ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2014 Математика и механика № 2(28)

УДК 517.54

Г.Д. Садритдинова

ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛА НА КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Исследования, проведённые в данной работе, относятся к геометрической теории функций комплексного переменного. А именно, продолжается решение экстремальной задачи о нахождении управляющих функций в уравнении Лёвнера, приводящих к граничным функциям системы функционалов, зависящих от значения функции и её производной в фиксированной точке, на некоторых классах однолистных функций.

Ключевые слова: *граничная функция, класс голоморфных однолистных функций, максимальное значение функционала, минимальное значение функционала, уравнение Лёвнера, экстремальная управляющая функция.*

Задача о нахождении множества значений функционалов, зависящих от значения функции и её производных в фиксированной точке, является классической задачей геометрической теории функций комплексного переменного. Подобными функционалами занимались такие авторы, как Л. Бибербах, Г.М. Голузин, И.Е. Базилевич, П.П. Куфарев, И.А. Александров и другие. Для исследований использовался, среди прочих, метод параметрических представлений Лёвнера, в основе которого лежит обыкновенное дифференциальное уравнение, в частном случае уравнение Лёвнера.

Пусть S – класс голоморфных однолистных в единичном круге $E=\{z:|z|<1\}$ функций $f(z)$, нормированных условиями $f(0)=0$, $f'(0)=1$. Пусть S_p (p=1,2,…) – подкласс класса S функций, обладающих p-кратной симметрией вращения относительно нуля, т.е. таких, что

$$f\left(e^{i\frac{2\pi k}{p}}z\right)=e^{i\frac{2\pi k}{p}}f(z),\quad k=1,2,\ldots,p-1 .$$

Подкласс S_p выделяется в самостоятельный класс функций, причём $S_1=S$.

Рассмотрим уравнение Лёвнера

$$\frac{d\varsigma(z,\tau)}{d\tau}=-\varsigma(z,\tau)\frac{\mu^p(\tau)+\varsigma^p(z,\tau)}{\mu^p(\tau)-\varsigma^p(z,\tau)},\quad \varsigma(z,0)=z , \tag{1}$$

$$|z|<1,\quad 0\le\tau<\infty ,$$

в котором управляющая функция $\mu(\tau)$, $|\mu(\tau)|=1$, является непрерывной или кусочно-непрерывной на $[0,\infty)$. Функции $f(z)=\lim\limits_{\tau\to\infty}e^{\tau}\varsigma(z,\tau)$, которые мы называем предельными для решений уравнения Лёвнера, образуют плотный подкласс класса S_p.

Ставится задача выделить управляющие функции в уравнении Лёвнера, приводящие к так называемым граничным функциям системы функционалов

$$\left\{\ln|f'(z)|, \arg f'(z), \ln\left|\frac{f(z)}{z}\right|, \arg\frac{f(z)}{z}, \ln\left|\frac{f(z)}{zf'(z)}\right|, \arg\frac{f(z)}{zf'(z)}\right\}$$

на классах S и S_p, т.е. к функциям, вносящим граничные точки в область значений этих функционалов, обнаружить закономерности. Эта задача была решена для $\arg f'(z)$ на классе S И.А. Александровым и А.И. Александровым [1], на классе S_p ($p = 2,3,\ldots$) Г.Д. Садритдиновой [2], для $\ln|f'(z)|$ на классах S и S_p ($p = 2,3,\ldots$) Г.Д. Садритдиновой [3, 4].

В настоящей работе задача решается для функционала $I = \ln\left|\frac{f(z)}{z}\right|$ на классах S и S_p.

Выполним над уравнением (1) некоторые преобразования. Будем иметь

$$\frac{1}{\varsigma}\frac{d\varsigma}{d\tau} = -1 - \frac{2\varsigma^p}{\mu^p - \varsigma^p} \Rightarrow \frac{1}{\varsigma}\left(\varsigma + \frac{d\varsigma}{d\tau}\right) = -\frac{2\varsigma^p}{\mu^p - \varsigma^p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e^\tau\varsigma}\frac{d\left(e^\tau\varsigma\right)}{d\tau} = -\frac{2\varsigma^p}{\mu^p - \varsigma^p} \Rightarrow \frac{d\left(\ln e^\tau\varsigma\right)}{d\tau} = -\frac{2\varsigma^p}{\mu^p - \varsigma^p}.$$

Проинтегрировав последнее равенство по τ, $0<\tau<\infty$, получим

$$\ln\frac{f(z)}{z} = -2\int_0^\infty \frac{\varsigma^p(z,\tau)}{\mu^p(\tau) - \varsigma^p(z,\tau)}d\tau, \tag{2}$$

где $f(z) \in S_p$.

Множество значений функционала $\ln\frac{f(z)}{z}$ не зависит от $\arg z$, поэтому далее будем считать $z = r$, $0 < r < 1$.

Введём обозначения

$$|\varsigma(r,\tau)| = \rho(r,\tau), \quad \varsigma(r,\tau)\overline{\mu}(\tau) = \rho(r,\tau)\,y(r,\tau). \tag{3}$$

Тогда уравнение Лёвнера (1) после некоторых преобразований примет вид

$$\frac{d\ln\varsigma(r,\tau)}{d\tau} = -\frac{1+\rho^p(r,\tau)\,y^p(r,\tau)}{1-\rho^p(r,\tau)\,y^p(r,\tau)}.$$

Из этого равенства следует, что

$$\frac{d\ln\rho(r,\tau)}{d\tau} = -\frac{1-\rho^{2p}}{\left|1-\rho^p y^p\right|^2} \tag{4}$$

и

$$i\frac{d\arg\varsigma(r,\tau)}{d\tau} = -\frac{\rho^p\left(y^p - \overline{y}^p\right)}{\left|1-\rho^p y^p\right|^2}. \tag{5}$$

Равенство (2) с учётом обозначений (3) преобразуется к виду

$$\ln\frac{f(r)}{r} = -2\int_0^\infty \frac{\rho^p y^p}{1-\rho^p y^p}d\tau.$$

Заменим в последнем интеграле τ на ρ, используя формулу (4), которая свидетельствует об убывании функции $\rho(\tau)$, причём $\rho(r,0)=r, \quad \lim\limits_{\tau\to\infty}\rho(r,\tau)=0$. Тогда

$$\ln\frac{f(r)}{r}=2\int_0^r\frac{\rho^{p-1}y^p}{1-\rho^p y^p}\cdot\frac{-\left|1-\rho^p y^p\right|^2}{1-\rho^{2p}}d\rho=-2\int_0^r\frac{\rho^{p-1}y^p\left(1-\rho^p\overline{y}^p\right)}{1-\rho^{2p}}d\rho=$$

$$=-2\int_0^r y^p\frac{\rho^{p-1}d\rho}{1-\rho^{2p}}-\frac{1}{p}\ln\left(1-r^{2p}\right).$$

Положив в полученном интеграле $\rho=\left(\frac{1-s}{1+s}\right)^{\frac{1}{p}}$, будем иметь

$$\ln\frac{f(r)}{r}=-\frac{1}{p}\int_\sigma^1 y^p\frac{ds}{s}-\frac{1}{p}\ln\left(1-r^{2p}\right), \tag{6}$$

где $\sigma=\frac{1-r^p}{1+r^p}$. Заменим в (6) функцию $y(r,s)$ на вещественнозначную функцию $t(r,s)$ по формуле $y=\left(\frac{i+t}{i-t}\right)^{\frac{1}{p}}$. Получим

$$\ln\frac{f(r)}{r}=\frac{1}{p}\int_\sigma^1\frac{t^2-1}{t^2+1}\frac{ds}{s}-\frac{1}{p}\ln\left(1-r^{2p}\right)+\frac{2i}{p}\int_\sigma^1\frac{t}{1+t^2}\frac{ds}{s}.$$

Таким образом,

$$\ln\left|\frac{f(r)}{r}\right|=\frac{1}{p}\int_\sigma^1 g(s,t)\,ds-\frac{1}{p}\ln\left(1-r^{2p}\right), \tag{7}$$

где $g(s,t)=\frac{t^2-1}{t^2+1}\cdot\frac{1}{s}$.

Условие $g'_t(s,t)=0$ даёт $t(s)=0$ и $t(s)=\infty$.

Вычислив в (7) интеграл при $t(s)=0$, приходим к минимальному значению $\ln\frac{1}{\left(1+r^p\right)^{2/p}}$ функционала $\ln\left|\frac{f(r)}{r}\right|$ [5].

Восстановим $\mu(\tau)$, соответствующую минимуму функционала I. При $t=0$ имеем $y=1^{1/p}$. Проинтегрировав при таких y уравнение (4) с начальным условием $\rho(r,0)=r$, получаем

$$\rho(r,\tau)=\left[\frac{\left(1-\sqrt{1-4K_1(r)e^{-p\tau}}\right)^2}{4K_1(r)e^{-p\tau}}\right]^{\frac{1}{p}},$$

где $K_1(r)=\frac{r^p}{\left(1+r^p\right)^2}$. Уравнение (5) при $y=1^{1/p}$ принимает вид $\frac{d\arg\varsigma(r,\tau)}{d\tau}=0$.

С учётом начального условия $\arg\varsigma(r,0)=0$ находим $\arg\varsigma(r,\tau)=0$.

Поскольку получили $\varsigma(r,\tau) = \rho(r,\tau)$, то из формул (3) следует, что $\overline{\mu} = 1^{1/p}$ и соответственно $\mu = 1^{1/p}$ – экстремальные управляющие функции, дающие функционалу I минимум.

Интегрирование уравнения Лёвнера (1) с $\mu = 1^{1/p}$ даёт решение

$$\varsigma(z,\tau) = \left[\frac{\left(1-\sqrt{1-4K_1(z)e^{-p\tau}}\right)^2}{4K_1(z)e^{-p\tau}}\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Однозначная ветвь функции ς выбирается в соответствии с условием $\varsigma(z,\tau) = e^{-\tau}z+\ldots$. Функция $f(z) = \lim\limits_{\tau\to\infty} e^{\tau}\varsigma(z,\tau) = \dfrac{z}{\left(1+z^p\right)^{2/p}} \in S_p$ является граничной функцией относительно функционала I, на которой функционал достигает своего минимального значения.

Вычислив теперь интеграл в (7) при $t = \infty$, приходим к максимальному значению $\ln\dfrac{1}{\left(1-r^p\right)^{2/p}}$ функционала $\ln\left|\dfrac{f(r)}{r}\right|$ [5].

Восстановим $\mu(\tau)$, соответствующую максимуму функционала I. При $t = \infty$ получаем $y = (-1)^{1/p}$. Интегрирование уравнения (4) с такими y и начальным условием $\rho(r, 0) = r$ даёт решение

$$\rho(r,\tau) = \left[\frac{\left(1-\sqrt{1+4K_2(r)e^{-p\tau}}\right)^2}{4K_2(r)e^{-p\tau}}\right]^{\frac{1}{p}},$$

где $K_2(r) = \dfrac{r^p}{\left(1-r^p\right)^2}$. Уравнение (5) при $y = (-1)^{1/p}$ с начальным условием $\arg\varsigma(r,0) = 0$ даёт $\arg\ \varsigma(r,\tau)=0$. Таким образом, из формул (3) следует, что $\mu = (-1)^{1/p}$ – экстремальные управляющие функции, приводящие к максимуму функционала I.

Проинтегрировав уравнение Лёвнера (1) с $\mu = (-1)^{1/p}$, получаем

$$\varsigma(z,\tau) = \left[\frac{\left(1-\sqrt{1+4K_2(z)e^{-p\tau}}\right)^2}{4K_2(z)e^{-p\tau}}\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда $f(z) = \lim\limits_{\tau\to\infty} e^{\tau}\varsigma(z,\tau) = \dfrac{z}{\left(1-z^p\right)^{2/p}} \in S_p$ – граничная функция для функционала I, на которой функционал достигает своего максимума.

Итак, экстремальные управляющие функции, приводящие к граничным значениям функционала I на классе S_p, найдены.

Положив везде $p = 1$, найдём экстремальные управляющие функции для функционала I на классе S. Так, $\mu = 1$ приводит к минимальному значению, а $\mu = -1$ – к максимальному значению данного функционала.

Добавим, что экстремальные управления на классе S_p (p = 1,2,…) для функционала $\ln\left|\frac{f(z)}{z}\right|$ оказываются такими же, как и для функционала $\ln|f'(z)|$ [3, 4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров И.А., Александров А.И.* Экстремальные управляющие функции в уравнении Лёвнера в теореме вращения // Докл. АН. 2000. Т. 371. № 1. С. 7–9.
2. *Садритдинова Г.Д.* Управляющие функции и аргумент производной // Вестник Томского государственного университета. 2003. № 280. С. 78–80.
3. *Садритдинова Г.Д.* Управляющие функции и модуль производной // Вестник Томского государственного университета. 2007. № 299. С. 104–105.
4. *Садритдинова Г.Д.* Экстремальное управление для модуля производной на классе p-симметричных функций // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2007. № 1. С. 54–57.
5. *Александров И.А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.

Статья поступила 17.11.2013 г.

Sadritdinova G. D. EXTREME CONTROL FOR A FUNCTIONAL ON CLASSES OF ANALYTICAL FUNCTIONS.

Let S be the class of holomorphic univalent functions $f(z)$ normalized by conditions $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ in a unit circle $E = \{z : |z| < 1\}$ functions $f(z)$, rated conditions $f(0)=0$, $f'(0)=1$. Let S_p (p = 1, 2, …) is a subclass of the class S of functions possessing p-multiple symmetry of rotation with respect to zero, that is, such that

$$f\left(e^{i\frac{2\pi k}{p}} z\right) = e^{i\frac{2\pi k}{p}} f(z), \quad k = 1,2,\ldots, p-1 .$$

The subclass S_p is distinguished as an independent class of functions, and $S_1 = S$.

We consider Loewner's equation

$$\frac{d\varsigma(z,\tau)}{d\tau} = -\varsigma(z,\tau)\frac{\mu^p(\tau)+\varsigma^p(z,\tau)}{\mu^p(\tau)-\varsigma^p(z,\tau)}, \quad \varsigma(z,0) = z$$

$$|z| < 1, \quad 0 \le \tau < \infty ,$$

in which control function $\mu(\tau)$, $|\mu(\tau)|=1$, is continuous or piecewise-continuous on $[0,\infty)$. Functions $f(z) = \lim\limits_{\tau\to\infty} e^{\tau}\varsigma(z,\tau)$ which we call limiting for solutions of the Loewner equation form a dense subclass of the class S_p.

In this article the problem of finding control functions leading to boundary functions of the functional $I = \ln\left|\frac{f(z)}{z}\right|$ in Loewner's equation on classes S and S_p is solved by the parametrical method.

The set of values of this functional does not depend on arg z therefore, from now on we suppose $z = r$, $0 < r < 1$.

Executing some transformations over Loewner's equation, introducing the designations

$$|\varsigma(r,\tau)| = \rho(r,\tau), \quad \varsigma(r,\tau)\bar{\mu}(\tau) = \rho(r,\tau)y(r,\tau)$$

and substituting $\rho = \left(\frac{1-s}{1+s}\right)^{\frac{1}{p}}$ and $y = \left(\frac{i+t}{i-t}\right)^{\frac{1}{p}}$, we have

$$\ln\left|\frac{f(r)}{r}\right| = \frac{1}{p}\int_{\sigma}^{1} g(s,t)\,ds - \frac{1}{p}\ln\left(1-r^{2p}\right),$$

where $g(s,t)=\frac{t^2-1}{t^2+1}\cdot\frac{1}{s}$, $\sigma=\frac{1-r^p}{1+r^p}$.

The condition $g'_t(s,t)=0$ yields $t(s)=0$ and $t(s)=\infty$. The solution $t(s)=0$ leads to extreme control functions $\mu=1^{1/p}$, providing a minimum to the studied functional. Function $f(z)=\frac{z}{\left(1+z^p\right)^{2/p}}\in S_p$, as applied to the functional I, is a boundary function at which the functional reaches the minimum value. As $t(s)=\infty$, we find extreme control functions $\mu=(-1)^{1/p}$, leading to a maximum of the functional I. The boundary function $f(z)=\frac{z}{\left(1-z^p\right)^{2/p}}\in S_p$ provides a maximum to the functional I.

Setting everywhere $p=1$, we find extreme control functions for the functional I on the class S.

Keywords: Boundary function, class of univalent holomorphic functions, the maximum value of the functional, minimal value of the functional, Loewner's equation, extreme control function.

REFERENCES

1. Aleksandrov I.A., Aleksandrov A.I. Ekstremal'nye upravlyayushchie funktsii v uravnenii Levnera v teoreme vrashcheniya (2000) Dokl. Akad. Nauk. V. 371. No 1, pp. 7–9. (in Russian)
2. Sadritdinova G.D. Upravlyayushchie funktsii i argument proizvodnoy (2003) Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. No. 280, pp. 78–80. (in Russian)
3. Sadritdinova G.D. Upravlyayushchie funktsii i modul' proizvodnoy (2007) Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. No. 299, pp. 104–105. (in Russian)
4. Sadritdinova G.D. Ekstremal'noe upravlenie dlya modulya proizvodnoy na klasse r-simmetrichnykh funktsiy (2007) Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. No 1, pp. 54–57. (in Russian)
5. Aleksandrov I.A. Parametricheskie prodolzheniya v teorii odnolistnykh funktsiy. Moskow, Nauka Publ., 1976. (in Russian)

SADRITDINOVA Gulnora Dolimdganovna (Candidate of Physics and Mathematics, Assoc. Prof., Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, Russian Federation)

E-mail: dolina1@sibmail.com