pm}(x) \equiv G(x)G_{\pm}^{-1}$ и $\tilde{R}_{\pm}(x) \equiv \hat{P}_N P_N \hat{G}(x) \hat{G}_{\pm}^{-1} P_L$ ($x \in \Omega_D^{\pm} \equiv \Omega_{\pm} \cap \Omega_D$). С учетом следствий 3, 5 и теорем 3, 5 получаем следующее утверждение:

Следствие 6. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geq 2$. Тогда операторы $\tilde{R}_{\pm}(x) [C_{1,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow C(I_T)]$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}_{\min}$) сходятся при $L, N \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответ-

ствующим операторам $\mathbf{R}_{\pm}(\mathbf{x}) [C_{1,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow C(I_T)]$ равномерно по $\mathbf{x} \in \Omega_D^{\pm}$ с порядком аппроксимации $O(h_{\tau}^3 + h_s^3)$.

Согласно следствию 6 функции $\tilde{\mathbf{z}}_{\pm}(\mathbf{x}) \equiv \tilde{\mathbf{R}}_{\pm}(\mathbf{x})\mathbf{w}$ являются аппроксимациями функции $\mathbf{z}_{\pm}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{R}_{\pm}(\mathbf{x})\mathbf{w}$ – НП решения краевой задачи $(15_{\pm})$: $\mathbf{z}_{\pm}(\mathbf{x}) = \partial_{n(s)}\mathbf{u}_{\pm}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}_d(s)$, $d \in I_D$, $s \in I_S$). По аналогии со следствием 4 получаем заключительное утверждение:

Следствие 7. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geq 2$, $R > 0$. Тогда функции $\tilde{\mathbf{z}}_{\pm}(\mathbf{x}, t)$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$) сходятся при $L, N \rightarrow \infty$ с кубической скоростью к соответствующим функциям $\mathbf{z}_{\pm}(\mathbf{x}, t)$ равномерно относительно $(\mathbf{x}, t) \in \Omega_D^{\pm} \times I_T$ и функций $\mathbf{w} \in C_{1,3}^3(\partial\Omega)$, удовлетворяющих неравенству $\|\mathbf{w}\|_{C_{1,3}^3(\partial\Omega)} \leq R$. Кроме того, функции $\tilde{\mathbf{z}}_{\delta}^{\pm}(\mathbf{x}, t)$: $\tilde{\mathbf{z}}_{\delta}^{\pm}(\mathbf{x}) \equiv \tilde{\mathbf{R}}_{\pm}(\mathbf{x})\mathbf{w}_{\delta}$, сходятся к соответствующим функциям $\mathbf{z}_{\pm}(\mathbf{x}, t)$ при $L, N \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$ равномерно относительно $(\mathbf{x}, t) \in \Omega_D^{\pm} \times I_T$ и функций $\mathbf{w} \in C_{1,3}^3(\partial\Omega)$, $\mathbf{w}_{\delta} \in C_1(\partial\Omega)$, удовлетворяющих условиям $\|\mathbf{w}\|_{C_{1,3}^3(\partial\Omega)} \leq R$ и $\|\mathbf{w}_{\delta} - \mathbf{w}\|_{C_1(\partial\Omega)} \leq \delta$.

4. Квадратурные аппроксимации как причина отсутствия равномерной сходимости в области

Вычислительные эксперименты показали, что скорость сходимости аппроксимаций НП решений краевых задач существенно снижается по мере приближения точки $\mathbf{x}$ к границе $\partial\Omega$, если для аппроксимации всех интегралов $j_l(\mathbf{x}, \tau) \equiv \int_{s_l}^{s_{l+1}} g(\mathbf{x}, s', \tau) \tilde{f}(s') ds'$ ($l = -L-1, L$, $\mathbf{x} \in \Omega_D$, $\tilde{f} \equiv \tilde{\mathbf{P}}_L \mathbf{f}$, $\mathbf{f} \in H_L$) использовать ПКФГ. Покажем отсутствие равномерной по $d \in I_D$ сходимости аппроксимаций НП ТППС в случае, когда аппроксимируются (с помощью квадратурной формулы типа ПКФГ или КФНК) только интегралы $j_{l'}(\mathbf{x}, \tau)$ на ближайшей к точке $\mathbf{x}$ дуге $[\tilde{\mathbf{x}}(s_{l'-1/2}), \tilde{\mathbf{x}}(s_{l'+1/2})]$ при $\tau \in [0, \tau_{1/2}]$, а в остальных случаях интегралы $j_l(\mathbf{x}, \tau)$ вычисляются точно. Также с целью упрощения считаем, что $p = 0$, и вместо кусочно-квадратичной рассматриваем кусочно-постоянную интерполяцию:

$$\ddot{\mathbf{G}}(\mathbf{x})\mathbf{f} \equiv \sum_{n=0}^N \sum_{l=-L-1}^L \ddot{g}_{n,l} \mathbf{U}(\tau_n) \mathbf{f}(s_l) \quad (\mathbf{x} \in \Omega_D, \quad \mathbf{f} \in C(\partial\Omega), \quad L, N \in \mathbf{N}),$$

$$\ddot{g}_{n,l}(d, s, h_{\tau}, h_s) \equiv \int_{s_{l-1/2}}^{s_{l+1/2}} \tilde{g}_n(d, s, s', h_{\tau}) ds', \quad \tilde{g}_n(d, s, s', h_{\tau}) \equiv \int_{\tau_{n-1/2}}^{\tau_{n+1/2}} g(\tilde{\mathbf{x}}_d(s), s', \tau) d\tau,$$

$$\tau_{n\pm 1/2} \equiv (n \pm 2^{-1})h_{\tau}, \quad s_{l\pm 1/2} \equiv (l \pm 2^{-1})h_s, \quad \text{при этом полагаем: } g \equiv 0 \text{ при } \tau \leq 0, \text{ и учи-}$$

тываем, что $\mathbf{U}(\tau_N) = \mathbf{O}$.

Пусть $\mathbf{f} \in C_{0,2}^2$ и $\partial\Omega \in C^3$. Введем в рассмотрение векторную функцию $\mathbf{h}(\mathbf{x}, s', \tau)$ со значениями в пространстве L_2 : $\mathbf{h} \equiv g(\mathbf{x}, s', \tau) \mathbf{U}(\tau) \mathbf{f}(s')$ при $\tau > 0$,

$\mathbf{h} \equiv 0$ при $\tau \leq 0$ ($\mathbf{x} \in \Omega_D$, $\mathbf{s}' \in I_S$). Для любой замкнутой области $\Omega'_D \subset \Omega_D$ могут быть определены постоянные

$$\check{c}_{i,0} \equiv \sup_{\mathbf{x} \in \Omega'_D, \mathbf{s}' \in I_S, \tau \in \mathbf{R}} |\partial_{\tau}^i g(\mathbf{x}, \mathbf{s}', \tau)| \quad (i = \overline{0,2}), \quad \check{c}_{0,j} \equiv \sup_{\mathbf{x} \in \Omega'_D, \mathbf{s}' \in I_S, \tau \in \mathbf{R}} |\partial_{\mathbf{s}}^j g(\mathbf{x}, \mathbf{s}', \tau)| \quad (j = 1,2)$$

и существуют непрерывные производные $\partial_{\tau}^i \mathbf{h}$ ($i = \overline{0,2}$), $\partial_{\mathbf{s}}^j \mathbf{h}$ ($j = 1,2$) при $(\mathbf{x}, \mathbf{s}', \tau) \in \Omega'_D \times \overline{I_S} \times \mathbf{R}$. Учитывая, что $\mathbf{U}(\tau) = \mathbf{O}$ при $\tau \geq T$, имеем

$\mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{f} \equiv \int_{\tau_{-1/2}}^{\tau_{N+1/2}} d\tau \int_{I_S} \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{s}', \tau) d\mathbf{s}'$. С помощью формулы Тейлора с дополнительным членом в виде определенного интеграла [20, С. 146] можно получить оценки:

$$\begin{aligned} \|\ddot{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) \mathbf{f} - \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{f}\|_{L_2} &\leq 12^{-1} (T + h_{\tau}) S (c_{\tau} h_{\tau}^2 + c_s h_s^2), \\ c_{\tau}(\mathbf{f}, h_{\tau}) &\equiv \check{c}_{2,0} \|\mathbf{B} \mathbf{f}\|_{C(\partial\Omega)} h_{\tau} + 2\check{c}_{1,0} \|\mathbf{B} \mathbf{f}\|_{C(\partial\Omega)} + \check{c}_{0,0} \|\mathbf{B}^2 \mathbf{f}\|_{C(\partial\Omega)}, \\ c_s(\mathbf{f}, h_s) &\equiv \check{c}_{0,2} \|\mathbf{f}^{(1)}\|_{C(\partial\Omega)} h_s + 2\check{c}_{0,1} \|\mathbf{f}^{(1)}\|_{C(\partial\Omega)} + \check{c}_{0,0} \|\mathbf{f}^{(2)}\|_{C(\partial\Omega)}, \end{aligned}$$

согласно которым операторы $\ddot{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) [C_{0,2}^2(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ сходятся по операторной норме при $L, N \rightarrow \infty$ к соответствующим операторам $\mathbf{G}(\mathbf{x}) [C_{0,2}^2(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ с порядком аппроксимации $O(h_{\tau}^2 + h_s^2)$ равномерно по $\mathbf{x} \in \Omega'_D$. Обозначим через $\ddot{\mathbf{G}}(\tilde{\mathbf{x}}_d(s))$ оператор $\ddot{\mathbf{G}}(\tilde{\mathbf{x}}_d(s))$ ($s \in I_S$, $d \in I_D$), в котором интеграл $\ddot{g}_{0,l'}$ ($s \in [s'_{l'-1/2}, s'_{l'+1/2}]$) заменен квадратурной аппроксимацией $\check{g}_{0,l'}$ достаточно высокого порядка. Тогда при достаточной гладкости кривой $\partial\Omega$ операторы $\ddot{\mathbf{G}}(\tilde{\mathbf{x}}_d(s)) [C_{0,2}^2(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ сходятся по операторной норме при $L, N \rightarrow \infty$ к соответствующим операторам $\mathbf{G}(\tilde{\mathbf{x}}_d(s)) [C_{0,2}^2(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ с порядком аппроксимации $O(h_{\tau}^2 + h_s^2)$ равномерно по $(|d|, s) \in [d_0, D] \times I_S$ для любого $d_0 \in (0, D)$. В то же время справедлива теорема:

Теорема 8. Пусть остаточный член квадратурной формулы, используемой для аппроксимации интеграла $\check{g}_{0,l'}$ ($s \in [s'_{l'-1/2}, s'_{l'+1/2}]$, $d \in I_D$), имеет вид: $R_m[f] = c_m (b-a)^{2m+1} f^{(2m)}(\xi)$ ($\xi \in [a, b]$), где f – подынтегральная функция, $[a, b]$ – промежуток интегрирования, c_m – константа, зависящая только от $m \in \mathbf{Z}_+$. Пусть $\partial\Omega \in C^{2m+2}$. Тогда при $L, N \rightarrow \infty$ отсутствует равномерная по $|d| \in (0, d_0]$ сильная сходимость операторов $\ddot{\mathbf{G}}(\tilde{\mathbf{x}}_d(s)) [C_n^k(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ к соответствующим операторам $\mathbf{G}(\tilde{\mathbf{x}}_d(s)) [C_n^k(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ для любых фиксированных $k, n \in \mathbf{N}$, $s \in I_S$, $d_0 \in (0, D]$.

Доказательство. Пусть $s \in I_S$ фиксировано. Заметим, что

$$\begin{aligned} \ddot{g}_{0,l'} &= \int_{\Sigma-h_s}^{\Sigma} \check{g}_0(d, s, s+\sigma, h_{\tau}) d\sigma, \quad \text{где } \Sigma \equiv s'_{l'+1/2} - s \in (0, h_s], \\ \check{g}_0 &= -(2\pi)^{-1} \exp\left[-(\sigma^2 \psi'_0 + d^2)/(2h_{\tau})\right] (\sigma^2 \psi_2 + d) / (\sigma^2 \psi'_0 + d^2). \end{aligned}$$

Достаточно ограничиться рассмотрением значений $d > 0$. С помощью равенств $r_m \equiv R_m[\tilde{g}_0]$ ($m \in \mathbf{Z}_+$), где $h_\tau = 2^{-1}c_\tau d^2$, $d = Kh_s$, $c_\tau \equiv 2T/S^2$, зададим функции $r_m(K, h_s, \sigma)$ при $K \in \mathbf{N}$, $h_s \in (0, D/K]$ и $\sigma \in [\Sigma - h_s, \Sigma]$. Пусть $\tilde{\psi}'_0(K, h_s, \sigma) \equiv \psi'_0(Kh_s, s, s + \sigma)$. Учитывая, что $\inf_{(d, s, s') \in \Upsilon} \psi'_0 > 0$ и существуют непрерывные производные: $\partial_{s'}^j \psi'_0$ на Υ , $\partial_{s'}^j \psi_2$ на Θ ($j = \overline{0, 2m}$), можно представить функции r_m в виде:

$$r_m(K, h_s, \sigma) = -c_m K h_s^{2m+2} \exp \left[- \left(\sigma^2 \tilde{\psi}'_0 + K^2 h_s^2 \right) / \left(c_\tau K^2 h_s^2 \right) \right] \sum_{k=0}^m (-1)^{2m-k} S_{m,k} + o_m,$$

$$S_{m,k} \equiv \sigma^{2m-2k} (\tilde{\psi}'_0)^{2m-k} \sum_{n=0}^{2m-k} a_{m,k,n} K^{-2n} h_s^{-2n} \left(\sigma^2 \tilde{\psi}'_0 + K^2 h_s^2 \right)^{-2m+k+n-1},$$

где $a_{m,k,n}$ – постоянные коэффициенты ($a_{m,k,n} \geq (2\pi)^{-1} 2^{2m-k} c_\tau^{-n} (2m-k-n)!$), $o_m(K, h_s, \sigma) \rightarrow 0$ при $h_s \rightarrow 0$ и фиксированном $K \in \mathbf{N}$ равномерно по $\sigma \in [\Sigma - h_s, \Sigma]$.

Пусть $\check{\sigma} \equiv \sigma/h_s$, $\check{\Sigma} \equiv \Sigma/h_s$, $\check{r}_m(K, h_s, \check{\sigma}) \equiv r_m(K, h_s, \sigma h_s)$, $\check{\psi}'_0(K, h_s, \check{\sigma}) \equiv \tilde{\psi}'_0(K, h_s, \sigma h_s)$. Тогда

$$\check{r}_m(K, h_s, \check{\sigma}) = -c_m K^{-2m-1} \sum_{k=0}^m (-1)^{2m-k} \check{S}_{m,k} + \check{o}_m,$$

$$\check{S}_{m,k} \equiv \exp \left[-c_\tau^{-1} (\check{\sigma}^2 K^{-2} \check{\psi}'_0 + 1) \right] \check{\sigma}^{2m-2k} K^{-2m+2k} (\check{\psi}'_0)^{2m-k} \sum_{n=0}^{2m-k} a_{m,k,n} (\check{\sigma}^2 K^{-2} \check{\psi}'_0 + 1)^{-2m+k+n-1},$$

где $\check{o}_m(K, h_s, \check{\sigma}) \rightarrow 0$ при $h_s \rightarrow 0$ и фиксированном $K \in \mathbf{N}$ равномерно по $\check{\sigma} \in [\check{\Sigma} - 1, \check{\Sigma}]$. Заметим, что слагаемые $\check{S}_{m,k}(K, h_s, \check{\sigma})$ при $k < m$ стремятся к нулю при $K \rightarrow \infty$ равномерно по $h_s \in (0, D/K]$, $\check{\sigma} \in [\check{\Sigma} - 1, \check{\Sigma}]$. Так как $\check{\psi}'_0 = 1$ при $\sigma = d = 0$ и $\check{\Sigma} \leq 1$, то $\check{S}_{m,m}(K, 0, \check{\sigma}) \geq c'_m \equiv 2^{-m-1} \exp(-2/c_\tau) a_{m,m,0} > 0$ при $K \in \mathbf{N}$, $\check{\sigma} \in [\check{\Sigma} - 1, \check{\Sigma}]$. Поэтому существуют постоянные $K_m \in \mathbf{N}$, $h_m \in (0, D/K_m]$ и $c''_m \in (0, c'_m)$, такие что при $h_s \in (0, h_m]$, $\check{\sigma} \in [\check{\Sigma} - 1, \check{\Sigma}]$ имеет место оценка: $|\check{r}_m(K_m, h_s, \check{\sigma})| \geq c''_m \equiv K_m^{-2m-1} |c_m| c''_m$. Пусть $L' \in \mathbf{N}$ такое, что $h_s \in (0, h_m]$ при $L = L', L' + 1, \dots$. Тогда если $d = K_m h_s$, $h_\tau = 2^{-1}c_\tau d^2$ при $L = L', L' + 1, \dots$, то $|R_m[\tilde{g}_0]| \geq c''_m$.

Обозначим через $\check{\mathbf{G}}_L(s)$, $\check{\mathbf{G}}_L(s)$ ($L = L', L' + 1, \dots$) операторы $\check{\mathbf{G}}(\check{x}_d(s))$, $\check{\mathbf{G}}(\check{x}_d(s)) [C_n^k(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$, где $d = K_m h_s$, $h_\tau = 2^{-1}c_\tau d^2$, $k, n \in \mathbf{N}$. Пусть $f_1(s') \equiv 1$ ($s' \in I_s$), $f_2 \in H^n$, $\|f_2\|_{L_2} = 1$. Тогда $\tilde{\mathbf{f}} \equiv f_1 f_2 \in C_n^k(\partial\Omega)$ и имеют место оценки: $\|\check{\mathbf{G}}_L(s) \tilde{\mathbf{f}} - \check{\mathbf{G}}_L(s) \tilde{\mathbf{f}}\|_{L_2} = |R_m[\tilde{g}_0]| \geq c''_m$. В силу оценок (7), $\|U(\tau)\| \leq 1$ справедливы оценки:

$$\|\check{\mathbf{G}}_L(x) \tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{G}(x) \tilde{\mathbf{f}}\|_{L_2} \leq c_G \left(\|\mathbf{B} \tilde{\mathbf{f}}\|_{C(\partial\Omega)} h_\tau + \|\tilde{\mathbf{f}}^{(1)}\|_{C(\partial\Omega)} h_s \right) \leq c_G \|f_2\|_{H^1} 2^{-1} c_\tau K_m^2 h_s^2.$$

При достаточно большом натуральном $L'' \geq L'$ получаем неравенство $c_G \|f_2\|_{H^1} c_\tau K_m^2 h_s^2 \leq c_m'''$ ($L = L'', L'' + 1, \dots$). В результате имеем оценки: $\|\tilde{\mathbf{G}}_L(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{G}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{f}}\|_{L_2} \geq 2^{-1} c_m'''$ ($L = L'', L'' + 1, \dots$). Теорема доказана.

5. Вычислительные эксперименты

Численную проверку эффективности предлагаемой аппроксимации НП ТППС осуществляем здесь с помощью соответствующей аппроксимации НП решения краевой задачи (15₊) внутри единичного круга при условии, что $p = 0$ и граничная функция $w(\varphi, t) = t^2 (1-t)^2 \cos \varphi$ (φ – полярный угол с полюсом в центре круга). Точные значения функции $\mathbf{z}_+$ при этом вычисляем с помощью рядов:

$$z_+(\varphi, t) = 2 \cos \varphi \left\{ -2^{-1} f(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1'(\mu_k R)}{J_1(\mu_k) (\mu_k^2 - 1)} \sum_{l=1}^4 \frac{(-1)^{l+1} [f^{(l)}(t) - f^{(l)}(0) \exp(-\mu_k^2 t)]}{\mu_k^{2l-1}} \right\},$$

где $f(t) \equiv t^2 (1-t)^2$, $J_1(z)$ – функция Бесселя, μ_k – положительные корни уравнения $J_1'(z) = 0$, R – полярный радиус. Для данной геометрии имеем $D = 2/(3\pi)$, $\Sigma_s'' = -\Sigma_s' = \arcsin(2/(3\pi))$ ($s \in I_s$). Аппроксимации $\tilde{\mathbf{z}}_+$ вычисляем при значениях $\gamma = 6$ и $K_M = 10$. Кроме того, вычисляем функции $\tilde{\mathbf{z}}_i^+ \equiv \hat{\mathbf{P}}_N \mathbf{P}_N \hat{\mathbf{G}}_i(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{G}}_+^{-1} \mathbf{P}_L \mathbf{w}$ ($i = 1, 2, 3$), при этом операторы $\hat{\mathbf{G}}_i(\mathbf{x})$ отличаются от операторов $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x})$ только тем, что операторы $\mathbf{A}_{1-2}(\mathbf{x}, \tau) \tilde{\mathbf{P}}_L$, где $\mathbf{A}_{1-2}(\mathbf{x}, \tau) \equiv \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, \tau) + \mathbf{A}_2(\mathbf{x}, \tau)$ ($\mathbf{x} \in \Omega_D$), вычисляются не с помощью интегрирования по переменной ρ , а с помощью ПКФГ с $\gamma_{1-2} = 12, 24, 48$ узлами соответственно по аналогии с $\mathbf{A}_3(\mathbf{x}, \tau) \tilde{\mathbf{P}}_L$. Вычисления осуществляем с двойной точностью при значениях параметров $T = 1$, $\tilde{N} = 1$. Для определения погрешностей аппроксимаций $\tilde{\mathbf{z}}_+$, $\tilde{\mathbf{z}}_i^+$ находим их относительные среднеквадратичные отклонения от точной функции $\mathbf{z}_+$: $\delta \tilde{\mathbf{z}}_+ \equiv \|\tilde{\mathbf{z}}_+ - \mathbf{z}_+\| / \|\mathbf{z}_+\|$, $\delta \tilde{\mathbf{z}}_i^+ \equiv \|\tilde{\mathbf{z}}_i^+ - \mathbf{z}_+\| / \|\mathbf{z}_+\|$, при этом $\|\cdot\|$ – среднеквадратичная норма, вычисляемая при фиксированных значениях $d = 1 - R$ в точках $\tilde{\mathbf{x}}_d(s_{l+1/2})$ ($l = -L-1, L$). В таблице в каждой основной ячейке представлены значения $\delta \tilde{\mathbf{z}}_+$, $\delta \tilde{\mathbf{z}}_1^+$, $\delta \tilde{\mathbf{z}}_2^+$, $\delta \tilde{\mathbf{z}}_3^+$ в соответствующем порядке сверху вниз.

Относительные среднеквадратичные отклонения

d	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-15}
$h_\tau = 1/16$	$6.68 \cdot 10^{-3}$	$6.97 \cdot 10^{-3}$	$7.00 \cdot 10^{-3}$	$7.00 \cdot 10^{-3}$	$7.00 \cdot 10^{-3}$	$7.00 \cdot 10^{-3}$
$h_s = \pi/7$	$7.33 \cdot 10^{-3}$	$2.99 \cdot 10^{-1}$	$1.14 \cdot 10^0$	$1.24 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$
	$6.68 \cdot 10^{-3}$	$4.13 \cdot 10^{-2}$	$8.20 \cdot 10^{-1}$	$1.21 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$
	$6.68 \cdot 10^{-3}$	$6.97 \cdot 10^{-3}$	$7.33 \cdot 10^{-2}$	$1.08 \cdot 10^0$	$1.24 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$

Окончание таблицы

d	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-15}
$h_\tau = 1/32$	$6.34 \cdot 10^{-4}$	$7.08 \cdot 10^{-4}$	$7.17 \cdot 10^{-4}$	$7.17 \cdot 10^{-4}$	$7.17 \cdot 10^{-4}$	$7.17 \cdot 10^{-4}$
$h_s = \pi/15$	$6.34 \cdot 10^{-4}$	$3.02 \cdot 10^{-2}$	$1.02 \cdot 10^0$	$1.23 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$
	$6.34 \cdot 10^{-4}$	$2.49 \cdot 10^{-3}$	$4.49 \cdot 10^{-1}$	$1.16 \cdot 10^0$	$1.24 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$
	$6.34 \cdot 10^{-4}$	$7.09 \cdot 10^{-4}$	$5.93 \cdot 10^{-2}$	$9.03 \cdot 10^{-1}$	$1.22 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$
$h_\tau = 1/64$	$6.26 \cdot 10^{-5}$	$7.93 \cdot 10^{-5}$	$8.14 \cdot 10^{-5}$	$8.16 \cdot 10^{-5}$	$8.16 \cdot 10^{-5}$	$8.16 \cdot 10^{-5}$
$h_s = \pi/31$	$6.26 \cdot 10^{-5}$	$3.23 \cdot 10^{-2}$	$7.80 \cdot 10^{-1}$	$1.20 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$
	$6.26 \cdot 10^{-5}$	$1.05 \cdot 10^{-4}$	$4.04 \cdot 10^{-2}$	$1.07 \cdot 10^0$	$1.23 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$
	$6.26 \cdot 10^{-5}$	$7.93 \cdot 10^{-5}$	$2.48 \cdot 10^{-3}$	$5.74 \cdot 10^{-1}$	$1.18 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$
$h_\tau = 1/128$	$6.24 \cdot 10^{-6}$	$9.17 \cdot 10^{-6}$	$9.66 \cdot 10^{-6}$	$9.73 \cdot 10^{-6}$	$9.74 \cdot 10^{-6}$	$9.74 \cdot 10^{-6}$
$h_s = \pi/63$	$6.24 \cdot 10^{-6}$	$2.55 \cdot 10^{-3}$	$3.94 \cdot 10^{-1}$	$1.15 \cdot 10^0$	$1.24 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$
	$6.24 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-5}$	$5.50 \cdot 10^{-2}$	$8.79 \cdot 10^{-1}$	$1.22 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$
	$6.24 \cdot 10^{-6}$	$9.17 \cdot 10^{-6}$	$5.70 \cdot 10^{-4}$	$1.49 \cdot 10^{-1}$	$1.10 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$

Можно заметить, что аппроксимации $\tilde{\mathbf{z}}_+$ обладают кубической скоростью сходимости, сохраняющейся даже при очень малых по модулю значениях d . Близкие результаты получены и при выборе других точек наблюдения $\tilde{\mathbf{x}}_d(s)$. Скорости сходимости аппроксимаций $\tilde{\mathbf{z}}_i^+$ снижаются от кубической до нулевой по мере приближения к границе $\partial\Omega$ при фиксированных h_τ , h_s и восстанавливаются до кубической по мере уменьшения h_τ , h_s при фиксированных d . При приближении точки $\mathbf{x}$ к узлу квадратурной аппроксимации оператора $\mathbf{A}_{1-2}(\mathbf{x}, \tau)\tilde{\mathbf{P}}_L$, а именно: точки $\tilde{\mathbf{x}}_d(s_i)$ к точке $\tilde{\mathbf{x}}(s_i)$ в случае использования КФНК замкнутого типа, возникают проблемы вычислительного характера: $\tilde{g}_0(d, s, s, h_\tau) \sim d^{-1} \rightarrow \infty$ при $d \rightarrow 0$ и фиксированных $h_\tau > 0$, $s \in I_s$, и ошибки $\delta\tilde{\mathbf{z}}_i^+$ приобретают катастрофический характер. Близкие результаты были получены и для аппроксимаций НП решений краевой задачи (15_) $\tilde{\mathbf{z}}_-$ и $\tilde{\mathbf{z}}_i^-$ во внешности единичного круга. Так как аппроксимации $\tilde{\mathbf{z}}_\pm$ и $\tilde{\mathbf{z}}_i^\pm$ отличаются только способом вычисления операторов $\mathbf{G}(\mathbf{x})$, определяющих НП ТППС вблизи границы $\partial\Omega$, то сделанные на основе численных экспериментов выводы относительно аппроксимаций НП решений краевых задач можно перенести на соответствующие аппроксимации НП ТППС.

Заключение

В рамках коллокационного метода граничных элементов на основе кусочно-квадратичной интерполяции получены аппроксимации НП ТППС, равномерно сходящиеся с кубической скоростью вблизи границы двумерной пространственной области. Для этого используется точное интегрирование по переменной ρ – компоненте межточечного расстояния r , обладающей достаточно гладкой зависимостью от параметра s . Показано, что использование вместо такого интегрирования широкого круга квадратурных формул, в частности ПКФГ и КФНК, влечет нарушение равномерной сходимости аппроксимаций НП ТППС вблизи границы

пространственной области. Заметим, что аналогичная аппроксимация может быть использована для вычисления НП логарифмического потенциала простого слоя.

Список источников

1. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М. : Мир, 1987. 524 с.
2. Sladek V., Sladek J., Tanaka M. Optimal transformations of the integration variables in computation of singular integrals in BEM // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2000. V. 47 (7). P. 1263–1283.
3. Gu Y., Chen W., Zhang J. Investigation on near-boundary solutions by singular boundary method // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2012. V. 36 (8). P. 1173–1182.
4. Крутицкий П.А., Федотова А.Д., Колыбасова В.В. Квадратурная формула для потенциала простого слоя // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 9. С. 1269–1284.
5. Крутицкий П.А., Колыбасова В.В. Численный метод решения интегральных уравнений в задаче с наклонной производной для уравнения Лапласа вне разомкнутых кривых // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 9. С. 1262–1276.
6. Sladek V., Sladek J., Tanaka M. Numerical integration of logarithmic and nearly logarithmic singularity in BEMs // Applied Mathematical Modelling. 2001. V. 25. P. 901–922.
7. Johnston P.R., Elliott D. A sinh transformation for evaluating nearly singular boundary element integrals // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2005. V. 62 (4). P. 564–578.
8. Fu Z.J., Chen W., Qu W. Numerical investigation on three treatments for eliminating the singularities of acoustic fundamental solutions in the singular boundary method // WIT Transactions on Modelling and Simulation. 2014. V. 56. P. 15–26.
9. Иванов Д.Ю. Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы области в случае двумерных задач нестационарной теплопроводности с граничными условиями второго и третьего рода // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 57. С. 5–25.
10. Иванов Д.Ю. Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы двумерной области с помощью полуаналитической аппроксимации теплового потенциала двойного слоя // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 65. С. 30–52.
11. Крутицкий П.А., Резниченко И.О., Колыбасова В.В. Квадратурная формула для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56, № 9. С. 1270–1288.
12. Бахшальева М.Н. Квадратурная формула для производной логарифмических потенциалов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 68. С. 5–22.
13. Khalilov E.H. Cubic formula for the normal derivative of a double layer acoustic potential // Transactions of NAS of Azerbaijan, series of physical-technical and mathematical sciences. 2014. V. 34 (1). P. 73–82.
14. Иванов Д.Ю. Устойчивая разрешимость в пространствах дифференцируемых функций некоторых двумерных интегральных уравнений теплопроводности с операторно-полугрупповым ядром // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 38. С. 33–45.
15. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М. : Наука, 1981. Т. 4, ч. 2. 551 с.
16. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 636 с.
17. Иванов Д.Ю. Решение двумерных краевых задач, соответствующих начально-краевым задачам диффузии на прямом цилиндре // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 8. С. 1094–1103.

18. Иванов Д.Ю. Решение краевых задач для двумерного эллиптического дифференциально-операторного уравнения в абстрактном гильбертовом пространстве с помощью метода граничных интегральных уравнений // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 60. С. 11–31.
19. Иванов Д.Ю. О решении плоских задач нестационарной теплопроводности коллокационным методом граничных элементов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 50. С. 9–29.
20. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М. : Физматлит, 2001. Т. 2. 863 с.

References

1. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. (1984) *Boundary Element Techniques*. New York: Springer-Verlag.
2. Sladek V., Sladek J., Tanaka M. (2000) Optimal transformations of the integration variables in computation of singular integrals in BEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 47(7). pp. 1263–1283. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0207(20000310)47:7%3C1263::AID-NME811%3E3.0.CO;2-I
3. Gu Y., Chen W., Zhang J. (2012) Investigation on near-boundary solutions by singular boundary method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 36(8). pp. 1173–1182. DOI: 10.1016/jenganabound.2012.01.006.
4. Krutitskii P.A., Fedotova A.D., Kolybasova V.V. (2019) Quadrature formula for the simple layer potential. *Differential Equations*. 55(9). pp. 1226–1241. DOI: 10.1134/s0012266119090106.
5. Krutitskii P.A., Kolybasova V.V. (2016) Numerical method for the solution of integral equations in a problem with directional derivative for the Laplace equation outside open curves. *Differential Equations*. 52(9). pp. 1219–1233. DOI: 10.1134/s0012266116090135.
6. Sladek V., Sladek J. and Tanaka M. (2001) Numerical integration of logarithmic and nearly logarithmic singularity in BEMs. *Applied Mathematical Modelling*. 25. pp. 901–922. DOI: 10.1016/s0307-904x(01)00021-x.
7. Johnston P.R., Elliott D. (2005) A sinh transformation for evaluating nearly singular boundary element integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 62(4). pp. 564–578. DOI: 10.1002/nme.1208.
8. Fu Z.J., Chen W., Qu W. (2014) Numerical investigation on three treatments for eliminating the singularities of acoustic fundamental solutions in the singular boundary method. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*. 56. pp. 15–26. DOI: 10.2495/BEM360021.
9. Ivanov D.Yu. (2019) Utochneniye kollokatsionnogo metoda granichnykh elementov vblizi granitsy oblasti v sluchaye dvumernykh zadach nestatsionarnoy teploprovodnosti s granichnymi usloviyami vtorogo i tret'yego roda [A refinement of the boundary element collocation method near the boundary of domain in the case of two-dimensional problems of non-stationary heat conduction with boundary conditions of the second and third kind]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 57. pp. 5–25. DOI 10.17223/19988621/57/1.
10. Ivanov D.Yu. (2020) Utochneniye kollokatsionnogo metoda granichnykh elementov vblizi granitsy dvumernoy oblasti s pomoshch'yu poluanaliticheskoy approksimatsii teplovogo potentsiala dvoynogo sloya [A refinement of the boundary element collocation method near the boundary of a two-dimensional domain using semianalytic approximation of the double layer heat potential]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 65. pp. 30–52. DOI: 10.17223/19988621/65/3.
11. Krutitskii P.A., Reznichenko I.O., Kolybasova V.V. (2020) Quadrature formula for the direct value of the normal derivative of the single layer potential. *Differential Equations*. 56(9). pp. 1237–1255. DOI: 10.1134/s001226612009013x.

12. Bakhshaliyeva M.N. (2020) Kvadrurnaya formula dlya proizvodnoy logarifmicheskikh potentsialov [A quadrature formula for the derivative of logarithmic potentials]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 68. pp. 5–22. DOI: 10.17223/19988621/68/1.
13. Khalilov E.H. (2014) Cubic formula for the normal derivative of a double layer acoustic potential. *Transactions of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, series of physical-technical and mathematical sciences*. 34(1). pp. 73–82. http://imm.az/journals/AMEA_xeberleri/cild34_N1_2014/meqaleler/73-82.pdf.
14. Ivanov D.Yu. (2015) Ustoychivaya razreshimost' v prostranstvakh differentsiruyemykh funktsiy nekotorykh dvumernykh integral'nykh uravneniy teploprovodnosti s operatorno-polugruppovym yadrom [Stable solvability in spaces of differentiable functions of some two-dimensional integral equations of heat conduction with an operator-semigroup kernel]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 38. pp. 33–45. DOI: 10.17223/19988621/38/4.
15. Smirnov V.I. (1981) *Kurs vysshey matematiki* [A course of higher mathematics]. Vol. 4. Part II. Moscow: Nauka.
16. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. (2008) *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow: BINOM. Laboratoriya znaniy.
17. Ivanov D.Y. (2010) Solution of two-dimensional boundary-value problems corresponding to initial-boundary value problems of diffusion on a right cylinder. *Differential Equations*. 46(8). pp. 1104–1113. DOI: 10.1134/S0012266110080045.
18. Ivanov D.Yu. (2019) Resheniye krayevykh zadach dlya dvumernogo ellipticheskogo differentsial'no-operatornogo uravneniya v abstraktnom gil'bertovom prostranstve s pomoshch'yu metoda granichnykh integral'nykh uravneniy [Solution of boundary problems for a two-dimensional elliptic operator-differential equation in an abstract Hilbert space using the method of boundary integral equations]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 60. pp. 11–31. DOI: 10.17223/19988621/60/2.
19. Ivanov D.Yu. (2017) O reshenii ploskikh zadach nestatsionarnoy teploprovodnosti kolkatsionnym metodom granichnykh elementov [On the solution of plane problems of non-stationary heat conduction by the boundary element collocation method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 50. pp. 9–29. DOI: 10.17223/19988621/50/2.
20. Fikhtengol'ts G.M. (2001) *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [A course of differential and integral calculus]. Vol. 2. Moscow: Fizmatlit.

Сведения об авторе:

Иванов Дмитрий Юрьевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика» Академии базовой подготовки Российского университета транспорта, Москва, Россия. E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

Information about the author:

Ivanov Dmitry Yu. (Candidate of Physics and Mathematics, Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, Russian Federation). E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 08.09.2021; принята к публикации 01.06.2023

The article was submitted 08.09.2021; accepted for publication 01.06.2023

Научная статья

УДК 517.983.23

MSC: 46B

doi: 10.17223/19988621/83/5

Об ограниченности интегрального оператора свертки в паре классических лебеговых пространств L_p, L_r

Евгений Александрович Павлов¹, Александр Иванович Фурменко²

¹ Крымский инженерно-педагогический университет,
Симферополь, Россия, pavlov-oe@bk.ru

² Военно-воздушная академия им. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина,
Воронеж, Россия, furmenko@mail.ru

Аннотация. В терминах ядра интегрального оператора свертки получен конструктивный критерий его ограниченности в паре классических лебеговых пространств L_p и L_r . Показано, что для того, чтобы интегральный оператор свертки ограниченно действовал из L_p в $L_{r,p}$, необходимо и достаточно, чтобы ядро $K(t)$ оператора принадлежало пространству Марцинкевича $M_{t^{1-1/q}}$.

Ключевые слова: интегральный оператор свертки, ограниченность, критерий ограниченности, лебеговы пространства

Для цитирования: Павлов Е.А., Фурменко А.И. Об ограниченности интегрального оператора свертки в паре классических лебеговых пространств L_p и L_r // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 52–58. doi: 10.17223/19988621/83/5

Original article

On the boundedness of the integral convolution operator in a pair of classical Lebesgue spaces L_p and L_r

Evgeniy A. Pavlov¹, Aleksandr I. Furmenko²

¹ The Crimean State Engineering Pedagogical University,
Simferopol, Russian Federation, pavlov-oe@bk.ru

² N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy,
Voronezh, Russian Federation, furmenko@mail.ru

Abstract. In this paper, in terms of the kernel $K(t)$ of the integral convolution operator, a constructive criterion for its boundedness in a pair of classical Lebesgue spaces L_p and L_r is obtained. It is shown that the integral convolution operator acts boundedly from L_p into $L_{r,p}$ if and only if the kernel $K(t)$ belongs to the Marcinkiewicz space $M_{t^{1-1/q}}$.

Keywords: integral convolution operator, boundedness, boundedness criterion, Lebesgue spaces

For citation: Pavlov, E.A., Furmenko, A.I. (2023) On the boundedness of the integral convolution operator in a pair of classical Lebesgue spaces L_p and L_r . *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 52–58. doi: 10.17223/19988621/83/5

Введение

Первые интегральные выражения, представляющие в современном понимании свертку двух функций, встречаются уже в трудах С. Пуассона, в частности в уравнении теплопроводности. Аналогичные интегральные выражения содержатся в работах П. Дюбуа-Реймонда.

Исследователями, начавшими изучение интегральных операторов свертки, были У. Юнг, Д. Гильберт, А.Н. Колмогоров, Г. Харди, Дж. Литтлвуд и ряд других математиков. В дальнейшем свойства непрерывности, регулярности и компактности операторов свертки и операторов типа свертки изучались в работах Л. Хермандера, А. Бенедика, Р. Пансона, С. Беннета, Р. Ханта, С.Г. Крейна, Ю.И. Петунина, Е.М. Семенова, О' Нейла, А. Блозинского, В.Б. Короткова и др.

В монографии [1] П. Халмошем была поставлена проблема отыскания конструктивного критерия ограниченности интегрального оператора в паре лебеговых пространств L_p и L_r , хотя и выражалось сомнение, что такой критерий вообще существует. До последнего времени подобный критерий для произвольного интегрального оператора не получен.

Обширный материал, посвященный интегральным операторам в парах лебеговых пространств L_p и L_r , содержится в монографиях [2–4]. Приведено множество достаточных условий для непрерывности, регулярности и компактности интегральных операторов. Следует отметить монографию [2], в которой содержится глава, посвященная интегральным операторам. Первый, по-видимому, конструктивный критерий регулярности интегрального оператора свертки в лебеговом пространстве $L_p(R_n)$ был приведен в монографии [3] (см.: [3. С. 78, теорема 2.2]). Этот результат был обобщен одним из авторов данной работы на симметричные пространства в [5].

Известно классическое неравенство, принадлежащее У. Юнгу (см.: [6. С. 176]):

Пусть $1 \leq p, q, r$ и выполняется равенство

$$1 + 1/r = 1/p + 1/q. \quad (1)$$

Тогда справедливо неравенство

$$\|K * x\|_{L_r} \leq \|K\|_{L_q} \cdot \|x\|_{L_p}. \quad (2)$$

Неравенство (2) было доказано для функций, определенных, в частности, на $(-\infty, +\infty)$. Оно остается справедливым и для функций, определенных на $(0, +\infty)$.

Это неравенство обобщалось, уточнялось и усиливалось в работах многих авторов (см.: [7–10] и др.). Если зафиксировать множитель $K(t)$, то с точки зрения функционального анализа оно означает, что интегральный оператор свертки с ядром $K(t)$, принадлежащем пространству L_q , ограниченно действует из L_p в L_r .

С.Г. Крейном, Ю.И. Петуниным и Е.М. Семеновым (см.: [7. С. 202, теорема 6.17]) была доказана

Теорема 1. Пусть $1 \leq p, q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 > 0$, число r определяется из равенства

$$1/r = 1/p + 1/q - 1. \quad (3)$$

Тогда справедливо неравенство

$$\|x * y\|_{L_{r,p}} \leq C \|y\|_{M_{t^{1-1/q}}} \cdot \|x\|_{L_p}. \quad (4)$$

Учитывая вложения $L_{r,p} \subset L_r, L_q \subset M_{t^{1-1/q}}$, неравенство (4) С.Г. Крейна, Ю.И. Петунина и Е.М. Семенова (см.: [7]) с точки зрения функционального анализа является усилением неравенства У. Юнга.

Теорема 2. Пусть $1 \leq p, q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 > 0$. Число r определяется из равенства $1/r = 1/p + 1/q - 1$.

Тогда если ядро $K \in M_{t^{1-1/q}}$, то интегральный оператор свертки с ядром K ограниченно действует из L_p в L_r .

В данной статье получено обращение теоремы 2. Получен конструктивный критерий ограниченности интегрального оператора свертки из L_p в L_r в терминах ядра $K(t)$.

1. Предварительные сведения

Определение 1. Пусть $S(0, +\infty)$ – пространство всех измеримых по Лебегу функций, определенных на полуоси $(0, +\infty)$ и почти всюду конечных. Функцией распределения для неотрицательной функции $x(t)$ называется функция, определенная равенством

$$\eta_x(\tau) = \text{mes}\{t : x(t) > \tau\},$$

где $\tau > 0$.

Определение 2. Две неотрицательные функции $x(t)$ и $y(t)$ называются равноизмеримыми, если

$$\eta_x(\tau) = \eta_y(\tau), \quad \forall \tau > 0.$$

Рассматриваются только такие функции $x(t)$ и $y(t)$, для которых

$$\eta_x(\tau) < \infty, \quad \forall \tau \in (0, \infty),$$

$$\eta_y(\tau) < \infty, \quad \forall \tau \in (0, +\infty).$$

Определение 3. Перестановкой для неотрицательной функции $x(t)$ называется функция, определенная равенством

$$x^*(t) = \inf\{\tau : \eta_x(\tau) < t\}.$$

Определение 4. Функциональное банаховое пространство на $(0, +\infty)$ с мерой Лебега называется симметричным, или перестановочно-инвариантным (см.: [7]), если:

1. Из того что $y(t) \in E$ и $|x| \leq |y|$, почти всюду следует, что $x(t) \in E$ и $\|x\|_E \leq \|y\|_E$.

2. Из того, что $y(t) \in E$ и $|x(t)|$ равноизмерима с $|y(t)|$, следует, что $x(t) \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Определение 5. Фундаментальной функцией симметричного пространства E (см.: [11, 12]) называется функция, определенная равенством

$$\varphi_E(t) = \|\chi_e\|_E, \text{ где } \text{mes } e = t.$$

Определение 6. Пространством Лоренца Λ_φ на $(0, +\infty)$ называется множество функций, определенных на $(0, +\infty)$, измеримых по Лебегу, для которых конечна норма (см.: [10, 11, 13])

$$\|x\|_{\Lambda_\varphi} = \int_0^\infty x^*(t) d\varphi(t), \quad (5)$$

где $\varphi(t)$ – вогнутая (квазивогнутая) неотрицательная функция на $(0, +\infty)$.

Определение 7. Пространством Марцинкевича M_ψ на $(0, +\infty)$ называется множество функций, определенных на $(0, +\infty)$, измеримых по Лебегу, для которых конечна норма (см.: [10, 11, 14])

$$\|x\|_{M_\psi} = \sup_{0 < h < \infty} \frac{1}{\psi(h)} \int_0^h x^*(s) ds, \quad (6)$$

где ψ вогнута (квазивогнута) на $(0, +\infty)$.

Справедливо вложение (см.: [7])

$$\Lambda_{\varphi_E} \subset E \subset M_{\frac{t}{\varphi_E}}, \quad (7)$$

где $\varphi_E(t) = \|\chi_{[0,t]}\|_E$.

2. Основные результаты

Теорема 3. Пусть ядро $K(t)$ неотрицательно на $(0, +\infty)$. Если интегральный оператор свертки ограниченно действует из L_p в L_r , где $r > p$, тогда ядро $K(t)$ принадлежит пространству Марцинкевича $M_{t^{1-1/q}}$, где

$$1/r = 1/p + 1/q - 1.$$

Доказательство. Получаем

$$t \int_0^t K(t-s) x^*(s) ds \geq x^*(t) \cdot \int_0^t K(t-s) ds. \quad (8)$$

Делая замену переменной $t-s = \xi$, получим неравенство

$$\int_0^t K(t-s) x^*(s) ds \geq \int_0^t K(\xi) d\xi x^*(t). \quad (9)$$

Учитывая неравенство

$$\left\| \int_0^t K(t-s) x^*(s) ds \right\|_{L_r} \leq C \|x\|_{L_p} \quad (10)$$

и неравенство (9), получим

$$\begin{aligned}
 C \|x\|_{L_p} &\geq \left\| \int_0^t K(t-s) x^*(s) ds \right\|_{L_r} \geq \\
 &\geq \|x^*(t) \cdot \int_0^t K(\xi) d\xi\|_{L_r} \geq \\
 &\geq \|x^*(t) \chi_{[\tau, 2\tau]}(t) \int_0^t K(\xi) d\xi\|_{L_r} \geq \\
 &\geq \int_0^\tau K(\xi) d\xi \|x^*(t) \chi_{[\tau, 2\tau]}(t)\|_{L_r}
 \end{aligned} \tag{11}$$

Итак, получено неравенство

$$C \|x\|_{L_p} \geq \int_0^\tau K(\xi) d\xi \|x^*(t) \chi_{[\tau, 2\tau]}(t)\|_{L_r}. \tag{12}$$

Полагая $x(t) = \chi_{[0, 2\tau]}(t)$, получим неравенство

$$C \cdot (2\tau)^{\frac{1}{p}} \geq \int_0^\tau K(\xi) d\xi \cdot \tau^{\frac{1}{r}}. \tag{13}$$

Неравенство (13) можно записать в виде:

$$\tau^{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)} \cdot \int_0^\tau K(\xi) d\xi \leq C \cdot 2^{\frac{1}{p}}, \tag{14}$$

или в виде:

$$(\tau)^{-\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)} \cdot \int_0^\tau K(\xi) d\xi \leq C_1. \tag{15}$$

Обозначая $1/p - 1/r = 1 - 1/q$, получаем

$$\tau^{-\left(1 - \frac{1}{q}\right)} \cdot \int_0^\tau K^*(\xi) d\xi \leq C_1, \text{ где } C_1 = C \cdot 2^{\frac{1}{p}}. \tag{16}$$

Определяя точную верхнюю грань по всем $\tau \in (0, +\infty)$, получаем включение

$$K(t) \in M_{t^{1-1/q}}$$

Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть ядро $K(t)$ неотрицательно на полуоси $(0, +\infty)$, $p, q \geq 1$, а число r определяется из равенства $1/r = 1/p + 1/q - 1$. Для того чтобы интегральный оператор свертки ограниченно действовал из L_p в L_r , где $r > p$, необходимо и достаточно, чтобы ядро $K(t)$ принадлежало пространству Марцинкевича $M_{t^{1-1/q}}$, где $1+1/r = 1/p + 1/q$, $1 \leq r, p, q$.

Доказательство вытекает из теоремы 1 (см.: [7]) и теоремы 3.

Замечание. Учитывая, что $\varphi_{L_r}(t) = \varphi_{L_r, p}(t) = t^{\frac{1}{r}}$ и $\varphi_{L_q}(t) \leq \varphi_{M_{t^{1-1/q}}}(t) = t^{\frac{1}{q}}$,

аналогично несложно доказать следующее утверждение:

Теорема 5. Пусть $p, q \geq 1$, $1/p + 1/q - 1 > 0$. Обозначим через r число, которое определяется из равенства

$$1 + 1/r = 1/p + 1/q.$$

Тогда для того, чтобы интегральный оператор свертки с неотрицательным ядром $K(t)$ ограниченно действовал L_p в $L_{r,p}$, необходимо и достаточно, чтобы ядро $K(t)$ принадлежало пространству Марцинкевича $M_{t^{1-1/q}}$.

Список источников

1. Халмош П., Сандер В. Ограниченные интегральные операторы в пространстве L^2 . М. : Наука, 1985. 158 с.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М. : Наука, 1977. 744 с.
3. Коротков В.Б. Интегральные операторы. Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1983. 224 с.
4. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.Н., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций М. : Наука, 1966. 499 с.
5. Павлов Е.А. Об операторах, инвариантных относительно сдвига в симметричных пространствах // Сибирский математический журнал. 1977. Т. 18, № 1. С. 189–194.
6. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. М. : Мир, 1985. Т. 2. 399 с.
7. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М. : Наука, 1978. 400 с.
8. Blozinski A.P. On a convolution theorem for $L(p, q)$ spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 164. P. 255–265.
9. Daniel V.W. Convolution operators on Lebesgue spaces of the half-line // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 164. C. 479–488.
10. O'Neil R. Convolution operators and $L(p, q)$ spaces // Duke Math. J. 1963. V. 30. P. 129–142.
11. Семенов Е.М. Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций // Доклады АН СССР. 1964. Т. 156, № 6. С. 1292–1295.
12. Павлов Е.А. Об ограниченности операторов свертки в симметричных пространствах // Известия вузов. Математика. 1982. № 2. С. 36–40.
13. Lorentz G.G. Some new functional spaces // Ann. of Math. 1950. V. 51 (1). P. 37–55.
14. Marcinkiewicz J. Sur l'interpolation d'operations // C.R. Acad. Sci. Paris. 1939. V. 208. P. 1272–1273.

References

1. Halmos P., Sunder V. (1978) *Bounded Integral Operators on L^2 Spaces*. Berlin–New York: Springer-Verlag.
2. Kantorovich L.V., Akilov G. P. (1977) *Funktsional'nyy analiz* [Functional analysis]. Moscow: Nauka.
3. Korotkov V.V. (1983) *Integral'nyye operatory* [Integral operators]. Novosibirsk: Nauka.
4. Krasnosel'skiy M.A., Zabreyko P.P., Pustyl'nik E.N., Sobolevskiy, P.E. (1966) *Integral'nyye operatory v prostranstvakh summiruyemykh funktsiy* [Integral operators in spaces of summable functions]. Moscow: Nauka.
5. Pavlov E.A. (1977) Translation invariant operators in symmetric spaces. *Siberian Mathematical Journal*. 18(1). pp. 138–142.
6. Edwards R.E. (1982) *Fourier Series. A Modern Introduction*. Vol. 2. Berlin: Springer-Verlag.
7. Kreyn S.G., Petunin Yu.I., Semenov E.M. (1978) *Interpolyatsiya lineynykh operatorov* [Interpolation of linear operators]. Moscow: Nauka.
8. Blozinski A.P. (1972) On a convolution theorem for $L(p, q)$ spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*. 164(2). pp. 255–265.

9. Daniel V.W. (1972) Convolution operators on Lebesgue spaces of the half-line. *Transactions of the American Mathematical Society*. 164(2). pp. 479–488.
10. O’Neil R. (1963) Convolution operators and $L(p, q)$ spaces. *Duke Mathematical Journal*. 30(1). pp. 129–142.
11. Semenov E.M. (1964) Teoremy vloženiya dlya banakhovykh prostranstv izmerimyykh funktsiy [Embedding theorems for Banach spaces of measurable functions]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 156(6). pp. 1292–1295.
12. Pavlov E.A. (1982) On the boundedness of convolution operators in symmetric spaces. *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*. 2. pp. 47–52.
13. Lorentz G.G. (1950) Some new functional spaces. *Annals of Mathematics*. 51(1). pp. 37–55.
14. Marcinkiewicz J. (1939) Sur l’interpolation d’opérations. *Comptes rendus de l’Académie des Sciences Paris*. 208. pp. 1272–1273.

Сведения об авторах:

Павлов Евгений Александрович – доктор физико-математических наук, профессор Крымского инженерно-педагогического университета, Симферополь, Россия. E-mail: pavlov-oe@bk.ru

Фурменко Александр Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент Военно-воздушной академии им. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, Воронеж, Россия. E-mail: furmenko@mail.ru

Information about the authors:

Pavlov Evgeniy A. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor of Department of Mathematics, The Crimean State Engineering Pedagogical University, Simferopol, Russian Federation). E-mail: pavlov-oe@bk.ru

Furmenko Aleksandr I. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematics, N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy, Voronezh, Russian Federation). E-mail: furmenko@mail.ru

Статья поступила в редакцию 03.12.2022; принята к публикации 01.06.2023

The article was submitted 03.12.2022; accepted for publication 01.06.2023

МЕХАНИКА

MECHANICS

Научная статья

УДК 539.375

doi: 10.17223/19988621/83/6

**К нахождению предела упругости адгезионного слоя
при его нормальном разрыве****Виктория Эдуардовна Богачева¹, Вадим Вадимович Глаголев²,
Леонид Вадимович Глаголев³, Алексей Александрович Маркин⁴**^{1, 2, 4} *Тульский государственный университет, Тула, Россия*³ *АО КБП им. академика А.Г. Шипунова, Тула, Россия*¹ *v.boga4eva2014@yandex.ru*² *vadim@tsu.tula.ru*³ *len4ic92@gmail.com*⁴ *markin-nikram@yandex.ru*

Аннотация. Рассмотрена задача нахождения предела упругого деформирования предельно тонкого адгезионного слоя при нормальном разрыве. Наряду с напряжением отрыва учитывается наличие отличной от нуля компоненты тензора напряжений вдоль оси слоя. Показано, что напряженное состояние в слое не зависит от его толщины и определяется типом плоской задачи. При плоской деформации напряжение отрыва значительно превышает аналогичное напряжение плоского напряженного состояния.

Ключевые слова: упругость, критерий Треска–Сен-Венана, предельно тонкий слой, нормальный разрыв

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-00003, <https://rscf.ru/project/22-71-00003/> в Тульском государственном университете.

Для цитирования: Богачева В.Э., Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Маркин А.А. К нахождению предела упругости адгезионного слоя при его нормальном разрыве // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 59–73. doi: 10.17223/19988621/83/6

On determining the elastic limit of an adhesive layer in the opening mode of loading

Viktoriya E. Bogacheva¹, Vadim V. Glagolev²,
Leonid V. Glagolev³, Aleksey A. Markin⁴

^{1, 2, 4} Tula State University, Tula, Russian Federation

³ JSC "KBP", Tula, Russian Federation

¹ v.boga4eva2014@yandex.ru

² vadim@tsu.tula.ru

³ len4ic92@gmail.com

⁴ markin-nikram@yandex.ru

Abstract. In this paper, the problem of determining the limit of elastic strain of an extremely thin adhesive layer in the opening mode of loading (mode I) is considered. The presence of a nonzero component of the stress tensor along the layer axis is taken into account. The Tresca – Saint-Venant criterion is used as a condition for the transition to a plastic strain state. On the basis of the general variational problem formulation with account for restrictions on the displacement field, the problem is formulated in a differential form. A simplified problem formulation is solved analytically. According to the solution, the stress state in the layer does not depend on its thickness and is specified by the plane problem type. In the plane strain state, the cleavage stress significantly exceeds that in the plane stress state. In this case, Poisson's ratio of the adhesive significantly affects the ratio of cleavage stresses. For a certain value of Poisson's ratio, the Irwin empirical correction is obtained. It is shown that for the transition to a plastic state in the case of plane strain, larger external load is required in contrast to the plane stress state. Due to the finiteness of the stress state in the adhesive layer, as the relative thickness of the layer tends to zero, the plasticity occurs in the layer at an arbitrary small external load.

Keywords: elasticity, Tresca–Saint-Venant criterion, extremely thin layer, opening mode of loading

Acknowledgments: This study was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-71-00003), <https://rscf.ru/project/22-71-00003/> at Tula State University.

For citation: Bogacheva, V.E., Glagolev, V.V., Glagolev, L.V., Markin, A.A. (2023) On determining the elastic limit of an adhesive layer in the opening mode of loading. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 59–73. doi: 10.17223/19988621/83/6

Введение

Исследование критических состояний адгезионных слоев композита, как правило, использует модель квазихрупкого разрушения [1–3]. Адгезив, сопрягающий несущие слои композита, рассматривается в виде слоя нулевой толщины, вдоль которого предполагается развитие процесса разрушения. В этом случае для определения состояния предразрушения используют либо когезионные модели [4–6], либо модели с сингулярным распределением напряжений [7–10]. В случае сингулярных решений механические свойства адгезивов не рассматриваются, а для

когезионных моделей постулируются законы взаимодействия когезионных сил [5, 11, 12]. В случае нормального разрыва наиболее известной является модель Леонова–Панасюка–Дагдейла [13, 14], в рамках которой на напряжения отрыва накладывается ограничение в виде предела текучести. С формальной точки зрения для плоского деформированного и плоского напряженного состояний данное ограничение приводит практически к одному результату. Однако экспериментальное сравнение длин зон пластичности показывает их существенное различие [15]. Для объяснения данного факта Ирвином [16] была введена формальная поправка на величину предела текучести. При плоской деформации предел текучести увеличивается в $\sqrt{3}$ раз по сравнению с плоским напряженным состоянием. Однако причина этого не указывается.

В данной работе возможный переход в состояние пластичности при нормальном разрыве предлагается рассматривать в рамках критерия Треска–Сен-Венана, при этом учитывать все диагональные компоненты тензора напряжений адгезионного слоя. Для предельно тонких, но конечных адгезионных слоев определены компоненты напряжений. С учетом реальных механических свойств [17] найдены отношения напряжений отрыва при достижении предела упругости в различных адгезионных слоях.

Постановка задачи

Рассматривается двухконсольная балка (ДКБ-образец) длиной $\ell + a$, состоящая из трех тел. На рис. 1 консоли 1 и 2 с одинаковыми геометрическими и механическими свойствами сопряжены адгезионным слоем 3 толщиной δ_0 по длине ℓ . ДКБ-образец жестко закреплен от перемещений по правому торцу, а по левому торцу действует симметричная распределенная нагрузка P .

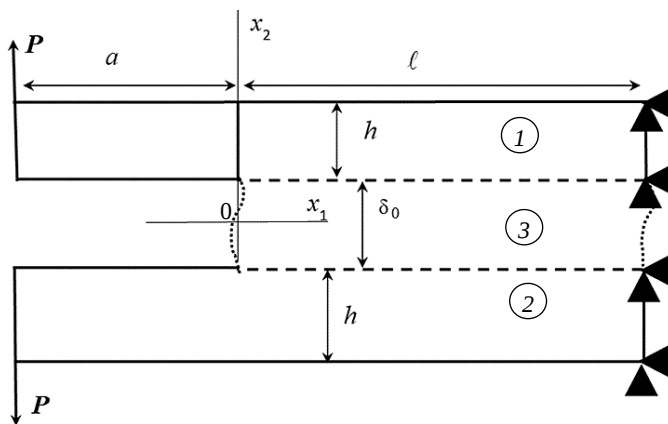


Рис. 1. Схема нагружения слоистого композита
Fig. 1. Schematic diagram of the layered composite loading

Предполагаем материал консолей упругим, а материал слоя упругопластичским. Для напряженно-деформированного состояния композита необходимо определить внешнюю нагрузку, соответствующую переходу материала адгезива в состояние пластичности.

Равновесие тел 1 и 2 согласно работам [18–20] запишем в вариационной форме:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\delta \varepsilon} ds + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^+ u_1 dx_1 + 0.5 \delta_0 \left(\int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^+}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L_1} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} dl, \quad (1)$$

$$\int_{S_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\delta \varepsilon} ds - \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^- dx_1 - \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^- u_1 dx_1 + 0.5 \delta_0 \left(\int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^-}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^-}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L_2} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} dl, \quad (2)$$

где S_1, S_2 – площади тел 1 и 2; $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$ – тензоры напряжений и деформаций; $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ – тензор средних напряжений слоя; $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – тензор средних деформаций слоя с соответствующими компонентами:

$$\bar{\varepsilon}_{22}(x_1) = \left(\frac{u_2^+(x_1) - u_2^-(x_1)}{\delta_0} \right), \quad \bar{\varepsilon}_{11}(x_1) = 0.5 \left(\frac{\partial u_1^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^-(x_1)}{\partial x_1} \right), \quad (3)$$

$$\bar{\varepsilon}_{21}(x_1) = \bar{\varepsilon}_{12}(x_1) = 0.5 \left(\frac{u_1^+(x_1) - u_1^-(x_1)}{\delta_0} + 0.5 \left(\frac{\partial u_2^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^-(x_1)}{\partial x_1} \right) \right), \quad (4)$$

где u_i^+, u_i^- – компоненты векторов перемещений границ слоя; знаки $+, -$ определяют верхнюю и нижнюю границы слоя; $i = 1, 2$; L_i – граница приложения внешней нагрузки.

Проекции поля перемещений в задаче удовлетворяют условиям симметрии: $u_1^1(x_1, x_2) = u_1^1(x_1, x_2)$, $u_2^1(x_1, x_2) = -u_2^2(x_1, x_2)$, где верхний индекс определяет номер консоли; $u_i^1(x_1, x_2) \Big|_{x_2=\delta_0/2} = u_i^+(x_1)$; $u_i^2(x_1, x_2) \Big|_{x_2=-\delta_0/2} = u_i^-(x_1)$. В адгезионном слое для рассматриваемого нагружения имеет место равенство нулю средних касательных напряжений: $\bar{\sigma}_{12} = 0$. С учетом условий симметрии связанная по полю граничных перемещений слоя система уравнений (1) и (2) сводится к одному уравнению для консоли 1:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\delta \varepsilon} ds + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + 0.5 \delta_0 \int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 = \int_{L_1} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} dl. \quad (5)$$

Определяющие соотношения консолей и слоя принимаем в форме закона Гука:

$$\sigma_{jk} = \frac{E_1}{1 + \nu_1} \left(\varepsilon_{jk} + \frac{\nu_1}{1 - 2\nu_1} \varepsilon \delta_{jk} \right), \quad (6)$$

$$\bar{\sigma}_{jk} = \frac{E_3}{1 + \nu_3} \left(\bar{\varepsilon}_{jk} + \frac{\nu_3}{1 - 2\nu_3} \bar{\varepsilon} \delta_{jk} \right), \quad (7)$$

где E_1, E_3, ν_1, ν_3 – соответственно модули упругости и коэффициенты Пуассона консоли и слоя; $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ – объемная деформация; $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{11} + \bar{\varepsilon}_{22} + \bar{\varepsilon}_{33}$ – объемная деформация слоя; δ_{jk} – символ Кронекера; $j, k = 1, 2, 3$.

Переход в состояние пластического деформирования адгезионного слоя определяем в рамках критерия Треска–Сен-Венана [21, 22]. В силу антисимметрии касательных компонент тензора напряжений для данного вида нагружения тензор средних напряжений слоя будет иметь диагональный вид. Исходя из решения упругой задачи, для состояния плоской деформации находим минимальное главное напряжение $\bar{\sigma}_m$. Если $\bar{\sigma}_{33} \geq \bar{\sigma}_{11}$ то $\bar{\sigma}_m = \bar{\sigma}_{11}$. В случае $\bar{\sigma}_{11} > \bar{\sigma}_{33}$ имеем $\bar{\sigma}_m = \bar{\sigma}_{33}$. В силу того, что максимальным главным является напряжение $\bar{\sigma}_{22}$, условие текучести в состоянии плоской деформации запишем в виде:

$$\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_m = 2\tau_0, \quad (8)$$

где τ_0 – предел текучести. Для плоского напряженного состояния в силу $\bar{\sigma}_{22} > \bar{\sigma}_{11} > \bar{\sigma}_{33} = 0$ имеем

$$\bar{\sigma}_{22} = 2\tau_0. \quad (9)$$

Поле перемещений в теле 1 определяем согласно кинематике Миндлина [23]:

$$u_1^+(x_1, x_2) = u_1^+(x_1) - \varphi(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \quad (10)$$

$$u_2^+(x_1, x_2) = u_2^+(x_1). \quad (11)$$

По распределению (10), (11) находим деформации

$$\varepsilon_{11}(x_1, x_2) = \frac{du_1^+(x_1)}{dx_1} - \varphi'(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \quad (12)$$

$$\varepsilon_{21}(x_1, x_2) = \varepsilon_{12}(x_1) = 0.5 \left(\frac{du_2^+(x_1)}{dx_1} - \varphi(x_1) \right), \quad (13)$$

$$\varepsilon_{22}(x_1, x_2) = 0. \quad (14)$$

Из (5), (12), (13) получаем две системы дифференциальных уравнений. Для участка $x_1 \in [-a; 0]$ система имеет вид:

$$\frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0, \quad \frac{dQ_{11}}{dx_1} = 0, \quad \frac{dQ_{12}}{dx_1} = 0, \quad (15)$$

а на участке $x_1 \in (0; \ell]$ система преобразуется к форме

$$\frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0, \quad \frac{dQ_{11}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = 0, \quad \frac{dQ_{12}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{22}, \quad (16)$$

с условиями сопряжения

$$u_1^+|_{x_1=0} = u_1^+|_{x_1=+0}, \quad u_2^+|_{x_1=0} = u_2^+|_{x_1=+0}, \quad \varphi^+|_{x=0} = \varphi^+|_{x=+0}, \quad (17)$$

$$M_{11}|_{x_1=0} = M_{11}|_{x_1=+0}, \quad Q_{12}|_{x_1=0} = Q_{12}|_{x_1=+0}, \quad Q_{11}|_{x_1=0} = (Q_{11} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11})|_{x_1=+0}, \quad (18)$$

граничными условиями на левом торце пластины

$$Q_{12}|_{x_1=-a} = -Q_2, \quad Q_{11}|_{x_1=-a} = 0, \quad M_{11}|_{x_1=-a} = 0, \quad (19)$$

и граничными условиями на правом торце пластины

$$u_1^+|_{x_1=\ell} = 0, \quad \varphi|_{x_1=\ell} = 0, \quad u_2^+|_{x_1=\ell} = 0, \quad (20)$$

где $Q_{11}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11} dx_2$; $Q_{12}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{12} dx_2$; $M_{11}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11}(x_2 - \delta_0/2) dx_2$; $Q_2 = Ph$.

С учетом (12)–(14) соотношения (6) запишем в виде:

$$\sigma_{11} = D \left(\frac{du_1^+(x_1)}{dx_1} - \varphi'(x_1)(x_2 - \delta_0/2) \right), \quad (21)$$

$$\sigma_{12} = L \left(\frac{du_2^+(x_1)}{dx_1} - \varphi(x_1) \right), \quad (22)$$

где $L = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}$, $D = \frac{E_1(1-\nu_1)}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}$ для плоского деформированного состояния; $D = \frac{E_1}{(1-\nu_1^2)}$ для плоского напряженного состояния.

Связь напряженного состояния в адгезионном слое с его граничным перемещением на участке сопряжения с пластиной получим из (7) и (3):

$$\bar{\sigma}_{11} = D_1 \frac{du_1^+}{dx_1} + D_2 u_2^+, \quad (23)$$

$$\bar{\sigma}_{22} = C_1 u_2^+ + C_2 \frac{du_1^+}{dx_1}, \quad (24)$$

где $D_1 = \frac{E_3(1-\nu_3)}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)}$, $D_2 = \frac{2E_3\nu_3}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)\delta_0}$, $C_1 = \frac{2E_3(1-\nu_3)}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)\delta_0}$, $C_2 = \frac{E_3\nu_3}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)}$, $\bar{\sigma}_{33} = \nu_3(\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22})$ для плоской деформации; $D_1 = \frac{E_3}{(1-\nu_3^2)}$,

$D_2 = \frac{2E_3\nu_3}{(1-\nu_3^2)\delta_0}$, $C_1 = \frac{2E_3}{(1-\nu_3^2)\delta_0}$, $C_2 = \frac{E_3\nu_3}{(1-\nu_3^2)}$, $\bar{\epsilon}_{33} = -\frac{\nu_3}{1-\nu_3}(\bar{\epsilon}_{11} + \bar{\epsilon}_{22})$ для плоского напряженного состояния.

С учетом (21), (22) выражения обобщенных сил и моментов принимают вид:

$$Q_{11}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \left(D \left(\frac{du_1^+}{dx_1} - \varphi'(x_2 - \delta_0/2) \right) \right) dx_2 = D \left(h \frac{du_1^+}{dx_1} - \frac{h^2}{2} \varphi' \right), \quad (25)$$

$$Q_{12}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} L \left(\frac{du_2^+}{dx_1} - \varphi \right) dx_2 = Lh \left(\frac{du_2^+}{dx_1} - \varphi \right), \quad (26)$$

$$M_{11}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \left(D \left(\frac{du_1^+}{dx_1} - \varphi'(x_2 - \delta_0/2) \right) \right) (x_2 - \delta_0/2) dx_2 = D \left(\frac{h^2}{2} \frac{du_1^+}{dx_1} - \frac{h^3}{3} \varphi' \right). \quad (27)$$

Задача (15)–(27) с учетом (8) или (9) становится замкнутой относительно четырех неизвестных функций: $u_1^+(x_1)$, $u_2^+(x_1)$, $\varphi(x_1)$, Q_2 .

Решение задачи

Согласно данным работы [17] рассмотрим образец со следующими геометрическими и механическими характеристиками консолей: $a = 0.055$ м, $h = 0.0127$ м, $b = 0.025$ м, $E_1 = 2.04 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu_1 = 0.33$, где b – толщина образца в направлении

нормали к рассматриваемому сечению. Механические свойства адгезивов представим в таблице.

Механические свойства адгезивов

Механические свойства	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
E_3 (ГПа)	4.9	1.85	0.49
τ_0 (МПа)	25.1	14.6	5.2
ν_3	0.35	0.33	0.3

Проинтегрируем систему (15) с учетом граничных условий (19). Из условий сопряжения решений (18) в точке $x_1 = 0$ получим граничные условия для системы (16):

$$Q_{12}|_{x_1=0} = -Q_2, \quad M_{11}|_{x_1=0} = -Q_2 a, \quad (Q_{11} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{11})|_{x_1=0} = 0. \quad (28)$$

На участке $(0; \ell]$, согласно работе [20], общее решение (16) запишем в виде:

$$\left\{ \begin{aligned} u_1^+ &= \left(\frac{Lh\mu_1}{C_2} - \frac{Lh(\mu_1^2 - m_2)}{C_2 m_1 \mu_1} - \frac{C_1}{\mu_1 C_2} \right) \tilde{C}_2 e^{\mu_1 x_1} - \left(\frac{Lh\mu_1}{C_2} + \frac{Lh(\mu_1^2 - m_2)}{C_2 m_1 \mu_2} - \frac{C_1}{\mu_1 C_2} \right) \tilde{C}_3 e^{-\mu_1 x_1} + \\ &+ \left(\frac{Lh\mu_3}{C_2} - \frac{Lh(\mu_3^2 - m_2)}{C_2 m_1 \mu_3} - \frac{C_1}{\mu_3 C_2} \right) \tilde{C}_4 e^{\mu_3 x_1} - \\ &- \left(\frac{Lh\mu_3}{C_2} + \frac{Lh(\mu_3^2 - m_2)}{C_2 m_1 \mu_4} - \frac{C_1}{\mu_3 C_2} \right) \tilde{C}_5 e^{-\mu_3 x_1} + \frac{C_1}{C_2} \frac{\tilde{C}_1 x_1}{C_1 S_2 - 0.5\delta_0 D_2} + \tilde{C}_6; \\ u_2^+ &= \tilde{C}_2 e^{\mu_1 x_1} + \tilde{C}_3 e^{-\mu_1 x_1} + \tilde{C}_4 e^{\mu_3 x_1} + \tilde{C}_5 e^{-\mu_3 x_1} - \frac{\tilde{C}_1}{C_1 S_2 - 0.5\delta_0 D_2}; \\ \varphi &= \tilde{C}_2 \frac{(\mu_1^2 - m_2)}{m_1 \mu_1} e^{\mu_1 x_1} + \tilde{C}_3 \frac{(\mu_1^2 - m_2)}{m_1 \mu_2} e^{-\mu_1 x_1} + \tilde{C}_4 \frac{(\mu_3^2 - m_2)}{m_1 \mu_3} e^{\mu_3 x_1} + \tilde{C}_5 \frac{(\mu_3^2 - m_2)}{m_1 \mu_4} e^{-\mu_3 x_1}. \end{aligned} \right. \quad (29)$$

$$\text{где} \quad m_1 = \frac{\left(LS_2 + \frac{Dh}{2} \right)}{LS_2}; \quad m_2 = \frac{(C_1 S_2 - 0.5\delta_0 D_2)}{LhS_2}; \quad m_3 = -\frac{3\delta_0 D_2 Dh + 12LC_2 S_2}{Dh(4hC_2 S_2 - 3Dh^2)};$$

$$m_4 = \frac{12LC_2 S_2}{Dh(4hC_2 S_2 - 3Dh^2)}; \quad S_2 = \frac{Dh + 0.5\delta_0 D_1}{C_2}; \quad d^2 = (m_2 + m_1 m_3 + m_4)^2 - 4m_2 m_4;$$

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{m_2 + m_1 m_3 + m_4 + d}{2}}; \quad \mu_2 = -\sqrt{\frac{m_2 + m_1 m_3 + m_4 + d}{2}}; \quad \mu_3 = \sqrt{\frac{m_2 + m_1 m_3 + m_4 - d}{2}};$$

$$\mu_4 = -\sqrt{\frac{m_2 + m_1 m_3 + m_4 - d}{2}}.$$

В решении (29) имеем 6 постоянных интегрирования $\tilde{C}_{1,...,6}$. Условия (28), (20) определяют 6 уравнений для их нахождения.

Из граничных условий (20) в решении (29) для $\ell/\delta_0 \rightarrow \infty$ положим $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = \tilde{C}_4 = \tilde{C}_6 = 0$.

При этом третье условие сопряжения (28) выполняется практически тождественно и не влияет на решение упругой задачи [24]. В этом случае две постоянные интегрирования $\tilde{C}_3, \tilde{C}_5$ в (29) определяют поле перемещений консоли (10), (11) и, согласно (23), (24), напряженное состояние адгезионного слоя.

Таким образом, для нахождения постоянных интегрирования $\tilde{C}_3, \tilde{C}_5$ и силы Q_2 , обеспечивающей переход адгезива в состояние пластического деформирования, принимаем два первых условия (28) и условие (8) для состояния плоской деформации:

$$\begin{cases} Q_{12}|_{x_1=+0} + Q_2 = 0; \\ M_{11}|_{x_1=+0} + Q_2 a = 0; \\ \bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_m|_{x_1=+0} = 2\tau_0. \end{cases}$$

Для плоского напряженного состояния к двум первым условиям (28) добавляется условие (9):

$$\begin{cases} Q_{12}|_{x_1=+0} + Q_2 = 0; \\ M_{11}|_{x_1=+0} + Q_2 a = 0; \\ \bar{\sigma}_{22}|_{x_1=+0} = 2\tau_0. \end{cases}$$

На рис. 2–4 показаны значения напряжений $\bar{\sigma}_{ii}$ в торцевом сечении слоя в зависимости от его относительной толщины δ_0/h при переходе в состояние пластичности адгезивов из таблицы для рассматриваемого ДКБ-образца. В состоянии плоской деформации имеет место $\bar{\sigma}_{11} \geq \bar{\sigma}_{33}$.

Анализируя зависимости на рис. 2–4 видим, что напряженное состояние при достижении предела упругости в торцевой области не зависит от малых относительных толщин слоя. При этом напряжения отрыва при плоской деформации и плоском напряженном состоянии имеют существенные различия. Так, отношение напряжений отрыва для адгезива Sikaforce 7752 составляет 1.75, для адгезива Araldite 2015 – 1.97, для адгезива Araldite AV138 – 2.16.

Отметим, что в модели Леонова–Панасюка–Дагдейла рассматривается механизм пластического течения, при котором по берегам границы зоны пластических деформаций действуют напряжения, равные пределу текучести. Ирвин ввел поправку, согласно которой предел текучести для плоской деформации формально увеличивается в $\sqrt{3}$ (1.73) раз. При этом размер зоны пластичности для плоской деформации становится в 3 раза меньше, чем при плоском напряженном состоянии. Данная закономерность была установлена экспериментально для стали [16]. В предлагаемой модели данное отношение напряжений отрыва в момент достижения предела упругости получается из решения задачи. Причем разница определяется значением коэффициентом Пуассона адгезива. Так, при значении $\nu_3 = 0.3$ во всех рассматриваемых адгезивах с соответствующими модулями упругости из таблицы данное отношение принимает значение 1.75.

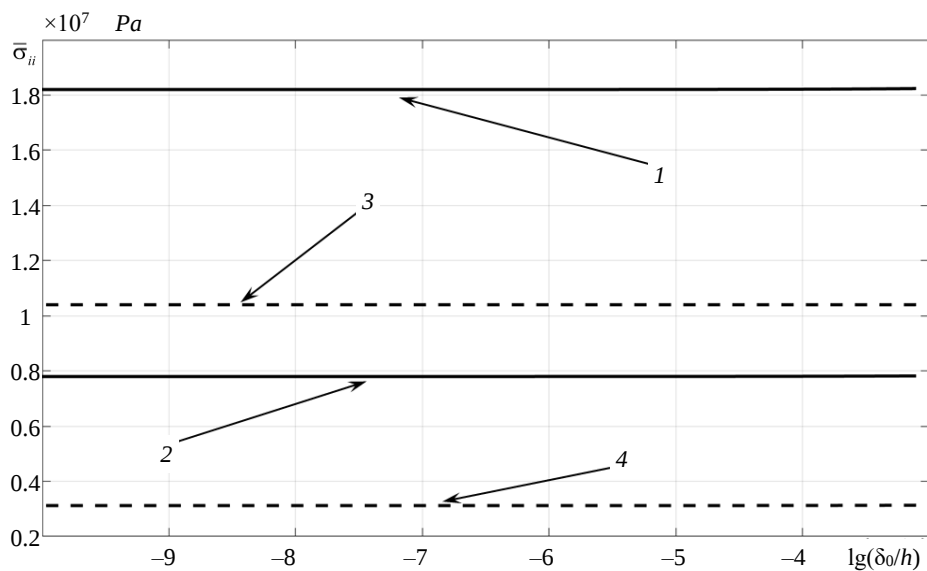


Рис. 2. Торцевые напряжения в адгезиве Sikaforce 7752. Графики 1 и 2 задают напряжения $\bar{\sigma}_{22}$ и $\bar{\sigma}_{33}$ для состояния плоской деформации. Графики 3 и 4 определяют напряжения $\bar{\sigma}_{22}$ и $\bar{\sigma}_{11}$ в плоском напряженном состоянии

Fig. 2. Edge stresses in Sikaforce 7752 adhesive. Plots 1 and 2 define stresses $\bar{\sigma}_{22}$ and $\bar{\sigma}_{33}$ in a plane strain state. Plots 3 and 4 define stresses $\bar{\sigma}_{22}$ and $\bar{\sigma}_{11}$ in a plane stress state

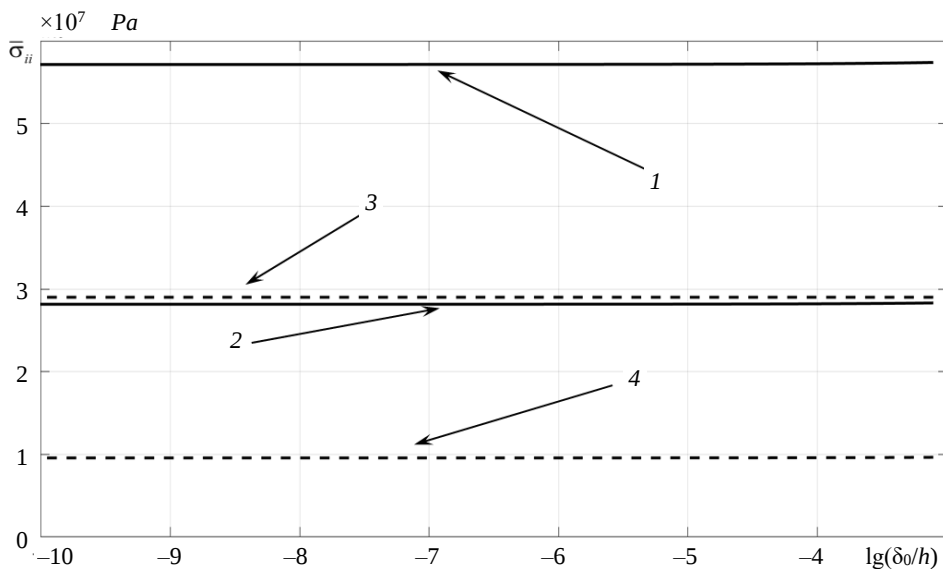


Рис. 3. Торцевые напряжения в адгезиве Araldite 1515.

Нумерация графиков аналогична рис. 2

Fig. 3. Edge stresses in Araldite 1515 adhesive. The numbering of the plots is similar to fig. 2

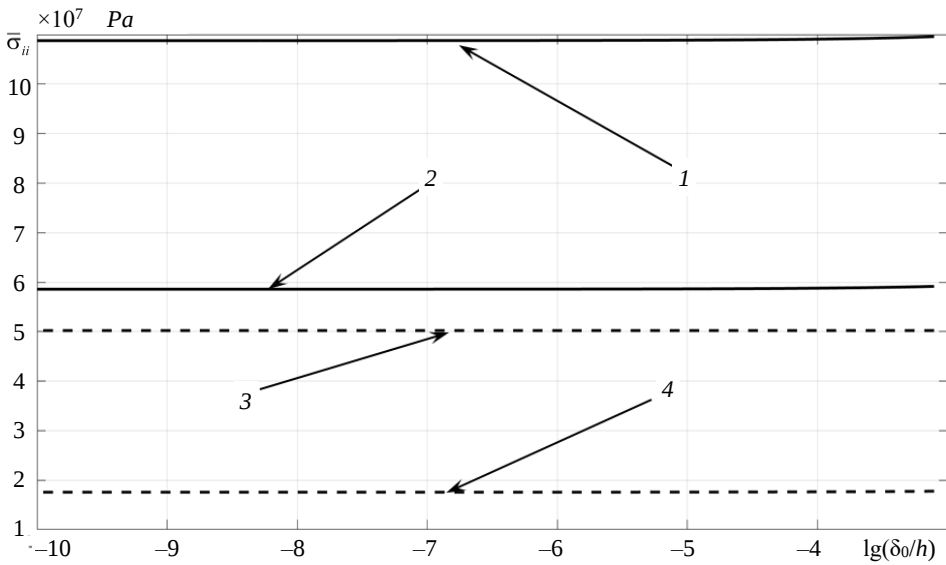


Рис. 4. Торцевые напряжения в адгезиве Araldite AV138.

Нумерация графиков аналогична рис. 2

Fig. 4. Edge stresses in Araldite AV138 adhesive. The numbering of the plots is similar to fig. 2

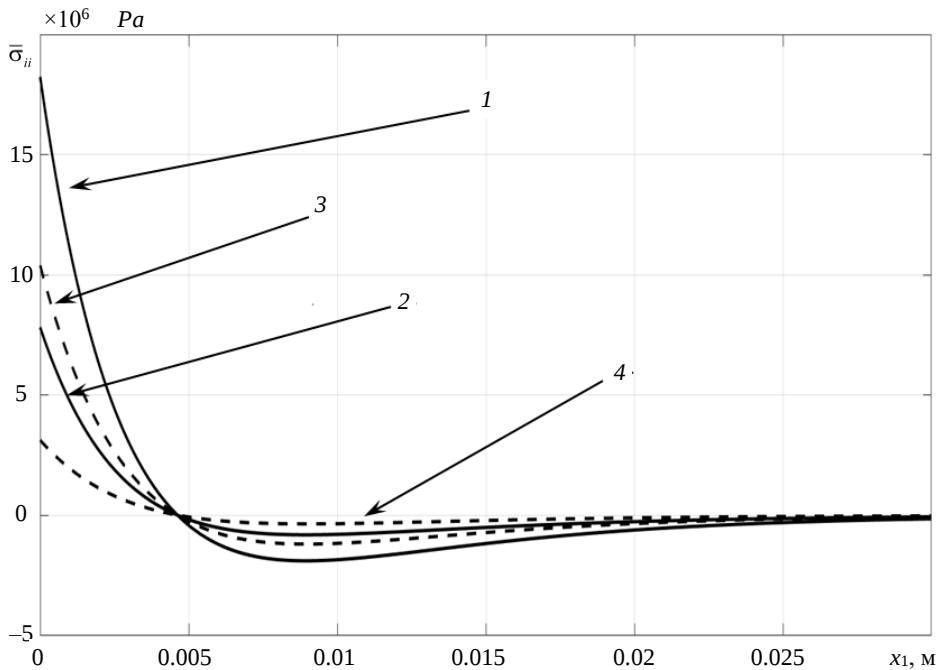


Рис. 5. Напряженное состояние адгезионного слоя Sikaforce 7752.

Нумерация графиков аналогична рис. 2

Fig. 5. Stress state of Sikaforce 7752 adhesive layer. The numbering of the plots is similar to fig. 2

Распределение напряжений в слое для адгезива Sikaforce 7752 для $\delta_0 = 10^{-5}$ м приведено на рис. 5.

При стремлении коэффициента Пуассона адгезива к нулю напряжение отрыва в адгезиве в плоском деформированном состоянии становится равным соответствующему напряжению плоского напряженного состояния при практически нулевых осевых напряжениях. Таким образом, учет коэффициента Пуассона адгезива в предельно тонких слоях имеет существенное значение в формировании напряжений отрыва для рассматриваемых плоских задач.

На рис. 6 показана зависимость значения расклинивающей силы Q_2 , соответствующей переходу в состояние пластичности адгезива, от его относительной толщины для материала Sikaforce 7752. График 1 построен для случая плоской деформации, а график 2 соответствует плоскому напряженному состоянию.

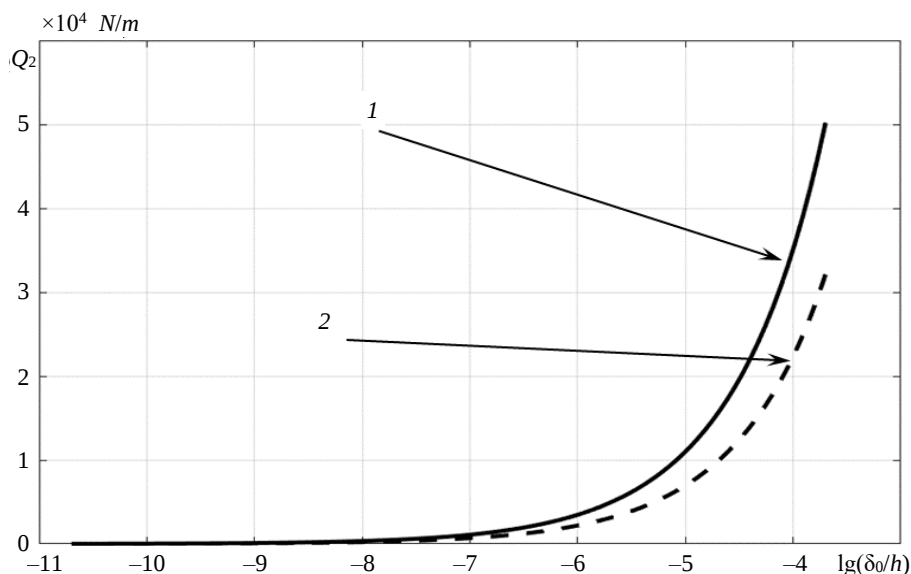


Рис. 6. Значения расклинивающей силы от толщины адгезионного слоя

Fig. 6. Wedging force as a function of adhesive layer thickness

Из представленных на рис. 6 зависимостей видно, что для перехода в состояние пластичности в случае плоской деформации требуется большее значение внешней нагрузки в отличие от плоского напряженного состояния. В силу конечности напряженного состояния в адгезионном слое как при условии (10), так и (9) при стремлении относительной толщины слоя к нулю пластичность в слое реализуется при сколь угодно малой внешней нагрузке. Для адгезивов Araldite AV138 и Araldite 2015 тенденция поведения расклинивающей силы аналогичная.

Заключение

Для адгезивов с упругопластическими свойствами, связывающих консоли ДКБ-образца, рассмотрена модель их деформирования нормальным разрывом.

Напряженное состояние рассматривалось на основе средних по толщине адгезионного слоя напряжений. Наряду с напряжениями, действующими в направлении отрыва, в слое с конечной, но малой толщиной учитываются и ортогональные им напряжения. Напряжения отрыва в момент достижения предела упругости получаются из решения задачи и существенно зависят от коэффициента Пуассона адгезива, принимая различные значения при плоском деформированном и плоском напряженном состояниях.

Список источников

1. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. М. : Наука, 1983. 296 с.
2. Suo Z., Hutchinson J.W. Interface crack between two elastic layers // International Journal of Fracture. 1990. V. 43 (1). P. 1–18. doi: 10.1007/BF00018123
3. Irwin G.R. Crack-extension force for part-through crack in a plate // Transactions of the American Society of Mechanical Engineers. Ser. E. Journal of Applied Mechanics. 1962. V. 29. P. 651–654. doi: 10.1115/1.3640649
4. Barenblatt G.I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture // Advanced in Applied Mechanics. 1962. V. 7. P. 55–129. doi: 10.1016/S0065-2156(08)70121-2
5. The special issue: Cohesive models // Engineering Fracture Mechanics. 2003. V. 70 (14). P. 1741–1987.
6. Астапов Н.С., Корнев В.М., Кургузов В.Д. Модель расслоения разномодульного биматериала с трещиной // Физическая мезомеханика. 2016. Т. 19, № 4. С. 49–57.
7. Hutchinson J.W. Singular behavior at the end of a tensile crack tip in a hardening material // Journal of The Mechanics and Physics of Solids. 1968. V. 16 (1). P. 13–31 doi: 10.1016/0022-5096(68)90014-8
8. Ustinov K.B., Massabò R., Lisovenko D.S. Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip. Analytical solution // Engineering Failure Analysis. 2020. V. 110. Art. 104410. doi: 10.1016/j.engfailanal.2020.104410
9. Andrews M.G., Massabò R. The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers // Engineering Fracture Mechanics. 2007. V. 74 (17). P. 2700–2720. doi: 10.1016/j.engfracmech.2007.01.013
10. Черных К.Ф. Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин. М. : Наука, 1996. 288 с.
11. Stigh U., Alfredsson K.S., Andersson T., Biel A., Carlberger T., Salomonsson K. Some aspects of cohesive models and modelling with special application to strength of adhesive layers // International Journal of Fracture. 2010. V. 165. P. 149–162. doi: 10.1007/s10704-010-9458-9
12. Гольдштейн Р.В., Перельмутер М.Н. Рост трещин по границе соединения материалов // Проблемы механики : сб. ст. М. : Физматлит, 2003. С. 221–239.
13. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1960. V. 8 (2). P. 100–104. doi: 10.1016/0022-5096(60)90013-2
14. Леонов М.Я., Панасюк В.В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикладная механика. 1959. Т. 5, № 4. С. 391–401.
15. Irwin G.R. Plastic Zone Near a Crack and Fracture Toughness // 7th Sagamore Ordnance Materials Research Conference. 1960. P. 63–78.
16. Irwin G.R. Linear fracture mechanics, fracture transition, and fracture control // Engineering Fracture Mechanics. 1968. V. 1 (2). P. 241–257. doi: 10.1016/0013-7944(68)90001-5
17. Lopes R.M., Campilho R.D.S.G., da Silva F.J.G., Faneco T.M.S. Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints // Journal of Adhesion and Adhesives. 2016. V. 67. P. 103–111. doi: 10.1016/j.jadhadh.2015.12.032

18. Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // *International Journal of Solids and Structures*. 2019. V. 158. P. 141–149. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002
19. Богачева В.Э., Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Инченко О.В., Маркин А.А. Об одном подходе к оценке прочности адгезионного слоя в слоистом композите // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2020. № 64. С. 63–76. doi: 10.17223/19988621/64/5
20. Berto F., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. About the influence of the elastoplastic properties of the adhesive on the value of the J-integral in the DCB sample // *International Journal of Fracture*. 2021. V. 232 (1). P. 43–54. doi: 10.1007/s10704-021-00590-3
21. Tresca H. Memoire sur l'ecoulement des corps solides // *Mem pres par div savants*. 1868. V. 18. P. 733–799.
22. Ишинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М. : Физматлит, 2001. 701 с.
23. Mindlin R.D. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1951. V. 18. P. 31–38. doi: 10.1007/978-1-4613-8865-4_29
24. Богачева В.Э., Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Маркин А.А. Напряженное состояние и условия инициирования трещины в адгезионном слое композита // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2021. № 3. С. 22–34. doi: 10.15593/perm.mech/2021.3.03

References

1. Cherepanov G.P. (1983) *Mekhanika razrusheniya kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of destruction of composite materials]. Moscow: Nauka.
2. Suo Z., Hutchinson J.W. (1990) Interface crack between two elastic layers. *International Journal of Fracture*. 43(1). pp. 1–18. doi: 10.1007/BF00018123
3. Irwin G.R. (1962) Crack-extension force for part-through crack in a plate. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers. Series E. Journal of Applied Mechanics*. 29. pp. 651–654. doi: 10.1115/1.3640649
4. Barenblatt G.I. (1962) The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advanced in Applied Mechanics*. pp. 55–129. doi: 10.1016/S0065-2156(08)70121-2
5. (2003) The special issue: Cohesive models. *Engineering Fracture Mechanics*. 70(14). pp. 1741–1987.
6. Astapov N.S., Kornev V.M., Kurguzov V.D. (2016) Model' rassloeniya raznomodul'nogo bimateriala s treshchinoy [Delamination model for a composite with a crack]. *Fizicheskaya mezomekhanika – Physical Mesomechanics*. 19(4). pp. 49–57.
7. Hutchinson J.W. (1968) Singular behavior at the end of a tensile crack tip in a hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 16(1). pp. 13–31. doi: 10.1016/0022-5096(68)90014-8
8. Ustinov K.B., Massabò R., Lisovenko D.S. (2020) Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip. Analytical solution. *Engineering Failure Analysis*. 110. Article 104410. doi: 10.1016/j.engfailanal.2020.104410
9. Andrews M.G., Massabò R. (2007) The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers. *Engineering Fracture Mechanics*. 74(17). pp. 2700–2720. doi: 10.1016/j.engfracmech.2007.01.013
10. Chernykh K.F. (1996) *Vvedenie v fizicheski i geometricheski nelineynuyu teoriyu treshchin* [Introduction to physically and geometrically nonlinear crack theory]. Moscow: Nauka.
11. Stigh U., Alfredsson K.S., Andersson T., Biel A., Carlberger T., Salomonsson K. (2010) Some aspects of cohesive models and modelling with special application to strength of adhesive layers. *International Journal of Fracture*. 165. pp. 149–162. doi: 10.1007/s10704-010-9458-9

12. Gol'dshteyn R.V., Perel'muter M.N. (2003) *Rost treshchin po granitse soedineniya materialov* [Growth of cracks along the interface between materials]. In: Problemy mekhaniki. Sbornik statey. Moscow: FIZMATLIT. pp. 221–239.
13. Dugdale D.S. (1960) Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 8(2). pp. 100–104. doi: 10.1016/0022-5096(60)90013-2
14. Leonov M.Ya., Panasyuk V.V. (1959) Razvitie mel'chayshikh treshchin v tverdom tele [The development of tiny cracks in a solid]. *Prikladnaya mekhanika*. 5(4). pp. 391–401.
15. Irwin G.R. (1960) Plastic zone near a crack and fracture toughness. *Proceedings of the 7th Sagamore Ordnance Materials Research Conference*. pp. 63–78.
16. Irwin G.R. (1968) Linear fracture mechanics, fracture transition, and fracture control. *Engineering Fracture Mechanics*. 1(2). pp. 241–257. doi: 10.1016/0013-7944(68)90001-5
17. Lopes R.M., Campilho R.D.S.G., da Silva F.J.G., Faneco T.M.S. (2016) Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints. *Journal of Adhesion and Adhesives*. 67. pp. 103–111. doi: 10.1016/j.ijadhadh.2015.12.032
18. Glagolev V.V., Markin A.A. (2019) Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter. *International Journal of Solids and Structures*. 158. pp. 141–149. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002
19. Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Inchenko O.V., Markin A.A. (2020) Ob odnom podkhode k otsenke prochnosti adgezionnogo sloya v sloistom kompozite [On one approach to the assessing of the adhesive layer strength in a layered composite]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 64. pp. 63–76. doi: 10.17223/19988621/64/5
20. Berto F., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. (2021) About the influence of the elastoplastic properties of the adhesive on the value of the J-integral in the DCB sample. *International Journal of Fracture*. 232(1). pp. 43–54. doi: 10.1007/s10704-021-00590-3
21. Tresca H. (1868) Memoire sur l'ecoulement des corps solides. *Mem pres par div savants*. 18. pp. 733–799.
22. Ishlinskiy A.Yu., Ivlev D.D. (2001) *Matematicheskaya teoriya plastichnosti* [Mathematical theory of plasticity]. Moscow: FIZMATLIT.
23. Mindlin R.D. (1951) Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*. 18. pp. 31–38. doi: 10.1007/978-1-4613-8865-4_29
24. Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. (2021) Napryazhennoe sostoyaniye i usloviya initsirovaniya treshchiny v adgezionnom sloe kompozita [Stress state and conditions for crack initiation in the adhesion layer of the composite]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 3. pp. 22–34. doi: 10.15593/perm.mech/2021.3.03

Сведения об авторах:

Богачева Виктория Эдуардовна – аспирант кафедры «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета, Тула, Россия. E-mail: v.boga4eva2014@yandex.ru

Глаголев Вадим Вадимович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета, Тула, Россия. E-mail: vadim@tsu.tula.ru)

Глаголев Леонид Вадимович – кандидат физико-математических наук, начальник бюро АО КБП им. академика А.Г. Шипунова, Тула, Россия. E-mail: len4ic92@gmail.com

Маркин Алексей Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета, Тула, Россия. E-mail: markin-nikram@yandex.ru)

Information about the authors:

Bogacheva Viktoriya E. (Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: v.boga4eva2014@yandex.ru

Glagolev Vadim V. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: vadim@tsu.tula.ru

Glagolev Leonid V. (Candidate of Physics and Mathematics, JSC «KBP», Tula, Russian Federation). E-mail: len4ic92@gmail.com

Markin Aleksey A. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: markin-nikram@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 28.07.2022; принята к публикации 01.06.2023

The article was submitted 28.07.2022; accepted for publication 01.06.2023

Научная статья

УДК 532.517.4 + 621.928.93

doi: 10.17223/19988621/83/7

Исследование аэродинамики и процесса фракционного разделения мелкодисперсных частиц в сепарационной камере

Николай Сергеевич Евсеев¹, Илья Александрович Жуков²,
Иван Алексеевич Бельчиков³,

^{1, 2, 3} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ Институт проблем химико-энергетических технологий СО РАН, Бийск, Россия

¹ Томский политехнический университет, Томск, Россия

¹ evseevns@gmail.com

² gofra930@gmail.com

³ ivan70422@gmail.com

Аннотация. Представлено исследование влияния режимных и геометрических параметров на процесс фракционного разделения тонкодисперсных частиц в рабочей области сепарационной камеры. Главной особенностью вихревой камеры является кольцевая преграда, расположенная в области выхода двухфазного течения из зоны сепарации. Размер, положение и закрутка такой преграды позволяют влиять на аэродинамическую картину и, как следствие, на граничный размер сепарируемых частиц. При расчете фракционного разделения дисперсных частиц использованы физические параметры одно- и многокомпонентной керамики.

Ключевые слова: вихревая камера, закрученное двухфазное течение, турбулентность, фракционное разделение частиц по размерам, керамика

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Президента РФ № МК-3236.2021.4. Исследование процесса фракционного разделения $AlMgB_{14}$ выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № FSWM-2020-0028.

Для цитирования: Евсеев Н.С., Жуков И.А., Бельчиков И.А. Исследование аэродинамики и процесса фракционного разделения мелкодисперсных частиц в сепарационной камере // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 74–85. doi: 10.17223/19988621/83/7

Original article

A study of aerodynamics and fractional separation of fine particles in a separation chamber

Nikolay S. Evseev¹, Il'ya A. Zhukov², Ivan A. Bel'chikov³,

^{1,2,3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ Institute for Problems of Chemical and Energetic Technologies of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Biysk, Russian Federation

¹ Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation

¹ evseevns@gmail.com

² gofra930@gmail.com

³ ivan70422@gmail.com

Abstract. This paper presents a study of the effect of regime and geometric parameters on the fractional separation of fine particles in a working area of the proposed separation chamber. The main feature of the vortex chamber is an annular barrier in the region where a two-phase flow leaves the separation zone. The size, position, and swirl of such an obstacle allow one to affect the aerodynamic pattern and, consequently, the boundary size of the separated particles. The presence of a rotating paraxial cylinder in the vortex chamber design provides a more uniform field of the circumferential velocity component, which has a positive effect on aerodynamic conditions within the chamber. The physical parameters of single- and multicomponent ceramics are used in calculations of fractional separation of dispersed particles. Analysis of the calculated results shows that when calculating and evaluating the parameters, it is extremely important to take into account gas pulsations of the fractional separation due to their effect on the separated fine particles. New data on aerodynamics within the considered chamber and the calculated data on the fractional separation of single- and multicomponent ceramics in the studied area of the separation element are presented.

Keywords: vortex chamber, swirling two-phase flow, turbulence, fractional separation of particles by size, ceramics

Acknowledgments: This work was financially supported by the grant from the President of the Russian Federation (MK-3236.2021.4). The study of fractional separation of AlMgB14 was carried out with the financial support from the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (State assignment No. FSWM-2020-0028).

For citation: Evseev, N.S., Zhukov, I.A., Bel'chikov, I.A. (2023) A Study of aerodynamics and fractional separation of fine particles in a separation chamber. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 74–85. doi: 10.17223/19988621/83/7

Введение

На сегодняшний день пневматические методы получения тонкодисперсных узкофракционных порошков являются одними из перспективных и экологически чистых методов [1]. Несмотря на множество различных установок для измельчения и классификации мелкодисперсных материалов, предлагаются новые конструкции и активно ведутся работы по улучшению качества и эффективности

процесса фракционного разделения порошков [2–4]. Аэродинамика в рабочей зоне воздушно-центробежных классификаторов определяет процессы измельчения и фракционного разделения частиц. Исследование аэродинамической картины в таких аппаратах важно для понимания эффектов и явлений, сопутствующих процессам измельчения и классификации, и дает возможность совершенствовать конструкции сепарационных элементов с целью повышения эффективности процессов фракционного разделения. Численное моделирование закрученных гетерогенных потоков позволяет определить аэродинамическую картину в рабочей области пневматических аппаратов и оценить ее влияние на эффективность процесса классификации частиц.

Керамические материалы (в том числе многокомпонентные и высокоэнтропийные керамики) представляют интерес для исследователей и находят широкое применение в различных отраслях промышленности. Так, оксидная керамика широко используется при создании элементов электроники и материалов конструкционного назначения [5], а нитридная керамика – при создании покрытий [6], микролегировании [7]. Боридная керамика может применяться в качестве сырья для смазочных и износостойких покрытий (например, керамика на основе AlMgB_{14}) [8]. Высокоэнтропийная и многокомпонентная керамики представляют собой перспективный класс материалов с уникальными свойствами [9]. Получение узкофракционных керамических порошков является сложной и актуальной задачей. Совершенствование конструкций пневматических центробежных аппаратов позволит повысить эффективность и остроту сепарации.

Цель работы – исследование аэродинамики закрученного турбулентного течения в предлагаемой вихревой камере и расчет траекторий движения твердых керамических частиц в рассматриваемой области сепарационного элемента.

Физико-математическая постановка задачи

Рассматриваемая вихревая камера имеет ряд конструктивных особенностей, влияющих на процесс фракционного разделения. Одной из таких особенностей является вращающийся приосевой цилиндр (рассматривается осесимметричное течение), позволяющий выровнять поле окружной компоненты скорости в приосевой части камеры и отеснить крупную фракцию к периферийной части аппарата. Вторая особенность – наличие дополнительного воздушного поддува, служащего для отдаления частиц от вертикальной стенки камеры и дополнительного воздействия на агломераты частиц для их разделения. Третьей, наиболее важной особенностью является наличие кольцевой преграды, расположенной в области выхода двухфазного течения из зоны сепарации. Размер, положение и закрутка такой преграды позволяют влиять на аэродинамическую картину и, как следствие, на граничный размер сепарируемых частиц. Схема рассматриваемой камеры представлена на рис. 1. Течение в камере реализовано следующим образом. Двухфазный (газ–твёрдые частицы) закрученный поток подводится к входу 1. Несущий газовый поток дополнительно подается на вход 2. Стенки сепарационной камеры могут осуществлять вращение вокруг оси симметрии. Сформированный двухфазный поток в выходном сечении разделяется кольцевой преградой на два потока, которые уносят частицы в крупный (выход 3) и мелкий (выход 4) продукты разделения.

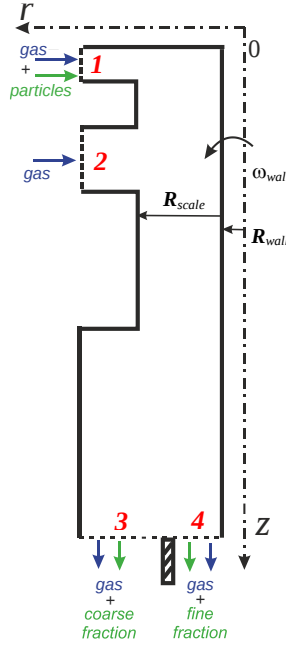


Рис. 1. Схема сепарационной камеры
Fig. 1. Design of a separation chamber

При решении поставленной задачи использовалась цилиндрическая система координат, газ считался несжимаемым. Для расчета закрученного турбулентного течения применялся подход RANS. Уравнения Рейнольдса замыкались при помощи обобщенной модели Буссинеска [10]. В безразмерной форме система уравнений Рейнольдса и уравнение неразрывности запишутся в виде:

$$\frac{\partial}{\partial r}(u_r r) + \frac{\partial}{\partial z}(u_z r) = 0; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r u_r}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial r}(r u_r^2) + \frac{\partial}{\partial z}(r u_r u_z) - \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[r(1+v_t) \frac{\partial u_r}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[r(1+v_t) \frac{\partial u_r}{\partial z} \right] \right\} = \\ = u_\phi^2 - r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial v_t}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial v_t}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} (1+v_t) \right]; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r u_z}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial z}(r u_z^2) + \frac{\partial}{\partial r}(r u_r u_z) - \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[r(1+v_t) \frac{\partial u_z}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[r(1+v_t) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \right\} = \\ = -r \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{r}{\text{Re}} \left[\frac{\partial v_t}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial v_t}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r u_\phi}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial r}(r u_r u_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(r u_z u_\phi) - \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[r(1+v_t) \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[r(1+v_t) \frac{\partial u_\phi}{\partial z} \right] \right\} = \\ = -u_r u_\phi - \frac{1}{\text{Re}} \left[(1+v_t) \frac{u_\phi}{r} + u_\phi \frac{\partial v_t}{\partial r} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Для записи системы уравнений в безразмерном виде за масштаб длины принимался радиус канала R_{scale} (см. рис. 1), и радиальная скорость во входном сечении в сепарационную камеру U_0 выбиралась за масштаб скорости.

При записи граничных условий окружной составляющей вектора скорости сформировано два критерия:

$$R_{ct} = \frac{\omega_{ct} R_{scale}}{U_0}; R_r = \frac{\omega_r R_{scale}}{U_0}. \quad (5)$$

В формулах (5) ω_{ct} и ω_r представляют угловые скорости вращения твердых стенок аппарата и газа на входе 1.

Для определения турбулентной вязкости применялась широко используемая модель турбулентности Уилкокка [10], хорошо описывающая пристеночную турбулентность.

Граничные условия следующие. На входах 1 и 2 (см. рис. 1) задавались радиальная и окружная составляющие вектора скорости, кинетическая энергия и удельная скорость диссипации. Для компонент u_z ставилось «мягкое» условие (Неймана). Условия прилипания для компонент скорости выполнялись на стенках вихревой камеры. Для удельной скорости диссипации кинетической энергии условие определялось через баланс диссипации и молекулярной диффузии уравнения переноса [10]. В выходных сечениях для всех расчетных величин выполнялось условие Неймана.

Расчет твердой дисперсной фазы проводился при помощи траекторного подхода [11]. При таком подходе производится расчет каждой i -й фракции частиц в зависимости от j -х начальных точек движения, расставленных по высоте входа 1 (см. рис. 1). Обратное силовое влияние твердой фазы на несущий поток не учитывается в силу малых концентраций дисперсной фазы. Таким образом, система уравнений, описывающая скорости и траектории движения мелкодисперсных твердых частиц с учетом турбулентных газовых пульсаций в безразмерной форме, имеет вид [11]:

$$\frac{dw_r}{d\tau} = \frac{w_\varphi^2}{r} + \frac{u_r + u'_r - w_r}{Stk} \xi, \quad (6)$$

$$\frac{dw_\varphi}{d\tau} = -\frac{w_\varphi w_r}{r} + \frac{u_\varphi + u'_\varphi - w_\varphi}{Stk} \xi, \quad (7)$$

$$\frac{dw_z}{d\tau} = \frac{u_z + u'_z - w_z}{Stk} \xi - \frac{1}{Fr}. \quad (8)$$

Здесь τ – характерное время, наименьшее из двух значений: $\Delta\tau_1$ – времени пребывания частицы в вихре, и $\Delta\tau_2$ – времени жизни турбулентного вихря [10]; $Stk = (\rho_p \delta^2 U_0) / (18 \nu R_{scale})$ и $Fr = U_0^2 / (g R_{scale})$ – критерии Стокса и Фруда.

Учет отклонения коэффициента аэродинамического сопротивления частицы от закона Стокса проводится при помощи выражения $\xi = 1 + 0.197 Re_p^{0.63} + 2.64 \cdot 10^{-4} Re_p^{1.38}$. Здесь $Re_p = (\delta |\mathbf{U} - \mathbf{W}|) / \nu$ – критерий Рейнольдса частицы (ρ , ρ_p – плотности несущей среды и твердой фазы, δ – диаметр шарообразной частицы, g – ускорение свободного падения).

Пульсации несущего потока определялись вероятностным законом Гаусса, при этом случайная величина пульсационной скорости вычислялась при помощи формулы [11]

$$u' = \pm \gamma \sqrt{-2k \ln N}. \quad (9)$$

Здесь $0 < N < 1$, γ – эмпирическая константа.

Для решения поставленной задачи применялись широко известные и апробированные методы расчета. Решение уравнений переноса и уравнения неразрывности для газовой фазы осуществлялось в переменных «давление–скорость» на гибридной разностной сетке при помощи известного обобщенного метода переменных направлений [10]. При решении уравнений переноса компонент вектора скорости, кинетической энергии и удельной скорости диссипации при описании конвекции и диффузии использовалась экспоненциальная схема [10]. Для проверки достоверности расчетных данных проводились многочисленные исследования на итерационную и сеточную сходимости и сравнение результатов исследования с экспериментальными данными других авторов при описании подобных течений (подробно исследования по достоверности расчетов изложены в [10]).

Расчет аэродинамики произведен с использованием оборудования Томского регионального центра коллективного пользования Национального исследовательского Томского государственного университета. Центр поддержан грантом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2021-693 (№ 13.ЦКП.21.0012).

Анализ численных результатов

Геометрия сепарационной камеры и режим течения определяют структуру газового потока. В рассматриваемой камере одним из ключевых геометрических параметров является ее высота. На рис. 2 изображены линии тока турбулентного закрученного течения в сепарационной камере при $Re=7\,000$, $R_\Gamma = 0.5$, $R_{ст} = 0.5$ в зависимости от высоты вихревой камеры. Из рисунка видно, что с увеличением высоты вихревой камеры (см. рис. 2, *b*, *c*) несущий поток полностью огибает область отрывного течения за уступом и устанавливается к выходному сечению камеры.

Другим важным параметром, влияющим на течение и в итоге на процесс фракционного разделения, является закрутка несущего потока газа и твердых стенок сепарационной камеры [12]. На рис. 3 показано распределение окружной компоненты скорости воздушного потока при $Re = 7\,000$ в зависимости от величин закрутки газа и стенок. Видно, что с увеличением величины закрутки происходят интенсификация поля окружной компоненты скорости и ее выравнивание внутри сепарационной камеры.

В работе при расчете траекторий движения мелкодисперсных частиц использованы следующие параметры несущего потока: $Re = 7\,000$, $R_\Gamma = 0.2$, $R_{ст} = 0.2$.

На рис. 4 представлены результаты расчета траекторий движения керамических частиц различной плотности и дисперсности при детерминированном и вероятностном подходах. Данные о характеристиках многокомпонентной керамики (HfTiCN)–TiB₂ взяты из работы [9].

Из рисунка видно, что мелкодисперсные частицы сильнее подвержены влиянию турбулентных пульсаций. Частицы с большей плотностью участвуют в наиболее сильном пульсационном движении, в то время как мелкие пульсации практически не оказывают на них никакого влияния.

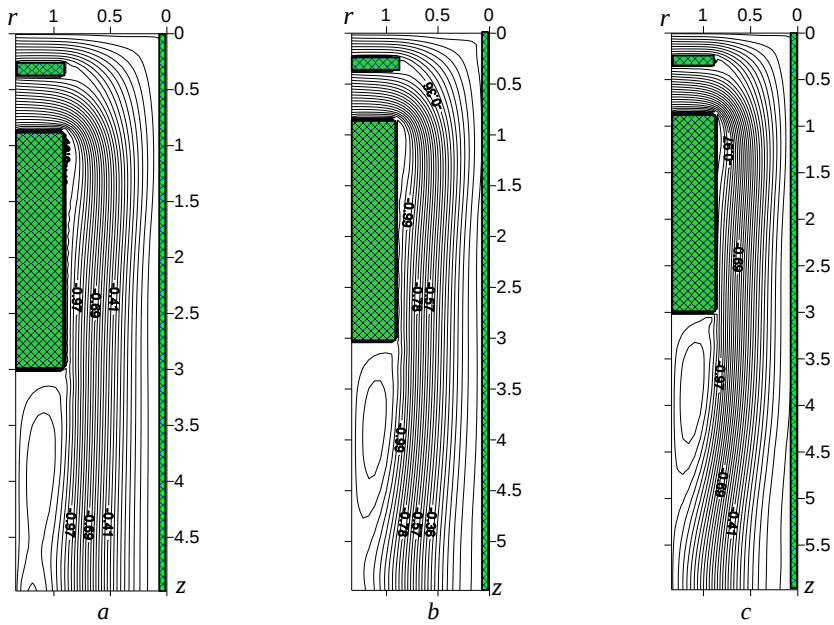


Рис. 2. Линии тока в зависимости от высоты сепарационной камеры:
 $a - h = 5$, $b - h = 5.5$, $c - h = 6$

Fig. 2. Streamlines at various heights of the separation chamber: $h = (a) 5$, $(b) 5.5$, and $(c) 6$

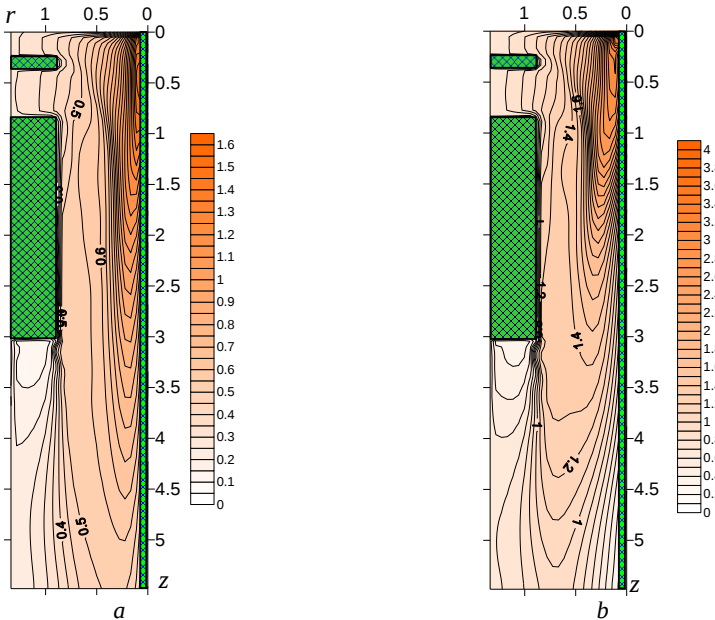


Рис. 3. Распределение компоненты u_φ в зависимости от величины закрутки:
 $a - R_r = 0.2$, $R_{ct} = 0.2$, $b - R_r = 0.5$, $R_{ct} = 0.5$

Fig. 3. Distribution of the component u_φ at various magnitudes of the swirl of the gas and walls:
 $(a) R_r = 0.2$, $R_{ct} = 0.2$ and $(b) R_r = 0.5$, $R_{ct} = 0.5$

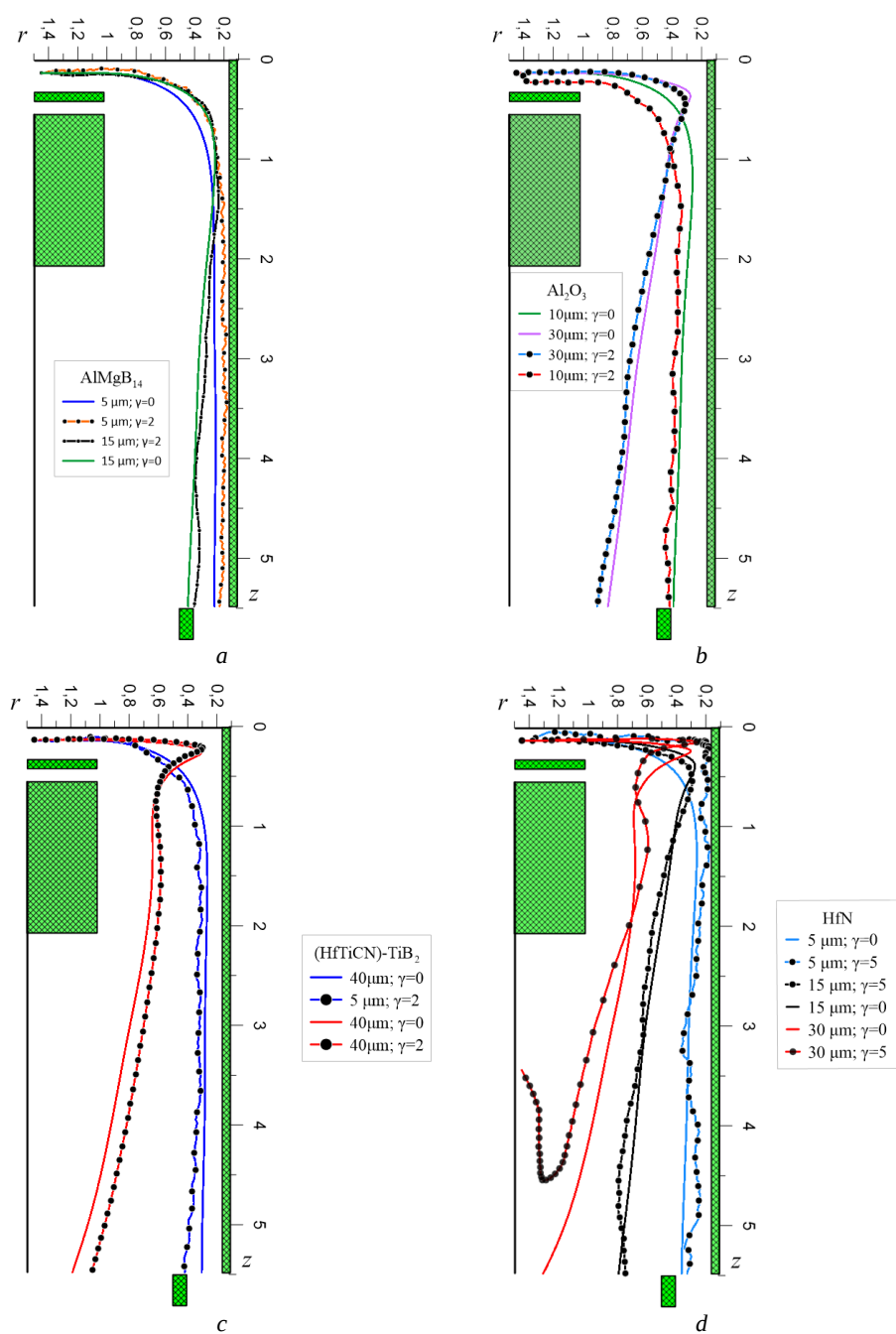


Рис. 4. Траектории движения одиночных керамических частиц (детерминированный и вероятностный методы)

Fig. 4. Trajectories of the motion of single ceramic particles (deterministic and probabilistic methods)

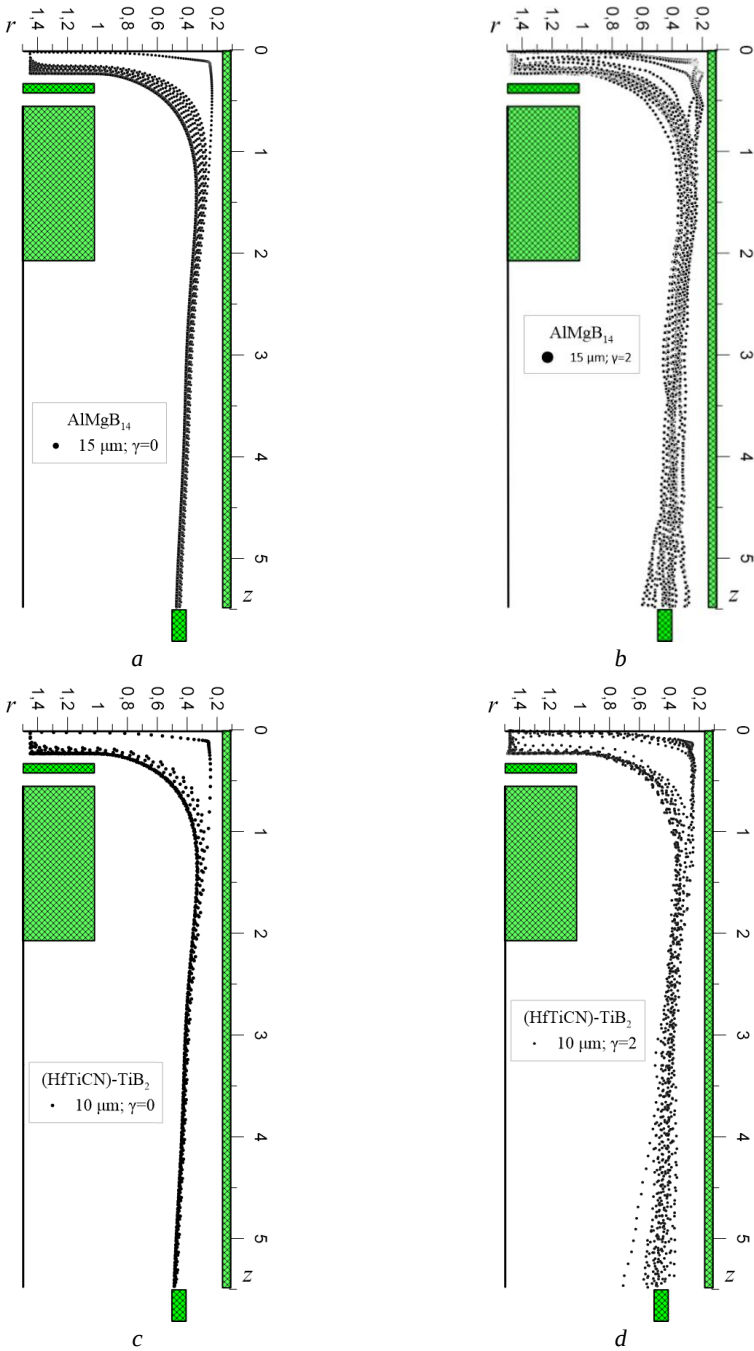


Рис. 5. Траектории движения керамических частиц при различных точках запуска по высоте входа камеры (детерминированный и вероятностный методы)

Fig. 5. Trajectories of the motion of ceramic particles at different starting points along the height of the chamber entrance (deterministic and probabilistic methods)

Анализ рис. 5 позволяет сделать вывод, что при расчете и оценке параметров фракционного разделения крайне важно принимать во внимание газовые пульсации, которые воздействуют на мелкодисперсные частицы. Такое воздействие оказывает негативное влияние на процесс классификации. Оно способствует увлечению частиц иного размера в продукты разделения и снижает остроту сепарации.

Заключение

В работе представлено исследование влияния основных режимных и геометрических параметров на процесс фракционного разделения тонкодисперсных частиц в рабочей области сепарационной камеры на примере движения одно- и многокомпонентных керамических частиц. Показано, что закрутка газа и стенок камеры оказывает воздействие на аэродинамическую картину внутри сепарационного элемента центробежного классификатора. Установлено, что наличие вращающегося приосевого цилиндра позволяет получить более равномерное поле окружной компоненты скорости, что положительно сказывается на аэродинамической обстановке внутри вихревой камеры. Показано, что дополнительный элемент в виде кольцевой преграды в области выхода зоны сепарации позволяет дополнительно вносить коррективы в характеристики течения и процесс классификации.

Список источников

1. Шваб А.В., Садретдинов Ш.Р., Брендаков В.Н. Исследование влияния потока газа и турбулентной диффузии на процесс центробежной классификации тонкодисперсных частиц // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53, № 2 (312). С. 33–42. doi: 10.1134/S0021894412020046
2. Турубаев Р.Р., Шваб А.В. Моделирование аэродинамики газа и траектории движения частиц при взаимодействии двух встречных закрученных потоков // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 75. С. 138–149. doi: 10.17223/19988621/75/12
3. Шваб А.В., Соломаха А.Е. Численное моделирование аэродинамики воздушно-центробежного классификатора // Известия вузов. Физика. 2021. Т. 64, № 2-2 (759). С. 155–161. doi: 10.17223/00213411/64/2-2/155
4. Турубаев Р.Р., Шваб А.В. Численное исследование аэродинамики закрученного турбулентного течения и процесса классификации частиц в вихревой камере центробежного аппарата // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 65. С. 137–147. doi: 10.17223/19988621/65/11
5. Лукин Е.С., Попова Н.А., Ануфриева Е.В. и др. Современная оксидная керамика и области ее применения // Известия Академии инженерных наук им. А.М. Прохорова. 2014. № 2. С. 30–39
6. Лойко В.А., Маркова Л.В., Сёмин Е.В. Исследование покрытий хром-нитрид хрома в среднеуглеродистых низколегированных сталях // Известия Национальной академии наук Беларуси. Сер. физико-технических наук. 2012. № 3. С. 25–30
7. Манашев И.Р., Гаврилова Т.О., Шатохин И.М., Зиятдинов М.Х. Технология производства азотированных ферросплавов методом самораспространяющегося высокотемпературного синтеза // Теория и технология металлургического производства. 2019. № 4 (31). С. 4–12.
8. Cook B.A., Harringa J.L., Lewis T.L., Russell A.M. A new class of ultra-hard materials based on AlMgB14 // Scripta Materialia. 2000. V. 42 (6). P. 597–602. doi: 10.1016/S1359-6462(99)00400-5

9. Evseev N.S., Matveev A.E., Nikitin P.Yu. et al. A theoretical and experimental investigation on the SHS synthesis of (HfTiCN)-TiB₂ high-entropy composite // *Ceramics International*. 2022. V. 48, is. 11. P. 16010–16014. doi: 10.1016/j.ceramint.2022.02.144
10. Шваб А.В., Евсеев Н.С. Моделирование процесса фракционного разделения частиц в пневматическом центробежном аппарате // *Инженерно-физический журнал*. 2016. Т. 89, № 4. С. 826–836. doi: 10.1007/s10891-016-1443-3
11. Евсеев Н.С., Жуков И.А. Влияние турбулентных пульсаций на процесс фракционного разделения мелкодисперсных порошков нитридов металлов // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2021. № 72. С. 70–79. doi: 10.17223/19988621/72/6
12. Зятиков П.Н. Экспериментальные исследования аэродинамики закрученного потока в воздушно-центробежном классификаторе // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2011. № 1 (13). С. 83–92.

References

1. Shvab, A.V., Sadretdinov, S.R., Brendakov, V.N. (2012) Effects of gas flow and turbulent diffusion on the centrifugal classification of fine particles. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 53. pp. 173–181. doi: 10.1134/S0021894412020046
2. Turubaev R.R., Shvab A.V. (2022) Modelirovanie aerodinamiki gaza i traektorii dvizheniya chastits pri vzaimodeystvii dvukh vstrechnykh zakruchennykh potokov [Simulation of gas aerodynamics and particle trajectory in the interaction of two counter swirling flows]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 75. pp. 138–149. doi: 10.17223/19988621/75/12
3. Shvab A.V., Solomakha A.E. (2021) Chislennoe modelirovanie aerodinamiki vozdushno-tsentrobezhnogo klassifikatora [Numerical simulation of aerodynamics of air-centrifugal classifier]. *Izvestiya vuzov. Fizika – Russian Physics Journal*. 64(2-2(759)). pp. 155–161. doi: 10.17223/00213411/64/2-2/155
4. Turubaev R.R., Shvab A.V. (2020) Chislennoe issledovanie aerodinamiki zakruchennogo turbulentnogo techeniya i protsessa klassifikatsii chastits v vikhrevoi kamere tsentrobezhnogo apparata [Numerical study of the aerodynamics of a swirling turbulent flow and the process of classifying particles in the vortex chamber of a centrifugal apparatus]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 65. pp. 137–147. doi: 10.17223/19988621/65/11
5. Lukin E.S., Makarov N.A., Kozlov A.I., Popova N.A., Kuteynikova A.L., Anufrieva E.V., Vartanyan M.A., Kozlov I.A., Safina M.N., Nagayuk I.I., Gorelik E.I., Saburina I.N., Murav'ev E.N. (2014) Sovremennaya oksidnaya keramika i oblasti ee primeneniya [Novel oxide ceramics and fields of its application]. *Izvestiya Akademii inzhenernykh nauk im. A.M. Prokhorova – News Academy of Engineering Sciences A.M. Prokhorov*. 2. pp. 30–39.
6. Loyko V.A., Markova L.V., Semin E.V. (2012) Issledovanie pokrytiy khrom-nitrid khroma v sredneuglerodistykh nizkolegirovannykh stalyakh [Investigation of chromium-chromium nitride coatings in medium-carbon low-alloy steels]. *Izvestiya Natsional'noy akademii nauk Belarusi. Seriya fiziko-tehnicheskikh nauk – Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus, Physical-Technical Series*. 3. pp. 25–30.
7. Manashev I.R., Gavrilova T.O., Shatokhin I.M., Ziatdinov M.Kh. (2019) Tekhnologiya proizvodstva azotirovannykh ferrosplavov metodom samorasprostranyayushchegosya vysokotemperaturnogo sinteza [Technology for the production of nitrided ferroalloys by the method of self-propagating high-temperature synthesis]. *Teoriya i tekhnologiya metallurgicheskogo proizvodstva – Theory and Technology of Metallurgical Production*. 4(31). pp. 4–12.
8. Cook B.A., Harringa J.L., Lewis T.L., Russell A.M. (2000) A new class of ultra-hard materials based on AlMgB₁₄. *Scripta Materialia*. 42(6). pp. 597–602. doi: 10.1016/S1359-6462(99)00400-5

9. Evseev N.S., Matveev A.E., Nikitin P.Yu., Abzaev Yu.A., Zhukov I.A. (2022) A theoretical and experimental investigation on the SHS synthesis of (HfTiCN)-TiB₂ high-entropy composite. *Ceramics International*. 48(11). pp. 16010–16014. doi: 10.1016/j.ceramint.2022.02.144
10. Shvab A.V., Evseev N.S. (2016) Modeling the process of particle fractionation in a pneumatic centrifugal apparatus. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 89(4). pp. 829–839. doi: 10.1007/s10891-016-1443-3
11. Evseev N.S., Zhukov I.A. (2021) Vliyaniye turbulentnykh pul'satsiy na protsess fraktsionnogo razdeleniya melkodispersnykh poroshkov nitridov metallov [Effect of turbulent pulsations on the fractional separation of fine powders of metal nitrides]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 72. pp. 70–79. doi: 10.17223/19988621/72/6
12. Zyatikov P.N. (2011) Eksperimental'nye issledovaniya aerodinamiki zakruchennogo potoka v vozduшно-tsentrobezhnom klassifikatore [Experimental studies of swirling flow aerodynamics in an air-centrifugal classifier]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(13). pp. 83–92.

Сведения об авторах:

Евсеев Николай Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной аэромеханики Томского государственного университета, Томск, Россия; научный сотрудник Института проблем химико-энергетических технологий Сибирского отделения РАН, Бийск, Россия; доцент ИШПР ОНД Томского политехнического университета, Томск, Россия. E-mail: evseevns@gmail.com

Жуков Илья Александрович – доктор технических наук, заведующий лабораторией нанотехнологий металлургии Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: gofra930@gmail.com

Бельчиков Иван Александрович – научный сотрудник лаборатории нанотехнологий металлургии Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: ivan70422@gmail.com

Information about the authors:

Evseev Nikolay S. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Tomsk State University, Tomsk; Researcher, Institute for Problems of Chemical and Energetic Technologies of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Biysk; Associate Professor, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: evseevns@gmail.com

Zhukov Ilya A. (Doctor of Technical Sciences, Head of Laboratory, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gofra930@gmail.com

Bel'chikov Ivan A. (Researcher, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ivan70422@gmail.com

Статья поступила в редакцию 19.12.2022; принята к публикации 01.06.2023

The article was submitted 19.12.2022; accepted for publication 01.06.2023

Научная статья

УДК 532.529.5

doi: 10.17223/19988621/83/8

Влияние фазовых превращений на параметры турбулентных неізотермических газокапельных струй

Юрий Владимирович Зуев

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, Россия, yuri_zuev@bk.ru*

Аннотация. Проведенные расчеты неізотермической газокапельной турбулентной струи, истекающей в газовую среду с температурой, существенно превышающей температуры фаз в начальном сечении струи, позволили выявить влияние фазовых превращений на все осредненные параметры фаз струи. Показано, что при определенных условиях в струе могут существовать области, в которых одновременно наряду с испарением мелких капель происходит конденсация пара на крупных каплях, и с ростом температуры газа в окружающей среде эти области расширяются. Получены зависимости изменения вдоль оси струи интенсивности фазовых превращений для капель разного размера при различных граничных условиях.

Ключевые слова: двухфазная струя, пар, капли, испарение, конденсация, математическое моделирование, результаты расчетов

Для цитирования: Зуев Ю.В. Влияние фазовых превращений на параметры турбулентных неізотермических газокапельных струй // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 86–101. doi: 10.17223/19988621/83/8

Original article

Effect of phase changes on parameters of turbulent non-isothermal gas-drop jets

Yuriy V. Zuev

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation, yuri_zuev@bk.ru

Abstract. A mathematical model of a gas-drop non-isothermal polydisperse turbulent jet is developed with account for phase changes (the evaporation of drops and the condensation of vapor on them). The model is used in calculations of a two-phase jet outflowing into a gaseous medium with the temperature significantly exceeding the temperatures of phases in the initial section of the jet. It is shown that the occurrence of phase changes leads to a quantitative change in the dependences of phase velocities and volume concentrations of drops along the jet axis, while the type of the dependences remains constant.

When phase changes are neglected in calculations of temperatures of phases, not only quantitative but also qualitative errors may arise. The obtained results show that under certain conditions some areas may appear near the jet axis where, along with evaporation of small drops, the vapor condensation occurs on larger drops, and these areas extend with the gas temperature rise in the environment. The behavior of the intensity of phase changes along the jet axis is identical for drops of all sizes. Namely, near the initial section of the jet, the intensity of phase changes of low value decreases to the minimum, then it increases significantly, and when the maximum is attained, it starts to decrease tending to zero (while the drops evaporate completely). The research results show that phase changes must be considered when calculating gas-drop non-isothermal jets to avoid quantitative and qualitative errors.

Keywords: two-phase jet, fluid vapor, drops, evaporation, condensation, mathematical modeling, calculation results

For citation: Zuev, Yu.V. (2023) Effect of phase changes on parameters of turbulent non-isothermal gas-drop jets. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 86–101. doi: 10.17223/19988621/83/8

Введение

При организации смесеобразования в камерах сгорания тепловых двигателей для распыливания топлива используются различные форсунки. В качестве одного из мероприятий по улучшению характеристик камер сгорания газотурбинных двигателей рассматривается применение пневматических форсунок, имеющих ряд преимуществ перед форсунками других типов. Результаты работы [1] указывают, что факел распыла этих форсунок представляет собой двухфазную струю, в которой одновременно протекает много различных процессов, одним из которых является интенсивное испарение массы жидкости, сопровождающееся значительным теплоотводом от газа к каплям. В связи с этим результаты исследования двухфазных струй с фазовыми превращениями представляют значительный интерес при создании камер сгорания перспективных реактивных двигателей.

Процесс испарения капель в газокapельной струе целесообразно изучать не экспериментально, а используя метод математического моделирования, так как при этом можно получить большее количество информации о процессе при минимальных временных и материальных затратах. Для этого необходимо иметь математическую модель такой струи, учитывающую как можно большее количество явлений, протекающих в ней: неравновесность фаз по скоростям и температурам, полидисперсность капель, влияние дисперсной фазы на параметры турбулентности непрерывной фазы, фазовые превращения.

На протяжении многих лет математические модели двухфазных турбулентных течений включали системы уравнений Рейнольдса, которые замыкались с помощью различных моделей турбулентности. В последнее время расчет турбулентных течений проводится с помощью метода прямого численного моделирования, при использовании которого решаются нестационарные уравнения Навье–Стокса без привлечения моделей турбулентности.

В известных математических моделях двухфазных струй, базирующихся на уравнениях Рейнольдса, описание движения газовой фазы проводится с применением метода Эйлера, а при описании движения частиц используется как метод

Эйлера, так и метод Лагранжа. Метод Эйлера предполагает запись дифференциальных уравнений в частных производных, что можно сделать только в случае непрерывного распределения параметров фаз в области течения. Но в двухфазных течениях на границе раздела фаз все параметры, за исключением давления, терпят разрыв. Поэтому в случае записи уравнений в переменных Эйлера осреднению этих уравнений по времени [2] должно предшествовать осреднение по пространству [3]. В результате такого осреднения в уравнениях математической модели появляются объемные концентрации частиц, газовой фазы и ее компонентов. Для течений типа пограничного слоя вывод уравнений заканчивается оценкой порядка их членов [4], в результате чего получаются параболические дифференциальные уравнения.

За последние четыре десятилетия опубликовано достаточно большое количество работ, посвященных исследованию двухфазных струй с фазовыми превращениями. Эволюцию развития математических моделей таких течений можно проследить на примере публикаций [5–9].

В статье [5] приводится математическая модель двухфазной струи, включающая осредненные уравнения дисперсной и дисперсионной фаз, записанные в переменных Эйлера, и k - ϵ модель турбулентности. С помощью этой модели рассчитываются параметры воздушной струи с каплями фреона. Ввиду того что, согласно экспериментальным данным, температуры воздуха и фреона в струе меняются незначительно, уравнения энергии фаз не используются – они заменяются условием постоянства температур фаз.

В работе [6] сравниваются результаты расчетов газок капельных струй, выполненные с использованием двух математических моделей. В первой модели уравнения, описывающие движение газовой фазы и капель, записываются в переменных Эйлера, во второй для газовой фазы используется метод Эйлера, а для капель – метод Лагранжа. Уравнения газовой фазы и капель в переменных Эйлера аналогичны уравнениям [5], но при их записи сделаны упрощения – в уравнениях газовой фазы не учитывается объем, занятый частицами, и опущены моменты корреляции, содержащие пульсации концентраций фаз. В качестве модели турбулентности используется k - ϵ модель. В этой модели также отсутствуют уравнения энергии фаз, так как моделируется струя с каплями фреона. Во второй модели для капель записывается уравнение их движения в переменных Лагранжа с учетом пульсаций скорости газовой фазы (стохастическая модель). Сравнение расчетов, выполненных по рассмотренным в статье математическим моделям, показало хорошее совпадение их результатов.

Статья [7] посвящена численному исследованию влияния размера и концентрации испаряющихся капель воды на параметры двухфазной неизотермической затопленной струи. Уравнения, описывающие движение газовой фазы и капель, записываются с использованием метода Эйлера. Осредненные уравнения газовой фазы получаются осреднением мгновенных уравнений Навье–Стокса по времени, а при выводе осредненных уравнений дискретной фазы используются кинетические уравнения для функций плотности распределения скорости и температуры частиц по размерам. При моделировании турбулентности газа применяется модель переноса рейнольдсовых напряжений.

В работе [8] приводится математическая модель двухфазной струи с испарением капель, истекающей в спутный газовый поток. Движение газовой фазы описывается в переменных Эйлера, а движение капель – в переменных Лагранжа

с помощью стохастической модели. Для замыкания системы осредненных уравнений используется стандартная k - ϵ модель турбулентности. Результаты расчетов сравниваются с данными экспериментального исследования струи с каплями ацетона, истекающей из сопла в воздух. Так как в эксперименте и при проведении расчетов различие в температурах фаз было незначительным (в пределах 20 К), то вопрос о возможности использования этой модели для расчета течений с большой разностью температур фаз остается открытым.

В статье [9] решается задача, аналогичная задаче, описанной в [8]: исследуется газовая струя с испаряющимися каплями ацетона, истекающая в спутный воздушный поток. При этом математическая модель течения близка модели, приведенной в статье [8]. Отличие заключается в том, что в [9] для решения задачи применяется метод прямого численного моделирования, при котором отпадает необходимость в использовании моделей турбулентности.

Общим недостатком математических моделей двухфазных течений [6–9] является то, что при выводе уравнений, описывающих движение газовой фазы или капель в переменных Эйлера, не проводится осреднение исходных мгновенных уравнений Навье–Стокса по пространству. При этом нарушается гипотеза непрерывности распределения параметров фаз (в том числе и газовой фазы) в области двухфазного течения, при выполнении которой возможно использование математического аппарата частных производных. Чтобы минимизировать последствия нарушения этой гипотезы, авторы публикаций [6–9] отмечают, что их математические модели можно использовать только при расчете двухфазных течений, в которых объемная концентрация дисперсной фазы не превышает 10^{-4} . Но такие небольшие концентрации частиц неинтересны при решении большинства прикладных задач.

Второй недостаток моделей [5–9] заключается в том, что в них либо отсутствуют уравнения энергии фаз [5, 6], либо при записи этих уравнений допущен ряд неточностей: не учитываются работы сил давления и межфазного взаимодействия несмотря на то, что соответствующие силы присутствуют в уравнениях движения; не учитываются затраты энергии газовой фазы на нагрев массы испарившейся жидкости от температуры капли до температуры газа в потоке [7–9]. Запись уравнений в моделях [5–9] позволяет использовать эти модели только для расчета течений с испарением капель. Но во многих случаях в одной области пространства возможны одновременное испарение мелких капель и конденсация пара на крупных каплях.

В опубликованных работах приводятся данные о влиянии граничных условий на отдельные параметры газок капельных струй с испарением, но отсутствует информация о том, как влияют фазовые превращения на распространение этих струй и существуют ли условия, при которых можно проводить расчеты без учета фазовых превращений.

Ниже приводится математическая модель двухфазной струи, которая лишена отмеченных недостатков, и с помощью этой модели проведены расчеты, позволившие оценить влияние фазовых превращений на все осредненные параметры двухфазной струи.

Математическая модель газок капельной струи с фазовыми превращениями

Математическая модель полидисперсной неизотермической газок капельной струи с фазовыми превращениями, приведенная в данной работе, является разви-

тием нашей математической модели двухфазной струи без фазовых переходов [10]. В модернизированной математической модели так же, как и в исходной модели, описание движения обеих фаз проводится в переменных Эйлера, а осредненные уравнения фаз получаются осреднением по пространству [3] и времени [2, 4] мгновенных микроуравнений каждой фазы, записанных для некоторого произвольного макрообъема области течения [3]. Вывод осредненных уравнений заканчивается оценкой порядка их членов с учетом особенностей струйного пограничного слоя по методике, изложенной в [4]. В связи с тем, что двухфазные турбулентные струйные течения являются автомодельными и подобными [1, 5, 6], для моментов корреляции пульсационных параметров фаз, входящих в осредненные уравнения, используются алгебраические выражения [10].

В данной математической модели двухфазной струи функция распределения капель по размерам заменяется гистограммой с выделением F классов капель, параметры которых обозначаются индексом f ($f = 1, 2, \dots, F$). Параметры газовой фазы (скорость, температура) индексов не имеют, а параметры ее компонентов (объемная концентрация, плотность) обозначаются индексом k ($k = 1, 2, \dots, K$). В решаемой задаче при наличии двух компонентов газовой смеси для пара $k = 1$, для инертного газа (воздуха) $k = 2$. С учетом изложенного осредненные по пространству и времени уравнения: неразрывности, движения и энергии фаз, концентрации газовых компонентов, изменения диаметра капель за счет фазовых превращений, состояния фаз, – описывающие газокapельную полидисперсную турбулентную неизотермическую осесимметричную струю с фазовыми превращениями в приближении пограничного слоя, в цилиндрической системе координат записываются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} u \sum_{k=1}^K (\rho_k \alpha_k) + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \sum_{k=1}^K (v \rho_k \alpha_k + \alpha_k \langle \rho'_k v' \rangle + \rho_k \langle \alpha'_k v' \rangle) = - \sum_{f=1}^F M_{f,ph}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho_f \alpha_f u_f + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \rho_f (\alpha_f v_f + \langle \alpha'_f v'_f \rangle) = M_{f,ph}, \quad (2)$$

$$u \sum_{k=1}^K (\rho_k \alpha_k) \frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{k=1}^K (v \rho_k \alpha_k + \alpha_k \langle \rho'_k v' \rangle + \rho_k \langle \alpha'_k v' \rangle) \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \langle u' v' \rangle \sum_{k=1}^K (\rho_k \alpha_k) - \sum_{f=1}^F F_{cfx} - \sum_{f=1}^F M_{f,ph} (u_{ph} - u), \quad (3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

$$\rho_f \alpha_f u_f \frac{\partial u_f}{\partial x} + \rho_f (\alpha_f v_f + \langle \alpha'_f v'_f \rangle) \frac{\partial u_f}{\partial y} = - \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \rho_f \alpha_f \langle u'_f v'_f \rangle + F_{cfx} + M_{f,ph} (u_{ph} - u_f), \quad (5)$$

$$\rho_f \alpha_f u_f \frac{\partial v_f}{\partial x} + \rho_f (\alpha_f v_f + 2 \langle \alpha'_f v'_f \rangle) \frac{\partial v_f}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial x} \rho_f (\alpha_f \langle u'_f v'_f \rangle + u_f \langle \alpha'_f v'_f \rangle) - \frac{v_f}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \rho_f \langle \alpha'_f v'_f \rangle - \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \rho_f \alpha_f \langle v_f'^2 \rangle + F_{cfy} + M_{f,ph} (v_{ph} - v_f), \quad (6)$$

$$u \sum_{k=1}^K (\rho_k \alpha_k) \frac{\partial c_p T}{\partial x} + \sum_{k=1}^K (v \rho_k \alpha_k + \alpha_k \langle \rho'_k v' \rangle + \rho_k \langle \alpha'_k v' \rangle) \frac{\partial c_p T}{\partial y} = u \frac{\partial p}{\partial x} -$$

$$- \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \sum_{k=1}^K (c_{pk} \rho_k \alpha_k) \langle T' v' \rangle - \langle u' v' \rangle \sum_{k=1}^K (\rho_k \alpha_k) \frac{\partial u}{\partial y} - \sum_{f=1}^F F_{cfx} (u_f - u) -$$

$$- \sum_{f=1}^F M_{f,ph} \left[i_{ph} - i_v(T) + \frac{(u_{ph} - u)^2}{2} \right] - \sum_{f=1}^F Q_{f,conv}, \quad (7)$$

$$\rho_f \alpha_f u_f \frac{\partial c_f T_f}{\partial x} + \rho_f (\alpha_f v_f + \langle \alpha'_f v'_f \rangle) \frac{\partial c_f T_f}{\partial y} =$$

$$= - \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \rho_f \alpha_f c_f \langle T'_f v'_f \rangle - \rho_f \alpha_f \langle u'_f v'_f \rangle \frac{\partial u_f}{\partial y} +$$

$$+ M_{f,ph} \left[i_{ph} - i_f(T_f) + \frac{(u_{ph} - u_f)^2}{2} \right] + Q_{f,conv}, \quad (8)$$

$$u \sum_{k=1}^K (\rho_k \alpha_k) \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} + \sum_{k=1}^K (v \rho_k \alpha_k + \alpha_k \langle \rho'_k v' \rangle + \rho_k \langle \alpha'_k v' \rangle) \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} =$$

$$= - \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \langle \alpha'_i v' \rangle \sum_{k=1}^K (\rho_k \alpha_k) - \sum_{f=1}^F M_{f,ph}, \quad (9)$$

$$\left(\frac{dD_f^3}{dx} \right)_{ph} = \frac{D_f^3}{\alpha_f \rho_f u_f} M_{f,ph}, \quad (10)$$

$$p = \rho_k R_k T; \quad \rho_f = const, \quad (11)$$

$$\sum_{k=1}^K \alpha_k + \sum_{f=1}^F \alpha_f = 1. \quad (12)$$

В этих уравнениях: x, y – оси координат (ось x совпадает с осью струи); ρ – физическая плотность; p – давление; T – температура; u, v – компоненты вектора скорости $\mathbf{W}$; α – объемная концентрация; D_f – диаметр капель класса f ; R_k – удельная газовая постоянная компоненты k ; c_p – удельная теплоемкость газовой фазы при постоянном давлении; c_f – удельная теплоемкость вещества капель класса f ; F_{cf} – сила сопротивления капель класса f ; $Q_{f,conv}$ – конвективный тепловой поток от газа к каплям класса f ; $i_v(T)$ – удельная энтальпия вещества капель в газообразном состоянии при температуре T ; $i_f(T_f)$ – удельная энтальпия вещества капель в жидком состоянии при температуре T_f ; u_{ph}, v_{ph} – компоненты скорости фазового перехода $\mathbf{W}_{ph}$; i_{ph} – удельная энтальпия вещества, претерпевающего фазовый переход; $M_{f,ph}$ – интенсивность фазовых переходов для капель класса f (масса вещества капель, претерпевающая фазовые превращения в единице объема среды в единицу времени). При испарении капель $\mathbf{W}_{ph} = \mathbf{W}_f$; $i_{ph} = i_v(T_f)$, при конденсации пара $\mathbf{W}_{ph} = \mathbf{W}$; $i_{ph} = i_v(T_{vs}(p_v))$ [3] ($i_v(T_f)$ – энтальпия вещества капель в газообразном состоянии при температуре T_f ; $i_v(T_{vs}(p_v))$ – энтальпия вещества капель на линии насыщения при парциальном давлении пара p_v в газовой смеси). Угловыми скоб-

ками обозначены моменты корреляции пульсационных величин; штрихами сверху – пульсационные параметры фаз.

Сила сопротивления капель рассчитывается по общеизвестной формуле $F_{cf} = 3\alpha_f C_{Df} \rho (\mathbf{W} - \mathbf{W}_f) |\mathbf{W} - \mathbf{W}_f| / (4D_f)$, приведенной в монографии [11]. При определении коэффициента сопротивления капель C_{Df} учитываются результаты работы [12], в которой исследовалось влияние потока массы через поверхность частицы на ее коэффициент сопротивления. Для конвективного теплового потока от газа к каплям используется формула $Q_{f,conv} = 6\alpha_{T,f} \alpha_f (T - T_f) / D_f$ [11], в которой $\alpha_{T,f}$ – коэффициент теплоотдачи для капель класса f .

В связи с тем, что объемная концентрация паров вещества капель при проведении расчетов не превышает 0.2, для расчета скорости фазовых превращений используется выражение [13]

$$M_{f,ph} = \frac{6\alpha_f \cdot D_\alpha \cdot Sh}{D_f^2} (\rho_{vp} - \rho_{vs}),$$

в котором: D_α – коэффициент диффузии паров вещества капель; ρ_{vp} – плотность пара вещества капель, рассчитанная по парциальному давлению этого пара в потоке; ρ_{vs} – плотность пара вещества капель, рассчитанная по давлению насыщения при температуре капли T_f ; Sh – критерий Шервуда.

Система осредненных уравнений (1)–(12) замыкается с помощью алгебраических выражений для моментов корреляции пульсационных параметров фаз, приведенных в [10]. Пульсационные скорости фаз, входящие в эти выражения, определяются с помощью модели турбулентности, описанной в статье [14].

Правомерность использования алгебраических формул для моментов корреляции пульсационных параметров фаз двухфазных турбулентных струй обусловлена тем, что эти струи, как отмечено выше, являются автомодельными и подобными.

При решении системы уравнений (1)–(12), описывающих осесимметричное струйное течение, задаются следующие граничные условия: при $x = 0$ (в начальном сечении струи) – зависимости параметров фаз от координаты y ; при $y = \infty$ – значения параметров фаз на бесконечном удалении от оси струи (жесткие граничные условия); при $y = 0$ (на оси струи) – условия симметрии течения.

При аппроксимации дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (2), (3), (5)–(9) разностными уравнениями используется неявный метод Кранка–Николсона с весовым коэффициентом 1/2, при котором конечно-разностные аналоги этих уравнений записываются для шеститочечного шаблона [15]. Уравнение в частных производных (1), являющееся уравнением первого порядка, аппроксимируется по явной четырехточечной схеме.

Валидация математической модели газокapельной струи

Подтверждение адекватности разработанной математической модели моделируемому течению – двухфазной неизотермической струе с фазовыми превращениями – проводится с привлечением данных, приведенных в статье [1]. Эта публикация посвящена экспериментальному исследованию двухфазной струи, которая образуется при истечении керосина из пневматической форсунки в спутный воздушный поток со скоростью 7,3 м/с и температурой 450 К. Измерения парамет-

ров фаз в двухфазной струе проводились в шести сечениях, расположенных на различных расстояниях от среза форсунки. Безразмерные поперечные поля скорости газовой фазы и средней скорости капель, построенные по результатам эксперимента, хорошо описываются формулой Шлихтинга, что свидетельствует об автомодельности двухфазных струйных течений.

В качестве исходного (начального) сечения для расчета выбрано сечение с радиусом 10 мм, находящееся на расстоянии 40 мм от форсунки, так как в статье [1] для этого сечения приводится наиболее полная информация по значениям параметров газа и капель.

На рис. 1 приведено сравнение результатов расчета с данными эксперимента по изменению суммарной объемной концентрации капель керосина в двухфазной струе. Суммарная объемная концентрация капель рассчитывалась по формуле $\alpha_{f\Sigma} = \sum \alpha_{fi}$.

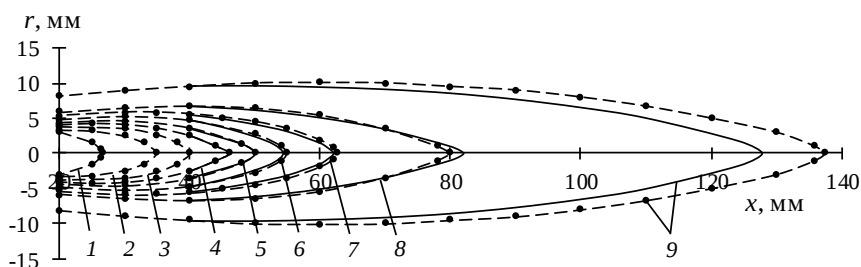


Рис. 1. Сопоставление результатов расчета с данными эксперимента [1]. Линии соответствуют постоянным значениям объемной концентрации капель $\alpha_{f\Sigma}$: 1 – $81 \cdot 10^{-5}$; 2 – $72 \cdot 10^{-5}$; 3 – $63 \cdot 10^{-5}$; 4 – $54 \cdot 10^{-5}$; 5 – $45 \cdot 10^{-5}$; 6 – $36 \cdot 10^{-5}$; 7 – $27 \cdot 10^{-5}$; 8 – $18 \cdot 10^{-5}$; 9 – $9 \cdot 10^{-5}$. Сплошные линии – расчет; точки, соединенные пунктирными линиями, – эксперимент

Fig. 1. Isolines of volume concentration of drops: $\alpha_{f\Sigma} = (1) 81 \cdot 10^{-5}$; (2) $72 \cdot 10^{-5}$; (3) $63 \cdot 10^{-5}$; (4) $54 \cdot 10^{-5}$; (5) $45 \cdot 10^{-5}$; (6) $36 \cdot 10^{-5}$; (7) $27 \cdot 10^{-5}$; (8) $18 \cdot 10^{-5}$; and (9) $9 \cdot 10^{-5}$. Comparison of calculated results (solid lines) with experimental data (dotted and dashed lines) [1]

Из рис. 1 следует, что разработанная математическая модель удовлетворительно описывает распределение объемной концентрации капель в области струйного течения. Так как величина объемной концентрации капель зависит от их размера и скорости, а скорость капель определяется скоростью газа, то можно считать, что эта модель с достаточной степенью точности описывает изменение всех параметров двухфазной струи с фазовыми превращениями и может использоваться для расчета реальных течений.

Результаты расчетов

Цель данной работы заключается в выявлении влияния фазовых превращений на изменение параметров неизоэнтальпических двухфазных турбулентных струй. Эта цель достигается сравнением результатов расчетов струй, проведенных с одинаковыми граничными условиями, при наличии и отсутствии фазовых превращений. При проведении расчетов принято, что непрерывной фазой является смесь воздуха с парами воды, а дисперсной фазой – капли воды, объединенные в пять классов с характерными диаметрами $D_f = 15, 45, 75, 105$ и 135 мкм. Количество классов капель выбрано в соответствии с рекомендациями [16]. При выборе ха-

рактерных размеров классов капель предполагается, что капли получаются с помощью пневматической форсунки, их размер находится в диапазоне 0–150 мкм, а распределение объемной концентрации по размерам подчиняется нормальному закону.

Принимается, что в начальном сечении осесимметричной струи радиусом $R_0 = 25 \cdot 10^{-3}$ м скорость газа $u_0 = 100$ м/с, скорости капель всех классов $u_{f0} = 80$ м/с, температуры газа и капель $T_0 = T_{f0} = 300$ К, объемная концентрация водяного пара $\alpha_{k=1} = 0.033$, что соответствует влажности воздуха 90%. Струя истекает в неподвижный воздух с давлением $p = 10^5$ Па, в котором концентрация паров воды $\alpha_{k=1} = 0.026$ (соответствует влажности воздуха 70%). Расчеты выполнены для трех вариантов с различными значениями объемной концентрации капель в начальном сечении струи α_{f0} и температуры газа в окружающей среде T_e : вариант 1 – $\alpha_{f0} = 10^{-4}$, $T_e = 400$ К; вариант 2 – $\alpha_{f0} = 10^{-3}$, $T_e = 400$ К; вариант 3 – $\alpha_{f0} = 10^{-3}$, $T_e = 500$ К. При проведении этих расчетов предполагалось, что соотношение между начальными объемными концентрациями капель α_{f0} выделенных пяти классов сохранялось неизменным: 1:2:4:2:1, и поперечные поля всех параметров фаз в начальном сечении струи равномерные. Так как в данной работе исследуется влияние только фазовых превращений на параметры двухфазной струи, то коагуляция и дробление капель при их взаимодействии не учитывались.

Результаты расчетов при $\alpha_{f0} = 10^{-3}$ и $T_e = 400$ К (вариант 2) приведены на рис. 2. На нем в безразмерном виде изображены графики изменения параметров фаз двухфазной струи вдоль ее оси, полученные в результате расчетов этой струи с учетом фазовых превращений (сплошные кривые) и при их отсутствии (пунктирные кривые). При этом введены обозначения: $\bar{x} = x/R^*$; $\bar{u}_m = u_m/u^*$; $\bar{u}_{fm} = u_{fm}/u^*$; $\bar{\alpha}_{fm} = \alpha_{fm}/\alpha_f^*$; $\bar{D}_{fm} = D_{fm}/D_f^*$; $\bar{T}_m = T_m/T^*$; $\bar{T}_{fm} = T_{fm}/T^*$ (индекс m соответствует оси струи). В качестве масштабов линейных размеров, скоростей и температур выбраны следующие их значения: $R^* = R_0 = 25 \cdot 10^{-3}$ м; $D_f^* = 100 \cdot 10^{-6}$ м; $u^* = u_0 = 100$ м/с; $T^* = 288$ К; $\alpha_f^* = \alpha_{f0} = \Sigma \alpha_{f0}$.

На рис. 2, а изображено изменение вдоль оси струи скоростей капель пяти классов (кривые 1–5) и скорости газа (кривая 6) при наличии фазовых превращений. На небольшом участке струи за соплом капли ускоряются, а после того, как их скорость достигает скорости газа, начинают тормозиться за счет взаимодействия с газом, имеющим меньшую скорость. При этом скорость капель класса $f = 1$ практически совпадает со скоростью газа, а скорости более крупных капель отличаются от скорости газа, и это отличие возрастает с увеличением размера капель, т.е. с увеличением их инерционности.

На рис. 2, б приведены зависимости изменения вдоль оси струи скорости капель класса $f = 5$ (кривая 5) и скорости газа (кривая 6) с учетом и без учета фазовых превращений. Наибольшая погрешность в расчете этих скоростей при пренебрежении фазовыми превращениями составляет 12%.

Влияние фазовых превращений на изменение вдоль оси струи температур фаз иллюстрирует график на рис. 2, с. При удалении от начального сечения струи температура газовой фазы увеличивается за счет подмешивания в нее горячего газа из окружающего пространства. Но при наличии фазовых превращений это увеличение менее значительное, и различие температуры газа на участке $120 < \bar{x} < 300$ с учетом и без учета фазовых превращений составляет от 5.5 до 7.5%. Изменение

температуры частиц в струе с фазовыми превращениями качественно отличается от ее изменения в струе без фазовых превращений. В первом случае температуры частиц всех размеров при $\bar{x} < 100$ незначительно возрастают, сближаясь между собой, а затем, начиная с $\bar{x} = 100$, они примерно одинаковы и постоянны по длине струи. Во втором случае при удалении от начального сечения струи температуры частиц стремятся к температуре газа, и при определенных значениях $\bar{x}$, зависящих от размера частиц, сравниваются с этой температурой.

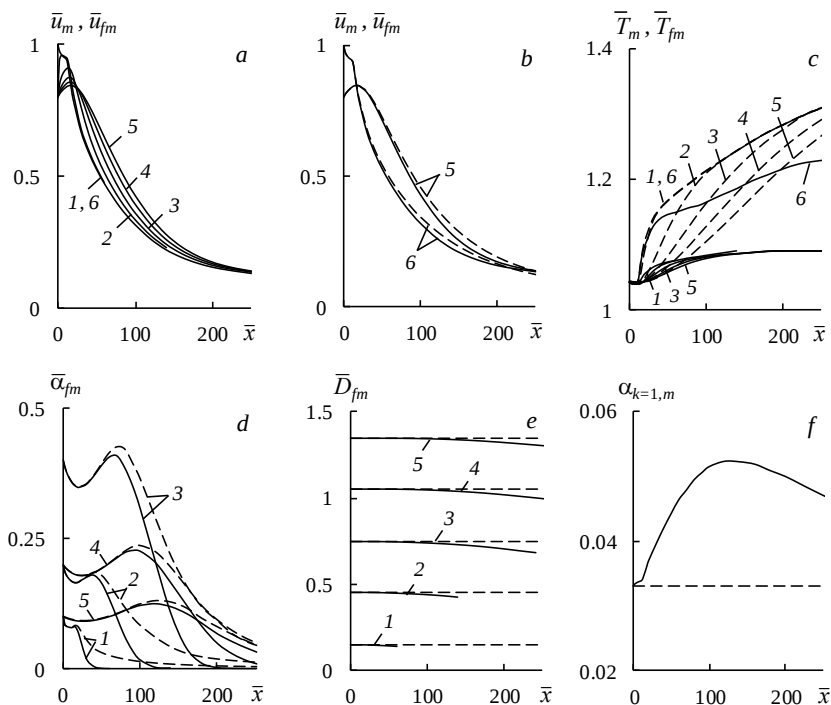


Рис. 2. Изменение параметров фаз вдоль оси двухфазной струи при $\alpha_{f20} = 10^{-3}$ и $T_e = 400$ К: *a* – скорости газа и капель пяти классов; *b* – скорости газа и капель класса $f = 5$; *c* – температуры газа и капель; *d* – объемные концентрации капель; *e* – диаметры капель; *f* – объемная концентрация водяного пара. 1–5 – параметры капель пяти классов; 6 – параметры газа; сплошные линии – расчет с учетом фазовых превращений; пунктирные линии – расчет без учета фазовых превращений

Fig. 2. Change of phase parameters along the axis of a two-phase jet at $\alpha_{f20} = 10^{-3}$ and $T_e = 400$ K: (a) gas velocity and velocity of the drops of five classes; (b) gas velocity and velocity of the drops of the class $f = 5$; (c) temperatures of the gas and drops; (d) volume concentrations of the drops; (e) diameters of the drops; and (f) volume concentration of the water vapor. (1)–(5) parameters of the drops of five classes; (6) gas parameters; the solid lines indicate a calculation with account for phase changes; the dashed lines, a calculation without phase changes

На рис. 2, *d* показано изменение вдоль оси струи объемной концентрации капель. В струе наблюдается эффект «шнурования» (немонотонного изменения концентрации частиц вдоль оси струи), обусловленный торможением частиц [17]. За счет фазовых превращений уменьшается объемная концентрация капель, причем

чем меньше размер капель, тем сильнее это проявляется. Следствием этого является увеличение среднего (заутеровского) диаметра капель $D_{\Sigma} = \Sigma \alpha_{\beta} \Sigma (\alpha_{\beta} D_{\beta})$ [16].

Испарение капель приводит к уменьшению их размера (см. рис. 2, e) и увеличению объемной концентрации паров воды (см. рис. 2, f) по сравнению со случаем отсутствия фазовых превращений. При удалении от сопла объемная концентрация паров воды на оси струи сначала увеличивается, при $\bar{x} = 120$ достигает максимума, а затем начинает уменьшаться, стремясь к концентрации этих паров в окружающей среде. Расстояние от начального сечения струи, на котором капли полностью испаряются, зависит от их размера.

При уменьшении начальной объемной концентрации капель до 10^{-4} (вариант 1) и увеличении температуры окружающей среды до 500 К (вариант 3) изменение параметров двухфазной струи вдоль ее оси аналогично тому, как это происходит в рассмотренном варианте расчетов 2 (при $\alpha_{\beta 0} = 10^{-3}$, $T_e = 400$ К); наблюдается лишь количественное различие. Например, в варианте 1 наибольшее значение концентрации водяного пара на оси струи 0.038, наибольшее различие в расчете скоростей газа и капель с учетом и без учета фазовых превращений 17%, различие температуры газа на участке $120 < \bar{x} < 300$ с учетом и без учета фазовых превращений составляет 4–9%. В варианте 3 значения этих параметров соответственно равны 0.062, 23%, 4.5–16%.

На рис. 3 представлены зависимости пересыщения водяного пара на оси струи S_m от безразмерной координаты $\bar{x}$, полученные в трех вариантах расчетов. Под пересыщением пара понимается отношение парциального давления пара в газовой смеси к его давлению насыщения при температуре капли: $S = \alpha_{k=1} p / p_s$ ($\alpha_{k=1}$ – объемная концентрация пара в газовой смеси, p – давление в окружающей среде, p_s – давление насыщения при температуре капли T_f).

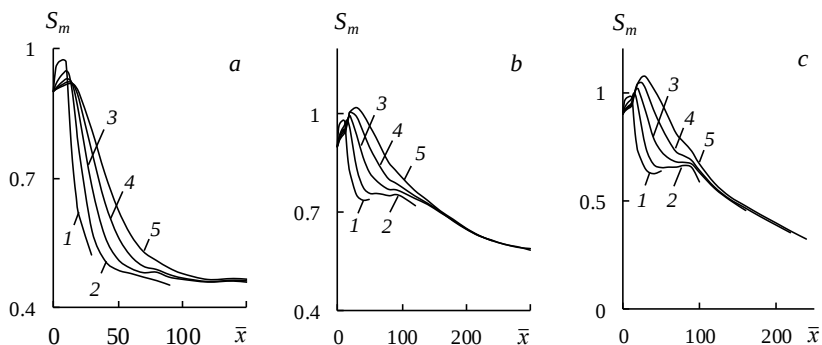


Рис. 3. Сравнение зависимостей пересыщения водяного S_m пара от безразмерной координаты $\bar{x}$ при изменении значений начальной объемной концентрации капель $\alpha_{\beta 0}$ и температуры газа в окружающей среде T_e : а – $\alpha_{\beta 0} = 10^{-4}$, $T_e = 400$ К; б – 10^{-3} , 400 К; с – 10^{-3} , 500 К; номера кривых соответствуют номерам классов капель

Fig. 3. Comparison of dependences of water vapor supersaturation S_m on dimensionless coordinate $\bar{x}$ at various initial volume concentrations of drops $\alpha_{\beta 0}$ and gas temperatures in the environment T_e : (a) 10^{-4} , 400 К; (b) 10^{-3} , 400 К; and (c) 10^{-3} , 500 К; the curve numbers correspond to the numbers of drop classes

Равновесные фазовые превращения протекают при $S = 1$; значения $S \neq 1$ соответствуют неравновесным процессам, причем при $S < 1$ наблюдается испарение

перегретой жидкости, а при $S > 1$ – конденсация переохлажденного пара на каплях.

Из рис. 3 видно, что в области струи вблизи ее начального сечения пересыщение пара больше для капель меньшего размера, но затем, при удалении от этого сечения, картина меняется – величина пересыщения пара при фиксированных значениях $\bar{x}$ растет с увеличением размера капель. Это связано с характером изменения температуры капель различных классов в струе при одинаковой для всех размеров капель объемной концентрации пара. При $\alpha_{\text{p}0} = 10^{-4}$, $T_e = 400$ К (см. рис. 3, а) начиная с $\bar{x} = 120$ пересыщение пара для неиспарившихся капель становится постоянным. Это же происходит при увеличении объемной концентрации капель $\alpha_{\text{p}0}$ (см. рис. 3, b), но при большем значении $\bar{x}$. В варианте 3 (см. рис. 3, c) – при $\alpha_{\text{p}0} = 10^{-3}$, $T_e = 500$ К – на графике $S_m = S_m(\bar{x})$ отсутствуют признаки асимптотического приближения пересыщения пара к постоянной величине в связи с испарением всех капель на меньшем расстоянии от сопла. Следует отметить, что в некоторой области струи возможно одновременное испарение мелких капель и конденсация пара на более крупных каплях. Это следует из графиков на рис. 3, b и 3, c.

На рис. 4 представлены зависимости интенсивности фазовых превращений $\bar{M}_{f,ph} = M_{f,ph}/(D_{\alpha}^* \rho^*/D_f^{*2})$ от расстояния $\bar{x}$ для капель различного размера (D_{α}^* и ρ^* – коэффициент диффузии и плотность водяного пара при нормальных условиях; D_f^* – масштаб диаметра капель, равный $100 \cdot 10^{-6}$ м), полученные в вариантах расчетов 1–3. Следует отметить, что интенсивность фазовых превращений $M_{f,ph}$, входящая в уравнения (1)–(3), (5)–(9), представляет собой массу капель класса f , претерпевающую фазовые превращения в единице объема среды в единицу времени.

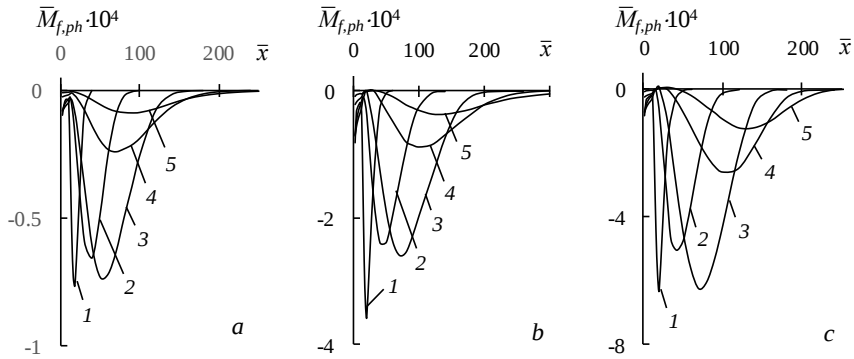


Рис. 4. Зависимости интенсивности фазовых превращений $\bar{M}_{f,ph}$ от расстояния до начального сечения струи $\bar{x}$, полученные в вариантах расчетов 1–3: а – $\alpha_{\text{p}0} = 10^{-4}$, $T_e = 400$ К; б – 10^{-3} , 400 К; в – 10^{-3} , 500 К; номера кривых соответствуют номерам классов капель

Fig. 4. Intensity of phase changes $\bar{M}_{f,ph}$ as the functions of the distance to the initial jet section $\bar{x}$ obtained in calculations 1–3: (a) $\alpha_{\text{p}0} = 10^{-4}$, $T_e = 400$ К; (b) $\alpha_{\text{p}0} = 10^{-3}$, 400 К; and (c) $\alpha_{\text{p}0} = 10^{-3}$, $T_e = 500$ К; the curve numbers correspond to the numbers of drop classes

Из графиков этого рисунка следует, что с увеличением начального значения объемной концентрации капель $\alpha_{\text{p}0}$ и увеличением температуры газа в окружа-

ющей среде T_e интенсивность фазовых превращений увеличивается. При этом характер изменения зависимостей $\bar{M}_{f,ph} = \bar{M}_{f,ph}(\bar{x})$ одинаков для капель всех классов: вблизи начального сечения струи интенсивность фазовых превращений при ее небольшой величине уменьшается до минимума, затем она существенно возрастает и после достижения максимума начинает уменьшаться, стремясь к нулю (при этом капли полностью испаряются). Увеличение интенсивности фазовых превращений вдоль оси струи связано с ростом объемной концентрации паров воды при незначительном изменении концентрации капель, а уменьшение этой интенсивности – и с уменьшением концентрации капель, и с уменьшением концентрации водяных паров. Причем, максимумы зависимостей $\bar{M}_{f,ph} = \bar{M}_{f,ph}(\bar{x})$ с увеличением размера капель смещаются в область больших значений $\bar{x}$. Величины этих максимумов зависят от размера капель и их объемной концентрации.

Заключение

Анализ результатов расчетов газокapельной струи, истекающей в газовую среду с температурой, значительно превышающей температуру фаз в начальном сечении струи, показал следующее. Наличие фазовых превращений приводит к количественному изменению зависимостей скоростей фаз и объемных концентраций капель вдоль оси струи при сохранении вида этих зависимостей. При наличии фазовых превращений в струе размер капель уменьшается при удалении от сопла и при определенных значениях $\bar{x}$, зависящих от граничных условий, они полностью испаряются. Вследствие того, что интенсивность испарения мелких капель больше интенсивности испарения более крупных капель, по длине струи увеличивается их средний (заутеровский) диаметр. Испарение капель приводит к изменению объемной концентрации водяного пара – при удалении от сопла эта концентрация на оси струи сначала возрастает, достигает максимума и далее начинает уменьшаться, стремясь к концентрации пара в окружающей среде. Наибольшее влияние фазовые превращения оказывают на изменение температуры капель. При наличии фазовых превращений в струе начиная с некоторого расстояния от сопла температуры капель всех классов становятся практически одинаковыми и не меняются по длине струи, а в струе без фазовых превращений при удалении от сопла температуры частиц возрастают, стремясь к температуре газа. Полученные зависимости изменения пересыщения пара вдоль оси струи указывают на то, что при определенных граничных условиях вблизи оси струи могут существовать области, в которых наряду с испарением мелких капель происходит конденсация пара на более крупных каплях, и с ростом температуры газа в окружающей среде эти области расширяются. В результате расчетов получена информация об интенсивности фазовых превращений в струе. Характер изменения вдоль оси струи интенсивности фазовых превращений одинаков для капель всех размеров: вблизи начального сечения струи интенсивность фазовых превращений при ее небольшой величине уменьшается до минимума, затем она существенно возрастает, а после достижения максимума начинает уменьшаться, стремясь к нулю (при этом капли полностью испаряются). Интенсивность фазовых превращений возрастает при увеличении концентрации капель и увеличении температуры газа в окружающей среде. Результаты проведенного исследования позволяют сделать вывод, что при расчете двухфазных неизоатермических газокap-

пельных струй в обязательном порядке необходимо учитывать фазовые превращения, так как при несоблюдении этой рекомендации возможны не только количественные, но и качественные ошибки.

Список источников

1. Yule A.J., Seng C.Ah., Felton P.G., Ungut A., Chigier N.A. A Study of Vaporizing Fuel Sprays by Laser Techniques // *Combustion and Flame*. 1982. V. 44. P. 71–84. doi: 10.1016/0010-2180(82)90064-5.
2. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. М. : Физматлит, 2008. 368 с.
3. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред : в 2 ч. М. : Наука, 1987. Ч. 1. 464 с.
4. Хинце И.О. Турбулентность, ее механизм и теория. М. : Физматгиз, 1963. 680 с.
5. Mostafa A.A., Elghobashi S.E. A two-equation turbulence model for jet flows laden with vaporizing droplets // *International Journal of Multiphase Flow*. 1985. V. 11 (4). P. 515–533. doi: 10.1016/0301-9322(85)90073-4
6. Mostafa A.A., Mongia H.C. On the modeling of turbulent evaporating sprays: Eulerian versus Lagrangian approach // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1987. V. 30 (12). P. 2583–2593. doi: 10.1016/0017-9310(87)90139-6
7. Пахомов М.А., Терехов В.И. Численное исследование турбулентной структуры полидисперсной двухфазной струи с испаряющимися каплями // *Математическое моделирование*. 2016. Т. 28, № 11. С. 64–78.
8. De S., Lakshmisha K.N. Simulations of Evaporating Spray Jet in a Uniform Co-Flowing Turbulent Air Stream // *International Journal of Spray and Combustion Dynamics*. 2009. V. 1 (2). P. 169–198. doi: 10.1260/175682709788707459
9. Wang J., Dalla Barba F., Picano F. Direct numerical simulation of an evaporating turbulent diluted jet-spray at moderate reynolds number // *International Journal of Multiphase Flow*. 2021. V. 137. Art. 103567. doi: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2021.103567
10. Зуев Ю.В. Погрешность расчета параметров двухфазной турбулентной струи при использовании одножидкостной математической модели // *Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки*. 2020. Т. 162, кн. 4. С. 411–425. doi: 10.26907/2541-746.2020.4.411-425
11. Стернин Л.Е., Шрайбер А.А. Многофазные течения газа с частицами. М. : Машиностроение, 1994. 320 с.
12. Архипов В.А., Басалаев С.А., Перфильева К.Г., Поленчук С.Н., Усанина А.С. Методы определения коэффициента сопротивления при вдуве газа с поверхности сферической частицы // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2022. № 76. С. 56–69. doi: 10.17223/19988621/76/5
13. Fuchs N.A. Evaporation and droplet growth in gaseous media. London : Pergamon Press, 1959. 80 p.
14. Зуев Ю.В., Лепешинский И.А., Решетников В.А., Истомин Е.А. Выбор критериев и определение их значений для оценки характера взаимодействия фаз в двухфазных турбулентных струях // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*. 2012. № 1. С. 42–54.
15. Anderson D., Tannehill J.C., Pletcher R.H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. 2nd ed. London : Taylor & Francis, 1997. 816 p.
16. Стернин Л.Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М. : Машиностроение, 1974. 212 с.
17. Зуев Ю.В. О некоторых причинах немоноготонного изменения концентрации дискретной фазы в двухфазной турбулентной струе // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. 2020. № 2. С. 51–60. doi: 10.1134/S0015462820020147

References

1. Yule A.J., Seng C.Ah., Felton P.G., Ungut A., Chigier N.A. (1982) A study of vaporizing fuel sprays by laser techniques. *Combustion and Flame*. 44. pp. 71–84. doi: 10.1016/0010-2180(82)90064-5
2. Volkov K.N., Emel'yanov V.N. (2008) *Modelirovanie krupnykh vikhrey v raschetakh turbulentnykh techeniy* [Modeling of large whirlwinds in calculations of turbulent flows]. Moscow: FIZMATLIT.
3. Nigmatulin R.I. (1990) *Dynamics of Multiphase Medium*. Volume 1. New York: Hemisphere Publishing Corporation.
4. Hinze J.O. (1959) *Turbulence. An Introduction to Its Mechanism and Theory*. New York: McGraw-Hill.
5. Mostafa A.A., Elghobashi S.E. (1985) A two-equation turbulence model for jet flows laden with vaporizing droplets. *International Journal of Multiphase Flow*. 11(4). pp. 515–533. doi: 10.1016/0301-9322(85)90073-4
6. Mostafa A.A., Mongia H.C. (1987) On the modeling of turbulent evaporating sprays: Eulerian versus Lagrangian approach. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 30(12). pp. 2583–2593. doi: 10.1016/0017-9310(87)90139-6
7. Pakhomov M.A., Terekhov V.I. (2016) Chislennoe issledovanie turbulentnoy struktury polidispersnoy dvukhfaznoy strui s isparayushchimisya kaplyami [Numerical simulation of turbulent flow in a polydispersed two-phase jet with evaporating droplets]. *Matematicheskoe modelirovanie*. 28(11). pp. 64–78.
8. De S., Lakshmisha K.N. (2009) Simulations of evaporating spray jet in a uniform co-flowing turbulent air stream. *International Journal of Spray and Combustion Dynamics*. 1(2). pp. 169–198. doi: 10.1260/175682709788707459
9. Wang J., Dalla Barba F., Picano F. (2021) Direct numerical simulation of an evaporating turbulent diluted jet-spray at moderate reynolds number. *International Journal of Multiphase Flow*. 137. Article 103567. doi: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2021.103567
10. Zuev Yu.V. (2020) Miscalculation of two-phase turbulent jet parameters while using one-liquid mathematical model. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki*. 162(4). pp. 411–425. doi: 10.26907/2541-7746.2020.4.411-425
11. Sternin L.E., Shrayber A.A. (1994) *Mnogofaznye techeniya gaza s chastitsami* [Multiphase flows of gas with particles]. Moscow: Mashinostroenie.
12. Arkhipov V.A., Basalaev S.A., Perfilieva K.G., Polenчук S.N., Usanina A.S. (2022) Metody opredeleniya koeffitsienta soprotivleniya pri vduve gaza s poverkhnosti sfericheskoy chastitsy [Methods for determining the drag coefficient at gas injection from the surface of spherical particle]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 56–69. doi: 10.17223/19988621/76/5
13. Fuchs N.A. (1959) *Evaporation and Droplet Growth in Gaseous Media*. London: Pergamon Press.
14. Zuev Yu.V., Lepeshinskiy I.A., Reshetnikov V.A., Istomin E.A. (2012) Vybor kriteriev i opredelenie ikh znacheniy dlya otsenki kharaktera vzaimodeystviya faz v dvukhfaznykh turbulentnykh struyakh [Selection of criteria and determination of their values for estimating the phase interaction behavior in two-phase turbulent jets]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Mashinostroenie – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*. 1. pp. 42–54.
15. Anderson D., Tannehill J.C., Pletcher R.H. (1997) *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. 2nd ed. London: Taylor&Francis.
16. Sternin L.E. (1974) *Osnovy gazodinamiki dvukhfaznykh techeniy v soplakh* [Fundamentals of gas dynamics of two-phase flows in nozzles]. Moscow: Mashinostroenie.

17. Zuev Y.V. (2020) Some reasons for nonmonotonic variation of discrete-phase concentration in a turbulent two-phase jet. *Fluid Dynamics*. 55(2). pp. 194–203. doi: 10.1134/S0015462820020147

Сведения об авторе:

Зуев Юрий Владимирович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Теория воздушно-реактивных двигателей» Московского авиационного института (национального исследовательского университета), Москва, Россия. E-mail: yuri_zuev@bk.ru

Information about the author:

Zuev Yuriy V. (Doctor of Technical Sciences, Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation). E-mail: yuri_zuev@bk.ru

Статья поступила в редакцию 23.06.2022; принята к публикации 01.06.2023

The article was submitted 23.06.2022; accepted for publication 01.06.2023

Научная статья

УДК 532.322

doi: 10.17223/19988621/83/9

Влияние формы поперечной нагрузки на напряженно-деформированное состояние ледяного покрова

Виктор Михайлович Козин

Институт машиноведения и металлургии Хабаровского федерального исследовательского центра ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, Россия, kozinvictor@rambler.ru

Аннотация. Приведены результаты исследования влияния формы в плане поперечной статической нагрузки на напряженно-деформированное состояние (НДС) ледяного покрова, что определяет его несущую способность (грузоподъемность) при кратковременных режимах нагружения. Ледяной покров рассматривается как изотропная упругая среда на упругом основании. Приведены результаты обзора экспериментально-теоретических исследований, подтверждающих правомерность такого подхода в условиях поставленной задачи. Сделан вывод о целесообразности исследований влияния формы поперечной нагрузки на изгибные напряжения в ледяном покрове при воздействии на него кратковременной статической нагрузки. Исследовалось влияние соотношения размеров сторон поперечной, статической, равномерно распределенной по площадям прямоугольника, круга и квадрата постоянной по суммарной величине нагрузки на НДС бесконечной, изотропной упругой ледяной пластины, лежащей на основании винклеровского типа. Сделано заключение относительно выбора наиболее целесообразных форм нагрузок с точки зрения обеспечения наибольшей несущей способности ледяного покрова.

Ключевые слова: ледяной покров, форма нагрузки, упругие деформации, напряжения, расчеты

Благодарности: Работа выполнена в рамках государственного задания Института машиноведения и металлургии Хабаровского Федерального исследовательского центра ДВО РАН.

Для цитирования: Козин В.М. Влияние формы поперечной нагрузки на напряженно-деформированное состояние ледяного покрова // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 102–110. doi: 10.17223/19988621/83/9

Original article

Effect of the transverse load shape on the stress-strain state of the ice cover

Victor M. Kozin

Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy of the Khabarovsk Federal Research Center, FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation, kozinvictor@rambler.ru

Abstract. The aim of this work is to study the effect of the transverse static load shape on the stress-strain state of the ice cover. The construction of many hydraulic structures, offshore pipeline laying, and some types of track arrangements, in particular, blasting operations, are often associated with the use of the bearing capacity of the ice cover of rivers and reservoirs. Such works are being widely developed due to their significant productivity and economic efficiency in practice. Obviously, the use of ice cover requires special calculations to determine the safe load-carrying capacity for various loading conditions. In addition, river ice is often used for ferries and construction sites in various types of work. The available methods for determining the bearing capacity of the ice cover, based on theoretical developments and experimental studies in laboratory and field conditions, allow the use of the theory of elasticity under certain loading conditions. In these cases, the ice cover is considered as an isotropic elastic medium on the elastic foundation. Such an approach is approved by the reviewed experimental and theoretical studies as an expedient to study the effect of the transverse load shape on bending stresses in the ice cover.

In the framework of the formulated problem, the effect of the load shape on the stress-strain state of the ice cover is assessed considering the impact of the aspect ratio of the sides of the transverse static uniformly distributed over the rectangle area loading, which is constant in the total value, on the behavior of an infinite isotropic elastic ice plate arranged on elastic Winkler-type foundations. The calculations are performed for the same loads distributed over the circle and square areas. As a result, the most appropriate load shapes are determined.

Keywords: ice cover, load shape, elastic deformations, stresses, calculations

Acknowledgments: This work was carried out within the framework of the state assignment for the Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy of the Khabarovsk Federal Research Center, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences.

For citation: Kozin, V.M. (2023) Effect of the transverse load shape on the stress-strain state of the ice cover. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 102–110. doi: 10.17223/19988621/83/9

Введение

Строительство многих гидротехнических сооружений, укладка на дно трубопроводов, некоторые виды путевых мероприятий, в частности взрывные работы, нередко бывают связаны с использованием несущей способности ледяного покрова рек и водоемов [1]. Такие работы получают широкое развитие, а практика подтверждает их значительную производительность и экономическую эффективность. Очевидно, что использование ледяного покрова в этом направлении требу-

ет выполнения специальных расчетов [2, 3], определяющих допустимую по условиям безопасности величину нагрузки при различных схемах ее приложения [4]. Помимо этого, ледяной покров рек часто используется путем устройства на нем переправ и строительных площадок для выполнения различных работ, которые также получают широкое развитие и обуславливают целесообразность данного исследования.

Цель работы – изучение влияния формы в плане поперечной статической нагрузки на напряженно-деформированное состояние (НДС) ледяного покрова, что определяет его несущую способность (грузоподъемность) при кратковременных режимах нагружения.

Краткий обзор экспериментально-теоретических исследований

Существующие методы определения несущей способности ледяного покрова можно разделить на две основные группы: расчеты по эмпирическим зависимостям, полученным в результате натурных наблюдений, и методы, основанные на использовании аппарата теории упругости. В последнем случае ледяной покров рассматривается как изотропная упругая среда, лежащая на упругом основании. К методам второй группы можно отнести решения, полученные К.Е. Ивановым и И.С. Песчанским [5], А.Е. Якуниным и И.П. Бутягиным [6], М.Ю. Орловым и Ю.Н. Орловой [7] на основании теоретических разработок и ряда экспериментальных исследований в лабораторных и полевых условиях.

В этом направлении были проведены испытания ледяного покрова нарастающими нагрузками, приложенными по относительно небольшим контактным площадкам (круг, квадрат, слабо вытянутый прямоугольник). Данные эксперименты проводились для выяснения вопросов о том, какой теории прочности следует придерживаться при расчетах [8].

В работе [9] представлен опытный материал по зависимости проломного груза от толщины льда и площади распределения нагрузки. Опыты проводились при короткодействующих нагрузках. Вопросы, затронутые в этой статье, имеют практическую важность и в должной степени еще не изучены. Испытания льда на пролом проводилось силой при разном распределении нагрузки. Это достигалось тем, что подставки под концом штока в разных опытах имели различную площадь. Подставками служили эбонитовые и металлические круги диаметром 5 и 20 см, а также квадраты со сторонами в 20–65 см. В качестве груза использовался набор металлических болванок весом от 0,5 до 80 кг. Нагружение производилось по возможности в короткое время вплоть до пролома. При увеличении площади подставки в 200 раз проломный груз возрастал примерно только в 2 раза. Такая же картина наблюдалась для разных толщин льда. Температура воздуха слабо влияла на эту закономерность и величину проломного груза. При сравнении значений максимального прогиба при проломе в случаях пластической и упругой деформаций оказалось, что они примерно одинаковы. Таким образом, пролом льда определялся величиной предельной деформации независимо от быстрого нагружения или случая медленного развития пластической деформации под действием небольших нагрузок. Сделано заключение, что величина деформации имеет отношение к определению грузоподъемности льда при статических нагрузках. В работе также отмечено, что проломное состояние будет определяться в случае

больших нагрузок большой упругой деформацией и малой пластической, развивающейся, однако, с большой скоростью. При малых нагрузках, наоборот, оно определяется малой упругой деформацией и большой пластической, развивающейся очень медленно. Отмечено, что для расчетов других конструкций необходимо более детально знать влияние площади распределения нагрузки и формы подставки на чашу прогиба [9].

Расчету бесконечной плиты на центральную нагрузку посвящены работы С.С. Голушкевича [10], Г.Р. Брегмана и Б.В. Проскурякова [11] и др. Авторами на основании прогибов ледяного покрова предложены зависимости для определения изгибающих моментов и соответствующих напряжений.

Для расчета грузоподъемности ледяных переправ предложен целый ряд формул, из которых наиболее распространенной, простой, теоретически обоснованной и используемой до настоящего времени является формула, полученная С.А. Бернштейном [1].

Выполненный обзор известных работ показал, что поставленная в настоящей статье задача ранее не рассматривалась.

Зависимости для определения НДС ледяного покрова

Ледяной покров для большинства статических задач со сравнительно малым временем приложения нагрузки, как было отмечено выше, можно рассматривать как упругую однородную пластину, лежащую на упругом основании гидравлического типа [5, 6]. В работе [9] также отмечено, что в практических условиях, когда нагрузка на лед может быть велика, пролом льда может наступить непосредственно сразу же после ее приложения. В таких случаях пластическая деформация не успевает развиваться в значительной мере, и пролом является результатом в основном упругой деформации. Кроме этого, опыт эксплуатации ледяных переправ и экспериментальные исследования показывают, что при кратковременных нагрузках расчет грузоподъемности ледяного покрова может также основываться на теории изгиба тонких упругих плит на упругом основании. При этом в расчетах НДС ледяных переправ обычно принимается, что ледяной покров имеет неограниченные размеры в плане [3], а его физико-механические характеристики соответствуют речному льду.

Рассматриваемая задача в такой постановке имеет практическое значение и при транспортировке по льду грузов с малыми (ниже критических [12]) скоростями, т.е. возникающие при этом нагрузки можно считать квазистатическими, когда пластическими свойствами льда можно пренебречь, а также при складировании на ледяном покрове грузов (использование ледяного покрова в качестве грузонесущих платформ) [9].

Для оценки влияния формы нагрузки на НДС ледяного покрова, т.е. решения поставленной в настоящей работе задачи, исследовано влияние соотношения размеров сторон a и b поперечной, статической, равномерно распределенной по площади прямоугольника, постоянной по суммарной величине нагрузки (рис. 1) на поведение бесконечной, изотропной упругой ледяной пластины, лежащей на упругом основании винклеровского типа.

Дифференциальное уравнение изгиба такой пластины имеет вид [10]:

$$D\nabla^4 w + \rho_w g w = q(x, y), \quad (1)$$

где: $D = Eh^3/12(1 - \mu^2)$ – цилиндрическая жесткость пластины; E – модуль упругости льда; h – толщина ледяного покрова; w – прогиб ледяного покрова; ρ_B – плотность воды; g – ускорение силы тяжести; $q(x, y)$ – приложенная к пластине нагрузка.

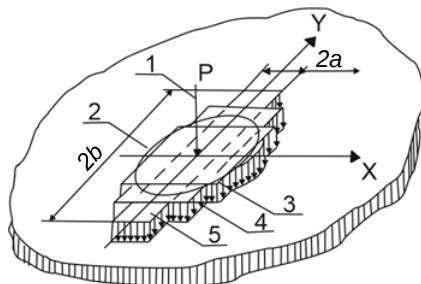


Рис. 1. Схема расчетных случаев: 1 – сосредоточенная сила; 2 – нагрузка распределена по площади круга; нагрузка распределена по площади прямоугольника: 3 – $b/a = 1.0$; 4 – $b/a = 2.0$; 5 – $b/a = 5.5$

Fig. 1. Model for computations: (1) concentrated force; (2) load distribution over the circle area; load distribution over the rectangle area: $b/a =$ (3) 1.0; (4) 2.0; and (5) 5.5

Решение этого уравнения может быть представлено в виде:

$$w = \frac{4q}{\pi^2 D} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin \lambda a \sin \eta b \cos \lambda x \cos \eta y \, d\lambda d\eta}{\lambda \eta [(\lambda^2 + \eta^2)^2 + a^4]}. \quad (2)$$

Тогда максимальные по толщине пластины напряжения запишутся так:

$$\begin{cases} (\sigma_x)_{\max} = \frac{6M_x}{h^2} = -\frac{6D}{h^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ (\sigma_y)_{\max} = \frac{6M_y}{h^2} = -\frac{6D}{h^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ (\tau_{xy})_{\max} = \frac{6M_{xy}}{h^2} = \frac{6D}{h^2} (1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{cases} \quad (3)$$

где: M_x, M_y, M_{xy} – изгибающие моменты.

Из этих соотношений получим:

$$\begin{cases} (\sigma_x)_{\max} = \frac{24q}{(\pi h)^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(\lambda^2 + \mu \eta^2) \sin \lambda a \sin \eta b \cos \lambda x \cos \eta y \, d\lambda d\eta}{\lambda \eta [(\lambda^2 + \eta^2)^2 + a^4]}, \\ (\sigma_y)_{\max} = \frac{24q}{(\pi h)^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(\eta^2 + \mu \lambda^2) \sin \lambda a \sin \eta b \cos \lambda x \cos \eta y \, d\lambda d\eta}{\lambda \eta [(\lambda^2 + \eta^2)^2 + a^4]}, \\ (\tau_{xy})_{\max} = \frac{24q(1-\mu)}{(\pi h)^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin \lambda a \sin \eta b \cos \lambda x \cos \eta y \, d\lambda d\eta}{(\lambda^2 + \eta^2)^2 + a^4}. \end{cases} \quad (4)$$

Расчеты по формулам (2) и (4) были выполнены для $h = 0.50$ м при наиболее вероятных характеристиках речного льда [13]: $\mu = 0.33$, $E = 3$ ГПа, $\rho_L = 920$ кг/м³, $\rho_B = 1000$ кг/м³.

Результаты расчетов НДС ледяного покрова

Для расчетных схем (см. рис. 1) при $q = 2$ кПа, $S = 4ab = 200$ м² результаты расчетов приведены на рис. 2–5. Аналогичные расчеты также были выполнены для распределенной по площади круга и квадратной в плане нагрузок при одинаковой их суммарной величине, т.е. при выполнении условия $qS = \text{const}$. Их результаты представлены на рис. 5.

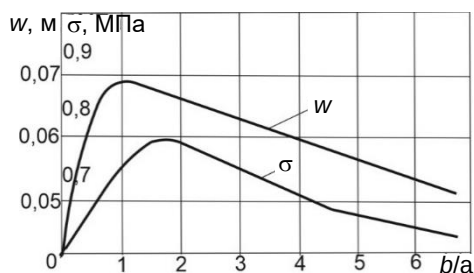


Рис. 2. Зависимость $w^{\max}$ и $\sigma^{\max}$ от отношения сторон прямоугольной в плане нагрузки
Fig. 2. Dependence of $w^{\max}$ and $\sigma^{\max}$ on the ratio of the sides of the rectangular area loaded

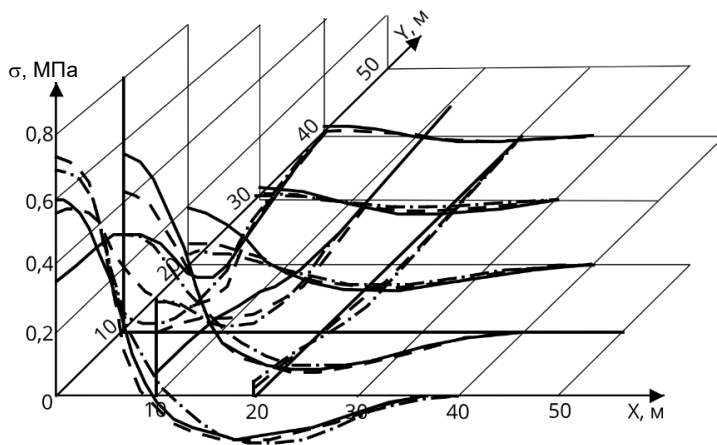


Рис. 3. Поле нормальных напряжений в пластине, нагруженной прямоугольной в плане нагрузкой: — $b/a = 5.5$; --- $b/a = 2.0$; $b/a = 1.0$

Fig. 3. The field of normal stresses in the plate with the rectangular area loaded:
 — $b/a = 5.5$; --- $b/a = 2.0$; $b/a = 1.0$

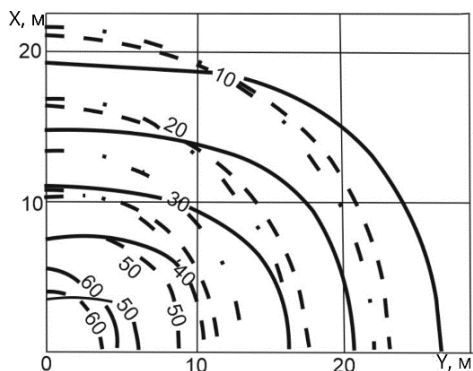


Рис. 4. Линии равных прогибов w (мм) для разных отношений b/a :
 — $b/a = 5.5$; --- $b/a = 2.0$; $b/a = 1.0$

Fig. 4. Isolines of deflections w (mm) for various ratios of b/a :
 — $b/a = 5.5$; --- $b/a = 2.0$; $b/a = 1.0$

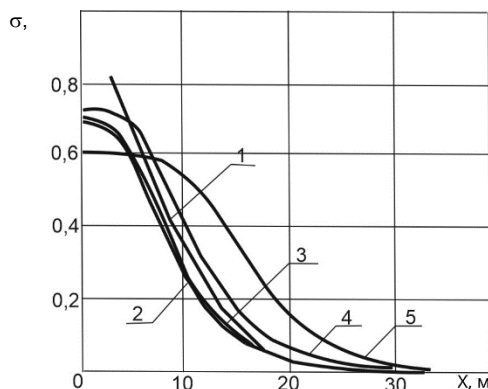


Рис. 5. Кривые нормальных напряжений σ (при $y = 0$) для различных случаев нагрузки

Fig. 5. Curves of normal stresses σ (at $y = 0$) for various loading conditions

Закключение

Как и следовало ожидать, ледяной покров получает наибольший прогиб, если на него действует сосредоточенная, нежели неизменная по суммарной величине распределенная нагрузка. Нагрузки, распределенные по равновеликим площадям круга и квадрата, практически не влияют на поля прогибов и напряжений в ледяной пластине (см. рис. 5). При неизменной интенсивности нагрузки, прогибы пластины возрастают при $a \rightarrow b$ и достигают максимального значения в случае $b/a \approx 1.8$ (см. рис. 2). С увеличением b/a от 1 до 5.5 возникающие во льду максимальные прогибы и напряжения уменьшаются примерно на 50% (см. рис. 2). Таким образом, при использовании ледяного покрова в качестве грузонесущих платформ (например, при обустройстве складских помещений) или транспортировке по льду грузов со скоростями ниже критических [9] следует уменьшать интенсивность нагрузки (увеличивать ее площадь распределения) и избегать при этом круглой или квадратной формы, т.е. отдавать предпочтение площадям с наибольшими относительно их ширины длинами.

Список источников

1. Бернштейн С.А. Ледяная железнодорожная переправа // Ледяные переправы : XVIII сборник отдела инженерных исследований НКТ НКПС. М. : Транспечать, 1929. 42 с.
2. Панфилов Д.Ф. Экспериментальные исследования грузоподъемности ледяного покрова // Известия ВНИИГ имени Б.Е. Веденеева. 1960. Т. 6. С. 61–75.
3. Панфилов Д.Ф. Приближенный метод расчета грузоподъемности ледяного покрова // Известия Всесоюзного научно-исследовательского института гидротехники. 1960. Т. 60. С. 221–224.
4. Бутягин И.П. Расчет несущей способности ледяного покрова по его прочностным характеристикам // Труды Новосибирского института инженеров водного транспорта. Новосибирск, 1979. № 143. С. 81–91.
5. Песчанский И.С. Ледоведение и ледотехника. Л. : Гидрометеиздат, 1967. 467 с.
6. Якунин А.Е., Бутягин И.П. Расчеты несущей способности ледяного покрова // Труды Новосибирского института инженеров водного транспорта. 1974. Вып. 88. С. 66–81.

7. Orlov M.Y., Orlova Y.N. Phenomenological Model and Numerical Method // Combined Theoretical and Experimental Study of Ice Behavior Under Shock and Explosive Loads. SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology. Cham : Springer, 2022. doi: 10.1007/978-3-030-97634-7_1
8. Панфилов Д.Ф. Условие разрушения и прочность ледяного покрова при изгибе нарастающей поперечной нагрузкой // Труды координационных совещаний по гидротехнике. Л. : Энергия. 1973. С. 89–94.
9. Кобеко П.П., Шишкин Н.И., Марей Ф.И., Иванова Н.С. Пролом и грузоподъемность льда // Журнал технической физики. 1946. Т. 16, вып. 3. С. 273–276.
10. Голушкевич С.С. О некоторых задачах теории изгиба ледяного покрова. Л. : Воениздат, 1947. 231 с.
11. Брегман Г.Р., Проскуряков Б.В. Ледяные переправы. Свердловск : Гидрометеониздат, 1943. 151 с.
12. Козин В.М. Резонансный метод разрушения ледяного покрова. Изобретения и эксперименты. М. : Академия естествознания, 2007. 355 с.
13. Петров И.Г. Выбор наиболее вероятных значений механических характеристик льда // Труды ААНИИ. 1976. Т. 331. С. 4–41.

References

1. Bernstein S.A. (1929) Ledianaya zhelezнодорожная переправа [Ice railway crossing]. *Ledianye perepravy. XVIII sbornik otdela inzhenernykh issledovaniy NKT NKPS*. Moscow: Transpechat'.
2. Panfilov D.F. (1960) Eksperimental'nye issledovaniya gruzopod'emnosti ledyanogo pokrova [Experimental studies of the carrying capacity of the ice cover]. *Izvestiya VNIIG im. B.E. Vedeneeva – Proceedings of the VNIIG*. 6. pp. 61–75.
3. Panfilov D.F. (1960) Priblizhennyi metod rascheta gruzopod'emnosti ledyanogo pokrova [Approximate method for calculating the carrying capacity of the ice cover]. *Izvestiya VNIIG im. B.E. Vedeneeva – Proceedings of the VNIIG*. 60. pp. 221–224.
4. Butyagin I.P. (1979) Raschet nesushchey sposobnosti ledyanogo pokrova po ego prochnostnym kharakteristikam [Calculation of the bearing capacity of the ice cover in terms of its strength characteristics]. *Trudy Novosibirskogo instituta inzhenerov vodnogo transporta*. Novosibirsk. 143. pp. 81–91.
5. Peschanskiy I.S. (1967) *Ledovedenie i ledotekhnika* [Ice science and engineering]. Leningrad: Gidrometeoizdat.
6. Yakunin A.E., Butyagin I.P. (1974) Raschety nesushchey sposobnosti ledyanogo pokrova [Calculations of the bearing capacity of the ice cover]. *Trudy Novosibirskogo instituta inzhenerov vodnogo transporta*. Novosibirsk. 88. pp. 66–81.
7. Orlov M.Y., Orlova Y.N. (2022). *Phenomenological Model and Numerical Method*. In: Combined Theoretical and Experimental Study of Ice Behavior Under Shock and Explosive Loads. Springer Briefs in Applied Sciences and Technology. Springer. doi: 10.1007/978-3-030-97634-7_1
8. Panfilov D.F. (1973) Uslovie razrusheniya i prochnost' ledyanogo pokrova pri izgibe narastayushchey poperechnoy nagruzkoj [Fracture and strength condition of the ice cover during bending by increasing transverse load]. *Trudy koordinatsionnykh soveshchaniy po gidrotekhnike*. Leningrad: Energiya. pp. 89–94.
9. Kobeiko P.P., Shishkin N.I., Marey F.I., Ivanova N.S. (1946) Prolom i gruzopod'emnost' l'da [Break and ice load capacity]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki – Technical Physics*. 16(3). pp. 273–276.
10. Golushkevich S.S. (1947) *O nekotorykh zadachakh teorii izgiba ledyanogo pokrova* [On some problems of the theory of ice sheet bending]. Leningrad: Voenizdat.

11. Bregman G.R., Proskuryakov B.V. (1943) *Ledyanye perepravy* [Ice crossings]. Sverdlovsk: Gidrometeoizdat.
12. Kozin V.M. (2007) *Rezonansnyy metod razrusheniya ledyanogo pokrova. Izobreteniya i eksperimenty* [Resonant method of ice cover destruction. Inventions and experiments]. Moscow: Academy of Natural History.
13. Petrov I.G. (1976) Vybor naibolee veroyatnykh znacheniy mekhanicheskikh kharakteristik l'da [Selection of the most probable values of mechanical characteristics of ice]. *Trudy AANII – Proceedings of the AARI*. 331, pp.4–41.

Сведения об авторе:

Козин Виктор Михайлович – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории проблем создания и обработки материалов и изделий Института машиноведения и металлургии Хабаровского федерального исследовательского центра ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, Россия. E-mail: kozinvictor@rambler.ru

Information about the author:

Kozin Victor M. (Doctor of Technical Sciences, Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy of the Khabarovsk Federal Research Center, FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation). E-mail: kozinvictor@rambler.ru

Статья поступила в редакцию 22.04.2022; принята к публикации 01.06.2023

The article was submitted 22.04.2022; accepted for publication 01.06.2023

Научная статья

УДК 539.319

doi: 10.17223/19988621/83/10

Представительный объем и эффективные термоупругие материальные параметры композиций с периодической структурой

Лидия Владимировна Ландик¹, Валерий Михайлович Пестренин²,
Ирина Владимировна Пестренина³

^{1, 2, 3} *Пермский государственный национальный исследовательский университет,
Пермь, Россия*

¹ *LidiaLandik@gmail.com*

² *PestreninVM@mail.ru*

³ *IPestrenina@gmail.com*

Аннотация. Предлагается основанный на методе «от противного» итерационный алгоритм построения представительного объема композита периодической структуры и его эффективных материальных термоупругих характеристик. Сформулированы существенные признаки представительного объема. Для конкретной периодической структуры определены представительный объем и его эффективные параметры. Показано, что фрагмент композита в объеме периодической ячейки не обладает необходимыми характерными признаками представительного объема.

Ключевые слова: композит, представительный объем, эффективные материальные характеристики, периодическая ячейка

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Пермского края в рамках научного проекта № 1025.

Для цитирования: Ландик Л.В., Пестренин В.М., Пестренина И.В. Представительный объем и эффективные термоупругие материальные параметры композиций с периодической структурой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 111–126. doi: 10.17223/19988621/83/10

Original article

A representative volume element and effective thermoelastic material parameters of compositions with periodic structure

Lidia V. Landik¹, Valery M. Pestrenin², Irene V. Pestrenina³

^{1, 2, 3} *Perm State University, Perm, Russian Federation*

¹ *LidiaLandik@gmail.com*

² PestreninVM@mail.ru³ IPestrenina@gmail.com

Abstract. In this paper, an iterative algorithm for designing representative volume element (RVE) of a composite with periodic structure and its effective material thermoelastic characteristics is proposed. The features of the RVE are described. A periodic cell of the composite, which is widely and validly used to determine its effective parameters under specific boundary conditions on its surfaces, does not have all the necessary features of the RVE. Therefore, a separated from the composite sequence of cubic samples with increasing characteristic size and consisting of periodic cells is considered. According to the method of contradiction, each sample of the sequence is assumed to be an RVE. A solution to the problem of micromechanics is obtained for them. Based on this solution, the macroscopic properties of the sample are determined. The calculated macroscopic material parameters and the fulfillment of the symmetry conditions of the stiffness matrix for the next cubic sample are compared with the corresponding data for the previous sample, and the essential features of the RVE are verified. Finally, a conclusion is made about the possibility (or impossibility) of recognizing the considered sample as an RVE. The sequences of the values of calculated characteristics and the percentage deviation of the stiffness matrix from symmetry are convergent. The obtained characteristics are taken as the limiting values for the cube representing RVE. They are referred to as effective material characteristics of the composition. It is revealed that the existence of the RVE for a composite is a basis for applying effective modulus theory to the description of its stress-strain state.

Keywords: composite, representative volume element, effective material characteristics, periodicity cell

Acknowledgments: This work was partially supported by the Government of Perm Krai (project No. 1025).

For citation: Landik, L.V., Pestrenin, V.M., Pestrenina, I.V. (2023) A representative volume element and effective thermoelastic material parameters of compositions with periodic structure. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 111–126. doi: 10.17223/19988621/83/10

Введение

Композиционные материалы периодической структуры широко применяются в качестве конструкционных в современной технике. К ним, в частности, относятся материалы на основе тканевых препрегов. Определению эффективных материальных характеристик композиций с периодической структурой посвящено большое число публикаций. В работе [1] с использованием метода осреднения регулярных структур [2] предложен и далее развит в публикациях (см.: [3] и др.) метод асимптотического осреднения задачи механики деформируемого твердого тела. Метод асимптотического осреднения оказывается многоуровневым: на каждом из них появляются соответствующие уровню эффективные материальные параметры [1]. Для вычисления эффективных характеристик нулевого уровня достаточно принять во внимание два слагаемых асимптотического разложения решения. Эффективные параметры нулевого уровня метода асимптотического

разложения связывают макроскопические параметры состояния, усредненные по объему периодической ячейки. Рассматриваемым методом определяются эффективные параметры упругих [3–5], термоупругих [6–8], вязкоупругих [9–11], упругопластических [12, 13], нелинейно упругих [14] композитов с периодической структурой.

Еще одним подходом к определению эффективных материальных характеристик композитов с периодической структурой является метод прямого осреднения решения задачи микромеханики по объему периодической ячейки со специально подобранными краевыми условиями. Эффективные параметры, получаемые этим методом, также связывают осредненные по ячейке периодичности компоненты тензоров напряжений и деформаций. Подход реализуется для построения эффективных параметров волоконных, тканевых и других композитов [15–21].

Методы, разработанные для вычисления эффективных материальных характеристик композитов с периодической структурой, используются для решения аналогичных задач и для других (непериодических) композиций. С этой целью структура композита моделируется периодической средой (производится периодизация). Подход используется для композитов, армированных непрерывными волокнами [18, 22], короткими волокнами [23], для дисперсных композиций [24], тканевых композитов [25], метаматериалов [24], гибридных композитов [26, 27], для стохастически армированной среды [28, 29] и в других случаях. Построение эффективных материальных характеристик композита посредством осреднения по объему периодической ячейки предполагает, что такая ячейка является частью достаточно большого объема, находящегося в однородном напряженно деформированном состоянии.

Некоторые авторы для решения задачи об эффективных материальных характеристиках материала используют понятие представительного объема композита (representative volume element – RVE). Выбор представительного объема при исследовании эффективных материальных характеристик композита (не обязательно периодической структуры) проводится авторами достаточно произвольно, потому что отсутствуют общепринятые способы построения такого объема. Одни авторы отождествляют RVE с элементарной ячейкой периодичности, например [16], другие принимают его линейные размеры бесконечными [29].

Впервые понятие представительного объема было сформулировано в [30], в настоящее время исследователи [23, 31] придерживаются определения RVE, предложенного W.J. Drugan, J.R. Willis: «Это наименьший элемент объема материала композита, для которого обычные макроскопически однородные определяющие модели “эффективного модуля” могут быть применены» [32]. Приведенное определение наделяет представительный объем следующими признаками:

- макроскопические материальные характеристики представительного объема не зависят от заданных на его поверхностях граничных условий;
- при любом нагружении RVE его макроскопическое напряженно деформированное состояние однородно;
- RVE – минимально возможный образец для численных испытаний по определению эффективных материальных параметров композита;
- любой объем, больший RVE, имеет такие же эффективные параметры.

Изучая представительные объемы для стохастически армированных композитов, авторы [31, 32] отмечают зависимость характерных размеров RVE от свойств компонентов, их объемной доли, параметра макроскопических соотношений и др. При осреднении микроструктурных характеристик состояния на объемах, меньших RVE, макроскопические материальные параметры (по предложению Т. Канит) называются «кажущимися». Они могут существенно отличаться от эффективных.

Задача определения RVE конкретных композиций наряду с их эффективными материальными характеристиками представляется важной по следующим причинам:

- достоверные эффективные материальные характеристики определяются на образце, не меньшем, чем RVE;
- характерный размер RVE ограничивает размер сетки дискретизации при численном исследовании;
- дегомогенизация состояния композитного материала является решением задачи микромеханики о напряженно деформированном состоянии RVE;
- существование RVE для композита является критерием для применения теории эффективного модуля к анализу его напряженно деформированного состояния.

В настоящей работе на примере композита конкретной периодической структуры изучается зависимость параметров макроскопических уравнений термоупругости как от выбора периодической ячейки, так и от объема осреднения. Предлагается алгоритм итерационного процесса построения представительного объема и эффективных материальных свойств композита, а также критерии его окончания.

Постановка задачи

Рассматривается периодический композитный материал, представляющий собой эпоксидную матрицу, армированную прямыми непрерывными волокнами, параллельными оси x_3 ортонормированной декартовой системы координат. Поперечное сечение композита, перпендикулярное волокнам, представлено на рис. 1, а.

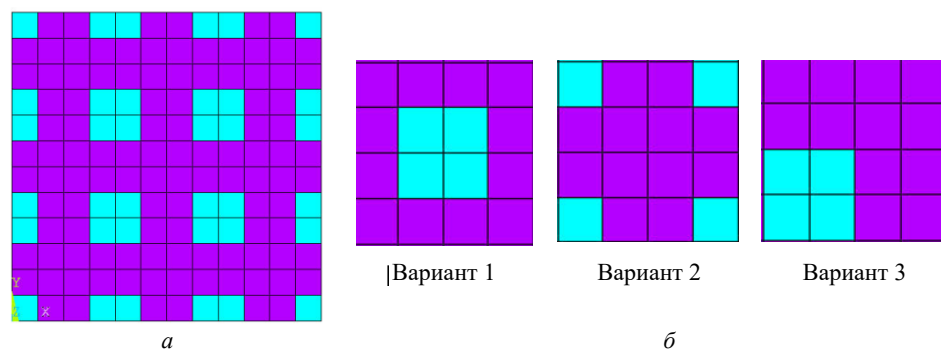


Рис. 1. Поперечное сечение композиции периодической структуры (а) и варианты ячейки периодичности (б)

Fig. 1. (a) Cross section of the periodic structure composition and (b) versions of a periodicity cell

Заметим, что для композита с периодической структурой ячейка периодичности определяется неоднозначно. Любой объем материала с линейными размерами периодической ячейки может быть принят за такую ячейку. С целью оценить влияние такого выбора на приведенные свойства рассматриваемого материала выберем три кубические периодические ячейки. Их сечения, перпендикулярные волокнам, представлены на рис. 1, б. Объемное содержание волокон принимается равным 0.25. Волокна имеют квадратное сечение со стороной 0.28 мм. Элементы структуры композиции считаются изотропными, их термомеханические материальные характеристики приведены в табл. 1.

Таблица 1

Термомеханические свойства элементов структуры

Элемент структуры	E , МПа	ν	α , 1/град
Волокно	95 000	0.24	$3.5e-6$
Связующее	8 000	0.33	$5.5e-5$

Рассматриваемый материал имеет оси симметрии второго порядка (оси x_1 , x_2) и ось симметрии четвертого порядка (ось x_3). Поэтому макроскопические физические уравнения с использованием технических постоянных представляются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_1}(\sigma_{11} - \nu_{12}\sigma_{22}) - \frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_{33} &= -\alpha_1\Delta T + \varepsilon_{11}, & \gamma_{12} &= \frac{1}{G_{12}}\sigma_{12}, \\ \frac{1}{E_1}(\sigma_{22} - \nu_{12}\sigma_{11}) - \frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_{33} &= -\alpha_1\Delta T + \varepsilon_{22}, & \gamma_{13} &= \frac{1}{G_{13}}\sigma_{13}, \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{E_3}\sigma_{33} &= -\alpha_3\Delta T + \varepsilon_{33}, & \gamma_{23} &= \frac{1}{G_{13}}\sigma_{23}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $E_1 = E_2$ – модуль Юнга в направлениях осей x_1 , x_2 , E_3 – модуль Юнга в направлении оси x_3 , $\nu_{12} = \nu_{21}$ – коэффициент Пуассона, характеризующий деформацию в направлении оси x_2 при растяжении образца в направлении x_1 и наоборот, $\nu_{31} = \nu_{32}$ – коэффициент Пуассона, характеризующий деформацию в направлении оси x_1 или x_2 при растяжении образца в направлении x_3 ; $\nu_{13} = \nu_{23}$ – коэффициент Пуассона, характеризующий деформацию в направлении оси x_3 при растяжении образца в направлении x_1 или x_2 ; $\alpha_1 = \alpha_2$, α_3 – коэффициенты линейной температурной деформации. Количество независимых упругих констант в равенствах (1) равно шести, так как они подчиняются условию

$$\frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}. \quad (2)$$

Задача состоит в определении представительного объема и макроскопических термоупругих свойств композиционного материала. При этом под приведенными

(эффективными) свойствами композита понимаются константы, связывающие в форме физических уравнений термоупругости (1) средние по представительному объему значения деформаций, напряжений и приращения температуры.

Численный метод построения макроскопических характеристик

Итерационная процедура построения представительного объема композиции однонаправленных статистически однородных волокон и матрицы и ее эффективных материальных характеристик предложена в статье [23]. Для случая композита периодической структуры представительный объем композиции предлагается строить следующим образом. Задается последовательность кубических образцов, выделенных из композита, состоящих из ячеек периодичности. Количество периодических ячеек в таких кубах возрастает по кубическому закону: 1, 8, 27, 64... Размер ребра такого куба равен ma , где a – длина ребра ячейки периодичности. Начиная с первого образца данной последовательности предполагается (метод от противного), что он является представительным объемом. Строятся «кажущиеся» материальные характеристики в соответствии с ниже описанной методикой и проверяются условия симметричности матрицы жесткости (2). Результаты вычислений макроскопических материальных параметров и выполнение условий (2) для очередного кубического образца сравниваются с соответствующими данными для предыдущего образца. На основании этого сравнения делается вывод о возможности (или невозможности) признания рассматриваемого образца в качестве представительного объема. Последовательности значений вычисленных характеристик и значения процента отклонения матрицы жесткости от симметричности оказываются сходящимися. Представительным объемом становится куб, для которого полученные значения можно принять за предельные. Они и принимаются за эффективные материальные характеристики композиции.

Численные эксперименты по определению макроскопических материальных констант реализуются посредством осреднения решений задач микромеханики по объему образца в следующих нагружениях:

1. Растяжение вдоль волокон. Задается перемещение образца вдоль оси x_3 . Определяются параметры E_3 , $\nu_{31} = \nu_{32}$.
2. Растяжение поперек волокон. Задается перемещение поперек волокон x_1 . Определяются параметры E_1 , ν_{12} , ν_{13} .
3. Задается сдвиг в плоскости x_1x_2 . Определяется параметр $G_{12} = G_{21}$.
4. Задается сдвиг в плоскости x_1x_3 . Определяется параметр $G_{13} = G_{23}$.
5. Нагрев образца. Задается изменение температуры ΔT . Определяются параметры $\alpha_1 = \alpha_2$, α_3 .

Вычисления по определению эффективных свойств образца осуществлялись с использованием комплекса ANSYS. Тестирование описанной методики проведено на примерах построения материальных характеристик однородных анизотропных материалов с известными материальными характеристиками. Достоверность вычислений контролировалась пересчетом на измельченной конечно-элементной сетке.

Обсуждения результатов вычисления

Макроскопические материальные характеристики, отвечающие ячейке периодичности

Вычисленные макроскопические характеристики для образца, представляющего собой ячейку периодичности в предположении, что она является представительным объемом, для указанных выше трех вариантов ячейки отражены в табл. 2. В последней строке таблицы приводится значение параметра

$$\eta = \frac{v_{13}E_3 - v_{31}E_1}{v_{13}E_3} 100\%, \text{ характеризующего невыполнение равенства (2).}$$

Таблица 2

Зависимость макроскопических параметров, определенных на кубе с ребром a , от выбора варианта ячейки

Параметры	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Среднее	Отклонение, %
E_3 , МПа	29 768	29 757	29 758	29 760.84	0.018
E_1 , МПа	12 289	12 340	11 498	12 042.27	3.2
v_{12}	0.354	0.350	0.337	0.347	2.13
v_{31}	0.302	0.305	0.306	0.305	0.51
v_{13}	0.233	0.235	0.290	0.253	10.49
G_1 , МПа	4 081	4 318	4 362	4 253.67	2.91
G_3 , МПа	4 676	4 459	4 314	4 383.0	3.32
α_1	4,21e-5	4,45e-5	4,26e-5	4,305e-5	2,46
α_3	3,15e-5	3,05e-5	3,69e-5	3,297e-5	8,48
η , %	46,4	46,1	59,2	50,5	—

Результаты, представленные в табл. 2, позволяют сделать следующие выводы:

1. Макроскопические материальные параметры зависят от выбора периодической ячейки. При этом E_1 , E_3 , v_{12} , v_{31} , G_1 , G_3 для различных ячеек периодичности отличаются меньше чем на 5%.

2. Отличие параметров v_{13} , α_3 для различных периодических ячеек превышает 5%.

3. Матрица упругих констант для всех трех видов периодической ячейки получается несимметричной. Невыполнение равенства (2) достигает 59%.

Отмеченные факты означают, что образец композита размером в одну ячейку периодичности не может рассматриваться как его представительный объем.

Представительный объем и эффективные материальные характеристики композита

В соответствии с процедурой, приведенной выше, построена последовательность кубических образцов композита с длиной ребер от $1a$ до $20a$ ($m = 1 \div 20$) и выполнены вычисления их макроскопических материальных термоупругих характеристик. Все соответствующие последовательности макроскопических

параметров композита являются сходящимися, закономерности их поведения вполне проявляются на промежутке $m = 1 \div 10$. Результаты вычислений показаны в табл. 3 и на рис. 2–6.

Таблица 3

Зависимость макроскопических параметров, определенных на кубическом образце с длиной ребра $10a$, от выбора ячейки

Параметры	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Среднее	Отклонение, %
E_3 , МПа	29 768	29 769	29 769	29 768.7	0.002
E_1 , МПа	13 792	13 800	13 845	13 812.33	0.17
ν_{12}	0.344	0.345	0.342	0.344	0.36
ν_{31}	0.302	0.302	0.302	0.302	0.0
ν_{13}	0.151	0.149	0.155	0.152	1.77
G_1 , МПа	4 097	4 217	4 242	4 218.6	0.44
G_3 , МПа	4 874	4 832	4 828	4 844.7	0.43
α_1	4.68e-5	4.71e-5	4.69e-5	4.69e-5	0.28
α_3	1.59e-5	1.60e-5	1.63e-5	1.59e-5	1.87
η , %	7.3	7.1	9.4	7.9	—

Как видно из табл. 3, для образца с ребром $10a$ значения макроскопических констант практически не зависят от выбора ячейки периодичности. Этот результат был предсказуем: макроскопические характеристики композита периодической структуры не должны зависеть от выбора периодической ячейки.

Графики на рис. 2–6 иллюстрируют изменение макроскопических материальных параметров композита в зависимости от длины ребра образца. Значение модуля упругости E_3 практически не изменяется, поэтому его график не приводится. На всех рисунках номер кривой на графике соответствует номеру варианта выбора периодической ячейки.

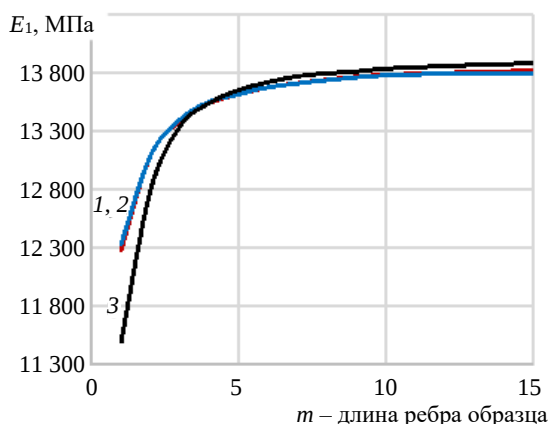


Рис. 2. Зависимость модуля E_1 от длины ребра образца
Fig. 2. Dependence of the module E_1 on the length of the sample rib

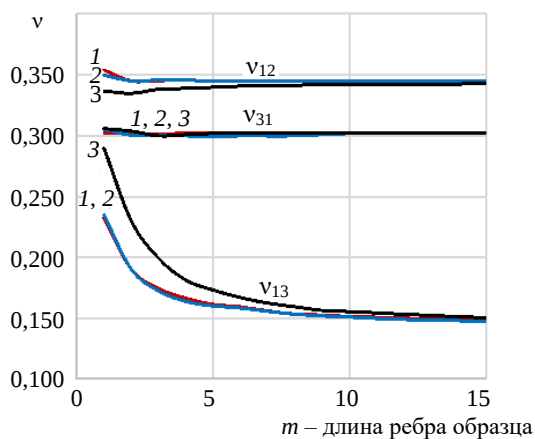


Рис. 3. Зависимость коэффициентов Пуассона от длины ребра образца
Fig. 3. Dependence of Poisson's ratios on the length of the sample rib

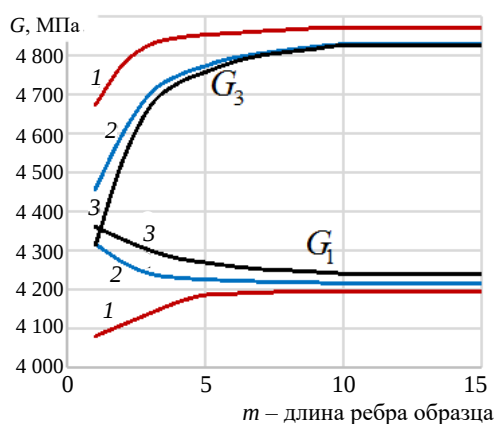


Рис. 4. Зависимость модулей сдвига от длины ребра образца
Fig. 4. Dependence of shear moduli on the length of the sample rib

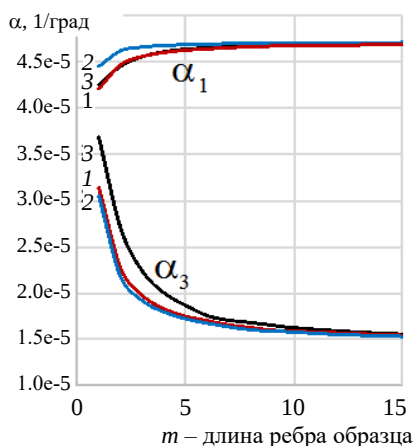


Рис. 5. Зависимость коэффициентов температурного расширения от длины ребра образца
Fig. 5. Dependence of thermal expansion coefficients on the length of the sample rib

Анализ данных, представленных на рис. 2–6 и в табл. 3, приводит к следующим выводам.

– Значения макроскопических термомеханических параметров кубического образца, состоящего из ячеек периодичности, устанавливаются независимо от выбора периодической ячейки и при дальнейшем увеличении образца практически не изменяются. Отсюда можно заключить, что рассматриваемый предельный кубический образец следует принять за представительный объем композитного материала, а его макроскопические свойства – за эффективные характеристики. В нашем случае таким объемом практически является куб с размером ребра $10a$.

– Скорости стремления макроскопических констант к своим предельным значениям существенно различны. Эффективные константы E_3 , ν_{31} устанавливаются при размере ребра куба в три длины ребра ячейки периодичности, а E_1 , ν_{13} , α_1 , α_3 – в десять длин.

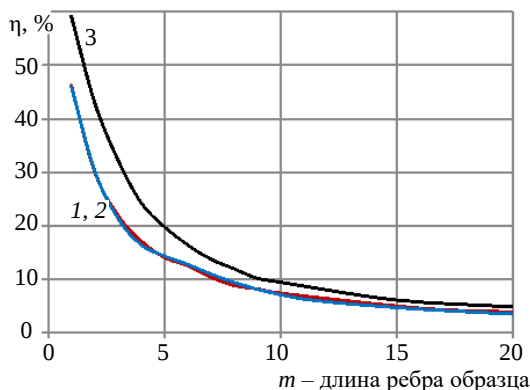


Рис. 6. Зависимость погрешности η от длины ребра образца
Fig. 6. Dependence of the error η on the length of the sample rib

Сравнение макроскопических постоянных, полученных на образцах с длинами ребер 1a и 10a приводится в табл. 4.

Таблица 4

Сравнение макроскопических термоупругих констант, определенных на образцах с длинами ребер 1a и 10a

Параметры	$m = 1$	$m = 10$	Отличие, %
E_3 , МПа	29 761	29 769	0.03
E_1 , МПа	12 042	13 812	12.8
ν_{12}	0.347	0.344	1.01
ν_{31}	0.305	0.302	0.85
ν_{13}	0.253	0.152	66.7
G_1 , МПа	4 253.7	4 218.6	0.83
G_3 , МПа	4 383.0	4 844.7	7.47
α_1	4.305e-5	4.691e-5	8.22
α_3	3.297e-5	1.589e-5	107.5
η , %	50.5	7.9	–

Как видно из табл. 4, периодическая ячейка композиции с периодической структурой не является представительным объемом, потому что, во-первых, вычисленные на ней материальные параметры значительно отличаются от эффективных (E_1 (12.8%), ν_{13} (66.7%), α_3 (107.5%)), а во-вторых, не выполняется условие симметричности матрицы упругих констант (2), различие составляет в среднем по трем видам ячеек 50.5%.

Заключение

Предложен итерационный алгоритм построения представительного объема и его эффективных материальных характеристик для композита периодической структуры, использующий метод «от противного». Сформулированы присущие представителю признакам. Периодическая ячейка композита, широко и правомерно используемая для определения его эффективных параметров при специально сформулированных на ее поверхностях граничных условиях, не обладает такими признаками и поэтому не может служить представительным объемом композита периодической структуры. Выявлено, что существование RVE для композита является основанием для применения теории эффективного модуля к описанию его напряженно деформированного состояния.

Установлено, что за представительный объем материала рассматриваемой в примере периодической структуры можно принять куб с ребром, равным десяти характерным размерам периодической ячейки. Макроскопические свойства такого объема практически не зависят от выбора ячейки периодичности и не изменяются при дальнейшем увеличении длины ребра образца. На практике за представительный объем можно принять и меньший куб – с ребром 5–7 характерных размеров ребра периодической ячейки. Макроскопические свойства, отвечающие такому представителю, отличаются от эффективных менее чем на 10%.

Приведенные в работе результаты найдут применение при расчетах конструкций из композитов периодической структуры.

Список источников

1. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М. : Изд-во МГУ, 1984. 335 с.
2. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М. : Наука, 1984. 356 с.
3. *Димитриенко Ю.И., Соколов А.П.* Разработка автоматизированной технологии вычисления эффективных упругих характеристик композитов методом асимптотического осреднения // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2008. № 2 (29). С. 56–67.
4. *Димитриенко Ю.И., Соколов А.П.* Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 5. С. 3–20.
5. *Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В.* Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой // Математическое моделирование и численные методы. 2014. № 1. С. 36–56.
6. *Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В.* Численное моделирование теплового расширения композиционных материалов на основе метода асимптотического осреднения // Инженерный журнал: наука и инновации. 2015. № 12 (48). С. 1–16.
7. *Avellaneda R., Rodríguez-Alemán S., Otero J.A.* Semi-Analytical Method for Computing Effective Thermoelastic Properties in Fiber-Reinforced Composite Materials // Appl. Sci. Materials Science and Engineering. 2021. V. 11 (12). Art. 5354. doi: 10.3390/app11125354
8. *Qiang Ma, Jun Zhi Cui.* Second-Order Two-Scale Analysis Method for the Quasi-Periodic Structure of Composite Materials under Condition of Coupled Thermo-Elasticity // Advanced Materials Research. 2012. V. 629. P. 160–164.
9. *Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В.* Конечно-элементное моделирование эффективных вязкоупругих свойств однонаправленных композиционных материалов // Математическое моделирование и численные методы. 2014. № 2 (2). С. 28–48.

10. Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Сборщиков С.В., Яхновский А.Д., Баймурзин Р.Р. Моделирование эффективных ядер релаксации и ползучести вязкоупругих композитов методом асимптотического осреднения // Математическое моделирование и численные методы. 2020. № 3 (27). С. 22–46.
11. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Федонюк Н.Н. Моделирование вязкоупругих характеристик слоисто-волоконистых полимерных композиционных материалов // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2014. № 11. С. 748–770.
12. Димитриенко Ю.И., Каишаров А.И., Макашов А.А. Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на основе метода асимптотического осреднения // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2007. № 1 (24). С. 26–46.
13. Власов А.Н., Волков-Богородский Д.Б. Параметрическое усреднение уравнений нелинейной теории упругости и деформационной теории пластичности // Механика композиционных материалов и конструкций сложных и гетерогенных сред : сб. трудов 6-й Всерос. науч. конф. с междунар. участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, 16–18 ноября 2016 г. М. : ИПРИМ РАН, 2016. С. 77–84.
14. Димитриенко Ю.И. Моделирование нелинейно-упругих характеристик композитов с конечными деформациями методом асимптотического осреднения // Известия вузов. Машиностроение. 2015. № 11 (668). С. 68–77. doi: 10.18698/0536–1044–2015–11–68–77
15. Anoshkin A.N, Pisarev P.V., Ermakov D.A. et al. Forecasting effective elastic properties of spatially reinforced composite materials applying the local approximation method // AIP Conference Proceedings. 2020. V. 2216. Art. 020008. doi: 10.1063/5.0004078
16. Куимова Е.В., Труфанов Н.А. Численное прогнозирование термовязкоупругих характеристик однонаправленного волоконистого композита с вязкоупругими компонентами // Вестник Самарского государственного университета. Естественнаучная серия. 2009. № 4 (70). С. 129–148.
17. Yankovskii A.P. A heuristic approach to the determination of the effective thermal conductivity coefficients of biperiodic composite media // J. of Engineering Physics and Thermophysics. 2016. V. 89 (6) P. 1574–1581. doi: 10.1007/s10891-016-1528-z
18. Безмельницын А.В., Сапожников С.Б. Многомасштабное моделирование и анализ механизма возникновения технологических межслойных напряжений в толстостенных кольцах из стеклопластика // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2017. № 2. С. 5–22. doi: 10.15593/pern.mech/2017.2.01
19. Chen Z., Yang F., Meguid S.A. Multi-level modeling of woven glass/epoxy composite for multilayer printed circuit board applications // International Journal of Solids and Structures. 2014. V. 51 (21-22). P. 3679–3688. doi: 10.1016/J.IJSOLSTR.2014.06.030
20. McWilliams B., Dibelka J., Yen C.F. Multi scale modeling and characterization of in elastic deformation mechanisms in continuous fiber and 2D woven fabric reinforced metal matrix composites // Materials Science & Engineering A. 2014. V. 618. P. 142–152. doi: 10.1016/J.MSEA.2014.08.063
21. Hallal A., Younes R., Fardoun F. Review and comparative study of analytical modeling for the elastic properties of textile composites // Composites Part B: Engineering. 2013. V. 50. P. 22–31. doi: 10.1016/j.compositesb.2013.01.024
22. Kormanikova E., Kotrasova K. Micro-macro modelling of laminated composite rectangular reservoir // Composite Structures. 2022. V. 279. Art. 114701. doi: 10.1016/j.compstruct.2021.114701
23. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. Characteristics of Compositions of Unidirectional Short Boron Fibers and Metal Matrices // Mech Compos Mater. 2020. V. 55. P. 1–14. doi: 10.1007/s11029-020-09849-7

24. Sheshenin S.V., Artamonova N.B., Kiselev F.B., Semenov D.M., Volkov L.S., Ming-Hui Fu. Asymptotic Homogenization of Materials with Artificial Periodic Structures // AIP Conference Proceedings. 2020. V. 2216 (1). P. 070005-1–070005-8. doi: 10.1063/5.0003627
25. Heide-Jørgensen S., Budzik M.K., Ibsen C.H. Three-dimensional, multiscale homogenization for hybrid woven composites with fiber-matrix debonding // Composites Science and Technology. 2022. V. 218 (8). Art. 109204. doi: 10.1016/j.compscitech.2021.109204
26. Schneider M., Josien M., Otto F. Representative volume elements for matrix-inclusion composites – a computational study on the effects of an improper treatment of particles intersecting the boundary and the benefits of periodizing the ensemble // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2022. V. 158. Art. 104652. doi: 10.1016/j.jmps.2021.104652
27. Song N., Jackson M., Wu Sh., Souza F. Micromechanical Analysis of Mechanical Response for Unidirectional Fiber-Reinforced Plies // Thematic section: 5th International Congress on 3D materials science. Integrating Materials and Manufacturing Innovation. 2021. V. 10. P. 542–550. doi: 10.1007/s40192-021-00236-1
28. Elmasry A., Azoti W., Elmarakbi M., Elmarakbi A. Interaction modelling of the thermomechanical behaviour of spatially-oriented graphene platelets (GPLs) reinforced polymer matrix // International Journal of Solids and Structures. 2021. V. 232 (December). Art. 111183. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2021.111183
29. Chen Q., Zhao F., Jia J., Zhu Ch., Bai Sh., Ye Y. Multiscale simulation of elastic response and residual stress for ceramic particle reinforced composites // Ceramics International. 2022. V. 48, is. 2. P. 2431–2440. doi: 10.1016/j.ceramint.2021.10.024
30. Hill R. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles // J. Mech. Phys. Solids. 1963. V. 11 (5). P. 357–372.
31. Kanit T., Forest S., Galliet I., Mounoury V., Jeulin D. Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach // Int. J. Solids Struct. 2003. V. 40 (13-14). P. 3647–3679. doi: 10.1016/S0020-7683(03)00143-4
32. Drugan W.J., Willis J.R. A micromechanics-based nonlocal constitutive equations and estimates of representative volume element size for elastic composites // J. Mech. Phys. Solids. 1996. V. 44. P. 497–524.

References

1. Pobedrya B.E. (1984) *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Composite mechanics]. Moscow: MGU.
2. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. (1984) *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh. Matematicheskie zadachi mekhaniki kompozitsionnykh materialov* [Averaging of processes in periodic media. Mathematical problems of mechanics of composite materials]. Moscow: Nauka.
3. Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. (2008) Razrabotka avtomatizirovannoy tekhnologii vychisleniya effektivnykh uprugikh kharakteristik kompozitov metodom asimptoticheskogo osredneniya [Development of automated technology of calculation of effective elastic characteristics of composites by method of asymptotic averaging]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*. 2(29). pp. 56–67.
4. Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. (2012) Mnogomasshtabnoe modelirovanie uprugikh kompozitsionnykh materialov [Multiscale modeling of elastic composite materials]. *Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical Models and Computer Simulations*. 24(5). pp. 3–20.
5. Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V. (2014) Asimptoticheskaya teoriya konstruktivno-ortotropnykh plastin s dvukhperiodicheskoy strukturoy [Asymptotic theory of constructive-orthotropic plates with two-periodic structures]. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody – Mathematical Modeling and Computational Methods*. 1. pp. 36–56.

6. Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V. (2015) Chislennoe modelirovanie teplovogo rasshireniya kompozitsionnykh materialov na osnove metoda asimptoticheskogo osredneniya [Numerical simulation of composite material thermal expansion by homogenization method]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii – Engineering Journal: Science and Innovation*. 12(48). pp. 1–16. doi: 10.18698/2308-6033-2015-12-1452
7. Avellaneda R., Rodríguez-Alemán S., Otero J.A. (2021) Semi-analytical method for computing effective thermoelastic properties in fiber-reinforced composite materials. *Applied Sciences. Materials Science and Engineering*. 11(12). Article 5354. doi: 10.3390/app11125354
8. Ma Q., Cui J.Zh. (2012) Second-order two-scale analysis method for the quasi-periodic structure of composite materials under condition of coupled thermo-elasticity. *Advanced Materials Research*. 629. pp. 160–164. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMR.629.160
9. Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V. (2014) Konechno-elementnoe modelirovanie effektivnykh vyazkoupругikh svoystv odnonapravlennykh kompozitsionnykh materialov [Finite element modulation of effective viscoelastic properties of unilateral composite materials]. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody – Mathematical Modeling and Computational Methods*. 2(2). pp. 28–48.
10. Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V., Sborshchikov S.V., Yakhnovskiy A.D., Baymurzin R.R. (2020) Modelirovanie effektivnykh yader relaksatsii i polzuchesti vyazkoupругikh kompozitov metodom asimptoticheskogo osredneniya [Modeling of effective relaxation and creep kernels of viscoelastic composites by asymptotic averaging method]. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody – Mathematical Modeling and Computational Methods*. 3(27). pp. 22–46.
11. Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V., Fedonyuk N.N. (2014) Modelirovanie vyazkoupругikh kharakteristik sloisto-voloknistykh polimernykh kompozitsionnykh materialov [Simulation of viscoelastic properties of fibrous laminated polymer composite materials]. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Baumana – Science and Education of the Bauman MSTU*. 11. pp. 748–770.
12. Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I., Makashov A.A. (2007) Konechno-elementnyy raschet effektivnykh uprugoplasticheskikh kharakteristik kompozitov na osnove metoda asimptoticheskogo osredneniya [Finite element design of effective elastic and plastic characteristics of composites on the basis of method of asymptotic averaging]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennyye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*. 1(24). pp. 26–46.
13. Vlasov A.N., Volkov-Bogorodskiy D.B. (2016) Parametricheskoe usrednenie uravneniy nelineynoy teorii uprugosti i deformatsionnoy teorii plastichnosti [Parametric averaging of equations of the nonlinear elasticity theory and deformation plasticity theory]. *Proceedings of the VI International Conference “Mechanics of composite materials and structures, complex and heterogeneous media”*. Moscow. pp. 77–84.
14. Dimitrienko Yu.I. (2015) Modelirovanie nelineynno-uprugikh kharakteristik kompozitov s konechnymi deformatsiyami metodom asimptoticheskogo osredneniya [Modeling of nonlinear-elastic properties of composites with finite deformations by asymptotic homogenization method]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie – BMSTU Journal of Mechanical Engineering*. 11(668). pp. 68–77. doi: 10.18698/0536-1044-2015-11-68-77
15. Anoshkin A.N., Pisarev P.V., Ermakov D.A., Roman K.V. (2020) Forecasting effective elastic properties of spatially reinforced composite materials applying the local approximation method. *AIP Conference Proceedings*. 2216. Article 020008. doi: 10.1063/5.0004078
16. Kuimova E.V., Trufanov N.A. (2009) Chislennoe prognozirovanie termovyazkoupругikh kharakteristik odnonapravlennoy voloknistoy kompozita s vyazkoupругimi komponentami [The numerical prediction of effective thermoviscoelastic properties of unidirectional fiber composite with the viscoelastic components]. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvennonauchnaya seriya*. 4(70). pp.129–148.

17. Yankovskiy A.P. (2016) A heuristic approach to the determination of the effective thermal conductivity coefficients of biperiodic composite media. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 89(6). pp. 1574–1581. doi: 10.1007/s10891-016-1528-z
18. Bezmelnitsyn A.V., Sapozhnikov S.B. (2017) Mnogomasshtabnoe modelirovanie i analiz mekhanizma vozniknoveniya tekhnologicheskikh mezhsloynnykh napryazheniy v tolstostennykh kol'tsakh iz stekloplastika [Multiscale modeling and formation analysis of technological interlaminar stresses in thick-walled GFRP rings]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Mechanics*. 2. pp. 5–22. doi: 10.15593/perm.mech/2017.2.01
19. Chen Z., Yang F., Meguid S.A. (2014) Multi-level modeling of woven glass/epoxy composite for multilayer printed circuit board applications. *International Journal of Solids and Structures*. 51(21–22). pp. 3679–3688. doi: 10.1016/J.IJSOLSTR.2014.06.030
20. McWilliams B., Dibelka J., Yen C.F. (2014) Multi scale modeling and characterization of in elastic deformation mechanisms in continuous fiber and 2D woven fabric reinforced metal matrix composites. *Materials Science & Engineering. Part A*. 618. pp. 142–152. doi: 10.1016/J.MSEA.2014.08.063
21. Hallal A., Younes R., Fardoun F. (2013) Review and comparative study of analytical modeling for the elastic properties of textile composites. *Composites. Part B: Engineering*. 50. pp. 22–31. doi: 10.1016/j.compositesb.2013.01.024
22. Kormanikova E., Kotrasova K. (2022) Micro-macro modelling of laminated composite rectangular reservoir. *Composite Structures*. 279. Article 114701. doi: 10.1016/j.compstruct.2021.114701
23. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2020) Characteristics of compositions of unidirectional short boron fibers and metal matrices. *Mechanics of Composite Materials*. 55. pp. 1–14. doi: 10.1007/s11029-020-09849-7
24. Sheshenin S.V., Artamonova N.B., Kiselev F.B., Semenov D.M., Volkov L.S., Ming-Hui Fu. (2020) Asymptotic homogenization of materials with artificial periodic structures. *AIP Conference Proceedings*. 2216(1). Article 070005. pp. 1–8. doi: 10.1063/5.0003627
25. Heide-Jørgensen S., Budzik M.K., Ibsen C.H. (2022) Three-dimensional, multiscale homogenization for hybrid woven composites with fiber-matrix debonding. *Composites Science and Technology*. 218. Article 109204. doi: 10.1016/j.compscitech.2021.109204
26. Schneider M., Josien M., Otto F. (2022) Representative volume elements for matrix-inclusion composites - a computational study on the effects of an improper treatment of particles intersecting the boundary and the benefits of periodizing the ensemble. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 158. Article 104652. doi: 10.1016/j.jmps.2021.104652
27. Song N., Jackson M., Wu S., Souza F. (2021) Micromechanical analysis of mechanical response for unidirectional fiber-reinforced plies. *Proceedings of the 5th International Congress on 3D Materials Science. Thematic section “Integrating Materials and Manufacturing Innovation”*. 10. pp. 542–550. doi: 10.1007/s40192-021-00236-1
28. Elmasry A., Azoti W., Elmarakbi M., Elmarakbi A. (2021) Interaction modelling of the thermomechanical behaviour of spatially-oriented graphene platelets (GPLs) reinforced polymer matrix. *International Journal of Solids and Structures*. 232. Article 111183. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2021.111183
29. Chen Q., Zhao F., Jia J., Zhu Ch, Bai Sh., Ye Y. (2022) Multiscale simulation of elastic response and residual stress for ceramic particle reinforced composites. *Ceramics International*. 48(2). pp. 2431–2440. doi: 10.1016/j.ceramint.2021.10.024
30. Hill R. (1963) Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 11(5). pp. 357–372. doi: 10.1016/0022-5096(63)90036-X
31. Kanit T., Forest S., Galliet I., Mounoury V., Jeulin D. (2003) Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach.

International Journal of Solids and Structures. 40(13–14). pp. 3647–3679. doi: 10.1016/S0020-7683(03)00143-4

32. Drugan W.J., Willis J.R. (1996) A micromechanics-based nonlocal constitutive equations and estimates of representative volume element size for elastic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 44. pp. 497–524. doi: 10.1016/0022-5096(96)00007-5

Сведения об авторах:

Ландик Лидия Владимировна – инженер кафедры вычислительной и экспериментальной механики Пермского государственного национального исследовательского университета, Пермь, Россия. E-mail: LidiaLandik@gmail.com

Пестренин Валерий Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной и экспериментальной механики Пермского государственного национального исследовательского университета, Пермь, Россия. E-mail: PestreninVM@mail.ru

Пестренина Ирина Владимировна – кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительной и экспериментальной механики Пермского государственного национального исследовательского университета, Пермь, Россия. E-mail: IPestrenina@gmail.com

Information about the authors:

Landik Lidia V. (Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: LidiaLandik@gmail.com

Pestrenin Valery M. (Candidate of Physics and Mathematics Sciences, Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: PestreninVM@mail.ru

Pestrenina Irene V. (Candidate of Technical Sciences, Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: IPestrenina@gmail.com

Статья поступила в редакцию 03.07.2022; принята к публикации 01.06.2023

The article was submitted 03.07.2022; accepted for publication 01.06.2023

Научная статья

УДК 531.2

doi: 10.17223/19988621/83/11

Исследование напряженно-деформированного состояния губчатой костной ткани при одноосном сжатии

Екатерина Сергеевна Марченко¹, Татьяна Витальевна Чайковская²

^{1,2} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ 89138641814@mail.ru

² kolmakova@ftf.tsu.ru

Аннотация. Представлены результаты исследования напряженно-деформированного состояния модельных фрагментов губчатой костной ткани при одноосном сжатии. Архитектура модельных фрагментов повторяет архитектуру фрагментов природной кости. Модельные фрагменты представлены совокупностью трабекулярных узлов с трабекулами определенной длины, толщины и минерального содержания. Исследовано влияние изменения длин главных трабекул и минерального содержания на изменение напряженно-деформированного состояния и величину эффективного модуля упругости модельных фрагментов губчатой ткани. Показано, что деформационное поведение фрагментов кости определяется внутренним взаимодействием главных и второстепенных трабекул.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, губчатая костная ткань, трабекулы, минеральное содержание, одноосное сжатие, компьютерное моделирование

Благодарности: Исследование выполнено при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет-2030).

Для цитирования: Марченко Е.С., Чайковская Т.В. Исследование напряженно-деформированного состояния губчатой костной ткани при одноосном сжатии // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 127–142. doi: 10.17223/19988621/83/11

Original article

A study of the stress-strain state of cancellous bone tissue under uniaxial compression

Ekaterina S. Marchenko¹, Tat'yana V. Chaykovskaya²

^{1,2,3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ 89138641814@mail.ru

² kolmakova@ftf.tsu.ru

Abstract. In this paper, the stress-strain state of model fragments of cancellous bone tissue under uniaxial compression is studied. The architecture of model cancellous tissue

fragments mimics that of natural bone fragments. The model fragments of cancellous bone tissue are represented by a set of trabecular nodes, including the central element and the principal and secondary trabeculae of the certain length, thickness, and mineral content. The study of the von Mises stress distribution and normal strains shows that for the samples with short principal trabeculae, the largest normal strains and von Mises stresses are localized in the surface layers of the principal trabeculae. These characteristics are uniformly distributed over the thickness of the middle part of the principal trabeculae and decrease in their values with an increase in the principal trabecula length. It is revealed that with an increase in the length of the cancellous bone principal trabeculae, the effective longitudinal modulus of elasticity of the bone sample decreases according to a power law. The interaction between the principal and secondary trabeculae determines the deformation response of the bone samples in three mutually perpendicular directions under axial compression, which variously manifests itself depending on structural parameters and mass fraction of the trabeculae minerals.

Keywords: stress-strain state, cancellous bone tissue, trabeculae, mineral content, uniaxial compression, computer simulation

Acknowledgments: This study was supported by the Development Program of Tomsk State University (Priority 2030).

For citation: Marchenko, E.S., Chaykovskaya, T.V. (2023) A study of the stress-strain state of cancellous bone tissue under uniaxial compression. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 127–142. doi: 10.17223/19988621/83/11

Введение

На сегодняшний день решением проблемы улучшения качества и продолжительности жизни человечества является замена утративших работоспособность органов и тканей имплантатами. Разработка и выбор материалов для имплантатов с точки зрения химической, биологической и механической совместимости играют одну из главных ролей в приживаемости имплантатов внутри организма. Для обеспечения механической совместимости имплантата с организмом необходимо учитывать все особенности механического поведения замещаемого природного материала, определяемого его структурой и составом, отличающимися для разных индивидуумов. Отсутствие такого анализа и в связи с этим неправильный подбор имплантата, например для костной ткани, приводит к резорбции (рассасыванию) костной ткани на границе кость–имплантат и необходимости проведения повторных операций по замене последнего.

Костная структура, состав и соответствующие им механические свойства подстраиваются под изменяющиеся внешние механические условия (закон Вольфа), варьируют в пределах одной кости и различны для разных индивидуумов [1–4]. Поэтому один и тот же имплантат может прижиться у одного пациента и не прижиться у другого. В связи с этим возникает необходимость в исследовании изменения механического поведения определенного типа костных тканей (губчатой или компактной) при изменении их структуры и состава. В настоящее время существует огромное количество исследований механического поведения костных тканей с применением экспериментальных методов и методов компьютерного моделирования [5–11]. Использование методов компьютерного моделирования

для исследования механического поведения костных тканей обладает рядом преимуществ по сравнению с экспериментальными методами: это отсутствие необходимости извлечения исследуемого участка кости из организма, возможность учета различных структурных особенностей костной ткани, возможность оценки характера распределения и величины реализующихся напряжений и деформаций в костной ткани при определенном виде нагружения и их изменение при варьировании параметров структуры и состава костной ткани.

Большинство существующих на сегодняшний день публикаций, касающихся компьютерного моделирования, включает в себя трехмерные геометрические модели фрагментов губчатой костной ткани, которые построены на основе изображений компьютерной томографии [7, 8] и включают, соответственно, геометрические особенности структуры и выводы по механике кости конкретного пациента, что не позволяет сделать обобщенные выводы о механическом поведении костной ткани в целом. В данной работе представлены общие закономерности напряженно-деформированного состояния модельных фрагментов губчатой костной ткани, отличающихся структурой и составом, при одноосном сжатии. Модельные фрагменты губчатой костной ткани явным образом построены с использованием разработанной трабекулярной модели [12, 13], в которой трабекулы представлены в виде балок переменной толщины, объединенных в трабекулярные узлы и образующих модельный фрагмент костной ткани. Алгоритм построения геометрических моделей губчатой костной ткани позволяет перестраивать структуру модельного фрагмента при варьировании структурных параметров трабекул (длины и толщины). В модели также неявным образом учитывается наличие коллагеновой и минеральной составляющих кости.

Модель губчатой костной ткани

В качестве элемента структуры модельных фрагментов губчатой костной ткани рассматривается трабекулярный узел (рис. 1).

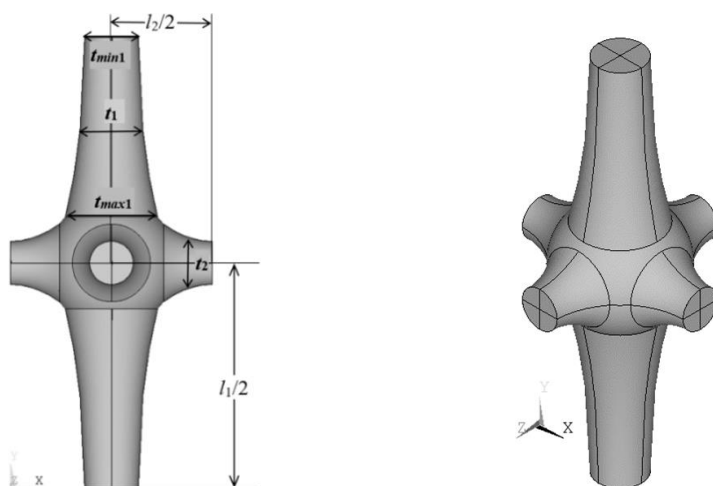


Рис. 1. Элемент структуры модельных фрагментов кости – трабекулярный узел
Fig. 1. The structural element of model bone fragments is a trabecular node

Трабекулярный узел включает в себя центральный элемент с шестью трабекулами половинной длины, из которых две расположены по оси Y , совпадающей с направлением приложения нагрузки, а четыре – в двух взаимно перпендикулярных направлениях по осям X и Z . Толщина каждой трабекулы в области контакта с центральным элементом $t_{\max}$ и в области половины длины $t_{\min}$ (см. рис. 1). вычисляется по заданному среднему значению толщины трабекулы t с использованием выражения из работы [14], полученного на основе экспериментальных данных. Модельный фрагмент губчатой костной ткани представляет собой совокупность трабекулярных узлов.

Алгоритм построения модельных фрагментов губчатой костной ткани позволяет автоматически перестраивать геометрические модели в зависимости от длин и средних толщин трабекул. Трабекулы, направленные вдоль оси нагружения, считаются главными трабекулами; трабекулы, направленные перпендикулярно им, считаются второстепенными. Все параметры, относящиеся к главным трабекулам, имеют индекс 1, относящиеся к второстепенным – индекс 2. Длина главных трабекул l_1 варьировала в диапазоне от 0.215 до 1.3 мм, длина второстепенных трабекул задавалась постоянной $l_2 = 0.215$ мм, средняя толщина трабекул t варьировала от 0.109 до 0.215 мм [6]. Изменение структурных параметров трабекулярных узлов приводит к изменению архитектуры модельных образцов.

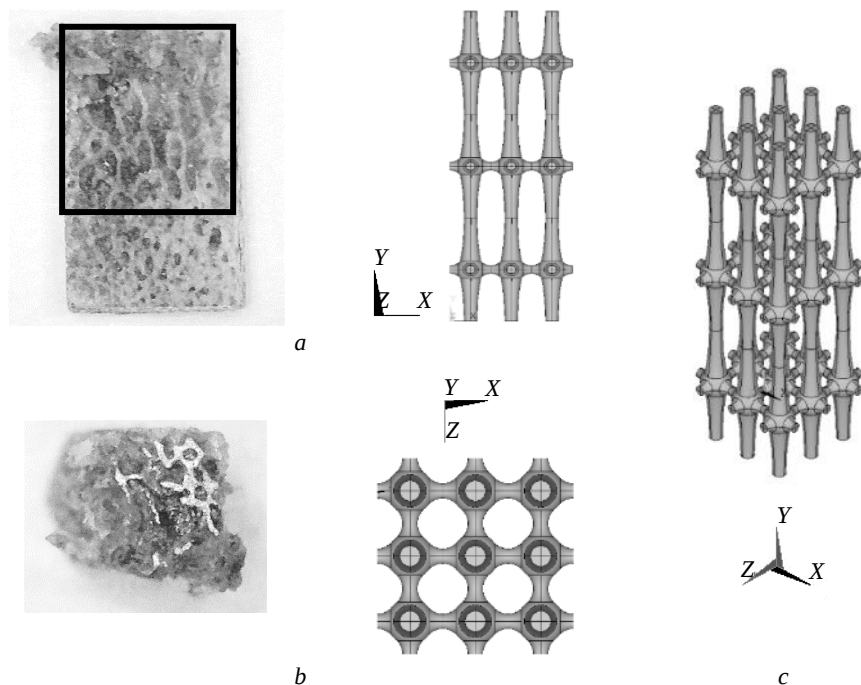


Рис. 2 Архитектура фрагментов природной губчатой костной ткани и соответствующих модельных фрагментов с параметрами $l_1 = 1.31$ мм, $l_2 = 0.215$ мм (*a* – проекция в плоскости YX (вид сбоку); *b* – проекция в плоскости ZX (вид сверху), *c* – пространственное изображение)

Fig. 2. Architecture of fragments of natural cancellous bone tissue and corresponding model fragments with parameters $l_1 = 1.31$ mm, $l_2 = 0.215$ mm ((*a*) projection on the YX -plane (side view), (*b*) projection on the ZX -plane (top view), and (*c*) three-dimensional image)

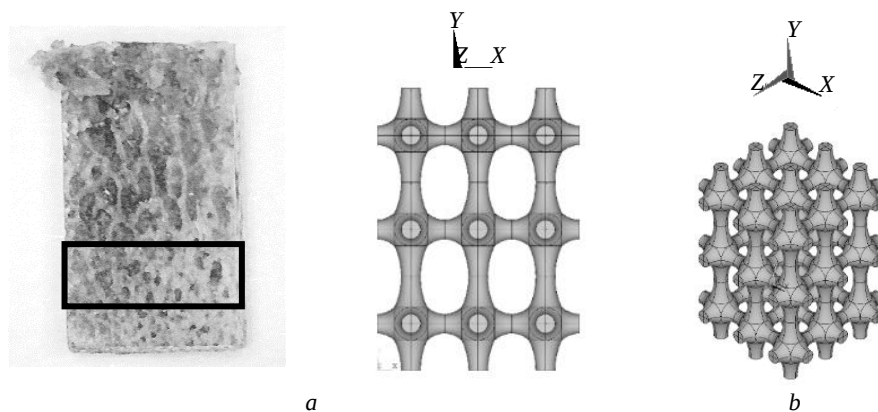


Рис. 3 Архитектура фрагментов природной губчатой костной ткани и соответствующих модельных фрагментов с параметрами $l_1 = 0.383$ мм, $l_2 = 0.215$ мм (*a* – проекция в плоскости YX (вид сбоку), *b* – пространственное изображение)

Fig. 3. Architecture of fragments of natural cancellous bone tissue and corresponding model fragments with parameters $l_1 = 0.383$ mm, $l_2 = 0.215$ mm ((*a*) projection on the YX-plane (side view) and (*b*) three-dimensional image)

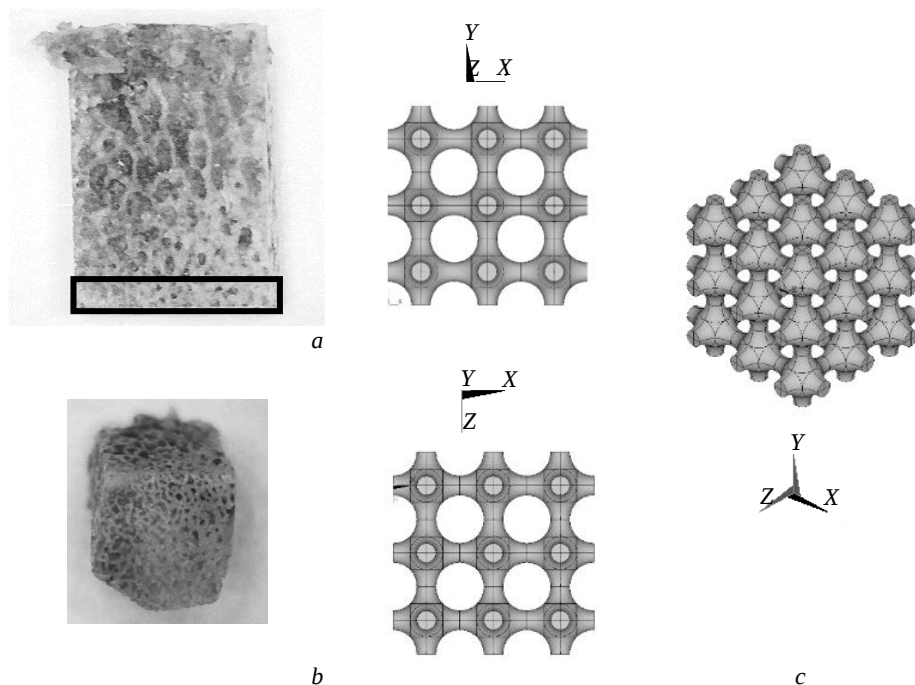


Рис. 4 Архитектура фрагментов природной губчатой костной ткани и соответствующих модельных фрагментов с параметрами $l_1 = 0.215$ мм, $l_2 = 0.215$ мм (*a* – проекция в плоскости YX (вид сбоку) (*a*), *b* – проекция в плоскости ZX (вид сверху), *c* – пространственное изображение)

Fig. 4. Architecture of fragments of natural cancellous bone tissue and corresponding model fragments with parameters $l_1 = 0.215$ mm, $l_2 = 0.215$ mm ((*a*) projection on the YX-plane (side view), (*b*) projection on the ZX-plane (top view), and (*c*) three-dimensional image)

Представительные объемы модельных фрагментов губчатой костной ткани разной архитектуры, соответствующие архитектуре фрагментов природной губчатой ткани бедренной кости быка, представлены на рис. 2–4 (выделены черными прямоугольниками).

Ось Y соответствует продольной оси костного образца. Материал костных трабекул считался однородным и изотропным. Костные трабекулы рассматривались как двухфазный композиционный материал. Эффективный модуль упругости трабекул рассчитывался с использованием выражения механики композиционных материалов для случая произвольно ориентированных в коллагеновой матрице гидроксиапатитовых волокон [15]. Массовая доля минералов гидроксиапатита α варьировала от 0.1 до 0.4, в связи с чем расчетный модуль упругости принимал значения от 295 до 1 436 МПа, что не противоречит представленным данным в работе [16].

Расчеты напряженно-деформированного состояния модельных фрагментов губчатой костной ткани проводили в рамках линейной теории упругости с использованием метода конечных элементов в программном комплексе ANSYS. Для построения конечно-элементных моделей использовали нерегулярную конечно-элементную сетку с тетраэдральными конечными элементами.

Результаты и обсуждение

Модельные фрагменты губчатой костной ткани подвергались одноосному сжатию в направлении оси Y .

Исследовалось влияние изменения длины главной трабекулы губчатой костной ткани на напряженно-деформированное состояние модельных фрагментов кости.

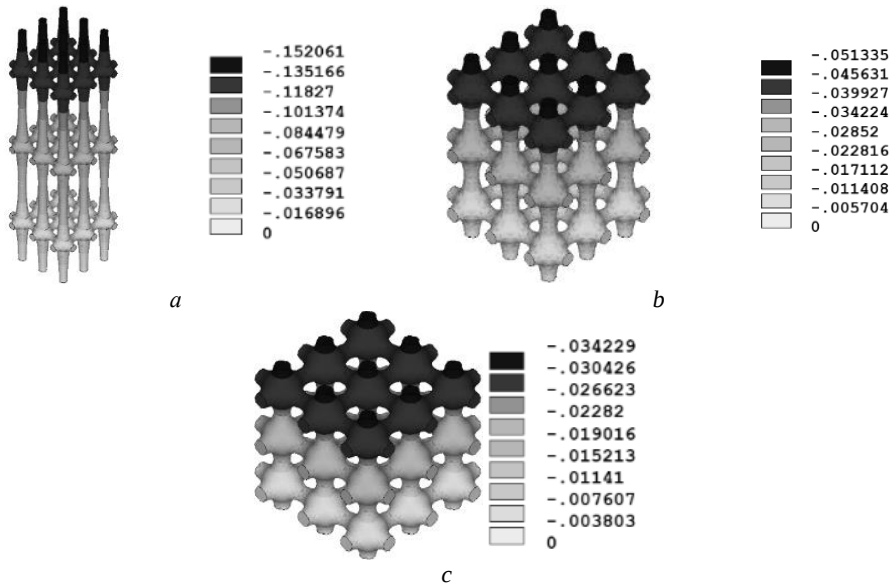


Рис. 5. Распределение перемещений U_y (мм) в модельных образцах губчатой костной ткани, отличающихся длиной главных трабекул l_1 (a – 1.31 мм, b – 0.383 мм, c – 0.215 мм), при напряжении сжатия 15 МПа ($l_2 = 0.215$ мм, $t_1 = 0.162$ мм, $t_2 = 0.162$ мм, $\alpha = 0.1$)

Fig. 5. Distribution of displacements U_y (mm) in model samples of cancellous bone tissue having different lengths of the main trabecula l_1 ((a) 1.31, (b) 0.383, and (c) 0.215 mm) at a compressive stress of 15 МПа ($l_2 = 0.215$ mm, $t_1 = 0.162$ mm, $t_2 = 0.162$ mm, $\alpha = 0.1$)

На рис. 5, 6 представлены распределения перемещений в модельных образцах, отличающихся длиной l_1 главной трабекулы. Из представленных рисунков видно, что при осевом сжатии образцы сжимаются в направлении оси Y и симметрично растягиваются в направлениях осей X и Z . Увеличение длины главной трабекулы приводит к большему сжатию образца в направлении оси Y и растяжению в перпендикулярных направлениях, что показывает увеличение абсолютных значений наибольших перемещений U_y , U_x , U_z (рис.5-7). Области наибольших перемещений U_x и U_z принадлежат главным трабекулам, распространяясь на второстепенные трабекулы с уменьшением длины главной трабекулы модельного образца (см. рис. 5, 6).

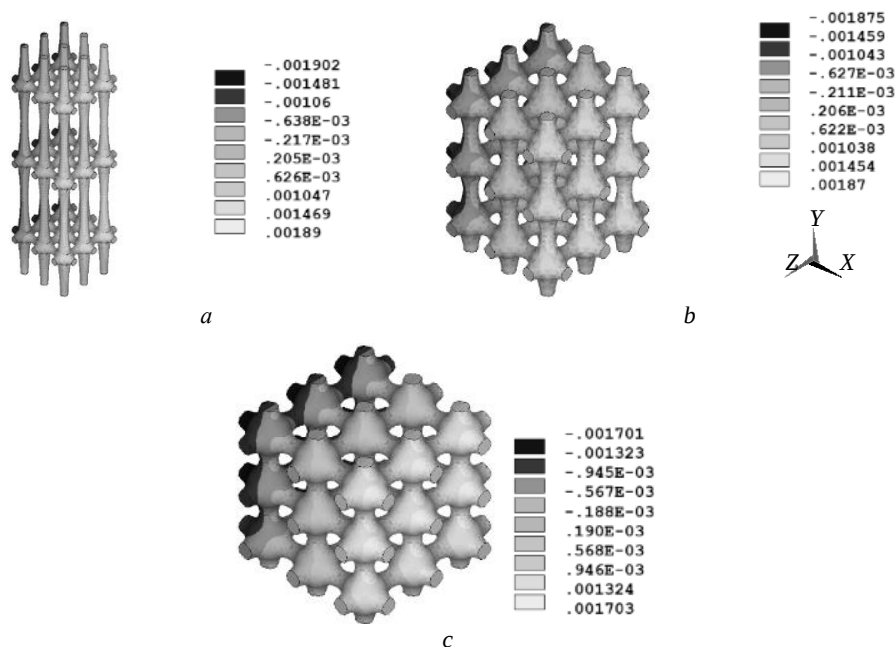


Рис. 6. Распределение перемещений U_x (мм) в модельных образцах губчатой костной ткани, отличающихся длиной главных трабекул l_1 ($a - 1.31$ мм, $b - 0.383$ мм, $c - 0.215$ мм), при напряжении сжатия 15 МПа ($l_2 = 0.215$ мм, $t_1 = 0.162$ мм, $t_2 = 0.162$ мм, $\alpha = 0.1$)

Fig. 6. Distribution of displacements U_x (mm) in model samples of cancellous bone tissue having different lengths of the main trabecula l_1 ((a) 1.31, (b) 0.383, and (c) 0.215 mm) at a compressive stress of 15 MPa ($l_2 = 0.215$ mm, $t_1 = 0.162$ mm, $t_2 = 0.162$ mm, $\alpha = 0.1$)

С увеличением массовой доли минералов с 0.1 до 0.4 (в 4 раза) деформируемость образца в трех взаимно перпендикулярных направлениях при одноосном сжатии снижается в 4.87 раза. Влияние изменения длин главных трабекул на деформируемость образцов при осевом сжатии растет с уменьшением массовой доли минералов ткани кости (рис. 7).

На рис. 8, 9 представлены распределения компонент нормальных напряжений на поверхности модельных образцов и в сечении YX . Из рисунков видно, что наибольшие сжимающие напряжения σ_y принадлежат главным трабекулам, а наибольшие растягивающие – второстепенным трабекулам (см. рис. 8).

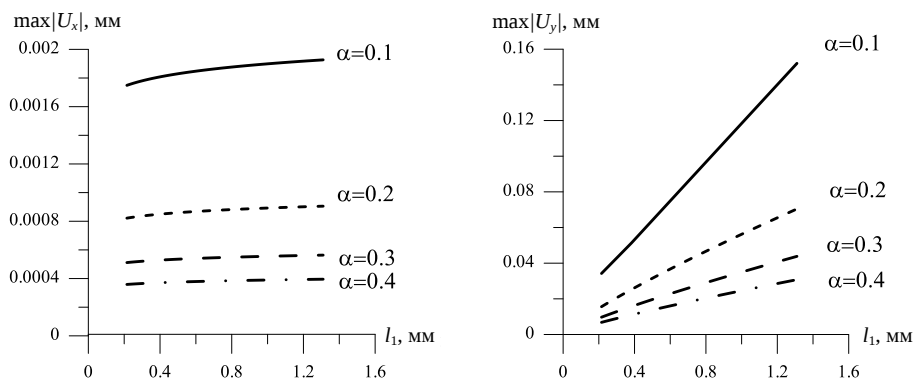


Рис. 7. Зависимость максимальных абсолютных перемещений модельных образцов губчатой костной ткани от изменения длины главных трабекул

($l_2 = 0.215$ мм, $t_1 = 0.162$ мм, $t_2 = 0.162$ мм)

Fig. 7. Dependence of the maximum absolute displacements of model cancellous bone tissue samples on variation of the main trabeculae length ($l_2 = 0.215$ mm, $t_1 = 0.162$ mm, $t_2 = 0.162$ mm)

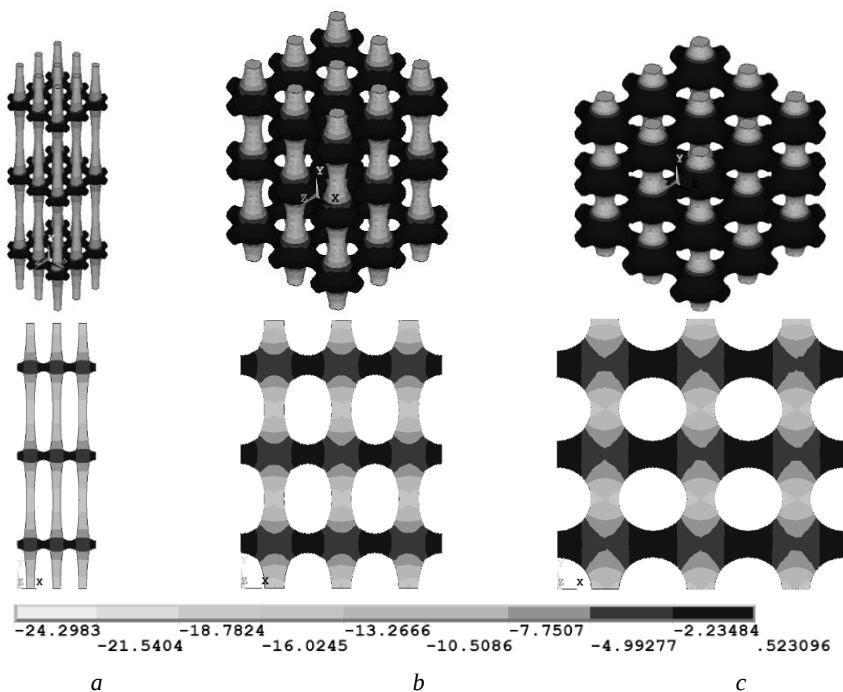


Рис. 8. Распределение нормальных напряжений σ_y (МПа) на поверхности и внутри (сечение плоскостью YX) модельных образцов губчатой костной ткани, отличающихся длиной главной трабекулы l_1 (a – 1.31 мм, b – 0.383 мм, c – 0.215 мм), при напряжении сжатия 15 МПа ($l_2 = 0.215$ мм, $t_1 = 0.162$ мм, $t_2 = 0.162$ мм, $\alpha = 0.1$)

Fig. 8. Distribution of normal stresses σ_y (MPa) on the surface and within the model samples of cancellous bone tissue (YX-plane section) having different lengths of the main trabecula l_1 ((a) 1.31, (b) 0.383, and (c) 0.215 mm) at a compressive stress of 15 MPa ($l_2 = 0.215$ mm, $t_1 = 0.162$ mm, $t_2 = 0.162$ mm, $\alpha = 0.1$)

С увеличением длины главной трабекулы характер распределения осевых напряжений σ_y по поверхности образца не меняется, изменения в распределении напряжений σ_x реализуются внутри образца (см. рис. 8), а именно в центральном элементе сжимающие напряжения уменьшаются, а в главных трабекулах увеличиваются, приводя к более равномерному распределению в этих областях.

Наибольшие растягивающие напряжения σ_x , σ_z расположены на поверхности образца в местах крепления второстепенных трабекул к центральному элементу и внутри центрального элемента (см. рис. 9). Наибольшие сжимающие напряжения σ_x , σ_z расположены в местах крепления главной трабекулы к центральному элементу и увеличиваются с уменьшением длины главной трабекулы. С увеличением длины главной трабекулы сжимающие напряжения σ_z , σ_x внутри образца в области главных трабекул уменьшаются (см. рис. 9). Сравнивая значения нормальных напряжений σ_x , σ_y , σ_z можно сделать вывод, что наибольшими растягивающими нормальными напряжениями являются напряжения σ_z , σ_x , а наибольшими сжимающими — σ_y .

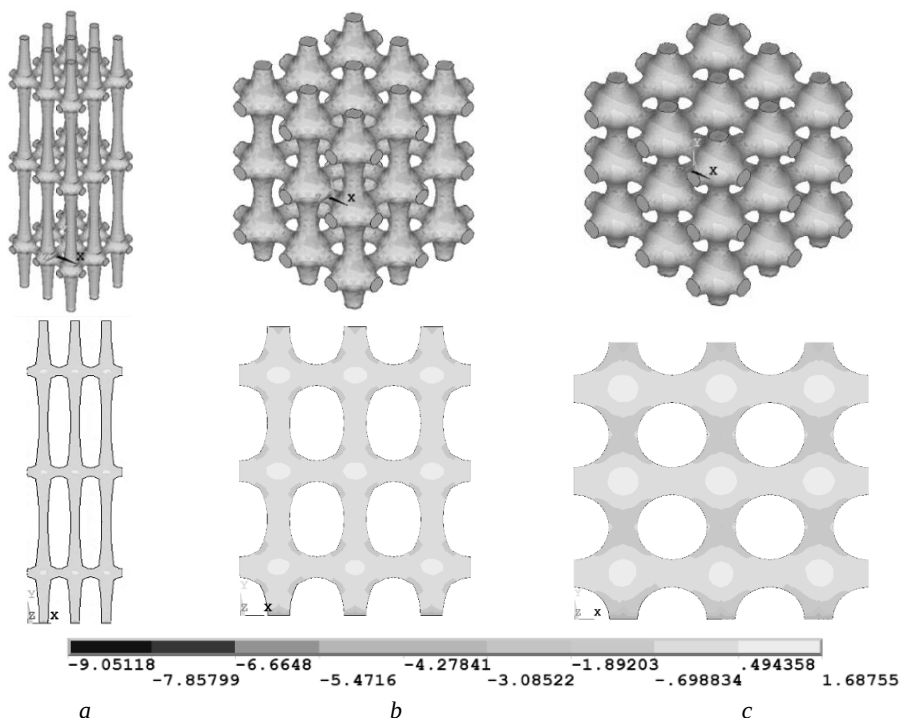


Рис. 9. Распределение нормальных напряжений σ_x (МПа) на поверхности и внутри (сечение плоскостью YX) модельных образцов губчатой костной ткани, отличающихся длиной главной трабекулы l_1 (a – 1.31 мм, b – 0.383 мм, c – 0.215 мм), при напряжении сжатия 15 МПа ($l_2 = 0.215$ мм, $t_1 = 0.162$ мм, $t_2 = 0.162$ мм, $\alpha = 0.1$)

Fig. 9. Distribution of normal stresses σ_x (MPa) on the surface and within (section YX-plane) of cancellous bone tissue model samples having different lengths of the main trabecula l_1 ((a) 1.31, (b) 0.383, and (c) 0.215 mm) at a compressive stress of 15 MPa ($l_2 = 0.215$ mm, $t_1 = 0.162$ mm, $t_2 = 0.162$ mm, $\alpha = 0.1$)

Распределение эквивалентных напряжений по Мизесу, представленное на рис. 10, показывает, что наибольшие напряжения для образца с короткими главными трабекулами ($l_1 = 0.215$ мм) локализуются в приповерхностных слоях главных трабекул и более равномерно распределяются по толщине, уменьшаясь в значении с увеличением длины главных трабекул ($l_1 > 0.215$ мм). Таким образом, опираясь на энергетическую теорию прочности, можно предположить, что зарождение трещин в образцах с короткими главными трабекулами может начаться раньше в приповерхностных слоях главных трабекул, чем в образцах с длинными главными трабекулами, в которых трещины могут занять всю толщину материала главной трабекулы.

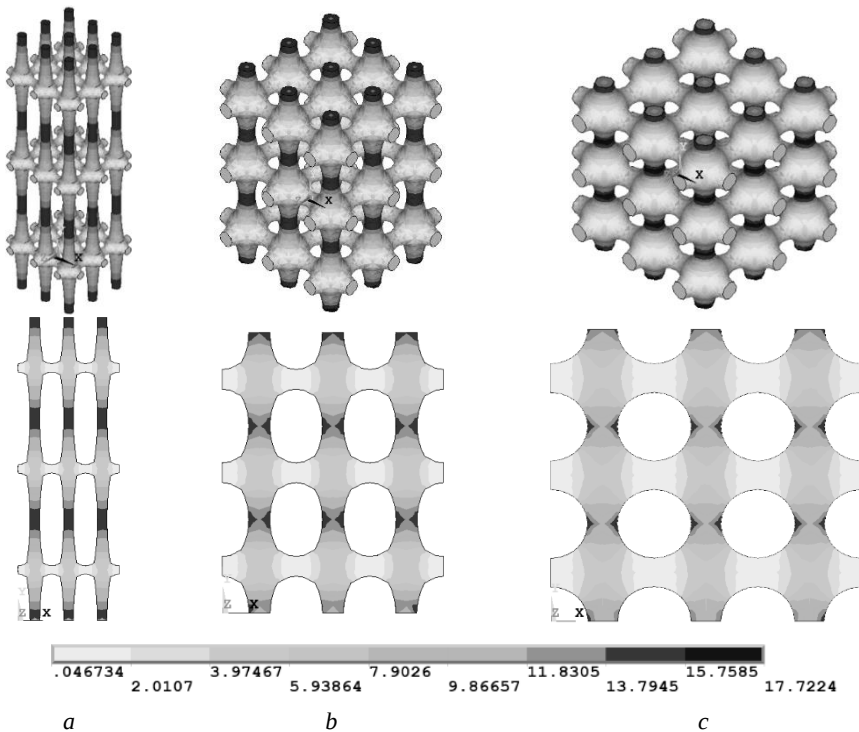


Рис. 10. Распределение напряжений по Мизесу на поверхности и внутри (сечение плоскостью YX) модельных образцов губчатой костной ткани, отличающихся длиной главной трабекулы l_1 (a – 1.31 мм, b – 0.383 мм, c – 0.215 мм) при $l_2 = 0.215$ мм, $t_1 = 0.162$ мм, $t_2 = 0.162$ мм, $\alpha = 0.1$

Fig. 10. The Mises stress distribution on the surface and within the model samples of cancellous bone tissue (YX-plane section) having different lengths of the main trabecula l_1 ((a) 1.31, (b) 0.383, and (c) 0.215 mm) at $l_2 = 0.215$ mm, $t_1 = 0.162$ mm, $t_2 = 0.162$ mm, and $\alpha = 0.1$

Распределение компонент нормальных осевых деформаций ϵ_x , представленное на рис. 11, показывает, что наибольшие сжимающие деформации принадлежат главным трабекулам. Для образцов с короткими главными трабекулами ($l_1 = 0.215$ мм) наибольшие осевые деформации локализуются в приповерхностных слоях главных трабекул, равномерно распределяясь по толщине средней части главных трабекул

и уменьшаясь в значении с увеличением длины главной трабекулы ($l_1 = 1.31$ мм). Наибольшие растягивающие деформации принадлежат второстепенным трабекулам.

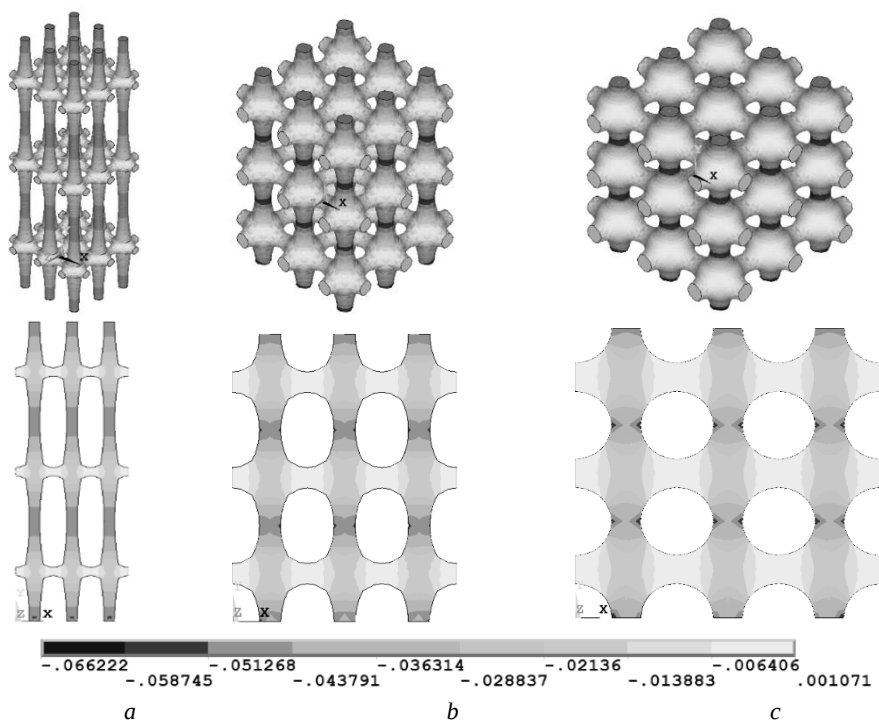


Рис. 11. Распределение нормальных деформаций ε_y на поверхности и внутри (сечение плоскостью YX) модельных образцов губчатой костной ткани, отличающихся длиной главной трабекулы l_1 (a – 1.31 мм, b – 0.383 мм, c – 0.215 мм) при $l_2 = 0.215$ мм, $t_1 = 0.162$ мм, $t_2 = 0.162$ мм, $\alpha = 0.1$

Fig. 11. Distribution of normal strains ε_y on the surface and within the model samples of cancellous bone tissue (YX-plane section) having different lengths of the main trabecula l_1 ((a) 1.31, (b) 0.383, and (c) 0.215 mm) at $l_2 = 0.215$ mm, $t_1 = 0.162$ mm, $t_2 = 0.162$ mm, and $\alpha = 0.1$

Распределение нормальных деформаций ε_x показывает, что наибольшие растягивающие деформации ε_x для образцов с короткими главными трабекулами ($l_1 = 0.215$ мм) локализуются в приповерхностных слоях центральной части главных трабекул, уменьшаются в значениях и более равномерно распределяются по толщине центральной части главных трабекул с увеличением длины главных трабекул ($l_1 = 1.31$ мм) (рис. 12). Подобная картина наблюдается для напряжения ε_z в сечении образца плоскостью YZ. Сравнивая значения нормальных деформаций ε_x , ε_y , ε_z можно сделать вывод, что наибольшими растягивающими нормальными деформациями являются деформации ε_z , ε_x , а наибольшими сжимающими – ε_y . Таким образом, опираясь на теорию наибольших нормальных деформаций, можно предположить, что зарождение трещин в образцах с короткими главными трабекулами может начаться раньше в приповерхностных слоях главных трабекул, чем в образцах с длинными главными трабекулами, в которых трещины могут занять всю толщу материала главной трабекулы.

На рис. 13, *a* представлены графики зависимости эффективного продольного модуля упругости образца губчатой костной ткани с разным минеральным содержанием от длины главной трабекулы. Представленные графики показывают степенную зависимость продольного модуля упругости образцов губчатой костной ткани от длины главной трабекулы. Увеличение массовой доли минералов в костной ткани α приводит к увеличению значения продольного модуля упругости. Увеличение массовой доли минералов с 0.1 до 0.4 (в 4 раза) приводит к увеличению продольного модуля упругости образцов губчатой кости независимо от длины главной трабекулы в 4.8 раза. С увеличением длины главных трабекул губчатой костной ткани эффективный продольный модуль упругости образца кости снижается. Увеличение длины главных трабекул губчатой костной ткани с 0.215 до 1.31 мм (в 6 раз) приводит к уменьшению значения модуля упругости в 1.2 раза независимо от массовой доли минералов в кости. Полученные значения продольного модуля упругости модельных фрагментов губчатой костной ткани не противоречат экспериментальным литературным данным [5–7, 17].

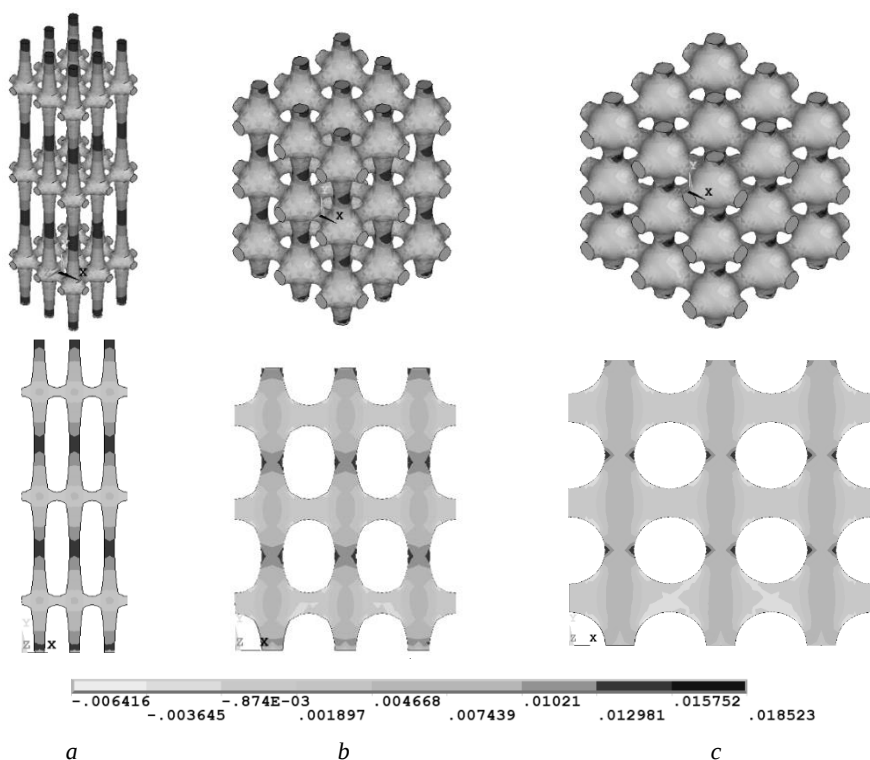


Рис. 12. Распределение нормальных деформаций ϵ_x на поверхности и внутри (сечение плоскостью YX) модельных образцов губчатой костной ткани, отличающихся длиной главной трабекулы l_1 (*a* – 1.31 мм, *b* – 0.383 мм, *c* – 0.215 мм) при $l_2 = 0.215$ мм, $t_1 = 0.162$ мм, $t_2 = 0.162$ мм, $\alpha = 0.1$

Fig. 12. Distribution of normal strains ϵ_x on the surface and within the model samples of cancellous bone tissue (YX-plane section) having different lengths of the main trabecula l_1 (*a*) 1.31, (*b*) 0.383, and (*c*) 0.215 mm) at $l_2 = 0.215$ mm, $t_1 = 0.162$ mm, $t_2 = 0.162$ mm, and $\alpha = 0.1$

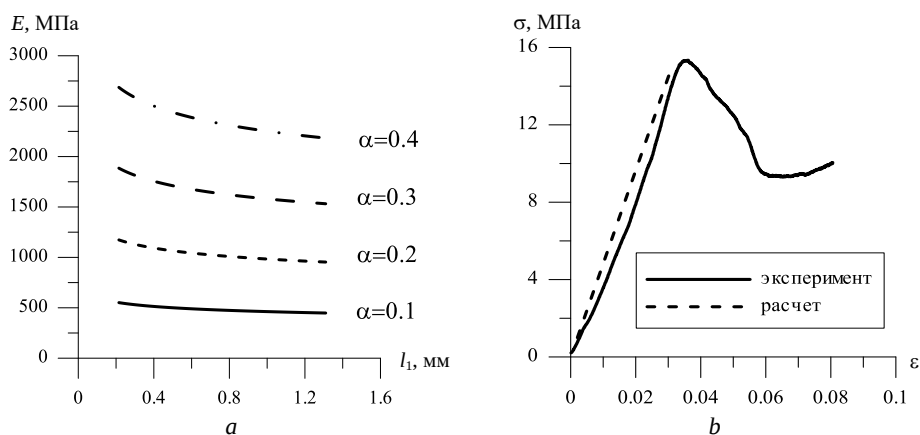


Рис. 13. Зависимость эффективного продольного модуля упругости образца губчатой костной ткани с разным минеральным содержанием от длины главной трабекулы ($l_2 = 0.215$ мм, $t_1 = 0.162$ мм, $t_2 = 0.162$ мм) (а), деформационный отклик образца природной костной ткани и модельного образца при одноосном сжатии (б)

Fig. 13. (a) Effective longitudinal modulus of elasticity of the cancellous bone sample with different mineral content as a function of the main trabecula length ($l_2 = 0.215$ mm, $t_1 = 0.162$ mm, $t_2 = 0.162$ mm) and (b) deformation response of the natural bone tissue sample and model sample under uniaxial compression

Модуль упругости модельного образца губчатой костной ткани, повторяющего структуру лабораторного образца (см. рис. 2–4), был определен согласно объемным долям фрагментов кости с разной длиной главных трабекул и массовой долей минералов $\alpha = 0.1$, участвовавших в повторении структуры лабораторного образца, и равняется 482.12 МПа. На рис. 13, б представлены сравнения графиков нагружения при одноосном сжатии образца природной губчатой костной ткани и модельного образца.

Заключение

В результате проведенного исследования получены следующие основные результаты и выводы.

Внутренняя структура губчатой костной ткани, а именно взаимодействие друг с другом главных и второстепенных трабекул, определяет деформационный отклик образцов в трех взаимно перпендикулярных направлениях при осевом сжатии, проявляющийся в разной мере в зависимости от структурных параметров и массовой доли минералов трабекул. Наибольшие сжимающие напряжения σ_y и деформации ϵ_y принадлежат главным трабекулам, а наибольшие растягивающие – второстепенным трабекулам.

Для образцов с короткими главными трабекулами ($l_1 = 0.215$ мм) наибольшие нормальные деформации и напряжения по Мизесу локализуются в приповерхностных слоях главных трабекул, равномерно распределяются по толщине средней части главных трабекул и уменьшаются в значении с увеличением длины главной трабекулы ($l_1 = 1.31$ мм). Увеличение длины главных трабекул губчатой костной ткани с 0.215 до 1.31 мм (в 6 раз) приводит к уменьшению значения мо-

дуля упругости в 1.2 раза независимо от массовой доли минералов в кости. Увеличение массовой доли минералов с 0.1 до 0.4 (в 4 раза) приводит к увеличению продольного модуля упругости образцов губчатой кости независимо от длины главной трабекулы в 4.8 раза.

Список источников

1. *Avrunin A.S., Tses E.A.* The birth of a new scientific field – biomechanics of the skeleton. Julius Wolff and his work “Das Gesetz der Transformation der Knochen” // History of Medicine. 2016. V. 3 (4). P. 447–461. doi: 10.17720/2409-5834.v3.4.2016.36q
2. *Mellon S.J., Tanner K.E.* Bone and its adaptation to mechanical loading: a review // International Materials Reviews. 2012. V. 57 (5). P. 235–255.
3. *Keaveny T.M., Morgan E.F., Yeh O.C.* Biomedical Engineering and Design Handbook / ed. by M. Kutz. New York : McGraw-Hill, 2009.
4. *Cowin S.C.* Bone Mechanics Handbook. 2nd edition. New York : CRC Press, 2001.
5. *Rosa N., Moura M.F.S.F., Olhero S., Simoes R., Magalhães F.D., Marques A.T., Ferreira J.P.S., Reis A.R., Carvalho M., Parente M.* Bone: An Outstanding Composite Material // Applied Sciences. 2022. V. 12 (7). Art. 3381. doi: 10.3390/app12073381
6. *Novitskaya E. et al.* Recent advances on the measurement and calculation of the elastic moduli of cortical and trabecular bone: a review // Theoretical and Applied Mechanics. 2011. V. 38 (3). P. 209–297. doi: 10.2298/TAM1103209N
7. *Orava H. et al.* Changes in subchondral bone structure and mechanical properties do not substantially affect cartilage mechanical responses – A finite element study // Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials. 2022. V. 128. Art. 105129. doi: 10.1016/j.jmbbm.2022.105129
8. *Lee T. et al.* Fast tool evaluation of iliac crest tissue elastic properties using the reduced-basis methods // Journal of Biomechanical Engineering. 2010. V. 132. Art. 121009. doi: 10.1115/1.4001254
9. *Xi L. et al.* Separating effects of bone-quality changes at multiple scales in steroid-induced osteoporosis: Combining multiscale experimental and modelling approaches // Mechanics of Materials. 2021. V. 157. Art. 103821. doi: 10.1016/j.mechmat.2021.103821
10. *Lovrenić-Jugović M., Tonković Z., Skozrit I.* Experimental and numerical investigation of cyclic creep and recovery behavior of bovine cortical bone // Mechanics of Materials. 2020. V. 146. Art. 103407. doi: 10.1016/j.mechmat.2020.103407
11. *Lubarda V.A., Novitskaya E.E., Kittrick J.Mc., Bodde S.G., Chen P.Y.* Elastic properties of cancellous bone in terms of elastic properties of its mineral and protein phases with application to their osteoporotic degradation // Mechanics of Materials. 2012. V. 44. P. 139–150. doi: 10.1016/j.mechmat.2011.06.005
12. *Kolmakova T.* Computer modeling of the structure of the cortical and trabecular bone tissue // AIP Conference Proceedings. 2015. V. 1683. Art. 020087. doi: 10.1063/1.4932777
13. *Lastovkina Y.N., Kolmakova T.V.* Computer modelling of the microstructure of the trabecular bone fragments for the study of stress-strain state // IOP Publishing: Journal of Physics. Conference Series. 2016. V. 769. Art. 012020. doi: 10.1088/1742-6596/769/1/012020.
14. *Dagan D., Be'ery M., Gefen A.* Single-trabecula building block for large-scale finite element models of cancellous bone // Med. Biol. Eng. Comput. 2004. V. 42. P. 549–556. doi: 10.1007/BF02350998
15. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов / пер. с англ. А.И. Бейля, Н.П. Жмудя; под ред. Ю.М. Тарнопольского. М. : Мир, 1982. 334 с.
16. *Cyganik L., Binkowski M., Kokot G., Rusin T., Popik P., Bolechala F., Nowak R., Wróbel Z., John A.* Prediction of Young's modulus of trabeculae in microscale using macro-scale's relationships between bone density and mechanical properties // Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials. 2014. V. 36. P. 120–134. doi: 10.1016/j.jmbbm.2014.04.011

17. Carter Dennis R., Schwab Greg H., Dan Spengler M. Tensile Fracture of Cancellous Bone // *Acta Orthopaedica Scandinavica*. 1980. V. 51. P. 733–741. doi: 10.3109/17453678008990868

References

1. Avrunin A.S., Tses E.A. (2016) The birth of a new scientific field — biomechanics of the skeleton. Julius Wolff and his work “Das Gesetz der Transformation der Knochen”. *History of Medicine*. 3(4). pp. 447–461. doi: 10.17720/2409-5834.v3.4.2016.36q
2. Mellon S.J., Tanner K.E. (2012) Bone and its adaptation to mechanical loading: a review. *International Materials Reviews*. 57(5). pp. 235–255. doi: 10.1179/1743280412Y.0000000008
3. Keaveny T.M., Morgan E.F., Yeh O.C. (2009) *Biomedical Engineering and Design Handbook*. New York: McGraw-Hill.
4. Cowin S.C. (2001) *Bone Mechanics Handbook*. 2nd edition. New York: CRC Press.
5. Rosa N., Moura M.F.S.F., Olhero S., Simoes R., Magalhães F.D., Marques A.T., Ferreira J.P.S., Reis A.R., Carvalho M., Parente M. (2022) Bone: an outstanding composite material. *Applied Sciences*. 12(7). Article 3381. pp. 1–15. doi: 10.3390/app12073381
6. Novitskaya E., Chen P.Y., Hamed E., Li J., Lubarda V.A., Jasiuk I., Mckittrick J. (2011) Recent advances on the measurement and calculation of the elastic moduli of cortical and trabecular bone: a review. *Theoretical and Applied Mechanics*. 38(3). pp. 209–297. doi: 10.2298/TAM1103209N
7. Orava H., Huang L., Ojanen S.P., Mäkelä J.T.A., Finnilä M.A.J., Saarakkala S., Herzog W., Korhonen R.K., Töyräs J., Tanska P. (2022) Changes in subchondral bone structure and mechanical properties do not substantially affect cartilage mechanical responses – A finite element study. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 128. Article 105129. pp. 1–15. doi: 10.1016/j.jmbbm.2022.105129
8. Lee T., Garlapati R.R., Lam K., Lee P.V., Chung Y.S., Choi J.B., Vincent T.B., Das De S. (2010) Fast tool evaluation of iliac crest tissue elastic properties using the reduced-basis methods. *Journal of Biomechanical Engineering*. 132. Article 121009. pp. 1–8. doi: 10.1115/1.4001254
9. Xi L., Barbieri E., Wang P., Wu W., Gupta H. (2021) Separating effects of bone-quality changes at multiple scales in steroid-induced osteoporosis: Combining multiscale experimental and modelling approaches. *Mechanics of Materials*. 157. Article 103821. pp. 1–15. doi: 10.1016/j.mechmat.2021.103821
10. Lovrenić-Jugović M., Tonković Z., Skozrit I. (2020) Experimental and numerical investigation of cyclic creep and recovery behavior of bovine cortical bone. *Mechanics of Materials*. 146. Article 103407. pp. 1–14. doi: 10.1016/j.mechmat.2020.103407
11. Lubarda V.A., Novitskaya E.E., Kittrick J.Mc., Bodde S.G., Chen P.Y. (2012) Elastic properties of cancellous bone in terms of elastic properties of its mineral and protein phases with application to their osteoporotic degradation. *Mechanics of Materials*. 44. pp. 139–150. doi: 10.1016/j.mechmat.2011.06.005
12. Kolmakova T. (2015) Computer modeling of the structure of the cortical and trabecular bone tissue. *AIP Conference Proceedings*. 1683. Article 020087. pp. 1–4. doi: 10.1063/1.4932777
13. Lastovkina Y.N., Kolmakova T.V. (2016) Computer modelling of the microstructure of the trabecular bone fragments for the study of stress-strain state. *IOP Publishing: Journal of Physics: Conference Series*. 769. Article 012020. pp. 1–4. doi: 10.1088/1742-6596/769/1/012020
14. Dagan D., Be'ery M., Gefen A. (2004) Single-trabecula building block for large-scale finite element models of cancellous bone. *Medical & Biological Engineering & Computing*. 42. pp. 549–556. doi: 10.1007/BF02350998
15. Christensen R.M. (1979) *Mechanics of Composite Materials*. New York: Wiley.
16. Cyganik Ł., Binkowski M., Kokot G., Rusin T., Popik P., Bolechała F., Nowak R., Wróbel Z., John A. (2014) Prediction of Young's modulus of trabeculae in microscale using macro-scale's relationships between bone density and mechanical properties. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 36. pp. 120–134. doi: 10.1016/j.jmbbm.2014.04.011

17. Carter D.R., Schwab G.H., Spengler D.M. (1980) Tensile fracture of cancellous bone. *Acta Orthopaedica Scandinavica*. 51. pp. 733–741. doi: 10.3109/17453678008990868

Сведения об авторах:

Марченко Екатерина Сергеевна – доктор физико-математических наук, доцент, заведующая лабораторией медицинских материалов и имплантатов с памятью формы Сибирского физико-технического института, заведующая кафедрой прочности и проектирования физико-технического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: 89138641814@mail.ru

Чайковская Татьяна Витальевна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прочности и проектирования физико-технического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: kolmakova@ftf.tsu.ru

Information about the authors:

Marchenko Ekaterina S. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: 89138641814@mail.ru

Chaykovskaya Tat'yana V. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kolmakova@ftf.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 09.11.2022; принята к публикации 01.06.2023

The article was submitted 09.11.2022; accepted for publication 01.06.2023

Научная статья

УДК 531.351

doi: 10.17223/19988621/83/12

Стабилизированный ротатор и основы его теории

Игорь Павлович Попов

Курганский государственный университет, Курган, Россия, ip.popow@yandex.ru

Аннотация. Определены механический аналог циклотронного движения и схема соответствующего устройства – стабилизированного ротатора. Установлено, что собственная частота вращения стабилизированного ротатора строго фиксирована (не зависит ни от момента инерции, ни от момента импульса) и совпадает с собственной частотой колебаний маятника с идентичными параметрами. Разработаны основы теории стабилизированного ротатора.

Ключевые слова: ротатор, маятник, частота, стабилизация, выбег, энергия, момент импульса, циклотронное движение

Для цитирования: Попов И.П. Стабилизированный ротатор и основы его теории // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 143–150. doi: 10.17223/19988621/83/12

Original article

Stabilized rotator and foundations of its theory

Igor' P. Popov

Kurgan State University, Kurgan, Russian Federation, ip.popow@yandex.ru

Abstract. The key circumstance for the possibility of generalizing cyclotron motion to mechanics is that the Lagrangian of an electron moving across a constant magnetic field is twice its kinetic energy. The aim of this work is to find a mechanical analog of the cyclotron motion and to determine the scheme of the corresponding device referred to as a stabilized rotator. At zero torque in the stationary mode, the rotational speed of the stabilized rotator cannot be arbitrary and takes on a single value. The features of the stabilized rotator are the identity of the formula for the frequency of rotation to the formula for the frequency of a spring pendulum, the equality of kinetic and potential energies, and the resulting equality of the radius of rotation of the load to the magnitude of the spring deformation. Just as the frequency does not coincide with the natural frequency during forced oscillations of the pendulum, the rotation frequency of the stabilized rotator under loading does not coincide with the natural rotation frequency. The stabilized rotator can be used to control the natural frequency of the radial oscillator, although in this capacity it may have a strong competition from mechatronic systems. On the contrary, as a rotation stabilizer, its competitive capabilities are undeniable and determined by the extreme simplicity of the design.

Keywords: rotator, pendulum, frequency, stabilization, run-out, energy, angular momentum, cyclotron motion

For citation: Popov, I.P. (2023) Stabilized rotator and foundations of its theory. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 143–150. doi: 10.17223/19988621/83/12

Введение

Механические и электромагнитные явления и процессы во многих случаях математически изоморфны [1, 2]. Это дает возможность обобщать достижения одной научной специальности на другую. В этом смысле представляет интерес циклотронное движение электрического заряда [3–5], которое характеризуется *фиксированной частотой вращения*. Это следует из баланса сил:

$$F = qvB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \frac{qB}{m}r = \omega r \Rightarrow \omega = \frac{qB}{m}.$$

Здесь q – величина электрического заряда, v – тангенциальная скорость заряда, B – магнитная индукция, m – масса заряженной частицы, r – радиус циклотронного движения, ω – частота вращения.

Частота действительно не зависит ни от скорости, ни от радиуса.

Ключевым обстоятельством для возможности обобщения циклотронного движения на механику является то, что лагранжиан электрона, движущегося поперек постоянного магнитного поля, вдвое больше его кинетической энергии:

$$L = \frac{mv^2}{2} + e(\mathbf{v}, \mathbf{A}).$$

Векторный потенциал магнитного поля равен

$$A = \frac{1}{2}[\mathbf{B}, \mathbf{r}].$$

При этом $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$. Таким образом,

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{q^2 B^2 r^2}{2m}.$$

Второе слагаемое равно

$$\frac{q^2 B^2 r^2}{2m} = \frac{q^2 B^2}{2m} \frac{m^2 v^2}{q^2 B^2} = \frac{mv^2}{2},$$

$$L = 2 \frac{mv^2}{2}.$$

Цель работы – нахождение механического аналога циклотронного движения и определение схемы соответствующего устройства, которое уместно назвать стабилизированным ротатором.

Задачей исследования является установление обстоятельств, составляющих его новизну, таких как обусловленность стабилизации частоты вращения ротатора (и заряда при циклотронном движении) равенством кинетической и потенциальной энергий, зависимость собственной частоты вращения стабилизированного ротатора от его конструктивных параметров, влияние изменения момента им-

пульса на радиус и тангенциальную скорость ротатора, особенности динамики стабилизированного ротатора при вынужденном вращении с постоянной частотой и т.д.

Синтез стабилизированного ротатора

Из ключевого обстоятельства, определяющего возможность обобщения циклотронного движения на механику, заключающегося в том, что лагранжиан электрона вдвое больше его кинетической энергии, что применительно к стабилизированному ротатору следует трактовать как равенство кинетической и потенциальной энергий, необходимо следует, что в состав стабилизированного ротатора должны входить элементы, которые в состоянии запасаать оба этих вида энергии, а именно *груз* (массой m) и *пружина* (с коэффициентом упругости k).

В соответствии с характером циклотронного движения и, соответственно, ротатора, необходимо имеют место *радиус* вращения (r) и *циклическая частота* (ω).

Из равенства энергий следует

$$\frac{k(\Delta x)^2}{2} = \frac{mv^2}{2} = \frac{mr^2\omega^2}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{\Delta x}{r}.$$

Здесь Δx – величина абсолютной деформации пружины.

Неизменность циклической частоты обеспечивается очевидным ключевым условием

$$\Delta x = r.$$

Установленные необходимые обстоятельства определяют принципиальную схему стабилизированного ротатора, которая представлена на рис. 1.

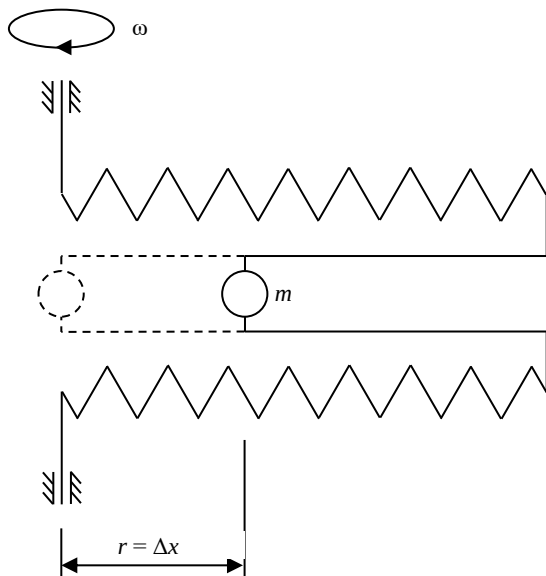


Рис. 1. Стабилизированный ротатор

Fig. 1. Stabilized rotator

Собственная частота вращения стабилизированного ротатора

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1)$$

строго фиксирована (не зависит ни от момента инерции, ни от момента импульса) и замечательным образом совпадает с собственной частотой колебаний маятника с идентичными параметрами.

Подобно классической теории пружинного маятника здесь и далее масса пружин и креплений не учитывается.

Кинематика стабилизированного ротатора

Момент импульса стабилизированного ротатора равен

$$L = J\omega_0 = mr^2\omega_0 = mr^2\sqrt{\frac{k}{m}} = r^2\sqrt{mk}.$$

Здесь J – момент инерции, $x_\omega = \sqrt{mk}$ – волновой реактанс [6], $r = \frac{v}{\omega_0}$.

$$L = r^2 x_\omega = \frac{v^2}{\omega_0^2} x_\omega = v^2 \frac{m}{k} \sqrt{mk} = \frac{m}{\omega_0} v^2.$$

При изменении момента импульса изменяются радиус и тангенциальная скорость (частота вращения при этом не меняется и равна собственной).

Положению груза, при котором его центр масс совпадает с осью вращения, соответствует состояние неопределенного равновесия. При вращении груз равновероятно может отклониться в любую из двух сторон, и, соответственно, может развиваться как сжатие, так и растяжение пружины.

Состояние неопределенного равновесия можно исключить, обеспечив начальное (статическое) смещение груза r_0 и равную ему начальную деформацию пружины.

Нестационарный режим стабилизированного ротатора

Стабилизированный ротатор может быть представлен суперпозицией двух ортогональных пружинных маятников в соответствии с формулой

$$\mathbf{r}(t) = i\mathbf{r} \cos \varphi(t) + j\mathbf{r} \sin \varphi(t).$$

Это дает возможность использовать хрестоматийные решения для вынужденных колебаний маятника при описании нестационарного режима стабилизированного ротатора, а именно:

$$\mathbf{r}(t) = i \left[r_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega_1^2}\right) \right] + \\ + j \left[r_0 e^{-\delta t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \sin\left(\omega t - \arctg \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega_1^2}\right) \right].$$

Здесь r_0 – начальный радиус, $\delta = R/(2m)$ – коэффициент затухания, R – коэффициент сопротивления, $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \delta^2 > 0$, ϕ_1 – начальная фаза, ω – частота вынужденных колебаний, $x_0 = F/(2m)$, F – возмущающая сила.

По мере затухания собственных колебаний стабилизированный ротатор будет вращаться с циклической частотой ω , а его радиус примет значение

$$r = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} = \frac{2mF}{R\sqrt{R^2 + 16m^2\omega^2}}.$$

При $\omega_1^2 \leq 0$ происходит аperiодическое затухание.

Подобно тому как при вынужденных колебаниях маятника частота не совпадает с собственной частотой, частота вращения стабилизированного ротатора при нагружении не совпадает с собственной частотой вращения [7].

Второе замечательное свойство стабилизированного ротатора

(Первым являются фиксированная собственная частота вращения (1) и ее совпадение с собственной частотой колебаний маятника).

При *вынужденном* вращении стабилизированного ротатора с постоянной частотой

$$\omega = a\omega_0$$

(a – безразмерный коэффициент) его радиальная динамика определяется уравнением

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \left(\omega^2 - \frac{k}{m} \right) r = (a^2\omega_0^2 - \omega_0^2) r = -(1 - a^2) \omega_0^2 r.$$

В зависимости от значения a возможны три варианта.

1. При $a < 1$ имеет место дифференциальное уравнение свободных гармонических незатухающих колебаний с собственной частотой

$$\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - a^2}.$$

Таким образом, стабилизированный ротатор доставляет возможность управлять собственной частотой колебаний радиального осциллятора.

2. При $a = 1$ $\frac{d^2r}{dt^2} = 0$, $\frac{dr}{dt} = V = \text{const}$, $r = r_{01} + Vt$ колебания не происходят.

3. При $a > 1$ $\frac{d^2r}{dt^2} = (a^2 - 1)\omega_0^2 r$, $r = r_{01} e^{(\omega_0 \sqrt{a^2 - 1})t}$ колебания не происходят.

Затухание колебаний в стабилизированном ротаторе принципиально не отличается от затухания в обычном маятнике.

Выбег ротатора в стабилизированном режиме

Минимальная полная энергия стабилизированного ротатора в стабилизированном режиме соответствует статическому смещению груза r_0 :

$$W_0 = K_0 + U_0 = 2K_0 = 2U_0 = kr_0^2.$$

Максимальная полная энергия теоретически не ограничена, а практически определяется конструктивно установленным максимальным радиусом r_m :

$$W_m = k r_m^2.$$

Пусть средняя за выбег мощность диссипативных потерь равна P . Тогда время выбега составит

$$\tau = \frac{W_m - W_0}{P} = k \frac{r_m^2 - r_0^2}{P}.$$

Очевидно, что чем меньше P , тем меньше отклонение частоты вращения ω от собственной ω_0 .

Заключение

Заявленная цель работы достигнута. Механический аналог циклотронного движения определен. Им является стабилизированный ротатор, обладающий фиксированной частотой вращения, не зависящей от момента импульса и момента инерции.

Это означает, что при нулевом вращающем моменте в стационарном режиме частота вращения стабилизированного ротатора не может быть произвольной и принимает единственное значение.

Другими особенностями стабилизированного ротатора являются идентичность формулы частоты вращения формуле частоты пружинного маятника, равенство кинетической и потенциальной энергий и вытекающее из этого равенство радиуса вращения груза величине деформации пружины.

Стабилизированный ротатор может использоваться для управления собственной частотой колебаний радиального осциллятора, хотя в этом качестве он может иметь сильную конкуренцию со стороны мехатронных систем [8].

Напротив, в качестве стабилизатора вращений его конкурентные возможности неоспоримы и определяются предельной простотой конструкции.

Список источников

1. Попов И.П. Реактансы и сассептансы механических систем // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 70. С. 64–75. doi: 10.17223/19988621/70/6
2. Абдуллаев Я.Р., Ханахмедова С.А. Исследование динамических процессов стартер-генератора методом электромеханической аналогии // Известия вузов. Электромеханика. 2018. Т. 61, № 1. С. 32–39. doi: 10.17213/0136-3360-2018-1-32-39
3. Опарина Ю.С., Савилов А.В. Спонтанное циклотронное излучение плотного электронного сгустка // Известия Российской академии наук. Сер. физическая. 2018. Т. 82, № 12. С. 1771–1774. doi: 10.1134/S0367676518120311
4. Аскинази Л.Г., Абдуллина Г.И., Белокуров А.А., Блехштейн М.Д., Жубр Н.А., Корнев В.А., Крикунов С.В., Лебедев С.В., Разуменко Д.В., Смирнов А.И., Тукачинский А.С. Спектр ионно-циклотронного излучения из плазмы токамака туман-3м при инжекционном нагреве // Письма в Журнал технической физики. 2018. Т. 44, № 22. С. 48–56. doi: 10.21883/PJTF.2018.22.46921.17486
5. Минашин П.В., Кукушкин А.Б. Спектральная интенсивность электронного циклотронного излучения, выходящего из плазмы токамака-реактора на первую стенку // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Термоядерный синтез. 2019. Т. 42, № 4. С. 14–20. doi: 10.21517/0202-3822-2019-42-4-14-20

6. Popov I.P. Application of the Symbolic (Complex) Method to Study Near-Resonance Phenomena // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2020. V. 49 (12). P. 1053–1063. doi: 10.3103/S1052618820120122
7. Антонов Е.А., Меркурьев И.В., Подалков В.В. Влияние нелинейной жесткости упругих элементов на динамику двухмассового микромеханического гироскопа L–L-типа в режиме вынужденных колебаний // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2019. № 57. С. 53–61. doi: 10.17223/19988621/57/4
8. Томилин А.К., Байзакова Г.А. Управление частотами колебаний упругих электромеханических систем // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2012. № 3 (19). С. 87–92.

References

1. Popov I.P. (2021) Reaktansy i sasseptansy mekhanicheskikh sistem [Reactances and susceptances of mechanical systems]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 70. pp. 64–75. doi: 10.17223/19988621/70/6
2. Abdullaev Ya.R., Khanakhmedova S.A. (2018) Issledovanie dinamicheskikh protsessov starter-generatora metodom elektromekhanicheskoy analogii [Investigation of the dynamic processes of the starter-generator by the method of electromechanical analogy]. *Izvestiya vysshihkh uchebnykh zavedeniy. Elektromekhanika – Bulletin of Higher Educational Institutions. Electromechanics*. 61(1). pp. 32–39. doi: 10.17213/0136-3360-2018-1-32-39
3. Oparina Yu.S., Savilov A.V. (2018) Spontannoe tsiklotronnoe izluchenie plotnogo elektronno-go sgustka [Spontaneous cyclotron radiation of a dense electron bunch]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Seriya fizicheskaya – Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics*. 82(12). pp. 1771–1774. doi: 10.1134/S0367676518120311
4. Askinazi L.G., Abdullina G.I., Belokurov A.A., Blekhshteyn M.D., Zhubr N.A., Kornev V.A., Krikunov S.V., Lebedev S.V., Razumenko D.V., Smirnov A.I., Tukachinskiy A.S. (2018) Spektr ionno-tsiklotronnogo izlucheniya iz plazmy tokamaka tuman-3m pri inzhektionsionnom nagreve [The spectrum of ion cyclotron emission from neutral beam injection heated plasma on the TUMAN-3M Tokamak]. *Pis'ma v Zhurnal tekhnicheskoy fiziki – Technical Physics Letters*. 44(22). pp. 48–56. doi: 10.21883/PJTF.2018.22.46921.17486
5. Minashin P.V., Kukushkin A.B. (2019) Spektral'naya intensivnost' elektronno-go tsiklotronnogo izlucheniya, vykhodyashchego iz plazmy tokamaka-reaktora na pervuyu stenu [Spectral intensity of electron cyclotron radiation emerging from the plasma to the first wall in Tokamak-reactor]. *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Seriya: Termoyadernyy sintez – Problems of Atomic Science and Technology. Series: Thermonuclear Fusion*. 42(4). pp. 14–20. doi: 10.21517/0202-3822-2019-42-4-14-20
6. Popov I.P. (2020) Application of the symbolic (complex) method to study near-resonance phenomena. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 49(12). pp. 1053–1063. doi: 10.3103/S1052618820120122
7. Antonov E.A., Merkur'ev I.V., Podalkov V.V. (2019) Vliyaniye nelineynoy zhestkosti uprugikh elementov na dinamiku dvukhmassovogo mikromekhanicheskogo giroskopa L–L-tipa v rezhime vynuzhdennykh kolebaniy [Influence of nonlinear rigidity of elastic elements on the L–L type two-mass micromechanical gyroscope dynamics in a forced-oscillation regime]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 57. pp. 54–62. doi: 10.17223/19988621/57/4
8. Tomilin A.K., Bayzakova G.A. (2012) Upravleniye chastotami kolebaniy uprugikh elektromekhanicheskikh sistem [Control over oscillation frequencies of resilient electromechanical systems]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3. pp. 87–92.

Сведения об авторе:

Попов Игорь Павлович – кандидат технических наук старший преподаватель Курганского государственного университета, Курган, Россия. E-mail: ip.popow@yandex.ru

Information about the author:

Popov Igor' P. (Candidate of Technical Sciences, Senior Lecturer, Kurgan State University, Kurgan, Russian Federation). E-mail: ip.popow@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 22.07.2022; принята к публикации 01.06.2023

The article was submitted 22.07.2022; accepted for publication 01.06.2023

Научная статья

УДК 523.6:52–17

doi: 10.17223/19988621/83/13

Влияние формы метеороидов на их динамику: радиационное давление и эффект Пойнтинга–Робертсона

Галина Олеговна Рябова

Томский государственный университет, Томск, Россия, galina.ryabova@mail.tsu.ru

Аннотация. Представлен численный метод получения площади миделева сечения геометрически-простой выпуклой частицы со случайной ориентацией. Площадь миделя является ключевым параметром при вычислении радиационных сил – радиационного давления Солнца и эффекта Пойнтинга–Робертсона – на метеороид. Пробная оценка, полученная для метеороидов потока Геминид массы 0.0003 г, показывает, что при хаотическом вращении метеороидов во время их орбитальной эволюции влияние формы невелико. Если же ось вращения частицы стабилизировалась, то влияние формы может быть существенным.

Ключевые слова: метеороид, площадь миделя, радиационные силы, эффект Пойнтинга–Робертсона, радиационное давление

Благодарности: Исследование выполнено при поддержке Государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 0721-2020-0049). В этом исследовании использовалась система астрофизических данных NASA (NASA ADS).

Для цитирования: Рябова Г.О. Влияние формы метеороидов на их динамику: радиационное давление и эффект Пойнтинга–Робертсона // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 151–165. doi: 10.17223/19988621/83/13

Original article

Influence of the shape of meteoroids on their dynamics: radiation pressure and the Poynting-Robertson effect

Galina O. Ryabova

Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, galina.ryabova@mail.tsu.ru

Abstract. When calculating the evolution of meteoroid orbits, it is necessary to take into account radiation forces in addition to gravitational perturbations: the solar radiation pressure force and the Poynting–Robertson effect. The key parameter for meteoroids in this paper is A/m , which is the area-to-mass ratio of a meteoroid.

In models describing the dynamics of meteoroids, for simplicity, one value of the A/m parameter (for a spherical particle) is used for each model. However, this parameter is invariable during rotation of spherical particles, while it changes for real ones.

Given the modern accuracy of the models, the decision to use a constant value of A/m is justified. However, for future models, knowledge of the distribution of the midsection area of particles of different shapes can be useful. This work is motivated by the lack of studies on the influence of the shape of meteoroids on the structural characteristics of a model meteoroid stream in the literature. The purpose of this work is to fill this gap to some extent. A simple numerical method for obtaining the distribution of the cross-sectional area of a convex particle with a random orientation is proposed. The distributions for a cube, a cylinder, and an ellipsoid of revolution are obtained. A method for generating random numbers corresponding to a given discrete distribution is described. An example of estimating the influence of the Poynting–Robertson effect and solar radiation pressure on the model Geminid shower is given.

Keywords: meteoroid, midsection area, radiation forces, Poynting–Robertson effect, radiation pressure

Acknowledgments: This research was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. 0721-2020-0049). This research has made use of NASA's Astrophysics Data System.

For citation: Ryabova, G.O. (2023) Influence of the shape of meteoroids on their dynamics: radiation pressure and the Poynting–Robertson effect. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 151–165. doi: 10.17223/19988621/83/13

Введение

При вычислении эволюции орбит метеороидов кроме гравитационных возмущений необходимо учитывать радиационные силы: силу радиационного давления Солнца и эффект Пойнтинга–Робертсона (ПР-эффект). Ключевым параметром для метеороидов здесь является A/m – отношение площади миделева сечения метеороида к его массе.

В моделях, исследующих динамику метеороидов, для простоты используется одно значение параметра A/m для каждой модели. Обычно при этом приводят значения плотности и массы (или размера) сферической частицы. Однако сферические частицы при вращении не меняют A/m , а реальные – меняют.

При современной точности моделей решение использовать постоянное значение A/m оправдано. Однако для будущих моделей знание распределения площади миделева сечения частиц разных форм может быть полезным. Мотивацией к данной работе послужило то, что в литературе не удалось найти исследования влияния формы метеороидов на структурные характеристики модельного метеороидного потока.

Настоящая работа предпринята с целью несколько заполнить этот пробел. В ней предложен простой численный метод получения распределения площади поперечного сечения выпуклой частицы со случайной ориентацией. Получены распределения для куба, цилиндра, эллипсоида вращения. Описан метод генерирования случайных чисел, соответствующих данному дискретному распределению. Дан пример оценки влияния ПР-эффекта и радиационного давления Солнца на модельный поток Геминид.

Ниже, если не указано особо, используются единицы системы СГС. Желание автора сохранить устоявшиеся классические обозначения переменных привело

к использованию одного обозначения для различных переменных: например, r обозначает гелиоцентрическое расстояние, радиус сферы и радиус основания цилиндра. К путанице это не приводит, поскольку значение либо очевидно из контекста, либо прямо указано.

Мидель и негравитационные силы

Уравнение движения для частицы, движущейся в радиационном поле Солнца, запишется как [1. Eq. (5)]

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \left(\frac{S}{c} \frac{A}{m} \right) Q_{pr} \left[\left(1 - \frac{V_r}{c} \right) \hat{\mathbf{S}} - \frac{\mathbf{V}}{c} \right]. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{V}$ – скорость, V_r – радиальная скорость, m – масса, A – площадь миделя метеороида; c – скорость света, Q_{pr} – коэффициент рассеяния Ми, $\hat{\mathbf{S}}$ – единичный вектор в направлении падающего излучения, S – плотность потока солнечной энергии на гелиоцентрическом расстоянии r . Следуя Burns и соавт. [1], мы называем торможением (или эффектом) Пойнтинга–Робертсона зависящую от скорости часть (1), а радиационным давлением (иногда его называют световым давлением) – постоянный радиальный член (1).

Формулы для осредненных изменений в большой полуоси a и эксцентриситете e вследствие ПР-эффекта можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle &= -4.8 \times 10^{-8} \frac{A}{m} \frac{2 + 3e^2}{a(1 - e^2)^{3/2}} - 5.15 \times 10^{-16} \psi \hat{U} \frac{A}{m} \frac{2 + e^2}{a(1 - e^2)^{3/2}} \text{ а.е. год}^{-1}, \\ \left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle &= -4.8 \times 10^{-8} \frac{A}{m} \frac{5e}{2a^2(1 - e^2)^{1/2}} - 5.15 \times 10^{-16} \psi \hat{U} \frac{A}{m} \frac{2e}{a^2(1 - e^2)^{1/2}} \text{ год}^{-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь ψ – коэффициент, зависящий от вещества метеороида, $\hat{U}$ – осредненная по орбите скорость солнечного ветра относительно метеороида. Единицы A , m и $\hat{U}$ в единицах СГС [см, г, с], a в а.е. Первые члены правых частей – это изменения, вызванные электромагнитной радиацией [1. Eqs. (47)–(49)], вторые члены – то же самое, но для корпускулярной части ПР-эффекта [2. Eq. (3.17)]. В общем случае ПР-эффект вызывает уменьшение a и e со временем.

Отношение силы радиационного давления (F_{rad}) к силе гравитационного притяжения Солнца (F_{grav}) есть

$$\beta = \frac{F_{rad}}{F_{grav}} = \left(\frac{SA}{cm} \right) Q_{pr} \frac{r^2}{\mu}, \quad (3)$$

где μ – гелиоцентрическая гравитационная постоянная. Сила радиационного давления дает тот же эффект, что и уменьшение массы Солнца в $(1 - \beta)$ раз.

Чтобы дать представление о величине радиационных сил, приведем пример. Пусть орбита родительского тела имеет большую полуось $a = 1.3$ а.е. и эксцентриситет $e = 0.9$. Пусть сферический метеороид массы 0.0003 г и плотности 1 г см⁻³ отделяется от родительского тела в перигелии с нулевой скоростью (что физически неправдоподобно, но необходимо для нашей оценки). Тогда только за счет радиационного давления его большая полуось будет больше на 0.035 а.е., чем большая полуось родительского тела. Но за две тысячи лет эволюции она уменьшится на 0.1 а.е. вследствие ПР-эффекта. Таким образом, эффекты противоборствуют. Подробнее этот вопрос изложен в работе [3. Sect. 3.1].

Метод и результаты

Вкратце метод получения распределения площади поперечного сечения выпуклой частицы со случайной ориентацией можно описать следующим образом. Зададим две прямоугольные системы координат, имеющих общее начало: первая система основная, она неподвижна; вторая система связана с исследуемым телом, она ориентирована случайно. Для вычисления площади проекции тела на одну из координатных плоскостей (например, XY) основной системы применяем метод Монте-Карло. Задав на поверхности тела случайную точку, находим точку, принадлежащую проекции. Повторяем это до тех пор, пока вся область проекции не заполнится точками с заданной плотностью. Вообще говоря, мы можем выбирать случайную точку не только на поверхности, но и внутри тела. Однако такой подход сильно увеличивает время вычислений. Повернув исследуемое тело заданное количество раз (N_{exp}) и, соответственно, вычислив N_{exp} площадей проекции тела A , находим функцию плотности распределения вероятности $f(A)$ и функцию распределения $F(A)$. Подробное описание, формулы и технические детали вынесены в Приложение А.

Метод был опробован на кубе, цилиндре и эллипсоиде. Распределения для трех форм тел приведены на рис. 1. Эти результаты интересны не столько сами по себе, сколько в приложении к задачам метеорной астрономии. Рассмотрим, как влияет форма частиц на их эволюцию на одном конкретном примере.

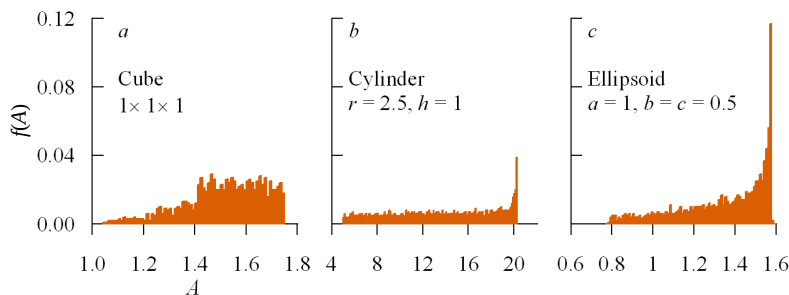


Рис. 1. Функция плотности распределения вероятности $f(A)$ (ось ординат) в зависимости от площади миделя A (ось абсцисс) для трех тел: *a* – куб с ребром, равным 1; *b* – круговой прямой цилиндр с радиусом основания $r = 2.5$ и высотой $h = 1$; *c* – эллипсоид вращения с большей полуосью $a = 1$ и меньшими полуосями $b = c = 0.5$. Единицы длины произвольные

Fig. 1. Probability density function $f(A)$ (ordinate) versus midsection area A (abscissa) for three bodies: (a) cube with the edge equal to 1; (b) circular straight cylinder with the base radius $r = 2.5$ and the height $h = 1$; and (c) ellipsoid of revolution with the semi-major axis $a = 1$ and semi-minor axes $b = c = 0.5$. Units of length are arbitrary

В работе [3] рассмотрена численная модель эволюции метеороидного потока Геминид, состоящая из *сферических* метеороидов пяти фиксированных масс. Возраст потока был принят в 2000 лет. Родительское тело потока – астероид (3200) Фазтон – две тысячи лет назад (начальная эпоха $t_0 = \text{JD } 1720165.2248$) имел элементы орбиты: $a_0 = 1.2738169504$ а.е., $e_0 = 0.9007730431$. Скорость выброса метеороидов определялась по формуле Whipple [4]. Используя те же начальные условия, попробуем оценить, что произойдет с метеороидами массы $m = 0.0003$ г, если они будут иметь не сферическую форму, а форму куба, цилиндра с пропор-

циями $r = 2h$ и эллипсоида с пропорциями: $a, b = c = 0.5a$. В таблице представлены размеры таких метеороидов. Функции $f(A)$ для них показаны на рис. 2.

Размеры метеороидов массы 0.0003 г и плотности 1 г см⁻³

Sphere	Cube	Cylinder	Ellipsoid
$r = 0.041528$ $\bar{A} = 0.005418$	$d = 0.066943$ $\bar{A} = 0.006722$	$r = 0.062035$ $h = 0.024814$ $\bar{A} = 0.008463$	$a = 0.065922$ $b = 0.032961$ $c = 0.032961$ $\bar{A} = 0.005834$

Примечание. В таблице приведены: для сферы радиус r , для куба ребро d , для цилиндра радиус основания r и высота h , для эллипсоида полуоси a, b, c . Для всех тел дана средняя расчетная площадь миделя $\bar{A}$. Единицы [г, см].

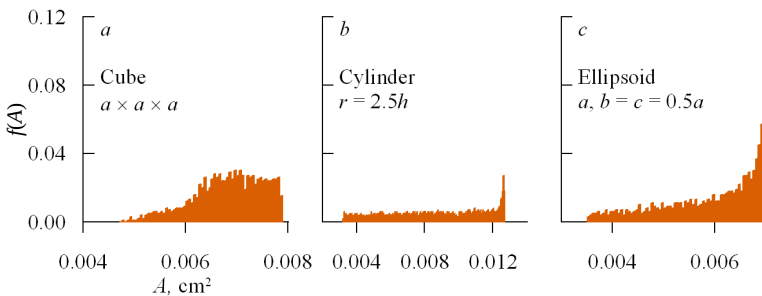


Рис. 2. Функция плотности распределения вероятности $f(A)$ (ось ординат) в зависимости от площади миделя A (ось абсцисс) для тел, размеры которых приведены в таблице:

a – куб, b – цилиндр, c – эллипсоид

Fig. 2. Probability density function $f(A)$ (ordinate) versus midsection area A (abscissa) for the bodies with dimensions given in the table: (a) cube, (b) cylinder, and (c) ellipsoid

Первое, что следует отметить, анализируя рис. 2, где приведена $f(A)$ для этих частиц, – то, что формы распределений совпадают (в статистическом смысле, а не буквально) с соответствующими графиками рис. 1. Так и должно быть, поскольку пропорции тел те же самые. Распределения рис. 2 можно было бы получить из распределений рис. 1, вычислив коэффициенты масштабирования. Цилиндр намеренно выбран плоским, чтобы имитировать метеороиды-хлопья. Заметим, что его средний мидель самый большой из трех тел. Продолговатые метеороиды имитируются эллипсоидом.

Прежде всего оценим влияние радиационного давления и ПР-эффекта без учета других факторов, т.е. скорости выброса и гравитационных возмущений. Для этого рассмотрим первую простую модель: в перигелии родительского тела выпускаем с нулевой скоростью выброса по 100 частиц одной массы и плотности, но различных форм, т.е. всего 400 частиц. Поскольку радиационное давление противодействует притяжению Солнца, немедленно после отделения, т.е. в момент t_0 , большая полуось и эксцентриситет частиц и родительского тела заметно отличаются (см. рис. 3, a). Даже для сферических частиц a возрастает на 0.035 а.е. Темно-серым треугольником на рис. 3, a отмечена цилиндрическая частица со средней площадью миделя $\bar{A}$. Это наибольшая $\bar{A}$ для выбранных форм (см. таблицу). Сферические частицы, как известно, имеют наименьшее $\bar{A}$. Что касается ПР-эффекта, то изменения в элементах орбит показаны на рис. 3, b . Здесь Δa и Δe вычислены

по формулам (2) для возраста потока 2000 лет. Очевидно, что на большом интервале времени действие ПР-эффекта преобладает, а дисперсия в a велика: для цилиндра она составляет 0.18 а.е.

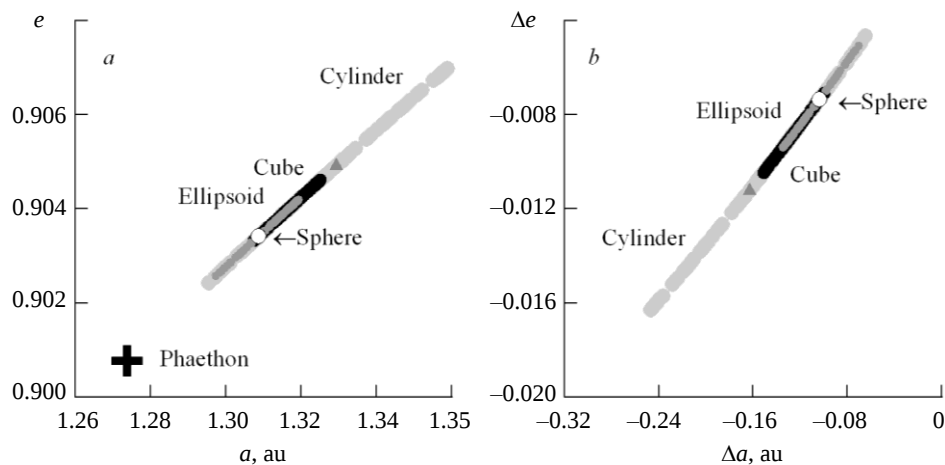


Рис. 3. Влияние негравитационных радиационных эффектов на большую полуось a и эксцентриситет e для одной сотни модельных метеороидов массы 0.0003 г, отделившихся от родительского тела с нулевой скоростью в перигелии. Цилиндрические метеороиды обозначены светло-серыми большими точками, кубические – черными средними точками, эллипсоиды – темно-серыми малыми точками, сферические – белым кружком. Серым треугольником обозначена цилиндрическая частица со средним миделем $\bar{A}$. Все точки располагаются на одной линии, поскольку эффекты не действуют на наклонение орбиты, но величины точек сделаны разными, чтобы было видно наложение. a – орбитальные элементы (a, e) метеороидов в момент времени t_0 , т.е. сразу после их отделения, изменения (a, e) вызваны радиационным давлением Солнца; b – эффект Пойнтинга–Робертсона через 2000 лет эволюции вносит добавки Δa и Δe в элементы орбит

Fig. 3. Influence of non-gravitational radiative effects on semi-major axis a and eccentricity e for one hundred model meteoroids with masses 0.0003 g separated from the parent body with zero velocity at perihelion. Cylindrical meteoroids are indicated by large light grey dots, cubic meteoroids by middle-size black dots, ellipsoids by small dark gray dots, and spherical meteoroids by a white circle. The grey triangle denotes a cylindrical particle with an average midsection $\bar{A}$. All points are in the same line, since the effects do not impact the orbital inclination, but the size of the points is made different so that the overlap is visible. (a) Orbital elements (a, e) of meteoroids at time t_0 , i.e. immediately after their separation. Changes of (a, e) are caused by the radiation pressure of the Sun. (b) The Poynting–Robertson effect adds Δa and Δe to the orbital elements after 2000 years of evolution

Далее рассмотрим вторую, более полную, модель сил [3]. Здесь по 100 метеороидов одной массы и плотности, но различных форм, были выброшены в перигелии родительского тела изотропно. Скорость выброса метеороидов вычислялась по формуле Whipple [4]. Уравнения движения метеороидов были проинтегрированы на 2000 лет вперед от начальной эпохи. Использовался метод Эверхарта 19-го порядка с переменным шагом. Положения планет были взяты из JPL Planetary Development Ephemeris – DE406. Принимались во внимание гравитационные возмущения всех планет, Луны и Плутона, а также радиационное давление Солн-

ца и ПР-эффект вместе с его корпускулярным аналогом. Оказалось, что влияние добавочных факторов весьма существенно (рис. 4), но для потока в целом.

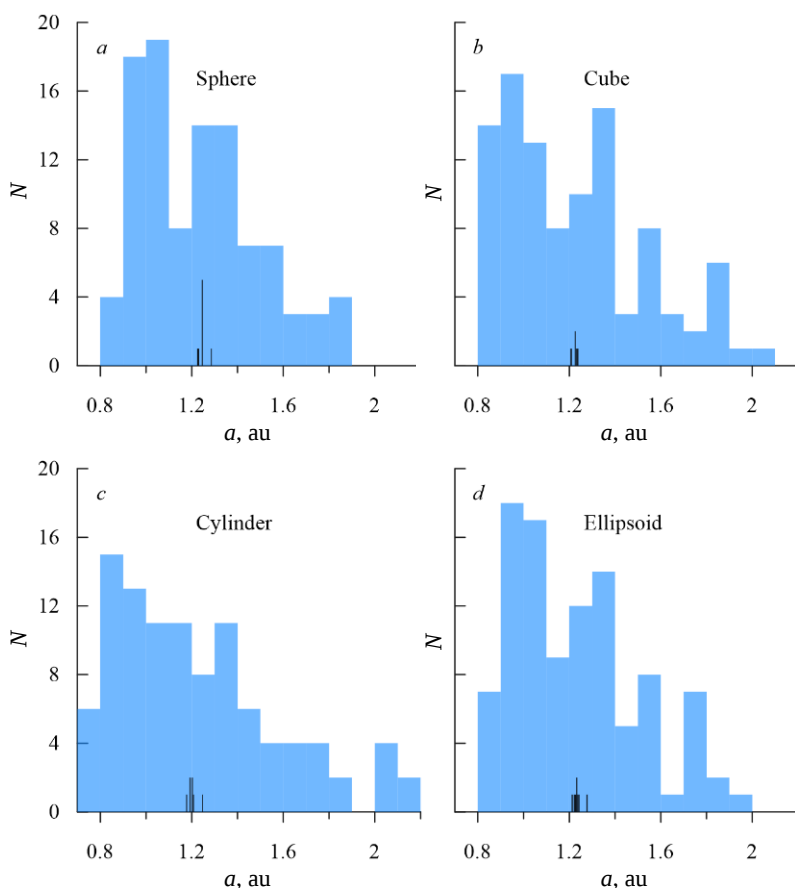


Рис. 4. Распределения больших полуосей a для одной сотни метеороидов, выброшенных в перигелии родительского тела изотропно со скоростью, вычисленной по формуле Whipple [4], в начальную эпоху JD 1720165.2248. Орбиты этих метеороидов были проинтегрированы до конечной эпохи 2004 December 24. Учитывались возмущения от всех планет, Луны и Плутона, а также радиационное давление и эффект Пойнтинга–Робертсона вместе с его корпускулярной составляющей. Параметр A/m выбирался случайно для каждого метеороида, но не менялся в процессе интегрирования. Черным цветом показаны распределения для нескольких метеороидов, проходящих вблизи орбиты Земли. Гистограммы приведены для конечной эпохи

Fig. 4. Distributions of semi-major axes a for one hundred meteoroids ejected isotropically at perihelion of the parent body orbit with the speed calculated by Whipple formula [4] in the initial epoch of JD 1720165.2248. The orbits of the meteoroids were integrated to the final epoch 2004 December 24. Gravitational perturbations from all planets, the Moon, and Pluto were taken into account as well as the radiation pressure and the Poynting–Robertson effect together with its corpuscular part. The parameter A/m was chosen randomly for each meteoroid, but it was invariable during the integration. Black indicators show distributions for several meteoroids passing near the Earth's orbit. Histograms are given for the final epoch

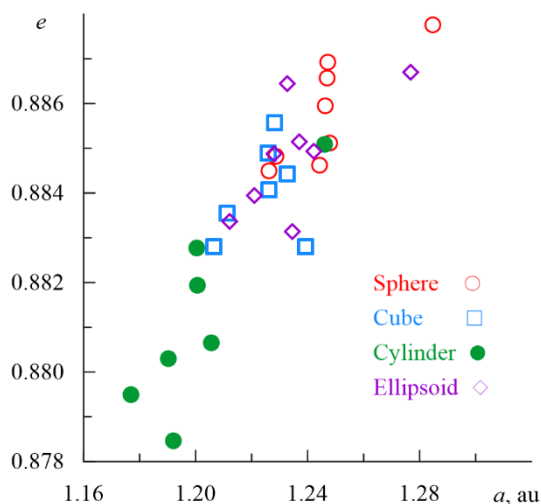


Рис. 5. Большие полуоси a и эксцентриситеты e «зарегистрированных» на Земле модельных метеороидов, тех самых, что показаны черным цветом на рис. 4. Таковыми считаются метеороиды, узлы орбит которых находятся не далее 0.1 а.е. от орбиты Земли

Fig. 5. Semi-major axes a and eccentricities e for the model meteoroids “registered” on the Earth (the same ones that are shown in black in fig. 4). Their orbital nodes are located no further than 0.1 AU from Earth’s orbit

Орбиты метеороидов, пересекающих орбиту Земли, не могут отличаться слишком сильно именно из-за наложения условия пересечения. Поскольку интегрировались орбиты всего 100 метеороидов каждой формы, «зарегистрированными на Земле» считались те, узлы которых находились от орбиты Земли не далее 0.1 а.е. На рис. 5 показаны большие полуоси и эксцентриситеты этих метеороидов. Даже если исключить крайний случай, т.е. цилиндры-хлопья, сферические частицы имеют заметно бóльшие a и e . Это ожидаемый результат, но в данном случае ценна именно его наглядность.

Обсуждение

Поскольку метеороид испытывает множество возмущений от сил, как гравитационных, так и негравитационных, а последних насчитывается не менее 20 [5], по умолчанию обычно предполагается, что совокупное действие сил приводит к хаотическому вращению частицы, а следовательно, можно считать форму метеороида сферической. В литературе не удалось найти работ, исследующих вращение межпланетных частиц, кроме работ Долгинова 50–60-летней давности (см., напр.: [6]). Долгинов [6], рассматривая воздействие на частицу светового и корпускулярного потоков с учетом влияния магнитного поля, отмечает, что ориентация¹

¹ В английской литературе используется термин *alignment*, который лучше соответствует процессу выравнивания оси вращения частицы либо вектора углового момента по какому-то направлению.

частиц устанавливается относительно быстро. Если же обратиться к смежным областям, то ориентация межзвездной пыли потоками газа, магнитным полем, радиационными силами и другими факторами интенсивно обсуждается более 70 лет. В известной пионерской работе Gold [7] было получено, что для галактической пыли направление длинной оси частицы совпадает с направлением относительной скорости частица–межгалактический газ. В обзоре Andersson [8] утверждается, что реальный прогресс в теоретическом и наблюдательном понимании этой проблемы достигнут только в последние годы, хотя ни одна из существующих теорий до сих пор не подтверждена эмпирически. Теория же склоняется к тому, что частицы вращаются не хаотически.

Čapek [9], исследуя вращение метеороидов неправильной формы, выносимых газом при выбросе из ядра кометы, обнаружил, что вначале они вращаются хаотически, но на некотором расстоянии от ядра их вращение стабилизируется. При этом распределение векторов углового момента неслучайно. Они сконцентрированы в направлении, перпендикулярном направлению потока газа. Moreno и соавт. [10] в подобном исследовании подтвердили этот вывод.

Системы сил, влияющих на галактическую и межпланетную пыль, различаются. И тем более отличаются от сил, влияющих на метеороид при выбросе из ядра кометы. Однако у них есть нечто общее – частица движется в потоке: кометного газа, галактического газа, солнечного ветра и радиации, а также в магнитном поле.

В ожидании, пока подобное исследование появится для межпланетных метеороидов, мы предположили, что оси их вращения стабилизируются после выброса из ядра и их направление не меняется. Именно в этом предположении были получены результаты, показанные на рис. 4, 5. Как отмечено, скорость выброса метеороида вычислялась по классической формуле Whipple [4]. Здесь ключевой параметр тот же – A/m , а скорость выброса зависит линейно от $(A/m)^{1/2}$. Иногда A/m называют «парусностью» частицы. Очевидно, что значение A/m может быть одним и тем же для метеороидов, имеющих разные массы, и, наоборот, разным для частиц, имеющих одну и ту же массу, но разную форму. Сказанное относится к однородным метеороидам. Частицы, имеющие фрактальную структуру («пушистые», состоящие из скопления микрочастиц) ведут себя иначе. В частности, при выбросе из ядра кометы они могут достигать скорости газа независимо от своей массы [11].

Итак, какие выводы можно сделать из полученных результатов? Во-первых, из рис. 4 следует, что дисперсия в a настолько велика, что если оценивать принадлежность потоку через критерии подобия [12], то часть метеороидов приходится признать покинувшими метеороидный поток. Для сферических метеороидов было получено [3. Sect. 2.1], что пороговое значение a приблизительно равно 1.5 а.е., что отсекает около 7% метеороидов массы 0.0003 г. Это умозрительное рассуждение, которое ни подтвердить, ни опровергнуть наблюдениями невозможно (по крайней мере в обозримом будущем). Однако такие оценки дают представление о том, какое количество метеороидов некоего потока пополнило спорадический фон.

Что же касается той небольшой части метеороидного потока, которую мы можем наблюдать на Земле в виде метеоров, то она позволяет получить следующие структурные характеристики метеорного потока: профиль активности пото-

ка, профиль распределения масс в потоке, распределение радиантов, элементы орбит. ПР-эффект и световое давление действуют в плоскости орбиты метеороида, поэтому они не могут вызвать заметного увеличения ширины потока. Однако на все остальные характеристики изменения в a и e действие оказывают.

Например, эффект Пойнтинга–Робертсона вызывает так называемое разделение масс, поскольку скорость изменения a и e зависит от массы метеороида согласно (2), что дает возможность оценить возраст потока. Подробно метод определения возраста потока по разделению масс изложен в работе [13]. Без оценок на моделях трудно определить, как именно повлияет несферичность частиц на оценку возраста, хотя можно предположить, что возраст будет занижен, а ошибка его определения возрастет.

Как уже отмечалось, в литературе не удалось найти исследования влияния формы метеороидов на структурные характеристики метеорного потока. Предложенный в настоящей работе метод даст возможность проанализировать это влияние на моделях. Заметное влияние на орбитальные элементы метеороидов (даже сферических) может оказать также эффект Ярковского–Радзиевского [14].

Заключение

Предложен простой численный метод получения площади геометрического поперечного сечения выпуклого тела простой формы, допускающей аналитическое описание (куб, цилиндр, эллипсоид вращения и т.п.), со случайной ориентацией. На основе этого метода можно как получить распределение площадей, так и сгенерировать случайную последовательность для моделирования. Построена пробная модель для потока Геминид массы 0.0003 г. Получено, что если ось вращения несферической частицы стабилизирована, это вызывает заметные уменьшение и дисперсию больших полуосей и эксцентриситетов несферических частиц по сравнению со сферическими.

Список источников

1. Burns J.A., Lamy Ph.L., Soter S. Radiation forces on small particles in the Solar System // *Icarus*. 1978. V. 40 (2). P. 1–48. doi: 10.1016/0019-1035(79)90050-2
2. Ryabova G.O. Mathematical Modelling of Meteoroid Streams. Springer International Publishing, 2020. doi: 10.1007/978-3-030-51510-2
3. Ryabova G.O. On mean motion resonances in the Geminid meteoroid stream // *Planetary and Space Science*. 2022. V. 210. Art. 105378. doi: 10.1016/j.pss.2021.105378
4. Whipple F.L. A comet model. II. Physical relations for comets and meteors // *The Astrophysical Journal*. 1951. V. 113. P. 464–474. doi: 10.1086/145416
5. Kapišinský I. Nongravitational effects affecting small meteoroids in interplanetary space // *Contributions of the Astronomical Observatory Skalnaté Pleso*. 1984. V. 12. P. 99–111.
6. Dolginov A.Z. Alignment of interstellar and interplanetary grains // *Soviet Astronomy*. 1974. V. 18 (1). P. 33–38.
7. Gold T. The alignment of galactic dust // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1952. V. 112. P. 215–218. doi: 10.1093/mnras/112.2.215
8. Andersson B.-G. Interstellar grain alignment: observational status // *Magnetic Fields in Diffuse Media*. Berlin–Heidelberg : Springer-Verlag, 2015. P. 59–87. (Astrophysics and Space Science Library; v. 407). doi: 10.1007/978-3-662-44625-6_4
9. Čapek D. Rotation of cometary meteoroids // *Astronomy & Astrophysics*. 2014. V. 568 (A39). doi: 10.1051/0004-6361/201423857

10. Moreno F., Guirado D., Muñoz O., Zakharov V., Ivanovski S., Fulle M., Rotundi A., Frattin E., Bertini I. Dynamics of irregularly shaped cometary particles subjected to outflowing gas and solar radiative forces and torques // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2022. V. 510. P. 5142–5153. doi: 10.1093/mnras/stab3769
11. Crifo J.F. In-situ Doppler velocimetry of very large grains: An essential goal for future cometary investigations // *Proceedings of the Symposium on Radars and Lidars in Earth and Planetary Science*. Noordwijk: ESA. 1991. P. 65–70.
12. Williams I.P., Jopek T.J., Rudawska R., Tóth J., Kornoš L. Minor meteor showers and the sporadic background // *Meteoroids: Sources of Meteors on Earth and Beyond*. Cambridge : Cambridge University Press, 2019. P. 210–243. doi: 10.1017/9781108606462.016
13. Ryabova G.O. Age of the Geminid meteor stream (Review) // *Solar System Research*. 1999. V. 33 (3). P. 224–238.
14. Ryabova G.O. Averaged changes in the orbital elements of meteoroids due to Yarkovsky–Radzievskij force // *Complex Planetary Systems. Proceedings of the IAUS 310*. 2014. P. 160–161. doi: 0.1017/S1743921314008114
15. Santaló L.A. *Integral Geometry and Geometric Probability*. Reading, MA : Addison-Wesley, 1976.
16. Korn G.A., Korn T.M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review*. 2nd enl. and rev. ed. New York : McGraw-Hill, 1968.
17. Forbes C., Evans M., Hastings N., Peacock B. *Statistical Distributions*. 4th ed. New York : Wiley, 2011.
18. Brandt S. *Data Analysis. Statistical and Computational Methods for Scientists and Engineers*. 4th ed. Cham : Springer, 2014.

References

1. Burns J.A., Lamy Ph.L., Soter S. (1978) Radiation forces on small particles in the Solar System. *Icarus*. 40(2). pp. 1–48. doi: 10.1016/0019-1035(79)90050-2
2. Ryabova G.O. (2020) *Mathematical Modelling of Meteoroid Streams*. Springer International Publishing. doi: 10.1007/978-3-030-51510-2
3. Ryabova G.O. (2022) On mean motion resonances in the Geminid meteoroid stream. *Planetary and Space Science*. 210. Article 105378. doi: 10.1016/j.pss.2021.105378
4. Whipple F.L. (1951) A comet model. II. Physical relations for comets and meteors. *The Astrophysical Journal*. 113. pp. 464–474. doi: 10.1086/145416
5. Kapišinský I. (1984) Nongravitational effects affecting small meteoroids in interplanetary space. *Contributions of the Astronomical Observatory Skalnaté Pleso*. 12. pp. 99–111.
6. Dolginov A.Z. (1974) Alignment of interstellar and interplanetary grains. *Soviet Astronomy*. 18(1). pp. 33–38.
7. Gold T. (1952) The alignment of galactic dust. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 112. pp. 215–218. doi: 10.1093/mnras/112.2.215
8. Andersson B.-G. (2015) Interstellar grain alignment: observational status. *Magnetic Fields in Diffuse Media*. In: *Astrophysics and Space Science Library*. 407. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag. pp. 59–87. doi: 10.1007/978-3-662-44625-6_4
9. Čapek D. (2014) Rotation of cometary meteoroids. *Astronomy & Astrophysics*. 568(A39). doi: 10.1051/0004-6361/201423857
10. Moreno F., Guirado D., Muñoz O., Zakharov V., Ivanovski S., Fulle M., Rotundi A., Frattin E., Bertini I. (2022) Dynamics of irregularly shaped cometary particles subjected to outflowing gas and solar radiative forces and torques. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 510. pp. 5142–5153. doi: 10.1093/mnras/stab3769
11. Crifo J.F. (1991) In-situ Doppler velocimetry of very large grains: An essential goal for future cometary investigations. *Proceedings of the Symposium on Radars and Lidars in Earth and Planetary Science*. Noordwijk: ESA. pp. 65–70.

12. Williams I.P., Jopek T.J., Rudawska R., Tóth J., Kornoš L. (2019) Minor meteor showers and the sporadic background. *Meteoroids: Sources of Meteors on Earth and Beyond*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. pp. 210–243. doi: 10.1017/9781108606462.016
13. Ryabova G.O. (1999) Age of the Geminid meteor stream (Review). *Solar System Research*. 33(3). pp. 224–238.
14. Ryabova G.O. (2014) Averaged changes in the orbital elements of meteoroids due to Yarkovsky–Radzievskij force. *Complex Planetary Systems. Proceedings of the IAUS 310*. pp. 160–161. doi: 0.1017/S1743921314008114
15. Santaló L.A. (1976) *Integral Geometry and Geometric Probability*. Addison-Wesley, Reading, MA.
16. Korn G.A., Korn T.M. (1968) *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review*. 2nd enl. and rev. edition. New York: McGraw-Hill.
17. Forbes C., Evans M., Hastings N., Peacock B. (2011) *Statistical Distributions*. 4th edition. New York: Wiley.
18. Brandt S. (2014) *Data Analysis. Statistical and Computational Methods for Scientists and Engineers*. 4th edition. Springer Cham.

Приложение А

Проецирование произвольной точки на поверхности случайно ориентированного тела на плоскость XY

Привязываем исследуемое тело, пусть для определенности это будет куб, к случайно ориентированной прямоугольной правосторонней системе координат $X'Y'Z'$. Центр этой системы совмещен с центром нашей основной системы XYZ , также правосторонней. Площадь проекции куба на плоскость XY (для определенности, но может быть YZ или XZ) является искомой площадью поперечного сечения. Выделим на плоскости XY квадрат, где проекция куба поместится гарантированно при любом его повороте. Назовем этот квадрат *максимальной площадкой*. Разобьем максимальную площадку на квадратные ячейки.

Начинаем численный эксперимент. Повернем систему координат $X'Y'Z'$ случайным образом. Далее выберем случайным образом на поверхности куба точку $\{x', y', z'\}$ и спроецируем ее на максимальную площадку. Точка проекции $\{x, y, 0\}$ попадет в какую-то ячейку, которая в массиве-счетчике будет теперь помечена как заполненная. Повторяем процесс выбора и проецирования точки до тех пор, пока состояние массива-счетчика меняется. Когда оно меняться перестает, то считаем, что проекция тела заполнена плотно. Сумма площадей заполненных ячеек и есть площадь проекции тела A . Эксперимент закончен, сохраняем его результат.

Получив N_{exp} площадей A , переходим к построению функции вероятности $f(A)$ и функции распределения $F(A)$. Количество экспериментов N_{exp} , которые нужно проделать для получения статистически надежного распределения, зависит от размера ячейки и формы тела.

Одна из возможных проверок правильности работы программы состоит в вычислении математического ожидания $\bar{A}$ и сравнении его с полученным аналитически. Согласно формуле Коши (Cauchy) [15. Eq. (13.16)] среднее геометрическое поперечное сечение случайно ориентированного выпуклого тела составляет одну четверть его площади поверхности.

Описанный метод программно можно реализовать по-разному. Ниже предлагается один из возможных подходов.

Далее через U будем обозначать случайное число, равномерно распределенное в интервале $[0, 1)$. Случайное число R равномерно распределено в интервале $[a, b)$. Очевидно, что его можно получить из U по формуле

$$R = a + (b - a) \times U. \quad (\text{A.1})$$

A.1. Произвольная система координат $X'Y'Z'$

В системе координат $X'Y'Z'$ введём два угла: угол T между неким вектором $\mathbf{d}$ и осью X' , $T \in [0, \pi]$; угол Φ между осью Y' и проекцией вектора $\mathbf{d}$ на плоскость $Y'Z'$, $\Phi \in [0, 2\pi]$. Тогда

$$\begin{aligned}d_x &= d \cos T, \\d_y &= d \sin T \cos \Phi, \\d_z &= d \sin T \sin \Phi.\end{aligned}\tag{A.2}$$

Для того чтобы генерировать случайный вектор $\mathbf{d}$ с изотропным распределением направлений, достаточно вычислить углы T и Φ по формулам

$$\Phi = 2\pi U, \quad \cos T = 1 - 2U,\tag{A.3}$$

где каждое вхождение U трактуется как отдельное обращение к датчику псевдослучайных чисел.

Оси произвольно ориентированной системы $X'Y'Z'$ находим следующим образом.

(а) Ось X' . Способом, описанным выше, находим случайный вектор $\mathbf{a}$, определяющий направление X' .

(б) Ось Z' . Находим второй случайный вектор $\mathbf{a}'$. Вектор $\mathbf{c}$, определяющий направление Z' , находим из векторного произведения $\mathbf{c} = [\mathbf{a} \times \mathbf{a}']$.

(с) Ось Y' . Дополняем нашу систему до правой тройки: $\mathbf{b} = [\mathbf{c} \times \mathbf{a}]$. Вектор $\mathbf{b}$ определяет направление Y' .

Итак, мы определили систему $X'Y'Z'$. Направляющие косинусы ее осей в системе XYZ легко вычислить из (A.1). Переход от системы $X'Y'Z'$ к XYZ осуществляется поворотом (см., напр.: [16. 3.1-12]).

A.2. Выбор точки на поверхности геометрически-простого тела

В этом разделе все детали методики объясняются на примере куба. Для цилиндра и эллипсоида вращения приведены только формулы.

Выбор случайной точки $\{x', y', z'\}$ на поверхности куба. Рассмотрим куб размерами $[2a \times 2a \times 2a]$. Расположим его в системе $X'Y'Z'$ так, чтобы его центр совпал с центром системы, а ребра были параллельны осям, и для точек, принадлежащих кубу, выполнялось условие: $x' \in [-a, +a]$, $y' \in [-a, +a]$, $z' \in [-a, +a]$. Такое расположение куба позволяет минимизировать площадку XY , охватывающую все возможные проекции.

У куба 6 граней. Для точки на грани 1 справедливо: $x' = a$, $y' \in [-a, +a]$, $z' \in [-a, +a]$, для точек грани 2: $y' = a$, $x' \in [-a, +a]$, $z' \in [-a, +a]$ и т.д. Случайным образом выбираем одну грань из шести, а в ней координаты $\{x', y', z'\}$, пользуясь соотношением (A.1).

Выбор случайной точки на поверхности кругового прямого цилиндра. Пусть цилиндр имеет основание радиуса r и высоту h . Поместим его в системе $X'Y'Z'$ так, чтобы его центр совпал с центром системы, а основания были параллельны плоскости $X'Y'$. Тогда для верхнего основания справедливо: $z' = h/2$, $(x'^2 + y'^2) \leq r^2$. Для нижнего соответственно: $z' = -h/2$, $(x'^2 + y'^2) \leq r^2$. Точки на боковой поверхности можно задать из условия $z' \in [-h/2, h/2]$, $x' = r \cos \alpha$, $y' = r \sin \alpha$, где $\alpha \in [0, 2\pi]$.

В принципе два основания и боковую поверхность можно считать «гранями», и для генерации точки выбирать одну из них случайно (как в кубе). Но чем равномернее на поверхности тела будут распределены случайные точки, тем быстрее область проекции заполнится точками плотно. Поэтому при выборе «граней» разумно принимать во внимание соотношение площадей. Иначе говоря, если площадь грани в пять раз больше, возможности быть выбранной у нее тоже должно быть в пять раз больше.

Выбор случайной точки на поверхности эллипсоида. Воспользуемся параметрическим заданием поверхности эллипсоида

$$\begin{aligned}x' &= a \cos T, \\y' &= b \sin T \cos \Phi, \\z' &= c \sin T \sin \Phi,\end{aligned}\tag{A.4}$$

где a, b, c – полуоси эллипсоида [16. 3.5.10], углы T и Φ имеют тот же смысл, что и в разделе А.2. Случайный их выбор осуществляется по формулам (А.3).

А.3. Вычисление площади проекции тела

До начала эксперимента, который состоит в нахождении площади проекции для *одного* случайного положения исследуемого тела, необходимо определить максимальную площадку. Из геометрических соображений находим квадрат, охватывающий максимальную область проекции тела на плоскость XY . Например, для куба $1 \times 1 \times 1$ это будет $x \in [-b, +b]$, $y \in [-b, +b]$, где $b = \sqrt{3}/2$. Разумно взять границы квадрата с некоторым запасом. Делим этот квадрат на квадратные же ячейки с размером стороны, например, 0.01. В программе максимальная площадка, разделенная на ячейки, описывается двумерным массивом-счетчиком.

Алгоритм S: вычисление площади одной проекции.

S1. [Начальная установка.] Установить $N_{points} \leftarrow 0$, $N_{changes} \leftarrow 0$, $N_{max} \leftarrow 1000$. Случайным образом повернуть систему координат $X'Y'Z'$ (раздел А.1).

S2. [Установка счетчиков.] Увеличить N_{points} на единицу. Если $N_{points} > N_{max}$, установить $N_{points} \leftarrow 1$, $N_{changes} \leftarrow 0$.

S3. [Выбор точки на теле.] Выбрать случайную точку $\{x', y', z'\}$ на поверхности тела (раздел А.2).

S4. [Вычисление точки проекции.] Выполнить преобразование $\{x', y', z'\} \Rightarrow \{x, y, z\}$. Вычислить элемент массива-счетчика соответствующий точке проекции $\{x, y, 0\}$. Пометить эту ячейку как заполненную. Если ячейка прежде была пустой увеличить $N_{changes}$ на единицу.

S5. [Проекция заполнена плотно?] Эксперимент считается законченным, если после выбора N_{max} точек изменений в массиве-счетчике нет. Если $N_{changes} = 0$ и $N_{points} = N_{max}$ перейти к шагу S6, иначе возвратиться к шагу S2.

S6. [Вычисление площади проекции.] Вычислить площадь проекции, найдя количество заполненных элементов массива-счетчика и умножив его на площадь ячейки.

Комментарий. $N_{max} = 1\,000$ выбрано произвольно, исходя из компромисса между временем работы программы и размерностью массива-счетчика, после нескольких экспериментов. При этом отсутствие «дырок» в проекции, т.е. незаполненных ячеек, контролировалось графически.

Приложение В

Генерирование случайных чисел с дискретной функцией распределения $F(A)$

Пусть x есть непрерывная случайная величина, $f(x)$ – ее плотность вероятности, а $F(x)$ – функция распределения. Обратная функция распределения $G(\delta) = x$ может быть получена из уравнения $\delta = F(x)$. Тогда случайную величину x можно генерировать как $x = G(U)$. Строгую формулировку можно найти в [17].

Для дискретной функции распределения можно воспользоваться методом отсеивания Неймана (Neumann Acceptance-Rejection technique) [18. Sect. 4.8.2]. Однако он, хоть и очень простой, но медленный, ибо требует большого числа машинных операций. Поэтому автор действовал по аналогии с непрерывной случайной величиной. Несомненно, подобный метод изобретался и публиковался многократно, но автор не рассматривал литературу по данному вопросу.

Итак, мы имеем дискретную функцию $F(A)$, выражающуюся последовательностью чисел $F(A_i)$, $i = 1 \dots N$, причем $F(A_i) \leq F(A_{i+1})$, $F(A_N) = 1$. Другими словами, мы имеем функцию, заданную таблично. Генерируем случайную величину $F(A) = U$. Находим соответствующее ей значение A линейной интерполяцией по таблице $F(A_i)$. Тестирование показало, что

метод работает хорошо, но нужно внимательно относиться к выбору шага таблицы, чтобы не пропустить острого пика функции $f(A)$, например такого, как на рис. 1, с.

Сведения об авторе:

Рябова Галина Олеговна – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории компьютерного моделирования и машинного анализа астрономических данных НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: galina.ryabova@mail.tsu.ru

Information about the author:

Ryabova Galina O. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: galina.ryabova@mail.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 23.01.2023; принята к публикации 01.06.2023

The article was submitted 23.01.2023; accepted for publication 01.06.2023

Научная статья

УДК 539.2

doi: 10.17223/19988621/83/14

Нестационарные движения сферических оболочек в вязкоупругой среде

Исмоил Иброхимович Сафаров¹, Мухсин Худойбердиевич Тешаев²

¹ *Ташкентский химико-технологический институт,*

Ташкент, Узбекистан, safarov54@mail.ru

² *Бухарское отделение Института математики АН Республики Узбекистан,*

Бухара, Узбекистан, muhsin_5@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются неустановившиеся движения сферических тел, погруженных в вязкоупругую среду, под действием нестационарных волн. Используя теорему о вычетах, определены выражения перемещений и напряжений как функции времени. Найдено, что при кратковременном воздействии волн максимальные величины напряжений и деформаций существенно выше средних, причем наибольшего значения напряжение достигает в лобовой точке.

Ключевые слова: оболочка, вязкоупругая среда, нестационарная волна, преобразования Лапласа, напряжение, деформация

Для цитирования: Сафаров И.И., Тешаев М.Х. Нестационарные движения сферических оболочек в вязкоупругой среде // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 166–179. doi: 10.17223/19988621/83/14

Original article

Unsteady Motions of Spherical Shells in a Viscoelastic Medium

Ismoil I. Safarov¹, Mukhsin Kh. Teshaeв²

¹ *Tashkent Institute of Chemical Technology, Tashkent, Uzbekistan, safarov54@mail.ru*

² *Bukhara Branch of the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, Bukhara, Uzbekistan, muhsin_5@mail.ru*

Abstract. This paper considers the unsteady motions of the spherical bodies immersed in a viscoelastic medium under the action of unsteady waves. The relation between stresses and strains complies with the hereditary Boltzmann–Voltaire integral. Using the integral Laplace transform, an exact solution of the equations of motion is obtained in the images. The integrand function in the images satisfies Jordan's lemma. Using the residue theorem, displacements and stresses are determined as the functions of time. An algorithm is developed, and a program is compiled in C++. The numerical results are obtained and analyzed. It is revealed that the kinematic factors, i.e. acceleration and velocity, of the spherical shell differ significantly from those of the viscoelastic medium. Under short-term exposure to waves (loads), the diagram of the stress-strain state changes: at all points of the shell, the maximum stresses and strains are significantly higher than average values, and the stress attains the maximum at the frontal point. Some differences are also

found in the variation of time-displacement dependence for the spherical shell and surrounding viscoelastic medium.

Keywords: shell, viscoelastic medium, unsteady wave, Laplace transform, stress, strain

For citation: Safarov, I.I., Teshayev, M.Kh. (2023) Unsteady Motions of Spherical Shells in a Viscoelastic Medium. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 166–179. doi: 10.17223/19988621/83/14

Введение

Исследования нестационарного взаимодействия волн с деформируемыми конструкциями являются актуальной задачей механики и физики. Практика современных строительства и машиностроения требует расчета элементов конструкций и сооружений на действие нестационарных волн, распространяющихся в окружающей среде.

Задача о движении и прочности сферической оболочки, погруженной в деформируемую среду, под действием волн была исследована в работах [1–4], однако исследователями рассматривались в основном гармонические нагрузки, такие как серия гармонических волн и стоячие волны. Дифракция сферической нестационарной акустической волны на сплошной упругой сфере исследована в [5]. Поставленная задача решена методом интегрального преобразования Фурье. В работе [6] исследована задача о взаимодействии нестационарных акустических волн с тонкой сферической оболочкой. Отмечено, что наличие тонкой оболочки на границе раздела не создает принципиальных трудностей. В работах [7–9] область приложения результатов, полученных в нестационарной постановке задачи гидроупругости тонкостенных конструкций, расширяется; в них указано, что необходимо учитывать возможности возникновения явления кавитации в жидкости.

Определение движения деформируемых сферических включений, находящихся в упругой среде при воздействии нестационарной нагрузки, является сложной задачей механики [9]. Поэтому для упрощения поставленной задачи для определения нестационарного движения твердосферического включения сферические тела рассматриваются как абсолютно жесткие [10, 11]. В этих работах нагрузка, или падающая волна, принимается в виде экспоненциально затухающей функции и задача решается методом интегрального преобразования Фурье.

В последнее время указывается на необходимость учета влияния реологических свойств материала и окружающей среды на нестационарное динамическое напряженно-деформированное состояние *сферических оболочек при воздействии нестационарных нагрузок*, чему пока уделяется мало внимания. Цель настоящей работы – разработка методики и алгоритма для определения динамического напряженно-деформированного состояния сферических оболочек при воздействии нестационарных волн. Для решения задачи применяются преобразования Лапласа, теорема сложения сферических функций.

В работе рассматриваются линейные колебания сферических оболочек при воздействии вязкоупругих продольных (или поперечных) нестационарных волн. Для описания вязкоупругих свойств материала среды и сферической оболочки использована связь между напряжениями и деформациями, удовлетворяющая наследственному интегралу Больцмана–Вольтерры. С помощью интегрального

преобразования Лапласа получено точное решение уравнений движения в изображениях. Подынтегральная функция в изображениях удовлетворяет лемме Жордана. Используя теорему о вычетах, определены выражения для перемещений и напряжений как функции времени.

Постановка задачи и методика решения

Пусть замкнутая деформируемая сферическая оболочка окружена безграничной вязкоупругой средой (рис. 1).

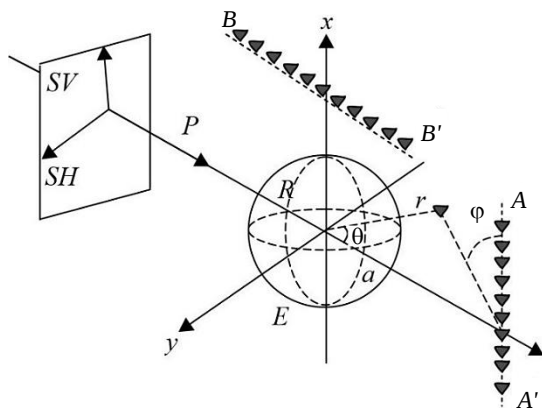


Рис. 1. Расчетная схема
Fig. 1. Computational scheme

Введем сферическую систему координат и на оси z поместим источник нестационарных волн. В этом случае процесс деформации оболочки будет осесимметричным. Задача решается в безмоментной постановке (изгибные жесткости не учитываются). Тогда уравнения движения сферической оболочки представляются в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} - (v_0 - \operatorname{ctg} \theta)u - (1 + v_0) \frac{\partial w}{\partial \theta} - \\ & - \int_0^t R_u(t - \tau) L_{11}(u, w) d\tau = \frac{1}{c_{10}^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{mc_{10}^2} p_1(a, \theta, t), \\ & (1 + v_0) \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + u \operatorname{ctg} \theta - 2w \right) - \int_0^t R_w(t - \tau) L_{22}(u, w) d\tau = \\ & = \frac{1}{c_{10}^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{mc_{10}^2} p_2(a, \theta, t), \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} L_{11}(u, w) &= \frac{\partial^2 u(\theta, \tau)}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial u(\theta, \tau)}{\partial \theta} - (v_0 - \operatorname{ctg} \theta)u(\theta, \tau) - (1 + v_0) \frac{\partial w(\theta, \tau)}{\partial \theta}, \\ L_{22}(u, w) &= (1 + v_0) \left(\frac{\partial u(\theta, \tau)}{\partial \theta} + u(\theta, \tau) \operatorname{ctg} \theta - 2w(\theta, \tau) \right), \end{aligned}$$

$$m = \rho_0 h, c_{10} = [E_0 / \rho_0 (1 - \nu_0^2)]^{1/2},$$

E_0, ν_0, ρ_0 – соответственно мгновенный модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность сферической оболочки; $R_u(t - \tau)$, $R_w(t - \tau)$ – ядра релаксации цилиндрической оболочки; u, w – перемещения срединной поверхности по касательной к меридиану и по нормали; θ – угол, отсчитываемый от оси z .

Если вязкоупругая среда, окружающая сферическую оболочку, находится в условиях осесимметричной деформации, то перемещения и напряжения в потенциалах перемещений принимают следующий вид [12]:

$$\begin{aligned} C_{\alpha 0}^2 \left[\nabla^2 \varphi - \int_0^t R_{\alpha}(t - \tau) \nabla^2 \varphi(\tau) d\tau \right] &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \\ C_{\beta 0}^2 \left[\nabla^2 \psi - \int_0^t R_{\beta}(t - \tau) \nabla^2 \psi(\tau) d\tau \right] &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \vec{u} &= u_r \vec{r} + u_{\theta} \vec{j}_{\theta} + 0 \vec{k}_z, u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}), \\ u_{\theta} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \psi}{\partial \theta}), \sigma_r = \frac{\tilde{\lambda}_c}{c_{10}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \\ &+ 2\tilde{\mu}_c (\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - 3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - r \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} + \frac{r}{c_{20}^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial t^2} + \frac{1}{c_{20}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\tilde{\lambda}_c}{c_{10}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + 2\tilde{\mu}_c (\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{c_{20}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial \theta^2}),$$

$$\tilde{\lambda}_c f(t) = \lambda_{0c} \left[f(t) - \int_0^t R_{\lambda c}(t - \tau) f(\tau) d\tau \right]; \tilde{\mu}_c f(t) = \mu_{0c} \left[f(t) - \int_0^t R_{\mu c}(t - \tau) f(\tau) d\tau \right], \quad (4)$$

где $\vec{u}(u_r, u_{\theta}, 0)$ – вектор перемещений среды, $f(t)$ – произвольная функция времени, λ_{0c}, μ_{0c} – мгновенные модули упругости, $c_{20} = [kE_0 / 2\rho_0(1 + \nu_0)]^{1/2}$.

В расчетах использовалось трехпараметрическое ядро релаксации Колтунова–Ржаницына: $R_k(t) = A_k e^{-\beta_k t} / t^{1-\alpha_k}$, $C_{\alpha 0}^2 = (\lambda_c + 2\mu_c) / \rho_0$, $C_{\beta 0}^2 = \mu_c / \rho_0$.

На контакте оболочек со средой ставится условие жесткого контакта, т.е. выполняется равенство соответствующих перемещений.

На бесконечности возмущения должны затухать: если φ, ψ расходящиеся волны, то $\varphi \rightarrow 0, \psi \rightarrow 0$ при $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$.

Начальные условия – нулевые, Действующие нагрузки со стороны среды на оболочку представим в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\lambda_{0c}}{c_{10}^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) \Big|_{r=a} - \int_0^t R_{\lambda c}(t - \tau) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} d\tau + 2\mu_{0c} (\Phi(\varphi, \psi) - \int_0^t R_{\lambda c}(t - \tau) \Phi(\varphi(\tau), \psi(\tau)) d\tau), \\ \sigma_{r\theta} &= 2\mu_{0c} (\Psi(\varphi, \psi) - \int_0^t R_{\lambda c}(t - \tau) \Psi(\varphi(\tau), \psi(\tau)) d\tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi, \psi) &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - r \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} + \frac{r}{c_{20}^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial t^2} + \frac{1}{c_{20}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) \Big|_{r=a}, \\ \Psi(\varphi, \psi) &= \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{1}{c_{20}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \right) \Big|_{r=a}.\end{aligned}\quad (5)$$

Напряжения в срединной поверхности сферической оболочки имеют следующий вид [13]:

$$\begin{aligned}\sigma_{10} &= \rho_0 c_{10}^2 \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} + u \operatorname{ctg} \theta - (1 + \nu_0) w \right], \\ \sigma_{20} &= \rho_0 c_{10}^2 \left[u \operatorname{ctg} \theta + \nu_0 \frac{\partial u}{\partial \theta} - (1 + \nu_0) w \right].\end{aligned}\quad (6)$$

Зависимости (1) – (6) записаны в безразмерном виде.

Решение системы интегро-дифференциальных уравнений (1) и (2) ищем в виде рядов по функциям Лежандра:

$$\begin{aligned}u(\theta, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) P'_n(\cos \theta), \\ w(\theta, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) P_n^0(\cos \theta), \\ \varphi(r, \theta, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(r, t) P_n^0(\cos \theta), \\ \psi(r, \theta, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(r, t) P'_n(\cos \theta),\end{aligned}\quad (7)$$

где $P_n^0(\cos \theta)$, $P'_n(\cos \theta)$ – присоединенные функции Лежандра нулевого и первого порядков.

Внешние силы также представим в форме рядов:

$$\begin{aligned}p_{kp}(a, \theta, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_{kpn}(t) P_n^0(\cos \theta), \\ p_{ka}(a, \theta, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} q_{kpn}(t) P'_n(\cos \theta).\end{aligned}\quad (8)$$

Подставляя (7) в систему (1) и (2), получим следующую систему обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\ddot{u}_n + C_{10}^2 [n(n+1) - (1 - \nu_0)] u_n - C_{10}^2 (1 + \nu_0) - \int_0^t R_u(t - \tau) L_{11}(u, w) d\tau &= P_{1n}, \\ \ddot{w}_n - C_{10}^2 (1 + \nu_0) [n(n+1) - 2w_n] u_n + \int_0^t R_w(t - \tau) L_{22}(u, w) d\tau &= P_{2n}, \\ C_{\alpha 0}^2 \left[\nabla^2 \Phi(r, t) - \int_0^t R_{\alpha}(t - \tau) \Phi(r, t) d\tau \right] &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \\ C_{\beta 0}^2 \left[\nabla^2 \Psi(r, t) - \int_0^t R_{\alpha}(t - \tau) \Psi(r, t) d\tau \right] &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \quad n = 1, 2, 3...\end{aligned}\quad (9)$$

Для решения задачи применяем преобразования Лапласа для функции $f(t)$, интегрируемой в смысле Лебега на любом открытом интервале $0 < t < T$, которая выражается формулой (8) [14]:

$$f^L(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = L[f(t)]. \quad (10)$$

Функция $f^L(s)$ называется изображением, $f(t)$ – оригиналом. Обратное преобразование Лапласа определяется формулой

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} f^L(s) ds = L^{-1}[f^L(s)], \quad (11)$$

где интеграл берется вдоль пути, лежащего справа от особенностей подынтегральной функции.

Применяя к (9) преобразования Лапласа (10) по времени, получим следующую систему алгебраических и обыкновенных уравнений:

$$\begin{aligned} c_{11}u_n^L + c_{12}w_n^L &= P_{1n}^L(s), \\ c_{21}u_n^L + c_{22}w_n^L &= P_{2n}^L(s), \\ C_{\alpha 0}^2(1-\Omega_p^s(s))\nabla^2\Phi^L(r,s) - s^2\Phi &= 0, \\ C_{\beta 0}^2(1-\Omega_c^s(s))\nabla^2\Psi^L(r,s) - s^2\Psi &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{10}^2[n(n+1) - (1-\nu_0)] + s^2; \quad c_{12} = -c_{10}^2(\nu_0+1), \\ c_{21} &= -c_{10}^2(\nu_0+1)(n+1)n, \quad c_{22} = 2c_{10}^2(\nu_0+1) + (1 + \frac{s^n f_n(s)}{m\Phi_n(s)})s^2. \end{aligned}$$

Решение системы алгебраических и дифференциальных уравнений (12) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} u_n^L &= \frac{c_{12}P_{1n}^L(s) - c_{22}P_{2n}^L(s)}{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}, \quad w_n^L = \frac{c_{11}P_{2n}^L(s) - c_{21}P_{1n}^L(s)}{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}, \\ \Phi^L(r,s) &= \sum_{n=0}^{\infty} (A_n K_{n+1/2}(\alpha_s r) + B_n N_{n+1/2}(\alpha_s r)), \\ \Psi^L(r,s) &= \sum (C_n K_{n+1/2}(\beta_s r) + M_n N_{n+1/2}(\beta_s r)), \\ \alpha_s^2 &= \frac{s^2}{c_{\alpha 0}^2(1-\Omega_p^s(s))}, \quad \alpha_s^2 = \frac{s^2}{c_{\beta 0}^2(1-\Omega_c^s(s))}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $K_n(X), N_n(X)$ – модифицирование функции Бесселя и Неймана, A_n, B_n, C_n, M_n – произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий.

Обратное преобразование Лапласа осуществляется с помощью (11). Подынтегральная функция в изображениях удовлетворяет лемме Жордана. Используя теорему о вычетах, определяем выражения перемещений и напряжений как функции времени.

Потенциал падающей единичной ступенчатой волны напряжений представляется в виде:

$$\varphi_p = 0.5(t + z - 1)H(t + z - 1), \psi_p = 0. \quad (14)$$

Время $t = 0$ соответствует моменту соприкосновения волны с оболочкой. Подвергая потенциал (14) интегральному преобразованию Лапласа и используя теорему сложения сферических функций, представляем его в координатах оболочки

$$\varphi_p^L = \frac{e^{-s}}{s^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sqrt{\frac{\pi}{2sr}} I_{n+1/2}(sr) P_n(\cos \theta). \quad (15)$$

Постановка задачи позволяет определить напряженно-деформированное состояние окружающей среды, когда сферическая оболочка представляется как твердое включение. Тогда сферические включения будут свободно перемещаться вместе с окружающей средой. Пусть U обозначает вектор перемещений сферических тел. Легко доказать, что вследствие симметрии

$$U = kU,$$

где k – единичный вектор, направленный вдоль движения.

Из этого следует, что при $r = a$

$$u_r = U(t)P_1(\cos \theta), u_\theta = U(t) \frac{dP_1(\cos \theta)}{d\theta}. \quad (16)$$

Перемещение U удовлетворяет уравнению движения

$$\frac{4\pi a^3}{3} \rho_1 \ddot{U} = \iint_{\Omega_g} (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) a^2 \sin \theta d\theta d\varphi - \int_0^t R_t(t-\tau) \Gamma(\sigma_{rr}(\tau), \sigma_{r\theta}(\tau)) d\tau, \quad (17)$$

$$\Gamma(\sigma_{rr}(\tau), \sigma_{r\theta}(\tau)) = \iint_{\Omega_g} (\sigma_{rr}(\tau) \cos \theta - \sigma_{r\theta}(\tau) \sin \theta) a^2 \sin \theta d\theta d\varphi,$$

где ρ_1 – плотность сферического включения, а интеграл, взятый по поверхности сферы, представляет собой проекцию на ось z результирующей, с которой окружающая среда действует на сферу.

Выражения для $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}$ получаются, если подставить (9) в уравнения (3). Можно показать, что (опуская детали преобразований [14])

$$U = \frac{\bar{I} e^{-s\zeta}}{a} (1 - \Omega_r(s\zeta)) (3i\pi\Phi_0 j_1(\alpha a) + A_1 h_1(\alpha a) - 2B_1 h_1(\beta a)). \quad (18)$$

Подставляя (18) в уравнения (9) и используя граничные условия, получим два уравнения, которые могут быть использованы для определения A_1 и B_1 . Из этих уравнений получаем

$$A_1 = \frac{-3\Phi_0 i}{\Delta_1} (\alpha\beta a^2 j_2(\alpha a) h_1(\beta a) - (1 - \bar{\rho}) \beta a j_1(\alpha a) h_2(\beta a)). \quad (19)$$

Тогда U принимает вид:

$$U = \frac{3\Phi_0 k \bar{\rho}}{a \Delta_1} h_2(\beta a) e^{-s} , \quad k_0^2 = \frac{\beta_0^2}{\alpha_0^2} = \frac{C_{\alpha 0}^2}{C_{\beta 0}^2} = \frac{2(1 - \nu_c)}{1 - 2\nu_c}.$$

Здесь ν_c – коэффициент Пуассона.

При исследовании колебательных процессов сферического выключения использованы следующие выражения функции Бесселя:

$$j_{n-1}(\zeta)h_n(\zeta) - h_{n-1}(\zeta)j_n(\zeta) = \frac{-i}{\zeta^2}.$$

Определив функцию проводимости, перейдем к определению нестационарного движения сферического включения под действием аperiодического возмущения в соответствии с уравнениями (14) и (17). Прежде чем перейти к описанию аperiодического движения, целесообразно упростить уравнение (18). Представим $h_n(\zeta)$ в виде комбинации элементарных функций с помощью соотношения

$$h_n(\zeta) = -i(-1)^n \zeta^n \left(\frac{d}{\zeta d\zeta} \right)^n \frac{e^{i\zeta}}{\zeta}. \text{ Отсюда следует, что}$$

$$h_1(\zeta) = -i\zeta^{-2}(i\zeta - 1)e^{i\zeta}, \quad h_2(\zeta) = -i\zeta^{-3}(-\zeta^2 - 3i\zeta + 3)e^{i\zeta}.$$

Здесь также полезно сначала нормализовать некоторые величины. Это можно сделать, нормализуя смещения, скорости и ускорения сферы по отношению к соответствующим величинам падающей волны. Амплитуды смещения и скорости падающей волны равны соответственно

$$U^* = \frac{U}{i\Phi_0 a}, \quad \dot{U}^* = \frac{\dot{U}}{\Phi_0 a \omega_s}.$$

Результаты и анализ

Поскольку подынтегральное выражение в уравнении (11) регулярно, за исключением конечного числа полюсов внутри C , то в соответствии с теоремой Жордана и теоремой Коши о вычетах интеграл (11) можно вычислить по формуле

$$\oint_C f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{n=1}^m R_n, \quad (20)$$

где R_n – вычет функции $f(\zeta)$ (интегрирование проводится против часовой стрелки). Тогда безразмерная величина скорости $\bar{U}$ сферы будет

$$\bar{U}(\tau) = 3\bar{\rho} \sum_{n=1}^m R_n.$$

Возвращаясь к уравнению (11), имеем

$$f(\zeta) = (-k^2 \zeta^2 - 3ik\zeta + 3)e^{-i(1+\tau)\zeta} / (\zeta + i\lambda_0) \{ k^2 \zeta^4 + ik[(2k+1) + \bar{\rho}(k+2)]\zeta^3 - \\ - [(2k^2+1) + \bar{\rho}(k^2+9k+2)]\zeta^2 - i9\bar{\rho}(k+1)\zeta \}, \quad (21)$$

и $f(\zeta)$ имеет, за исключением особых случаев, простые полюсы $\zeta = -i\lambda_k$, $k = 1, 2, 3, 4, \dots$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и λ_4 – корни полинома четвертого порядка, стоящего в знаменателе (функции $f(\zeta)$ в выражении (21)).

Дальнейшее определение корней λ_k показывает, что они комплексные либо чисто мнимые. В обоих случаях все полюсы находятся в нижней полуплоскости. Если корни комплексные, то появляются и их сопряженные, т.е. если λ_1 – комплексный корень, то появляется также корень $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$, где $\bar{\lambda}_1$ – сопряженное λ_1 комплексное число. Если корни чисто мнимые, то они различны, за исключением

случая $-i\lambda_0$, который совпадает с одним из корней, и тогда $f(\zeta)$ будет иметь три простых полюса и один полюс второго порядка. Однако и в этом случае вычет можно вычислить прямыми методами теории функций комплексного переменного. Возможны также случаи, когда все корни λ_k комплексные или чисто мнимые (рис. 2).

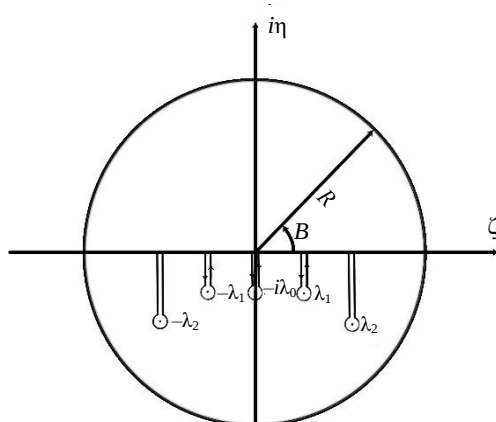


Рис. 2. Распределение вычетов
Fig. 2. Distribution of residues

Если корни λ_k ($k = 1, \dots, 4$) комплексные, тогда

$$f(\zeta) = \frac{(-k^2\zeta^2 - i3k\zeta + 3)e^{-i(1+\tau)\zeta}}{(\zeta + i\lambda_0)(\zeta - \lambda_1)(\zeta + \bar{\lambda}_1)(\zeta + \lambda_3)(\zeta + \bar{\lambda}_3)}.$$

Если два корня комплексные и два – чисто мнимые, тогда

$$f(\zeta) = \frac{(-k^2\zeta^2 - i3k\zeta + 3)e^{-i(1+\tau)\zeta}}{(\zeta + i\lambda_0)(\zeta - \lambda_1)(\zeta + \bar{\lambda}_1)(\zeta + \lambda_3)(\zeta + \bar{\lambda}_1)}.$$

Для получения численных результатов, относящихся к нестационарному движению сферы под действием падающих волн с различными скоростями затухания, использовались величины $\bar{\rho}$, равные 0.4, 1.0 и 1.6, и коэффициент Пуассона $\nu_c = 0.25$. Рассмотрим сначала случай $\bar{\rho} = 1$. Тогда $f(\zeta)$ принимает вид:

$$f(\zeta) = \frac{e^{-i(1+\tau)\zeta}}{(\zeta + i\lambda_0)(\zeta + \frac{3}{2}i - \frac{3^{1/2}}{2})(\zeta + \frac{3}{2}i + \frac{3^{1/2}}{2})}.$$

При исследовании подынтегрального выражения в уравнении (17) нетрудно увидеть, что величина $e^{-i(1+\tau)\zeta}$ стремится к нулю при $|\zeta| \rightarrow \infty$ на верхней полуокружности, когда $(1+\tau) < 0$, и на нижней полуокружности, когда $(1+\tau) > 0$. Таким образом, имеет смысл использовать верхнюю полуокружность в случае $(1+\tau) < 0$ и нижнюю полуокружность в случае $(1+\tau) > 0$ и интегрировать по контуру. Следует отметить, что, хотя мы имеем дело с чисто упругой средой, экспоненциальное затухание свободных колебаний связано с тем, что при коле-

бании сферы образуются волны и энергия колебаний рассеивается в направлении от сферы.

На рис. 3 представлены соответственно действительные и мнимые части функции U в зависимости от времени.

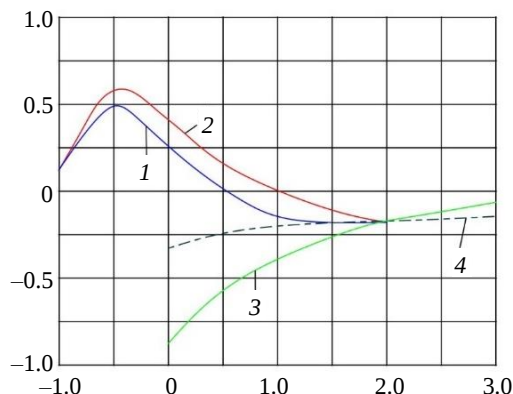


Рис. 3. Изменение перемещений жесткого выключения в зависимости от времени при различных отношениях плотностей: 1 – вязкоупругая окружающая среда ($\bar{\rho} = 0.4$), 2 – упругая среда ($\bar{\rho} = 0.4$), 3 – вязкоупругая среда ($\bar{\rho} = 1.4$), 4 – упругая среда ($\bar{\rho} = 1.4$)

Fig. 3. Time variation of hard-shutdown displacements at different density ratios: 1, viscoelastic medium ($\bar{\rho} = 0.4$); 2, elastic medium ($\bar{\rho} = 0.4$); 3, viscoelastic medium ($\bar{\rho} = 1.4$); and 4, elastic medium ($\bar{\rho} = 1.4$)

Отмечено, что в случае $\bar{\rho} = 0.4$ скорость движения сферы растёт медленнее, чем при $\bar{\rho} = 1$ и $\bar{\rho} = 2$. Однако наблюдается существенное различие через интервал, который приблизительно в 1,5 раза больше времени перехода.

Случай $\bar{\rho} = 2$, когда мы имеем два затухающих члена, может быть аналогичен случаю сильно демпфированной системы.

Рассмотрим далее экспоненциально затухающую волну напряжения. Эта форма возмущения выбрана потому, что она описывает типичный источник взрыва [4]. В соответствии с уравнением (6) перемещение сферического жесткого тела имеет вид:

$$U^*(t) = \frac{3i\bar{\rho}}{2\pi} (-k^2\alpha^2a^2 - 3ik\alpha a + 3)e^{-i(\alpha a + \omega t)} d\omega / (k + i\alpha) \times$$

$$\times \{k^2\alpha^4a^4 + ik[(2k+1)]\alpha^3a^3 -$$

$$- [(2k^2+1) + \bar{\rho}(k^2+9k+2)]\alpha^2a^2 - i9\bar{\rho}(k+1)\alpha a + 9\bar{\rho}\}.$$
(22)

Следует отметить, что при отсутствии внешних нагрузок (14) рассматриваются «связные собственные колебания». Тогда решение (13) будет описывать затухающие колебания, в то время как решение (18) имеет только один член с затухающими колебаниями. Также необходимо отметить, что собственные комплексные частоты колебаний сферических тел тесно связаны с отраженными волнами.

Пример. Рассмотрим воздействие нестационарных волн (14) на сферическую оболочку.

Когда $n = 1$, формой для нормального прогиба является функция $P_1^0 = \cos \theta$, а для тангенциального – $P_1^1 = \sin \theta$. При $n = 1$ формулы (12) и (13) примут вид:

$$u_1^L = \frac{3c_{10}^2(1+v_0)}{ms^2D(s)}(1-\Omega_\Gamma(\bar{s})), \quad w_1^L = \frac{3[s^2+c_{10}^2(1+v_0)]}{ms^2D(s)}(1-\Omega_\Gamma(\bar{s})), \quad (23)$$

где

$$D(s) = s^2 + (1/m + 2.0)s^3 + [2 + 1/m + 3c_{10}^2(1+v_0)\Omega(\bar{s})]s^2 + c_{10}^2(1+v_0)\Omega(\bar{s})(6 + 1/m)(s + 1).$$

Обозначим корни уравнения $D(s) = 0$ (ядра релаксации оболочки и среды равны нулю) через ω_j ($j = 1 \div 4$). Тогда оригиналы функции (23) принимают вид:

$$u_1(t) = \frac{3}{m} \left[\frac{m}{6m+1}(t+1) + \sum_{j=1}^4 A_j e^{t\omega_j} \right], \quad w_1(t) = \frac{3}{m} \left[\frac{m}{6m+1}(t+1) + \sum_{j=1}^4 B_j e^{t\omega_j} \right],$$

где

$$A_j = \frac{c_{10}^2(1+v_0)}{\omega_j^2 \prod_{k \neq j, k=1} (\omega_j - \omega_k)}, \quad B_j = \frac{\omega_j^2 + c_{10}^2(1+v_0)}{\omega_j^2 \prod_{k \neq j, k=1} (\omega_j - \omega_k)}.$$

Если учитываются вязкие свойства материалов (оболочки и окружающей ее среды), то решение трансцендентного уравнения $D(s) = 0$ с комплексными входящими параметрами аналитически решить не удастся. Поэтому оно решается численно – методом Мюллера. Результаты расчетов приведены в таблице.

Зависимость комплексных частот неосесимметричных колебаний цилиндрических оболочек от модуля упругости E при скользящем контакте

ω_j	$E = 0,2$	$E = 0,4$	$E = 0,6$	$E = 0,8$	$E = 1,0$
ω_1	5.9531D-02	6.1341D-02	6.1901D-02	6.2193D-02	6.1787D-02
	-i7.5656D-2	-i7.3121D-02	-i7.2823D-02	-i7.1202D-02	-i6.8760D-02
ω_2	1.1582D-01	1.1585D-01	2.4513D-01	4.4340D-01	1.1588D-01
	-i6.9000D-1	-i6.9004D-01	-i4.4318D-01	-i6.8910D-01	-i6.8987D-01
ω_3	5.7958D+00	5.6652D+00	5.7376D+00	5.7505D+00	5.7971D+00
	-3.7114D+0	-i3.6201D+00	-i3.5791D+00	-i3.6992D+0	-i3.7144D+00
ω_4	5.4433D+00	5.5961D+00	5.4244D+00	5.0541D+00	5.4428D+00
	-3.8908D+0	-i3.9481D+0	-i3.8281D+00	-i3.9896D+0	-i3.8914D+00
ω_5	6.8053D+00	4.8054D+00	6.8055D+00	6.8064D+00	6.8053D+00
	-i2.8277D+0	-i2.8277D+00	-i2.8279D+00	-i2.8181D+0	-i2.8227D+00

По данным таблицы построены контурные напряжения оболочки (рис. 4). Из графиков видно, что при движении оболочки по первой форме в ней создаются довольно значительные напряжения, амплитуда которых составляет до 35% напряжений при нулевой форме движения.

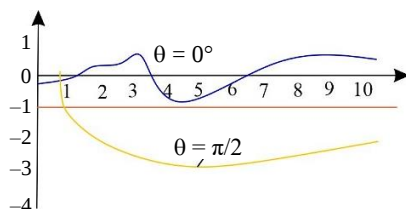


Рис. 4. Изменение контурного напряжения в зависимости от времени

Fig. 4. Time variation of contour stresses

При учете вязкоупругих свойств окружающей деформируемой среды в процессе взаимодействия нестационарных волн с оболочкой происходит диссипация энергии [14]. Это явление приводит к снижению падающих нагрузок. На основе анализа многочисленных результатов выявлено, что при учете вязкоупругих свойств материалов оболочки и окружающей среды напряжения снижаются до 15%.

Заключение

1. Предложены математическая постановка и методы решения задачи воздействия нестационарных нагрузок на сферическую оболочку, находящуюся в вязкоупругой (упругой) среде.

2. Установлено, что при падении нестационарных волн в начальный момент сферическая оболочка становится почти равномерно всесторонне сжатой, затем наступает качественно новая фаза движения, на которой контурные напряжения затухают и появляются заметные изгибные напряжения.

3. Из численных результатов следует, что в нестационарном волновом поле компоненты напряжения при контакте оболочки со средой становятся быстро изменяющимися функциями координат и существенно зависят от интенсивности и характера изменения нагрузок во времени. При действии нестационарных нормальных волн на сферическом теле в теневой зоне возникает зона растягивающих напряжений.

Список источников

1. Вестяк А.В., Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарное взаимодействие деформируемых тел с окружающей средой // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. М. : Наука, 1985. Т. 9. С. 69–148.
2. Mow C.C., Pao Y.H. The Diffraction of Elastic waves and Dynamic Stress Concentrations. California, 1971. 682 p.
3. Перцев А.К., Платонов Э.Г. Динамика оболочек и пластин (нестационарные задачи). Л. : Судостроение, 1987. 316 с.
4. Филиппов И.Г., Егорычев О.А. Нестационарные колебания и дифракция волн в акустических и упругих средах. М. : Машиностроение, 1977. 304 с.
5. White R.M. Surface elastic waves // Proceedings of the IEEE. 1970. V. 58 (8). P. 1238–1276. doi: 10.1109/PROC.1970.7900
6. Hasanov A., Kurbanov N., Mikhailova N. Investigation of Free Vibrations of Viscoelastic Bodies // Problems of Cybernetics and Informatics : IV International Conference. Baku, 2012 V. III. P. 1–29.
7. Kurbanov N.T., Nasibzada V.N. Investigation of forced oscillations viscoelastic shells // International Journal of Current Research. 2015. V. 7, is. 07. P. 18356–18360.

8. Сафаров И.И., Тешаев М.Х., Болтаев З.И. Волновые процессы в механическом волноводе. Основы, концепции, методы. Lambert Academic Publishing, 2012. 220 p.
9. Лычев С.А., Сеницкий Ю.Э. Несимметричные интегральные преобразования и их приложения к задачам вязкоупругости // Вестник Самарского государственного университета. Естественно-научная серия. 2002. Спец. вып. С. 16–38.
10. Abramidze Ed., Abramidze El. Analysis of nonlinear deformation task of layered cylindrical shell by local surface force and temperature // J. Appl. Math. Inform. Mech. 2019. V. 24 (2). P. 3–9.
11. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэроупругость тел сферической формы. М.: Наука, 1990. 264 с.
12. Абдукадыров С.А. Нестационарное деформирование цилиндрической оболочки при действии плоской волны сдвига // Исследования по теории пластин и оболочек. 1992. Вып. 24. С. 118–124. URL: <http://mi.mathnet.ru/rus/kutpo/v24/p118>
13. Safarov I.I., Boltaev Z.I., Axmedov M.Sh. Setting the Linear Oscillations of Structural Heterogeneity Viscoelastic Lamellar Systems with Point Relations // J. Applied Mathematics. 2015. V. 6. P. 228–234. doi: 10.4236/am.2015.62022
14. Safarov I.I., Boltaev Z.I., Axmedov M.Sh. Natural Oscillations of Cylindrical Bodies with External Friction on the Boundary // J. Applied Mathematics. 2015. V. 6. P. 629–645. doi: 10.4236/am.2015.63057

References

1. Vestyak A.V., Gorshkov A.G., Tarlakovskiy D.V. (1985) Nestatsionarnoe vzaimodeystviy deformiruemykh tel s okruzhayushchey sredoy [Unsteady interaction of deformable bodies with the environment]. *Itogi nauki i tekhniki. Mekhanika deformiruемого tverdogo tela*. 9. pp. 69–148.
2. Mow C.C., Pao Y.H. (1971) *The Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations*. California.
3. Pertsev A.K., Platonov E.G. (1987) *Dinamika obolochek i plastin: Nestatsionarnye zadachi* [Dynamics of shells and plates: Non-stationary problems]. Leningrad: Sudostroenie.
4. Filippov I.G. (1977) *Nestatsionarnye kolebaniya i difraktsiya voln v akusticheskikh i uprugikh sredakh* [Unsteady oscillations and wave diffraction in acoustic and elastic media]. Moscow: Mashinostroenie.
5. White R.M. (1970) Surface elastic waves. *Proceedings of the IEEE*. 58(8). pp. 1238–1276. doi: 10.1109/PROC.1970.7900
6. Hasanov A., Kurbanov N., Mikhailova N. (2012) Investigation of free vibrations of viscoelastic bodies. *Proceedings of the IV International Conference «Problems of Cybernetics and Informatics»*, Baku, Azerbaijan, III. pp. 1–29.
7. Kurbanov N.T., Nasibzada V.N. (2015) Investigation of forced oscillations viscoelastic shells. *International Journal of Current Research*. 7(07). pp. 18356–18360.
8. Safarov I.I., Teshaeв M.Kh., Boltaev Z.I. (2012) *Volnovye protsessy v mekhanicheskom volnovode* [Wave processes in a mechanical waveguide]. Germany: Lambert Academic Publishing.
9. Lychev S.A., Senitskiy Yu.E. (2002) Nesymmetrichnye integral'nye preobrazovaniya i ikh prilozheniya k zadacham vyazko-uprugosti [Asymmetric integral transformations and their applications to viscoelasticity problems]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvenno-nauchnaya seriya. Spetsial'nyy vypusk – Vestnik of Samara University. Natural Science Series. Special Issue*. pp. 16–38.
10. Abramidze Ed., Abramidze El. (2019) Analysis of nonlinear deformation task of layered cylindrical shell by local surface force and temperature. *Applied Mathematics, Informatics and Mechanics*. 24(2). pp. 3–9.
11. Gorshkov A.G., Tarlakovskiy D.V. (1990) *Nestatsionarnaya aero-uprugost' tel sfericheskoy formy* [Unsteady aero-elasticity of spherical bodies]. Moscow: Nauka.

12. Abdukadyrov S.A. (1992) Nestatsionarnoe deformirovanie tsilindricheskoy obolochki pri deystvii ploskoy volny sdviga [Unsteady deformation of a cylindrical shell under the action of a plane shear wave]. *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek*. 24. pp. 118–124. doi: 10.4236/am.2015.62022
13. Safarov I.I., Boltaev Z.I., Axmedov M.Sh. (2015) Setting the linear oscillations of structural heterogeneity viscoelastic lamellar systems with point relations. *Applied Mathematics*. 6. pp. 228–234. doi: 10.4236/am.2015.63057

Сведения об авторах:

Сафаров Исмонил Иброхимович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Высшая математика» Ташкентского химико-технологического института, Ташкент, Узбекистан. E-mail: safarov54@mail.ru

Тешаев Мухсин Худойбердиевич – доктор физико-математических наук (DSc), доцент, главный научный сотрудник Бухарского отделения Института математики АН Республики Узбекистан, Бухара, Узбекистан. E-mail: muhsin_5@mail.ru

Information about the authors:

Safarov Ismoil I. (Doctor of Physics and Mathematics, Tashkent Institute of Chemical Technology, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: safarov54@mail.ru

Teshaev Mukhsin Kh. (Bukhara Branch of the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, Bukhara, Uzbekistan). E-mail: muhsin_5@mail.ru

Статья поступила в редакцию 03.05.2022; принята к публикации 01.06.2023

The article was submitted 03.05.2022; accepted for publication 01.06.2023

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

2023. № 83

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано в печать 19.06.2023 г. Формат 70×100^{1/16}.
Печ. л. 11,1; усл. печ. л. 14,5. Цена свободная.
Тираж 250 экз. Заказ № 5492.

Дата выхода в свет 22.06.2023 г.

Адрес издателя и редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Томский государственный университет

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru