

В Е С Т Н И К
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2023

№ 85

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

**РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), И.А. Колесников (отв. секретарь по разделу «Математика»), А.Д. Сидоров (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, В.Г. Бутов, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, Е.Л. Лобода, Г.О. Рябова, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Е. А. Тимошенко, М.А. Шеремет, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Ivan A. Kolesnikov (Executive Editor of the Mathematics Section), Aleksey D. Sidorov (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenchikov, Vladimir G. Butov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Egor L. Loboda, Galina O. Ryabova, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Egor A. Timoshenko, Mikhail A. Sheremet, Gennadiy R. Shragер, Ernst R. Shragер.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферруется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

Электронный адрес: <http://journals.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А., Байманкулов А.Т. Об обобщении некоторых классов почти выпуклых и типично вещественных функций	5
Nikiforov N.I., Pergamenschikov S.M., Pchelintsev E.A. Super-efficient robust estimation in Lévy continuous time regression models from discrete data	22
Норбосамбуев Ц.Д. Хорошие кольца формальных матриц над кольцами вычетов	32

МЕХАНИКА

Андрющенко В.А., Бойко Е.В., Сахапов С.З., Скирда М.С., Смовж Д.В. Исследование струи, возникающей при распылении электродов в дуговом разряде при различных токах разряда	43
Биматов В.И., Механич А.А., Сияев С.В., Ящук А.А. Моделирование работы электромагнитного датчика скорости метаемого тела в канале высокоскоростной баллистической установки	58
Василевский М.В., Полошко В.А., Романдин В.И., Евсеев Н.С., Жуков И.А., Знатдинов М.Х., Марченко Е.С., Жилина Л.А. Теоретические и экспериментальные исследования процесса классификации в зависимости от характера скоростного взаимодействия частиц TiN в пневмоизмельчителе с псевдооживленным слоем	74
Гадильшина В.Р., Морозов П.Е., Шамсиев М.Н., Хайруллин М.Х. Гидродинамические исследования нефтяных скважин после кратковременного возмущения пласта	90
Галушина Т.Ю., Летнер О.Н., Сюсина О.М. Влияние светового давления и эффекта Ярковского на резонансное поведение астероидов с малыми перигелийными расстояниями	101
Данилкин Е.А., Лещинский Д.В., Старченко А.В. Микромасштабная математическая модель неизотермического турбулентного течения и переноса пассивной газообразной примеси в уличном каньоне	117
Зими́на В.А. Моделирование неоднородной деформации пористой керамики с использованием гауссовых случайных полей	132
Кагенов А.М., Костюшин К.В., Червакова А.В., Еремин И.В. Математическое моделирование взаимодействия одиночной сверхзвуковой струи с подвижной преградой	146
Соколова М.Ю., Христич Д.В. Об обращении нелинейных определяющих соотношений для гиперупругих анизотропных материалов	157

CONTENTS

MATHEMATICS

Maiyer F.F., Tastanov M.G., Utemissova A.A., Baimankulov A.T. On the generalization of some classes of close-to-convex and typically real functions	5
Nikiforov N.I., Pergamenshchikov S.M., Pchelintsev E.A. Super-efficient robust estimation in Lévy continuous time regression models from discrete data	22
Norbosambuev T.D. Good formal matrix rings over residue class rings	32

MECHANICS

Andryushchenko V.A., Boyko E.V., Sakhapov S.Z., Skirda M.S., Smovzh D.V. A study of jet formation during the sputtering of electrodes in an arc discharge for the different currents	43
Bimatov V.I., Mekhanich A.A., Sinyaev S.V., Yashchuk A.A. Simulation of an electromagnetic in-bore projectile velocity sensor for a high-speed ballistic cannon	58
Vasilevsky M.V., Polyushko V.A., Romandin V.I., Evseev N.S., Zhukov I.A., Ziatdinov M.Kh., Marchenko E.S., Zhilina L.A. Theoretical and experimental studies of the classification process depending on the nature of the high-speed interaction of TiN particles in a pneumogrinder with a fluidized bed	74
Gadilshina V.R., Morozov P.E., Shamsiev M.N., Khairullin M.Kh. Pressure-transient analysis of oil wells after a short-term disturbance of a formation	90
Galushina T.Yu., Lenter O.N., Syusina O.M. Influence of the solar radiation pressure and the Yarkovsky effect on the resonant behavior of asteroids with small perihelion distance	101
Danilkin E.A., Leshchinskiy D.V., Starchenko A.V. A microscale mathematical model of a non-isothermal turbulent flow and transport of a passive gaseous pollutant in a street canyon	117
Zimina V.A. Modeling of inhomogeneous deformation of porous ceramics using gaussian random fields	132
Kagenov A.M., Kostyushin K.V., Chervakova A.V., Eremin I.V. Mathematical modeling of the interaction of a single supersonic jet with a moving barrier	146
Sokolova M.Yu., Khristich D.V. On the inversion of nonlinear constitutive relations for hyperelastic anisotropic materials	157

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 517.54

doi: 10.17223/19988621/85/1

MSC: 30C45

**Об обобщении некоторых классов почти выпуклых
и типично вещественных функций****Федор Федорович Майер¹, Мейрамбек Габдулиевич Тастанов²,
Анар Алтаевна Утемисова³, Абдыкарим Тунгушбаевич Байманкулов⁴***^{1, 2, 3, 4} Костанайский региональный университет им. А. Байтурсынова,**Костанай, Казахстан**¹ maiyer@mail.ru**² tastao@mail.ru**³ anar_utemisova@mail.ru**⁴ bat_56@mail.ru*

Аннотация. В работе вводится класс $C(\lambda, a, \gamma) = \left\{ f(z) : \left| \left((1 - \lambda z^2) f'(z) \right)^{1/\gamma} - a \right| \leq a \right\}$,

$0 \leq \lambda \leq 1$, $0 < \gamma \leq 1$, $a > 1/2$, почти выпуклых порядка γ функций, обобщающий классы функций с ограниченным вращением ($a \rightarrow +\infty, \lambda = 0$) и функций, выпуклых порядка γ в направлении мнимой оси ($a \rightarrow +\infty, \lambda = 1$).

Для класса $C(\lambda, a, \gamma)$ и его подклассов найдены неуплощаемые теоремы искажения и точные радиусы выпуклости, а также получены аналогичные результаты в классе, обобщающем класс типично вещественных функций.

Ключевые слова: геометрическая теория функций, однолистные функции, оценки аналитических функций, типично вещественные функции, радиусы выпуклости

Для цитирования: Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А., Байманкулов А.Т. Об обобщении некоторых классов почти выпуклых и типично вещественных функций // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 85. С. 5–21. doi: 10.17223/19988621/85/1

On the generalization of some classes of close-to-convex and typically real functions

Fedor F. Maiyer¹, Meyrambek G. Tastanov²,
Anar A. Utemissova³, Abdykarim T. Baimankulov⁴

^{1, 2, 3, 4} *Kostanay Regional University named after A. Baitursynov, Kostanay, Kazakhstan*

¹ *maiyer@mail.ru*

² *tastao@mail.ru*

³ *anar_utemisova@mail.ru*

⁴ *bat_56@mail.ru*

Abstract. The paper introduces a class $C(\lambda, a, \gamma)$ of functions $f(z)$, analytic in the unit disk $E = \{z : |z| < 1\}$, having a power series expansion of the form $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$, $z \in E$, and satisfying the condition $\left| \left[(1 - \lambda z^2) f'(z) \right]^{\frac{1}{\gamma}} - a \right| \leq a$, where $0 \leq \lambda \leq 1$,

$0 < \gamma \leq 1$, and $a > \frac{1}{2}$. It is proved that all functions of class $C(\lambda, a, \gamma)$ are close-to-convex of the order of γ . Class $C(\lambda, a, \gamma)$ generalizes classes of functions with bounded turning $\operatorname{Re} f'(z) \geq 0$ (as $a \rightarrow +\infty$, $\lambda = 0$) and functions $f(z)$ convex in the direction of the imaginary axis $\operatorname{Re}[(1 - \lambda z^2) f'(z)] \geq 0$ ($a \rightarrow +\infty$, $\lambda = 1$) and creates a simple parametric passage from one class to another.

Based on the subordination method in class $C(\lambda, a, \gamma)$ and its subclasses, exact estimates are obtained for $|f'(z)|, |f(z)|, |zf''(z) / f'(z)|$ and the exact radii of the convexity. In particular cases, they yield previously known results for functions with bounded turning and functions convex in the direction of the imaginary axis.

Using the relationship $f(z) \in C(\lambda, a, \gamma) \Leftrightarrow F(z) = zf'(z) \in T(\lambda, a, \gamma)$, the article introduces the class $T(\lambda, a, \gamma) = \left\{ F(z) : \left| \left[(1 - \lambda z^2) F(z) / z \right]^{\frac{1}{\gamma}} - a \right| \leq a \right\}$ functions generalizing

the class of typically real functions and the class of functions satisfying the condition $\operatorname{Re}[F(z) / z] \geq 0$. In the class $T(\lambda, a, \gamma)$ and its subclasses, exact estimates of $|F(z)|, |zF'(z) / F(z)|$ are found and the exact radii of starlikeness are determined, which generalizes the classical results for typically real functions.

Keywords: geometric theory of functions, single-leaf functions, estimates of analytic functions, typically real functions, radii of convexity

For citation: Maiyer, F.F., Tastanov, M.G., Utemissova, A.A., Baimankulov, A.T. (2023) On the generalization of some classes of close-to-convex and typically real functions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 5–21. doi: 10.17223/19988621/85/1

Введение

Пусть A – класс аналитических в круге $E = \{z: |z| < 1\}$ функций $f(z)$, имеющих разложение вида $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, z \in E$, а S есть класс всех функций $f(z) \in A$, однолистных в E .

Уже не один десяток лет внимание многих математиков привлекают различные подклассы класса K почти выпуклых функций $f(z)$, введенного Одзаки [1] и Капланом [2] с помощью условия

$$\operatorname{Re} \left(\frac{f'(z)}{g'(z)} \right) \geq 0, z \in E, \quad (1)$$

где $g(z)$ – аналитическая функция, отображающая круг E на какую-нибудь выпуклую область. Известно, что $K \subset S$ и подклассами класса K являются классы выпуклых S^0 и звездообразных S^* функций.

В работах М. Рида и А. Реньи [3, 4] с помощью условия

$$\left| \arg \frac{f'(z)}{g'(z)} \right| \leq \gamma \frac{\pi}{2}, 0 \leq \gamma \leq 1, z \in E, \quad (2)$$

введен подкласс $K(\gamma)$ класса K функций $f(z)$, однолистных и почти выпуклых порядка γ .

Каждой функции $g(z) \in S^0$ соответствует свой подкласс почти выпуклых функций $f(z)$, наследующий в некоторой степени свойства функции $g(z)$.

Например, функциям $g_1(z) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$, $g_2(z) = \frac{z}{1-z}$, $g_3(z) = -\ln(1-z)$ соответствуют следующие подклассы почти выпуклых функций: $\operatorname{Re}((1-z^2)f'(z)) \geq 0$, $\operatorname{Re}((1-z)^2 f'(z)) \geq 0$, $\operatorname{Re}((1-z)f'(z)) \geq 0$.

Среди таких подклассов особый интерес представляют функции, выпуклые в определенном направлении, а также классы функций, соединяющие с помощью параметра различные подклассы класса K . Например, в работе [5] исследовался класс функций, выпуклых в положительном направлении действительной оси (подкласс функций (1) с $g(z) = z/(1-z)$). Работа [6] дала толчок целому ряду исследований класса выпуклых в направлении мнимой оси функций, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Re}((1-z^2)f'(z)) \geq 0, z \in E. \quad (3)$$

В работе [7] изучались свойства класса функций $f(z) \in A$, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re}((1-\lambda z^2)f'(z)) \geq 0$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $z \in E$. При $\lambda = 1$ получается условие на класс функций, выпуклых в направлении мнимой оси, а при $\lambda \rightarrow 0$ – условие $\operatorname{Re} f'(z) \geq 0$ на класс функций с ограниченным вращением (подкласс функций (1) при $g(z) = z$), известное как признак однолистности Носиро [8] и Варшавского [9].

Как и для всего класса S однолистных функций, так и для его подклассов теоремы искажения интересовали многих математиков. Например, в числе первых точные оценки $|f'(z)|$ в классе $K(\gamma)$ были найдены в работе [4], для класса функций с условием (3) – в [10], а для класса функций с ограниченным вращением – в [11].

Введем класс $C(\lambda, a, \gamma)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 < \gamma \leq 1$, $a > 1/2$, функций $f(z) \in A$, удовлетворяющих условию

$$\left| \left((1 - \lambda z^2) f'(z) \right)^\gamma - a \right| \leq a, z \in E. \quad (4)$$

Цель настоящей работы – нахождение неуплощаемых теорем искажения и точных радиусов выпуклости в классе $C(\lambda, a, \gamma) \subset K(\gamma)$, а также получение аналогичных результатов в некотором классе функций, построенном на основе класса $C(\lambda, a, \gamma)$ и обобщающем класс типично вещественных функций.

1. Описание основных классов функций

При $\gamma = 1/2$ условие (4) означает, что множество значений $(1 - \lambda z^2) f'(z)$, $z \in E$, содержится в области $\{w: |w^2 - a| < a, \operatorname{Re} w > 0\}$, ограниченной лемниской Бернулли. В общем случае, при $0 < \gamma \leq 1$, множество значений $(1 - \lambda z^2) f'(z)$, $z \in E$ содержится в области, симметричной относительно действительной оси, ограниченной кривой, сходной с правой половиной лемнискаты Бернулли с узловой точкой $w = 0$ и углом между касательными в узловой точке, равным $\gamma\pi$. При $a \rightarrow +\infty$ данная область преобразуется в угол $\{w: |\arg w| \leq \gamma\pi/2\}$.

Основным методом исследования в работе является метод подчиненности. Пусть функции $\varphi(z)$ и $\varphi_0(z)$ являются аналитическими в круге E и, кроме того, функция $\varphi_0(z)$ однолистка в круге E . Говорят, что функция $\varphi(z)$ подчинена функции $\varphi_0(z)$ в круге E и пишут $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$, если $\varphi(E) \subset \varphi_0(E)$ и $\varphi(0) = \varphi_0(0)$. С учетом этого на языке подчиненности условие (4) можно записать в виде:

$$(1 - \lambda z^2) f'(z) \prec (w(z))^\gamma, w(z) = \frac{a(1+z)}{a - (a-1)z}, a > \frac{1}{2},$$

где $w(z)$ – отображение круга E на круг $\{w: |w - a| \leq a\}$. Поскольку $\left| \arg (w(z))^\gamma \right| \leq \gamma\pi/2$, $z \in E$, то при любом $a > 1/2$ функция $f(z)$ удовлетворяет условию

$$\left| \arg((1 - \lambda z^2) f'(z)) \right| \leq \gamma \frac{\pi}{2}, z \in E, \quad (5)$$

т.е. выполняется условие (2) с выпуклой в круге E функцией $g(z) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \ln \frac{1 + \sqrt{\lambda}z}{1 - \sqrt{\lambda}z}$,

так как $g'(z) = (1 - \lambda z^2)^{-1}$. Поэтому для всех $0 \leq \lambda \leq 1$, $a > 1/2$ класс $C(\lambda, a, \gamma)$

является подклассом класса $K(\gamma)$ функций $f(z)$, однолистных и почти выпуклых порядка γ .

Заметим, что при $a \rightarrow +\infty$ условие (4) преобразуется в условие (5). Поэтому при $\lambda = 1$ класс $C(\lambda, \infty, \gamma)$ совпадает с классом $C(\gamma)$ функций [12], почти выпуклых порядка γ в направлении мнимой оси. Функции класса $C(\gamma)$ обладают наглядным геометрическим свойством [12]: область $f(E)$ достижима извне углами раствора $(1-\gamma)\pi$ с биссектрисами, параллельными мнимой оси.

Поскольку из условия (4) следует условие (5), то $C(1, a, \gamma) \subset C(\gamma)$ при любом $a > 1/2$. Кроме того, $C(\gamma) \subset C(1) = C$ при всех γ , $0 < \gamma \leq 1$, а C есть класс всех функций $f(z) \in A$, удовлетворяющих условию (3) и выпуклых в направлении мнимой оси [6, 10].

Класс C тесно связан с классом T типично вещественных функций, введенным В. Рогозински [13], который изучался в работах ряда авторов (см., напр., [13–15]). Функция $F(z) \in A$ называется типично вещественной, если $F(z)$ является вещественной при вещественном z и $\operatorname{Im} F(z) \cdot \operatorname{Im} z > 0$ в остальных точках круга E . При этом (см.: [13])

$$F(z) \in T \Leftrightarrow \operatorname{Re} \left(\frac{1-z^2}{z} F(z) \right) \geq 0, z \in E. \quad (6)$$

Поэтому с помощью соотношения $F(z) = zf'(z)$ осуществляется простой переход от класса C к классу T и обратно. В связи с этим введем в рассмотрение класс $T(\lambda, a, \gamma)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 < \gamma \leq 1$, $a > 1/2$, функций, удовлетворяющих условию

$$\left| \left(\frac{1-\lambda z^2}{z} F(z) \right)^{1/\gamma} - a \right| \leq a, z \in E. \quad (7)$$

Между функциями классов $C(\lambda, a, \gamma)$ и $T(\lambda, a, \gamma)$ существует простая связь:

$$f(z) \in C(\lambda, a, \gamma) \Leftrightarrow F(z) = zf'(z) \in T(\lambda, a, \gamma). \quad (8)$$

Очевидно, что $T(\lambda, a, \gamma) \subset T(\lambda, \infty, \gamma)$, $T(1, \infty, \gamma) = T(\gamma) \subset T(1) = T$ для всех $a > 1/2$, $0 < \gamma \leq 1$. Таким образом, при $\lambda = 1$ все функции класса $T(\lambda, a, \gamma)$, $a > 1/2$, $0 < \gamma \leq 1$, являются типично вещественными.

2. Теоремы искажения в классах $C(\lambda, a, \gamma)$ и $T(\lambda, a, \gamma)$

В работе М. Рида [3] в классе $K(\gamma)$ почти выпуклых порядка γ функций найдена точная оценка

$$\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^\gamma \frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^\gamma \frac{1}{(1-r)^2}.$$

Ее уточнение для класса $C(\lambda, a, \gamma)$ и его подклассов дает следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть функция $f(z) \in C(\lambda, a, \gamma)$. Тогда в круге $|z| \leq r$ имеют место точные оценки

$$\left(\frac{a(1-r)}{a+(a-1)r}\right)^\gamma \frac{1}{1+\lambda r^2} \leq |f'(z)| \leq \left(\frac{a(1+r)}{a-(a-1)r}\right)^\gamma \frac{1}{1-\lambda r^2}, \quad (9)$$

$$\left|z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2\lambda z^2}{1-\lambda z^2}\right| \leq \frac{\gamma(2a-1)r}{(1-r)(a+(a-1)r)}. \quad (10)$$

Правая оценка в (9) достигается для функции

$$f_0(z) = \int_0^z \left(\frac{a(1+t)}{a-(a-1)t}\right)^\gamma \frac{dt}{1-\lambda t^2} \quad (11)$$

в точке $z = r$, оценка (10) – для функции (11) в точке $z = -r$, а левая оценка в (9) – в точке $z = ir$ для функции

$$f_1(z) = \int_0^z \left(\frac{a(1+it)}{a-(a-1)it}\right)^\gamma \frac{dt}{1-\lambda t^2}. \quad (12)$$

Доказательство. Поскольку $f(z) \in C(\lambda, a, \gamma)$, то в силу (4) выполняется подчиненность

$$\varphi(z) = (1-\lambda z^2)f'(z) \prec \varphi_0(z) = \left(\frac{a(1+z)}{a-(a-1)z}\right)^\gamma. \quad (13)$$

Поэтому в силу (13) при любом $r, 0 < r < 1$, имеет место включение областей $\varphi(|z| \leq r) \subset \varphi_0(|z| \leq r)$, т.е., с учетом вида области $\varphi_0(E)$, в круге $|z| \leq r$ справедлива оценка

$$\left(\frac{a(1-r)}{a+(a-1)r}\right)^\gamma \leq |(1-\lambda z^2)f'(z)| \leq \left(\frac{a(1+r)}{a-(a-1)r}\right)^\gamma. \quad (14)$$

Учитывая, что $1-\lambda|z|^2 \leq |1-\lambda z^2| \leq 1+\lambda|z|^2$, из последней оценки получаем

$$(1-\lambda r^2)|f'(z)| \leq |(1-\lambda z^2)f'(z)| \leq \left(\frac{a(1+r)}{a-(a-1)r}\right)^\gamma,$$

откуда вытекает правая оценка (9). Аналогично, поскольку

$$\left(\frac{a(1-r)}{a+(a-1)r}\right)^\gamma \leq |(1-\lambda z^2)f'(z)| \leq (1+\lambda r^2)|f'(z)|,$$

получаем левую оценку (9).

Для доказательства оценки (10) нам потребуется следующая лемма.

Лемма. Пусть функция $\Phi(z) = c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots, n \geq 1$, является аналитической в круге E и удовлетворяет условию

$$\left| \exp\left\{\frac{1}{\gamma}\Phi(z)\right\} - a \right| \leq a, a > \frac{1}{2}, 0 < \gamma \leq 1. \quad (15)$$

Тогда в круге $|z| \leq r$ справедлива точная оценка

$$|\Phi'(z)| \leq \frac{\gamma(2a-1)nr^{n-1}}{(1-r^n)(a+(a-1)r^n)}, \quad (16)$$

которая достигается для функции $\Phi(z) = \Phi_0(z^n)$ в точке $z = \sqrt[n]{-1}r$, где

$$\Phi_0(z) = \gamma \ln \frac{a(1+z)}{a-(a-1)z}.$$

Доказательство леммы. Условие (15) равносильно тому, что $\Phi(z) \prec \Phi_0(z)$. Тогда, как показано в [16], в круге $|z| \leq r$ имеет место точная оценка

$$|\Phi'(z)| \leq \frac{n \cdot r^{n-1}}{1-r^{2n}} \cdot R(D_0, \Phi(z)), \quad (17)$$

где $D_0 = \Phi_0(E)$, R – внутренний радиус области D_0 относительно точки $\Phi(z)$.

В силу свойств внутреннего радиуса области

$$R(D_0, \Phi_0(z)) = |\Phi_0'(z)| \cdot (1-|z|^2) = \frac{\gamma(2a-1) \cdot (1-|z|^2)}{|(1+z) \cdot (a+(a-1)z)|}.$$

Известно, что если область симметрична относительно некоторой прямой, не изменяется при ее симметризации относительно этой прямой и имеет ограниченный максимальный внутренний радиус, то его значение достигается в точке, лежащей на этой прямой. Учитывая, что область $D_0 = \Phi_0(E)$ симметрична относительно действительной оси и отрезок $[-1; 1] \in E$ преобразуется в луч $(-\infty; \gamma \ln 2a) \in \Phi_0(E)$, имеем

$$\max_{|z| \leq r} R(D_0, \Phi_0(z)) = \max_{-r \leq t \leq r} R(D_0, \Phi_0(t)).$$

Обозначим

$$\chi(t) = R(D_0, \Phi_0(t)) = \gamma(2a-1) \frac{(1-t)}{(a-(a-1)t)}, t \in [-r, r].$$

Поскольку $\chi'(t) < 0 \forall t \in [-r, r]$, то на $[-r, r]$ максимум функции $\chi(t)$ достигается в точке $t = -r$. Следовательно,

$$\max_{|z| \leq r} R(D_0, \Phi_0(z)) = R(D_0, \Phi_0(-r)) = \gamma(2a-1) \frac{1+r}{(a+(a-1)r)}.$$

Поскольку $\Phi(z) \prec \Phi_0(z)$, то с учетом разложения $\Phi(z)$ в ряд Тейлора получаем, что $\Phi(|z| \leq r) \subset \Phi_0(|z| \leq r^n)$ при любом $r, 0 < r < 1$. Поэтому

$$\max_{|z| \leq r} R(D_0, \Phi(z)) \leq \max_{|z| \leq r^n} R(D_0, \Phi_0(z)) = \gamma(2a-1) \frac{1+r^n}{(a+(a-1)r^n)}.$$

Поэтому в силу (17) окончательно получаем

$$|\Phi'(z)| \leq \gamma(2a-1) \frac{n \cdot r^{n-1}}{1-r^{2n}} \cdot \frac{1+r^n}{(a+(a-1)r^n)},$$

что дает (16). Точность оценки (16) проверяется легко.

Докажем теперь оценку (10). В силу (13)

$$\Phi(z) = \ln((1-\lambda z^2)f'(z)) \prec \Phi_0(z) = \gamma \ln \left(\frac{a(1+z)}{a-(a-1)z} \right),$$

а это равносильно условию (15). Поэтому на основании леммы при $n = 1$ получаем

$$|z\Phi'(z)| = \left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2\lambda z^2}{1-\lambda z^2} \right| \leq \frac{\gamma(2a-1)r}{(1-r)(a+(a-1)r)},$$

т.е. оценка (10) доказана.

Докажем точность оценок (9), (10).

Действительно, для функций (11) и (12) соответственно в точках $z = r$, $z = -r$ и $z = ir$ имеем

$$f_0'(z) = \left(\frac{a(1+r)}{a-(a-1)r} \right)^\gamma \frac{1}{1-\lambda r^2}, \quad z \frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} - \frac{2\lambda z^2}{1-\lambda z^2} = -\frac{\gamma(2a-1)r}{(1-r)(a+(a-1)r)},$$

$$f_1'(z) = \left(\frac{a(1-r)}{a+(a-1)r} \right)^\gamma \frac{1}{1+\lambda r^2},$$

т.е. оценки (9), (10) улучшить нельзя. Теорема 1 доказана.

Заметим, что предельный случай оценки (9) при $a \rightarrow +\infty$ получен в [7]. При $\lambda = 1$ и $a \rightarrow +\infty$ класс $C(\lambda, a, \gamma)$ преобразуется в класс $C(\gamma) = C(1, +\infty, \gamma)$ функций [12], почти выпуклых порядка γ в направлении мнимой оси. В этом случае из теоремы 1 вытекает следующий известный результат.

Следствие 1. Пусть функция $f(z) \in C(\gamma)$, т.е. удовлетворяет условию (5) при $\lambda = 1$. Тогда в круге $|z| \leq r$ имеют место точные оценки

$$\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^\gamma \frac{1}{1+r^2} \leq |f'(z)| \leq \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^\gamma \frac{1}{1-r^2}, \quad (18)$$

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\gamma} \left(\left(\frac{1+r}{1-r} \right)^\gamma - 1 \right), \quad (19)$$

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2z^2}{1-z^2} \right| \leq \frac{2\gamma r}{1-r^2}. \quad (20)$$

Оценки (18) и (20) вытекают из оценок (9), (10) при $\lambda = 1$ и $a \rightarrow +\infty$. Оценка (19) получается из (18) интегрированием по отрезку от 0 до r .

Правая оценка в (18) и оценка (19) достигаются для функции $f_0(z) = \frac{1}{2\gamma} \left(\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^\gamma - 1 \right)$ в точке $z = r$, оценка (20) достигается для этой же функции в точке $z = -r$.

Левая оценка (19) достигается для функции $f_1(z) = \int_0^z \left(\frac{1+it}{1-it} \right)^\gamma \frac{dt}{1-t^2}$ в точке $z = ir$, что проверяется непосредственным вычислением.

Следствие 1 получено в [12], а при $\gamma = 1$ оценка (18) получена в [10], позже, как частный случай, в [7].

При $\lambda = 0$ из теоремы 1 получаем оценки в одном из подклассов функций с ограниченным вращением.

Следствие 2. Пусть функция $f(z) \in C(0, a, \gamma)$, т.е. удовлетворяет условию

$$\left| (f'(z))^{\gamma} - a \right| \leq a, z \in E.$$

Тогда в круге $|z| \leq r$ имеют место точные оценки

$$\left(\frac{a(1-r)}{a+(a-1)r} \right)^{\gamma} \leq |f'(z)| \leq \left(\frac{a(1+r)}{a-(a-1)r} \right)^{\gamma}, \quad (21)$$

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq \frac{2\gamma r}{1-r}. \quad (22)$$

Правая оценка в (21) и оценка (22) достигаются для функции $f_0(z) = \int_0^z \left(\frac{a(1+t)}{a-(a-1)t} \right)^{\gamma} dt$ соответственно в точках $z=r$ и $z=-r$, а левая оцен-

ка в (21) – для функции $f_1(z) = \int_0^z \left(\frac{a(1+it)}{a-(a-1)it} \right)^{\gamma} dt$ в точке $z=ir$.

При $\lambda = \gamma = 1$ из теоремы 1 вытекает следствие 3.

Следствие 3. Пусть функция $f(z) \in C(1, a, 1)$, т.е. удовлетворяет условию

$$\left| (1-z^2)f'(z) - a \right| \leq a, z \in E.$$

Тогда в круге $|z| \leq r$ имеют место точные оценки

$$\frac{a(1-r)}{(a+(a-1)r)(1+r^2)} \leq |f'(z)| \leq \frac{a}{(a-(a-1)r)(1-r)}, \quad (23)$$

$$|f(z)| \leq \ln \frac{a-(a-1)r}{a(1-r)}, \quad (24)$$

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2z^2}{1-z^2} \right| \leq \frac{(2a-1)r}{(1-r)(a+(a-1)r)}. \quad (25)$$

Правая оценка в (23), оценка (24) и оценка (25) достигаются для функции $f_0(z) = \ln \frac{a-(a-1)z}{a(1-z)}$ соответственно в точках $z=r$, $z=r$ и $z=-r$, а левая

оценка (23) достигаются для функции $f_1(z) = \int_0^z \frac{a(1+it)dt}{(a-(a-1)it)(1-t^2)}$ в точке $z=ir$.

Взаимосвязь (8) классов $C(\lambda, a, \gamma)$ и $T(\lambda, a, \gamma)$ позволяет легко получить оценки в классе $T(\lambda, a, \gamma)$, которые вытекают непосредственно из теоремы 1.

Теорема 2. Пусть $F(z) \in T(\lambda, a, \gamma)$. Тогда в круге $|z| \leq r$ имеют место точные оценки

$$|F(z)| \leq \left(\frac{a(1+r)}{a-(a-1)r} \right)^{\gamma} \frac{r}{1-\lambda r^2}, \quad (26)$$

$$\left| z \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{1 + \lambda z^2}{1 - \lambda z^2} \right| \leq \frac{\gamma(2a-1)r}{(1-r)(a+(a-1)r)}, \quad (27)$$

которые достигаются для функции

$$F_0(z) = \left(\frac{a(1+z)}{a-(a-1)z} \right)^\gamma \frac{z}{1-\lambda z^2}$$

в точках $z = r$ (оценка (26)) и $z = -r$ (оценка (27)).

Доказательство. Оценка (26) получается сразу из оценки (9) с учетом соотношения $F(z) = zf'(z)$. Учитывая, что в силу данного соотношения

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{zF'(z)}{F(z)} - 1,$$

из оценки (10) получаем оценку (27). Точность оценок проверяется непосредственным расчетом.

Следствие 4. Если функция $F(z) \in T(\gamma)$, то в круге $|z| \leq r$ имеют место точные оценки

$$|F(z)| \leq \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^\gamma \frac{r}{1-r^2}, \quad (28)$$

$$\left| z \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{1+z^2}{1-z^2} \right| \leq \frac{2\gamma r}{1-r^2}, \quad (29)$$

$$\left| z \frac{F'(z)}{F(z)} \right| \leq \frac{1+2\gamma r+r^2}{1-r^2}, \quad (30)$$

$$|F'(z)| \leq \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^\gamma \frac{1+2\gamma r+r^2}{(1-r^2)^2}. \quad (31)$$

Экстремальная функция имеет вид $F_0(z) = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^\gamma \frac{z}{1-\lambda z^2}$.

Доказательство. При $\lambda = 1$, $a \rightarrow +\infty$ класс $T(\lambda, a, \gamma)$ преобразуется в подкласс $T(\gamma) = T(1, +\infty, \gamma)$ класса T типично вещественных функций [13–15]. В силу этого непосредственно из теоремы 2 вытекают оценки (28)–(29). Оценка (30) непосредственно следует из (29). Поскольку в силу (28) $\left| \frac{z}{F(z)} \right| \geq \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^\gamma (1-r^2)$,

то с учетом оценки (30) находим

$$\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^\gamma (1-r^2) |F'(z)| \leq \left| z \frac{F'(z)}{F(z)} \right| \leq \frac{1+2\gamma r+r^2}{1-r^2}.$$

Отсюда получается оценка (31). Оценки (28)–(31) достигаются в точке $z = r$, что устанавливается непосредственной проверкой.

При $\gamma = 1$ следствие 4 дает следующий результат.

Следствие 5. Если функция $F(z)$ является типично вещественной в круге E , тогда в круге $|z| \leq r$ имеют место точные оценки

$$|F(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}, \quad (32)$$

$$\left| z \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{1+z^2}{1-z^2} \right| \leq \frac{2r}{1-r^2}, \quad (33)$$

$$\left| z \frac{F'(z)}{F(z)} \right| \leq \frac{1+r}{1-r}, \quad (34)$$

$$|F'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}, \quad (35)$$

которые достигаются для функции $F_0(z) = z/(1-z)^2$ в точке $z = r$.

Отметим, что оценки (33)–(34) получены в [15], а оценки (32) и (35) вытекают из результатов работы [14].

3. Радиусы выпуклости и звездообразности

С помощью оценки (10) нетрудно найти радиус выпуклости класса $C(\lambda, a, \gamma)$, т.е. наибольшее из чисел r , $0 < r < 1$, таких что каждая функция $f(z) \in C(\lambda, a, \gamma)$ отображает круг $|z| \leq r$ на выпуклую область.

Теорема 3. Радиус выпуклости r_0 класса $C(\lambda, a, \gamma)$ определяется как наименьший положительный корень уравнения

$$\frac{\gamma(2a-1)r}{(1-r)(a+(a-1)r)} - \frac{1-\lambda r^2}{1+\lambda r^2} = 0 \quad (36)$$

и достигается в точке $z = ir_0$ для функции

$$f_0(z) = \int_0^z \left(\frac{a(1+it)}{a-(a-1)it} \right)^\gamma \frac{dt}{1-\lambda t^2}.$$

Доказательство. В силу оценки (10) в круге $|z| \leq r$ получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z \frac{f''(z)}{f'(z)} &\geq -\frac{\gamma(2a-1)r}{(1-r)(a+(a-1)r)} + \min_{|z| \leq r} \operatorname{Re} \frac{2\lambda z^2}{1-\lambda z^2} = \\ &= -\frac{\gamma(2a-1)r}{(1-r)(a+(a-1)r)} - \frac{2\lambda r^2}{1+\lambda r^2}. \end{aligned}$$

В силу условия выпуклости $\operatorname{Re} z \frac{f''(z)}{f'(z)} \geq -1$ функция $f(z)$ является выпуклой в круге $|z| \leq r_0$, где r_0 – наименьший положительный корень уравнения (36).

Для экстремальной функции $f_0(z)$ имеем

$$z \frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} = \frac{\gamma(2a-1)iz}{(1+iz)(a-(a-1)iz)} + \frac{2\lambda z^2}{1-\lambda z^2}.$$

Поэтому в точке $z = ir_0$ получаем

$$z \frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} + 1 = -\frac{\gamma(2a-1)r_0}{(1-r_0)(a+(a-1)r_0)} - \frac{2\lambda(r_0)^2}{1+\lambda(r_0)^2} + 1.$$

Следовательно, радиус выпуклости увеличить нельзя. Теорема доказана.

Теорема 3 при $\lambda = 1$, $a \rightarrow +\infty$ дает радиус выпуклости класса $C(\gamma) = C(1, \infty, \gamma)$, полученный в [12], при $\gamma = 1$ – в [10], при $\lambda = 0$, $a \rightarrow +\infty$ – радиус выпуклости класса $C(0, \infty, \gamma) = \{f(z) : |\arg f'(z)| \leq \gamma\pi/2, z \in E\}$, равный $r_0 = \sqrt{\gamma^2 + 1} - 1$, получен в [17] (следствие 1, случай $n = 1$), и при $\gamma = 1$ дает известный результат [11] о радиусе выпуклости $r_0 = \sqrt{2} - 1$ класса функций с ограниченным вращением $\operatorname{Re} f'(z) \geq 0, z \in E$.

Используя хорошо известную связь выпуклых и звездообразных функций $f(z) \in S^0 \Leftrightarrow F(z) = zf'(z) \in S^*$, а также соотношение (8), из теоремы 3 получаем радиус звездообразности класса $T(\lambda, a, \gamma)$.

Следствие 4. Пусть $F(z) \in T(\lambda, a, \gamma)$. Тогда функция $F(z)$ является звездообразной в круге $|z| \leq r^*$, где r^* – наименьший положительный корень уравнения (36). Радиус звездообразности является точным.

При $\lambda = 1$, $\gamma = 1$, $a \rightarrow +\infty$, учитывая, что $T(1, +\infty, 1) = T$, следствие 4 дает точный радиус звездообразности класса типично вещественных функций

$$r^* = \frac{1}{2} \left(\sqrt{5} + 1 - \sqrt{2(\sqrt{5} + 1)} \right),$$

ранее найденный независимо друг от друга в работах [15, 18].

Кроме того, при $\lambda = 0$, $\gamma = 1$, $a \rightarrow +\infty$ получается точный радиус звездообразности [11] $r^* = \sqrt{2} - 1$ класса функций $F(z) \in A$, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re}(F(z)/z) \geq 0, z \in E$.

4. Случай функции с пропуском второго члена в разложении в степенной ряд

В случае когда функции $f(z), F(z)$ в разложении в степенной ряд имеют пропуски членов, теоремы 1–4 и их следствия можно уточнить. Пусть в разложении $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots, z \in E$, в ряд Тейлора $a_2 = 0$, т.е.

$$f(z) = z + a_3 z^3 + \dots + a_n z^n + \dots, z \in E. \quad (37)$$

Тогда в разложении в степенной ряд функции $F(z) = zf'(z)$ второй член тоже будет равен нулю.

Теорема 5. Пусть функция $f(z)$ разлагается в ряд вида (37) и $f(z) \in C(\lambda, a, \gamma)$. Тогда в круге $|z| \leq r$ выполняются оценки

$$|f'(z)| \leq \left(\frac{a(1+r^2)}{a-(a-1)r^2} \right)^\gamma \frac{1}{1-\lambda r^2}, \quad (38)$$

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2\lambda z^2}{1-\lambda z^2} \right| \leq \frac{2\gamma(2a-1)r^2}{(1-r^2)(a+(a-1)r^2)}, \quad (39)$$

Оценки (38)–(39) точные и достигаются для функции

$$f_0(z) = \int_0^z \left(\frac{a(1+t^2)}{a-(a-1)t^2} \right)^\gamma \frac{dt}{1-\lambda t^2} \quad (40)$$

соответственно в точках $z = r$ и $z = ir$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, имеет место подчиненность (13), однако в силу разложения (37) функция $\varphi(z) = (1-\lambda z^2)f'(z)$ будет разлагаться в ряд вида $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots$ с $n \geq 2$. Поэтому из подчиненности (13) следует, что $\varphi(|z| \leq r) \subset \varphi_0(|z| \leq r^n)$ при любом $r, 0 < r < 1$, и, следовательно,

$$\left| (1-\lambda z^2)f'(z) \right| \leq \left(\frac{a(1+r^2)}{a-(a-1)r^2} \right)^\gamma,$$

откуда вытекает оценка (38).

Аналогично, $\Phi(z) = \ln((1-\lambda z^2)f'(z))$ имеет разложение вида $\Phi(z) = c_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots, n \geq 2$, поэтому с использованием оценки (16) при $n = 2$ получаем неравенство (39).

Теорема 6. Пусть функция $f(z)$ разлагается в ряд вида (37) и $f(z) \in C(\lambda, a, \gamma)$. Тогда функция $f(z)$ будет выпуклой в круге $|z| \leq r$, где $r = r_0$ определяется как наименьший положительный корень уравнения

$$\frac{2\gamma(2a-1)r^2}{(1-r^2) \cdot (a+(a-1)r^2)} - \frac{1-\lambda r^2}{1+\lambda r^2} = 0. \quad (40)$$

Радиус выпуклости r_0 является точным и достигается для функции (40) в точке $z = ir$.

Доказательство. По аналогии с доказательством теоремы 3 в силу оценки (39) получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z \frac{f''(z)}{f'(z)} &\geq -\frac{2\gamma(2a-1)r^2}{(1-r^2)(a+(a-1)r^2)} + \min_{|z| \leq r} \operatorname{Re} \frac{2\lambda z^2}{1-\lambda z^2} = \\ &= -\frac{2\gamma(2a-1)r^2}{(1-r^2)(a+(a-1)r^2)} - \frac{2\lambda r^2}{1+\lambda r^2}. \end{aligned}$$

В силу условия выпуклости $\operatorname{Re} z \frac{f''(z)}{f'(z)} \geq -1$ функция $f(z)$ является выпуклой в круге $|z| \leq r_0$, где r_0 – наименьший положительный корень уравнения (41).

Для функции (40) имеем $f_0(z) = z + a_3 z^3 + \dots \in C(\lambda, a, \gamma)$, кроме того,

$$z \frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} = \frac{2\gamma(2a-1)z^2}{(1-z^2)(a-(a-1)z^2)} + \frac{2\lambda z^2}{1+\lambda z^2},$$

и в точке $z = ir_0$ получаем

$$z \frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} + 1 = -\frac{2\gamma(2a-1)r_0^2}{(1-r_0^2)(a+(a-1)r_0^2)} - \frac{2\lambda(r_0)^2}{1+\lambda(r_0)^2} + 1.$$

Следовательно, радиус выпуклости увеличить нельзя.

Рассмотрим два частных случая. При $\lambda = 0$, $a \rightarrow +\infty$ из (41) получаем уравнение $r^4 + 4\gamma r^2 - 1 = 0$, откуда

$$r_0 = \sqrt{\sqrt{4\gamma^2 + 1} - 2\gamma}. \quad (42)$$

Если $\lambda = 1$, $a \rightarrow +\infty$, то (41) преобразуется в уравнение

$$r^6 - (4\gamma + 1)r^4 - (4\gamma + 1)r^2 + 1 = 0,$$

которое равносильно уравнению

$$(r^4 - 2(2\gamma + 1)r^2 + 1)(r^2 + 1) = 0,$$

откуда находим

$$r_0 = \sqrt{2\gamma + 1 - 2\sqrt{\gamma(\gamma + 1)}}. \quad (43)$$

Таким образом, доказано

Следствие 5. Пусть функция $f(z) = z + a_3 z^3 + \dots + a_n z^n + \dots$ является аналитической в круге E . Тогда точные радиусы выпуклости классов функций с условием $|\arg f'(z)| \leq \gamma\pi/2$ или $|\arg((1-z^2)f'(z))| \leq \gamma\pi/2$ определяются соответственно по формулам (42) и (43).

Для класса функций $|\arg f'(z)| \leq \gamma\pi/2$ радиус выпуклости (42) получен в [17] (следствие 1, случай $n = 2$), а для класса функций $|\arg((1-z^2)f'(z))| \leq \gamma\pi/2$ радиус выпуклости (43) получен в [12].

Заметим, что разложение $f(z) = z + a_3 z^3 + \dots + a_n z^n + \dots$, в частности, будет иметь место, если функция $f(z)$ является нечетной. В этом случае $f(z) = z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \dots$

Заключение

В работе введены два взаимосвязанных друг с другом класса аналитических в единичном круге E функций.

Первый из них является подклассом класса почти выпуклых порядка γ функций и обобщает классы функций с ограниченным вращением и функций, выпуклых в направлении мнимой оси. Второй из классов обобщает класс типично вещественных функций и функций, для которых $\operatorname{Re} F(z)/z \geq 0$. На основе метода подчиненности в данных классах функций получены теоремы искажения и найдены радиусы выпуклости (звездообразности). Все результаты являются точными и дают обобщения целого ряда ранее известных результатов. Дополнительно рассмотрен случай, когда разложение функций этих классов в степенной ряд имеет пропуск второго члена.

Список источников

1. Ozaki S. On the theory of multivalent functions // Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A. Math. Phys. Chem. 1935. V. 2. P. 167–188.
2. Kaplan W. Close-to-convex schlicht functions // Michigan Math. J. 1952. № 1 (2). P. 169–185. doi: 10.1307/mmj/1028988895
3. Reade M. The coefficients of close-to-convex functions // Duke Math. J. 1956. V. 23 (3). P. 459–462. doi: 10.1215/S0012-7094-56-02342-0
4. Renyi A. Some remarks on univalent functions // Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska. Sec. A. 1959. V. 3. P. 111–121. URL: <http://sci-gems.math.bas.bg:8080/jspui/bitstream/10525/2878/1/1959-111-121.pdf>
5. Bshouty D., Lyzzaik A. Univalent functions starlike with respect to a boundary point // Contemp. Math. 2005. V. 382. P. 83–87.
6. Robertson M.S. Analytic functions star-like in one direction // Amer. J. Math. 1936. V. 58 (3). P. 465–472. doi: 10.2307/2370963
7. Lecko A. Some subclasses of close-to-convex functions // Annales Polonici Mathematici. 1993. V. 58 (1). P. 53–64. URL: <https://bibliotekanauki.pl/articles/1311892>
8. Noshiro K. On the theory of schlicht functions // J. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ. Ser. I Math. 1934. V. 2 (3). P. 129–155. doi: 10.14492/hokmj/1531209828
9. Warschawski S.E. On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping // Trans. Am. Math. Soc. 1935. V. 38 (2). P. 310–340. doi: 10.1090/S0002-9947-1935-1501813-X
10. Hengartner W., Schober G. Analytic functions close to mappings convex in one direction // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 28 (2). P. 519–524. URL: <https://www.ams.org/journals/proc/1971-028-02/S0002-9939-1971-0277704-9/S0002-9939-1971-0277704-9.pdf>
11. MacGregor T. Functions whose derivative has a positive real part // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 104. P. 532–537. doi: 10.1090/S0002-9947-1962-0140674-7
12. Майер Ф.Ф. Геометрические свойства некоторых классов аналитических в круге функций, выпуклых в направлении мнимой оси // Вестник науки Костанайского государственного университета им. А. Байтурсынова. Сер. естественно-технических наук. 2002. Т. 6, № 2. С. 48–50. URL: https://nauka.kz/page.php?page_id=372&lang=3&page=5931
13. Rogosinski W. Über Positive Harmonische Entwicklungen und typisch-reelle Potenzreihen // Math. Zeitschr. 1932. V. 35 (1). P. 93–121. doi: 10.1007/BF01186552
14. Голузин Г.М. О типично вещественных функциях // Математический сборник. Новая сер. 1950. Т. 27 (69), № 2. С. 201–218. URL: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=5913&option_lang=eng
15. Гельфер С.А. Типично вещественные функции // Математический сборник. Новая сер. 1964. Т. 64 (106), № 2. С. 171–184. URL: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=4441&option_lang=rus
16. Митюк И.П. Оценки в некоторых классах аналитических функций // Метрические вопросы теории функций. Киев : Наукова думка, 1980. С. 90–99.
17. Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А., Козловский С.А. Точные оценки и радиусы выпуклости некоторых классов аналитических функций // Вестник ЮУрГУ. Сер. Математика. Механика. Физика. 2022. Т. 14, № 1. С. 42–49. doi: 10.14529/mmph220105
18. Libera R.J. Some radius of convexity problems // Duke Math. J. 1964. V. 31(1). P. 143–158. doi: 10.1215/S0012-7094-64-03114-X

References

1. Ozaki S. (1935) On the theory of multivalent functions. *Science reports of the Tokyo Bunrika Daigaku section A, Mathematics, physics, chemistry*. 2. pp. 167–188.
2. Kaplan W. (1952) Close-to-convex schlicht functions. *Michigan Mathematical Journal*. 1(2). pp. 169–185. DOI: <https://doi.org/10.1307/mmj/1028988895>

3. Reade M. (1956) The coefficients of close-to-convex functions. *Duke Mathematical Journal*. 23(3). pp. 459–462. DOI: <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-56-02342-0>
4. Renyi A. (1959) Some remarks on univalent functions. *Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, sectio A – Mathematica*. 3. pp. 111–121. DOI: <http://sci-gems.math.bas.bg:8080/jspui/bitstream/10525/2878/1/1959-111-121.pdf>
5. Bshouty D., Lyzzaik A. (2005) Univalent functions starlike with respect to a boundary point // *Contemp. Math*. 382. pp. 83–87.
6. Robertson M.S. (1936) Analytic functions star-like in one direction // *Amer. J. Math*. 58(3). pp. 465–472. doi: <https://doi.org/10.2307/2370963>
7. Lecko A. (1993) Some subclasses of close-to-convex functions // *Annales Polonici Mathematici*. 58(1). pp. 53–64. <https://bibliotekanauki.pl/articles/1311892>
8. Noshiro K. (1934) On the theory of schlicht functions. *Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University. Series I, Mathematics*. 2(3). pp. 129–155. DOI: <https://doi.org/10.14492/hokmj/1531209828>
9. Warschawski S.E. (1935) On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping. *Transactions of the American Mathematical Society*. 38(2). pp. 310–340. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1935-1501813-X>
10. Hengartner W., Schober G. (1971) Analytic functions close to mappings convex in one direction. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 28(2). pp. 519–524. <https://www.ams.org/journals/proc/1971-028-02/S0002-9939-1971-0277704-9/S0002-9939-1971-0277704-9.pdf>
11. MacGregor T. (1962) Functions whose derivative has a positive real part. *Transactions of the American Mathematical Society*. 104. pp. 532–537. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1962-0140674-7>
12. Mayer F.F. (2002) Geometricheskiye svoystva nekotorykh klassov analiticheskikh v krugе funktsiy, vypuklykh v napravlenii mnimoy osi. [Geometric properties of some classes of functions analytic in a circle and convex in the direction of the imaginary axis]. *Kostanay. Vestnik nauki KGU im. A. Baytursynova. Seriya estestvenno-tekhnicheskikh nauk*. 6(2). pp. 48–50. DOI: https://nauka.kz/page.php?page_id=372&lang=3&page=5931
13. Rogosinski W. (1932) Über Positive Harmonische Entwicklungen und typisch-reelle Potenzreihen. *Mathematische Zeitschrift*. 35(1). pp. 93–121. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01186552>
14. Goluzin G.M. (1950) O tipichno veshchestvennykh funktsiyakh. [On typically real functions]. *Matematicheskii sbornik*. 27(69). pp. 201–218. DOI: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=5913&option_lang=eng
15. Gel'fer S.A. (1964) Tipichno veshchestvennyye funktsii [Typically real functions]. *Matematicheskii sbornik*. 64(106). pp. 171–184. DOI: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=4441&option_lang=rus
16. Mityuk I.P. (1980) Otsenki v nekotorykh klassakh analiticheskikh funktsiy [Estimates in some classes of analytic functions]. *Metricheskie voprosy teorii funktsij*. Kiev: Naukova dumka.
17. Mayer F.F., Tastanov M.G., Utemisova A.A., Kozlovskiy S.A. (2022) Tochnyye otsenki i radiusy vypuklosti nekotorykh klassov analiticheskikh funktsiy [Exact estimates and radii of convexity of some classes of analytic functions]. *Vestnik YuUrGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Fizika*. 14(1). pp. 42–49. DOI: <https://doi.org/10.14529/mmph220105>
18. Libera R.J. (1964) Some radius of convexity problems. *Duke Mathematical Journal*. 31(1). pp. 143–158. DOI: <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-64-03114-X>

Сведения об авторах:

Майер Федор Федорович – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и физики Костанайского регионального университета им. А. Байтурсынова, Костанай, Казахстан. E-mail: maiyer@mail.ru

Тастанов Мейрамбек Габдулиевич – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и физики Костанайского регионального университета им. А. Байтурсынова, Костанай, Казахстан. E-mail: tastao@mail.ru

Утемисова Анар Алтаевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и физики Костанайского регионального университета им. А. Байтурсынова, Костанай, Казахстан. E-mail: anar_utemisova@mail.ru

Байманкулов Абдыкарим Тунгушбаевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем Костанайского регионального университета им. А. Байтурсынова, Костанай, Казахстан. E-mail: bat_56@mail.ru

Information about the authors:

Mayer Fedor F. (Professor, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Department of Mathematics and Physics, Kostanay Regional University named after A. Baitursynov, Kostanay, Kazakhstan). E-mail: maiyer@mail.ru

Tastanov Meyrambek G. (Professor, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Department of Mathematics and Physics, Kostanay Regional University named after A. Baitursynov, Kostanay, Kazakhstan). E-mail: tastao@mail.ru

Utemissova Anar A. (Associate Professor, Candidate of Pedagogical Sciences, Department of Mathematics and Physics, Kostanay Regional University named after A. Baitursynov, Kostanay, Kazakhstan). E-mail: anar_utemisova@mail.ru

Baimankulov Abdykarim T. (Professor, Doctor of Physics and Mathematics, Kostanay Regional University named after A. Baitursynov, Kostanay, Kazakhstan). E-mail: bat_56@mail.ru

Статья поступила в редакцию 27.02.2023; принята к публикации 10.10.2023

The article was submitted 27.02.2023; accepted for publication 10.10.2023

Original article

UDC 519.22

MSC: 62G05, 62G20

doi: 10.17223/19988621/85/2

Super-efficient robust estimation in Lévy continuous time regression models from discrete data

Nikita I. Nikiforov¹, Serguei M. Pergamenschchikov², Evgeny A. Pchelintsev³

^{1, 2, 3} Tomsk State University, Tomsk, Russia

² University of Rouen Normandy, Saint-Etienne-du Rouvray, France

¹ nikitnikiforov_97@bk.ru

² serge.pergamenschchikov@univ-rouen.fr

³ evgen-pch@yandex.ru

Аннотация. Abstract. In this paper we consider the nonparametric estimation problem for a continuous time regression model with non-Gaussian Lévy noise of small intensity. The estimation problem is studied under the condition that the observations are accessible only at discrete time moments. In this paper, based on the nonparametric estimation method, a new estimation procedure is constructed, for which it is shown that the rate of convergence, up to a certain logarithmic coefficient, is equal to the parametric one, i.e., super-efficient property is provided. Moreover, in this case, the Pinsker constant for the Sobolev ellipse with the geometrically increasing coefficients is calculated, which turns out to be the same as for the case of complete observations.

Keywords: nonparametric estimation, non-Gaussian regression models in continuous time, robust estimation, efficient estimation, Pinsker constant, super-efficient estimation

Acknowledgments: The research was carried out with the financial support of the RSF as part of a scientific project № 22-21-00302.

For citation: Nikiforov, N.I., Pergamenschchikov, S.M., Pchelintsev, E.A. (2023) Super-efficient robust estimation in Lévy continuous time regression models from discrete data. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 22–31. doi: 10.17223/19988621/85/2

Научная статья

Суперэффективное робастное оценивание в непрерывных регрессионных моделях Леви по дискретным данным

Никита Игоревич Никифоров¹, Сергей Маркович Пергаменшиков²,
Евгений Анатольевич Пчелинцев³

^{1, 2, 3} Томский государственный университет, Томск, Россия

² Руанский университет, Руан, Франция

¹ nikitnikiforov_97@bk.ru

² serge.pergamenchchikov@univ-rouen.fr

³ evgen-pch@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается задача непараметрического оценивания в модели непрерывной регрессии с негауссовским шумом Леви малой интенсивности. Задача оценивания изучается при условии, что наблюдения доступны только в дискретные моменты времени. На основе метода непараметрического оценивания строится новая процедура оценивания, для которой показано, что скорость сходимости до определенного логарифмического коэффициента равна параметрической, т.е. устанавливается свойство суперэффективности. Более того, в этом случае вычисляется константа Пинскера для соболевского класса с геометрически возрастающими коэффициентами, которая оказывается такой же, как и для случая полных наблюдений.

Ключевые слова: непараметрическое оценивание, модели негауссовской регрессии в непрерывном времени, робастное оценивание, эффективное оценивание, константа Пинскера, суперэффективное оценивание

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФ в рамках научного проекта № 22-21-00302.

Для цитирования: Никифоров Н.И., Пергаменщиков С.М., Пчелинцев Е.А. Суперэффективное робастное оценивание в непрерывных регрессионных моделях Леви по дискретным данным // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 85. С. 22–31. doi: 10.17223/19988621/85/2

1. Introduction

In this paper, we consider a non-Gaussian Lévy regression model in continuous time, introduced in [1], i.e.,

$$dy_t = S(t)dt + \varepsilon d\xi_t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1.1)$$

where $S(\cdot)$ is a nonrandom unknown $[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ function from $\mathcal{L}_2[0,1]$, $(\xi_t)_{0 \leq t \leq 1}$ is an unobserved noise defined through a Lévy process and $\varepsilon > 0$ is the noise intensity. We study the estimation problem for this model in nonparametric setting, i.e., we assume that

$$S(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j \phi_j(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1.2)$$

where the Fourier coefficients $(\theta_j)_{j \geq 1}$ belong to some set Θ defined later and $(\phi_j)_{j \geq 1}$ is an orthonormal basis in $\mathcal{L}_2[0,1]$, i.e., for any $i, j \geq 1$

$$(\phi_i, \phi_j) = \int_0^1 \phi_i(t) \phi_j(t) dt = \mathbf{1}_{\{i=j\}}. \quad (1.3)$$

The problem is to develop efficient estimation methods for the regression function S , as $\varepsilon \rightarrow 0$, based on the discrete observations

$$(y_{t_l})_{0 \leq l \leq n} \quad \text{and} \quad t_l = \frac{l}{n}, \quad (1.4)$$

where the number of observations n is a function of the parameter ε , i.e., $n = n_\varepsilon$, such that $n_\varepsilon = O(\varepsilon^{-2})$ as $\varepsilon \rightarrow 0$. The condition $\varepsilon \rightarrow 0$ means that the signal/noise ratio goes to infinity. Note that, if $(\xi_t)_{0 \leq t \leq 1}$ is a Brownian motion, then we obtain a “signal+white

noise” model which is very popular in statistical radio-physics (see, for example, [2–4] and the references therein).

We assume that the stochastic component in the model (1.1) is given by a Lévy process with jumps. The reasons for the appearance of pulse noises in stochastic dynamic systems can be, for example, a sudden change in environmental conditions like the emergence of epidemics in sociological systems, crisis phenomena in economic systems, all kinds of failures and disruptions in the functioning of technical systems, etc. Note that the pulse noises for the continuous time regression models have been introduced in [5–7] on the basis of the compound Poisson processes for parametric regression models, and in [8, 9] such noises are used for nonparametric signal estimation problems. Later, to include all possible impulse noises, in the observation model (1.1) in [1] it is proposed to use general non-Gaussian Lévy processes $(\xi_t)_{0 \leq t \leq 1}$ whose distribution \mathcal{Q} is unknown and belongs to the distribution family $\mathcal{Q}_\varepsilon^*$ defined in the next section. For these reasons, in this paper, to study the quality of estimation, we use the robust risk

$$R_\varepsilon^*(\hat{S}, S) = \sup_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_\varepsilon^*} R_\mathcal{Q}(\hat{S}, S), \tag{1.5}$$

where \hat{S} is an estimator (i.e., any measurable function of $(y_t)_{0 \leq t \leq 1}$),

$$R_\mathcal{Q}(\hat{S}, S) := \mathbf{E}_\mathcal{Q} \|\hat{S} - S\|^2 \text{ and } \|S\|^2 = \int_0^1 S^2(t) dt. \tag{1.6}$$

Here $\mathbf{E}_\mathcal{Q}$ stands the expectation with respect to distribution \mathcal{Q} . We consider the minimax estimation problem, i.e., our main goal is to minimize the maximal value risk (1.5) over all possible estimation procedures \hat{S} , i.e.,

$$\sup_{S \in \Theta} R_\varepsilon^*(\hat{S}, S) \rightarrow \min_{\hat{S}} \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

To this end we use the exact lower bounds obtained in [10] for the nonparametric estimation problems on the basis of the complete data $(y_t)_{0 \leq t \leq 1}$. It should be noted that in [10] the first time it was constructed super-efficient nonparametric estimation procedures, i.e., estimators for which the minimax convergence rate coincides with the parametric one up to a logarithmically increasing coefficient. In this paper, we show that the same lower bounds provide the super efficiency properties on the discrete observations (1.4) in the robust estimation setting.

The rest of the paper is organized as follows. In Section 2 we give the main conditions which will be assumed for the model (1.1). In Section 3 we construct the estimator. In Section 4 we state our main results on the adaptive efficiency. Section 5 contains the main proofs. Section 6 contains all necessary auxiliary results.

2. Main conditions

Let the unknown function S in (1.1) belong to the ellipse in $\mathcal{L}_2[0,1]$ defined as

$$\Theta = \left\{ S \in \mathcal{L}_2[0,1] : \sum_{j=1}^{\infty} a_j \theta_j^2 \leq r \right\}, \tag{2.1}$$

where $a_j = e^{2\kappa j^\alpha}$ with fixed constants $0 < \alpha < 1$ and $\kappa > 0$. For this set we need the following condition.

A1) $\forall S \in \Theta$ there exists continuous derivate \dot{S} such that $\sup_{S \in \Theta} \|\dot{S}\| < \infty$.

To estimate unknown function S in (1.1) we use its Fourier expansion on the time grid $\{t_1, \dots, t_n\}$ defined in (1.4) for which we use empiric inner product and the norm in \mathbb{R}^n defined as

$$(x, y)_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j y_j \quad \text{and} \quad \|x\|_n^2 = (x, x)_n.$$

As to the basis in (1.2) we assume that the first n functions $(\phi_j)_{1 \leq j \leq n}$ are orthonormal with respect to this product, i.e.,

$$(\phi_i, \phi_j)_n = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \phi_i(t_l) \phi_j(t_l) = \mathbf{1}_{\{i=j\}}. \quad (2.2)$$

For example, one can take spline basis defined in [11] or the trigonometric basis $(Tr_j)_{j \geq 1}$ with $Tr_1 \equiv 1$ and for $j \geq 2$

$$Tr_j(x) = \sqrt{2} \begin{cases} \cos(2\pi[j/2]x) & \text{for even } j, \\ \sin(2\pi[j/2]x) & \text{for odd } j, \end{cases} \quad (2.3)$$

where $[x]$ denotes the integer part of x . Note, that if n is odd, then the trigonometric basis possesses the orthonormality property (2.2). In this case we set $n = 2[\varepsilon^{-2}] + 1$.

Now, for any $t \in \{t_1, \dots, t_n\}$, we represent function S as

$$S(t) = \sum_{j=1}^n \theta_{j,n} \phi_j(t) \quad \text{and} \quad \theta_{j,n} = (S, \phi_j)_n. \quad (2.4)$$

A2) For any $\delta > 0$, the coefficients $(\theta_{j,n})_{1 \leq j \leq n}$ satisfy the following inequalities

$$q_1 = \sup_{n \geq 1} \max_{1 \leq j \leq n} n \sup_{S \in \Theta} \frac{|\theta_{j,n} - \theta_j|}{j} < \infty \quad (2.5)$$

and

$$q_2 = \sup_{1 \leq N \leq n} \sup_{S \in \Theta} n^2 \left(\sum_{j=N}^n \theta_{j,n}^2 - (1 + \delta) \sum_{j \geq N} \theta_j^2 \right) < \infty. \quad (2.6)$$

Now we set

$$\varpi_{j,n} = \varpi_{j,n}(S) = \sum_{l=1}^n \int_{t_{l-1}}^{t_l} \phi_j(t_l) (S(u) - S(t_{l-1})) du. \quad (2.7)$$

A3) The vector $(\varpi_n)_{1 \leq j \leq n}$ is uniformly bounded in \mathbb{R}^n , i.e.

$$q_3 = \sup_{n \geq 1} n^2 \sup_{S \in \Theta} \sum_{j=1}^n \varpi_{j,n}^2 < \infty. \quad (2.8)$$

Remark 2.1. Note that one can check directly that for the trigonometric basis (2.3) for all functions S from Θ and for any $k \geq 1$ there exists the continuous derivative of order k such that $\sup_{S \in \Theta} \|S^{(k)}\|^2 < \infty$. Therefore, Lemmas A.4–A.6 from [9] imply that the conditions **A2)** – **A3)** hold for the trigonometric basis.

Furthermore, as to the noise process $(\xi_t)_{0 \leq t \leq 1}$ similar to [1] we set

$$\xi_t = \rho_1 w_t + \rho_2 z_t \text{ and } z_t = x * (\mu - \tilde{\mu})_t, \quad (2.9)$$

where ρ_1 and ρ_2 are some unknown constants, $(w_t)_{0 \leq t \leq 1}$ is a standard Brownian motion, “*” denotes the stochastic integral with respect to the compensated jump measure (see, for example, in [12], Chapter 3), $\mu(ds dx)$ is a jump measure with deterministic compensator $\tilde{\mu}(ds dx) - ds\Pi(dx)$, and $\Pi(\cdot)$ is the unknown Lévy measure such that

$$\Pi(x^2) = 1 \text{ and } \Pi(x^4) < \infty, \quad (2.10)$$

where $\Pi(|z|^m) = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} |z|^m \Pi(dz)$. Note that the measure $\Pi(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ could be equal

to $+\infty$. In the sequel we will denote by Q the distribution of the process $(\xi_t)_{0 \leq t \leq 1}$ and by Q_ε^* the family of such distributions in the Skorokhod space $\mathbf{D}[0,1]$ for which

$$0 < \zeta_* < \rho_1^2 \text{ and } \rho_1^2 + \rho_2^2 \leq \zeta^* \quad (2.11)$$

where the unknown bounds $0 < \zeta_* \leq \zeta^*$ can be functions of ε , i.e., $\zeta_* = \zeta_*(\varepsilon)$ and $\zeta^* = \zeta^*(\varepsilon)$, such that for any $\delta > 0$

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} |\ln \varepsilon|^\delta \zeta_*(\varepsilon) > 0 \text{ and } \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} |\ln \varepsilon|^{-\delta} \zeta^*(\varepsilon) < \infty. \quad (2.12)$$

In this case the expectation $\mathbf{E}_Q(\xi_t - \xi_s)^2 = (\rho_1^2 - \rho_2^2)(t - s)$ for any $0 < s < t < 1$ and, therefore, in view of the property (2.11)

$$\sup_{Q \in Q_\varepsilon} \mathbf{E}_Q(\xi_t - \xi_s)^2 \leq \zeta^*(t - s). \quad (2.13)$$

The bounds $\zeta_* \leq \zeta^*$ may be any positive fixed constants.

3. Estimation procedure

In this paper, as in [13], to estimate the function S , we use discrete Fourier expansion (2.4) in which we estimate the coefficients $(\theta_{k,n})_{1 \leq k \leq n}$ through the least squares estimation method, i.e.,

$$\hat{\theta}_k = \sum_{j=1}^n \phi_k(t_j) \Delta y_{t_j}. \quad (3.1)$$

Using here the model (1.1), we obtain

$$\hat{\theta}_k = \theta_{k,n} + \varpi_{k,n} + \varepsilon \eta_k, \quad (3.2)$$

where $\eta_k = \sum_{j=1}^n \phi_k(t_j) \Delta \xi_{t_j}$. The orthonormality property (2.2) implies

$$\mathbf{E}_Q \eta_k^2 = \sum_{j=1}^n \phi_k(t_j) \mathbf{E}_Q \Delta \xi_{t_j}^2,$$

and, therefore, in view of the bounds (2.13)

$$\sup_{1 \leq k \leq n} \sup_{Q \in Q_\varepsilon} \mathbf{E}_Q \eta_k^2 \leq \zeta^*. \quad (3.3)$$

Now, using the weighted least squares estimate from [10], we estimate the function S by

$$S_\varepsilon^*(t) = \sum_{k=1}^n \gamma_k \hat{\theta}_k \phi_k(t), \quad \gamma_k = (1 - e^{-\kappa(n^\alpha - k^\alpha)}) \mathbf{1}_{\{1 \leq k \leq n_s\}} \quad (3.4)$$

and

$$n_s = \max \left\{ 1 \leq l \leq n : e^{2\kappa l^\alpha} g(l) \leq \varepsilon^{-2} r \right\}, \quad (3.5)$$

where $g(l) = \sum_{j=1}^{l-1} e^{-\kappa(l^\alpha - j^\alpha)} \left(1 - e^{-\kappa(l^\alpha - j^\alpha)} \right)$.

4. Main results

First, we study the upper bound for the robust risk (1.5) corresponding to the estimation procedure (3.4).

Theorem 4.1. *Assume that the conditions A1)–A3) hold. Then*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \upsilon_\varepsilon \sup_{S \in \Theta} R_\varepsilon^*(S_\varepsilon^*, S) \leq \kappa^{-1/\alpha}, \quad (4.1)$$

where the rate $\upsilon_\varepsilon = \tilde{\varepsilon}^{-2} |\ln \tilde{\varepsilon}|^{-1/\alpha}$ and $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \sqrt{\zeta^*}$.

Now, to compare with other estimators we need to introduce the class of possible estimators, i.e., let Ξ be the set of all estimators \hat{S} measurable with respect to the σ -field generated by the observation (1.1), i.e., $\sigma\{y_\eta, 0 \leq \eta \leq n\}$.

Theorem 4.2. *The robust risk (1.5) admits the following lower bound*

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \upsilon_\varepsilon \inf_{\hat{S} \in \Xi} \sup_{S \in \Theta} R_\varepsilon^*(\hat{S}, S) \geq \kappa^{-1/\alpha}. \quad (4.2)$$

These theorems imply the following efficient property.

Theorem 4.3. *The estimate (3.4) is asymptotically efficient, i.e.,*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\inf_{\hat{S} \in \Xi_\varepsilon} \sup_{S \in \Theta} R_\varepsilon^*(\hat{S}, S)}{\sup_{S \in \Theta} R_\varepsilon^*(S_\varepsilon^*, S)} = 1 \quad (4.3)$$

and, moreover,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \upsilon_\varepsilon \sup_{S \in \Theta} R_\varepsilon^*(S_\varepsilon^*, S) = \kappa^{-1/\alpha}. \quad (4.4)$$

Remark 4.1. *For the model (1.1) the optimal convergence rate for parametric problems is ε^2 , here we obtained $\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|^{1/\alpha}$, i.e., almost parametric convergence rate up to the logarithmically increasing coefficient $|\ln \varepsilon|^{1/\alpha}$. The same effect was found in [10] for the case of continuous observations. For this reason, the estimation procedure (3.4) is called **super-efficient**.*

5. Proofs

5.1. Proof of Theorem 4.1. First note, that from (2.4), (3.2), and (3.3) one can deduce directly that

$$\mathbf{E}_Q \left\| S_\varepsilon^* - S \right\|_n^2 = \varepsilon^2 \sum_{j=1}^n \gamma_j^2 \mathbf{E}_Q \eta_j^2 + U_n ,$$

where $U_n = \sum_{j=1}^n (\gamma_j \theta_{j,n} - \theta_{j,n} + \gamma_j \varpi_{j,n})^2$. Moreover, in view of the bound (3.3), we obtain

$$\sup_{Q \in \mathcal{Q}_\varepsilon} \mathbf{E}_Q \left\| S_\varepsilon^* - S \right\|_n^2 = \tilde{\varepsilon}^2 \sum_{j=1}^n \gamma_j^2 + U_n . \quad (5.1)$$

As to the last term, here note that for any $0 < \delta < 1$

$$U_n \leq (1 + \delta) T_n + (1 + \delta^{-1}) \sum_{j=1}^n \varpi_{j,n}^2 , \quad (5.2)$$

where $T_n = \sum_{j=1}^n (1 - \gamma_j)^2 \theta_{j,n}^2$ for which from (3.4) it follows that

$$T_n = \sum_{j=1}^{n_*} (1 - \gamma_j)^2 \theta_{j,n}^2 + \sum_{j=n_*+1}^n \theta_{j,n}^2 := T_{1,n} + T_{2,n} .$$

Note here that for any $\delta > 0$

$$\theta_{j,n}^2 \leq (1 + \delta) \theta_j^2 + (1 + \delta^{-1}) (\theta_{j,n} - \theta_j)^2 .$$

In view of the condition (2.5), we obtain for any $0 < \delta < 1$

$$\begin{aligned} T_{1,n} &\leq (1 + \delta) \sum_{j=1}^{n_*} (1 - \gamma_j)^2 \theta_{j,n}^2 + q_1 (1 + \delta^{-1}) n^{-2} \sum_{j=1}^{n_*} j^2 \leq \\ &\leq (1 + \delta) \sum_{j=1}^{n_*} (1 - \gamma_j)^2 \theta_{j,n}^2 + q_1 (1 + \delta^{-1}) n_*^3 n^{-2} . \end{aligned}$$

Through the condition (2.6) we have

$$T_{2,n} \leq (1 + \delta) \sum_{j \geq n_*+1} \theta_j^2 + (1 + \delta^{-1}) q_2 n^{-2}$$

and, we obtain

$$T_n \leq (1 + \delta) T_n^* + (1 + \delta^{-1}) (q_1 n_*^3 + q_2) n^{-2} ,$$

where the first term $T_n^* = \sum_{j \geq 1} (1 - \gamma_j)^2 \theta_j^2$. To study the last term in (5.2), note that the condition (2.8) implies

$$\sup_{S \in \Theta} \sum_{j=1}^n \varpi_{j,n}^2 \leq q_3 n^{-2} .$$

From Lemma 6.2

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{S \in \Theta} U_n \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{S \in \Theta} U_n^* .$$

To estimate the term T_n^* , we apply the definition in (3.4). Then, it can be estimated as

$$T_n^* = \frac{1}{a_{n_*}} \sum_{j=1}^{n_*} a_j \theta_j^2 + \sum_{j \geq n_*+1} \theta_j^2 \leq \frac{1}{a_{n_*}} \sum_{j \geq n_*} a_j \theta_j^2 \leq \frac{r}{a_{n_*}} .$$

From the definition of n_* in (3.5) it follows that

$$a_{n_*+1} \geq r \varepsilon^{-2} / g(n_* + 1) \quad \text{and} \quad T_n^* \leq \frac{a_{n_*+1}}{a_{n_*}} \varepsilon^2 g(n_* + 1) .$$

Taking into account here that $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_{n_{\varepsilon+1}} / a_{n_{\varepsilon}} = 1$ and using the last property in (6.2), we obtain that for any $0 < \nu < \alpha$

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{T_n^*}{\varepsilon^2 n_{\varepsilon}^{1-\nu}} < \infty.$$

Therefore, the first property in (2.12) and Lemma 6.2 imply

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nu_{\varepsilon} T_n^* = 0.$$

Using the property (6.3) and Lemma 6.2 in the upper bound (5.1), we obtain that

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \nu_{\varepsilon} \sup_{S \in \Theta} \sup_{Q \in \mathcal{Q}_{\varepsilon}} \mathbf{E}_Q \|S_{\varepsilon}^* - S\|_n^2 \leq \kappa^{-1/\alpha}.$$

Now Condition A1) and Lemma 6.3 imply the upper bound (4.1). \square

5.2. Proof of Theorem 4.2. First of all, note that

$$R_{\varepsilon}^*(\hat{S}, S) \geq \mathbf{E}_{\mathcal{Q}_0} \|S_{\varepsilon}^* - S\|^2,$$

where \mathcal{Q}_0 is the distribution of the noise $(\xi_t)_{0 \leq t \leq 1}$ in (1.1) with $\rho_1 = \sqrt{\zeta^*}$ and $\rho_2 = 0$, i.e., under the distribution \mathcal{Q}_0 we obtain the “signal+white noise” model, i.e., $dy_t = S(t)dt + \tilde{\varepsilon}dw_t$ with the small parameter $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon\sqrt{\zeta^*}$. So, Theorem 1 and Theorem 5 from [10] imply immediately the lower bound (4.2). \square

6. Auxiliary results

Lemma 6.1. *The function $g(n)$ defined in (3.5) satisfies the following properties*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^{-1+\alpha} g(n) > 0, \quad (6.1)$$

for any $0 < \nu < \alpha$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-1+\nu} g(n) < \infty. \quad (6.2)$$

Moreover, for the weight (3.4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \gamma_j^2 = 1. \quad (6.3)$$

Proof. Setting $\lambda_j = n^{\alpha} - (n-j)^{\alpha}$ we can represent g as

$$g(n) = \sum_{j=1}^{n-1} e^{-\kappa \lambda_j} (1 - e^{-\kappa \lambda_j}) \geq \sum_{j=1}^m e^{-\kappa \lambda_j} (1 - e^{-\kappa \lambda_j}),$$

where $m = \lceil n^{1-\alpha} \rceil$. For $n \geq 2^{1/\alpha}$ and $1 \leq j \leq m$ through the Taylor expansion one can obtain that

$$\alpha \frac{j}{n^{1-\alpha}} \leq \lambda_j \leq \alpha \frac{j}{n^{1-\alpha}} + \frac{j^2}{n^{2-\alpha}} \leq \alpha \frac{j}{n^{1-\alpha}} + 1.$$

Moreover, taking into account that $m \leq n^{1-\alpha} \leq 2m$, we obtain that

$$g(n) \geq e^{-\kappa} \sum_{j=1}^m e^{-\kappa \alpha \frac{j}{m}} \left(1 - e^{-\frac{\kappa \alpha j}{2m}} \right)$$

and, therefore,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{m} \geq e^{-\kappa} \int_0^1 e^{-\kappa \alpha u} \left(1 - e^{-\frac{\kappa \alpha}{2} u} \right) du > 0.$$

This implies the lower bound (6.1). Moreover, note also that for any $0 < \rho < 1$

$$g(n) \leq (1 - \rho)n + 1 + \sum_{j=1}^{\lfloor \rho n \rfloor} e^{-\kappa(n^\alpha - j^\alpha)} \leq (1 - \rho)n + 1 + ne^{-\kappa(1 - \rho^\alpha)n^\alpha}.$$

Choosing $\rho = 1 - n^{-\nu}$ with $0 < \nu < \alpha$ and noting through Taylor expansion that $1 - \rho^\alpha \geq \alpha n^{-\nu}$, as $n \rightarrow \infty$, we obtain the upper bound (6.2). Moreover, from this through the definition of weights γ_j immediately follows the property (6.3). \square

Lemma 6.2. *The function n_* defined in (3.4) satisfies the following limit property*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{n_*}{|\ln \tilde{\varepsilon}|^{1/\alpha}} = \kappa^{-1/\alpha}.$$

Proof. First note that $n_* \rightarrow \infty$ as $\varepsilon \rightarrow 0$. Moreover, from (3.5) and (6.1) it follows that for a sufficiently small ε

$$2\kappa n_*^\alpha \leq \ln \varepsilon^{-2} r \text{ and } 2\kappa(n_* + 1)^\alpha + \ln g(n_* + 1) > \ln \varepsilon^{-2} r.$$

From here we can deduce immediately that $n_* / |\ln \varepsilon|^{1/\alpha} \rightarrow \kappa^{1/\alpha}$ as $\varepsilon \rightarrow 0$. Using here the bounds (2.12), we obtain this lemma. \square

Lemma 6.3. *Let $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ be an absolutely continuous function with square integrable derivative \dot{f} , i.e., $\|\dot{f}\| < \infty$ and $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ be a piecewise constant function of the form $g(t) = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{(t_{j-1}, t_j)}(t)$, where c_j are some constants. Then, for any*

$\delta > 0$ the function $\Delta = f - g$ satisfies the following inequality

$$\|\Delta\|_n^2 \leq (1 + \delta) \|\Delta\|^2 + (1 + \delta^{-1}) \frac{\|\dot{f}\|^2}{n^2}.$$

References

1. Beltaief S., Chernoyarov O.V., Pergamenschikov S.M. (2020) Model selection for the robust efficient signal processing observed with small Levy noise. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. 72. pp. 1205–1235.
2. Ibragimov I.A., Khasminskii R.Z. (1981) *Statistical Estimation: Asymptotic Theory*. New York: Springer.
3. Kutoyants Yu.A. (1994) *Identification of Dynamical Systems with Small Noise*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
4. Pinsker M.S. (1981) Optimal filtration of square integrable signals in Gaussian white noise. *Problems of Transmission Information*. 17. pp. 120–133.
5. Kassam S.A. (1988) *Signal Detection in Non-Gaussian Noise*. New York: Springer-Verlag.
6. Konev V., Pergamenschikov S., Pchelintsev E. (2014) Estimation of a regression with the impulse type noise from discrete data. *Theory of Probability and its Applications*. 58(3). pp. 442–457.

7. Pchelintsev E. (2013) Improved estimation in a non-Gaussian parametric regression. *Statistical Inference for Stochastic Processes*. 16(1). pp. 15–28.
8. Konev V.V., Pergamenschchikov S.M. (2012) Efficient robust nonparametric estimation in a semimartingale regression model. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics*. 48(4). pp. 1217–1244.
9. Konev V.V., Pergamenschchikov S.M. (2015) Robust model selection for a semimartingale continuous time regression from discrete data. *Stochastic Processes and their Applications*. 125. pp. 294–326.
10. Pchelintsev E.A., Pergamenschchikov S.M., Povzun M.A. (2022) Efficient estimation methods for non-Gaussian regression models in continuous time. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. 74. pp. 113–142.
11. Demmler A., Reinsch C. (1975) Oscillation matrices with spline smoothing. *Numerische Mathematik*. 24. pp. 357–382.
12. Liptser R., Shiriyayev A.N. (1989) *Theory of Martingales*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
13. Pchelintsev E.A., Pergamenschchikov S.M., Leshchinskaya M.A. (2022) Improved estimation method for high dimension semimartingale regression models based on discrete data. *Statistical Inference for Stochastic Processes*. 25(3). pp. 537–576.

Information about the authors:

Nikiforov Nikita I. (Post-graduate student Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nikitnikiforov_97@bk.ru

Pergamenschchikov Serguei M. (Professor, Doctor of Physics and Mathematics, University of Rouen Normandy, Saint-Etienne-du-Rouvray, France; Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: serge.pergamenchchikov@univ-rouen.fr

Pchelintsev Evgeny A. (Associate Professor, Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: evgen-pch@yandex.ru

Сведения об авторах:

Никифоров Никита Игоревич – аспирант кафедры математического анализа и теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: nikitnikiforov_97@bk.ru

Пергаменщиков Сергей Маркович – доктор физико-математических наук, профессор лаборатории математики им. Рафаэля Салема Руанского университета, Руан, Франция; профессор кафедры математического анализа и теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. Email: serge.pergamenchchikov@univ-rouen.fr

Пчелинцев Евгений Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа и теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. Email: evgen-pch@yandex.ru

The article was submitted 05.08.2023; accepted for publication 10.10.2023

Статья поступила в редакцию 05.08.2023; принята к публикации 10.10.2023

Научная статья

УДК 512.552

doi: 10.17223/19988621/85/3

MSC: 08A35, 15B99, 16S50

Хорошие кольца формальных матриц над кольцами вычетов

Цырендоржи Дашацыренович Норбосамбуев

Томский государственный университет, Томск, Россия, nstsdts@yandex.ru

Аннотация. Пусть p – простое число, m, n – натуральные и $m \geq n > 0$. Кольцо формальных матриц $\begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$, изоморфное кольцу эндоморфизмов

$E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$, может представлять интерес в шифровании данных. Мы покажем, что кольцо $E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$, $m \geq n$, является 2-хорошим и 2-ниль-хорошим при $p > 2$ и не является хорошим при $p = 2$ и $m > n$.

Ключевые слова: кольцо, хорошее кольцо, кольцо контекста Мориты, кольцо эндоморфизмов абелевой группы

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2023-943).

Для цитирования: Норбосамбуев Ц.Д. Хорошие кольца формальных матриц над кольцами вычетов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 85. С. 32–42. doi: 10.17223/19988621/85/3

Original article

Good formal matrix rings over residue class rings

Tsyrendorzhi D. Norbosambuev

Tomsk State University, Tomsk, Russia, nstsdts@yandex.ru

Abstract. For an arbitrary prime p ring $E((\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}))$ is a semilocal ring with p^5 elements that cannot be embedded in any matrix ring over commutative ring. In a more general case – a ring $E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$, $m > n$, is isomorphic to a formal matrix ring

$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$. There are cryptographic systems based on the arithmetic of

$E((\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}))$. We show that ring $E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$ is 2-good and 2-nil-good for $p > 2$ and not good for $p = 2$ and $m > n$.

Theorem 3.3. Let p be a prime and $p > 2$, $m \geq n$, then $E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$ is a 2-good ring.

What if $p = 2$? In case of $m = n$, we have $E((\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})) = M(2, \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})$ which is 2-good.

Theorem 3.5. Let $m > n$, then for a matrix

$$A = \begin{pmatrix} a + 2^m \mathbf{Z} & b + 2^n \mathbf{Z} \\ c + 2^n \mathbf{Z} & d + 2^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} \in E((\mathbf{Z} / 2^m \mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z} / 2^n \mathbf{Z})),$$

$a, b, c, d \in \mathbf{Z}$, the following statements are true:

- 1) Matrix A is 2-good if a and d are even;
- 2) Matrix A is 3-good if a and d are odd;
- 3) Matrix A is not good if a and d are numbers of different parity.

Thus, formal matrix ring $E((\mathbf{Z}/2^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}))$, $m > n$, is not good.

Keywords: ring, good ring, Morita context ring, endomorphism ring of abelian group

Acknowledgments: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (agreement No. 075-02-2023-943).

For citation: Norbosambuev, T.D. (2023) Good formal matrix rings over residue class rings. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 32–42. doi: 10.17223/19988621/85/3

Введение

Далее все кольца – ассоциативные с единицей, $E(A)$ – кольцо эндоморфизмов абелевой группы A , $U(R)$ – группа обратимых элементов кольца R , \mathbf{Z} – кольцо (и группа) целых чисел, $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ – кольцо (и группа) вычетов по модулю p^n , ■ – конец доказательства или его отсутствие.

Бергман [1] доказал, что если p – простое число, то $E((\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}))$ – полулокальное кольцо мощности p^5 , которое не может быть вложено в кольцо матриц ни над каким коммутативным кольцом. Климент, Наварро и Тортоса [2] показали, что $E((\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}))$ изоморфно некоторому кольцу матриц второго порядка с элементами из $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, $p\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$ (фактически получив кольцо формальных матриц). Они изучили арифметику этого кольца, описали группу его обратимых элементов, его центр. Далее ими была построена криптографическая система, основывающаяся на арифметике $E((\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}))$ [2–4]. Крылов и Туганбаев [5, 6] рассмотрели более общий случай – $E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$, $m > n$. Такое

кольцо эндоморфизмов изоморфно кольцу формальных матриц $\begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$.

В [7] Крылов вводит понятие определителя формальной матрицы второго порядка в общем случае и над кольцами вычетов, а также приводит некоторые свойства определителей формальных матриц. В своей недавней работе Степанова и Тимошенко [8] нашли необходимые и достаточные условия обратимости элементов $E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$, $m \geq n$, а также формулы для построения обратной формальной матрицы.

Классический объект в математике – $M(n, R)$ – кольцо всех матриц порядка n над некоторым кольцом R . В последнее время внимание специалистов привлекают кольца формальных матриц, или, как еще говорят, кольца обобщенных матриц, или кольца контекста Мориты. Понятия формальной матрицы и кольца формальных матриц проистекают из работ японского математика Киити Мориты [9]. Детальный обзор истории изучения контекста Мориты можно найти в [10].

Напомним, *кольцом контекста Мориты*, или *кольцом формальных (обобщенных) матриц второго порядка*, мы называем кольцо матриц вида

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \mid r \in R, m \in {}_R M_S, n \in {}_S N_R, s \in S \right\},$$

где R и S – кольца, ${}_R M_S$ – R - S -бимодуль, ${}_S N_R$ – S - R -бимодуль, $\varphi: M \otimes_S N \rightarrow R$ и $\psi: N \otimes_R M \rightarrow S$ – бимодульные гомоморфизмы, с поэлементным сложением и

умножением вида $\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r' & m' \\ n' & s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rr' + \varphi(m \otimes n') & rm' + ms' \\ nr' + sn' & \psi(n \otimes m') + ss' \end{pmatrix}$, причем

должны выполняться равенства ассоциативности $\varphi(m \otimes n) \cdot m' = m \cdot \psi(n \otimes m')$ и $\psi(n \otimes m) \cdot n' = n \cdot \varphi(m \otimes n')$ для всех $m, m' \in M, n, n' \in N$. Часто кольцо K обозначают как $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$.

Естественным образом можно ввести в рассмотрение формальные матрицы порядка $n \geq 2$. Изучению произвольных колец формальных матриц посвящено множество работ (см., напр.: [5–16]).

1. О строении кольца $E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$

Пусть p – простое число. Рассмотрим произвольную конечную p -группу H ранга 2. Всегда можно подобрать группу вида $((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}), +)$, где $m \geq n > 0$, так, что она будет изоморфна группе H .

Как устроено кольцо эндоморфизмов $E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$?

Знаем, что если G – абелева группа и $G = A \oplus B$ для каких-то подгрупп A и B , то

$$E(A \oplus B) \cong \begin{pmatrix} E(A) & \text{Hom}(B, A) \\ \text{Hom}(A, B) & E(B) \end{pmatrix},$$

где справа имеем кольцо формальных матриц. В качестве произведения гомоморфизмов $\gamma \in \text{Hom}(B, A)$, $\delta \in \text{Hom}(A, B)$ берем их композицию $\gamma\delta \in E(A)$. Аналогично $\delta\gamma \in E(B)$.

Возвращаясь к нашему случаю, $((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}), +)$ – абелева группа, тогда

$$E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})) \cong \begin{pmatrix} E(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) & \text{Hom}(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \\ \text{Hom}(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}) & E(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}) \end{pmatrix}.$$

Общеизвестны следующие факты. Пусть $m \geq n > 0$, тогда

1. Группа $\text{Hom}(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ изоморфна группе $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$.
2. Группа $\text{Hom}(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})$ изоморфна группе $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$.
3. Кольцо $E(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})$ изоморфно кольцу $\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}$.

Таким образом, получаем, что

$$\begin{aligned} E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})) &\cong \begin{pmatrix} E(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) & \text{Hom}(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \\ \text{Hom}(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}) & E(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}) \end{pmatrix} \cong \\ &\cong \begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

То есть всякому эндоморфизму θ группы $\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ соответствует единственная формальная матрица $A = \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$, такая что

для всяких $z_1, z_2 \in \mathbf{Z}$ выполнено

$$\theta \begin{pmatrix} z_1 + p^m\mathbf{Z} \\ z_2 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az_1 + p^{m-n}bz_2 + p^m\mathbf{Z} \\ cz_1 + dz_2 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

здесь элементы группы $\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ записаны в столбец.

Как устроена композиция эндоморфизмов группы $\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$? Пусть эндоморфизмам θ и θ' соответствуют формальные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \text{ и } A' = \begin{pmatrix} a' + p^m\mathbf{Z} & b' + p^n\mathbf{Z} \\ c' + p^n\mathbf{Z} & d' + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}, a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbf{Z}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\theta\theta') \begin{pmatrix} z_1 + p^m\mathbf{Z} \\ z_2 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} &= \theta \begin{pmatrix} a'z_1 + p^{m-n}b'z_2 + p^m\mathbf{Z} \\ c'z_1 + d'z_2 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (aa' + p^{m-n}bc')z_1 + p^{m-n}(ab' + bd')z_2 + p^m\mathbf{Z} \\ (ca' + dc')z_1 + (p^{m-n}cb' + dd')z_2 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} A \cdot A' &= \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' + p^m\mathbf{Z} & b' + p^n\mathbf{Z} \\ c' + p^n\mathbf{Z} & d' + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} aa' + p^{m-n}bc' + p^m\mathbf{Z} & ab' + bd' + p^n\mathbf{Z} \\ ca' + dc' + p^n\mathbf{Z} & p^{m-n}cb' + dd' + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

для матриц A и A' . То есть $\varphi((b + p^n\mathbf{Z}) \otimes (c' + p^n\mathbf{Z})) = p^{m-n}bc' + p^m\mathbf{Z}$ и $\psi((c + p^n\mathbf{Z}) \otimes (b' + p^n\mathbf{Z})) = p^{m-n}cb' + p^n\mathbf{Z}$ для любых $b, c, b', c' \in \mathbf{Z}$.

Таким образом, далее можем не делать различий, в алгебраическом смысле, между эндоморфизмами из кольца $E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$ и формальными матрицами из кольца

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

2. Обратимые элементы в $E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$

Степановой и Тимошенко [8] был получен полный ответ на вопрос о том, когда формальная матрица из кольца $E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$, $m \geq n > 0$, будет обратной. Также они смогли получить формулы для построения обратной матрицы. Представляется, что ключевым моментом здесь стало то, что они воспользовались очень удачным обобщением понятия определителя на случай матриц из $E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$ из работы Крылова [7].

Иногда удастся ввести аналог понятия определителя для некоторых колец формальных матриц, например для колец формальных матриц над коммутативным кольцом. Пусть R – кольцо. Рассмотрим кольцо формальных матриц второго

порядка $K_s = \begin{pmatrix} R & {}_R R_R \\ {}_R R_R & R \end{pmatrix}$ с бимодульными гомоморфизмами $\varphi, \psi : R \otimes_R R \rightarrow R$, $\varphi(x \otimes y) = sxy$, $\psi(x \otimes y) = sxy$ для некоторого центрального элемента s кольца R . Кольцо вида K_s называется кольцом формальных матриц над данным кольцом, или кольцом формальных матриц со значениями в данном кольце, элемент $s \in R$ называется *множителем* кольца K_s . Впервые такие кольца появились в работе Крылова [13]. Вообще, каждый центральный элемент $s \in R$ определяет свое кольцо формальных матриц K_s . Иногда кольцо K_s обозначают как $M(2, R, s)$. В [5] авторами было введено понятие определителя для формальных матриц со значениями в коммутативном кольце.

Определение 2.1 [5]. Пусть R – коммутативное кольцо, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, R, s)$.

Определителем матрицы A назовем элемент $d(A) = ad - s(bc)$ кольца R .

Также в [5] получен следующий важный результат, связывающий обратимость формальной матрицы A с обратимостью ее определителя.

Теорема 2.2 [5]. Матрица $A \in M(2, R, s)$ обратима тогда и только тогда, когда элемент $d(A)$ обратим в R . ■

Вернемся к кольцам формальных матриц над кольцами вычетов. Крылов в [7] дает следующее определение.

Определение 2.3 [7]. Пусть $A \in \begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^m \mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}$, $m > n$, и $A = \begin{pmatrix} a + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & d + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}$,

$a, b, c, d \in \mathbf{Z}$. *Определителем* формальной матрицы A назовем элемент $|A| = ad - p^{m-n}bc + p^n \mathbf{Z}$ кольца $\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$.

Предложение 2.4 [7]. Для любых $A, A' \in \begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^m \mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}$, $m > n$, выполнено

$|AA'| = |A| \cdot |A'|$. ■

Конечно, напрашиваются вопросы: каковы условия обратимости формальной матрицы над кольцами вычетов, есть ли связь с обратимостью ее определителя, можно ли получить формулу построения обратной матрицы? В [8] Степанова и Тимошенко дают полный ответ на эти вопросы.

Если $m = n$, то $E((\mathbf{Z}/p^m \mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}))$ изоморфно кольцу матриц $M(2, \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z})$, и тогда операция умножения и определитель в $E((\mathbf{Z}/p^m \mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}))$ совпадают с привычными. Также и вопрос об обратимости матриц решается стандартным образом, а именно: матрица $A = (a_{ij}) \in M(l, \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z})$ обратима в $M(l, \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z})$ тогда и только тогда, когда ее определитель $\det A$ обратим в кольце $\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$. Если это условие выполнено, то обратная к A матрица имеет вид: $A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot A^*$, где A^* – союзная матрица к матрице A . Заметим, здесь через $\det A$ обозначен обычный определитель матрицы A .

Таким образом, остается рассмотреть случай $m > n$.

Теорема 2.5 [8]. Пусть $m > n > 0$. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} a + p^m \mathbf{Z} & b + p^n \mathbf{Z} \\ c + p^n \mathbf{Z} & d + p^n \mathbf{Z} \end{pmatrix}$,

$a, b, c, d \in \mathbf{Z}$, равносильны следующие условия:

1. Числа a и d не делятся на p .
2. Элемент $|A|$ обратим в кольце $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$.
3. Матрица A обратима слева в кольце $E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$.
4. Матрица A обратима справа в кольце $E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$.
5. Матрица A обратима в кольце $E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$.

Если эти условия выполнены, то матрица A^{-1} находится по формуле

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} W(1 + p^{m-n}bcF) + p^m\mathbf{Z} & -bF + p^n\mathbf{Z} \\ -cF + p^n\mathbf{Z} & aF + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

где $F + p^n\mathbf{Z} = |A|^{-1} \in \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ и $W + p^m\mathbf{Z} = (a + p^m\mathbf{Z})^{-1} \in \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}$. ■

Замечание 2.6. $((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}), +)$ – абелева группа порядка p^{m+n} , а ее кольцо эндоморфизмов имеет мощность, равную p^{m+3n} .

Из теоремы 2.5 вытекает следующий факт.

Следствие 2.7. Пусть $m \geq n > 0$. Тогда мощность группы обратимых элементов кольца $E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$ равна $p^{m+3n-2}(p-1)^2$. ■

3. О некоторых свойствах кольца формальных матриц $E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$

Большой интерес в теории колец представляют так называемые аддитивные задачи в кольцах – условия, при которых отдельные элементы колец представляются в виде сумм обратимых элементов, нильпотентов, идемпотентов (часто такие элементы обобщенно называют специальными элементами колец), или кольца целиком аддитивно порождаются множествами специальных элементов. Подробнее об аддитивных задачах в кольцах можно прочитать, например, в [15–19].

Определение 3.1. Пусть k – натуральное число, $k \geq 2$, R – кольцо. Элемент кольца R называется k -хорошим, если его можно записать в виде суммы k обратимых элементов кольца R . Кольцо R называется k -хорошим, если каждый его элемент является k -хорошим. Если кольцо R не является k -хорошим ни для какого $k \in \mathbb{N}$, но все элементы k -хорошие для разных k , то будем говорить, что R является ω -хорошим. Если элемент кольца R невозможно представить в виде конечной суммы обратимых элементов, то говорим, что такой элемент не является хорошим и все кольцо R не является хорошим.

Лемма 3.2. Пусть n – натуральное, p – простое. При $p > 2$ кольцо $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ является 2-хорошим, кольцо $\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}$ является ω -хорошим.

Доказательство. Пусть $p > 2$, a – целое число. Тогда можем записать $a + p^n\mathbf{Z} = (a-1) + p^n\mathbf{Z} + 1 + p^n\mathbf{Z}$ или $a + p^n\mathbf{Z} = (a-2) + p^n\mathbf{Z} + 2 + p^n\mathbf{Z}$. И $1 + p^n\mathbf{Z}$, и $2 + p^n\mathbf{Z}$ обратимы в $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, поскольку числа 1 и 2 взаимно просты с p . Вместе с тем либо $a-1$, либо $a-2$ взаимно просты с p , а значит, хотя бы один из двух классов вычетов $(a-1) + p^n\mathbf{Z}$ и $(a-2) + p^n\mathbf{Z}$ обратим в $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$. Итак, $a + p^n\mathbf{Z}$ является 2-хорошим элементом, а $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ – 2-хорошим кольцом.

Теперь пусть $p = 2$. Элемент $a + 2^n\mathbf{Z}$ в $\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}$ обратим тогда и только тогда, когда a – нечетное число. Очевидно, что для записи четного числа нужно четное количество нечетных слагаемых, а для записи нечетного – нечетное. Таким образом, $\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}$ – ω -хорошее кольцо. ■

Теорема 3.3. Пусть p – простое и $p > 2$, $m \geq n$, тогда $E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$ – 2-хорошее кольцо.

Доказательство. Пусть $A \in E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$ и $A = \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$,

$a, b, c, d \in \mathbf{Z}$. Тогда, учитывая лемму 3.2, можем записать матрицу A в виде следующей суммы:

$$A = \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ 0 + p^n\mathbf{Z} & d_1 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 + p^m\mathbf{Z} & 0 + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d_2 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = B + C,$$

где $a_1 + p^m\mathbf{Z}, a_2 + p^m\mathbf{Z} \in U(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})$ и $d_1 + p^n\mathbf{Z}, d_2 + p^n\mathbf{Z} \in U(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$. Несложно про-

верить, что матрицы B и C обратимы в кольце $\begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$ как в случае

$m = n$, так и в случае $m > n$ (по теореме 2.5). Таким образом, при $p > 2$ кольцо $E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$ – 2-хорошее. ■

Отдельная проблема – случай $p = 2$. Вообще, все классы вычетов $a + 2^n\mathbf{Z}$ из $\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}$ можем условно разделить на «четные» и «нечетные», по четности их представителей a . Конечно, обратимыми в $\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}$ будут «нечетные», а необратимыми – «четные». При $m = n$, как отмечалось выше, мы имеем привычное кольцо матриц $M(2, \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})$, – здесь матрица будет обратима тогда и только тогда, когда ее определитель «нечетен» (см. рассуждения перед теоремой 2.5).

Лемма 3.4. $M(2, \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})$, $n > 0$, – 2-хорошее кольцо.

Доказательство. Пусть $p = 2$. Далее в этом доказательстве будем обозначать все «четные» элементы $\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}$ как «*ev*», а «нечетные» – как «*od*». Рассмотрим все возможные матрицы из $M(2, \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})$ и покажем, что они 2-хорошие.

- | | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $\begin{pmatrix} ev & ev \\ ev & ev \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ev-1 & ev \\ 0 & ev-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ev & 1 \end{pmatrix}$, | 9) $\begin{pmatrix} ev & od \\ od & ev \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ev-1 & od \\ 0 & ev-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ od & 1 \end{pmatrix}$, |
| 2) $\begin{pmatrix} od & ev \\ ev & ev \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} od & ev-1 \\ ev-1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & ev \end{pmatrix}$, | 10) $\begin{pmatrix} ev & od \\ ev & od \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ev-1 & od \\ ev-1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & od \end{pmatrix}$, |
| 3) $\begin{pmatrix} ev & od \\ ev & ev \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ev-1 & od \\ 0 & ev-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ev & 1 \end{pmatrix}$, | 11) $\begin{pmatrix} ev & ev \\ od & od \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ev-1 & ev-1 \\ od & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & od \end{pmatrix}$, |
| 4) $\begin{pmatrix} ev & ev \\ od & ev \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ev-1 & 0 \\ od & ev-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & ev \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, | 12) $\begin{pmatrix} od & od \\ od & ev \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} od & 0 \\ 0 & ev-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & od \\ od & 1 \end{pmatrix}$, |
| 5) $\begin{pmatrix} ev & ev \\ ev & od \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ev-1 \\ ev-1 & od \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ev & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, | 13) $\begin{pmatrix} od & od \\ ev & od \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & od \\ ev-1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} od & 0 \\ 1 & od \end{pmatrix}$, |
| 6) $\begin{pmatrix} od & od \\ ev & ev \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} od & 0 \\ ev-1 & ev-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & od \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, | 14) $\begin{pmatrix} od & ev \\ od & od \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ev-1 \\ od & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} od & 1 \\ 0 & od \end{pmatrix}$, |
| 7) $\begin{pmatrix} od & ev \\ od & ev \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} od & ev-1 \\ 0 & ev-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ od & 1 \end{pmatrix}$, | 15) $\begin{pmatrix} ev & od \\ od & od \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ev-1 & 0 \\ 0 & od \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & od \\ od & 0 \end{pmatrix}$, |
| 8) $\begin{pmatrix} od & ev \\ ev & od \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} od & ev-1 \\ ev-1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & od \end{pmatrix}$, | 16) $\begin{pmatrix} od & od \\ od & od \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} od & 0 \\ 0 & od \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & od \\ od & 0 \end{pmatrix}$. |

Конечно, предложенные выше разложения не единственно возможные, можно подобрать и другие варианты разбиений. ■

То есть $E((\mathbf{Z}/2^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})) = M(2, \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})$ – 2-хорошее кольцо.

Что будет с хорошостью кольца формальных матриц $E((\mathbf{Z}/2^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}))$ при $m > n$?

Теорема 3.5. Для формальной матрицы $A = \begin{pmatrix} a + 2^m\mathbf{Z} & b + 2^n\mathbf{Z} \\ c + 2^n\mathbf{Z} & d + 2^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$,

из кольца $\begin{pmatrix} \mathbf{Z}/2^m\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$, где $m > n$, справедливы следующие утверждения:

- 1) Если a и d – четные числа, то A – 2-хорошая матрица;
- 2) Если a и d – нечетные числа, то A – 3-хорошая матрица;
- 3) Если a и d – числа разной четности, то A не является хорошей матрицей.

Доказательство. Действительно, пусть $A = \begin{pmatrix} a + 2^m\mathbf{Z} & b + 2^n\mathbf{Z} \\ c + 2^n\mathbf{Z} & d + 2^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$, где

1) a и d – четные числа, тогда можем записать $A = \begin{pmatrix} a - 1 + 2^m\mathbf{Z} & b + 2^n\mathbf{Z} \\ c + 2^n\mathbf{Z} & d - 1 + 2^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + 2^m\mathbf{Z} & 0 + 2^n\mathbf{Z} \\ 0 + 2^n\mathbf{Z} & 1 + 2^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$ – сумма двух обратимых (по теореме 2.5) матриц.

2) a и d – нечетные числа, тогда $A = \begin{pmatrix} a + 2^m\mathbf{Z} & b + 2^n\mathbf{Z} \\ c + 2^n\mathbf{Z} & d + 2^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + 2^m\mathbf{Z} & 0 + 2^n\mathbf{Z} \\ 0 + 2^n\mathbf{Z} & 1 + 2^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 + 2^m\mathbf{Z} & 0 + 2^n\mathbf{Z} \\ 0 + 2^n\mathbf{Z} & 1 + 2^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$ – сумма трех обратимых матриц. Нечетные a и d представить в виде суммы четного количества нечетных слагаемых невозможно.

3) a и d – числа разной четности, тогда матрицу A не получится записать как сумму матриц с обратимыми элементами на главной диагонали. ■

Следствие 3.6. Таким образом, кольцо $E((\mathbf{Z}/2^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}))$ при $m > n$ не является хорошим.

Итак, $\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}$ – ω -хорошее кольцо, $M(2, \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})$ – 2-хорошее, а $\begin{pmatrix} \mathbf{Z}/2^m\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$ –

не хорошее при $m > n$.

Есть много работ, в которых рассматриваются свойства, похожие на хорошость. Например, Кэлугэрян и Лам [17] вводят в своей статье понятие изящности.

Определение 3.7. Элемент кольца называют *изящным*, если его можно записать как сумму нильпотентного и обратимого элементов. Соответственно, кольцо R называют *изящным*, если все его элементы, отличные от нулевого, являются изящными.

Данчев [18], обобщая свойство изящности, ввел в рассмотрение свойство ниль-хорошести.

Определение 3.8. Элемент кольца называют *ниль-хорошим*, если его можно записать как сумму нильпотентного элемента и элемента, который обратим или

равен 0. Соответственно, кольцо R называют *ниль-хорошим*, если все его элементы являются ниль-хорошими.

Понятно, что если кольцо изящно, то оно будет ниль-хорошим. Обратное неверно. Казалось бы, разница между этими двумя свойствами невелика, но второй класс колец значительно шире и обладает более интересными свойствами.

В [16] авторы ввели в рассмотрение свойство, связанное как с хорошостью, так и с другими аддитивными задачами в кольцах – k -ниль-хорошесть.

Определение 3.9. Пусть k – натуральное число, $k \geq 1$. Элемент кольца называют k -ниль-хорошим, если его можно записать как сумму одного нильпотентного и k обратимых элементов. Кольцо R называют k -ниль-хорошим, если все его элементы k -ниль-хорошие. Если кольцо R не является k -ниль-хорошим ни для какого k , но каждый элемент из R является k -ниль-хорошим для подходящего k , то будем говорить, что R есть ω -ниль-хорошее кольцо.

Несложно видеть, что если кольцо R является k -хорошим, то оно будет и k -ниль-хорошим.

Следствие 3.10. $E((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$ – 2-ниль-хорошее кольцо при $p > 2$ и $m \geq n$.

Предложение 3.11. $M(2, \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$ – 2-ниль-хорошее, ниль-хорошее кольцо, но не изящное.

Доказательство. Поскольку кольцо $M(2, \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$ – 2-хорошее (лемма 3.4), то оно будет и 2-ниль-хорошим. Для проверки ниль-хорошести можно перебрать все возможные матрицы в $M(2, \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$ и их разбиения в виде сумм нильпотентных матриц и обратимых либо нулевых так же, как в доказательстве леммы 3.4. Нужно лишь учитывать, что нильпотентными будут матрицы вида 1), 3), 4) и 16), а обратимыми – 8), 9) и 12)–15). Изящными не будут матрицы вида 1). ■

Вопрос 3.12. Будет ли $E((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$ изящным или хотя бы ниль-хорошим кольцом при $p > 2$? Что можно сказать о ниль-хорошести и изящности кольца $E((\mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}))$, $m > n$? По всей видимости, в обоих случаях ни изящности, ни ниль-хорошести не будет.

Список источников

1. Bergman G.M. Some examples in PI ring theory // Israel Journal of Mathematics. 1974. V. 18. P. 257–277. doi: 10.1007/BF02757282
2. Climent J.-J., Navarro P.R., Tortosa L. On arithmetic of endomorphism ring $\text{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})$ // Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing. 2011. V. 22. P. 91–108. doi: 10.1007/s00200-011-0138-4.
3. Climent J.-J., Navarro P.R., Tortosa L. Key exchange protocols over noncommutative rings. The case of $\text{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})$ // International Journal of Computer Mathematics. 2012. V. 89. P. 1753–1763. doi: 10.1080/00207160.2012.696105
4. Climent J.-J., Navarro P.R., Tortosa L. An extension of the noncommutative Bergman’s ring with a large number of noninvertible elements // Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing. 2014. V. 25. P. 347–361. doi: 10.1007/s00200-014-0231-6
5. Крылов П.А., Туганбаев А.А. Формальные матрицы и их определители // Фундаментальная и прикладная математика. 2014. № 1(19). С. 65–119.
6. Krylov P., Tuganbaev A. Formal matrices. Springer, 2017. (Algebra and Applications; v. 23). doi: 10.1007/978-3-319-53907-2
7. Крылов П.А. Определители обобщенных матриц порядка 2 // Фундаментальная и прикладная математика. 2015. № 5 (20). С. 95–112.

8. Степанова А.Ю., Тимошенко Е.А. Матричное представление эндоморфизмов примарных групп малых рангов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 74. С. 30–42. doi: 10.17223/19988621/74/4
9. Morita K. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition // Science Reports of Tokyo Kyoiku Daigaku Section A. 1958. V. 6. P. 83–142.
10. Loustanaui P., Shapiro J. Morita contexts // Non-Commutative Ring Theory. Springer, 1990. P. 80–92. (Lecture Notes in Mathematics, v. 1448). doi: 10.1007/BFb0091253
11. Крылов П.А., Норбосамбуев Ц.Д. Автоморфизмы алгебр формальных матриц // Сибирский математический журнал. 2018. № 5 (59). С. 1116–1127. doi: 10.1134/S0037446618050129
12. Крылов П.А., Норбосамбуев Ц.Д. Группа автоморфизмов одного класса алгебр формальных матриц // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 53. С. 16–22. doi: 10.17223/19988621/53/2
13. Крылов П.А. Об изоморфизме колец обобщенных матриц // Алгебра и логика. 2008. № 4 (47). С. 456–463. doi: 10.1007/s10469-008-9016-y
14. Норбосамбуев Ц.Д. Ранг формальной матрицы. Система формальных линейных уравнений. Делители нуля // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 52. С. 5–13. doi: 10.17223/19988621/52/1
15. Норбосамбуев Ц.Д. О суммах диагональных и обратимых обобщенных матриц // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 36. С. 34–41. doi: 10.17223/19988621/36/4
16. Норбосамбуев Ц.Д., Тимошенко Е.А. О k -ниль-хороших кольцах формальных матриц // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 77. С. 17–26. doi: 10.17223/19988621/77/2
17. Călugăreanu G., Lam T.Y. Fine rings: A new class of simple rings // J. Algebra Appl. 2016. V. 15 (9). Art. 1650173. doi: 10.1142/S0219498816501735
18. Danchev P. Nil-good unital rings // Int. J. Algebra. 2016. V. 10 (5). P. 239–252. doi: 10.12988/ija.2016.6212
19. Henriksen M. Two classes of rings generated by their units // J. Algebra. 1974. V. 31. P. 182–193. doi: 10.1016/0021-8693(74)90013-1

References

1. Bergman G.M. (1974) Some examples in PI ring theory. *Israel Journal of Mathematics*. 18. pp. 257–277. DOI: 10.1007/BF02757282.
2. Climent J.-J., Navarro P.R., Tortosa L. (2011) On arithmetic of endomorphism ring $\text{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})$. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*. 22. pp. 91–108. DOI: 10.1007/s00200-011-0138-4.
3. Climent J.-J., Navarro P.R., Tortosa L. (2012) Key exchange protocols over noncommutative rings. The case of $\text{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})$. *International Journal of Computer Mathematics*. 89. pp. 1753–1763. DOI: 10.1080/00207160.2012.696105.
4. Climent J.-J., Navarro P.R., Tortosa L. (2014) An extension of the noncommutative Bergman's ring with a large number of noninvertible elements. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*. 25. pp. 347–361. DOI: 10.1007/s00200-014-0231-6.
5. Krylov P.A., Tuganbaev A.A. (2015) Formal matrices and their determinants. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*. 211(3). pp. 341–380. DOI: 10.1007/s10958-015-2610-3.
6. Krylov P., Tuganbaev A. (2017) *Formal matrices*. (Algebra and Applications, Vol. 23). Springer. DOI: 10.1007/978-3-319-53907-2.
7. Krylov P.A. (2018) Determinants of generalized matrices of order 2. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*. 230(3). pp. 414–427. DOI: 10.1007/s10958-018-3748-6.
8. Stepanova A.Yu., Timoshenko E.A. (2021) Matrichnoye predstavleniye endomorfizmov primarnykh grupp malykh rangov [Matrix representation of endomorphisms of primary groups of

- small ranks]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 74. pp. 30–42. DOI: 10.17223/19988621/74/4.
9. Morita K. (1958) Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku Section A*. 6. pp. 83–142.
 10. Lousstaunau P., Shapiro J. (1990) Morita contexts. *Non-Commutative Ring Theory* (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1448). Springer. pp. 80–92. DOI: 10.1007/BFb0091253.
 11. Krylov P.A., Norbosambuev T.D. (2018) Automorphisms of formal matrix algebras. *Siberian Mathematical Journal*. 59(5). pp. 885–893. DOI: 10.1134/S0037446618050129.
 12. Krylov P.A., Norbosambuev T.D. (2018) Gruppya avtomorfizmov odnogo klassa algebr formal'nykh matrits [Group of automorphisms of one class of formal matrix algebras]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 53. pp. 16–21. DOI: 10.17223/19988621/53/2.
 13. Krylov P.A. (2008) Isomorphism of generalized matrix rings. *Algebra and Logic*. 47(4). pp. 258–262. DOI: 10.1007/s10469-008-9016-y.
 14. Norbosambuev T.D. (2018) Rang formal'noy matritsy. Sistema formal'nykh lineynykh uravneniy. Deliteli nulya [Rank of a formal matrix. System of formal linear equations. Zero divisors]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 52. pp. 5–12. DOI: 10.17223/19988621/52/1.
 15. Norbosambuev T.D. (2015) O summakh diagonal'nykh i obratimyykh obobshchennykh matrits [On sums of diagonal and invertible formal matrices] *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(36). pp. 34–40. DOI: 10.17223/19988621/36/4.
 16. Norbosambuev T.D., Timoshenko E.A. (2022) O k -nil'-khoroshikh kol'tsakh formal'nykh matrits [About k -nil-good formal matrix rings]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 17–26. DOI: 10.17223/19988621/77/2.
 17. Călugăreanu G., Lam T.Y. (2016) Fine rings: A new class of simple rings. *Journal of Algebra and Its Applications*. 15(9). Article ID: 1650173. DOI: 10.1142/S0219498816501735.
 18. Danchev P. (2016) Nil-good unital rings. *International Journal of Algebra*. 10(5). pp. 239–252. DOI: 10.12988/ija.2016.6212.
 19. Henriksen M. (1974) Two classes of rings generated by their units. *Journal of Algebra*. 31. pp. 182–193. DOI: 10.1016/0021-8693(74)90013-1.

Сведения об авторе:

Норбосамбуев Цырендоржи Дашацыренович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра, доцент механико-математического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: nstsdts@yandex.ru

Information about the author:

Norbosambuev Tsyrendorzhi D. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nstsdts@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 24.11.2022; принята к публикации 10.10.2023

The article was submitted 24.11.2022; accepted for publication 10.10.2023

МЕХАНИКА

MECHANICS

Научная статья

УДК 537.525.5

doi: 10.17223/19988621/85/4

Исследование струи, возникающей при распылении электродов в дуговом разряде при различных токах разряда

Владимир Андреевич Андриющенко¹, Евгений Викторович Бойко²,
Салават Зинфирович Сахапов³, Михаил Сергеевич Скирда⁴,
Дмитрий Владимирович Смовж⁵

1, 2, 3, 4, 5 Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе Сибирского отделения РАН,
Новосибирск, Россия

¹ vladimir.andryushchenko@gmail.com

² renboyko@gmail.com

³ sakhapov@gmail.com

⁴ lab42_04@itp.nsc.ru

⁵ dsmovzh@gmail.com

Аннотация. Работа посвящена экспериментальным и теоретическим исследованиям распыления электродов в дуговом разряде. При моделировании формирующейся струи учитываются процессы в плазме дуги, распространение струи, перенос частиц струей и их ионизация. Экспериментально установлено, что увеличение тока разряда приводит к увеличению концентрации фуллеренов и графитовых структур в саже. На основе данных моделирования показано, что данный эффект обусловлен более длительным временем пребывания растущих частиц углерода в высокотемпературной зоне (1 000–2 800 К).

Ключевые слова: дуговой разряд, напыление, графитовые структуры, углеродные материалы

Благодарности: Работы по изготовлению дуговой разрядной установки, синтезу материалов, измерениям ТГА, ПЭМ, РФА и численные расчеты поддержаны РНФ, проект № 18-19-00213П. Оптические измерения проводились при поддержке бюджетного проекта ИТ СО РАН № 122022800487-2. Авторы благодарят ЦКП ВТАН НГУ за проведение измерений на научном оборудовании.

Для цитирования: Андриющенко В.А., Бойко Е.В., Сахапов С.З., Скирда М.С., Смовж Д.В. Исследование струи, возникающей при распылении электродов в дуговом разряде при различных токах разряда // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 85. С. 43–57. doi: 10.17223/19988621/85/4

Original article

A study of jet formation during the sputtering of electrodes in an arc discharge for the different currents

Vladimir A. Andryushchenko¹, Evgeniy V. Boyko², Salavat Z. Sakhapov³, Mikhail S. Skirda⁴, Dmitriy V. Smovzh⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} Kutateladze Institute of Thermophysics of the Siberian Branch of RAS, Novosibirsk, Russian Federation

¹ vladimir.andryushchenko@gmail.com

² renboyko@gmail.com

³ sakhapov@gmail.com

⁴ lab42_04@itp.nsc.ru

⁵ dsmovzh@gmail.com

Abstract. This work is devoted to experimental and theoretical studies of the sputtering of electrodes in an arc discharge. The temperature distribution in the working chamber during arc discharge is analyzed depending on the discharge current. On the basis of experimental data on the anode sublimation and interelectrode distance, a fan jet is simulated, which is generated during the anode sputtering in an arc discharge. The calculation is carried out using the model describing the processes occurring in the arc plasma, jet propagation, transport of particles by the jet and their ionization. The numerical simulation results for the radial temperature distribution are consistent with the experimental data. The experiments show that an increase in the discharge current leads to an increase in the concentration of fullerenes and graphite structures in the soot. Based on the simulation data, it is shown that this effect is a result of the longer residence time of growing carbon particles in a high-temperature zone (1000-2800 K) at high arc discharge currents.

Keywords: arc discharge, sputtering, graphite structures, carbon materials

Acknowledgments: Manufacturing of an arc discharge installation, the synthesis of materials, the measurements by TGA, TEM, XRF, and the numerical modeling were supported by the Russian Science Foundation (project No. 18-19-00213П). Optical measurements were carried out with the support of the budget project IT SB RAS (No. 122022800487-2). The authors acknowledge the Core Facilities VTAN at NSU for the usage of experimental equipment.

For citation: Andryushchenko, V.A., Boyko, E.V., Sakhapov, S.Z., Skirda, M.S., Smovzh, D.V. (2023) A study of jet formation during the sputtering of electrodes in an arc discharge for the different currents. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 43–57. doi: 10.17223/19988621/85/4

Введение

Электродуговой разряд является одним из самых простых и дешевых способов получения наноматериалов [1, 2]. Применение электродугового разряда для синтеза материалов можно разделить на две основные группы. Первая – синтез углеродных наноматериалов: фуллеренов, нанотрубок, графена. Данное направление популярно среди исследователей благодаря широким перспективам применения

углеродных наноматериалов. Экспериментальные исследования в данном направлении сосредоточены на определении оптимальных параметров синтеза, а также поиске наиболее активных каталитических комплексов для роста углеродных наноструктур. Вторая группа – синтез металлических наночастиц при распылении композитных металл-углеродных электродов. Здесь интерес исследователей сосредоточен на синтезе наночастиц металлов и сплавов контролируемого состава, имеющих узкую функцию распределения по размерам [3, 4].

Для понимания механизмов процессов, происходящих при дуговом разряде, а также определения возможностей управления этими процессами экспериментальные исследования должны дополняться соответствующими теоретическими и численными моделями. Существует ряд статей, посвященных моделированию дуговых разрядов для синтеза углеродных материалов [5]. Были представлены модели с катодным распылением [6] или модели для плазмы разрядного промежутка [7]. Одномерная модель (в аксиальном направлении) синтеза углеродных нанотрубок в анодном дуговом разряде представлена в [8]. Однако, как указано в обзорной статье [5], до сих пор нет детальной модели для установления соотношения между параметрами разряда и синтеза углеродных нанотрубок.

Сегодня существует лишь несколько теоретических моделей, посвященных синтезу наночастиц при распылении материала анода. Стоит упомянуть ряд работ Дюжева и Алексеева, где представлена одномерная модель дугового разряда с испаряющимся графитовым анодом [9] или рассматривалась термодинамика образования капель расплава углерода в металлическом катализаторе [10, 11]. Отметим разработанную недавно самосогласованную интегральную модель дугового разряда с распыляемым анодом [12]. В ней учитывается связь между параметрами плазмы разряда и электродными процессами, непрерывность тока на электродах, тепловой режим электродов и скорость эрозии анода. Кроме того, стоит отметить наиболее полную, на наш взгляд, разработанную двумерную модель анодного дугового разряда, которая учитывает абляцию материалов анода, состоящего из частиц углерода и металлических частиц, и газодинамику потоков нейтральных и заряженных частиц в разрядной камере [13]. Однако, несмотря на широкую экспериментальную апробацию графитовой дуги, теоретические представления о механизмах конденсации носят модельный характер и недостаточны для описания процесса в целом.

Представляемая работа посвящена экспериментальным и теоретическим исследованиям процессов распыления различных материалов в углеродной дуге. Непосредственно исследовалось распределение температуры в рабочей камере при горении дугового разряда в зависимости от тока разряда. При соответствующих условиях проводилось моделирование веерной струи, формирующейся при распылении графитового анода в дуговом разряде. Расчет проводился на основе модификации модели [13]. Данные эксперимента и моделирования сопоставлялись. Достигнуто хорошее согласование. При моделировании также вычислялось время пребывания углеродных частиц в различных температурных диапазонах, что позволило объяснить состав синтезируемых структур.

Экспериментальная установка

Экспериментальная установка представляла собой цилиндрическую вакуумную камеру (рис. 1). Камера предварительно откачивалась до давления 10^{-2} торр,

а затем заполнялась рабочим газом (гелием) до давления 25 торр. Дуговой разряд зажигался между двумя соосными графитовыми электродами диаметром 8 мм. Заземленный нераспыляемый стационарный электрод (см. рис. 1, 1), прикрепленный к корпусу камеры, играл роль катода. Положительное напряжение прикладывалось источником постоянного тока через подвижный вакуумный ввод 2 к графитовому электроду 3, который распылялся в процессе экспериментов. Напряжение разряда составляло 20 В и поддерживалось путем контроля межэлектродного расстояния, в свою очередь, ток разряда, поддерживаемый источником, варьировал в экспериментах и был равен 80, 100 и 120 А.

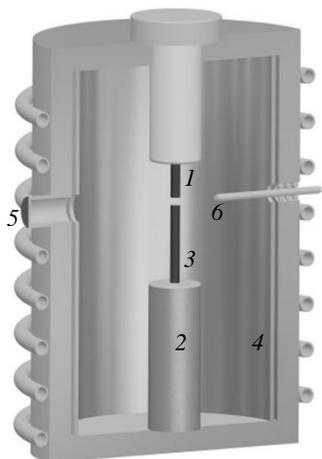


Рис. 1. Экспериментальная установка: 1 – графитовый катод; 2 – сильфонный блок перемещения; 3 – распыляемый анод; 4 – охлаждаемый экран для сбора сажи; 5 – кварцевое окно; 6 – подвижный термодатчик

Fig. 1. Experimental setup: 1, graphite cathode; 2, bellows displacement block; 3, sputtering anode; 4, cooled screen for soot collecting; 5, quartz window; and 6, movable thermocouple probe

Распыление анода приводило к образованию потока углерода и буферного газа, протекающего из межэлектродного зазора к стенкам камеры. По мере приближения к стенкам камеры пары углерода конденсировались в более крупные агломераты, которые осаждались на съемном экране 4, покрывающем поверхность стенки камеры. Для предотвращения перегрева стенки камеры крепления анода и катода охлаждались проточной водой.

Измерение температуры проводилось оптическим и зондовым методами. Излучение разряда, проходящее через кварцевое стекло 5 детектировалось спектрометром в диапазоне длин волн от 190 до 1100 нм. Пространственная фокусировка производилась по максимальному полному излучению. Температура вблизи электродов оценивалась по закону смещения Винна по расположению максимума излучательной способности. Также для определения радиального распределения температуры в камеру был помещен подвижный хромель-алюмелевый термодатчик 6, который радиально перемещался от центра к стенкам камеры с одновременной фиксацией температуры. В процессе экспериментов оси собирающей линзы и зонда были направлены на центр межэлектродного пространства. Подоб-

ный комбинированный подход к измерению температур обусловлен тем, что в более горячих зонах на процессы измерения температуры начинают существенно влиять процессы химического взаимодействия паров с материалом и процессы фазовых переходов на термодуге (на термодуге начинают формироваться углеродные и металл-углеродные образования), что, в свою очередь, радикально снижает точность зондовых измерений в области вблизи электродов (ближе 10 мм).

Моделирование распространения веерной струи

Для описания динамики распространения веерной струи гетерогенного состава, формирующейся при электродуговом распылении электрода в дуговом разряде в атмосфере буферного газа, была построена теоретическая модель, описывающая основные явления, происходящие в исследуемой системе. За основу реализуемой модели бралась модель [13]. Модель состоит из пяти основных частей, описывающих процессы, происходящие в дуге, сублимацию анода, распространение струи, перенос атомов или молекул струей и их ионизацию. Определение электропроводности среды в модифицированной модели дуги проводится согласно уравнению Чепмена–Энскога с учетом частот столкновений электронов с ионами и нейтральными атомами различных компонент струи. При этом использовались уравнения насыщения соответствующих компонент. Распространение струи и соответствующие ей поля плотности и температуры определялись из системы уравнений: неразрывности, уравнения Навье–Стокса с учетом гравитационного и электромагнитного полей и уравнения для переноса тепла в энтальпийной форме, учитывающего Джоулево тепло и тепловой поток электронов. При этом буферный газ и компоненты струи рассматривались как одна среда. Перенос частиц компонент в модифицированной модели определялся согласно стандартным диффузионным уравнениям (эффективный коэффициент диффузии в смеси находится усреднением по правилу Уилки), а их степень ионизации – по системе уравнений Саха для плазмы. Далее кратко рассмотрим основные уравнения для каждой из указанных частей общей модели, а также соответствующие граничные условия.

Для нахождения плотности тока решалось уравнение для электропроводности σ и электрического потенциала φ

$$\nabla \cdot (-\sigma \nabla \varphi) = 0. \quad (1)$$

Потенциал слабоионизованной плазмы в поле постоянного тока находился согласно уравнению Чепмена–Энскога

$$\sigma = \frac{e^2}{m_e} \frac{n_e}{\sum_l (v_{e,a,l} + v_{e,i,l})},$$

где e , m_e , n_e – заряд, масса и концентрация электронов соответственно, а $v_{e,a,l}$, $v_{e,i,l}$ – частоты столкновений электронов с нейтральными атомами и ионами соответствующих компонент, определяемые согласно уравнениям

$$v_{e,a,l} = \frac{4}{3} \left(\frac{8k_B T}{\pi m_e} \right)^{1/2} n_{a,l} Q_{m,l},$$

$$v_{e,i,l} = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} n_{i,l} \left(\frac{e^2}{k_B T} \right)^2 \left(\frac{k_B T}{m_e} \right)^{1/2} \ln(\Lambda),$$

где $n_{a,l}$, $n_{i,l}$ – концентрации нейтральных атомов и ионов соответствующих компонент, k_B , T – постоянная Больцмана и температура, $Q_{m,l}$ – сечение столкновения электронов с нейтральными атомами, $\ln(\Lambda)$ – Кулоновский логарифм для плазмы:

$$\ln(\Lambda) = \ln\left(\frac{4k_B T}{\gamma^2 e^2 k_e}\right) - 2\ln(\sqrt{2}), \quad k_e = \frac{(4\pi n_e e^2)}{k_B T},$$

здесь $\ln(\gamma) = 0.577$.

Для определения аксиально-симметричного магнитного поля использовался закон Ампера

$$B_0 = \frac{\mu_0}{r} \int_0^R j_z r dr, \quad (2)$$

где R – радиус экспериментальной области.

Сублимация, в отличие от модели [13], не рассчитывалась на основе модели Ленгмюра. Скорость распыления анода бралась непосредственно из эксперимента.

Для моделирования распространения потока использовалось стандартное уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

а также уравнения Навье–Стокса, учитывающие наличие поля тяжести и электромагнитного поля. При этом электромагнитное поле определялось согласно уравнениям (1), (2):

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$

Для нахождения распределения температуры решалось уравнение переноса тепла в энтальпийной форме, учитывающее Джоулево тепло и тепловой поток электронов:

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} h) = \frac{Dp}{Dt} + \nabla \cdot \left(k \nabla \left(\frac{h}{C_{p,m}} \right) \right) + \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}}{\sigma} + \frac{5 k_B}{2 e} \mathbf{j} \cdot \nabla \left(\frac{h}{C_{p,m}} \right).$$

При этом в уравнениях фигурируют усредненные параметры. Усреднение проводилось по параметрам буферного газа и компонент распыляемой струи.

Для нахождения распределения частиц в пространстве использовалось следующее диффузионное уравнение:

$$\frac{\partial(\rho c_A)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} c_A) = \nabla \cdot (D_A \nabla(\rho c_A)),$$

где c_A – массовая доля, D_A – эффективный коэффициент диффузии частиц типа A . Эффективный коэффициент диффузии компоненты смеси находится усреднением по правилу Уилки [14]:

$$D_A = \left(\frac{1}{M} - \frac{c_A}{M_A} \right) \left(\sum_{k=1, k \neq A}^N \frac{c_k}{M_k D_{Ak}} \right)^{-1}, \quad (3)$$

где M_A и M – соответственно молярные массы компоненты A и смеси, состоящей из N компонент. D_{AB} – бинарные коэффициенты диффузии, определяемые диффузией компоненты A в компоненту B . Зависимость коэффициента бинарной диффузии от температуры находилось согласно модели твердых сфер:

$$D_{AB} = \frac{2.63 \times 10^{-7}}{p(\sigma_{AB})^2} \left(\frac{T^3(M_A + M_B)}{2M_A M_B} \right)^{1/2}, \quad (4)$$

где σ – сечение столкновения. Здесь учет размеров и масс частиц играет принципиальную роль из-за существенного влияния этих параметров на тепломассоперенос при высоких температурах [15].

Предполагая, что исследуемая плазма находится в локальном термодинамическом равновесии, можно определить степени ионизации частиц, используя систему уравнений Саха

$$\frac{n_e n_{i,l}}{n_{0,l}} = \left(\frac{2\pi m_e k_B T_e}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_l}{k_B T_e} \right),$$

где E_l – энергия ионизации частиц типа l .

Расчетная область представляла собой цилиндрическую ячейку с электродами одного диаметра, оси которых соосны оси ячейки. Задача являлась аксиально симметричной, т.е. фактически двумерной. Значение потенциала электрического поля на конце катода считалось постоянным, также постоянным считалась плотность тока на конце анода, все остальные поверхности анода считаются изолированными (плотность тока равна нулю). Скорости потока считались нулевыми на всех поверхностях, кроме конца анода. Расстояние между катодом и анодом выбиралось равным 1 мм, что примерно соответствует экспериментальным значениям. Скорость сублимированного пара на конце анода получалась путем деления массового расхода электрода на сумму плотности пара и локальной плотности среды вблизи границы раздела, а также на площадь поперечного сечения анода. На нижней границе ячейки задавалось постоянное давление. Температура стенок ячейки считалась постоянной. На концах электродов также задавались потоки тепла. Для решения диффузионного уравнения задавался постоянный поток частиц на конце анода, все остальные поверхности считались непроницаемыми для частиц.

Также отметим, что данная модель с учетом формул (3), (4) допускает описание распыления гетерогенной струи или композитного электрода. В нашем же случае в эксперименте использовались углеродные электроды, поэтому и модель рассматривалась в частном случае однокомпонентного распыления.

Результаты и обсуждение

Параметры разряда в экспериментах (ток разряда I , межэлектродное расстояние l , скорость распыления анода v_A , скорость осаждения на экран v_S и количество сажи осаждаемого на экране от количества распыляемого углерода в процессе дугового распыления χ) приведены в таблице. При увеличении тока происходит более интенсивное распыление анода, при этом изменяется процентная доля осажденного на экране материала за счет осаждения части материала на катоде.

Параметры электродугового распыления при различных токах

I , А	l , мм	v_A , мг/с	v_S , мг/с	χ , %
80	1.2	1.16	0.1	8.6
100	1.1	1.91	0.39	20.3
120	1	4.26	0.71	16.7

Оценка температуры по излучению центра горения дуги показала, что температура изменялась в пределе $3\,900 \pm 30$ К. Пример фиксируемого спектра излучения показан на рис. 2. В спектре излучения можно выделить линию углерода 247 нм [16] и полосы Сводна [17–19], возникающие в результате переходов между электронными состояниями молекул C_2 . Самая сильная полоса системы Сводна излучает в зеленом цвете спектра (около 510 нм, 515 нм и 520 нм, что соответствует полосам (0,0), (1,1), (2,2)).

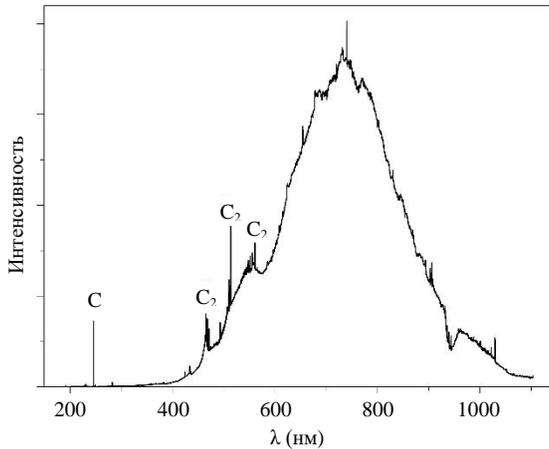


Рис. 2. Спектр излучения плазмы в атмосфере гелия при давлении 25 торр при токе и напряжении разряда 100 А и 20 В соответственно
Fig. 2. Plasma emission spectrum in a helium atmosphere at a pressure of 25 Torr, a discharge current of 100 A, and a voltage of 20 V

Согласно модифицированной теоретической модели для струи была написана соответствующая расчетная программа. Программа была реализована на языке C++ в среде OpenFOAM. На основе данной программы получены профили распределения температуры в реальных условиях экспериментальной установки: диаметры электродов – 8 мм; ток дуги – 80, 100 и 120 А; давление гелия – 25 торр; экспериментальные скорости распыления анода и расстояния между анодом и катодом приведены в таблице. Геометрическая схема расчетной области с указанием основных линейных размеров представлена на рис. 3.

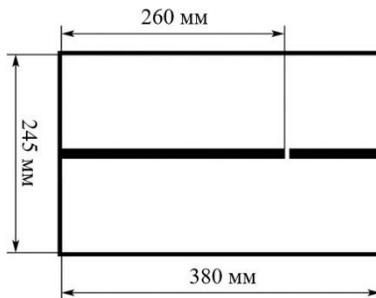


Рис. 3. Схематичное изображение расчетной области
Fig. 3. Schematic representation of a computational domain

Рассчитанные при данных условиях профили температуры представлены на рис. 4. Радиальный профиль температуры был также экспериментально измерен при различных режимах горения дуги. Измерение проводилось зондовым методом, для чего в разрядную камеру через вакуумный ввод с механическим приводом перемещалась хромель-алюмелевая термопара. При измерениях термопара перемещалась вдоль радиальной координаты разрядной камеры в плоскости разряда в центральном срезе с одновременной регистрацией температуры. Измеренное распределение температуры при различных параметрах разряда имеет монотонный падающий характер (см. рис. 4) Показано, что температура на различных расстояниях вблизи электродов монотонно зависит от тока разряда, что связано со значительным вкладом тока разряда в мощность распыления электродов.

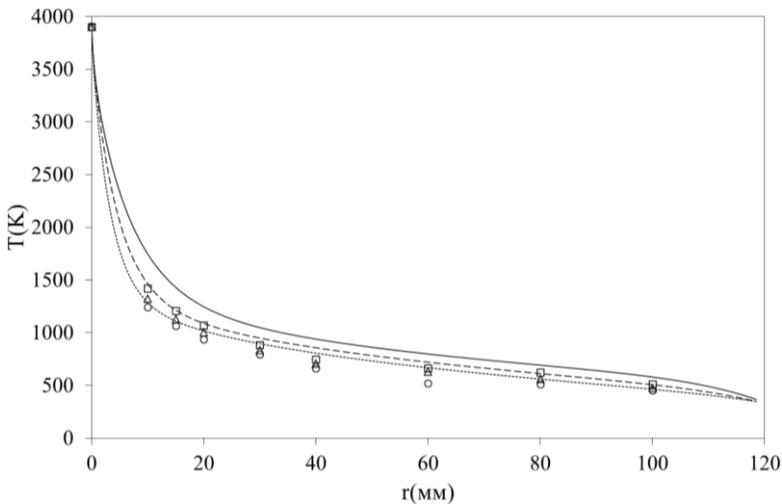


Рис. 4. Радиальное распределение температур. Давление гелия и напряжение разряда: 25 торр и 20 В. Квадратные маркеры соответствуют экспериментальным данным при $I = 120$ А, треугольные – при $I = 100$ А, окружности – при $I = 80$ А. Сплошная линия соответствует моделированию при $I = 120$ А, пунктирная – при $I = 100$ А, точечная – при $I = 80$ А
Fig. 4. Radial temperature distribution at a helium pressure of 25 Torr and a discharge voltage of 20 V. Squares denote experimental data at $I = 120$ A; triangles, $I = 100$ A; and circles, $I = 80$ A. The solid line corresponds to a simulation at $I = 120$ A; the dashed line, $I = 100$ A, and the dotted line, $I = 80$ A

Характер экспериментальных и теоретических температурных профилей качественно похож. На стенке установки значения температур совпадают и равны задаваемой температуре стенок (350 К). Оценки температуры, полученные из анализа спектра излучения, дают значение температуры в приэлектродной области 3900 ± 30 К, что лишь незначительно больше результатов моделирования. Учитывая сложность системы, это можно считать хорошим согласованием результатов. Измеренные термопарой профили радиальных распределений температур имеют несколько заниженные значения по сравнению с температурами, определенными при помощи моделирования. Это может быть связано с влиянием теплоотвода по каркасу термопары и влиянием осаждающегося на поверхности

термопары углерода. Нарастающая оболочка из продуктов распыления, покрывающая электрод, уменьшает контактную теплопроводность. Химические реакции углерода и металлов с материалом термопары и ее изоляции могут существенно повлиять на точность измерений. Отметим, что при удалении от электродов данный эффект должен проявляться в меньшей степени из-за уменьшения концентрации продуктов синтеза, а результаты зондового метода и численного моделирования должны согласовываться лучше, что и наблюдается на рис. 4.

Результаты анализа материалов, синтезированных при различных условиях, представлены на рис. 5–7. Методами просвечивающей электронной микроскопии (ПЭМ) не удалось выявить существенных различий в формирующейся саже (см. рис. 5). Здесь и далее под сажей подразумевается рентгеноаморфный углерод (смесь sp^2 и sp^3). Материал представляет собой сажевые глобулы с размерами 10–50 нм, регулярных кристаллических структур не наблюдалось. Тем не менее рентгенофазовый анализ (РФА) показал, что при увеличении тока разряда формируются графитовые структуры (см. рис. 6). Широкое гало в диапазоне 2θ от 10 до 20° может быть отнесено к малослойному графену с адсорбированным кислородом и азотом из атмосферы [20] и наличию фуллереновой фазы. С увеличением тока разряда в сигнале РФА формируется графитовая линия 002, что свидетельствует о формировании графитовых структур. Анализ дифракционного пика методом Шеррера показал, что средний размер когерентного рассеяния для графитовых структур составил 26 нм. Кроме того, увеличивается вклад фуллереновой фазы (10–20°), о чем свидетельствует формирование плечей в области 10.7 и 17.6°. Термогравиметрия (ТГ) показала, что материал, синтезированный при больших токах, активнее окисляется на начальной стадии прогрева (температуры до 350°C) и интенсивнее горит при дальнейшем нагреве (см. рис. 7). Материал, синтезированный при 80 А имеет более однородный состав, о чем свидетельствует монотонность спектра дифференциальной термогравиметрии (ДТГ), полное выгорание углерода происходит при температуре 650°C. С повышением тока разряда формируются термостабильные фазы углерода, окисляющиеся при больших температурах 650–750°C. Отсутствие на ПЭМ-изображениях разницы в материалах связано с локальностью метода, требующего подготовки образцов; графитовые структуры могут находиться в объеме сажевых глобул и не давать достаточного контраста при наблюдении. РФА и ТГА не требуют предварительной подготовки образцов и дают усредненный сигнал с большого объема материала.

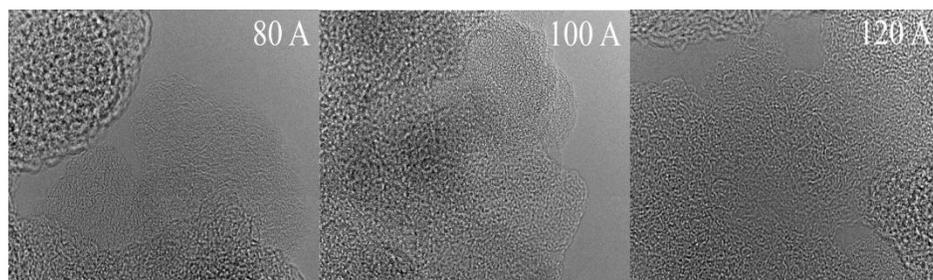


Рис. 5. ПЭМ-изображения материала, синтезированного в дуговом разряде при различных токах

Fig. 5. TEM images of the material synthesized in an arc discharge at various electric currents

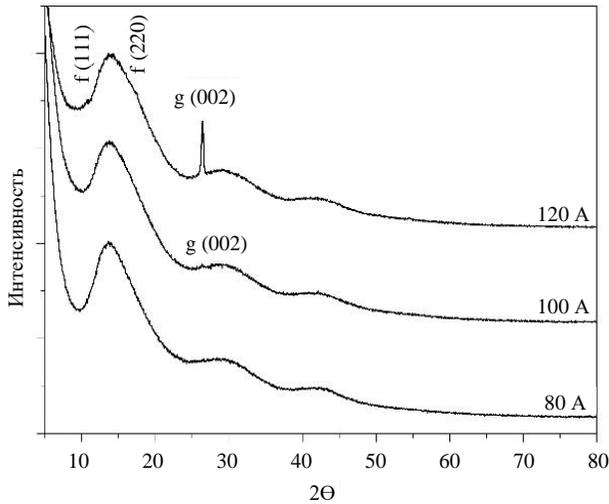


Рис. 6. РФА спектр углеродной сажи, синтезированной в дуговом разряде при различных токах. Линия g соответствует графиту-2H (гексагональному), линия f соответствует бакминстерфуллерену-С60

Fig. 6. The XRF spectrum of the carbon soot synthesized in an arc discharge at various electric currents. The line g corresponds to graphite-2H (hexagonal); the line f , the buckminsterfullerene-C60

В процессе формирования кластеров ключевую роль играет отношение времени формирования структурированных каркасов кластеров ко времени нахождения пара при определенной температуре. Так, при температурах выше 2 000 К могут формироваться кластеры в десятки атомов с упорядоченной структурой [21]. При дальнейшем отжиге именно эти кластеры будут формировать фуллереновые структуры. В случае если время пребывания при относительно высоких температурах (2 000–2 800 К) оказывается недостаточным для формирования упорядоченных структур, при дальнейшем отжиге будут формироваться менее упорядоченные структуры, так как при температурах ниже 2000 К они не будут разрушаться. При этом увеличение времени экспозиции растущих сажевых образований при температурах 1 000–2 000 К приводит к увеличению степени графитизации материала и формированию объемно неупорядоченных графеновых плоскостей [21]. Здесь под степенью графитизации материала понимаются характерный размер и структура кристаллических включений, таких как фуллерен, графен, графит и т.д. Таким образом, увеличение времени пребывания углерода в указанных температурных диапазонах должно приводить к увеличению выхода фуллеренов и графитовых структур в получаемой саже.

В эксперименте установлено, что при повышении тока разряда происходит увеличение выхода фуллеренов, что согласуется с увеличением рассчитанного времени пребывания паров в зоне с температурой, соответствующей формированию фуллеренов – 2 000–2 800 К (6.2, 7.3, 10.7 мкс для 80, 100 и 120 А соответственно), и увеличению степени графитизации углерода, что может быть связано с более медленной закалкой материала в области температур 1 000–2 000 К (45.2, 56.7, 78.4 мкс для 80, 100 и 120 А соответственно). Стабильность сажи, синтезированной при малых токах, можно объяснить разницей массового потока материала.

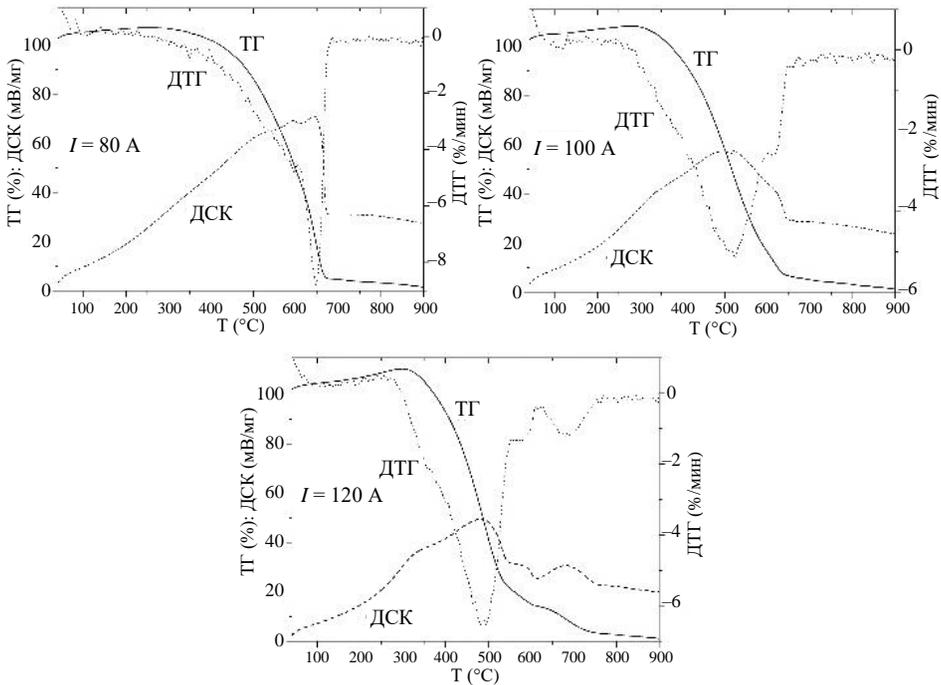


Рис. 7. Термогравиметрический (ТГ), дифференциальный термогравиметрический (ДТГ) и дифференциальный сканирующий калориметрический (ДСК) анализ углеродной сажи, синтезированной в дуговом разряде

Fig. 7. Thermogravimetric (TG), differential thermogravimetric (DTG), and differential scanning calorimetry (DSC) analysis of the carbon soot synthesized in an arc discharge

Повышение тока разряда от 80 до 120 А приводит, согласно экспериментальным данным, к увеличению скорости сублимации анода в 4 раза, что ведет к возрастанию концентрации газа, а следовательно, и увеличению потока атомов углерода. Увеличение потока газа регистрируется экспериментально, при этом скорость роста сажи на экране с увеличением тока разряда возрастает в 7 раз. Увеличение частоты столкновений атомов углерода и частиц приводит к их быстрому росту, что влечет формирование более дефектных сажевых глобул. Стоит отметить, что более выгодным по производству сажи является распыление анода при токе 100 А, при котором синтезируемый материал составляет 20% от расхода графита.

Заключение

Было проведено экспериментальное и теоретическое исследование процессов распыления электродов в дуговом разряде. На основе сопоставления радиального распределения температур, полученного в рабочей камере при горении дугового разряда, и соответствующего распределения температур, полученного в рамках численного моделирования, можно сделать вывод о хорошем согласовании данных эксперимента и результатов численного моделирования. При моделировании было показано, что изменение тока разряда существенно влияет на скорость раз-

лета компонент струи, в результате чего время пребывания углерода в различных температурных зонах отличается, что, в свою очередь, приводит к изменению состава получаемой сажи. Так, показано, что с увеличением тока разряда повышается концентрация фуллеренов и графитовых структур в синтезируемой саже. Данный эффект связан с увеличением времени пребывания углерода в температурной зоне синтеза соответствующих структур.

Список источников

1. *Keidar M.* Factors affecting synthesis of single wall carbon nanotubes in arc discharge // *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2007. V. 40 (8). P. 2388–2393. doi: 10.1088/0022-3727/40/8/S18
2. *Ando Y., Zhao X., Hirahara K., Suenaga K., Bandow S., Iijima S.* Mass production of single-wall carbon nanotubes by the arc plasma jet method // *Chemical Physics Letters*. 2000. V. 323 (5-6). P. 580–585. doi: 10.1016/S0009-2614(00)00556-X
3. *Scott J.H.J., Majetich S.A.* Morphology, structure, and growth of nanoparticles produced in a carbon arc // *Physical Review B*. 1995. V. 52 (17). P. 12564–12571. doi: 10.1103/PhysRevB.52.12564
4. *Мальцев В.А., Новопашин С.А., Нерушев О.А., Сахапов С.З., Сможж Д.В.* Синтез металлических наночастиц на углеродной матрице // *Российские нанотехнологии*. 2007. Т. 2, № 5-6. С. 85–89.
5. *Farhat S., Scott C.D.* Review of the arc process modeling for fullerene and nanotube production // *Journal of Nanoscience and Nanotechnology*. 2006. V. 6 (5). P. 1189–1210. doi: 10.1166/jnn.2006.331
6. *Lefort A., Parizet M.J., El-Fassi S.E., Abbaoui M.* Erosion of graphite electrodes // *Journal of Physics D: Applied Physics*. 1993. V. 26 (8). P. 1239–1243. doi: 10.1088/0022-3727/26/8/013
7. *Bilodeau J.F., Pousse J., Gleizes A.* A mathematical model of the carbon arc reactor for fullerene synthesis // *Plasma chemistry and plasma processing*. 1998. V. 18 (2). P. 285–303. doi: 10.1023/A:1021658717860
8. *Hinkov I., Farhat S., Scott C.D.* Influence of the gas pressure on single-wall carbon nanotube formation // *Carbon*. 2005. V. 43 (12). P. 2453–2462. doi: 10.1016/j.carbon.2005.04.026
9. *Алексеев Н.И., Дюжев Г.А.* Дуговой разряд с испаряющимся анодом (почему род буферного газа влияет на процесс образования фуллеренов?) // *Журнал технической физики*. 2001. Т. 71, № 10. С. 41–49.
10. *Алексеев Н.И.* О механизме образования углеродных нанотрубок. I. Термодинамика образования капель расплава углерода в металлическом катализаторе // *Журнал технической физики*. 2004. Т. 74, № 8. С. 45–50.
11. *Алексеев Н.И.* О механизме образования углеродных нанотрубок. II. Кинетика взрывной конденсации капель расплава углерода в металлическом катализаторе // *Журнал технической физики*. 2004. Т. 74, № 8. С. 51–57.
12. *Keidar M., Beilis I.I.* Modeling of atmospheric-pressure anodic carbon arc producing carbon nanotubes // *Journal of Applied Physics*. 2009. V. 106 (10). Art. 103304. doi: 10.1063/1.3262626
13. *Kundrapu M., Keidar M.* Numerical simulation of carbon arc discharge for nanoparticle synthesis // *Physics of Plasmas*. 2012. V. 19 (7). Art. 073510. doi: 10.1063/1.4737153
14. *Wilke C.R.* A viscosity equation for gas mixtures // *The journal of chemical physics*. 1950. V. 18 (4). P. 517–519. doi: 10.1063/1.1747673
15. *Кантарбаева А., Мусеева К.М.* Особенности распространения пламени в угле-пропановоздушной газозвеси // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2021. № 74. С. 95–102. doi: 10.17223/19988621/74/10
16. *Gouveia S.T., Silva F.V., Costa L.M., Nogueira A.R.A., Nóbrega J.A.* Determination of residual carbon by inductively-coupled plasma optical emission spectrometry with axial and radial view configurations // *Analytica Chimica Acta*. 2001. V. 445 (2). P. 269–275. doi: 10.1016/S0003-2670(01)01255-7

17. Tanabashi A., Amano T. New identification of the visible bands of the C2 Swan system // *Journal of Molecular Spectroscopy*. 2002. V. 215 (2). P. 285–294. doi: 10.1006/jmsp.2002.8645
18. Brooke J.S., Bernath P.F., Schmidt T.W., Bacskay G.B. Line strengths and updated molecular constants for the C2 Swan system // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. 2013. V. 124. P. 11–20. doi: 10.1016/j.jqsrt.2013.02.025
19. Gershman S., Raitses Y. Unstable behavior of anodic arc discharge for synthesis of nano-materials // *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2016. V. 49 (34). Art. 345201. doi: 10.1088/0022-3727/49/34/345201
20. Du F., Yuan J., Zhang M., Li J., Li Z., Cao M., Chen J., Zhang L., Liu X., Gong A., Xu W., Shao Q. Nitrogen-doped carbon dots with heterogeneous multi-layered structures // *RSC Advances*. 2014. V. 4 (71). P. 37536–37541. doi: 10.1039/C4RA06818A
21. Теснер П.А. Образование углерода из углеводородов газовой фазы. М. : Химия, 1972.

References

1. Keidar M. (2007) Factors affecting synthesis of single wall carbon nanotubes in arc discharge. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 40(8). pp. 2388–2393. doi: 10.1088/0022-3727/40/8/S18
2. Ando Y., Zhao X., Hirahara K., Suenaga K., Bandow S., Iijima S. (2000) Mass production of single-wall carbon nanotubes by the arc plasma jet method. *Chemical Physics Letters*. 323(5–6). pp. 580–585. doi: 10.1016/S0009-2614(00)00556-X
3. Scott J.H.J., Majetich S.A. (1995) Morphology, structure, and growth of nanoparticles produced in a carbon arc. *Physical Review B*. 52(17). pp. 12564–12571. doi: 10.1103/PhysRevB.52.12564
4. Maltsev V.A., Novopashin S.A., Nerushev O.A., Cakhapov C.Z., Smovzh D.V. (2007) Синтез металлических наночастиц на углеродной матрице [Synthesis of metal nanoparticles on a carbon matrix]. *Rossiyskie nanotekhnologii – Nanotechnologies in Russia*. 2(5–6). pp. 85–89.
5. Farhat S., Scott C.D. (2006) Review of the arc process modeling for fullerene and nanotube production. *Journal of Nanoscience and Nanotechnology*. 6(5). pp. 1189–1210. doi: 10.1166/jnn.2006.331
6. Lefort A., Parizet M.J., El-Fassi S.E., Abbaoui M. (1993) Erosion of graphite electrodes. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 26(8). pp. 1239–1243. doi: 10.1088/0022-3727/26/8/013
7. Bilodeau J.F., Pousse J., Gleizes A. (1998) A mathematical model of the carbon arc reactor for fullerene synthesis. *Plasma Chemistry and Plasma Processing*. 18(2). pp. 285–303. doi: 10.1023/A:1021658717860
8. Hinkov I., Farhat S., Scott C.D. (2005) Influence of the gas pressure on single-wall carbon nanotube formation. *Carbon*. 43(12). pp. 2453–2462. doi: 10.1016/j.carbon.2005.04.026
9. Alekseyev N.I., Dyuzhev G.A. (2001) Arc discharge with a vaporizable anode: why is the fullerene formation process affected by the kind of buffer gas? *Technical Physics*. 46(10). pp. 1247–1255. doi: 10.1134/1.1412058
10. Alekseev N.I. (2004) On the mechanism of carbon nanotube formation: I. The thermodynamics of formation of carbon molten drops in a metallic catalyst. *Technical Physics*. 49(8). pp. 998–1003. doi: 10.1134/1.1787658
11. Alekseev N.I. (2004) On the mechanism of carbon nanotube formation: II. The kinetics of explosive condensation of carbon molten drops in a metallic catalyst. *Technical Physics*. 49(8). pp. 1004–1011. doi: 10.1134/1.1787659
12. Keidar M., Beilis I.I. (2009) Modeling of atmospheric-pressure anodic carbon arc producing carbon nanotubes. *Journal of Applied Physics*. 106(10). Article 103304. doi: 10.1063/1.3262626
13. Kundrapu M., Keidar M. (2012) Numerical simulation of carbon arc discharge for nanoparticle synthesis. *Physics of Plasmas*. 19(7). Article 073510. doi: 10.1063/1.4737153
14. Wilke C.R. (1950) A viscosity equation for gas mixtures. *The Journal of Chemical Physics*. 18(4). pp. 517–519. doi: 10.1063/1.1747673
15. Kantarbaeva A., Moiseeva K.M. (2021) Osobennosti rasprostraneniya plameni v uglepropano-vozdushnoy gazovzvesi [Features of flame propagation in a propane-air gas suspension]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk*

- State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 74. pp. 95–102. doi: 10.17223/19988621/74/10
16. Gouveia S.T., Silva F.V., Costa L.M., Nogueira A.R.A., Nóbrega J.A. (2001) Determination of residual carbon by inductively-coupled plasma optical emission spectrometry with axial and radial view configurations. *Analytica Chimica Acta*. 445(2). pp. 269–275. doi: 10.1016/S0003-2670(01)01255-7
 17. Tanabashi A., Amano T. (2002) New identification of the visible bands of the C2 Swan system. *Journal of Molecular Spectroscopy*. 215(2). pp. 285–294. doi: 10.1006/jmsp.2002.8645
 18. Brooke J.S., Bernath P.F., Schmidt T.W., Bacskey G.B. (2013) Line strengths and updated molecular constants for the C2 Swan system. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. 124. pp. 11–20. doi: 10.1016/j.jqsrt.2013.02.025
 19. Gershman S., Raitseis Y. (2016) Unstable behavior of anodic arc discharge for synthesis of nanomaterials. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 49(34). Article 345201. doi: 10.1088/0022-3727/49/34/345201
 20. Du F., Yuan J., Zhang M., Li J., Li Z., Cao M., Chen J., Zhang L., Liu X., Gong A., Xu W., Shao Q. (2014) Nitrogen-doped carbon dots with heterogeneous multi-layered structures. *RSC Advances*. 4(71). pp. 37536–37541. doi: 10.1039/C4RA06818A
 21. Tesner P.A. (1972) *Образование углерода из углеводородов газовой фазы* [Carbon generation from gaseous hydrocarbons]. Moscow: Khimiya.

Сведения об авторах:

Андрющенко Владимир Андреевич – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории синтеза новых материалов Института теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия. E-mail: vladimir.andryushchenko@gmail.com

Бойко Евгений Викторович – младший научный сотрудник лаборатории синтеза новых материалов Института теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия. E-mail: renboyko@gmail.com

Сахапов Салават Зинфирович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории синтеза новых материалов Института теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия. E-mail: sakhapov@gmail.com

Скирда Михаил Сергеевич – инженер лаборатории синтеза новых материалов Института теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия. E-mail: lab42_04@itp.nsc.ru

Смовж Дмитрий Владимирович – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией синтеза новых материалов Института теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия. E-mail: dsmovzh@gmail.com

Information about the authors:

Andryushchenko Vladimir A. (Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: vladimir.andryushchenko@gmail.com

Boyko Evgeniy V. (Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: renboyko@gmail.com

Sakhapov Salavat Z. (Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: sakhapov@gmail.com

Skirda Mikhail S. (Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: lab42_04@itp.nsc.ru

Smovzh Dmitriy V. (Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: dsmovzh@gmail.com

Статья поступила в редакцию 28.06.2022; принята к публикации 10.10.2023

The article was submitted 28.06.2022; accepted for publication 10.10.2023

Научная статья

УДК 531.76, 531.57

doi: 10.17223/19988621/85/5

Моделирование работы электромагнитного датчика скорости метаемого тела в канале высокоскоростной баллистической установки

Владимир Исмагилович Биматов¹, Алина Александровна Механич²,
Сергей Витальевич Синяев³, Алексей Александрович Ящук⁴

^{1, 2, 3, 4} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ vbimatov@mail.ru

² kireeva_aa@mail.ru

³ ssv@niipmm.tsu.ru

⁴ rainbow@niipmm.tsu.ru

Аннотация. Описана конструкция и построена математическая модель работы измерительных рамок датчика скорости метаемого тела при его движении в канале или за дульным срезом. Принцип действия рамок основан на эффекте деформации магнитных барьеров, генерируемых рамками в измерительных сечениях канала, электропроводным телом. Модель учитывает 3D-взаимодействие тела с магнитным барьером и влияние индукционных токов в защитно-формирующей насадке. Исследовано влияние скорости, формы, размеров тел и других параметров на величину и форму сигналов в измерительных катушках.

Ключевые слова: датчик скорости, электромагнитная измерительная рамка, метаемое тело, магнитный барьер, индукционные токи, сигнал, математическое моделирование

Благодарности: Исследование выполнено при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет-2030).

Для цитирования: Биматов В.И., Механич А.А., Синяев С.В., Ящук А.А. Моделирование работы электромагнитного датчика скорости метаемого тела в канале высокоскоростной баллистической установки // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 85. С. 58–73. doi: 10.17223/19988621/85/5

Simulation of an electromagnetic in-bore projectile velocity sensor for a high-speed ballistic cannon

Vladimir I. Bimatov¹, Alina A. Mekhanich²,
Sergey V. Sinyayev³, Aleksey A. Yashchuk⁴

^{1, 2, 3, 4} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ vbimatov@mail.ru

² kireeva_aa@mail.ru

³ ssv@niipmm.tsu.ru

⁴ rainbow@niipmm.tsu.ru

Abstract. The design is described, and a mathematical model is developed for the operation of the measuring frames of a speed sensor for a projectile when it moves within a bore or behind its muzzle. In measuring sections, the frames generate magnetic fields that act as magnetic barriers for the projectiles. The operating principle is based on the effect of deformation of the magnetic field of the barriers due to the electrically conductive projectile. The magnetic circuit of the frame includes an open magnetic core with measuring coils, a coil generating a constant magnetic field (or a permanent superimposed magnet), and a protective cap made of durable nonmagnetic metal with high resistivity. The mathematical model takes into account the 3D interaction of the projectile with the magnetic field of the barrier and the effect of induction currents in the protective cap on the magnitude and shape of the signals. The results of parametric studies on the effect of the speed, shape, and size of the projectile bodies, as well as the main parameters of the measuring frames, on the magnitude and shape of the signals generated by the projectile are presented.

Keywords: speed sensor, electromagnetic measuring frame, projectile, magnetic barrier, induction currents, signal, mathematical modeling

Acknowledgments: This study was supported by the Tomsk State University Development Programme (Priority 2030).

For citation: Bimatov, V.I., Mekhanich, A.A., Sinyayev, S.V., Yashchuk, A.A. (2023) Simulation of an electromagnetic in-bore projectile velocity sensor for a high-speed ballistic cannon. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 58–73. doi: 10.17223/19988621/85/5

Введение

Бесконтактные электромагнитные датчики [1–3] применяются для определения скорости модели в разгонном канале ускорителя и на его дульном срезе. Требования к датчику значительно повышаются при ускорении модели в режиме «свободного» метания [4] либо в поддоне из неэлектропроводного материала. При проектировании таких датчиков необходимо рассчитывать распределение магнитного поля в его измерительных зазорах при различных положениях пролетающей модели для определения магнитного сопротивления $R_D(t)$ измерительного зазора рамки. Зависимость $R_D(t)$ является интегральной характеристикой про-

песса деформации магнитного барьера метаемым телом. Деформация магнитного барьера генерирует сигнал в измерительных катушках рамок датчика. Величину и форму сигнала могут заметно исказить индукционные токи, наводимые в защитно-формирующей насадке рамок при изменении магнитного потока при деформации магнитного барьера. По сигналу с электромагнитной измерительной рамки фиксируется момент пролета моделью t_1 ее контрольного сечения. Две рамки, расположенные на известном расстоянии l друг от друга, позволяют определить среднюю скорость модели u_m на этом участке ее разгона: $u_m = l(t_2 - t_1)^{-1}$. В некоторых случаях [5, 6] возможно определение мгновенной скорости модели с помощью одной измерительной рамки.

Постановка задачи

Общая схема измерительной рамки датчика в режиме ожидания показана на рис. 1. Магнитная цепь рамки состоит из разомкнутого магнитопровода 2 с измерительными катушками 3, катушки-генератора магнитного поля 5 (или постоянного накладного магнита) и цилиндрической насадки 7 из прочного немагнитного металла с высоким удельным сопротивлением. Цилиндрическое отверстие насадки является продолжением канала ствола 8. Насадка формирует магнитный барьер 1 в канале ствола, а ее защитная перемычка 9 защищает магнитопровод от воздействия рабочего газа высокого давления.

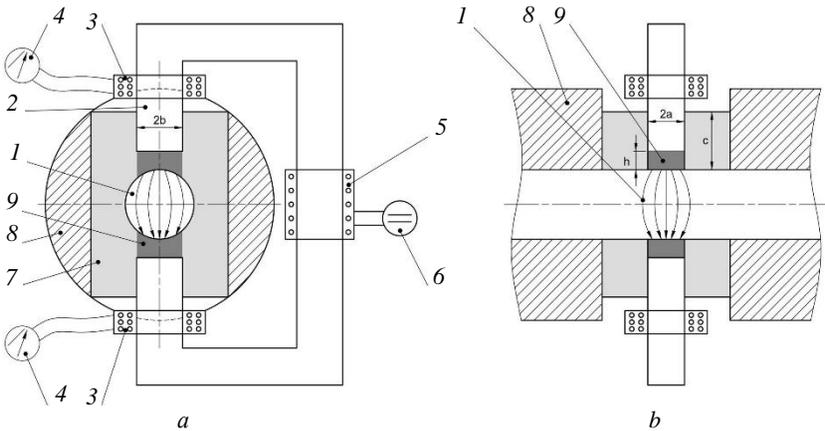


Рис. 1. Схема электромагнитной измерительной рамки (*a* – вид с торца канала, *b* – вид сбоку): 1 – магнитный барьер в измерительном сечении канала; 2 – магнитопровод; 3 – измерительные катушки; 4 – устройства регистрации сигнала; 5 – катушка-генератор магнитного барьера; 6 – источник постоянного тока; 7 – защитно-формирующая насадка; 8 – стенки канала, 9 – защитная перемычка насадки

Fig. 1. Design of an electromagnetic speed sensing frame (*a*) end and (*b*) side views): 1, magnetic field in the accelerator channel; 2, magnetic core; 3, signal coils; 4, recording units; 5, magnetic field generator; 6, DC source; 7, protective-forming cap; 8, bore wall; and 9, cap protective diaphragm

Деформация магнитного барьера пролетающей моделью приводит к изменению магнитного потока Φ через измерительную катушку, охватывающую магнито-

провод. При этом в катушке наводится электродвижущая сила, представляющая собой измеряемый сигнал $S(t)$ в вольтах:

$$S(t) = -N \cdot \dot{\Phi}(t). \quad (1)$$

Здесь N – число витков в измерительной катушке, t – время, $\dot{\Phi}$ – скорость изменения магнитного потока.

Таким образом, сигнал является реакцией магнитной цепи рамки на модель, пролетающую через ее измерительный зазор в канале. Экспериментальная проверка работоспособности такой схемы измерительной рамки была реализована при скоростях моделей до 5 км/с в стволе легкогазовой баллистической установки калибром 8 мм [6].

Схема замещения магнитной цепи измерительной рамки приведена на рис. 2.

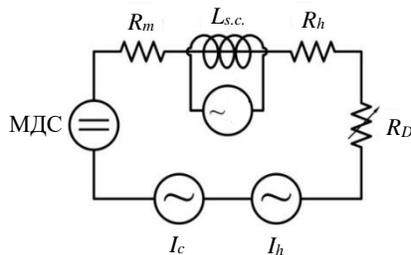


Рис. 2. Схема замещения магнитной цепи измерительной рамки датчика
Fig. 2. Scheme of the equivalent circuit for the sensing frame

Здесь R_D , R_m , R_h – магнитные сопротивления магнитного барьера, магнитопровода и защитных перемычек насадки, nI_0 – постоянная магнитодвижущая сила (МДС), создаваемая током I_0 в катушке с n витками либо постоянными накладными магнитами на внешней части магнитопровода, I_h , I_c – МДС индукционных токов в защитных частях насадки и в ее пазах под магнитопровод, L_{sc} – индуктивно связанная с магнитопроводом измерительная катушка. Подключенный к катушке вольтметр V транслирует сигнал $S(t)$, генерируемый рамкой.

Уравнение магнитной цепи измерительной рамки определяется вторым законом Кирхгофа и законом Ома:

$$[R_D(t) + R_m + R_h] \cdot \Phi(t) = n \cdot I_0 + I_h(t) + I_c(t). \quad (2)$$

Входящие в (2) параметры R_m , R_h , $R_D(t)$, $I_h(t)$, $I_c(t)$ определяются при задании формы, размеров и скорости модели, а также геометрических и других необходимых характеристик магнитопровода и защитно-формирующей насадки (см. рис. 1).

Для магнитопровода с постоянным поперечным сечением Σ и длиной l_m значение R_m определяется выражением: $R_m = l_m \cdot (\mu_m \cdot \Sigma)^{-1}$, где μ_m – магнитная проницаемость магнитопровода. Магнитное сопротивление защитной h -перемычки рассчитывается по формуле $R_h = h \cdot (\mu_0 \cdot \Sigma)^{-1}$, где h – толщина перемычки, μ_0 – магнитная проницаемость материала защитно-формирующей насадки. Для формирования магнитного барьера в измерительном зазоре канала материала насадки помимо высоких прочностных характеристик должен быть немагнитным с высоким электрическим сопротивлением, например из титана [3, 6] и его сплавов.

Магнитное сопротивление измерительного зазора рамки R_D . В [7] показано, что напряженность магнитного поля в измерительном зазоре \vec{H} может быть рассчитана с помощью скалярного потенциала ψ : $\vec{H} = grad\psi$. Его величина определяется уравнением Лапласа [8]: $\Delta\psi = 0$. Там же сформулированы краевые условия для 3D-расчета магнитного поля при взаимодействии с осесимметричными моделями, ось симметрии которых совпадает с осью симметрии цилиндрического канала. По найденному распределению магнитного поля определяется магнитный поток в зазоре. Он равен магнитному потоку на поверхности канала Φ_D под полюсом магнитопровода s_p : $\Phi_D = \mu_0 \cdot \int_{s_p} H_r \cdot ds_p$, где μ_0 – магнитная проницаемость зазора. По известному значению Φ_D определяется магнитное сопротивление зазора: $R_D = 2 \cdot \psi_0 / \Phi_D$, где $\pm\psi_0$ – значения потенциала под полюсами магнитопровода. На рис. 3 показана область определения магнитного поля в канале постоянного сечения диаметром D . Здесь $x(t)$ – координата центра масс модели, $\pm x_1$ – продольные координаты полюсов магнитопровода, $\pm x_2$ – координаты границ чувствительности рамки, вне которых модель практически не взаимодействует с магнитным барьером.

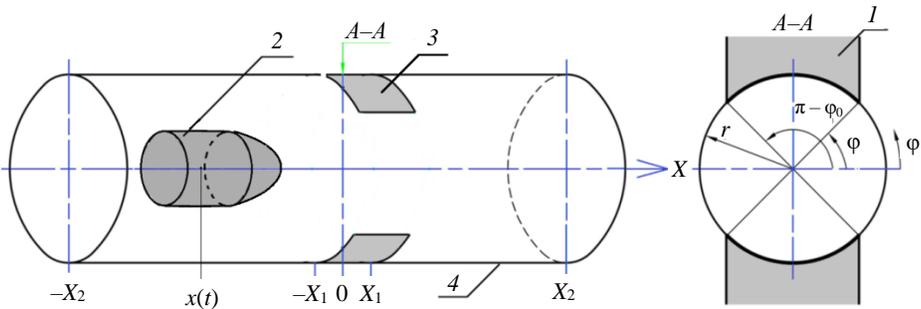


Рис. 3. Расчетная область магнитного барьера в цилиндрическом канале:

1 – магнитопровод прямоугольного поперечного сечения, 2 – модель, 3 – внутренняя поверхность защитной перемычки, 4 – внутренняя поверхность канала

Fig. 3. Computational domain for the magnetic field in a cylindrical bore:

1, rectangular magnetic core; 2, projectile; 3, inner surface of the protective diaphragm; and 4, inner surface of the bore

Для магнитопровода прямоугольного поперечного сечения [7]

$$R_D = 2 \cdot \psi_0 \cdot \left[\mu_0 \cdot D \cdot \int_{-x_1}^{x_1} \int_{\phi_0}^{0.5\pi} H_r(r = 0.5D, \phi, x) \cdot d\phi \cdot dx \right]^{-1}. \quad (3)$$

Значение R_D не зависит от величины ψ_0 , поскольку напряженность магнитного поля в зазоре \vec{H} прямо пропорциональна ψ_0 .

Индукционное падение магнитного напряжения I_h в защитной h-перемычке. Переменный магнитный поток $\Phi(t)$ в защитных перемычках насадки у полюсов магнитопровода генерирует индукционные токи, вызывающие индук-

ционное магнитное напряжение в цепи рамки – противо-МДС I_h . Конкретизация выражения для I_h проводится при следующих предположениях: 1) поперечные сечения перемычки и магнитопровода имеют форму прямоугольника со сторонами $2a$ (вдоль оси канала x) и $2b$ (рис. 4); 2) выполняется условие «тонкой» перемычки $h \ll 2\sqrt{a \cdot b}$, где h – ее толщина; 3) магнитный поток в перемычке $\Phi(t) = 4a \cdot b \cdot B_z(t)$ однороден и направлен по нормали к ее поверхности.

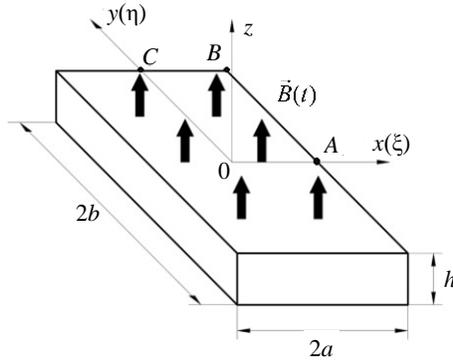


Рис. 4. Расчетная схема защитной перемычки
Fig. 4. Computational model of a protective diaphragm

При выполнении этих допущений уравнения для индуцированного электрического напряжения $\vec{E} \{E_x, E_y\}$ в плоской декартовой системе координат (см. рис. 4) приводятся к виду:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\dot{\Phi}}{s}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

где точка сверху обозначает производную по времени t , $s = 4a \cdot b$ – площадь поперечного сечения перемычки.

В силу симметрии линий индукционных токов относительно координатных осей уравнения (5) решаются в первом квадранте $OABC$ с условиями симметрии

$$E_x(\xi, \eta = 0) = 0, \quad E_y(\xi = 0, \eta) = 0, \quad \frac{\partial E_x(\xi = 0, \eta)}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial E_y(\xi, \eta = 0)}{\partial \eta} = 0. \quad (5)$$

На отрезках OA и OC выполняется интегральное условие замкнутости индукционных токов:

$$-\int_0^b E_x(\xi = 0, \eta) \cdot d\eta = \int_0^a E_y(\xi, \eta = 0) \cdot d\xi. \quad (6)$$

На отрезках AB и BC нормальные составляющие \vec{E} равны нулю:

$$E_x(\xi = a, \eta) = 0, \quad E_y(\xi, \eta = b) = 0. \quad (7)$$

Интегральное уравнение магнитной индукции Фарадея для прямоугольника $OABC$ с помощью первых двух условий симметрии записывается в виде:

$$\int_0^a E_x(\xi, \eta = b) \cdot d\xi - \int_0^b E_y(\xi = a, \eta) \cdot d\eta = \frac{1}{4} \dot{\Phi}. \quad (8)$$

Решение краевой задачи (4)–(8) ищется в виде:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Величина \vec{E}_1 определяется в виде частного решения краевой задачи (4)–(6), (8) без учета граничных условий (7):

$$E_{x1}(\eta) = \frac{a \cdot \Phi \cdot \eta}{4b \cdot (a^2 + b^2)}, \quad E_{y1}(\xi) = \frac{-b \cdot \Phi \cdot \xi}{4a \cdot (a^2 + b^2)}. \quad (9)$$

Второе слагаемое \vec{E}_2 описывается уравнениями Коши–Римана:

$$\frac{\partial E_{x2}}{\partial y} - \frac{\partial E_{y2}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_{x2}}{\partial x} + \frac{\partial E_{y2}}{\partial y} = 0, \quad (10)$$

с граничными условиями:

$$\frac{\partial E_{x2}(\xi=0, \eta)}{\partial \xi} = 0, \quad E_{x2}(\xi, \eta=0) = 0, \\ E_{x2}(\xi=a, \eta) = -E_{x1}(\eta), \quad E_{x2}(\xi, \eta=b) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial E_{y2}(\xi, \eta=0)}{\partial \eta} = 0, \quad E_{y2}(\xi=0, \eta) = 0, \\ E_{y2}(\xi, \eta=b) = -E_{y1}(\xi), \quad E_{y2}(\xi=a, \eta) = 0. \quad (12)$$

Последние условия в (11) и (12) получаются в результате подстановки значений E_{x1} и E_{y1} из (9) в (8). Таким образом, определение индукционных напряжений в h -перемычках свелось к решению двух уравнений Лапласа для прямоугольной области с граничными условиями (11) и (12) соответственно. Решение этих задач получено в виде рядов Фурье:

$$E_{x2} = \frac{a \cdot \Phi}{a^2 + b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot ch(n\pi \cdot \xi/b) \cdot \sin(n\pi \cdot \eta/b)}{2\pi \cdot n \cdot ch(n\pi \cdot a/b)}, \\ E_{y2} = \frac{b \cdot \Phi}{a^2 + b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot ch(n\pi \cdot \eta/a) \cdot \sin(n\pi \cdot \xi/a)}{2\pi \cdot n \cdot ch(n\pi \cdot b/a)}.$$

В этом случае плотность индукционных токов в перемычке $\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$ записывается в виде:

$$j_x(\xi, \eta) = \frac{a \cdot \sigma \cdot \Phi}{4(a^2 + b^2)} \left[\frac{\eta}{b} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot ch(n\pi \cdot \xi/b) \cdot \sin(n\pi \cdot \eta/b)}{n \cdot ch(n\pi \cdot a/b)} \right], \quad (13) \\ j_y(\xi, \eta) = \frac{b \cdot \sigma \cdot \Phi}{4(a^2 + b^2)} \left[\frac{\xi}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot ch(n\pi \cdot \eta/a) \cdot \sin(n\pi \cdot \xi/a)}{n \cdot ch(n\pi \cdot b/a)} \right],$$

где σ – удельная проводимость материала насадки, включая ее h -перемычки.

Магнитный поток индуцированных токов в h -перемычке Φ_i определяется с помощью векторного потенциала индуцированного магнитного поля \vec{A} . В приближении «тонкой» h -перемычки: $\vec{A} \{A_x(x, y), A_y(x, y)\}$, где

$$A_x(x, y) = \frac{\mu_0 \cdot h}{4\pi} \int_{-a}^a \left(\int_{-b}^b \frac{j_x(\xi, \eta) d\eta}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}} \right) d\xi,$$

$$A_y(x, y) = -\frac{\mu_0 \cdot h}{4\pi} \int_{-a}^a \left(\int_{-b}^b \frac{j_y(\xi, \eta) d\eta}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}} \right) d\xi.$$

Здесь μ_0 – магнитная проницаемость материала перемычек. Тогда выражение для магнитного потока индуцированных токов $\Phi_i(t)$ приводится к виду:

$$\Phi_i(t) = 4 \int_0^a \int_0^b (\text{rot} \vec{A} \cdot \vec{i}_z) dy dx =$$

$$= 4 \oint_{l_{\text{оавс}}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = 4 \left\{ \int_0^b [A_y(a, y) - A_y(0, y)] dy - \int_0^a [A_x(x, b) - A_x(x, 0)] dx \right\},$$

но в силу осевой симметрии распределения $A_x(x, 0) = A_y(0, y) = 0$, так что

$$\Phi_i(t) = 4 \left[\int_0^b A_y(a, y) dy - \int_0^a A_x(x, b) dx \right]. \quad (14)$$

Суммарное падение магнитного напряжения на обеих h -перемычках за счет индукционных токов определяется законом Ома для магнитной цепи: $I_h(t) = 2R_h \cdot \Phi_i(t)$, где $R_h = h/4a \cdot b \cdot \mu_0$ – магнитное сопротивление одной h -перемычки. Величину $I_h(t)$ удобно привести к виду:

$$I_h(t) = -\psi \cdot h \cdot \sigma \cdot \dot{\Phi}(t), \quad (15)$$

где ψ – форм-фактор двух h -перемычек прямоугольного поперечного сечения.

С помощью соотношений (13), (14) значение ψ принимает вид:

$$\psi = \frac{h \cdot (K_x + K_y)}{8\pi \cdot (a^2 + b^2)},$$

$$K_x = \frac{1}{b} \cdot \int_0^a \left\{ \int_{-b-a}^b \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-b)^2}} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{\eta}{b} + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \text{ch}(n \cdot \pi \cdot \xi/b) \cdot \sin(n \cdot \pi \cdot \eta/b)}{n \cdot \text{ch}(n \cdot \pi \cdot a/b)} \right] d\xi \cdot d\eta \right\} dx,$$

$$K_y = \frac{1}{a} \cdot \int_0^b \left\{ \int_{-b-a}^b \int_0^a \frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2 + (\eta-y)^2}} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{\xi}{a} + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \text{ch}(n \cdot \pi \cdot \eta/a) \cdot \sin(n \cdot \pi \cdot \xi/a)}{n \cdot \text{ch}(n \cdot \pi \cdot b/a)} \right] d\xi \cdot d\eta \right\} dy.$$

Форм-фактор ψ – безразмерный параметр, зависящий только от трех геометрических величин: a , b и h . Из (15) и (16) следует, что для тонких перемычек величина $I_h(t)$, искажающая сигнал с рамки, прямо пропорциональна квадрату толщины перемычки и удельной электропроводности ее материала. Поэтому для уменьшения влияния индукционных токов в перемычках их необходимо делать (как и всю насадку, см. рис. 1) из прочного металла с высоким удельным сопротивлением, например из сплавов титана, а толщину перемычки минимизировать при условии сохранения ее прочности. Для магнитопровода круглого поперечного сечения форм-фактор круглой защитной перемычки ψ_r определяется в следующем виде:

$$\psi_r = \frac{h}{2\pi^2 \cdot r^3} \cdot \int_0^{r_c} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 \cdot \cos \theta \cdot d\theta}{\sqrt{\rho^2 - 2r \cdot \rho \cdot \cos \theta + r^2}} \right) \cdot d\rho, \quad (17)$$

где r – радиус перемычки. При $r = 2\sqrt{a \cdot b / \pi}$, когда площади круглой и прямоугольной перемычек одинаковы, справедливо неравенство

$$\psi < \psi_r, \quad (18)$$

т.е. индукционные токи в прямоугольной перемычке меньше влияют на сигнал рамки.

Индукционный ток $I_c(t)$ в пазах насадки. Пазы глубиной $c - h$ (см. рис. 1) предназначены для подвода полюсов магнитопровода к измерительному зазору канала. Изменение магнитного потока генерирует индукционный ток I_c в боковых стенках пазов. Ток I_c , охватывающий магнитопровод в пазах, представляет собой индуцированную противо-МДС, влияющую на сигнал рамки. При однородном распределении магнитного поля вдоль вертикальных стенок пазов плотность тока на их границах $j(t, q = 0)$ зависит только от времени взаимодействия модели с магнитным барьером рамки. Здесь q – координата, направленная по внутренней нормали к поверхности паза. При плотном охвате магнитопровода прямоугольного сечения $2a \times 2b$ стенками паза и в соответствии с законом электромагнитной индукции граничное условие для индукционного тока принимает вид: $j(t, q = 0) = -\sigma \cdot \dot{\Phi} / 4(a + b)$. Распределение тока по нормали к стенкам насадки определяется уравнением

$$\frac{\partial j(t, q)}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \cdot \sigma} \cdot \frac{\partial^2 j(t, q)}{\partial q^2}.$$

Момент $t = 0$ соответствует началу взаимодействия модели с магнитным «барьером», поэтому начальное условие имеет вид: $j(t = 0, q) = 0$. В силу кратковременности процесса индукционный ток сосредоточен в узком скин-слое [9] у стенок паза. Для материалов с низкой электропроводностью, например для титановых сплавов, толщина скин-слоя порядка одного миллиметра. Это позволяет определение функции $j(t, q)$ свести к известному решению задачи о распространении тепла в полуограниченном стержне [10]:

$$j(t, q) = -\sqrt{\frac{\mu_0 \cdot \sigma^3}{\pi}} \cdot \frac{q}{8(a + b)} \cdot \int_0^t \frac{\dot{\Phi}(\tau)}{(t - \tau)^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left(-\frac{\mu_0 \cdot \sigma \cdot q^2}{4(t - \tau)}\right) \cdot d\tau,$$

при этом искомая зависимость $I_c(t) = 2c \cdot \int_0^{\infty} j(t, q) \cdot dq$ преобразуется к виду:

$$I_c(t) = -\psi_c \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{\mu_0 \cdot \pi}} \cdot \int_0^t \frac{\dot{\Phi}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \cdot d\tau, \quad \psi_c = \frac{c}{2(a+b)}. \quad (19)$$

Здесь последнее выражение – безразмерный форм-фактор для паза прямоугольного поперечного сечения. Из (19) следует, что величина индукционного тока I_c прямо пропорциональна глубине выемки и обратно пропорциональна периметру сечения магнитопровода. Для магнитопровода и пазов круглого поперечного сечения (19) преобразуется к виду:

$$I_{cr}(t) = -\psi_{cr} \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{\mu_0 \cdot \pi}} \cdot \int_0^t \frac{\dot{\Phi}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \cdot d\tau, \quad \psi_{cr} = \frac{c}{\pi \cdot r}.$$

При $r = 2\sqrt{a \cdot b/\pi}$, когда поперечные сечения прямоугольного и круглого пазов одинаковы, $\psi_c < \psi_{cr}$. Из (18) и последнего неравенства следует, что применение магнитопровода прямоугольного сечения снижает влияние индуцированных токов на сигнал рамки.

Сигнал с измерительной катушки электромагнитной рамки датчика скорости. Уравнение магнитной цепи рамки (2) с помощью (15), (19) приводится к виду:

$$R(t) \cdot \Phi(t) = n \cdot I_0 - \alpha_h \cdot \dot{\Phi}(t) - \alpha_c \cdot \int_0^t \frac{\dot{\Phi}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \cdot d\tau, \quad (20)$$

где $R(t) = R_D(t) + R_m + R_h$, $\alpha_h = \psi \cdot h \cdot \sigma$, $\alpha_c = c \cdot \sqrt{\sigma/2(a+b)} \cdot \sqrt{\pi \cdot \mu_0}$. Из (1) следует, что для магнитного потока $\Phi(t)$ выполняется следующая интегральная зависимость от сигнала $S(t)$:

$$\Phi(t) = \Phi_0 - \frac{1}{N} \cdot \int_0^t S(\tau) \cdot d\tau, \quad (21)$$

где $\Phi_0 = \Phi(0)$ – невозмущенный магнитный поток в цепи до начала взаимодействия модели с магнитным барьером. С помощью (21) уравнение (20) преобразуется к интегральному уравнению Вольтера 2-го рода:

$$S(t) + \frac{1}{\alpha_h} \cdot \int_0^t \left[\frac{\alpha_c}{\sqrt{t-\tau}} + R(t) \right] \cdot S(\tau) \cdot d\tau = \frac{N \cdot n \cdot I_0}{\alpha_h} \cdot \left[\frac{R(t)}{R_0} - 1 \right], \quad (22)$$

где $R_0 = R(0)$ – значение магнитного сопротивления рамки до начала деформации магнитного барьера моделью. Уравнение (22) описывает зависимость сигнала $S(t)$ от изменения магнитного сопротивления цепи $R(t)$ при пролете модели через измерительный зазор рамки с учетом индукционных токов в ее защитно-формирующей насадке. При известном режиме движения модели расчет сигнала сводится к совместному решению 3D-краевой задачи для магнитного поля в зазоре [6], уравнения для сигнала (22) и замыкающего интегрального выражения $R(t)$, определяемого с помощью (3).

Результаты расчетов

Задача по определению работы измерительных рамок датчика реализована в программном комплексе ANSYS [11] методом конечных элементов [12]. На рис. 5–9

представлены результаты расчетов для рамки датчика с магнитопроводом прямоугольного поперечного сечения $10 \times 15 \text{ мм}^2$, длиной 150 мм и магнитной проницаемостью $\mu = 50\mu_0$, где μ_0 – магнитная проницаемость вакуума. Диаметр канала $D = 30 \text{ мм}$, МДС рамки $nI_0 = 100$ ампер-витков. Материал защитно-формирующей насадки – титановый сплав ВТ-6, толщина защитного слоя насадки $h = 2, 3, 5 \text{ мм}$, глубина паза под магнитопровод $c = 3, 4, 6 \text{ мм}$. Модели имеют форму сферы, цилиндра и цилиндра с полусферической головной частью («пуля»). Все модели имеют одинаковый объем 10.3 см^3 , равный объему сферической модели диаметром $d = 0.9D$. Диаметры цилиндрических частей моделей $0.7D$ и $0.9D$, скорость моделей $u = 2, 4, 8 \text{ км/с}$.

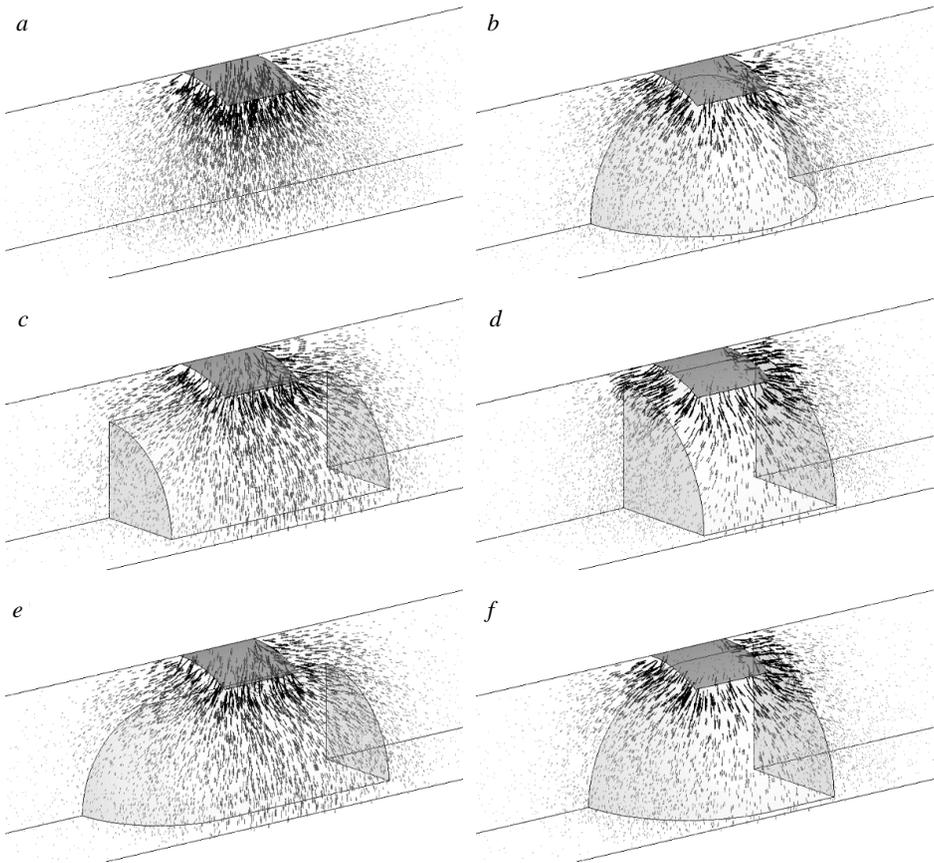


Рис. 5. Распределение магнитного поля в барьере при пролете моделей через среднее сечение рамки: невозмущенный магнитный барьер (а); сферическая модель диаметром $0.9D$ (b); цилиндрическая модель диаметром $0.7D$ (c); цилиндрическая модель диаметром $0.9D$ (d); «пуля» диаметром $0.7D$ (e); «пуля» диаметром $0.9D$ (f)

Fig. 5. Magnetic field distribution in the barrier during the projectile motion through a frame midsection: (a) undisturbed magnetic barrier, (b) spherical projectile with a diameter of $0.9D$, (c) cylindrical projectile with a diameter of $0.7D$, (d) cylindrical projectile with a diameter of $0.9D$, (e) bullet projectile with a diameter of $0.7D$, and (f) bullet projectile with a diameter of $0.9D$

На рис. 5 показаны распределения магнитного поля в измерительном зазоре рамки в невозмущенном состоянии и при максимальных деформациях магнитного барьера моделями различной формы. В силу симметрии на рисунках приведены четвертая часть объема чувствительности рамки и модели над верхней торцевой поверхностью магнитопровода.

Цилиндрическая модель $0.9D$ (см. рис. 5, *d*) деформирует магнитный барьер значительно сильнее, чем другие модели обоих диаметров, в основном за счет торцевых поверхностей. Наглядным интегральным критерием степени деформации магнитного барьера является магнитное сопротивление измерительного зазора рамки (3).

На рис. 6 приведены расчетные зависимости магнитного сопротивления измерительного зазора рамки $R_D(x)$ при различных положениях центра массы моделей.

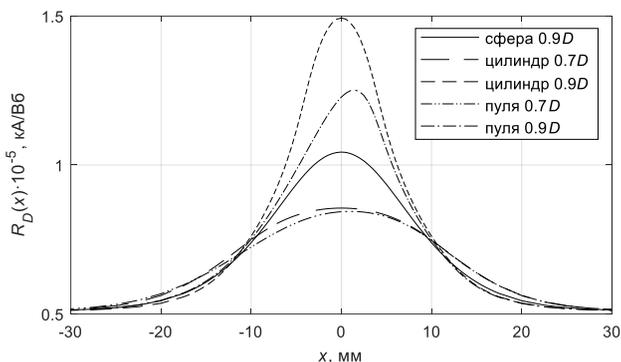


Рис. 6. Магнитное сопротивление зазора в зависимости от положения центра масс метаемого тела

Fig. 6. Gap reluctance as a function of the position of the projectile center of mass

Значение R_D минимально, когда модель находится вне «зоны чувствительности» рамки. Зависимости $R_D(x)$ симметричны относительно среднего сечения рамки за исключением «пулей», форма которых не является продольно симметричной. При приближении модели к среднему сечению рамки магнитное сопротивление зазора растёт, а затем уменьшается до «невозмущенного» значения.

Результаты расчета на рис. 7 иллюстрируют влияние индукционных токов в защитных перемычках и пазах насадки на форму и величину сигнала рамки. Скорости цилиндрической модели диаметром $0.9D$ – 2 и 8 км/с. Толщина перемычек – 3 мм, глубина прямоугольных пазов – 4 мм.

При скорости модели 2 км/с влияние индукционных токов на сигнал относительно невелико в окрестности его максимального значения. При скорости 8 км/с индукционные токи существенно сильнее влияют на амплитуду и форму сигнала за счет четырехкратного увеличения скорости изменения магнитного потока в магнитной цепи рамки. В обоих случаях индукционные токи приводят к заметному «запаздыванию» сигнала, причем на его амплитуду в большей мере влияют индукционные токи в пазах насадки.

На рис. 8 построены сигналы для четырех моделей одинакового объема при трех скоростях пролета измерительной рамки – 2, 4 и 8 км/с. В расчетах толщина защитных перемычек в насадке – 3 мм, глубина пазов – 4 мм.

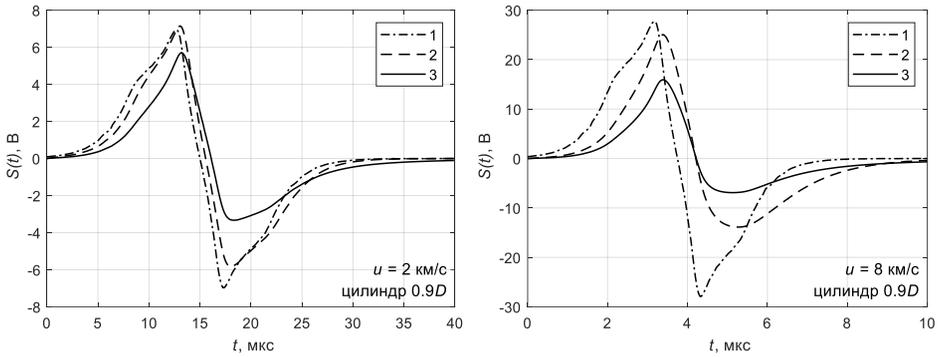


Рис. 7. Влияние индуктивных токов при различных скоростях модели:

1 – $I_c = 0, I_h = 0$; 2 – $I_c = 0$; 3 – с учетом I_c и I_h

Fig. 7. Effect of inductive currents at various projectile speeds:

(1) $I_c = 0, I_h = 0$, (2) $I_c = 0$, and (3) with account for I_c and I_h

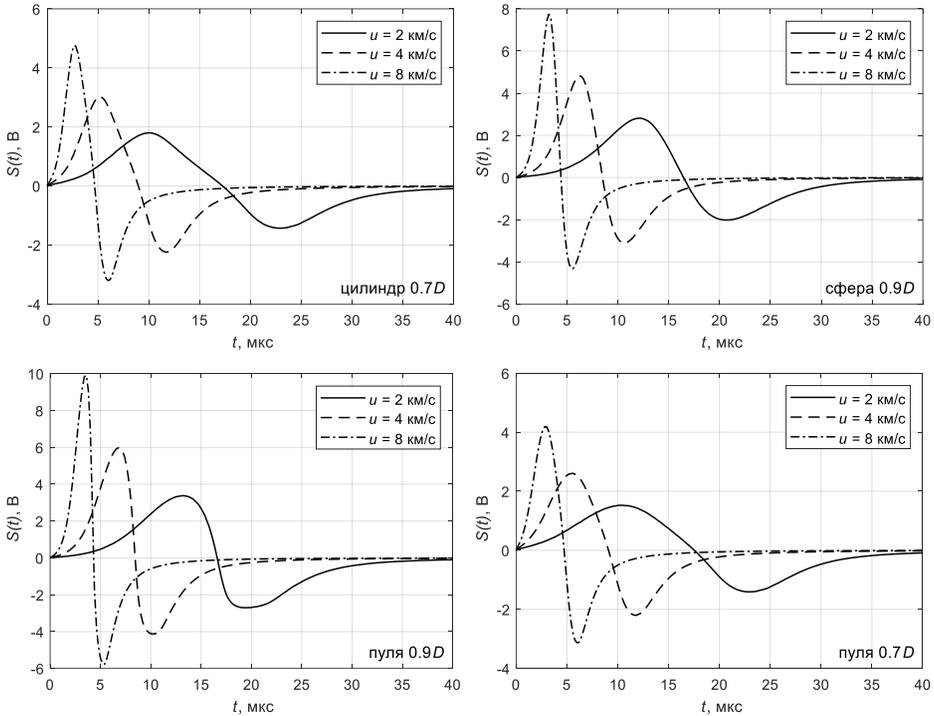


Рис. 8. Влияние скорости модели на сигнал для моделей различной формы и одинакового объема

Fig. 8. The projectile speed effect on a signal for the models of the same volume and different in shapes

Для каждой модели повышение скорости модели увеличивает амплитуду сигнала и уменьшает его длительность. Амплитуды сигналов у моделей с миделевым сечением диаметром $0.9D$ в $1.5 \div 2$ раза больше, чем у моделей с цилиндрической

частью диаметром $0.7D$, за счет более значительной деформации магнитного барьера рамки (см. рис. 5).

На рис. 9 приведены графики сигналов при различных значениях толщин защитных вставок h и глубины пазов c у формирующей насадки рамки при скорости 4 км/с цилиндрической модели $0.9D$.

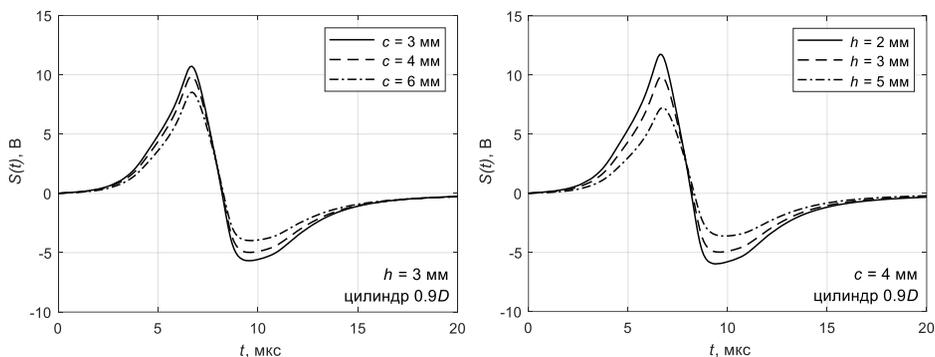


Рис. 9. Влияние толщины защитной перемычки h и глубины паза в насадке c на сигнал измерительной рамки датчика для цилиндра $0.9D$

Fig. 9. Effect of the protective diaphragm thickness h and the groove depth in the cap c on the measuring frame signal for a $0.9D$ cylinder

Большее влияние на сигнал оказывает величина параметра h . Увеличение толщины вставки в 2.5 раза – с 2 до 5 мм – приводит к снижению амплитуды сигнала на 41%. Поэтому толщину защитных вставок следует выбирать из условия их прочности при характерных давлениях рабочего газа в измерительном сечении канала. Увеличение глубины пазов в 2 раза – с 3 до 6 мм – снижает амплитуду сигнала на 19%. Индукционные токи в пазах можно существенно уменьшить с помощью экранирования соответствующего участка магнитопровода разомкнутым витком медной фольги.

Заключение

Разработана математическая модель работы внутривольного индукционного датчика скорости с использованием эффекта магнитного барьера. Модель учитывает 3D-взаимодействие метаемой электропроводной модели с магнитным барьером в измерительном зазоре рамки датчика, а также влияние индукционных токов в защитно-формирующей насадке. Проведены параметрические исследования сигналов при метании моделей различной формы в канале калибром 30 мм со скоростями от 2 до 8 км/с при различных значениях толщины защитной перемычки и глубины пазов насадки. Показано влияние индукционных токов на амплитуду и форму сигнала. Во всех рассмотренных вариантах работы датчиков данной конструкции амплитуды сигналов лежат в интервале от 5 до 15 В, что практически на порядок выше уровня возможных электрических помех в практике высокоскоростных баллистических исследований. Это позволяет применять датчики рассмотренного типа и в устройствах синхронизации для запуска регистрирующей аппаратуры и подключения дополнительных ступеней разгона модели.

Список источников

1. Сinyaев С.В. Датчик скорости для высокоскоростных метательных комплексов // Тезисы докладов Международной научно-технической конференции «Динамика систем, механизмов и машин». Омск, 1995. Омск : Омск. гос. техн. ун-т, 1995. Кн. 1. С. 54.
2. Kim H.K., Kang B.S., Kim J. Muzzle velocity estimation of an electromagnetic launcher using B-dot probe // *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*. 2019. V. 61 (4). P. 563–580. doi: 10.3233/JAE-190040
3. Сидоров А.Д., Корольков Л.В., Моисеев Д.М., Егоров А.Л., Дьячковский А.С. Измерение скорости в баллистическом эксперименте // *Технические науки – от теории к практике* : сб. ст. по материалам XLII междунар. науч.-техн. конф. Новосибирск : СибАК, 2015. № 1 (38). С. 111–120.
4. Комаровский Л.В. Метание свободных тел газовым потоком // *Численные методы механики сплошной среды*. 1976. Т. 7, № 6. С. 74–86.
5. Bagdanoff D.W., Knowlen C., Murakami D., Stronich I. Magnetic Detector for Projectiles in Tubes // *AIAA Journal*. 1990. V. 28 (11). P. 1942–1944. doi: 10.2514/3.10502
6. Сinyaев С.В., Киреева А.А. Однорамочный индукционный датчик мгновенной скорости модели в канале баллистической установки // *Известия вузов. Физика*. 2013. Т. 56, № 6/3. С. 69–71.
7. Механич А.А., Сinyaев С.В., Яцук А.А. 3D-взаимодействие электропроводного метаемого тела с магнитным барьером измерительной рамки внутривзвального датчика скорости // *Известия вузов. Физика*. 2022. Т. 65, № 12. С. 9–14. doi: 10.17223/00213411/65/12/9
8. Иосель Ю.Я. Расчет потенциальных полей в энергетике. Л. : Энергия, 1978. 351 с.
9. Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля. М. : Мир, 1972. 392 с.
10. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М. : Наука, 1964. 487 с.
11. Басов К.А. ANSYS : справочник пользователя. М. : ДМКПресс, 2014. 640 с.
12. Bathe K.J. Finite Element Procedures. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1996. 1037 p.

References

1. Sinyaev S.V. (1995) Datchik skorosti dlya vysokoskorostnykh metatel'nykh kompleksov [Speed sensor for high-speed throwing systems]. *Tezisy dokladov Mezhdunarodnoy nauchno-tehnicheskoy konferentsii «Dinamika sistem, mekhanizmov i mashin», Omsk: Omskiy gosudarstvennyy tekhnicheskiiy universitet*. 1. pp. 54.
2. Kim H.K., Kang B.S., Kim J. (2019) Muzzle velocity estimation of an electromagnetic launcher using B-dot probe. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*. 61(4). pp. 563–580. doi: 10.3233/JAE-190040
3. Sidorov A.D., Korol'kov L.V., Moiseev D.M., Egorov A.L., D'yachkovskiy A.S. (2015) Izmerenie skorosti v ballisticheskom eksperimente [Velocity measurement in a ballistic experiment]. *Tekhnicheskije nauki – ot teorii k praktike: Sbornik statey po materialam XLII mezhdunarodnoy nauchno-tehnicheskoy konferentsii*. Novosibirsk: SiBAK. 1(38). pp. 111–120.
4. Komarovskiy L.V. (1976) Metanie svobodnykh tel gazovym potokom [Throwing of free bodies by a gas stream]. *Chislennye metody mekhaniki sploshnoy sredy*. 7(6). pp. 74–86.
5. Bagdanoff D.W., Knowlen C., Murakami D., Stronich I. (1990) Magnetic detector for projectiles in tubes. *AIAA Journal*. 28(11). pp. 1942–1944. doi: 10.2514/3.10502
6. Sinyaev S.V., Kireeva A.A. (2013) Odnoramochnyy induktsionnyy datchik mgnovennoy skorosti modeli v kanale ballisticheskoy ustanovki [Single-frame induction sensor of the instantaneous velocity of the model in the channel of the ballistic installation]. *Izvestiya VUZov. Fizika – Russian Physics Journal*. 56(6/3). pp. 69–71.
7. Mekhanich A.A., Sinyaev S.V., Yashchuk A.A. (2023) Three-dimensional modeling of electrically conductive projectile interacting with magnetic barrier of speed sensing frame. *Russian Physics Journal*. 65(12). pp. 2052–2057. doi: 10.1007/s11182-023-02870-y

8. Iossel Yu.Ya. (1978) *Raschet potentsial'nykh poley v energetike* [Calculation of potential fields in power industry]. Leningrad: Energiya.
9. Carslaw H.S., Jaeger J.C. (1959) *Conduction of Heat in Solids*. Oxford: Clarendon Press.
10. Knoepfel H. (1970) *Pulsed High Magnetic Fields*. Amsterdam – London: North-Holland Publishing Company.
11. Basov K.A. (2014) *ANSYS: Spravochnik pol'zovatelya* [ANSYS: user's guide]. Moscow: DMK Press.
12. Bathe K.J. (1996) *Finite Element Procedures*. New Jersey: Prentice-Hall.

Сведения об авторах:

Биматов Владимир Исмагилович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры динамики полета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: vbimatov@mail.ru

Механич Алина Александровна – выпускница аспирантуры Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: kireeva_aa@mail.ru

Синяев Сергей Витальевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, доцент кафедры динамики полета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: ssv@niipmm.tsu.ru

Ящук Алексей Александрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории оптимизации Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: rainbow@niipmm.tsu.ru

Information about the authors:

Bimatov Vladimir I. (Doctor of Physics and Mathematics, Assistant Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vbimatov@mail.ru

Mekhanich Alina A. (Tomsk, Russian Federation). E-mail: kireeva_aa@mail.ru

Sinyaev Sergey V. (Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ssv@niipmm.tsu.ru

Yashchuk Aleksey A. (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: rainbow@niipmm.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 31.05.2023; принята к публикации 10.10.2023

The article was submitted 31.05.2023; accepted for publication 10.10.2023

Научная статья

УДК 532.517.4+621.928.93

doi: 10.17223/19988621/85/6

Теоретические и экспериментальные исследования процесса классификации в зависимости от характера скоростного взаимодействия частиц TiN в пневмоизмельчителе с псевдооживленным слоем

Михаил Викторович Василевский¹, Владимир Анатольевич Полюшко²,
Владимир Иванович Романдин³, Николай Сергеевич Евсеев⁴,
Илья Александрович Жуков⁵, Мансур Хузиахметович Зиатдинов⁶,
Екатерина Сергеевна Марченко⁷, Любовь Александровна Жилина⁸

^{1, 2, 4, 5, 6, 7} Томский государственный университет, Томск, Россия

⁴ Институт проблем химико-энергетических технологий СО РАН, Бийск, Россия

^{3, 6, 8} ООО «Нанокерамика», Томск, Россия

¹ vasmix40@mail.ru

² polyushko@niipmm.tsu.ru

³ romandin@niipmm.tsu.ru

⁴ evseevns@gmail.com

⁵ gofra930@gmail.com

⁶ ziatdinovm@mail.ru

⁷ 89138641814@mail.ru

⁸ alecsanna@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются сепарационные эффекты, возникающие при классификации тонкодисперсных порошков. Проведена оценка скоростных взаимодействий твердых частиц в пневмоизмельчителе с псевдооживленным слоем. Получены экспериментальные данные значений окружных скоростей воздуха вблизи поверхности ротора в зависимости от числа его оборотов. Проведен расчет граничного размера сепарируемых частиц TiN. Представлено сравнение расчетного граничного размера керамических частиц TiN с полученными экспериментальными данными.

Ключевые слова: пневмоизмельчитель, нитрид титана, псевдооживленный слой, граничный размер, сепарация частиц, компоненты скорости

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-15-2021-1384 (№ 13.2251.21.0096).

Для цитирования: Василевский М.В., Полюшко В.А., Романдин В.И., Евсеев Н.С., Жуков И.А., Зиатдинов М.Х., Марченко Е.С., Жилина Л.А. Теоретические и экспериментальные исследования процесса классификации в зависимости от характера скоростного взаимодействия частиц TiN в пневмоизмельчителе с псевдооживленным слоем // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 85. С. 74–89. doi: 10.17223/19988621/85/6

Original article

Theoretical and experimental studies of the classification process depending on the nature of the high-speed interaction of TiN particles in a pneumogrinder with a fluidized bed

Mikhail V. Vasilevskiy¹, Vladimir A. Polyushko², Vladimir I. Romandin³, Nikolay S. Evseev⁴, Il'ya A. Zhukov⁵, Manzur Kh. Ziatdinov⁶, Ekaterina S. Marchenko⁷, Lyubov' A. Zhilina⁸

^{1, 2, 4, 5, 6, 7} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

⁴ Institute for Problems of Chemical and Energetic Technologies of the Siberian Branch of RAS, Biysk, Russian Federation

^{3, 6, 8} Nanokeramika, LLC, Tomsk, Russian Federation

¹ vasmix40@mail.ru

² polyushko@niipmm.tsu.ru

³ romandin@niipmm.tsu.ru

⁴ evseevns@gmail.com

⁵ gofra930@gmail.com

⁶ ziatdinovm@mail.ru

⁷ 89138641814@mail.ru

⁸ alecsanna@mail.ru

Abstract. For grinding and fractionation of submicron and nanosized powders, pneumatic methods with the use of built-in centrifugal-type separation elements of various designs are currently the most promising. In these devices, it is possible to most effectively provide the aerodynamics of the dust and gas flow in the separation zone, which allows one to control the separation boundary. In a fluidized bed apparatus, the layer extends to the rotor. The particles are affected not only by gravity and flow forces but also by the forces arising from the rotor impact on the flow. This paper considers the separation effects associated with the classification of fine powders. Experimental data on the circumferential air velocities near the rotor surface are obtained as the functions of the rotor rotation number. The high-speed interactions of solid particles in a pneumatic grinder with a fluidized bed are evaluated. Using the obtained aerodynamic experimental data, the boundary size of the separated particles is calculated. A comparison of the calculated boundary size of TiN ceramic particles with the obtained experimental data on the fractional separation of fine TiN powders based on granulometric composition measurements by laser diffraction is presented.

Keywords: pneumogrinder, titanium nitride, fluidized bed, boundary size, separation of particles, velocity vector components

Acknowledgments: This work was carried out with a financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement No. 075-15-2021-1384 (No.13.2251.21.0096).

For citation: Vasilevsky, M.V., Polyushko, V.A., Romandin, V.I., Evseev, N.S., Zhukov, I.A., Ziatdinov, M.Kh., Marchenko, E.S., Zhilina, L.A. (2023) Theoretical and experimental studies of the classification process depending on the nature of the high-speed interaction of TiN particles in a pneumogrinder with a fluidized bed. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 74–89. doi: 10.17223/19988621/85/6

Введение

На сегодняшний день пневматические методы получения тонкодисперсных узкофракционных порошков являются одними из перспективных и экологически чистых методов [1]. Понимание эффектов, сопутствующих процессам измельчения и классификации, дает возможность совершенствовать конструкции пневматических аппаратов и повысить эффективность процессов фракционного разделения.

Для измельчения и фракционирования субмикронных и наноразмерных порошков в настоящее время наиболее перспективными являются пневматические методы с использованием встроенных сепарационных элементов центробежного типа различной конструкции совместно с циркуляцией двухфазной среды в своих контурах. В данных аппаратах можно наиболее эффективно организовать аэродинамику пылегазового потока в зоне сепарации, что позволяет интенсифицировать процесс противоточно-центробежной сепарации частиц и регулировать границу разделения. В струйных мельницах [2–6] разрушение частиц определяется разностью скоростей соударяющихся частиц и частотой взаимодействия частиц. Инжектируемые частицы и моли газа разгоняются струйным потоком, причем скорость частиц зависит от соотношения коэффициентов инжекции молей газа и частиц. В аппарате с псевдооживленным слоем слой распространяется до ротора, на частицы действуют не только силы тяжести и силы потока, но и силы, возникающие от воздействия на поток ротором. При входе потока воздуха в псевдооживленный слой материал вовлекается в поток и ускоряется до скорости, соизмеримой со скоростью потока. Во время вовлечения частиц материала в поток происходят интенсивные столкновения частиц друг с другом. Такие столкновения обусловлены различными скоростями частиц в самом потоке, разными размерами частиц и разными точками входа в поток. Унос частиц из слоя компенсируется частицами, возвращаемыми ротором. В аппаратах кипящего слоя зернистых и мелкозернистых материалов скоростные струи (70–150 м/с) используются для стабилизации процесса оживления слоя, повышения интенсивности теплообменных процессов [7]. Истирание и измельчение частиц в псевдооживленном слое является отрицательным моментом в таких процессах. Для пылеулавливания применяются циклоны, которые часто располагаются внутри аппаратов с псевдооживленным слоем катализатора [8]. Уловленная пыль возвращается в псевдооживленный слой. В скоростных струях происходит измельчение частиц, на границах струй и в их окрестностях происходит истирание частиц [9].

Цель настоящей работы – исследование сепарационных эффектов в пневматических классификаторах, влияющих на процесс фракционного разделения, а также оценка скоростных взаимодействий твердых частиц в пневмоизмельчителе с псевдооживленным слоем.

Теоретическая и экспериментальная часть

В настоящей работе рассмотрены две оригинальные установки, представленные на рис. 1.

В аппарате на рис. 1, а псевдооживленный слой распространяется до ротора, на частицы действуют не только силы тяжести и силы потока, но и силы, возникающие от воздействия на поток ротором.

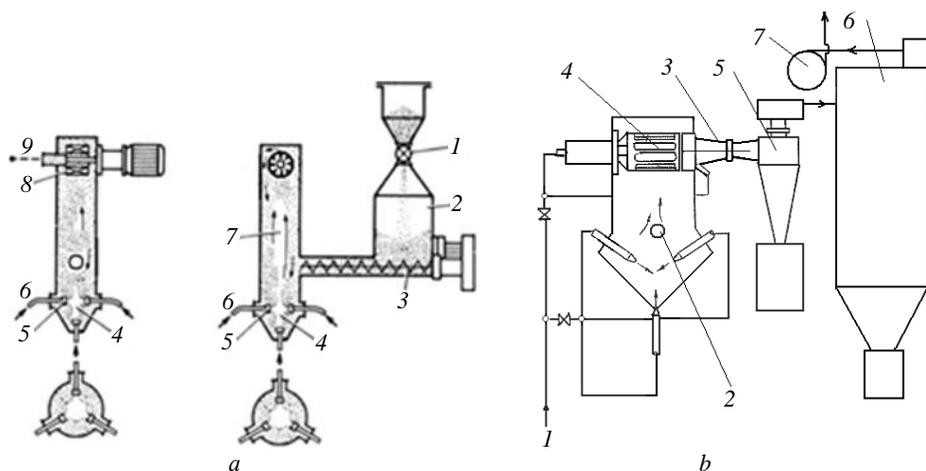


Рис. 1. Схема установки для противоточного размола в псевдооживленном слое (а): 1 – питающее устройство, 2 – бункер с исходными частицами вещества, 3 – система подачи частиц в камеру размола, 4 – псевдооживленный слой, 5 – сопла подачи газа, 6 – трубопровод подачи газа высокого давления, 7 – камера для размола, 8 – сепаратор, 9 – выходной коллектор газа с мелкими частицами; аппарат с псевдооживленным слоем (b): 1 – ввод энергоносителя, 2 – ввод исходного материала, 3 – выход мелкого продукта, 4 – сепаратор, 5 – циклон, 6 – фильтр, 7 – вихревая газодувка

Fig. 1. Design of a facility for countercurrent grinding in a fluidized bed (a): 1, feeding device; 2, hopper with initial particles of a substance; 3, system of the particle delivery into a grinding chamber; 4, fluidized bed; 5, gas supply nozzles; 6, high-pressure gas supply pipeline; 7, grinding chamber; 8, separator; and 9, gas outlet collector with fine particles; apparatus with a fluidized bed (b): 1, input of the energy carrier; 2, input of the source material; 3, output of the fine product; 4, separator; 5, cyclone; 6, filter; and 7, vortex gas blower

При входе потока воздуха в псевдооживленный слой материал вовлекается в поток и ускоряется до скорости, соизмеримой со скоростью потока. Во время вовлечения частиц материала в поток происходят интенсивные столкновения частиц друг с другом. Такие столкновения обусловлены различными скоростями частиц в самом потоке, разными размерами частиц и разными точками входа в поток.

Унос частиц из слоя компенсируется частицами, возвращаемыми ротором. Газ, увлекаемый вращающимся ротором, движется по периферии вблизи стенок корпуса вниз и вверх. Ротор располагается в верхней части корпуса так, что пространство между ротором и верхней стенкой намного меньше, чем пространство между ротором и фокальной точкой пересечения осей сопел [10]. В этом случае возникает эффект диаметального вентилятора [11], при котором газ диаметально с периферии проходит внутрь ротора и за счет центробежных эффектов частично выходит из ротора в объем между ротором и верхней стенкой корпуса. Причем конфигурация этого объема имеет расширяющийся участок. При подаче газа из внешней магистрали газ из нижнего объема будет подходить к ротору с определенным динамическим напором. Поэтому эффект диаметального вентилятора проявляется.

В [12] приведены данные о закручивающей способности различных роторов в осесимметричной схеме. Закрутка осуществляется турбулентным переносом

пульсаций моментов количества движения на границе вращающегося ротора. Интенсивность закрутки зависит от конструкции ротора, числа оборотов, отношения скоростей радиального входа газа v_r и окружной скорости обода ротора W_p . В области эффективной работы для обеспыливания газов принимается отношение $v_r/W_p = 0.01-0.1$, для классификации это отношение находится в диапазоне $0.1-1$. При закрутке газа ободом ротора в осесимметричной схеме окружная скорость газа U_r в диапазоне $v_r/W_p = 0.5-1$ на порядок меньше скорости ротора, поэтому газ перед поступлением в ротор дополнительно закручивают [13].

В аппарате на рис. 2 ротор создает токи газа, которые имеют тангенциальную направленность потока вблизи поверхности ротора. Перетекание части газа из ротора в рабочий объем интенсифицирует подкрутку потока в окрестности ротора.

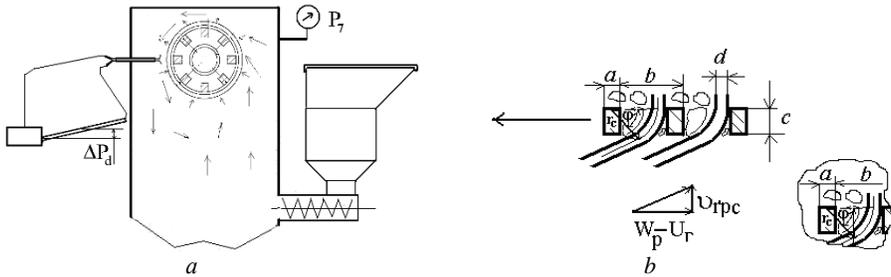


Рис. 2. Схема токов газа и измерения окружной скорости газа в околороторном пространстве (а); схема обтекания газом стержней в системе вращающегося ротора (b): a – ширина стержня, b – расстояние между стержнями, W_p , U_r , v_{rpe} – окружные скорости ротора и газа и радиальная скорость газа на входе в ротор

Fig. 2. Circuit of gas currents and measurements of the circumferential velocity of gas in the near-rotor space (a); diagram of the gas flow around the rods in a rotating rotor system (b): a is the width of the rod, b is the distance between the rods, W_p and U_r are the circumferential velocities of the rotor and gas, respectively; v_{rpe} is the radial velocity of the gas at the rotor entrance

В таблице приведены значения окружных скоростей воздуха U_r , замеренных T -образным насадком (см. рис. 2) на расстоянии 1 мм от поверхности ротора при диаметре ротора 50 мм и числе оборотов 4 000, 8 000, 12 000, 16 500 об./мин.

Значения окружных скоростей газа на границе ротора

v_r , м/с	W_p , м/с	U_r , м/с
0	10.5	6.35
	20.9	13.1
	31.4	15.5
	43.2	19.1
5.88	10.5	2.2
	20.9	3.8
	31.4	7.6
	43.2	9.3
6.39	10.5	1.7
	20.9	3.1
	31.4	4.4
	43.2	7.6

Окружная скорость ротора $W_p = \pi D_p n / 60$, радиальная скорость газа $v_r = Q_p / F_p$. В приведенных формулах D_p , F_p – диаметр и площадь боковой поверхности ротора, Q_p – расход воздуха через ротор, включающий расходы газа через сопла, поддувы через уплотнительные зазоры, подшипник.

Из таблицы видно, что закрутка потока вблизи поверхности ротора определяется интенсивностью радиального стока газа в ротор, причем радиальная компонента при сопоставимых скоростях с окружной скоростью ротора оказывается больше тангенциальной скорости газа.

В [14, 15] полагается, что граничный размер сепарируемых мелких частиц может быть оценен по соотношению $V_{\phi s} 2\tau / R_s = v_{rp}$, $\tau_{50} = (\rho_\delta / \rho)(\delta^2_{50} / 18\nu)$, где $V_{\phi s}$ – окружная скорость частиц на сепарационном радиусе, v_{rp} – радиальная скорость газа на границе ротора, R_s – сепарационный радиус, δ – диаметр частицы, ρ , ρ_δ – плотность газа и плотность частицы, ν – коэффициент кинематической вязкости. Будем полагать, что $V_{\phi s} = U_r$ – окружная скорость газа на границе ротора, и $R_s = R_p$ – внешний радиус ротора. Окружные скорости частиц и газа совпадают. Граничный размер, учитывая данные таблицы, будет равен

$$\delta_{50} = \sqrt{\frac{v_{rp} R_p}{U_r^2} \frac{\rho}{\rho_\delta} 18\nu} = \sqrt{\frac{6.39 \cdot 0.025}{7.6^2} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 18 \cdot 1.5 \cdot 10^{-5}} = 1.34 \cdot 10^{-5} \text{ м.} \quad (1)$$

Газ вблизи ротора имеет меньшую крутку по сравнению с ротором. Вращение газа и частиц вне ротора осуществляется посредством турбулентного обмена моментами количества движения молей газа, взаимодействующих со стержнями ротора и молями газа, поступающими из сопел и от уплотнительных зазоров. На рис. 2, *b* приведена схема обтекания стержней, представленных в развернутом виде, в системе вращающегося ротора. В лобовой и кормовой областях обтекания имеются вихревые зоны, вызванные отрывом потока. Поток между стержнями имеет радиус закругления r_c на угол φ : $r_c = 0.5a + b - a - 0.5d = b - 0.5a - 0.5d$, где a , b , c – конструктивные величины (см. рис. 2, *b*).

Газ набегает на решетку профилей под углом, тангенс которого

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{rp}}{W_p - U_r}.$$

Величина сужения потока из-за разности скоростей ротора и газа определится из соотношения

$$\frac{v_{rpc} d}{\sin \alpha} = v_{rp} (b - a),$$

откуда $d = (b - a) \sin \alpha$. Скорость частиц относительно газа при его повороте определится из соотношения

$$\Delta U_{d\delta} = \frac{v_{rpc}^2}{\sin^2 \alpha} \frac{\tau}{r_c},$$

$$\tau = (\rho_\delta / \rho)(\delta^2 / 18\nu), \quad r_c = b - 0.5a - 0.5d, \quad v_{rpc} = Q_p / [3 \cdot 600(\pi D_p \cdot L_p - z \cdot c \cdot L_p)].$$

Уравнение траектории частицы в криволинейном потоке имеет вид:

$$\frac{r_c \langle d \rangle \varphi \sin \alpha}{v_{rpc}} = \frac{\langle d \rangle d}{\Delta U_{d\delta}},$$

где $\langle d \rangle$ – знак дифференциала. Интегрируя это уравнение, найдем граничный размер отсепарированных частиц из соотношения

$$\frac{r_c \varphi \sin \alpha}{v_{rpc}} = \frac{d}{\Delta U_{d\delta^*}},$$

откуда

$$\Delta U_{d\delta^*} = \frac{v_{rpc} \cdot d}{r_c \varphi \sin \alpha}, \quad \tau_{d^*} = \frac{\Delta U_{dp^*} r_c \sin^2 \alpha}{v_{rp}^2}, \quad \delta_{d^*} = \sqrt{\tau_{d^*} 18v \frac{\rho}{\rho_\delta}}.$$

Расчет показывает, что при $a = 0.006$ м, $b = 2\pi R_p/z = 2\pi \cdot 0.025/8 = 0.0196$ м, $c = 0.007$ м, $Q = 85$ нм³/ч, $W_p = 43.2$ м/с, $U_r = 16.7$ м/с, $\rho = 1.2$ кг/м³, $\rho_\delta = 3\ 000$ кг/м³, $\varphi = \pi/4$ имеем следующие значения расчетных величин: $v_{rpc} = 8.98$ м/с, $\alpha = 18.7^\circ$, $d = 0.004$ м, $r_c = 0.0146$ м, $\Delta U_{d\delta^*} = 19.58$ м/с, $\tau_{d^*} = 3.67 \cdot 10^{-4}$ с, $\delta_{d^*} = 5.1 \cdot 10^{-6}$ м.

Частицы более 5.1 мкм будут сепарироваться на стержни-агломераторы частиц. В [16] показано, что в присутствии частиц менее 10 мкм возможна активная агломерация частиц за счет молекулярных сил. Вводится понятие критического размера частиц из условия соизмеримости сил сцепления между ними в структурной сетке и их весом, если рассматривается агломерация в поле сил тяжести. В ряде случаев частицы получают электрический заряд в результате дробления материала, при движении в потоке газа из-за трения частиц между собой и о стенки аппарата. Число положительных и отрицательных частиц может быть одинаково, и в этом случае агломерация частиц резко интенсифицируется. При срыве отложений со стержней ротора в поток поступают более уплотненные агломераты пыли. При обтекании стержней ротора со скоростью 8–11 м/с на фронтальной и кормовой частях образуются рыхлые отложения; при скорости обтекания более 11 м/с на фронтальной части образуются плотные отложения, в кормовой – рыхлые. Количество осевшей пыли зависит от скорости потока и концентрации частиц.

Скорости потока, при которых происходит отрыв частиц, определяются распределением сил адгезии и размеров частиц. Количественно отрыв прилипших частиц определяется медианной скоростью отрыва [16]. Однако в реальном аппарате оценка этих факторов может быть проведена косвенно, только на основе испытаний измельчителя на конкретном материале. В [17] приведены экспериментальные результаты классификации порошка Al₂O₃ на установке марки AFG с рассмотренным сепаратором. Полученные расчетные данные согласуются с экспериментом. Для нитрида титана TiN плотность равна $\rho_\delta = 5\ 440$ кг/м³. При аналогичных параметрах расчета, представленных выше (см. таблицу, формулу (1)), для данного материала получим граничный размер равный 12.8 мкм.

В результате проведенных экспериментов по фракционному разделению мелкодисперсных порошков TiN на основе измерения гранулометрического состава методом лазерной дифракции установлено, что в мелкой фракции присутствуют частицы размером менее 14.3 мкм (рис. 3; темная область под кривой). Таким образом, экспериментальные данные и расчеты хорошо согласуются.

Исследование гранулометрического состава порошков TiN выполнено на оборудовании Томского регионального центра коллективного пользования Национального исследовательского Томского государственного университета. Центр поддержан грантом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2021-693 (№ 13.ЦКП.21.0021).

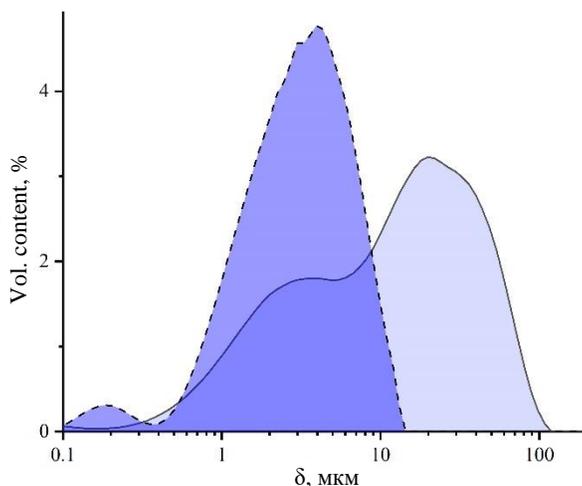


Рис. 3. Распределение частиц TiN по размерам до и после процесса классификации
Fig. 3. TiN particle size distribution before and after the classification

В аппарате, представленном на рис. 1, *b*, при соударении струй повышается давление, при разлете струй возникают циркуляционные токи, которые оживают слой, реализуется псевдооживленный слой. Газ-энергоноситель с частицами и газ на аэродинамические уплотнения поступают в сепарационную зону, проходят через сепаратор, крупные частицы возвращаются в слой, мелкие выходят из аппарата вместе с газом на дополнительную сепарацию и окончательно выделяются в фильтре.

Порозность насыпного слоя определяется соотношением

$$\varepsilon_0 = \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{\Omega_1} = 1 - \frac{\rho_n}{\rho_\delta},$$

где Ω_1, Ω_2 – объемы слоя и частиц, ρ_n, ρ_δ – плотности насыпного слоя и частиц. Теоретическое значение ε_0 находится в диапазоне 0.475–0.259 [18]. Оценка порозности псевдооживленного слоя в аппаратах с распределительными решетками представлена соотношением [19]

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \left(\frac{v}{v_0} \right)^{0.21},$$

где v – скорость потока, отнесенная к поперечному сечению аппарата, v_0 – скорость начала псевдооживления. Отношение v/v_0 называется числом псевдооживления и находится в пределах 1–50. В аппарате на рис. 1, *a* псевдооживленный слой распространяется до ротора, на частицы действуют не только силы тяжести и силы потока, но и силы, возникающие от воздействия на поток ротором.

На рис. 4, *a* представлена схема затопленной несжимаемой струи, распространяющейся в среде с повышенной плотностью [20].

Суммарный масштаб крупных вихрей и длины переноса этих вихрей на порядок больше масштаба переноса молей газа в теории Прандтля [20], что дает основание полагать, что некоторая доля примеси переносится этими вихрями в ядро потока с сохранением локального аксиального импульса вихревого моля.

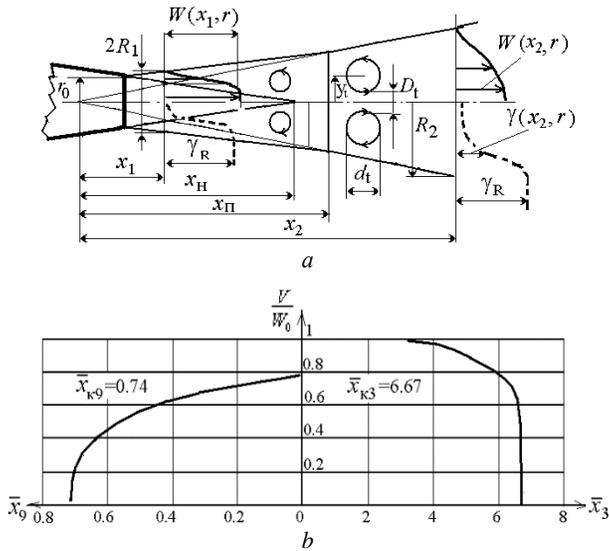


Рис. 4. Схема крупных вихрей и распределений скоростей газа и концентраций частиц в струе (а): r_0 – радиус сопла; $x_n, x_{п}$ – длины начального и переходного участков; R_1, R_2 – радиусы границы струи в сечениях x_1, x_2 ; y_t – радиус центральной окружности тора; $W(x_2, r)$ – аксиальная скорость газа в сечении x_2 основного участка; γR – концентрация частиц на границе струи; $\gamma(x_2, r)$ – концентрация частиц в сечении x_2 основного участка на переменном радиусе r . Безразмерные скорости частиц диаметром 3 и 9 мкм в конечном сечении x_k в зависимости от безразмерного расстояния их входа в струю (b). Безразмерные координаты конечных сечений: $\bar{x}_{к3} = 6.67$; $\bar{x}_{к9} = 0.74$

Fig. 4. (a) Diagram of large vortices and distributions of gas velocities and particle concentrations in a jet: r_0 is the nozzle radius; $x_n, x_{п}$ are the lengths of the initial and transition sections, respectively; R_1, R_2 are the radii of the jet boundary in sections x_1, x_2 , respectively; y_t is the radius of the center circle of the torus; $W(x_2, r)$ is the axial gas velocity in section x_2 of the main region; γR is the concentration of particles on the jet boundary; $\gamma(x_2, r)$ is the concentration of particles in section x_2 of the main region at a variable radius r ; (b) dimensionless velocities of the particles with a diameter of 3 and 9 μm in the final section x_k as the functions of the dimensionless distance of their entry into the jet. Dimensionless coordinates of final sections are $\bar{x}_{к3} = 6.67$; $\bar{x}_{к9} = 0.74$

Таким образом, в приосевой области находятся частицы с аксиальными скоростями, сравнимыми с аксиальными скоростями газа в приосевой зоне и приграничной области струи. Это объясняет уменьшение длины начального участка струи при значительных концентрациях частиц в приграничной области и большую разность скоростей частиц в приосевой зоне. Крупные вихри, возникающие в слое смешения осесимметричной струи, имеют замкнутую тороидальную форму, т.е. представляют собой вихревые кольца конечной толщины [20]. В ядре начального участка, там, где отсутствуют градиенты скоростей в продольном и поперечном направлениях, фиксируются турбулентные пульсации, резко возрастающие к концу ядра [20]. Это явление вызывается дальнодействием тороидальных вихрей, возникающих в слоях смешения [20]. Принимается, что радиус тела тора $d_t/2$ пропорционален толщине слоя смешения $R - R_y$, где R – радиус внешней границы струи, R_y – радиус границы ядра; дискретная завихренность

(угловая скорость) пропорциональна максимальному поперечному градиенту скорости

$$\Delta\omega = 0.5 \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{A_0 U_t}{R - R_x},$$

где A_0 – параметр завихренности, определяемый по безразмерному профилю скорости, U_t – скорость обтекания тора в относительном движении. Окружная скорость вихря равна $u_\omega = 0.5 d_t \Delta\omega$. Для основного участка $U_t = 0.25 W_m$, где W_m – осредненная скорость на оси струи, $A_0 = 2.27$; $d_t/2 = 0.22R$. Частота прохождения вихрей после преобразований может быть выражена соотношением $f = (3.4/x)W_0$ [20]. Расстояние между соседними вихрями определяется соотношением $\Delta x_0 = 0.17x$ [20].

Для оценки скоростного взаимодействия частиц рассмотрим аэрозоль, состоящий из частиц диаметром $\delta = 3$ и 9 мкм, плотностью 1800 кг/м³ в воздухе с температурой 20°C . Для таких частиц можно пренебречь силой тяжести и в уравнении движения принять коэффициент сопротивления движения частицы в форме Стокса.

Уравнение имеет вид [21]:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{W - V}{\tau}, \text{ или } V \frac{dV}{dx} = \frac{W - V}{\tau}, \quad (2)$$

где W, V – скорости газа и частиц, м/с; t – время, с; x – переменная осевая координата сечений струи, м; $\tau = (\rho_\delta/\rho)(\delta^2/18\nu)$ – время релаксации, с; ρ, ρ_δ – плотности газа и частиц, кг/м³; ν – коэффициент кинематической вязкости газа, м²/с. Полагая в первом приближении $W = W_0$ постоянной величиной, проинтегрируем уравнение (2) в пределах $[x, x_k]$, где x – координаты сечений вхождения частиц в струю, x_k – координата сечения выхода частиц из участка струи. Решение имеет вид:

$$\frac{x_k - x}{\tau W_0} = -\frac{V}{W_0} - \ln\left(1 - \frac{V}{W_0}\right). \quad (3)$$

Пусть $x_k = 0.1$ м, $W_0 = 300$ м/с, $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $\rho_\delta/\rho = 1500$, для частицы диа-

метром 3 мкм величина $\tau_3 = \frac{\delta^2}{18\nu} \frac{\rho_\delta}{\rho} = \frac{(3 \cdot 10^{-6})^2}{18 \cdot 1.5 \cdot 10^{-5}} \cdot 1500 = 5 \cdot 10^{-5}$ с, а для частицы 9 мкм величина τ будет равна $\tau_9 = 4.5 \cdot 10^{-4}$ с. Для этих частиц безразмерные величины \bar{x}_k имеют следующие значения:

$$\bar{x}_{k3} = \frac{x_k}{\tau_3 W_0} = \frac{0.1}{5 \cdot 10^{-5} \cdot 300} = 6.67; \quad \bar{x}_{k9} = 0.74$$

На рис. 4, *b* представлены безразмерные кривые скоростей частиц в конечном сечении участка струи в зависимости от их безразмерного расстояния от среза сопла на входе в поток по уравнению (3). В правой части рис. 4, *b* кривая относительной скорости частиц размером 3 мкм показывает, что все частицы, инжектированные в струю в диапазоне $\bar{x}_3 = [0; 4]$ в конечном сечении практически достигают скорости газа. В диапазоне $\bar{x}_3 = [6; 6.67]$ скорость частиц в конечном сечении много меньше скорости газа. Поэтому в конечном сечении могут происходить интенсивные соударения частиц, инжектированных в струю в области $\bar{x}_3 = [0; 4]$, с частицами, инжектированными в струю в области $\bar{x}_3 = [6; 6.67]$.

В левой части рис. 4, *b* кривая безразмерной скорости частиц диаметром 9 мкм свидетельствует, что частицы, инжектируемые в струю, не достигают скорости газа во всем диапазоне $0 < \bar{x}_0 < 0.74$, а в диапазоне $0.6 < \bar{x}_0 < 0.74$ скорость частиц диаметром 9 мкм составляет 2–20% от скорости газа. Переходя к размерным величинам, можно сделать вывод, что на 70% длины струи мелкие частицы (3 мкм) одинаковой крупности измельчаются отколом и сколом, крупные частицы (9 мкм) уменьшаются разрушением сколом за счет взаимодействия с мелкими частицами.

Для частиц более 50 мкм в результате расчетов получена приближенная формула скоростей частиц в струе, которые введены в начальном участке

$$\bar{V} = 0.78(\bar{x})^{0.23}, \quad \bar{V} = \frac{V}{W}, \quad \bar{x} = xW_0^{-0.5}k_c, \quad k_c = 9,2 \frac{v^{0.5}}{\delta^{1.5}} \frac{\rho}{\rho_\delta}. \quad (4)$$

При $x = x_k = 0.1$ м, $\rho_\delta/\rho = 1500$, $W_0 = 300$ м/с, $\delta = 1 \cdot 10^{-4}$ м, $v = 1.5 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $|k_c = 23.0.6$ (м·с)^{-0.5}, $\bar{x} = 0.136$, $\bar{V} = 0.493$, $V = 148$ м/с. При этом коэффициент сопротивления частиц рассчитывался в соответствии с рекомендациями [4]. При лобовом столкновении частиц скорость удара равна 296 м/с, этого достаточно для разрушения. Скорость столкновения в области разлета струй зависит от скорости инерционного пробега частиц. Скорости инерционного пробега частиц более 50 мкм в области разлета практически не меняются. Скорости инерционного пробега частиц менее 10 мкм в области разлета струй кратно уменьшаются. Частота поступления ансамблей скоростных частиц в область разлета струй может быть определена по соотношению

$$f = \frac{3.4}{x} W_0 = \frac{3.4}{0.1} 300 = 10200 \text{ с}^{-1}.$$

Таким образом, измельчение частиц менее 10 мкм происходит в самой струе, а для частиц более 50 мкм измельчение происходит в области разлета струй. Плановая скорость потока определяется из соотношения

$$W_{пл} = \frac{G_\Sigma}{\rho_k F_k},$$

где G_Σ – суммарный расход энергоносителя через сопла, кг/с, ρ_k – плотность энергоносителя в камере кг/м³, F_k – площадь поперечного сечения камеры, м². Расчеты показывают, что плановые скорости соответствуют скоростям витания крупных частиц с диаметром более 50 мкм. Поэтому частицы менее 50 мкм выносятся в сепарационное пространство и отбиваются ротором.

Агломераты, образующиеся в слое мелких частиц, могут вести себя в слое, как гранулы большого размера. Размеры агломерата определяются скоростью витания. Скорость витания v_b находится из зависимости

$$\text{Re}_b = \frac{v_b \delta_a}{\nu} = \frac{Ar}{18 + 0.61\sqrt{Ar}}, \quad Ar = \frac{v_b \delta_a^3 \rho_a}{\nu^2 \rho} \quad \text{при } \text{Re}_b > 700, \quad v_b = 1.71 \left(\delta_a g \frac{\rho_a}{\rho} \right)^{0.5},$$

где δ_a , ρ_a – диаметр и плотность агломерата, ρ , ν – плотность и кинематическая вязкость газа. Агломерат в виде шара, состоящий из множества частиц, обтекаемый потоком, испытывает раздавливающее воздействие перепада давления в лобовой части. Возникающие при этом боковые усилия способствуют разъединению частиц, причем напряжение разъединения пропорционально перепаду давления,

поскольку частицы связаны аутогезионными силами. При обтекании агломерата более мелкими частицами возможно эрозийное разрушение его тела или, наоборот, захват мелких частиц агломератом. Сопротивление крупной частицы в авто-модельной области обтекания определяется

$$P = \xi_x \frac{\pi d_a^2}{4} \rho \frac{W^2}{2},$$

где ξ – коэффициент сопротивления, W – скорость газа относительно агломерата на бесконечности, ρ – плотность газа.

Коэффициент сопротивления шара в диапазоне чисел Рейнольдса $5 \cdot 10^2 - 10^5$ имеет значения, находящиеся в интервале 0.6–0.4; для диапазона $10^3 - 10^5$ этот коэффициент принимается равным 0.44; а сила сопротивления прямо пропорциональна скоростному напору [12]. Распределение давления по поверхности агрегата приведено в [12]. В области 0–40° давление избыточно (положительно), при 40° это давление равно нулю, в области 40–180° избыточное давление отрицательно. Поскольку перепад давления на агломерате является действующей нагрузкой, то эта нагрузка должна определяться интегралом давления по поверхности. Однако средний перепад определяется лобовым сопротивлением P . Оценки прочности агломератов из частиц порядка 1 мкм при обтекании газовой струей показывают, что размер агломератов составляет порядка 40 мкм [8].

Газовый факел струи в псевдооживленном слое из зерновых материалов (с частицами размером более 0.5 мм) образует струйный канал, занятый разреженной суспензией [10]. Течение в периферийной зоне факела (на границе между факелом и плотной фазой слоя) можно рассматривать как затопленную струю, плотность вещества которой $\rho_{Rc} = (0.34 - 0.035\delta)\rho_{R0}$, где δ – диаметр частиц в мм, ρ_{R0} – плотность слоя в начальном участке струи [10]. Длина переходного участка определяется по соотношению

$$\frac{C_1 x_n}{r_0} = 3.28,$$

где C_1 – коэффициент струи,

$$C_1 = 0.46 Ga^{0.1} \left(\frac{W_p}{W_f} \right)^{0.32}, \quad Ga = \frac{g \delta^3}{v^2},$$

где $3.0 < Ga < 3160$, $1 < W_p/W_f < 2.5$; W_p – рабочая скорость газа в струе, W_f – критическая начальная скорость псевдооживления. Однако в силу большой инерционности таких частиц силовое взаимодействие их между собой мало и в [8] не рассматривалось.

Заключение

В работе рассмотрены сепарационные эффекты, возникающие при классификации тонкодисперсных порошков. Получены экспериментальные данные значений окружных скоростей воздуха U_T вблизи поверхности ротора в зависимости от числа оборотов ротора. Проведена оценка скоростных взаимодействий твердых частиц в пневмоизмельчителе с псевдооживленным слоем. На основе полученных аэродинамических экспериментальных данных проведен расчет граничного размера сепарируемых частиц. Представлено сравнение расчетного граничного раз-

мера керамических частиц TiN с полученными экспериментальными данными по фракционному разделению мелкодисперсных порошков TiN на основе измерений гранулометрического состава методом лазерной дифракции. Расчетные и экспериментальные данные имеют хорошее согласование.

Список источников

1. Шваб А.В., Хайруллина В.Ю. Исследование влияния нестационарного закрученного турбулентного течения на движение одиночной твердой частицы // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т. 52, № 1 (305). С. 47–53.
2. Ghadiri M., Van Impe J. Numerical simulation of particle dynamics in a spiral jet mill via coupled CFD-DEM // *Pharmaceutics*. 2021. V. 13(7). Art. 937. doi: 10.3390/pharmaceutics13070937
3. Акунов В.И. Струйные мельницы. М. : Машиностроение, 1967. 262 с.
4. Федотов К.В., Дмитриев В.И. Изменение технологических свойств руды при измельчении в противоточно-вихревых струях // Известия вузов. Горный журнал. 2010. № 5. С. 129–132.
5. Silverberg P.M., Sharon S.M. Homing in on the best size reduction method // *Chemical Engineering*. 1998. V. 105 (123). P. 36.
6. Hosokawa Micron Ltd : проспект корпорации. URL: <https://www.hosokawa-alpine.com/powder-particle-processing/machines/jet-mills/> (accessed: 23.11.2022).
7. Бирюков Ю.А., Бузник В.М., Дунаевский Г.Е., Ивонин И.В., Иценко А.Н., Лернер М.И., Лымарь А.М., Обьедков А.Ю., Псахье С.Г., Цветников А.К. Ультрадисперсные и наноразмерные порошки: создание, строение, производство и применение / под ред. В.М. Бузника. Томск : Изд-во НТЛ, 2009. 192 с.
8. Буевич Ю.А., Минаев Г.А. Струйное псевдооживление. М. : Химия, 1984. 136 с.
9. Постникова И.В., Блиничев В.Н. Системный подход к расчету процессов в аппарате комбинированного действия // Теоретические основы химической технологии. 2014. Т. 48, № 3. С. 241–248. doi: 10.7868/S0040357114030178
10. Балаюн Б.М., Колмаков А.Г., Алымов М.И., Кротов А.М. Наноматериалы. Классификация, особенности свойств, применение и технологии получения. М. : Междунар. ун-т природы, общества и человека «Дубна», Филиал «Угреша», 2007. 125 с.
11. Караджи В.Г., Московко Ю.Г. Вентиляционное оборудование : технические рекомендации для проектировщиков и монтажников. М. : АВОК-ПРЕСС, 2010. 421 с.
12. Василевский М.В. Обеспыливание газов инерционными аппаратами. Томск : Изд-во Том. политехн. ун-та, 2008. 248 с.
13. Росляк А.Т., Зятиков П.Н. Воздушно-центробежная классификация микропорошков, Томск : ТМЛ-пресс, 2010. 224 с.
14. Sharapov R.R., Prokopenko V.S. Modeling of the separation process in dynamic separators // *World Applied Sciences Journal*. 2013. V. 25 (3). P. 536–542 doi: 10.5829/idosi.wasj.2013.25.03.7061
15. Crawley G., Malcolmson A., Crosley I., McLeish A. Particle Classification: Making the Grade // *Chemical Engineering*. 2002. V. 109(4). P. 54–60.
16. Зимон А.Д. Адгезия и аутогезия частиц. Зависимость адгезии и аутогезии частиц муки от давления контакта // Известия вузов. Пищевая технология. 1991. № 1-3 (200-202). С. 113–116.
17. Бирюков Ю.А., Богданов Л.Н., Обьедков А.Ю., Полошко В.А., Бирюков А.Ю., Грязев А.В., Хасанов О.Л. Эффективное выделение ультрадисперсных порошков пневмоциркуляционными методами // Известия вузов. Физика. 2012. Т. 55, № 7-2. С. 34–37.
18. Разумов И.М. Псевдооживление и пневмотранспорт сыпучих материалов. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Химия, 1972. 239 с.

19. Абрамович Г.Н., Гиришович Т.А., Крашенников С.Ю., Секундов А.Н., Смирнова И.П. Теория турбулентных струй / под ред. Г.Н. Абрамовича. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Наука, 1984. 717 с.
20. Евсеев Н.С., Жуков И.А. Влияние турбулентных пульсаций на процесс фракционного разделения мелкодисперсных порошков нитридов металлов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 72. С. 70–79. doi: 10.17223/19988621/72/6
21. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М. : Наука, 1973. 848 с.

References

1. Shvab A.V., Khairullina V.Y. (2011) Effect of an unsteady swirled turbulent flow on the motion of a single solid particle. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 52(1). pp. 37–42. doi: 10.1134/S0021894411010068
2. Ghadiri M., Van Impe J. (2021) Numerical simulation of particle dynamics in a spiral jet mill via coupled CFD-DEM. *Pharmaceutics*. 13(7). Article 937. doi: 10.3390/pharmaceutics13070937
3. Akunov V.I. (1967) *Struynye mel'nitsy* [Jet mills]. Moscow: Mashinostroenie.
4. Fedotov K.V., Dmitriev V.I. (2010) Izmenenie tekhnologicheskikh svoystv rudy pri izmel'chenii v protivotochno-vikhrevykh struyakh [The change of ore technological properties during the grinding in counter-current-vortex jets]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Gornyy zhurnal – Minerals and Mining Engineering*. pp. 129–132.
5. Silverberg P.M., Sharon S.M. (1998) Homing in on the best size reduction method. *Chemical Engineering*. 105(123). P. 36.
6. *Prospectus of Hosokawa Micron Ltd Corporation* [Electronic resource]. Access mode: <https://www.hosokawa-alpine.com/powder-particle-processing/machines/jet-mills/> (Date of the application 23.11.2022)
7. Biryukov Yu.A., Buznik V.M., Dunaevskiy G.E., Ivonin I.V., Ishchenko A.N., Lerner M.I., Lyman' A.M., Ob'edkov A.Yu., Psakhie S.G., Tsvetnikov A.K. (2009) *Ul'tradispersnye i nanorazmernye poroshki: sozdanie, stroenie, proizvodstvo i primeneniye* [Ultrafine and nanosized powders: creation, structure, production and application]. Tomsk: NTL Publishing House.
8. Buevich Yu.A., Minaev G.A. (1984) *Struynoe psevdoozhizhenie* [Jet fluidization]. Moscow: Khimiya.
9. Postnikova I.V., Blinichev V.N. (2014) System approach to calculating processes in the apparatus of combined action. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 48(3). pp. 241–248. doi: 10.7868/S0040357114030178
10. Baloyan B.M., Kolmakov A.G., Alymov M.I., Krotov A.M. (2007) *Nanomaterialy. Klassifikatsiya, osobennosti svoystv, primeneniye i tekhnologii polucheniya* [Nanomaterials. Classification, features of properties, application, and production technologies]. Moscow: International University of Nature, Society and Man of Dubna, "Ugresha" Branch.
11. Karadzhii V.G., Moskovko Yu.G. (2010) *Ventilyatsionnoye oborudovanie. Tekhnicheskie rekomendatsii dlya proektirovshchikov i montazhnikov* [Ventilation equipment. Technical recommendations for designers and installers]. Moscow: AVOK – PRESS.
12. Vasilevskiy M.V. (2008) *Obespylivaniye gazov inertsiionnymi apparatami* [Dedusting of gases by inertial devices]. Tomsk: Izdatel'stvo Tomskogo politekhnicheskogo universiteta.
13. Roslyak A.T., Zyatikov P.N. (2010) *Vozdushno-tsentrobezhnaya klassifikatsiya mikro-poroshkov* [Air centrifugal classification of micropowders]. Tomsk: TML-Press.
14. Sharapov R.R., Prokopenko V.S. (2013) Modeling of the separation process in dynamic separators. *World Applied Sciences Journal*. 25(3). pp. 536–542. doi: 10.5829/idosi.wasj.2013.25.03.7061
15. Crawley G., Malcolmson A., Crosley I., McLeish A. (2002) Particle classification: making the grade. *Chemical Engineering*. 109(4). pp. 54–60.

16. Zimon A.D. (1991) Adgeziya i autogeziya chastits. Zavisimost' adgezii i autogezii chastits muki ot davleniya kontakta [Adhesion and autohesion of particles. Dependence of adhesion and autohesion of flour particles on contact pressure]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Pishchevaya tekhnologiya – Izvestia of Higher Educational Institutions. Food Technology*. 1–3(200–202). pp. 113–116.
17. Biryukov Yu.A., Bogdanov L.N., Ob"edkov A.Yu., Polyushko V.A., Biryukov A.Yu., Gryazev A.V., Khasanov O.L. (2012) Effektivnoe vydelenie ul'tradispersnykh poroshkov pnevmotsirkulyatsionnymi metodami [Effective isolation of ultrafine powders by pneu-mocirculatory methods]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 55(7-2). pp. 34–37.
18. Razumov I.M. (1972) *Psevdozhizhenie i pnevмотransport sypuchikh materialov* [Fluidization and pneumotransport of bulk materials]. Moscow: Khimiya.
19. Abramovich G.N., Girshovich T.A., Krashennikov S.Yu., Sekundov A.N., Smirnova I.P. (1984) *Teoriya turbulentnykh stuy* [Theory of turbulent jets]. Moscow: Nauka.
20. Evseev N.S., Zhukov I.A. (2021) Vliyaniye turbulentnykh pul'satsiy na protsess fraktsionnogo razdeleniya melkodispersnykh poroshkov nitridov metallov [Effect of turbulent pulsations on the fractional separation of fine powders of metal nitrides]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 72. pp. 70–79. doi: 10.17223/19988621/72/6
21. Loytsyanskiy L.G. (1973) *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid and gas mechanics]. Moscow: Nauka.

Сведения об авторах:

Василевский Михаил Викторович – кандидат технических наук, Томский государственный университет, Томск, Россия. E-mail: vasmix40@mail.ru

Полюшко Владимир Анатольевич – инженер-исследователь Инновационно-технологического научно-образовательного центра Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: polyushko@niipmm.tsu.ru

Романдин Владимир Иванович – научный сотрудник ООО «Нанокерамика», Томск, Россия. E-mail: romandin@niipmm.tsu.ru

Евсеев Николай Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной аэромеханики Томского государственного университета, Томск, Россия; научный сотрудник Института проблем химико-энергетических технологий СО РАН, Бийск, Россия. E-mail: evseevns@gmail.com

Жуков Илья Александрович – доктор технических наук, заведующий лабораторией нанотехнологий металлургии Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: gofra930@gmail.com

Зиятдинов Мансур Хузиахметович – доктор технических наук, старший научный сотрудник Томского государственного университета, Томск, Россия; научный сотрудник ООО «Нанокерамика», Томск, Российская Федерация. E-mail: ziatdinovm@mail.ru

Марченко Екатерина Сергеевна – доктор физико-математических наук, заведующая лабораторией медицинских сплавов и имплантатов с памятью формы Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: 89138641814@mail.ru

Жилина Любовь Александровна – директор ООО «Нанокерамика», Томск, Россия. E-mail: alecsanna@mail.ru

Information about the authors:

Vasilevskiy Mikhail V. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vasmix40@mail.ru

Polyushko Vladimir A. (Researcher, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: polyushko@niipmm.tsu.ru

Romandin Vladimir I. (Researcher, Nanokeramika, LLC, Tomsk, Russian Federation). E-mail: romandin@niipmm.tsu.ru

Evseev Nikolay S. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation; Researcher, Institute for Problems of Chemical and Energetic Technologies of the Siberian Branch of RAS, Biysk, Russian Federation). E-mail: evseevns@gmail.com

Zhukov Il'ya A. (Doctor of Technical Sciences, Head of Laboratory, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gofra930@gmail.com

Ziatdinov Manzur Kh. (Doctor of Technical Sciences, Senior Researcher, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation; Researcher, Nanokeramika, LLC, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ziatdinovm@mail.ru

Marchenko Ekaterina S. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: 89138641814@mail.ru

Zhilina Lyubov' A. (Director, Nanokeramika, LLC, Tomsk, Russian Federation). E-mail: alecsanna@mail.ru

Статья поступила в редакцию 20.12.2022; принята к публикации 10.10.2023

The article was submitted 20.12.2022; accepted for publication 10.10.2023

Научная статья

УДК 553.96, 532.546

doi: 10.17223/19988621/85/7

Гидродинамические исследования нефтяных скважин после кратковременного возмущения пласта

Венера Расиховна Гадильшина¹, Петр Евгеньевич Морозов²,
Марат Назмиевич Шамсиев³, Мухамед Хильмиевич Хайруллин⁴

1, 2, 3, 4 Казанский научный центр Российской академии наук, Казань, Россия

¹ venera_gadilshina@mail.ru

² morozov@imm.knc.ru

³ mshamsiev@imm.knc.ru

⁴ khairullin@imm.knc.ru

Аннотация. Исследуется задача нестационарной фильтрации жидкости в окрестности вертикальной скважины с учетом скин-эффекта и влияния ствола скважины после кратковременного возмущения нефтяного пласта. Численное решение задачи сравнивается с приближенным решением Маскета. Предлагается метод интерпретации результатов гидродинамических исследований вертикальных скважин, вскрывающих низкопроницаемые коллекторы, на основе теории некорректных задач. Проводится сравнение оценок значений коэффициента продуктивности и пластового давления, полученных предложенным методом, интегральным методом и методом Маскета, с использованием реальных данных о восстановлении забойного давления.

Ключевые слова: кривая притока, кривая восстановления давления, низкопроницаемый пласт, продуктивность

Для цитирования: Гадильшина В.Р., Морозов П.Е., Шамсиев М.Н., Хайруллин М.Х. Гидродинамические исследования нефтяных скважин после кратковременного возмущения пласта // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 85. С. 90–100. doi: 10.17223/19988621/85/7

Original article

Pressure-transient analysis of oil wells after a short-term disturbance of a formation

Venera R. Gadil'shina¹, Piotr E. Morozov²,
Marat N. Shamsiev³, Mukhamed Kh. Khairullin⁴

1, 2, 3, 4 Kazan Scientific Center of RAS, Kazan, Russian Federation

¹ venera_gadilshina@mail.ru

² morozov@imm.knc.ru

³ mshamsiev@imm.knc.ru

⁴ khairullin@imm.knc.ru

Abstract. This paper investigates a numerical model of non-stationary fluid filtration in the vertical well vicinity after a short-term disturbance of a formation taking into account the skin effect and wellbore storage effect. The numerical solution to the problem is compared with an approximate solution to the Muskat problem, which is obtained by the method of sequentially changing stationary states. The influence of formation permeability and skin factor on the bottomhole pressure build-up is studied. The wellbore storage effect has been shown to completely mask indications of the bottomhole zone. For low-permeability formations, the pressure build-up process is time-consuming. Hence, the flow-over techniques should be used to investigate them.

A method for interpreting pressure-transient data based on the theory of solving ill-posed inverse problems is proposed. The method determines the formation permeability, skin factor, and formation pressure values using the measured bottomhole pressure profile after a short-term disturbance of the formation. Estimates of the well productivity index and formation pressure are in good agreement with those obtained using the integral and Muskat methods. In contrast to the methods based on the Muskat solution, the proposed method allows the assessment of the skin factor.

Keywords: inflow curve, pressure build-up curve, low-permeability formation, productivity index

For citation: Gadilshina, V.R., Morozov, P.E., Shamsiev, M.N., Khairullin, M.Kh. (2023) Pressure-transient analysis of oil wells after a short-term disturbance of a formation. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 90–100. doi: 10.17223/19988621/85/7

Введение

Разработка нефтяных месторождений с низкопроницаемыми пластами в большинстве случаев проводится путем эксплуатации скважин в периодическом режиме. При этом такие скважины являются малодобитными, и для их исследования не всегда корректно применение традиционных гидродинамических методов (метод установившихся отборов, метод восстановления давления и т.д.). Это связано с невозможностью соблюдения технологии исследования скважин, например создания одного или нескольких устойчивых режимов работы скважины.

Одним из способов исследования малодобитных скважин является метод прослеживания уровня. В стволе скважины производится «мгновенное» снижение уровня жидкости, т.е. создается кратковременное возмущение пласта. Далее измеряется восстановление уровня жидкости или забойного давления, затем по результатам этих измерений оценивается коэффициент продуктивности скважины. Необходимо отметить, что при исследовании скважины методом прослеживания уровня не требуется знания дебита скважины.

Кратковременное возмущение пласта достигается различными способами:

1. Для мгновенного изменения уровня жидкости в стволе скважины сначала производится закачка воздуха в затрубное пространство, а затем – его выпуск. Вытесняемая жидкость отбирается из насосно-компрессорных труб (НКТ). Далее регистрируется восстановление уровня жидкости.

2. Свабирование скважины. С помощью сваба производится отбор жидкости из ствола скважины, что приводит к снижению забойного давления. После свабирования в затрубном пространстве скважины за счет притока жидкости из пласта происходит восстановление уровня жидкости.

3. Применение испытателя пластов на трубах (ИПТ) для исследования пластов в процессе бурения, а также низко- и среднедебитных скважин. ИПТ за счет малого подпакерного объема позволяет снизить влияние объема ствола скважины и за счет этого уменьшить продолжительность исследований для получения необходимых условий фильтрации в пласте.

Существуют различные подходы к интерпретации результатов гидродинамических исследований низкопроницаемых коллекторов. Методы исследования малодебитных скважин, основанные на приближенном решении Маскета, приведены в [1–4]. В работах [5–7] предлагаются методы на основе точных решений нестационарной фильтрации жидкости после мгновенного отбора или подлива. В [8] учитывается длительность подлива в скважину или отбора из нее. В работах [9, 10] рассматриваются методы исследования малодебитных скважин на основе приближенных решений нестационарной фильтрации.

В данной работе исследуется численная модель нестационарной фильтрации жидкости в окрестности вертикальной скважины после кратковременного возмущения нефтяного пласта с учетом скин-эффекта и влияния ствола скважины.

Постановка задачи

Предполагается, что скважина до проведения исследования не работала, т.е. пласт не был возмущен. При описании фильтрации к скважине учитывается состояние призабойной зоны. Одним из способов является введение дополнительного стационарного перепада давления в бесконечно тонкой зоне вблизи стенки скважины [11]. Другой способ учета состояния призабойной зоны – использование приведенного радиуса скважины $r_{wf} = r_w e^{-S}$, r_w – радиус скважины, S – коэффициент скин-фактора [12]. В работе [13], используя данный подход, построены типовые кривые и предложен метод, позволяющий оценить скин-фактор. В [14] предложен метод определения анизотропии проницаемости пласта и скин-фактора по данным экспресс-откачек из несовершенных скважин.

Нестационарная фильтрация жидкости в окрестности вертикальной скважины после кратковременного возмущения нефтяного пласта с учетом скин-эффекта и влияния ствола скважины описывается системой уравнений

$$\beta^* \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k}{\mu} r \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad r_{wf} < r < R_e, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$p(r_{wf}, 0) = p_{wf}, \quad p(r, 0) = p_e, \quad r_{wf} < r \leq R_e, \quad (2)$$

$$2\pi \frac{kH}{\mu} r \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=r_{wf}} = C_w \frac{\partial p}{\partial t}, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$p(R_e, t) = p_e, \quad t > 0, \quad (4)$$

где k – проницаемость пласта, β^* – упругоемкость пласта, H – толщина пласта, C_w – коэффициент влияния объема ствола скважины, μ – вязкость жидкости, R_e – ра-

диус пласта, p_e – пластовое давление, p_{wf} – забойное давление в момент прекращения возмущения.

Анализ численного решения

Для численного решения системы (1)–(4) используется метод конечных разностей. Для этого область решения покрывается неравномерной сеткой, которая сгущается к скважине. Конечно-разностная сетка строится на основе преобразования $u = \ln r$. Для решения системы сеточных уравнений на каждом временном слое используется метод прогонки.

Далее приводятся результаты сравнения численного решения задачи (1)–(4) с приближенным решением Маскета, полученным методом последовательной смены стационарных состояний [1]:

$$p(t) = p_e - (p_e - p_{wf}) e^{-\alpha t}, \quad (5)$$

где $\alpha = Krg/f$, K – коэффициент продуктивности, ρ – плотность нефти, f – площадь поперечного сечения межтрубного пространства.

Рассматривается модельный пласт со следующими данными: $k = 0.01$ мкм², $\beta^* = 10^{-4}$ 1/МПа, $H = 5$ м, $C_w = 1$ м³/МПа, $\mu = 10$ мПа с, $R_e = 100$ м, $r_w = 0.1$ м, $p_e = 5$ МПа, $p_{wf} = 2$ МПа, $S = 0$. На рис. 1 приведены результаты сравнения численного решения задачи (1)–(4) с приближенным решением (5). В полулогарифмических координатах приближенное решение (см. рис. 1, а, кривая 1) и численное решение при $\beta^* = 0$ (квазистационарная фильтрация; см. рис. 1, а, кривая 3) имеют вид прямой линии и практически совпадают, а численное решение при $\beta^* \neq 0$ (нестационарная фильтрация; см. рис. 1, а, кривая 2) отклоняется от прямой. На рис. 1, б приводятся приближенное и численное решения при $C_w = 0.001$ м³/МПа, что соответствует случаю, когда на забое скважины установлен пакер. Из рис. 1, б видно, что кривая 1 (приближенное решение) является касательной к начальному участку кривой 2 (численному решению).

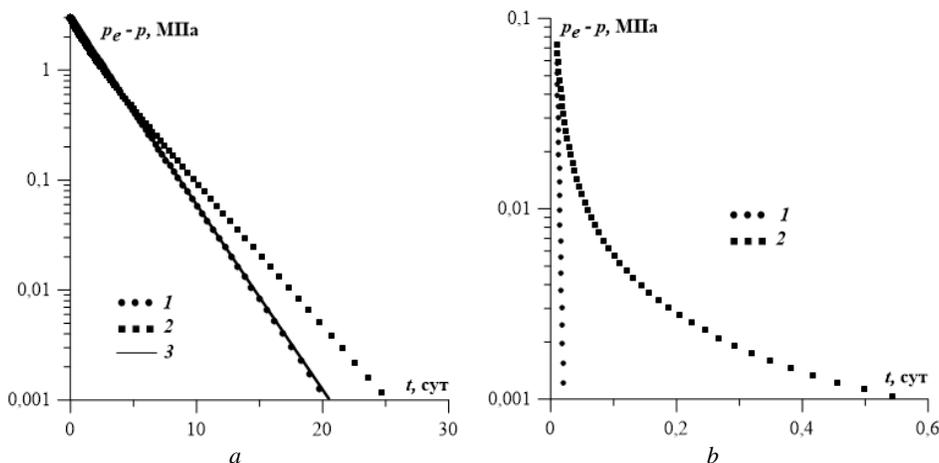


Рис. 1. Кривые восстановления давления (КВД): 1 – приближенное решение Маскета, 2 – численное решение ($\beta^* \neq 0$), 3 – численное решение ($\beta^* = 0$)

Fig. 1. Pressure build-up curves: (1) approximate solution to the Muskat problem, (2) numerical solution ($\beta^* \neq 0$), and (3) numerical solution ($\beta^* = 0$)

Из рис. 1 видно, что время восстановления давления в пласте сильно зависит от коэффициента влияния объема ствола скважины. Для данного примера после кратковременного возмущения пласта давление в окрестности скважины восстанавливается до пластового без пакера в течение 30 суток (см. рис. 1, *a*, кривая 2), а с пакером – в течение суток (рис. 1, *b*, кривая 2).

На рис. 2 приведены преобразованные кривые восстановления давления (КВД) в зависимости от проницаемости k [15]. Для низкопроницаемых коллекторов процесс восстановления давления длителен, поэтому при их исследовании следует использовать потокоперекрывающие технологии.

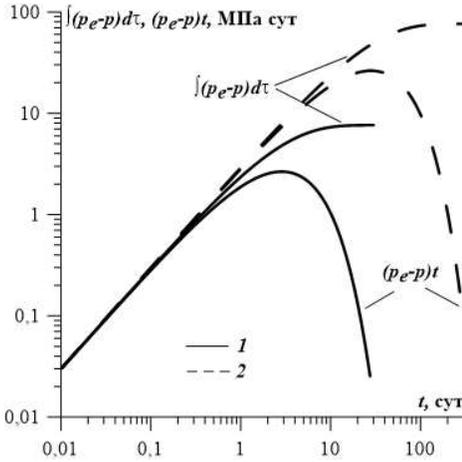


Рис. 2. Преобразованные КВД:
1 – $k = 0.01 \text{ мкм}^2$, 2 – $k = 0.001 \text{ мкм}^2$

Fig. 2. Transformed pressure build-up curves: $k = (1) 0.01$ and $(2) 0.001 \text{ μm}^2$

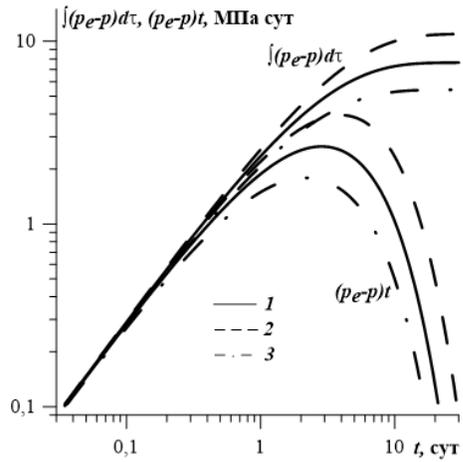


Рис. 3. Преобразованные КВД:
1 – $S = 0$, 2 – $S > 0$, 3 – $S < 0$

Fig. 3. Transformed pressure build-up curves: (1) $S = 0$, (2) $S > 0$, and (3) $S < 0$

На рис. 3 приведены преобразованные КВД в зависимости от значения коэффициента скин-фактора S . Конечные участки кривых отличаются в зависимости от значения коэффициента скин-фактора, диагностические признаки наличия призабойной зоны полностью скрываются эффектом влияния объема ствола скважины.

Определение фильтрационных параметров пласта

Задача определения фильтрационных параметров пласта принадлежит к классу обратных задач подземной гидродинамики. В качестве исходной информации используются результаты глубинных или поверхностных исследований скважины после кратковременного возмущения пласта. Обратная задача состоит в оценке фильтрационных параметров пласта k , S и p_e , когда процесс фильтрации жидкости к вертикальной скважине после кратковременного возмущения пласта описывается системой уравнений (1)–(4). При этом считается известной следующая информация:

$$p(r_{wf}, t) = \phi(t), \tag{6}$$

где $\phi(t)$ – наблюдаемые значения давления на забое скважины.

Решение обратной задачи (1)–(4) и (6) сводится к минимизации функционала [16–18]:

$$F(\alpha) = \int_0^{t_{\text{exp}}} \left[\phi(t) - p(r_{wf}, t) \right]^2 dt, \quad (7)$$

где $\alpha = (k, S, p_e)$, $0 < a_i \leq \alpha_i \leq b_i$ ($a_i, b_i = \text{const}$), t_{exp} – время эксперимента.

Для минимизации функционала (7) строится итерационная последовательность на основе метода Левенберга–Марквардта. Сходимость и устойчивость итерационного процесса исследовались на модельных задачах. Численные результаты решения модельных задач показали, что предложенный метод позволяет оценить проницаемость пласта, значения скин-фактора и пластового давления по результатам измерения забойного давления после кратковременного воздействия.

Результаты интерпретации кривой восстановления давления различными методами

Приведем пример интерпретации реальной КВД, снятой после кратковременного возмущения пласта. Исходные данные о скважине приведены в табл. 1. При расчетах коэффициент влияния объема ствола скважины, исходя из табл. 1, считался равным $C_w = 1.012 \text{ м}^3/\text{МПа}$.

Таблица 1

Данные о скважине

Характеристика	Значение
Интервал перфорации, м	1 738.5–1 748.5
Внутренний диаметр НКТ, мм	60
Толщина стенки НКТ, мм	5.5
Внутренний диаметр обсадной колонны, мм	130.6
Удлинение на глубину кровли, м	123.35

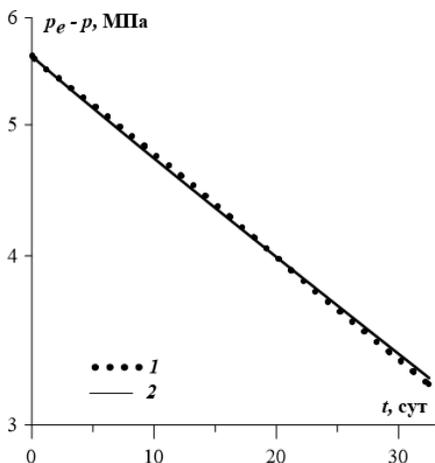


Рис. 4. КВД: 1 – измеренная, 2 – вычисленная

Fig. 4. Pressure build-up curves: (1) observed and (2) calculated

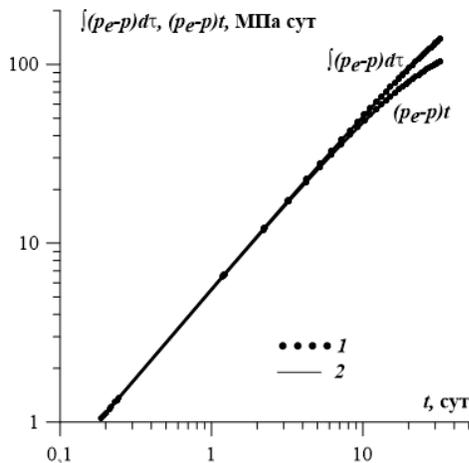


Рис. 5. Преобразованные КВД:

1 – измеренная, 2 – вычисленная
Fig. 5. Transformed pressure build-up curves: (1) observed and (2) calculated

Результаты интерпретации КВД предложенным численным методом приведены в графическом виде: на рис. 4 изображены измеренная и вычисленная КВД, на рис. 5 – КВД в преобразованном виде. По преобразованной кривой $(p_e - p)t$ видно, что КВД является недовосстановленной.

На рис. 6 приведены результаты обработки КВД методом Маскета. Уравнение (5) записывается в виде:

$$\ln [p_e - p(t)] = \ln (p_e - p_{wf}) - \alpha t. \quad (8)$$

Согласно (8), КВД в координатах $(t, \ln(p_e - p))$ является прямой с угловым коэффициентом α . Для линии тренда $y = -0.0145x + 1.8634$ угловой коэффициент есть $\alpha = 0.0145$ (см. рис. 6), тогда коэффициент продуктивности есть $K = \alpha C_w = 0.0147$. Значение пластового давления определяется путем графического подбора по формуле (5) (рис. 7): $p_e = 11.0$ МПа.

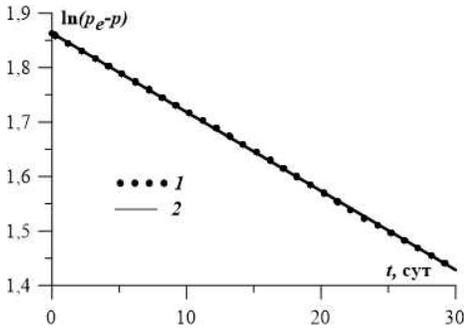


Рис. 6. Метод Маскета.
1 – КВД,
2 – линия тренда
Fig. 6. The Muskat method:
(1) pressure build-up curve
and (2) trend line

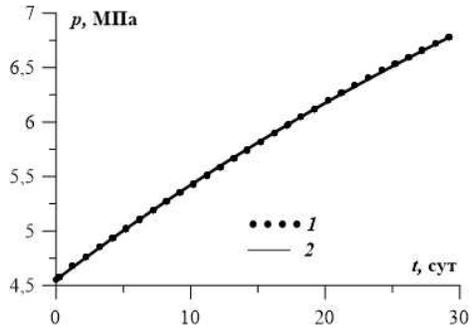


Рис. 7. Графический подбор значений пластового давления: 1 – измеренная КВД, 2 – КВД, вычисленная по формуле (5)
Fig. 7. Graphic selection of the reservoir pressure: the pressure build-up curve is (1) observed and (2) calculated by formula (5)

Далее приводятся результаты обработки КВД интегральным методом. Уравнение (5) после интегрирования сводится к виду:

$$\varphi_j = K(2p_e - p_{wf}) - Kp_j,$$

$$\varphi_j = \frac{2f}{(p_j - p_{wf})\rho g} \sum_{i=1}^j \frac{(p_i - p_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}}, \quad (9)$$

где p_j – текущее давление.

На рис. 8 приведены кривая притока, построенная по формуле (9), и линия тренда в координатах (p_j, φ_j) . По угловому коэффициенту уравнения тренда $y = -0.0149x + 0.2592$ определяется продуктивность пласта $K = \alpha = 0.0149$. Из отрезка $b = 0.1914$, отсекаемого на линии тренда при $p = p_{wf}$, по формуле $p_e = p_{wf} + b/2K$ определяется значение пластового давления $p_e = 11$ МПа.

В табл. 2 приведены оценки параметров пласта, полученные предложенным и известными методами. Оценки продуктивности и значения пластового давления, полученные методом Маскета и интегральным методом, практически совпадают, также хорошо согласуются с оценками, полученными предложенным методом.

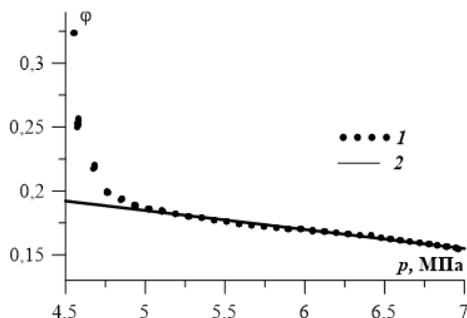


Рис. 8. Интегральный метод: 1 – кривая притока, 2 – линия тренда
 Fig. 8. Integral method: (1) inflow curve and (2) trend line

Таблица 2

Результаты интерпретации кривой восстановления давления

Метод	K , м ³ /сут МПа	p_e , МПа	k/μ , мкм ² /мПа с	S
Предложенный метод	$1.13 \cdot 10^{-2}$	12.1	$3.58 \cdot 10^{-5}$	10
Метод Маскета	$1.47 \cdot 10^{-2}$	11.0	–	–
Интегральный метод	$1.49 \cdot 10^{-2}$	11.0	–	–

Здесь необходимо отметить, что предложенный в работе метод интерпретации кривой восстановления давления после кратковременного возмущения, в отличие от методов, основанных на решении Маскета, позволяет оценить значение скин-фактора.

Заключение

Предложен метод интерпретации результатов гидродинамических исследований низкопроницаемых нефтяных пластов на основе теории некорректных задач. Показано, что по кривым восстановления давления после кратковременного возмущения можно оценить проницаемость пласта, значения скин-фактора и пластового давления. Проведено сравнение оценок коэффициента продуктивности и значения пластового давления, полученных с помощью предложенного алгоритма, интегральным методом и методом Маскета.

Список источников

1. *Muskat M.* Use of data on the build-up bottom-hole pressures // Transactions of the AIME. 1937. V. 123. P. 44–48.
2. *Котяхов Ф.И., Муравьев И.М.* Анализ гидродинамического исследования скважин методом прослеживания уровня // Геология, разведка, добыча и переработка нефти и газа. М.: Гостоптехиздат, 1956. Вып. III. С. 148–162.
3. *Днепровская Н.И., Кубагушев Н.Г.* Исследование скважин методом прослеживания уровня // Исследования в области разработки нефтяных месторождений: тематич. сб. ВНИИнефть. М., 1969. Вып. 3. С. 91–103.
4. *Вольтин С.Г., Ломакина О.В.* Метод определения параметров низкопроницаемого пласта // Нефтяное хозяйство. 1988. № 5. С. 27–30.

5. Каменецкий С.Г. Две задачи теории фильтрации упругой жидкости в упругой пористой среде // Труды ВНИИ. Разработка нефтяных месторождений и подземная гидродинамика. М. : Гостоптехиздат, 1959. Вып. 19. С. 134–145.
6. Cooper H.H., Bredehoeft J.D., Papadopoulos I.S. Response of a finite-diameter well to an instantaneous charge of water // Water Resources Research. 1967. V. 3 (1). P. 263–269. doi: 10.1029/WR003i001p00263
7. Bredehoeft J.D., Papadopoulos I.S. A method for determining the hydraulic properties of tight formations // Water Resources Research. 1980. V. 16 (1). P. 233–238. doi: 10.1029/WR003i001p00263
8. Picking L.W. Analyzing the recovery of a finite-diameter well after purging at an unknown rate – A substitute for slug-testing // Ground Water. 1994. V. 32 (1). P. 91–95. doi: 10.1111/j.1745-6584.1994.tb00615.x
9. Зотов Г.А., Тверковкин С.М. Газогидродинамические методы исследований газовых скважин. М. : Недра, 1970. 192 с.
10. Bouwer H., Rice R.C. A slug test for determining hydraulic conductivity of unconfined aquifers with completely or partially penetrating wells // Water Resources Research. 1976. V. 12 (3). P. 423–428. doi: 10.1029/WR012i003p00423
11. Эрлагер Р. Испытание скважин: достижения. М.–Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2004. 469 с.
12. Brons F., Miller W.C. A simple method for correcting spot pressure readings // Journal of Petroleum Technology. 1961. V. 13 (8). P. 803–805. doi: 10.2118/1610-G-PA
13. Ramey H.J. Jr., Agarwal R.G., Martin I. Analysis of slug test or DTS flow period data // Journal of Canadian Petroleum Technology. 1975. V. 12 (5). P. 37–42. doi: 10.2118/75-03-04
14. Морозов П.Е. Оценка анизотропии проницаемости и скин-эффекта по данным экспресс-откачек из несовершенных скважин // Водные ресурсы. 2020. Т. 47, № 3. С. 272–280. doi: 10.31857/S032105962003013X.
15. Peres A.M., Nur M., Reynolds A.C. A new analysis procedure for determining aquifer properties from slug test data // Water Resources Research. 1989. V. 25 (7). pp. 1591–1602. doi: 10.1029/WR025i007p01591
16. Морозов П.Е., Садовников Р.В., Хайруллин М.Х., Шамсиев М.Н. Оценивание фильтрационных параметров пласта по данным нестационарного притока жидкости к вертикальным скважинам // Инженерно-физический журнал. 2003. Т. 76, № 6. С. 142–145.
17. Шамсиев М.Н., Бадертдинова Е.Р. Оценка фильтрационных и теплофизических параметров нефтяного пласта по результатам измерений температуры на забое скважины // Измерительная техника. 2012. № 3. С. 45–47.
18. Шамсиев М.Н. Интерпретация результатов термогазодинамических исследований вертикальных газовых скважин, несовершенных по степени вскрытия пласта // Георесурсы. 2018. Т. 20, № 1. С. 39–43. doi: 10.18599/grs.2018.1.39-43

References

1. Muskat M. (1937) Use of data on the build-up bottom-hole pressures. *Transactions of the AIME*. 123. pp. 44–48.
2. Kotyakhov F.I., Murav'ev I.M. (1956) Analiz gidrodinamicheskogo issledovaniya skvazhin metodom proslezhivaniya urovnya [Pressure-transient analysis of wells by a level tracking method]. *Geologiya, razvedka, dobycha i pererabotka nefiti i gaza*. 3. Moscow: Gostoptekhizdat. pp. 148–162.
3. Dneprovskaya N.I., Kubagushev N.G. (1969) Issledovanie skvazhin metodom proslezhivaniya urovnya [Study of wells by a level tracking method]. *Issledovaniya v oblasti razrabotki nefityanykh mestorozhdeniy. Tematicheskii sbornik VNIIneft*. 3. pp. 91–103.
4. Vol'pin S.G., Lomakina O.V. (1988) Metod opredeleniya parametrov nizkopronitsaemogo plasta [Method for determining the parameters of a low-permeability formation]. *Neftyanoe khozyaystvo – Oil Industry Journal*. 5. pp. 27–30.

5. Kamenetskiy S.G. (1959) Dve zadachi teorii fil'tratsii uprugoy zhidkosti v uprugoy poristoy srede [Two problems in the theory of filtration of an elastic fluid in an elastic porous medium]. *Trudy VNIИ. Razrabotka neftyanykh mestorozhdeniy i podzemnaya gidrodinamika*. Moscow: Gostoptekhizdat. 19. pp. 134–145.
6. Cooper H.H., Bredehoeft J.D., Papadopoulos I.S. (1967) Response of a finite-diameter well to an instantaneous charge of water. *Water Resources Research*. 3(1). pp. 263–269. doi: 10.1029/WR003i001p00263
7. Bredehoeft J.D., Papadopoulos I.S. (1980) A method for determining the hydraulic properties of tight formations. *Water Resources Research*. 16(1). pp. 233–238. doi: 10.1029/WR016i001p00233
8. Picking L.W. (1994) Analyzing the recovery of a finite-diameter well after purging at an unknown rate – A substitute for slug-testing. *Ground Water*. 32(1). pp. 91–95. doi: 10.1111/j.1745-6584.1994.tb00615.x
9. Zotov G.A., Tverkovkin S.M. (1970) *Gazogidrodinamicheskie metody issledovaniy gazovykh skvazhin* [Gas-hydrodynamic methods of testing gas wells]. Moscow: Nedra.
10. Bouwer H., Rice R.C. (1976) A slug test for determining hydraulic conductivity of unconfined aquifers with completely or partially penetrating wells. *Water Resources Research*. 12(3). pp. 423–428. doi: 10.1029/WR012i003p00423
11. Earlougher R.C.Jr. (1977) *Advances in Well Test Analysis*. United States: Society of Petroleum Engineers of the AIME (Tx).
12. Brons F., Miller W.C. (1961) A simple method for correcting spot pressure readings. *Journal of Petroleum Technology*. 13(8). pp. 803–805. doi: 10.2118/1610-G-PA
13. Ramey H.J.Jr., Agarwal R.G., Martin I. (1975) Analysis of slug test or DTS flow period data. *Journal of Canadian Petroleum Technology*. 12(5). pp. 37–42. doi: 10.2118/75-03-04
14. Morozov P.E. (2020) Assessing the hydraulic conductivity anisotropy and skin-effect based on data of slug tests in partially penetrating wells. *Water Resources*. 47(3). pp. 430–437. doi: 10.1134/S0097807820030124
15. Peres A.M., Nur M., Reynolds A.C. (1989) A new analysis procedure for determining aquifer properties from slug test data. *Water Resources Research*. 25(7). pp. 1591–1602. doi: 10.1029/WR025i007p01591
16. Morozov P.E., Sadovnikov R.V., Khayrullin M.Kh., Shamsiev M.N. (2003) Estimation of the filtration parameters of a bed by the data of nonstationary inflow of liquid to vertical wells. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 76(6). pp. 1364–1368. doi: 10.1023/B:JOEP.0000012042.19166.20
17. Shamsiev M.N., Badertdinova E.R. (2012) Thermal measurements an estimate of the seepage and thermal parameters of an oil stratum from the results of temperature measurements at the face of an oil well thermal measurements. *Measurement Technique*. 55(3). pp. 304–308. doi: 10.1007/s11018-012-9955-5
18. Shamsiev M.N. (2018) Interpretatsiya rezul'tatov termogazodinamicheskikh issledovaniy vertical'nykh gazovykh skvazhin, nesovershennykh po stepeni vskrytiya plasta [The results interpretation of thermogasdynamic studies of vertical gas wells incomplete in terms of the reservoir penetration degree]. *Georesursy – Georesources Journal*. 20(1). pp. 39–43. doi: 10.18599/grs.2018.1.39-43

Сведения об авторах:

Гадильшина Венера Расиховна – кандидат технических наук, научный сотрудник лаборатории подземной гидродинамики Института механики и машиностроения – обособленного структурного подразделения Федерального исследовательского центра «Казанский научный центр Российской академии наук», Казань, Россия. E-mail: venera_gadilshina@mail.ru
Морозов Петр Евгеньевич – кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории подземной гидродинамики Института механики и машиностроения – обособленного структурного подразделения Федерального исследовательского центра «Казанский научный центр Российской академии наук», Казань, Россия. E-mail: morozov@imm.knc.ru

Шамсиев Марат Назмиевич – доктор технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории подземной гидродинамики Института механики и машиностроения – обособленного структурного подразделения Федерального исследовательского центра «Казанский научный центр Российской академии наук», Казань, Россия. E-mail: mshamsiev@imm.knc.ru

Хайруллин Мухамед Хильмиевич – доктор технических наук, главный научный сотрудник лаборатории подземной гидродинамики Института механики и машиностроения – обособленного структурного подразделения Федерального исследовательского центра «Казанский научный центр Российской академии наук», Казань, Россия. E-mail: khairullin@imm.knc.ru

Information about the authors:

Gadil'shina Venera R. (Candidate of Technical Sciences, Institute of Mechanics and Engineering, Subdivision of the Federal State Budgetary Institution of Science “Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences”, Kazan, Russian Federation). E-mail: venera_gadilshina@mail.ru

Morozov Piotr E. (Candidate of Technical Sciences, Institute of Mechanics and Engineering, Subdivision of the Federal State Budgetary Institution of Science “Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences”, Kazan, Russian Federation). E-mail: morozov@imm.knc.ru

Shamsiev Marat N. (Doctor of Technical Sciences, Institute of Mechanics and Engineering, Subdivision of the Federal State Budgetary Institution of Science “Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences”, Kazan, Russian Federation). E-mail: mshamsiev@imm.knc.ru

Khayrullin Mukhamed Kh. (Doctor of Technical Sciences, Institute of Mechanics and Engineering, Subdivision of the Federal State Budgetary Institution of Science “Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences”, Kazan, Russian Federation). E-mail: khairullin@imm.knc.ru

Статья поступила в редакцию 11.07.2022; принята к публикации 10.10.2023

The article was submitted 11.07.2022; accepted for publication 10.10.2023

Научная статья

УДК 521.1, 521.182

doi: 10.17223/19988621/85/8

Влияние светового давления и эффекта Ярковского на резонансное поведение астероидов с малыми перигелийными расстояниями

Татьяна Юрьевна Галушина¹, Оксана Никитична Летнер²,
Ольга Михайловна Сюсина³

^{1, 2, 3} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ tatyana.galushina@mail.tsu.ru

² oksana.letner@gmail.com

³ olga_syusina@rambler.ru

Аннотация. На примере трех объектов с малыми перигелийными расстояниями (3200 Phaethon, 394130 2006 HY51, 137924 2000 BD19) проведено исследование влияния эффекта Ярковского и светового давления на орбитальную эволюцию астероидов. Показано, что данные возмущающие ускорения оказывают незначительное влияние на поведение большой полуоси и характеристик орбитальных резонансов, приводя к изменению расстояния до планет и количества сближений астероидов с ними. Возмущения не влияют на интервал предсказуемости движения и поведение характеристик апсидально-нодальных резонансов.

Ключевые слова: астероиды с малыми перигелийными расстояниями, орбитальный резонанс, апсидально-нодальный резонанс, орбитальная эволюция

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-72-10022, <https://rscf.ru/en/project/19-72-10022/>

Для цитирования: Галушина Т.Ю., Летнер О.Н., Сюсина О.М. Влияние светового давления и эффекта Ярковского на резонансное поведение астероидов с малыми перигелийными расстояниями // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 85. С. 101–116. doi: 10.17223/19988621/85/8

Original article

Influence of the solar radiation pressure and the Yarkovsky effect on the resonant behavior of asteroids with small perihelion distances

Tat'yana Yu. Galushina¹, Oksana N. Letner², Ol'ga M. Syusina³

^{1, 2, 3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ tatyana.galushina@mail.tsu.ru

² oksana.letner@gmail.com

³ olga_syusina@rambler.ru

Abstract. In this paper, the impact of the Yarkovsky effect and solar radiation pressure on the resonant behavior of three asteroids with small perihelion distances (3200 Phaethon, 394130 2006 HY51, and 137924 2000 BD19) is studied. The corresponding physical parameters are determined to estimate the effect of the solar radiation pressure. The Yarkovsky effect and the solar radiation pressure effect are estimated by comparing the results of the orbital evolution of the asteroids with the main force model and the included estimated perturbation. The application of different force models shows that accounting for the Yarkovsky effect and solar radiation pressure has a slight impact on the evolution of the orbital elements of the asteroids while changing the semimajor axis behavior at the ends of the study interval. This impact changes the approaches of the asteroids to planets. It is revealed that the impact of the Yarkovsky effect is stronger than that of the solar radiation pressure. The evolution of the OMEGNO chaoticity parameter shows that the perturbations do not affect the predictability of the motion interval, but in some cases lead to deceleration or acceleration in growth of the parameter. The studied perturbations have no significant effect on the secular (apsidal-nodal) resonance characteristics due to a weak impact on the evolution of the orbital elements underlying their calculations.

Keywords: asteroids with small perihelion distances, mean-motion resonance, apsidal-nodal resonance, orbital evolution

Acknowledgments: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 19-72-10022), <https://rscf.ru/en/project/19-72-10022/>

For citation: Galushina, T.Yu., Letner, O.N., Syusina, O.M. (2023) Influence of the solar radiation pressure and the Yarkovsky effect on the resonant behavior of asteroids with small perihelion distances. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 101–116. doi: 10.17223/19988621/85/8

Введение

Резонансное взаимодействие астероидов с большими планетами считается одной из наиболее важных особенностей их динамики. В движении астероидов обычно рассматривают орбитальные, так называемые резонансы средних движений, и вековые резонансы. Орбитальный резонанс представляет собой соизмеримость средних движений астероида и планеты, которая является прямым следствием возникновения соизмеримости орбитальных периодов, а устойчивость формирующейся при этом геометрической конфигурации «астероид–планета» характеризует свойства резонанса. При устойчивой геометрической конфигурации астероид избегает сближений с планетой, и резонанс служит защитным механизмом от встречи с ней [1–3]. Проявление неустойчивости геометрической конфигурации повышает риск сближений астероида с соответствующей планетой, что способно значительным образом изменить элементы орбиты объекта и привести к сближениям с другими планетами, в том числе с Землей. Вековой резонанс возникает при соизмеримости скоростей прецессий орбит астероида и планеты, а устойчивость геометрической конфигурации характеризуется взаимным расположением орбит взаимодействующих тел. Важно отметить, что наложение

двух неустойчивых резонансов, будь то орбитальные или вековые, может привести к хаотичности в движении объектов.

В работе рассматриваются результаты исследования орбитальной эволюции некоторых астероидов, имеющих малые перигелийные расстояния ($q \leq 0.15$ а.е.) и движущихся в окрестностях орбитальных и вековых резонансов с большими планетами. Исследование резонансных взаимодействий этих астероидов (орбитальных и вековых) с планетами – важная составляющая этапа построения их эволюции, так как в силу вытянутой формы своих орбит они потенциально способны взаимодействовать с большинством внутренних планет Солнечной системы [4–6]. Необходимо отметить, что на динамику астероидов с малыми перигелийными расстояниями при прохождении вблизи Солнца могут оказывать существенное влияние негравитационные возмущающие факторы, такие как эффект Ярковского (ЭЯ) [7, 8] и световое давление (СД). Неучет этих возмущений в модели сил в ряде случаев может привести к недостоверному прогнозу движения, в том числе к ошибочным оценкам вероятности столкновения. Поэтому в работе рассматривается динамика астероидов с учетом этих факторов и оценивается их влияние на эволюцию элементов орбит и характеристик выявленных резонансов. Данная работа является продолжением наших предыдущих исследований [9] и преследует цель получить ответ на вопрос, как влияют световое давление и эффект Ярковского на орбитальные и вековые резонансы: способствуют сохранению резонансных соотношений или же их разрушению.

Методика исследования

Ранее нами было проведено исследование влияния эффекта Ярковского на резонансные соотношения ряда астероидов с малыми перигелийными расстояниями [9] путем численного интегрирования уравнений их движения методом Гаусса–Эверхарта [10, 11] с использованием программного комплекса ИДА [12]. Для исследования резонансного поведения, в частности для оценки влияния на него слабых возмущающих воздействий, очень важна длительность интервала прогноза. Особенно большое значение данный фактор имеет при изучении вековых резонансов, поскольку они характеризуются длительными периодами либрации. Интервал исследования в работе [9] для большинства изучаемых объектов не превышал 10 тысяч лет. Для его увеличения необходимо повышение точности интегрирования, одним из возможных путей достижения которого является переход на более эффективный интегратор. Нами было принято решение применить недавно разработанный коллокационный интегратор Lobbie, основанный на разбиении Лобатто [13].

На рис. 1 представлены диаграммы «точность–быстродействие» для астероидов 394130 2006 NY51 (а) и 137924 2000 BD19 (б), полученные с использованием интегратора Гаусса–Эверхарта (сплошная линия) и Lobbie (пунктирная линия). Рассматривались интервалы времени (2011, –4200) и (2010, –6500) соответственно. Порядок метода во всех случаях составил 18, число итераций на шаге 2. Точность оценивалась путем сравнения с решением, полученным с меньшим значением параметра внутренней точности. В качестве меры быстродействия использовалось число перевычислений функций правых частей.

Из представленных на рис. 1 результатов видно, что даже при таком небольшом порядке заметен выигрыш в эффективности нового интегратора Lobbie. Его

использование позволило увеличить интервал интегрирования и исследовать резонансное поведение рассматриваемых объектов более детально.

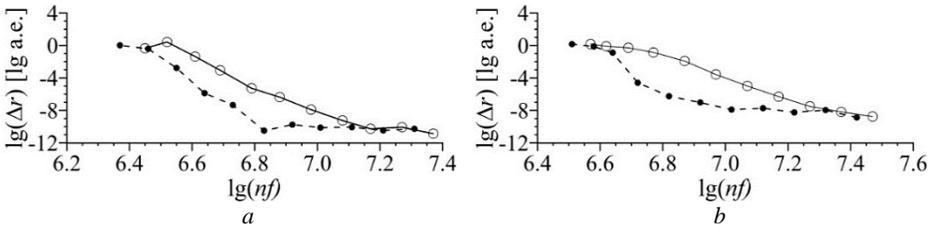


Рис. 1. Диаграммы «точность–быстродействие» для астероидов 394130 2006 HY51 (а) и 137924 2000 BD19 (б) с использованием интегратора Гаусса–Эверхарта (сплошная линия) и Lobbie (пунктирная линия)

Fig. 1. Precision-speed diagrams for (a) 394130 2006 HY51 and (b) 137924 2000 BD19 asteroids using the Gauss-Everhart (the solid line) and Lobbie (the dashed line) methods

На первом этапе в процессе улучшения орбит астероидов формировались начальные данные для каждого состава возмущающих факторов. Основная модель сил включала в себя возмущения от всех больших планет, Плутона, Луны, релятивистских эффектов от Солнца и сжатия Солнца. Путем включения возмущения от эффекта Ярковского или от светового давления в процессе построения эволюции оценивалось влияние одного из факторов. Орбитальная эволюция исследуемых объектов строилась путем численного интегрирования уравнений их движения. Интервал времени подбирался индивидуально по результатам оценки точности интегрирования, которая не должна была превышать 10^{-9} а.е. в координатах. В процессе исследования орбитальной эволюции астероидов выявлены сближения с большими планетами и получены оценки времени предсказуемости их движения с помощью параметра хаотичности OMEGNO (Orthogonal Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbit) [14]. Помимо характеристик орбитального резонанса построена и проанализирована эволюция характеристик вековых резонансов с большими планетами.

Возникновение соизмеримости средних движений (орбитальный резонанс) оценивалось путем анализа поведения двух характеристик: резонансного (критического) аргумента β

$$\beta = k\lambda - k'\lambda' - (k - k')\omega - (k - k')\Omega \quad (1)$$

и так называемой резонансной щели α [15], представляющей собой первую производную по времени от β :

$$\alpha \approx kn - k'n'. \quad (2)$$

В формулах (1) и (2) используются следующие обозначения: ω , Ω – аргумент перигелия и долгота восходящего узла орбиты астероида; n , n' – средние движения астероида и планеты; λ , λ' – средние долготы астероида и планеты соответственно; k , k' – целые числа.

По поведению резонансных характеристик оценивался тип существующего резонанса (устойчивый или неустойчивый) или его отсутствие. Если критический аргумент колеблется около определенного центра с амплитудой строго меньше 360° (либрирует), а резонансная щель колеблется около нуля с небольшой ампли-

тудой, то резонанс определяется как устойчивый. Если же резонансный аргумент изменяется от 0 до 360° , то его поведение интерпретируется как циркуляция, а резонанс вовсе отсутствует. При смене либрации аргумента на циркуляцию и наоборот резонанс определяется как неустойчивый. Подробный алгоритм вычисления характеристик орбитального резонанса описан в работах [1, 2].

Поиск вековых (апсидально-нодальных) резонансов осуществлялся путем оценки поведения 20 резонансных соотношений $\dot{\Psi}$ и соответствующих им аргументов Ψ . Рассмотрение апсидально-нодальных соотношений ограничивалось нами до шестого порядка включительно, подробное описание и математическое представление характеристик можно найти в работе [12]. Поведение резонансных характеристик оценивалось по аналогии с орбитальным резонансом.

Оценка влияния эффекта Ярковского и светового давления на резонансную динамику астероидов осуществлялась путем сравнения результатов эволюции резонансных характеристик при основной модели сил и с включением в нее соответствующего возмущения. Формирование начальных данных проводилось путем улучшения орбит астероидов методом наименьших квадратов при той же модели сил, что и расчет эволюции. Для учета эффекта Ярковского и светового давления использовались значения параметров из табл. 1, которая подробно описана ниже.

Исследование хаотичности с помощью параметра OMEGNO (\bar{Y}_\perp) позволяет различить хаотические и регулярные орбиты и выявить среди регулярных траекторий периодические. Анализ поведения параметра OMEGNO со временем сводится к исследованию его значений относительно двух опорных точек: $\bar{Y}_\perp = 2$ и $\bar{Y}_\perp = 0$. Для квазипериодических (регулярных) орбит $\bar{Y}_\perp \rightarrow 2$, причем если $0 < \bar{Y}_\perp \leq 2$, кривая подходит к опорному значению снизу, то траектория близка к устойчивой периодической орбите, а если сверху, то траектория близка к неустойчивой периодической орбите. Если $\bar{Y}_\perp > 2$ и растет в среднем линейно, движение считается хаотическим. Для периодической орбиты, описываемой уравнениями гармонического осциллятора, а также для любой периодической орбиты, отличной от гармонического осциллятора, $\bar{Y}_\perp = 0$ [14].

Объекты исследования

С использованием интегратора Lobbie исследована орбитальная эволюция всех астероидов с малыми перигелийными расстояниями (60 объектов, известных на апрель 2023 г.) на расширенном интервале времени (0, 4 000) лет и обновлен перечень астероидов, движущихся в окрестности орбитальных резонансов с большими планетами [9]. Среди 60 исследуемых астероидов 33 движутся в окрестности орбитальных резонансов с одной или несколькими планетами одновременно. Всего было выявлено 50 соизмеримостей, 16 из которых являются устойчивыми. Как и в предыдущем исследовании [9], устойчивый резонанс 3/1 с Юпитером всегда сопровождается неустойчивым резонансом 1/4 с Землей.

Учет в модели сил негравитационных возмущений часто вызывает затруднения; в частности, для определения влияния светового давления и эффекта Ярковского необходимо знание физических параметров астероидов, которые неизвест-

ны для большинства из них. Одним из немногих исключений является астероид 3200 Phaethon [16, 17].

Для учета эффекта Ярковского нами используется значение трансверсального ускорения A_2 , которое определяется в процессе улучшения орбит астероидов. Подробнее алгоритм определения параметра A_2 можно найти в работе [9]. Вычисление светового давления требует знания диаметра D , массы m и альbedo A . Для получения адекватной оценки влияния этих двух факторов на орбитальную эволюцию астероидов необходимо исследовать динамику объектов с разными моделями сил: основной моделью, без включения этих двух возмущений и с включением отдельно каждого из них. Из рассматриваемых астероидов, движущихся в окрестности орбитальных резонансов, только для трех (3200 Phaethon, 394130 2006 HY51, 137924 2000 BD19) определены физические параметры для вычисления силы влияния светового давления, поэтому наше исследование ограничивается ими. В табл. 1 приведены значения абсолютной звездной величины H , физических параметров A , D , m , коэффициента A_2 и ошибки его определения δA_2 . Значения A_2 и δA_2 , представленные в таблице, были взяты из работы [9], диаметр D и альbedo A – с сайта NASA (https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_lookup.html#/), массы m – с сайта <http://smallbodies.ru/ru/>.

Таблица 1

Физические параметры и значения коэффициента эффекта Ярковского A_2 для некоторых астероидов с малыми перигелийными расстояниями

Астероиды	H	A	D , км	m , кг	A_2 , а.е./сут ²	δA_2 , а.е./сут ²
3200 Phaethon	14.3	0.107	6.25	$1.40 \cdot 10^{14}$	$-5.4 \cdot 10^{-15}$	$2.5 \cdot 10^{-15}$
137924 2000 BD19	17.2	0.247	0.97	$1.64 \cdot 10^{12}$	$4.9 \cdot 10^{-14}$	$9.7 \cdot 10^{-15}$
394130 2006 HY51	17.1	0.157	1.22	$1.94 \cdot 10^{12}$	$3.9 \cdot 10^{-14}$	$9.8 \cdot 10^{-14}$

Из табл. 1 видно, что исследуемые астероиды являются нумерованными и их орбиты достаточно хорошо определены. Для двух из них ошибки определения коэффициента Ярковского имеют тот же порядок, что и само значение, для астероида 137924 2000 BD19 δA_2 на половину порядка меньше самого A_2 . Среди рассматриваемых астероидов самым массивным является 3200 Phaethon, – его диаметр примерно в 6 раз превышает таковой для других астероидов.

Исследование динамики некоторых астероидов с малыми перигелийными расстояниями

Построение орбитальной эволюции астероидов, как уже отмечалось в разделе, посвященном описанию методики, включает в себя два основных этапа: получение номинальной орбиты в процессе улучшения и ее последующее численное отображение во времени. Улучшение орбит астероидов выполнялось нами методом наименьших квадратов (МНК) по наблюдениям, взятым с сайта центра малых планет (The Minor Planet Center of the International Astronomical Union, <https://minorplanetcenter.net/>). В табл. 2 представлены результаты улучшения орбит для астероидов из табл. 1 с тремя наборами возмущений: 1 – основная модель, 2 – с включением в основную модель возмущения от светового давления и 3 – с включением параметра A_2 как фактора, отвечающего за влияние эффекта

Ярковского. Приведены следующие параметры: число наблюдений N и интервал наблюдений Δt в сутках, начальная эпоха t_0 , среднеквадратическая ошибка представления наблюдений σ , среднеквадратическая ошибка НК-оценок векторов положения $\sigma(\mathbf{x}_0)$ и скорости $\sigma(\mathbf{v}_0)$.

Таблица 2

Данные о наблюдениях и результатах улучшения орбит некоторых астероидов с малыми перигелийными расстояниями

Астероид	N	Δt , сут.	t_0	Модель	σ , "	$\sigma(\mathbf{x}_0)$, а.е.	$\sigma(\mathbf{v}_0)$, а.е/сут
3200 Phaethon	6833	14 376	07.07.2013	1	0.445571	$2.534 \cdot 10^{-8}$	$3.247 \cdot 10^{-10}$
				2	0.445572	$2.534 \cdot 10^{-8}$	$3.247 \cdot 10^{-10}$
				3	0.446025	$2.535 \cdot 10^{-8}$	$3.249 \cdot 10^{-10}$
137924 2000 BD19	769	7 748	10.12.2010	1	0.552563	$9.457 \cdot 10^{-8}$	$1.767 \cdot 10^{-9}$
				2	0.552564	$9.457 \cdot 10^{-8}$	$1.767 \cdot 10^{-9}$
				3	0.542384	$9.418 \cdot 10^{-8}$	$1.760 \cdot 10^{-9}$
394130 2006 NY51	300	4 784	28.06.2011	1	0.403594	$6.026 \cdot 10^{-7}$	$6.678 \cdot 10^{-10}$
				2	0.403595	$6.026 \cdot 10^{-7}$	$6.678 \cdot 10^{-10}$
				3	0.403419	$6.024 \cdot 10^{-7}$	$6.675 \cdot 10^{-10}$

Из табл. 2 видно, что орбиты астероидов хорошо определены, они наблюдались на большой временной дуге, а среднеквадратические ошибки $\sigma(\mathbf{x}_0)$ не превышают $1 \cdot 10^{-6}$ а.е. Результаты улучшения орбит исследуемых объектов демонстрируют слабое влияние светового давления и эффекта Ярковского на процесс улучшения и формирование начальных данных, но следует отметить, что учет эффекта Ярковского в двух случаях (для астероидов 2006 NY51, 2000 BD19) приводит к уменьшению среднеквадратической ошибки представления наблюдений и размера начальной области. Для 3200 Phaethon учет негравитационных возмущений в процессе улучшения приводит к незначительному увеличению ошибок σ и начальной доверительной области. Описываемые изменения параметров улучшения наиболее заметны с моделью сил 3.

По результатам улучшения орбит исследуемых астероидов для каждого из них была сформирована номинальная орбита в виде двух векторов (положения и скорости) с тремя моделями сил: основной моделью, описанной в методике, и с добавлением в эту модель по отдельности возмущения от эффекта Ярковского или от светового давления. Путем сравнения результатов построения орбитальной эволюции номинальных частиц с основной моделью и с включенным возмущением оценивалось влияние описанных малых возмущений на движение астероидов.

Исследование орбитальной эволюции показало, что 137924 2000 BD19 и 3200 Phaethon движутся в окрестности орбитальных резонансов с Венерой с разной соизмеримостью средних движений астероида и планеты [9]. 137924 2000 BD19 практически на всем интервале исследования, (-7000, 5500) лет, находится в устойчивом резонансе 3/4 с Венерой, 3200 Phaethon движется в окрестности резонанса 3/7 с планетой, но испытывает всего несколько прохождений через значение точной соизмеримости даже на расширенном интервале времени (-4000, 16000) лет. Большую часть времени резонансная щель для Phaethon колеблется по одну сторону от точной соизмеримости, а критический аргумент циркулирует. Без учета эффекта Ярковского астероид движется в устойчивом резонансе на интервале

(–4000, –1500) лет, однако учет этого возмущающего фактора приводит к разрушению резонанса. Астероид 394130 2006 HY51 движется в окрестности резонансной области 7/1 с Сатурном, но, скорее всего, не захвачен в резонанс. Резонансная щель на интервале исследования принимает значения, не превышающие 20"/сут., периодически проходя через точную соизмеримость, но центр ее либрации смещен относительно нулевого значения. Критический аргумент в данном случае демонстрирует так называемую медленную циркуляцию.

Необходимо отметить, что ранее нами были исследованы вероятностные области движения астероидов 137924 2000 BD19 и 3200 Phaethon и получены оценки влияния эффекта Ярковского на поведение вероятностных областей. Подробно результаты исследования можно найти в работах [18, 19]. В текущем исследовании увеличен интервал интегрирования за счет использования интегратора Lobie, что позволило более детально оценить влияние светового давления и эффекта Ярковского на поведение резонансных характеристик.

Исследование влияния светового давления и эффекта Ярковского на динамику астероидов показало, что учет рассматриваемых негравитационных возмущающих факторов практически не оказывает влияния на эволюцию орбитальных элементов, лишь незначительно изменяя поведение большой полуоси на концах интервала интегрирования. Вследствие такого влияния возмущений изменяются количество сближений астероидов с большими планетами и расстояние до планет. Так как поведение резонансной щели напрямую зависит от большой полуоси, изменения коснулись и характеристик орбитального резонанса. Причем следует заметить, что световое давление меньше влияет на движение изучаемых астероидов, чем эффект Ярковского. Что касается влияния эффекта Ярковского и светового давления на характеристики апсидально-нодальных резонансов, важно, что в основе их вычисления лежат элементы, отвечающие за пространственное расположение орбит астероидов (долгота восходящего узла Ω и аргумент перицентра ω). Так как эффект Ярковского и световое давление не оказывают существенного влияния на эволюцию аргумента перицентра и долготы восходящего узла, изменений в поведении вековых резонансных характеристик с разными моделями сил также не было выявлено.

В качестве примера приведем результаты построения орбитальной эволюции астероидов 137924 2000 BD19 и 394130 2006 HY51. На рис. 2, 3 для 2000 BD19 представлены графики эволюции характеристик орбитального резонанса 3/4 с Венерой α (рис. 2, a_1, a_2, a_3) и β (рис. 2, b_1, b_2, b_3), сближения с Землей (рис. 3, a_1, a_2, a_3) и эволюция параметра \bar{Y}_\perp (рис. 3, b_1, b_2, b_3). Нумерация графиков соответствует использованию одной из моделей сил при исследовании: 1 – основная модель; 2 – основная модель с включенным возмущением от СД; 3 – основная модель с включенным возмущением от ЭЯ.

Из рис. 2 видно, что световое давление меньше влияет на эволюцию резонансных характеристик, чем эффект Ярковского. С учетом ЭЯ изменение большой полуоси приводит к изменению поведения резонансных характеристик α и β : при интегрировании в прошлое уменьшается амплитуда колебаний α и β , а при интегрировании в будущее в конце интервала либрация аргумента переходит в циркуляцию, а α начинает колебаться по одну сторону от точной соизмеримости. Без учета эффекта Ярковского переход к циркуляции вызывает сомнение и, скорее, характеризует неустойчивость резонанса на этом промежутке времени.

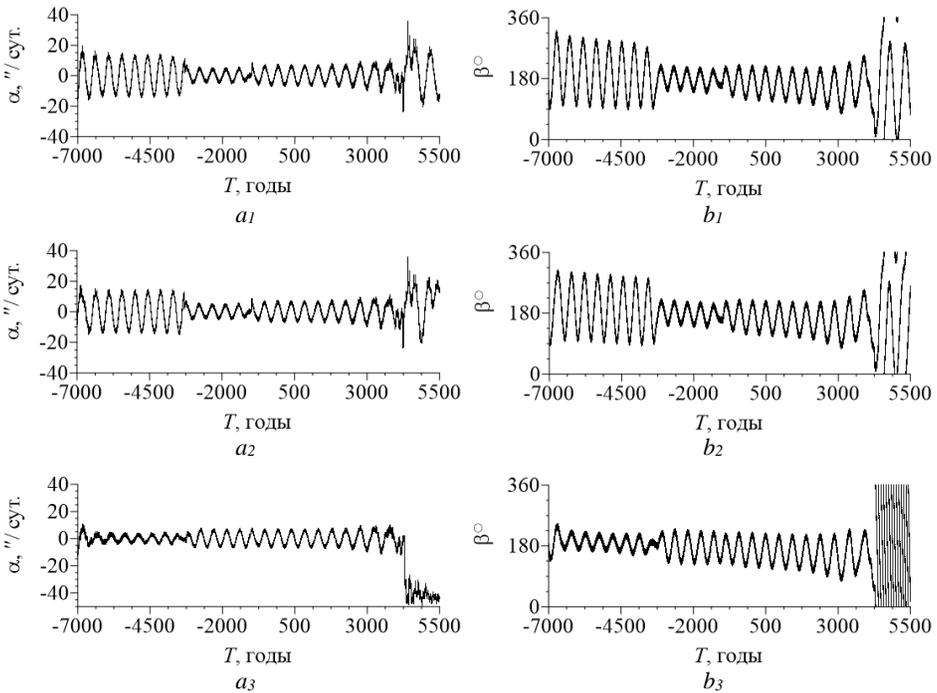


Рис. 2. Эволюция резонансной щели α (a_1, a_2, a_3) и критического аргумента β (b_1, b_2, b_3) для резонанса 3/4 астероида 137924 2000 BD19 с Венерой с основной моделью сил (1), с учетом светового давления (2) и с учетом эффекта Ярковского (3)

Fig. 2. Evolution of the resonant band α (a_1, a_2, a_3) and critical argument β (b_1, b_2, b_3) for the mean-motion resonance 3:4 of the asteroid 137924 2000 BD19 with Venus: (1) with the main force model, (2) with account for the solar radiation pressure, and (3) with account for the Yarkovsky effect

Астероид 137924 2000 BD19 на интервале исследования испытывает сближения лишь с Землей и Меркурием. Устойчивое резонансное взаимодействие с Венерой защищает объект от сближений с планетой. Что касается влияния СД и ЭЯ на сближения с другими планетами, на примере сближений астероида с Землей видно, что изменяется расстояние до планет на концах интервала интегрирования (рис. 3, a_1, a_2, a_3), что очевидно при изменениях поведения большой полуоси.

Оценки хаотичности орбиты астероида 137924 2000 BD19 с помощью параметра OMEGNO, полученные с разными моделями сил, показывают, что световое давление и эффект Ярковского не влияют на интервал предсказуемости движения астероида 137924 2000 BD19 (когда $\bar{Y}_\perp \leq 2$), для всех трех случаев он составляет примерно 5 400 лет. За пределами этого интервала параметр OMEGNO растет в среднем линейно, и у орбиты астероида проявляются признаки хаотичности. Но следует отметить, что учет эффекта Ярковского приводит к уменьшению значений параметра в период его линейного роста.

Результаты построения орбитальной эволюции астероида 394130 2006 HY51 приведены на рис. 4, 5. Астероид 394130 в отличие от 137924 испытывает сближения с пятью планетами – от Меркурия до Юпитера. Реже всего астероид сближает-

ся с Марсом, а сближения с Венерой имеют схожее поведение, что и сближения с Землей. Расположение графиков имеет тот же порядок, что и для астероида 137924 2000 BD19.

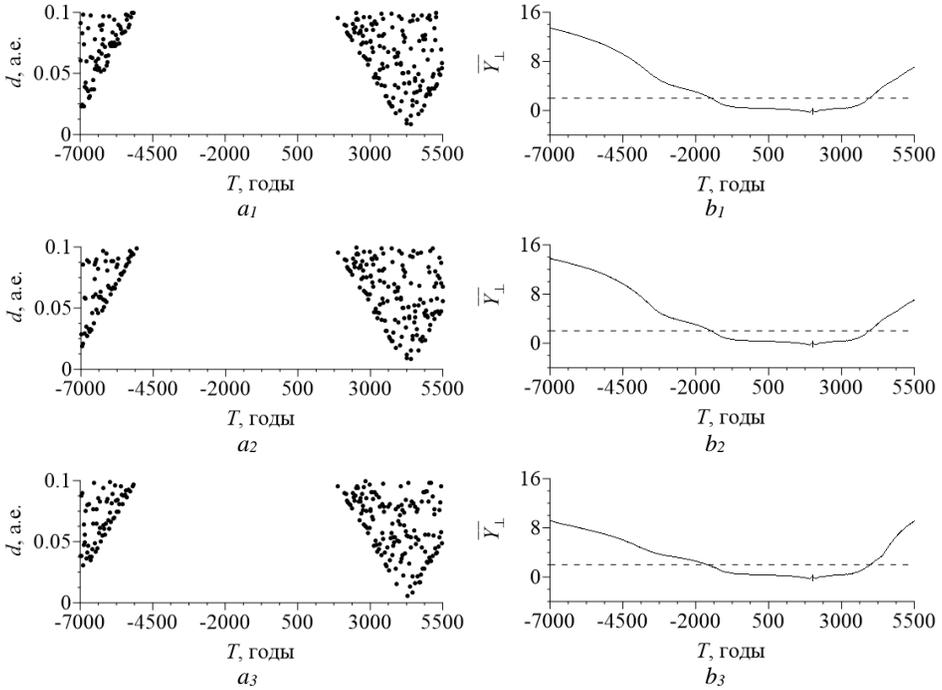


Рис. 3. Сближения астероида 137924 2000 BD19 с Землей (a_1, a_2, a_3) и эволюция параметра OMEGNO \bar{Y}_\perp (b_1, b_2, b_3) с основной моделью сил (1), с учетом светового давления (2) и с учетом эффекта Ярковского (3)

Fig. 3. Approach of the asteroid 137924 2000 BD19 to Earth (a_1, a_2, a_3) and the evolution of the OMEGNO parameter \bar{Y}_\perp (b_1, b_2, b_3): (1) with the main force model, (2) with account for the solar radiation pressure, and (3) with account for the Yarkovsky effect

Анализируя результаты построения орбитальной эволюции астероида 394130 2006 NY51 с тремя наборами возмущающих факторов, можно сделать вывод, что эффект Ярковского и световое давление практически не влияют на его динамику. Но если обратить внимание на поведение характеристик орбитального резонанса (см. рис. 4), то можно заметить, что с моделями сил 1 и 2 резонансная щель уходит дальше от точного резонанса в будущем и период циркуляции критического аргумента уменьшается. С учетом ЭЯ (модель сил 3) резонансная щель колеблется ближе к нулю, а период циркуляции β заметно медленнее уменьшается по сравнению с результатами при моделях сил 1 и 2. Кроме того, анализ сближений астероида с большими планетами показывает, что эффект Ярковского существенно меняет расстояние до планет (см. рис. 5). Астероид ближе подходит ко всем планетам, с которыми испытывает сближения на интервале исследования.

Эволюция параметра OMEGNO для 394130 2006 NY51 демонстрирует примерно одинаковое время предсказуемости движения астероида с разными моде-

лями сил, около 4200 лет (см. рис. 5, b_1 , b_2 , b_3). Так как с учетом эффекта Ярковского объект теснее сближается с планетами, что особенно очевидно при интегрировании в прошлое, параметр \bar{Y}_\perp растет быстрее и принимает большие значения по сравнению с моделями 1 и 2. При интегрировании в будущее с учетом ЭЯ \bar{Y}_\perp растет медленнее, чем с основной моделью сил и с учетом СД, тем не менее для всех трех случаев признаки хаотичности проявляются в обоих направлениях.

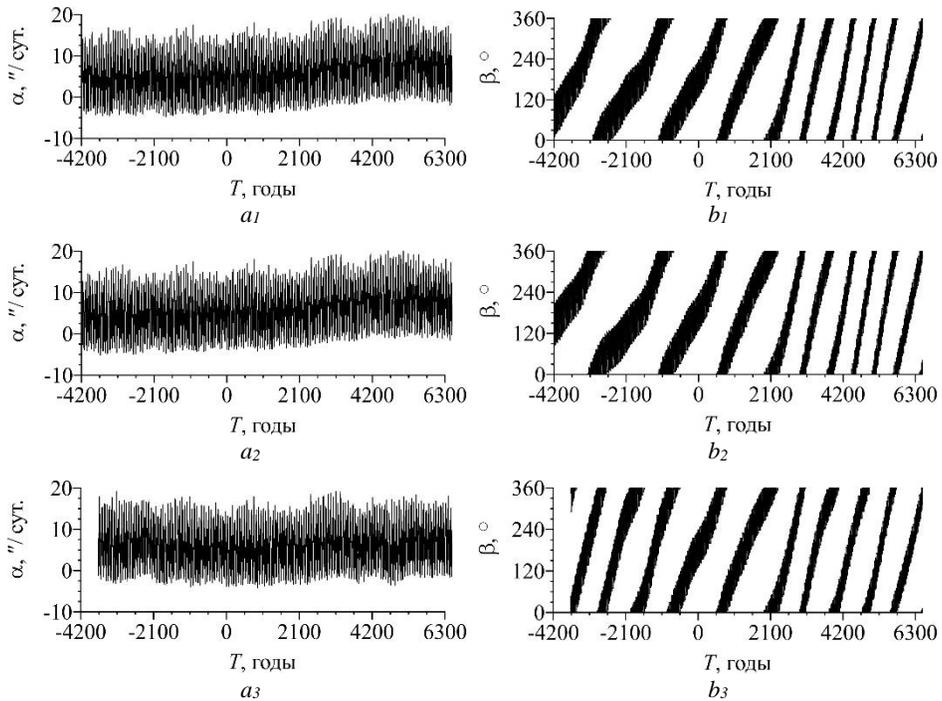


Рис. 4. Эволюция резонансной щели α (a_1 , a_2 , a_3) и критического аргумента β (b_1 , b_2 , b_3) для резонанса 7/1 астероида 394130 2006 NY51 с Сатурном с основной моделью сил (1), с учетом светового давления (2) и с учетом эффекта Ярковского (3)

Fig. 4. Evolution of the resonant band α (a_1 , a_2 , a_3) and critical argument β (b_1 , b_2 , b_3) for the mean-motion resonance 7:1 of the asteroid 394130 2006 NY51 with Saturn: (1) with the main force model, (2) with account for the solar radiation pressure, and (3) with account for the Yarkovsky effect

Эффект Ярковского и световое давление, как уже упоминалось выше, не оказывают существенного влияния на эволюцию характеристик апсидально-нодальных резонансов. Полученные результаты не вызывают сомнения, так как учет как ЭЯ, так и СД приводит в основном к изменению поведения большой полуоси a и мало влияет на долготу восходящего узла Ω и аргумент перигея ω . В данной работе демонстрируется поведение двух апсидально-нодальных резонансов для астероида 394130 2006 NY51, интервал исследования динамики которого оказался достаточным для классификации поведения критического аргумента Ψ на цирку-

ляцию и либрацию. На всем интервале интегрирования с основной моделью обнаружено 4 резонансных взаимодействия из 20 исследуемых со всеми большими планетами, остальные резонансы отсутствуют. В качестве примера на рис. 6 для астероида 2006 НУ51 приводится эволюция резонансных характеристик при взаимодействии с орбитой Сатурна.

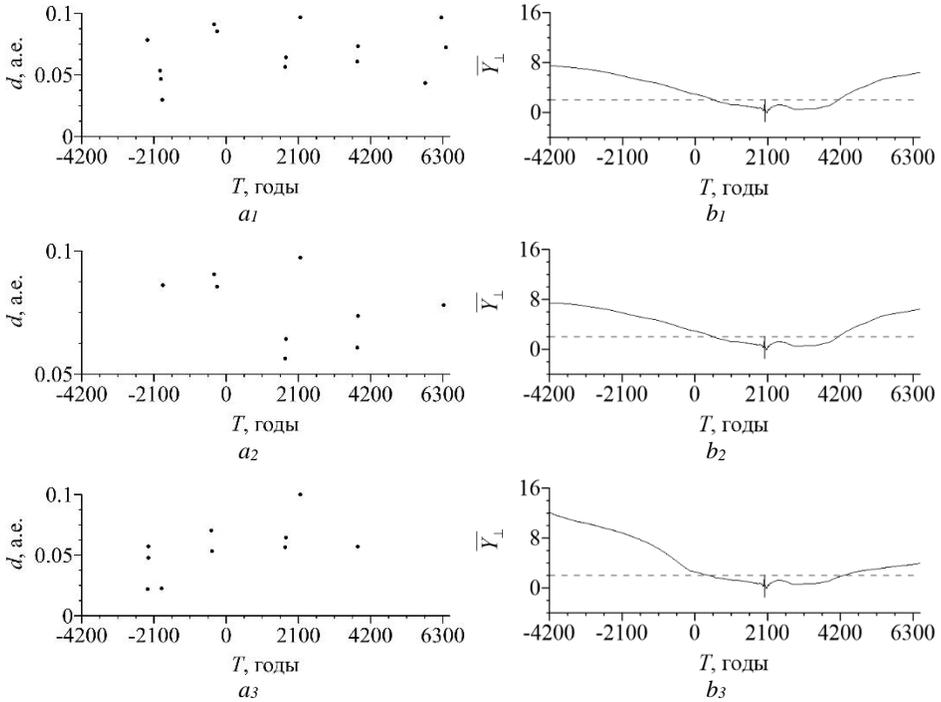


Рис. 5. Сближения астероида 394130 2006 НУ51 с Землей (a_1, a_2, a_3) и эволюция параметра OMEGNO \bar{Y}_\perp (b_1, b_2, b_3) с основной моделью сил (1), с учетом светового давления (2) и с учетом эффекта Ярковского (3)

Fig. 5. Approach of the asteroid 394130 2006 NY51 to Earth (a_1, a_2, a_3) and the evolution of the OMEGNO parameter \bar{Y}_\perp (b_1, b_2, b_3): (1) with the main force model, (2) with account for the solar radiation pressure, and (3) with account for the Yarkovsky effect

В качестве примера устойчивого резонанса на рис. 6 продемонстрирована эволюция соотношения $\dot{\Psi}_{11} = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_6) + \dot{\omega}$ (a_1) и соответствующего ему резонансного аргумента (b_1). Видно, что $\dot{\Psi}_{11}$ колеблется около нуля с небольшой амплитудой, а аргумент Ψ_{11} либрирует на рассматриваемом интервале времени. На графиках (a_2, b_2) представлена эволюция соотношения $\dot{\Psi}_2 = (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_6) - \dot{\omega} + \dot{\omega}'_6$ и резонансного аргумента, демонстрирующие пример отсутствия резонанса. В данном случае аргумент Ψ_2 циркулирует, а соотношение $\dot{\Psi}_2$ колеблется по одну сторону от точной соизмеримости с большой амплитудой. Здесь ω'_6, Ω'_6 – аргумент перигелия и долгота восходящего узла орбиты Сатурна.

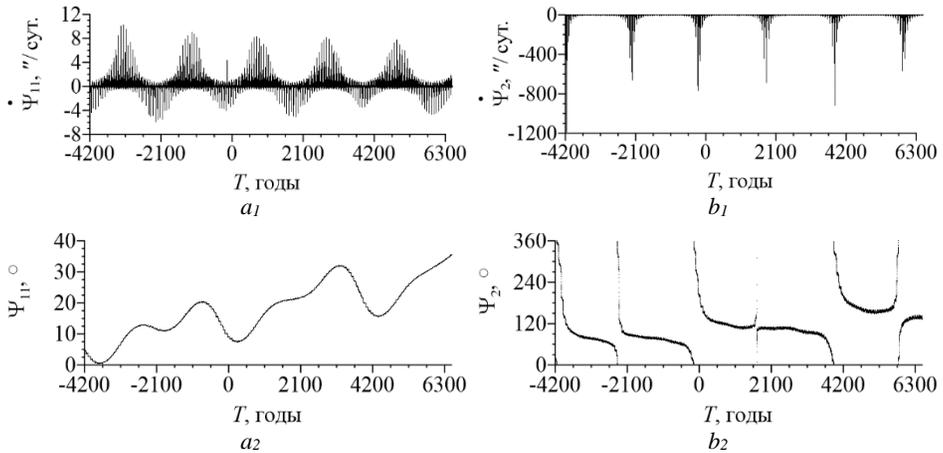


Рис. 6. Эволюция характеристик апсидально-нодальных резонансов $\dot{\Psi}_{11}$, Ψ_{11} (a_1 , b_1) и $\dot{\Psi}_2$, Ψ_2 (a_2 , b_2) при взаимодействии астероида 394130 2006 NY51 с Сатурном

Fig. 6. Evolution of characteristics of the apsidal-nodal resonances $\dot{\Psi}_{11}$, Ψ_{11} (a_1 , b_1) and $\dot{\Psi}_2$, Ψ_2 (a_2 , b_2) during the interaction of the asteroid 394130 2006 NY51 and Saturn

Заключение

Исследовано влияние светового давления и эффекта Ярковского на резонансное поведение астероидов с малыми перигелийными расстояниями. Среди 33 объектов этого класса, которые движутся в окрестности орбитальных резонансов с одной или несколькими планетами одновременно, под рассмотрение попали всего три астероида (3200 Phaethon, 394130 2006 NY51, 137924 2000 BD19), так как только для них известны физические параметры, позволяющие адекватно оценить влияние светового давления на их движение. Для этих астероидов была построена орбитальная эволюция с тремя моделями сил: основной моделью без включения негравитационных возмущений от ЭЯ и СД и с добавлением в основную модель одного из факторов. Путем сравнения результатов эволюции номинальных орбит астероидов с основной моделью и с включенным возмущением оценивалось влияние СД и ЭЯ на их динамику. Выявлены сближения астероидов с большими планетами и получены оценки времени предсказуемости их движения с помощью параметра хаотичности OMEGNO. Помимо характеристик орбитального резонанса построена и проанализирована эволюция характеристик вековых резонансов с планетами.

Среди рассмотренных астероидов два (137924 2000 BD19 и 3200 Phaethon) движутся в окрестности орбитальных резонансов с Венерой с разной соизмеримостью средних движений астероида и планеты. Астероид 137924 2000 BD19 находится в устойчивом резонансе 3/4 с Венерой. Астероид 3200 Phaethon движется в окрестности резонанса 3/7 с планетой, но на интервале исследования испытывает всего несколько прохождений через точный резонанс. Астероид 394130 2006 NY51 движется в окрестности резонансной области 7/1 с Сатурном, но, скорее всего, не захвачен в резонанс, так как резонансная щель колеблется с не-

большой амплитудой, периодически проходя через точную соизмеримость, однако центр ее либрации смещен относительно нулевого значения, а критический аргумент медленно циркулирует.

Исследование с разными моделями сил показало, что учет светового давления и эффекта Ярковского практически не оказывает влияния на эволюцию орбитальных элементов астероидов, изменяя поведение большой полуоси лишь на концах интервала интегрирования. Вследствие такого влияния возмущений изменяются количество сближений астероидов с большими планетами и расстояние до них. Причем световое давление влияет заметно меньше, нежели эффект Ярковского. Эволюция параметра OMEGNO с учетом одного из факторов показала, что данные возмущения не влияют на интервал предсказуемости движения, но в некоторых случаях учет одного из возмущений приводит к замедлению или же к ускорению роста параметра вследствие изменения количества сближений и расстояния до планет.

Что касается оценки влияния эффекта Ярковского и светового давления на характеристики вековых (апсидально-нодальных) резонансов, изменений в поведении их характеристик не было отмечено, так как исследуемые возмущающие факторы не оказывают существенного влияния на эволюцию элементов орбит, лежащих в основе вычисления этих характеристик (долгота восходящего узла Ω и аргумент перигея ω).

Список источников

1. *Мюррей К., Дермотт С.* Динамика Солнечной системы. М. : Физматлит, 2009. 588 с.
2. *Nesvorny D., Ferraz-Mello S., Holman M., Morbidelli A.* Regular and Chaotic Dynamics in the Mean-Motion Resonances: Implications for the Structure and Evolution of the Asteroid Belt // *Asteroids III* / eds. W.F. Bottke, A. Cellino, P. Paolicchi, R.P. Binzel. Tucson : University of Arizona Press, 2003. P. 379–394.
3. *Li M., Huang Y., Gong Sh.* Assessing the risk of potentially hazardous asteroids through mean motion resonances analyses // *Astrophysics and Space Science*. 2019. V. 364, is. 5. Art. 78. 12 pp.
4. *Емельяненко В.В.* Астероиды, сближающиеся с Солнцем // *Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы*. 2017. Т. 51, № 1. С. 67–71. doi: 10.1134/S0038094616060010
5. *Toliou A., Granvik M.* Dynamical evolution of near-Earth objects // *Europlanet Science Congress*. 2020. 21 Sept. – 9 Oct. 2020. EPSC2020-1104. 2020. doi: 10.5194/epsc2020-1104
6. *Devyatkin A.V., Gorshanov D.L., Petrova S.N., Martyusheva A.A., L'vov V.N., Tsekmeister S.D.* Astrometry and photometry of potentially hazardous asteroid (276033) 2002 AJ129 // *Planetary and Space Science*. 2022. V. 213. Art. 105427.
7. *Farnocchia D. et al.* Near-Earth Asteroids with measurable Yarkovsky effect // *Icarus*. 2013. V. 224, is. 1. P. 1–13.
8. *Панасенко А.И., Чернетенко Ю.А.* Моделирование влияния эффекта Ярковского на движение астероидов // *Труды ИПА РАН*. 2014. № 31. С. 59–65.
9. *Галушина Т.Ю., Летнер О.Н., Сюсина О.М., Ниганова Е.Н.* Влияние эффекта Ярковского на орбитальные резонансы астероидов с малыми перигелийными расстояниями // *Известия вузов. Физика*. 2022. Т. 65, № 5 (774). С. 105–112. doi: 10.1007/s11182-022-02709-y
10. *Everhart E.* An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings // *Dynamics of comets: their origin and evolution* // *Proc. 83rd IAU Colloq. Rome, 11–15 June 1984* / eds. A. Carusi, G.B. Valsecchi. Dordrecht : D. Reidel Publ. Co., 1985. P. 185–202.

11. *Авдюшев В.А.* Интегратор Гаусса–Эверхарта // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15, № 4. С. 31–46.
12. *Galushina T.Yu., Letner O.N.* Modified version of IDA software and its application to the study of the motion of asteroid 2007 PR10 // *Astronomical and Astrophysical Transactions*. 2021. V. 32, is.4. P. 355–370.
13. *Авдюшев В.А.* Коллокационный интегратор Lobbie в задачах орбитальной динамики // *Астрономический вестник*. 2022. Т. 56, № 1. С. 36–46.
14. *Шефер В.А., Коксин А.М.* Вычисление показателей хаотичности орбит, основанных на касательных векторах: применение к ограниченной задаче трех тел // *Известия вузов. Физика*. 2013. Т. 56, № 6/3. С. 256–258.
15. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Резонансы и малые знаменатели в небесной механике. М.: Наука, 1978. 128 с.
16. *Hanuš J., Vokrouhlický D., Delbo' M., Farnocchia D., Polishook D. Pravec P., Hor-noch K., Kučáková H., Kušnirák P., Stephens R., Warner B.* (3200) Phaethon: Bulk density from Yarkovsky drift detection // *Astronomy & Astrophysics*. 2018. V. 620. Art. L8. 8 p.
17. *Greenberg A.H., Margot J.-L., Verma A.K., Taylor P.A., Hodge S.E.* Yarkovsky Drift Detections for 247 Near-Earth Asteroids // *The Astronomical Journal*. 2020. V. 159. Art. 92. 21 p.
18. *Letner O.N., Galushina T.Y.* Motion features of the asteroid 137924 2000 BD19 // *Planetary and Space Science*. 2020. V. 181. Art. 104818.
19. *Galushina T.Y., Letner O.N., Niganova E.N.* Notes on force models for near-Sun asteroids // *Planetary and Space Science*. 2021. V. 202. Art. 105232.

References

1. Murray C.D., Dermott S.F. (2000) *Solar System Dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press.
2. Nesvorný D., Ferraz-Mello S., Holman M., Morbidelli A. (2003) *Regular and Chaotic Dynamics in the Mean-Motion Resonances: Implications for the Structure and Evolution of the Asteroid Belt*. Tucson: University of Arizona Press. pp. 379–394.
3. Li M., Huang Y., Gong Sh. (2019) Assessing the risk of potentially hazardous asteroids through mean motion resonances analyses. *Astrophysics and Space Science*. 364(5). doi: 10.1007/s10509-019-3557-5
4. Emel'yanenko V.V. (2017) Near-sun asteroids. *Solar System Research*. 51(1). pp. 59–63. doi: 10.1134/S0038094616060010
5. Toliou A., Granvik M. (2020) Dynamical evolution of near-Earth objects. *Europlanet Science Congress 2020, online, Sept. 21 – Oct. 9, 2020, EPSC2020-1104*. doi: 10.5194/epsc2020-1104
6. Devyatkin A.V., Gorshanov D.L., Petrova S.N., Martyusheva A.A., L'vov V.N., Tsekmeister S.D. (2022) Astrometry and photometry of potentially hazardous asteroid (276033) 2002 AJ129. *Planetary and Space Science*. 213. Article 105427. doi: 10.1016/j.pss.2022.105427
7. Farnocchia D., Chesley S.R., Vokrouhlický D., Milani A., Spoto F., Bottke W.F. (2013) Near-Earth asteroids with measurable Yarkovsky effect. *Icarus*. 224(1). pp. 1–13. doi: 10.1016/j.icarus.2013.02.004
8. Panasenko A.I., Chernetenko Yu.A. (2014) Modelirovanie vliyaniya effekta Yarkovskogo na dvizhenie asteroidov [Modeling the influence of the Yarkovsky effect on the motion of asteroids]. *Trudy IPA RAN – Transactions of the Institute of Applied Astronomy RAS*. 31. pp. 59–65.
9. Galushina T.Yu., Letner O.N., Syusina O.M., Niganova E.N. (2022) Influence of the Yarkovsky effect on mean motion resonances of asteroids with small perihelion distances. *Russian Physics Journal*. 65(5). pp. 878–885. doi: 10.1007/s11182-022-02709-y
10. Everhart E. (1985) An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings. *Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution. Proceedings of the 83rd IAU Colloq. Rome, June 11–15, 1984. D. Reidel Publishing Company*. pp. 185–202.

11. Avdyushev V.A. (2010) Integrator Gaussa–Everkharta [Gauss–Everhart integrator]. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 15(4). pp. 31–46.
12. Galushina T.Yu., Letner O.N. (2021) Modified version of IDA software and its application to the study of the motion of asteroid 2007 PR10. *Astronomical and Astrophysical Transactions*. 32(4). pp. 355–370. doi: 10.17184/eac.5653
13. Avdyushev V.A. (2022) Collocation integrator Lobbie in orbital dynamics problems. *Solar System Research*. 56(1). pp. 32–42. doi: 10.31857/S0320930X22010017
14. Shefer V.A., Koxsin A.M. (2013) Vychislenie pokazateley khaotichnosti orbit, osnovannykh na kasatel'nykh vektorakh: primenenie k ogranichennoy zadache trekh tel [Calculation of orbital randomness indices based on tangent vectors: application to the constrained three-body problem]. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 56(6/3). pp. 256–258.
15. Grebenikov E.A., Ryabov Yu.A. (1978) *Rezonansy i малыe znamenateli v nebesnoy mekhanike* [Resonances and small denominators in celestial mechanics]. Moscow: Nauka.
16. Hanuš J., Vokrouhlický D., Delbo' M., Farnocchia D., Polishook D. Pravec P., Hor-noch K., Kučáková H., Kušnirák P., Stephens R., Warner B. (2018) (3200) Phaethon: Bulk density from Yarkovsky drift detection. *Astronomy & Astrophysics*. 620. Article L8. pp. 1–8. doi: 10.1051/0004-6361/201834228
17. Greenberg A.H., Margot J.-L., Verma A.K., Taylor P.A., Hodge S.E. (2020) Yarkovsky drift detections for 247 near-Earth asteroids. *The Astronomical Journal*. 159(3). Article 92. pp. 1–21. doi: 10.3847/1538-3881/ab62a3
18. Letner O.N., Galushina T.Y. (2020) Motion features of the asteroid 137924 2000 BD19. *Planetary and Space Science*. 181. Article 104818. doi: 10.1016/j.pss.2019.104818
19. Galushina T.Yu., Letner O.N., Niganova E.N. (2021) Notes on force models for near-Sun asteroids. *Planetary and Space Science*. 202. Article 105232. doi: 10.1016/j.pss.2021.105232

Сведения об авторах:

Галушина Татьяна Юрьевна – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией 57 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: tatyana.galushina@mail.tsu.ru

Летнер Оксана Никитична – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории 57 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: oksana.letner@gmail.com

Сюсина Ольга Михайловна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории 57 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: olga_syusina@rambler.ru

Information about the authors:

Galushina Tat'yana Yu. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tatyana.galushina@mail.tsu.ru

Letner Oksana N. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: oksana.letner@gmail.com

Syusina Ol'ga M. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: olga_syusina@rambler.ru

Статья поступила в редакцию 27.04.2023; принята к публикации 10.10.2023

The article was submitted 27.04.2023; accepted for publication 10.10.2023

Научная статья

УДК 519.6, 532.5

doi: 10.17223/19988621/85/9

Микромасштабная математическая модель неизотермического турбулентного течения и переноса пассивной газообразной примеси в уличном каньоне

Евгений Александрович Данилкин¹, Дмитрий Викторович Лещинский²,
Александр Васильевич Старченко³

^{1, 2, 3} *Томский государственный университет, Томск, Россия*

¹ *ugin@math.tsu.ru*

² *360flip182@gmail.com*

³ *starch@math.tsu.ru*

Аннотация. Работа посвящена описанию, апробации и применению разрабатываемой микромасштабной математической модели неизотермического турбулентного течения и переноса пассивной газообразной примеси в уличных каньонах. В качестве результатов ее успешного применения рассматриваются стационарные трехмерные турбулентные течения в ветровом туннеле с нагреваемой выемкой и в канале-каверне с подачей примеси, для которых имеются измерения. Рассчитаны и проанализированы поля скорости ветра и концентрации примеси при частичном или полном нагреве наветренной стенки уличного каньона.

Ключевые слова: моделирование турбулентности, уличный каньон, неизотермичность, перенос примеси, численные расчеты

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2023-943).

Для цитирования: Данилкин Е.А., Лещинский Д.В., Старченко А.В. Микромасштабная математическая модель неизотермического турбулентного течения и переноса пассивной газообразной примеси в уличном каньоне // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 85. С. 117–131. doi: 10.17223/19988621/85/9

Original article

A microscale mathematical model of a non-isothermal turbulent flow and transport of a passive gaseous pollutant in a street canyon

Evgeniy A. Danilkin¹, Dmitriy V. Leshchinskiy², Aleksandr V. Starchenko³

^{1, 2, 3} *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

¹ *ugin@math.tsu.ru*

² 360flip182@gmail.com

³ starch@math.tsu.ru

Abstract. This work is devoted to the description and testing of the developed numerical microscale mathematical model of a non-isothermal turbulent flow and transport of a passive gaseous pollutant in street canyons and city blocks. The model is successfully applied to consider three-dimensional turbulent steady flows in a wind tunnel with a heated groove and in a cavern channel with a pollutant supply, for which measurements are available. A comparison of the calculated results, experimental data, and calculations obtained using ANSYS Fluent demonstrates the validity of the numerical model. The model is used to calculate and analyze the fields of wind speed and pollutant concentration, as well as the integral characteristics of the pollutant concentration in a street canyon as a whole and in a breathing zone (up to 2 meters above the canyon bottom) with partial or overall heating of the windward wall of the canyon. The flow structure and the observed maximum and average concentrations of the pollutants are found to depend significantly on the size of the heated part of the windward canyon wall.

Keywords: turbulence modeling, street canyon, non-isothermality, pollutant transport, numerical calculations

Acknowledgments: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement No. 075-02-2023-943).

For citation: Danilkin, E.A., Leshchinskiy, D.V., Starchenko, A.V. (2023) A microscale mathematical model of a non-isothermal turbulent flow and transport of a passive gaseous pollutant in a street canyon. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 117–131. doi: 10.17223/19988621/85/9

Введение

Качество атмосферного воздуха в городах оказывает существенное влияние на качество жизни и здоровье человека. Исследования показывают, что ежегодно миллионы людей страдают от болезней, связанных с загрязнением окружающей среды и атмосферного воздуха [1]. Для обеспечения максимальной комфортности населения проектирование расположения жилых городских кварталов требует применения современных высокотехнологических решений как с точки зрения используемых строительных материалов, так и с точки зрения оценки последствий различных физических и метеорологических явлений с помощью высокоточных и надежных методов математического моделирования.

На микроклиматический комфорт современных городских кварталов и уличных каньонов в большей степени влияет автотранспорт, а точнее, выхлопные газы автомобилей. Исходя из скорости и направления ветра, а также интенсивности выбросов загрязняющих веществ автотранспортом, можно смоделировать, какой именно способностью к проветриванию будет обладать проектируемый уличный каньон. Актуальность исследований подобного рода подтверждается многочисленными научными статьями авторов из любой точки земного шара [2–6].

Микромасштабное (с разрешением несколько метров) моделирование атмосферного пограничного слоя в городской застройке представляет собой одно из важнейших современных направлений вычислительной механики и имеет большое научное значение. Моделирование течений в уличных каньонах и элементах

городской застройки с использованием гидродинамических моделей турбулентности (RANS, LES, DES) активно развивается как у нас в стране, так и за рубежом [2–6]. За последние несколько десятилетий исследователи значительно продвинулись в части моделирования переноса вредных выбросов. В качестве важных параметров, влияющих на структуру течения и механизм распространения примеси, можно выделить метеоусловия (скорость и направления ветра), геометрические характеристики (соотношение сторон уличного каньона, форма крыши), расположение акустических экранов, «живых» и бетонных изгородей и других ограждений. Однако далеко не все аспекты задачи о переносе выбросов автотранспорта в уличных каньонах хорошо изучены: например, влияние солнечного нагрева ограничивающих уличный каньон поверхностей. Для этого нужны хорошо апробированные численные микромасштабные модели.

Данная работа посвящена верификации разрабатываемой микромасштабной математической модели неизоэтермического турбулентного течения и переноса пассивной газообразной примеси в уличных каньонах и городских кварталах и ее применению для исследования влияния солнечного нагрева наветренной стенки на аэродинамику и перенос примеси.

Постановка задачи

Рассматривается стационарное неизоэтермическое трехмерное турбулентное движение воздуха в уличном каньоне, который представляет собой протяженный участок улицы с параллельно расположенными высокими зданиями с обеих сторон (рис.1). По дороге между зданиями интенсивно движется автотранспорт, выбрасывающий в атмосферу продукты сгорания углеводородного топлива. Высота зданий (H) соизмерима с шириной улицы (W). Примесь считается химически инертной и не осаждается на образующих уличного каньона. Стены и дно уличного каньона могут иметь температуру, отличную от температуры окружающей среды. Это возможно в результате антропогенной деятельности или солнечного нагрева.

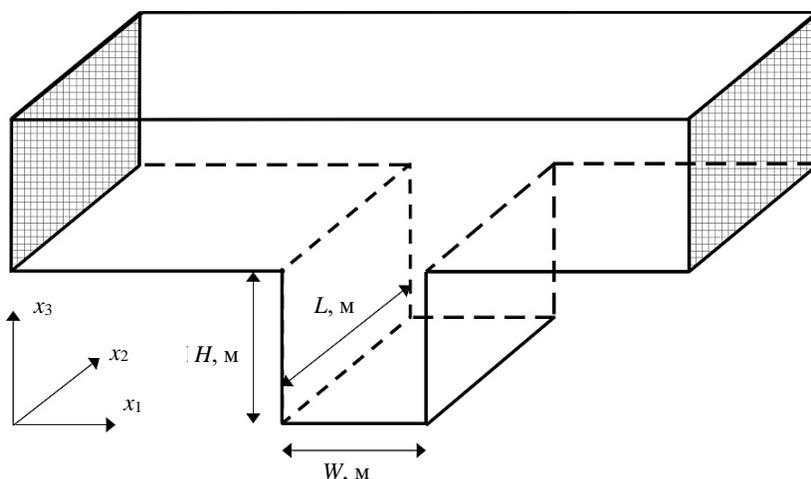


Рис. 1. Иллюстрация физической постановки задачи
Fig. 1. Illustration of the physical problem formulation

Математическая модель рассматриваемого физического процесса включает в себя осредненные по Рейнольдсу уравнения неразрывности, Навье–Стокса, теплообмена и переноса примеси [5]. Влияние силы плавучести на движение воздуха в уличном каньоне моделируется с помощью приближения Обербека–Буссинеска.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \bar{u}_i' u_j'}{\partial x_j} - \frac{g_i (\bar{T} - T_0)}{T_0}; \quad i = 1, 2, 3; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{T} \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \bar{T}' u_j'}{\partial x_j}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{c} \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(D \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \bar{c}' u_j'}{\partial x_j} + S_c, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Здесь \bar{u}_i, u_i' – осредненная и пульсационная компоненты ($i = 1, 2, 3$) вектора скорости, T – температура, p – давление, $g_i (0, 0, -g)$ – компоненты ускорения свободного падения, c – концентрация примеси, S_c – интенсивность поступления примеси, ρ, ν, a, D – плотность, кинематическая вязкость, температуропроводность и коэффициент диффузии.

Замыкание системы уравнений проводится с использованием градиентно-диффузионной гипотезы Буссинеска и двухпараметрической k - ϵ модели [7], учитывающей влияние плавучести на характеристики турбулентности.

$$\bar{u}_i' u_j' = -\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \delta_{ij} k; \quad i, j = 1, 2, 3;$$

$$\bar{T}' u_j' = -\frac{\nu_t}{Pr} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}; \quad \bar{c}' u_j' = -\frac{\nu_t}{Sc_t} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_j}; \quad j = 1, 2, 3.$$

$$\frac{\partial k \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + P + G - \epsilon; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \epsilon \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) + C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} (P + C_{\epsilon 3} G) - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k}; \quad (6)$$

$$\nu_t = C_\mu k^2 / \epsilon; \quad C_\mu = 0.09; \quad Pr_t = 0.9; \quad Sc_t = 0.5; \quad (7)$$

$$\sigma_\epsilon = 1.22; \quad C_{\epsilon 1} = 1.44, \quad C_{\epsilon 2} = \tanh(|\bar{u}_3| / \sqrt{\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2}); \quad C_{\epsilon 3} = 1.92;$$

$$P = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}; \quad G = \delta_{i3} \frac{g_i}{T_0} \frac{\nu_t}{Pr} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}.$$

В качестве граничных условий для системы уравнений (1)–(7) использовались:

- условия первого рода на входе в расчетную область;
- равенство нулю производных по нормали на верхней и боковых границах, а также на выходе из расчетной области;

– на твердых поверхностях условия прилипания и непротекания для соответствующих компонент скорости, равенство нулю производных по нормали от концентрации примеси и метод пристеночных функций для определения трения и теплового потока на стенках и турбулентных характеристик в пристеночных областях [8].

Численный метод решения задачи

Рассматриваемая задача решалась численно на неравномерной структурированной сетке, сгущающейся при приближении к твердым поверхностям. При построении конечно-разностных аналогов дифференциальных уравнений используется метод конечного объема, обеспечивающий точное выполнение закона сохранения массы на разностном уровне. Для учета препятствий используется метод фиктивных областей, в соответствии с которым компоненты скорости через грани конечного объема, принадлежащего препятствию, устанавливаются равными нулю. Аппроксимация конвективных членов уравнений переноса выполнена с использованием схемы MLU ван Лира [9], а диффузионных слагаемых – с помощью центральных разностей. Согласование полей скорости и давления с целью обеспечения выполнения уравнения (1) осуществлялось на основе процедуры SIMPLE [10]. Для источниковых членов конвективно-диффузионных уравнений (4)–(6) применялась линеаризация, обеспечивающая неотрицательность в процессе глобального итерационного процесса таких величин, как концентрация примеси, энергия турбулентности и скорость ее диссипации. Полученные в результате аппроксимации разностные схемы для одного уравнения конвекции-диффузии решались численно методом неполной факторизации Н.И. Булеева [11].

Верификация математической модели и численного метода

Для демонстрации достоверности получаемых с помощью модели (1)–(7) и разработанного численного метода результатов было рассмотрено два типа течений, для которых имеются экспериментальные результаты [12, 13].

В статье [12] проводились измерения в ветровом туннеле (канале прямоугольного сечения) с прямоугольной выемкой на его дне (рис. 2), моделирующей уличный каньон. На вход в канал поступал изотермический турбулентный поток. Число Рейнольдса, рассчитанное по средней скорости на входе и ширине или глубине выемки, составляло от 9 000 до 30 700. Кинематическая вязкость воздуха ν принята равной $1.5 \times 10^{-5} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$. Стенки выемки подвергались нагреванию, причем могла нагреваться одна из стенок или несколько сразу. Температура стенок составляла 70, 90, 110 или 130°C. Температура потока до выемки имела значение 23°C. Измерения проводились для получения распределения компонент скорости, кинетической энергии турбулентности и в некоторых случаях температуры [12].

Для сравнения полученных экспериментальных данных с результатами расчетов по предлагаемой численной модели был выбран случай изотермического течения для числа Рейнольдса $Re = U_{in}H/\nu = 30\,700$ и неизотермического течения с температурой подветренной стенки 70°C. Использование для тестирования модели экспериментальных данных, полученных для течений с меньшими значениями числа Рейнольдса, ограничивается рассматриваемым в расчетах применением

метода пристеночных функций, а полученных для больших значений температуры стенки – применяемым приближением Обербека–Буссинеска для представления силы плавучести. В расчетах использовалась сетка $110 \times 62 \times 68$. Скорость потока на входе в канал $U_{in} = 2.32$ м/с.

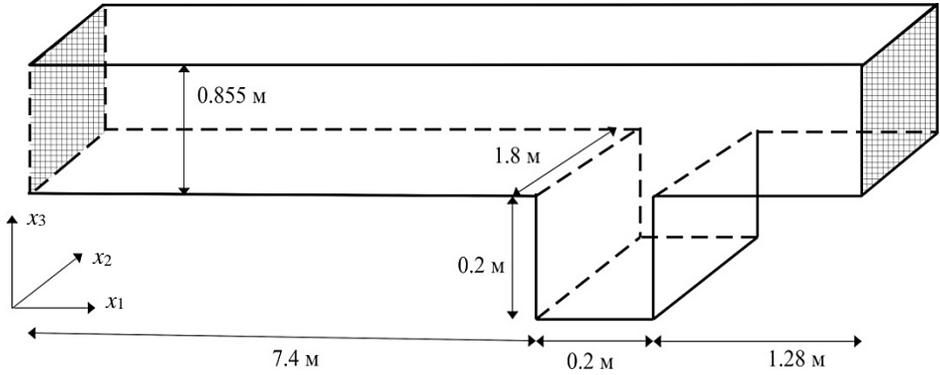


Рис. 2. Иллюстрация физической постановки задачи из эксперимента [12]
Fig. 2. Illustration of the physical problem formulation for the experiment in [12]

На рис. 3 представлены графики сравнения результатов расчетов с измерениями в сечении $x_1/H = 0.5$ (верхний ряд рисунков; предполагается, что положительные значения x_1 начинаются с левой (подветренной) границы каньона) и в сечении $x_3/H = 0.5$ (нижний ряд рисунков).

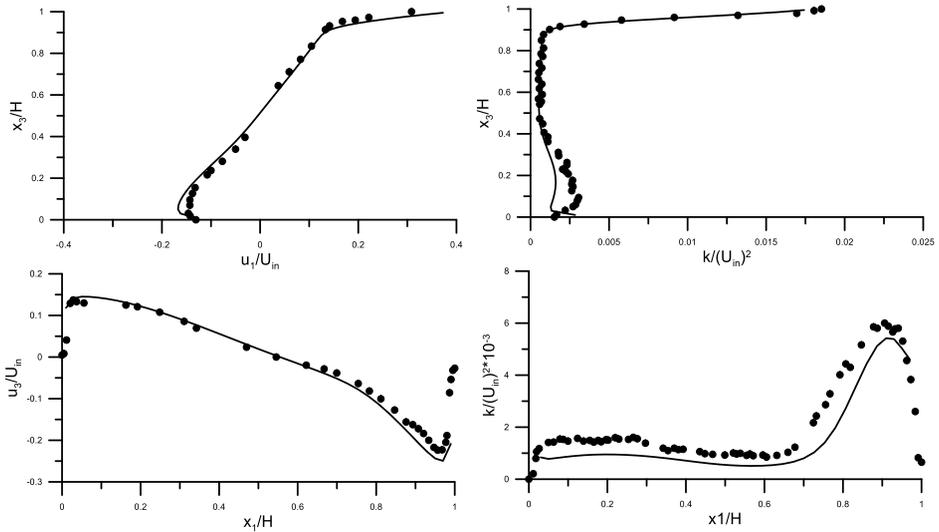


Рис. 3. Сравнение рассчитанных значений компонент скорости и кинетической энергии турбулентности в каньоне при изотермическом течении при $Re = 30\,700$.

Линии соответствуют расчетам, значки – измерениям [12]
Fig. 3. Comparison of the calculated velocity components and turbulent kinetic energy in a canyon with an isothermal flow at $Re = 30700$. The solid lines denote the calculated data, and the dotted lines, the measured data [12]

Иллюстрации показывают, что разрабатываемая численная модель турбулентного течения в уличных каньонах достаточно успешно предсказывает изменение компонент скорости и кинетической энергии турбулентности, хотя следует подчеркнуть, что модель несколько недооценивает кинетическую энергию турбулентности и интенсивность вращательного движения в каверне, предсказанные в расчетах, нежели наблюдается в экспериментах. Тем не менее характер изменения рассчитанных и измеренных значений в рассматриваемых сечениях согласуется достаточно хорошо.

На рис. 4 приведены результаты расчетов и экспериментальные данные из [12] для неизотермического течения при том же числе Рейнольдса. Причиной неизотермического течения в рассматриваемом случае был нагрев подветренной стенки каньона, ее температура составляла в эксперименте 70°C . Все другие параметры течения оставались прежними. Число Фруда $Fr = U_{in}^2 T_{in} / gH(T_w - T_{in}) = 17.29$.

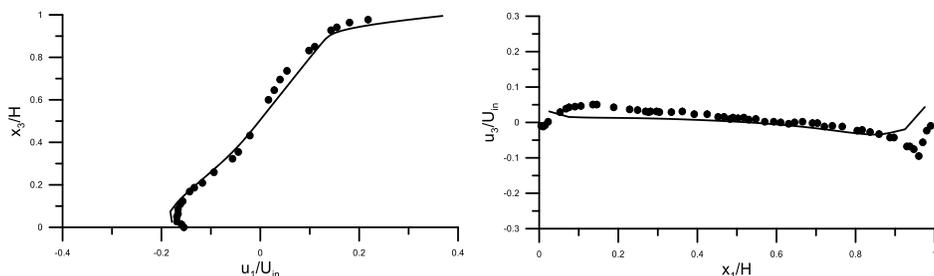


Рис. 4. Сравнение рассчитанных значений компонент скорости в каньоне при неизотермическом течении, $Re = 30\,700$ и $Fr = 17.29$. Линии соответствуют расчетам, значки – наблюдениям [12]. Слева сечение $x_1/H = 0.5$; справа $x_3/H = 1$

Fig. 4. Comparison of the calculated velocity components in a canyon with a non-isothermal flow at $Re = 30700$ and $Fr = 17.29$. The solid lines denote the calculated data, and the dotted lines, the measured data [12]. Section $x_1/H = 0.5$ is on the left; section $x_3/H = 1$ is on the right

Также для проверки способностей разрабатываемой микромасштабной модели [5] качественно предсказывать распространение примеси был выбран эксперимент, описанный в работе [13]. В нем испытательный канал-каверна представлял собой модель уличного каньона. Геометрические размеры каньона заданы следующим образом: высота H и ширина $W = 1$ м, глубина $L = 0.3$ м (рис. 5). Для подачи и отвода воздуха использовались входной и выходной каналы высотой 0.2 м и длиной 0.6 м. Такая компоновка позволяла генерировать поля потока и концентрации в камере, которые можно считать двумерными или однородными в направлении оси Ox_2 . Эксперимент проводился в изотермических условиях со скоростью набегающего потока 1.0 м/с при интенсивности турбулентности 4% . Кинематическая вязкость воздуха ν принята равной $1.5 \times 10^{-5} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$. Число Рейнольдса составило $67\,000$. В экспериментальной установке на входе была установлена пористая плита для обеспечения однородных распределений зависимых переменных во входном сечении. Линейный источник примеси размером 0.01×0.26 м был размещен в центре нижней поверхности каньона. В качестве примеси рассматривалась смесь воздуха с этиленом с концентрацией 1.2% . Расход примеси составлял 3 л/мин. С помощью термоанемометра измерялись скорость и концен-

трация примеси в среднем сечении $x_2/H = 0.15$. В результате эксперимента сделаны замеры значений компонент скорости в сечениях $x_1/H = 0.5$ и $x_3/W = 0.5$, а также концентрации примеси в сечениях $x_1/H = 0.05$, $x_1/H = 0.5$, $x_1/H = 0.95$. Скорость была нормирована на среднюю скорость U_{in} в точке $(x_1, x_2, x_3) = (0.5H, 0.15H, 1.1H)$ [13].

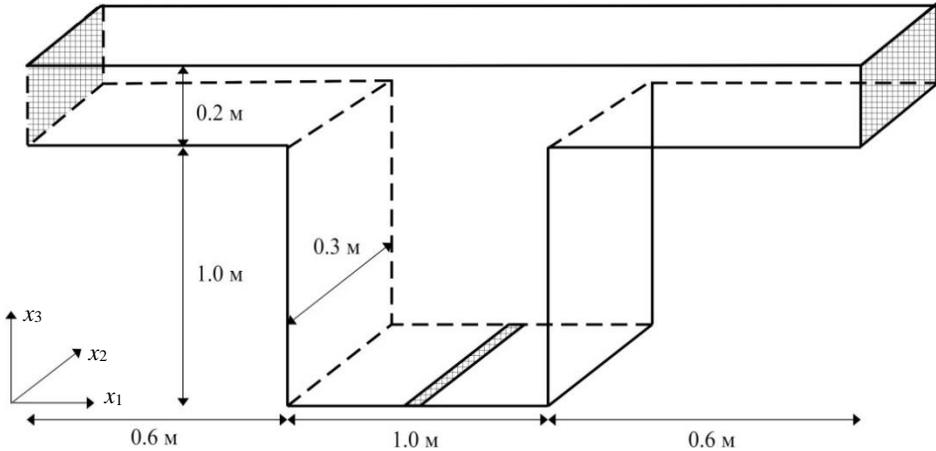


Рис. 5. Экспериментальная установка по изучению распространения примеси в уличном каньоне [13]

Fig. 5. Experimental setup for studying the pollutant spreading in a street canyon [13]

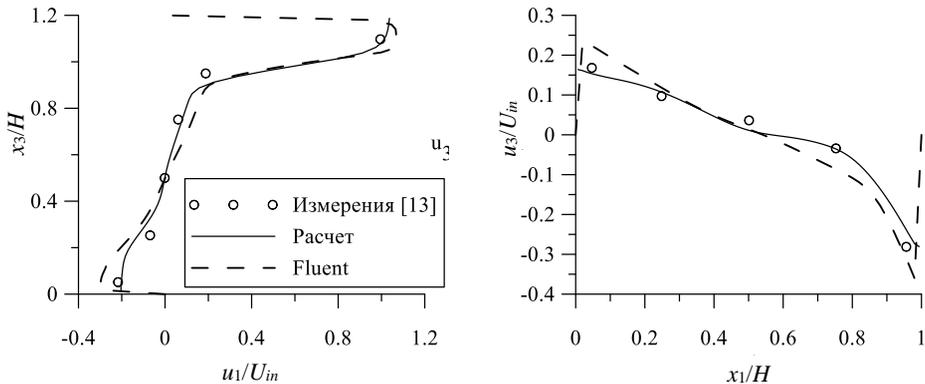


Рис. 6. Результаты сравнения рассчитанных значений компонент скорости с измерениями Kikumoto, Ooka [13] в среднем вертикальном сечении при $x_1/H = 0.5$ и $x_2/W = 0.5$ (слева) и $x_2/W = 0.5$ и $x_3/H = 1.1$ (справа)

Fig. 6. Comparison of the calculated velocity components with the measured data by Kikumoto and Ooka [13] in the average vertical section at $x_1/H = 0.5$, $x_2/W = 0.5$ (on the left) and $x_2/W = 0.5$, $x_3/H = 1.1$ (on the right)

Для описанной выше геометрии и значений определяющих параметров с помощью модели (1)–(7) было выполнено численное исследование течения и переноса примеси. Для расчетов использовалась структурированная сетка размером $100 \times 100 \times 30$.

На рис. 6 представлены профили скорости вдоль вертикальной линии с координатами ($x_1/H = 0.5$ и $x_2/H = 0.15$) и горизонтальной ($x_2/H = 0.15$ и $x_3/H = 1.1$). Видно, что характер полученных расчетным путем профилей соответствует вращательному движению в каверне, наблюдаемому в [13]. Причем расчеты по развиваемой микромасштабной модели [5] хорошо согласуются с расчетами по программе ANSYS Fluent и измеренным значениям скорости из [13].

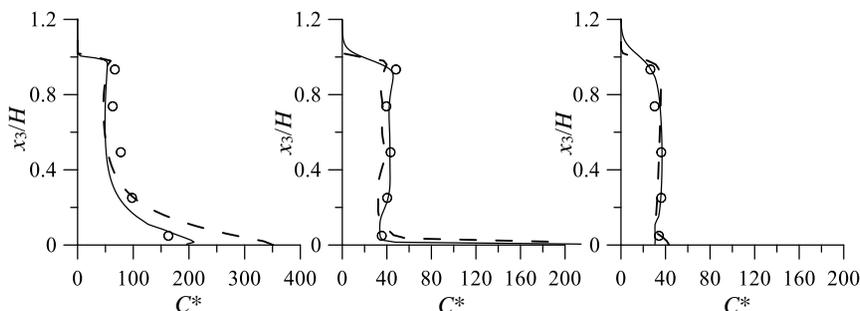


Рис. 7. Результаты сравнения рассчитанных значений безразмерной концентрации примеси с измерениями Кikumoto, Оока [13] при $x_1/H = 0.05$ (слева), $x_1/H = 0.5$ (в центре), $x_1/H = 0.95$ (справа) и $x_2/W = 0.5$. Сплошная линия – расчет по (1)–(7), штриховая – расчет Fluent, значки – эксперимент

Fig. 7. Comparison of the calculated dimensionless concentration of a pollutant with the measured data by Kikumoto and Ooka [13] at $x_1/H = 0.05$ (on the left), $x_1/H = 0.5$ (in the middle), $x_1/H = 0.95$ (on the right) and $x_2/W = 0.5$. The solid line denotes the calculation by formulas (1)–(7); the dashed line, the calculation using ANSYS Fluent; and the circles, the experimental data

На рис. 7 приведены графики изменения безразмерной концентрации примеси $C^* = cU_{in}HL/Q$ вблизи подветренной стенки, в центре каверны и вблизи наветренной стенки. Здесь $L = 0.3H$; Q – объемный расход примеси. Анализируя рассчитанные с помощью (1)–(7) и с помощью ANSYS Fluent распределения концентрации примеси, можно отметить их хорошее согласование между собой и с измеренными значениями концентраций. Из рис. 7 видно, что наибольшие значения концентрации наблюдаются вблизи места эмиссии примеси и ближе к левому нижнему углу каверны. С наветренной стороны концентрация имеет наименьшие из рассмотренных и практически постоянные вдоль вертикальной стенки значения.

Исследование влияния частичного нагрева наветренной стенки на структуру турбулентного течения в уличном каньоне

Разрабатываемая микромасштабная математическая модель была применена для исследования неизотермического турбулентного течения и переноса пассивной газообразной примеси в уличном каньоне с частично нагретой стенкой здания с наветренной стороны (рис. 8). В численном эксперименте моделируется влияние нагрева стен здания от солнечного излучения при различной высоте светила над горизонтом. Предполагается, что уличный каньон (ось Ox_2) ориентирован на север, соответственно, ось Ox_1 – с запада на восток. При таком выборе системы координат в зависимости от высоты Солнца при его заходе будет освещаться только часть наветренной стороны, размеры которой будут уменьшаться при

снижении высоты Солнца над горизонтом. Такие условия моделирования были выбраны в связи с тем, что при нагреве наветренной стороны [14–16] в каньоне может образовываться двухвихревая структура течения, приводящая к накоплению примеси у нижней границы каньона. Для выявления неблагоприятных условий проветривания каньона была проведена серия параметрических расчетов, в которых варьируемым параметром выступала доля высоты наветренной стены с повышенной температурой. Рассмотрены следующие варианты: температура стены совпадает с температурой окружающей среды (0–4), нагрета верхняя четверть стены (1–4), нагрета половина стены (2–4), нагреты три четверти стены (3–4), нагрета вся стена целиком (4–4).

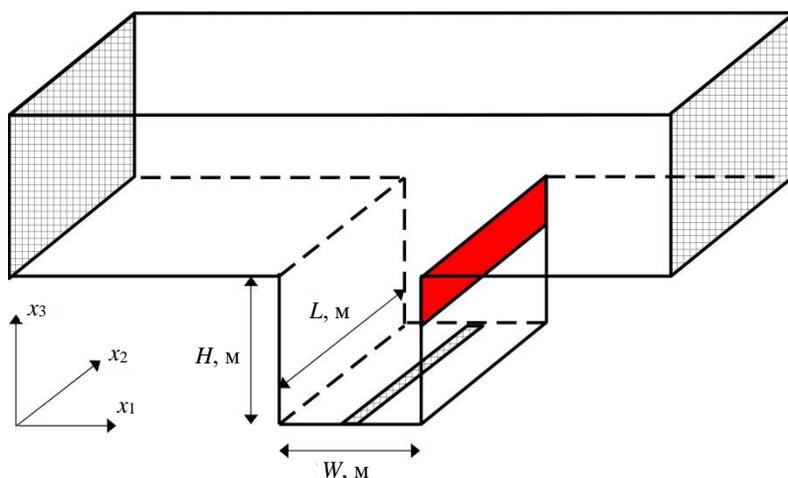


Рис. 8. Иллюстрация физической постановки задачи для варианта 1–4 (нагрета верхняя четверть наветренной стены каньона)

Fig. 8. Illustration of the physical problem formulation for the pattern 1–4 (the upper quarter of the windward wall of the canyon is heated)

Геометрические размеры каньона заданы следующим образом: высота H и ширина $W = 20$ м, глубина $L = 30$ м. В расчетах использовалась сетка $110 \times 62 \times 100$ (рис. 8). Скорость набегающего потока $U_{in} = 1.0$ м/с. Температура окружающей среды принята равной 23° , разница температур между нагретой стеной и окружающей средой 20° . Кинематическая вязкость воздуха ν принята равной 1.5×10^{-5} м² с⁻¹. Линейный источник примеси размещен в центре нижней поверхности каньона.

На рис. 9 представлены векторные поля скорости на фоне изолиний концентрации примеси $C^* = cU_{in}HL/Q$ для рассмотренных вариантов нагрева наветренной стенки уличного каньона. В случае варианта 0–4 (отсутствие нагрева стен) под влиянием основного потока воздуха, движущегося над крышами зданий, в каньоне формируется вращательное течение (см. рис. 9). Сформировавшееся вихревое движение воздуха обеспечивает проветривание уличного каньона.

В таблице собраны максимальная, средняя в каньоне и средняя концентрация примеси в зоне дыхания людей ($x_3 = 1.5$ м).

Из рис. 9 видно, что нагрев наветренной образующей уличного каньона приводит к изменению структуры течения и характера распространения примеси

внутри каньона. Нагрев верхней четверти приводит к замедлению интенсивности вращательного движения, как результат значение максимальной концентрации возрастает практически вдвое, также увеличивается средняя концентрация в зоне дыхания. Нагрев половины наветренной стенки уличного каньона приводит к изменению структуры течения. На рис. 9 (2–4) видно, что в нижнем углу у наветренной стороны формируется небольшой вихрь. Примесь затягивается в сформировавшийся вихрь и циркулирует в нем. Это приводит к значительному увеличению максимальной концентрации примеси в каньоне. Средняя концентрация в зоне дыхания также увеличивается.

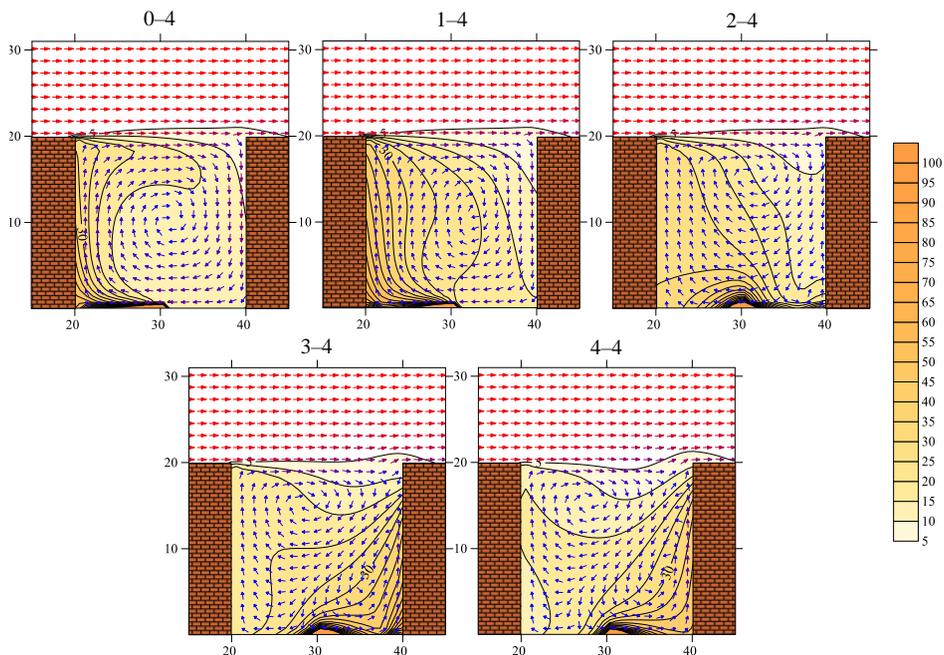


Рис. 9. Векторное поле скорости и изолинии концентрации примеси для рассматриваемых вариантов

Fig. 9. Velocity vector field and pollutant concentration isolines for the considered patterns

Максимальная, минимальная и средняя концентрации C^* в каньоне и зоне дыхания

Обозначение	Максимальная концентрация в каньоне	Минимальная концентрация в каньоне	Средняя концентрация в каньоне	Средняя концентрация в зоне дыхания
0–4	371.525	6.656	17.140	27.395
1–4	662.072	5.510	24.448	37.741
2–4	2 485.178	5.403	22.143	41.172
3–4	1 312.013	2.997	23.518	45.771
4–4	1 228.755	2.025	19.671	37.485

Дальнейшее увеличение зоны нагрева наветренной стенки каньона до соотношения 3/4 приводит к более существенному изменению структуры течения.

Восходящий поток теплого воздуха у нагретой образующей каньона конкурирует с основным направлением движения воздуха в каньоне. Это приводит к поджатию основного вихря и образованию вторичного вихря в зоне между основным вихрем и наветренной стеной здания. На рис. 9 (3–4) видно, что для такого варианта расчеты показывают изменение механизма проветривания каньона, примесь выносится вторичным вихрем. Как результат возрастает полученное расчетным путем значение максимальной концентрации примеси по сравнению с вариантами 0–4 и 1–4. В случае нагрева всей стены структура течения принципиально не меняется, но увеличивается интенсивность движения во вторичном вихре, что приводит к снижению максимальных и средних концентраций примеси.

Во всех случаях при увеличении доли нагретой части стены уменьшаются минимальные значения концентрации примеси, что в сочетании с увеличением максимальных и средних значений концентрации, по-видимому, косвенно свидетельствует об ухудшении перемешивания воздушных масс в каньоне.

Заключение

Представлена разрабатываемая численная микромасштабная модель неизоотермического турбулентного течения и переноса пассивной газообразной примеси в уличных каньонах и городских кварталах. Модель опирается на трехмерные стационарные уравнения Рейнольдса, уравнения переноса примеси и теплообмена. Проблема турбулентного замыкания решается с помощью k - ϵ модели турбулентности и метода пристеночных функций. Задача решается численно на структурированных сетках методом конечного объема, с использованием монотонизированных схем второго порядка аппроксимации ван Лира, алгоритма SIMPLE Патанкара–Сполдинга и итерационного метода Булеева. Для демонстрации возможностей численной микромасштабной модели рассмотрено два случая трехмерных турбулентных течений, для которых имеются измерения: течение в ветровом туннеле с нагреваемой выемкой и течение в канале-каверне с подачей примеси. Сопоставление расчетов с экспериментальными данными и расчетами, выполненными с помощью ANSYS Fluent, показало хорошее качество разрабатываемой численной модели для исследования неизоотермических турбулентных течений и переноса примеси в уличных каньонах.

С помощью разработанной модели рассчитаны и проанализированы поля скорости ветра и концентрации примеси, а также интегральные характеристики концентрации примеси в уличном каньоне в целом и в зоне дыхания (до 2 м от дна каньона) при частичном или полном нагреве наветренной стенки уличного каньона. Получено, что структура течения и наблюдаемые максимальные и средние концентрации примеси существенно зависят от размера зоны нагретой части наветренной стены каньона.

Список источников

1. Cohen A.J., Brauer M., Burnett R., Anderson H.R., Frostad J., Estep K., Balakrishnan K., Brunekreef B., Dandona L., Dandona R., Feigin V., Freedman G., Hubbell B., Jobling A., Kan H., Knibbs L., Liu Y., Martin R., Morawska L., Pope C.A. 3rd, Shin H., Straif K., Shaddick G., Thomas M., van Dingenen R., van Donkelaar A., Vos T., Murray C.J.L., Forouzanfar M.H. Estimates and 25-year trends of the global burden of disease attributable to ambient

- air pollution: an analysis of data from the global burden of diseases study 2015 // *Lancet*. 2017. V. 389 (10082). P. 1907–1918. doi: 10.1016/S0140-6736(17)30505-6
2. Nakajima K., Ooka R., Kikumoto H. Evaluation of k- ϵ Reynolds stress modeling in an idealized urban canyon using LES // *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 2018. V. 175. P. 213–228. doi: 10.1016/j.jweia.2018.01.034
 3. Lateb M., Meroney R.N., Yataghene M., Fellouah H., Saleh F., Boufadel M.C. On the use of numerical modelling for near-field pollutant dispersion in urban environments – A review // *Environmental Pollution*. 2016. V. 208, pt. A. P. 271–283. doi: 10.1016/j.envpol.2015.07.039
 4. Chew L.W., Glicksman L.R., Norford L.K. Buoyant flows in street canyons: Comparison of RANS and LES at reduced and full scales // *Building and Environment*. 2018. V. 146. P. 77–87. doi: 10.1016/j.buildenv.2018.09.026
 5. Старченко А.В., Данилкин Е.А., Лещинский Д.В. Численное моделирование распространения выбросов автотранспорта в уличном каньоне // *Математическое моделирование*. 2022. Т. 34, № 10. С. 81–94. doi: 10.20948/mm-2022-10-05
 6. Мешкова В.Д., Дектерев А.А., Филимонов С.А., Литвинцев К.Ю. SigmaFlow как инструмент исследования ветрового комфорта в условиях городской среды // *Журнал Сибирского федерального университета. Сер. Техника и технологии*. 2022. № 15 (4). С. 490–504. doi: 10.17516/1999-494X-0398
 7. Henkes R.A.W.M., van der Flugt F.F., Hoogendoorn C.J. Natural Convection Flow in a Square Cavity Calculated with Low-Reynolds-Number Turbulence Models // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1991. V. 34 (2). P. 377–388. doi: 10.1016/0017-9310(91)90258-G
 8. Launder B.E., Spalding D.B. The numerical computation of turbulent flows. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1974. V. 3 (2). P. 269–289. doi: 10.1016/0045-7825(74)90029-2
 9. Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. II. monotonicity and conservation combined in a second order scheme // *Journal of Computational Physics*. 1974. V. 14. P. 361–370. doi: 10.1016/0021-9991(74)90019-9
 10. Patankar S. Numerical heat transfer and fluid flow. New York : Hemisphere Publ. Corporation, 1980. 214 p. doi: 10.1201/9781482234213
 11. Старченко А.В., Нутерман Р.Б., Данилкин Е.А. Численное моделирование турбулентных течений и переноса примеси в уличных каньонах. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2015. 252 с.
 12. Allegrini J., Dorer V., Carmeliet J. Wind tunnel measurements of buoyant flows in street canyons // *Building and Environment*. 2013. V. 59. P. 315–326. doi: 10.1016/j.buildenv.2012.08.029
 13. Kikumoto H., Ooka R. Large-eddy simulation of pollutant dispersion in a cavity at fine grid resolutions // *Building and Environment*. 2018. V. 127. P. 127–137. doi: 10.1016/j.buildenv.2017.11.005
 14. Wang P., Zhao D., Wang W., Mu H., Cai G., Liao C. Thermal Effect on Pollutant Dispersion in an Urban Street Canyon // *Int. J. Environ. Res*. 2011. V. 5 (3). P. 813–820. doi: 10.22059/IJER.2011.388
 15. Chen L., Hang J., Chen G., Liu S., Lin Y., Mattsson M., Sandberg M., Ling H. Numerical investigations of wind and thermal environment in 2D scaled street canyons with various aspect ratios and solar wall heating // *Building and Environment*. 2021. V. 189. Art. 107510. doi: 10.1016/j.buildenv.2020.107525
 16. Старченко А.В., Данилкин Е.А., Семёнова А.А., Лещинский Д.В. Численное моделирование турбулентного течения в уличном каньоне при смешанной конвекции // *Девятая Сибирская конференция по параллельным и высокопроизводительным вычислениям : сб. ст. Томск : Изд. Дом Том. гос. ун-та, 2017. С. 70–77.*

References

1. Cohen A.J., Brauer M., Burnett R., Anderson H.R., Frostad J., Estep K., Balakrishnan K., Brunekreef B., Dandona L., Dandona R., Feigin V., Freedman G., Hubbell B., Jobling A.,

- Kan H., Knibbs L., Liu Y., Martin R., Morawska L., Pope C.A. 3rd, Shin H., Straif K., Shaddick G., Thomas M., van Dingenen R., van Donkelaar A., Vos T., Murray C.J.L., Forouzanfar M.H. (2017) Estimates and 25-year trends of the global burden of disease attributable to ambient air pollution: an analysis of data from the global burden of diseases study 2015. *Lancet*. 389. Article 10082. pp. 1907–1918. doi: 10.1016/S0140-6736(17)30505-6
2. Nakajima K., Ooka R., Kikumoto H. (2018) Evaluation of k - ϵ Reynolds stress modeling in an idealized urban canyon using LES. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 175. pp. 213–228. doi: 10.1016/j.jweia.2018.01.034
 3. Lateb M., Meroney R.N., Yataghene M., Fellouah H., Saleh F., Boufadel M.C. (2016) On the use of numerical modelling for near-field pollutant dispersion in urban environments – A review. *Environmental Pollution*. 208(A). pp. 271–283. doi: 10.1016/j.envpol.2015.07.039
 4. Chew L.W., Glicksman L.R., Norford L.K. (2018) Buoyant flows in street canyons: Comparison of RANS and LES at reduced and full scales. *Building and Environment*. 146. pp. 77–87. doi: 10.1016/j.buildenv.2018.09.026
 5. Starchenko A.V., Danilkin E.A., Leshchinskiy D.V. (2023) Numerical simulation of the distribution of vehicle emissions in a street canyon. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 15. pp. 427–435. doi: 10.20948/mm-2022-10-05
 6. Meshkova V.D., Dekterev A.A., Filimonov S.A., Litvintsev K.Yu. (2022) SigmaFlow kak instrument issledovaniya vetrovogo komforta v usloviyakh gorodskoy sredy [SigmaFlow as a tool for studying wind comfort in an urban environment]. *Zhurnal Sibirskogo federal'nogo universiteta. Seriya: Tekhnika i tekhnologii – Journal of the Siberian Federal University. Engineering and Technology*. 15(4). pp. 490–504. doi: 10.17516/1999-494X-0398
 7. Henkes R.A.W.M., van der Flugt F.F., Hoogendoorn C.J. (1991) Natural convection flow in a square cavity calculated with low-Reynolds-number turbulence models. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 34. pp. 1543–1557. doi: 10.1016/0017-9310(91)90258-G
 8. Launder B.E., Spalding D.B. (1974) The numerical computation of turbulent flows. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 3(2). pp. 269–289. doi: 10.1016/0045-7825(74)90029-2
 9. Van Leer B. (1974) Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme. *Journal of Computational Physics*. 14. pp. 361–370. doi: 10.1016/0021-9991(74)90019-9
 10. Patankar S. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. New York: Hemisphere Publishing Corporation. doi: 10.1201/9781482234213
 11. Starchenko A.V., Nuterman R.B., Danilkin E.A. (2015) *Chislennoe modelirovanie turbulentnykh techeniy i perenosa primesi v ulichnykh kan'onakh* [Numerical modeling of turbulent flows and pollution transport in street canyons]. Tomsk: Tomsk State University Press.
 12. Allegrini J., Dorer V., Carmeliet J. (2013) Wind tunnel measurements of buoyant flows in street canyons. *Building and Environment*. 59. pp. 315–326. doi: 10.1016/j.buildenv.2012.08.029
 13. Kikumoto H., Ooka R. (2018) Large-eddy simulation of pollutant dispersion in a cavity at fine grid resolutions. *Building and Environment*. 127. pp. 127–137. doi: 10.1016/j.buildenv.2017.11.005
 14. Wang P., Zhao D., Wang W., Mu H., Cai G., Liao C. (2011) Thermal effect on pollutant dispersion in an urban street canyon. *International Journal of Environmental Research*. 5(3). pp. 813–820. doi: 10.22059/IJER.2011.388
 15. Chen L., Hang J., Chen G., Liu S., Lin Y., Mattsson M., Sandberg M., Ling H. (2021) Numerical investigations of wind and thermal environment in 2D scaled street canyons with various aspect ratios and solar wall heating. *Building and Environment*. 190. Article 107510. doi: 10.1016/j.buildenv.2020.107525
 16. Starchenko A.V., Danilkin E.A., Semenova A.A., Leshchinskiy D.V. (2017) *Chislennoe modelirovanie turbulentnogo techeniya v ulichnom kan'one pri smeshannoy konveksii* [Numerical simulation of turbulent flow in a street canyon under mixed convection]. Tomsk: TSU Publishing House.

Сведения об авторах:

Данилкин Евгений Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования, старший научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: ugin@math.tsu.ru

Лещинский Дмитрий Викторович – старший преподаватель кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования, младший научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: 360flip182@gmail.com

Старченко Александр Васильевич – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой вычислительной математики и компьютерного моделирования, ведущий научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: starch@math.tsu.ru

Information about the authors:

Danilkin Evgeniy A. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Computational Mathematics and Computer Modelling, Senior Researcher of the Regional Scientific and Educational Mathematical Center, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ugin@math.tsu.ru

Leshchinskiy Dmitriy V. (Senior Lecturer of the Department of Computational Mathematics and Computer Modelling, Junior Researcher of the Regional Scientific and Educational Mathematical Center, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: 360flip182@gmail.com

Starchenko Aleksandr V. (Professor, Doctor of Physics and Mathematics, Head of Department of Computational Mathematics and Computer Modelling, Leading Researcher of the Regional Scientific and Educational Mathematical Center, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: starch@math.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 21.08.2023; принята к публикации 10.10.2023

The article was submitted 21.08.2023; accepted for publication 10.10.2023

Научная статья

УДК 539.379 + 539.383

doi: 10.17223/19988621/85/11

Моделирование неоднородной деформации пористой керамики с использованием гауссовых случайных полей

Валентина Алексеевна Зимина

*Институт физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН,
Томск, Россия, miva@ispms.ru*

Аннотация. Численно проанализировано неоднородное распределение деформации в образцах пористой керамики при диаметральной сжатии на основе стохастического представления структуры материала. Модели структуры основаны на вероятностном описании механических свойств керамики с применением гауссовых случайных полей. Численное моделирование выполнено для циркониевой керамики с пористостью 4 и 42%. Показано, что деформация локализуется в виде полос разного размера, расположенных под углом около 45° к оси нагружения. Применение данного подхода позволило получить различные типы неоднородного распределения деформаций, а также контролировать размеры областей локализации.

Ключевые слова: неоднородная случайная структура, пористая керамика, диаметральной сжатие, стохастическое моделирование, гауссовы случайные поля, неоднородность деформации, численное моделирование

Благодарности: Работа выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН, проект FWRW-2022-0003.

Для цитирования: Зимина В.А. Моделирование неоднородной деформации пористой керамики с использованием гауссовых случайных полей // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 85. С. 132–145. doi: 10.17223/19988621/85/11

Original article

Modeling of inhomogeneous deformation of porous ceramics using gaussian random fields

Valentina A. Zimina

*Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch of RAS,
Tomsk, Russian Federation, miva@ispms.ru*

Abstract. In this paper, the inhomogeneous distribution of strain in porous ceramic specimens under diametral compression is numerically analyzed using a stochastic representation of the material structure. Models of the structure of porous ceramics are based on a

probabilistic description of mechanical properties of ceramics using Gaussian random fields. Numerical simulation is performed for zirconium ceramics with porosities of 4 and 42 %. In the framework of the modeling method used, different porosities of ceramics are taken into account in terms of effective mechanical properties and parameters of the covariance matrix of a random Gaussian field. The simulation of the diametral compression of porous ceramic specimens is carried out in a two-dimensional formulation under plane-strain conditions. The loading is set in the upper and lower parts of the specimen near the central vertical axis through the velocities of the selected nodes. Distributions of the strain tensor components for the studied specimens are analyzed, and their evolution in the central part of the specimens is studied in detail. It is shown that the strain is localized in the form of bands of different sizes and intensities inclined at an angle of approximately 45° to the loading axis. The difference in the strain distributions for the specimens with various porosities in the performed calculations is a result of different models of the inhomogeneous structure. The specimen with a porosity of 4 % is characterized by a greater number of heterogeneous regions of smaller size compared with a specimen with a porosity of 42 %. The proposed method of describing the material structure allows one to obtain various types of inhomogeneous strain distributions under diametral compression, as well as to control the size of heterogeneous regions in the strain distributions.

Keywords: inhomogeneous random structure, porous ceramics, diametral compression test, stochastic modeling, Gaussian random fields, strain inhomogeneity, numerical modeling

Acknowledgments: This work was performed according to the Government research assignment for ISPMS SB RAS (project No. FWRW-2022-0003).

For citation: Zimina, V.A. (2023) Modeling of inhomogeneous deformation of porous ceramics using gaussian random fields. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 132–145. doi: 10.17223/19988621/85/11

Введение

Структурно-неоднородные материалы, состоящие из двух и более различных фаз, широко применяются в различных отраслях промышленности. Типичными примерами таких материалов являются композиты, пористые материалы, сплавы, бетоны, грунты и горные породы. Хорошо известно, что в этих материалах присутствуют неоднородности (на микромасштабе), которые оказывают значительное влияние на их свойства и механическое поведение. Поэтому при выполнении анализа механического поведения и разрушения структурно-неоднородных материалов важно учитывать вклад каждого компонента структуры и их взаимодействия в эффективные упругие и прочностные характеристики этих материалов, а также получаемое в результате этого неоднородное распределение напряжений и деформаций в них под нагрузкой.

Особый интерес вызывают растягивающие нагрузки, которые более опасны для хрупких материалов. Из-за природы таких материалов прямые испытания на растяжение для них становятся невозможными из-за трудностей с их реализацией (при захвате образца нагружающим устройством возникает концентрация напряжений, которая приводит к преждевременному разрушению образцов в захватах). Поэтому для измерения прочности на растяжение хрупких материалов применя-

ют косвенные методы, например метод экспериментального исследования, известный как бразильский тест, или диаметральное сжатие [1, 2].

Огромное количество статей посвящено численному и экспериментальному исследованию различных аспектов, касающихся условий использования бразильского теста для разных материалов. Метод диаметральное сжатия был изначально предложен для измерения прочности на растяжение бетона – хрупкого гетерогенного материала, подобного горным породам [3, 4]. При исследовании структурно-неоднородных материалов важно понимать, как влияют неоднородности материала, испытываемого в условиях бразильского теста, на выполняемость условий этого теста. В ряде работ экспериментальными и численными исследованиями подтверждается, что неоднородность среды не является препятствием для применения метода диаметральное сжатия к структурно-неоднородным материалам [5–7].

Также в ряде публикаций авторы интересуются вопросом, действительно ли трещина зарождается в центре диска в условиях диаметральное сжатия, и как на это влияют форма образца, соотношение толщины диска к его диаметру, способ приложения нагрузки, форма контакта и материал нагружающих оснасток [6–11]. Влияние способа приложения нагрузки изучено в работе [8]. Авторы методом конечных элементов исследовали поведение образца, нагруженного диаметральное сжатием с помощью толкателей, имеющих три различные геометрии и изготовленных из различных материалов. Авторы работы [6], используя метод конечных элементов, численно изучили процессы деформации и разрушения бразильского диска из неоднородной горной породы в статических и динамических условиях нагружения. Неоднородность образца рассматривали в предположении, что свойства материала в конечных элементах соответствуют распределению Вейбулла. Было показано, что при динамическом нагружении в горной породе образуется больше трещин по сравнению с статическим нагружением. В работе [9] представлены испытания на диаметральное сжатие для определения прочности на растяжение и сжатие чугуновых образцов с различным отношением толщины к диаметру. Были исследованы образцы двух типов чугуна: с чешуйчатым графитом и сферoidalным графитом. Показано, что испытания на диаметральное сжатие для оценки прочности при растяжении могут быть применены при любом рассмотренном отношении толщины к диаметру образцов из чугуна с чешуйчатым графитом и только при более низких значениях отношения толщины к диаметру образцов из чугуна со сферoidalным графитом. Авторы работы [10] провели испытания образцов из оксида алюминия и карбида кремния при различной скорости деформации и показали, как скорость деформации влияет на значения прочности при растяжении. В работе [7] рассматривалось влияние неоднородности и анизотропии сланцевой породы на значения ее механических свойств и распространение трещин в образцах. Чтобы учесть анизотропию при численном моделировании, прочностные свойства образцов были заданы как пространственно случайные поля.

За последние несколько десятилетий были разработаны различные методы описания неоднородной структуры материалов (моделирования неоднородностей). Одним из распространенных направлений в микромеханике материалов со случайной структурой являются методы статистической механики. Для этого используются различные функции распределения случайных величин и методы теории

случайных полей. У многих природных и искусственно созданных материалов микроструктура является стохастической (имеет вероятностную природу) и фактически может быть представлена как случайное поле [12, 13], которое описывает случайность в характеристиках плотности, местоположения, размера и формы неоднородности. Стохастическая реконструкция микроструктуры является эффективным и экономичным способом генерирования структуры образцов гетерогенных материалов с использованием ограниченной информации об их микроструктуре [14–16].

Среди наиболее часто используемых методов восстановления гетерогенных микроструктур выделяют метод стохастической оптимизации [12, 16] и метод гауссова случайного поля [17–19]. По сравнению с другими широко используемыми распределениями распределение Гаусса обладает тем преимуществом, что подбор данных осуществляется достаточно просто и гибко за счет управления средним значением и дисперсией. Кроме того, распределение Гаусса обладает хорошо зарекомендовавшими себя свойствами и средствами для компьютерного моделирования, например с помощью пакетов R, Matlab и других разработанных программ, которые могут легко генерировать гауссовы случайные величины и поля.

Следует отметить, что к настоящему времени большое количество как экспериментальных, так и численных работ посвящено исследованию связи между структурой и особенностями механического поведения разнообразных материалов при различных типах механических нагрузок [20–25]. Однако особенности развития деформационных процессов в пористых материалах исследованы недостаточно полно.

В данной работе представлены примеры построения стохастических моделей пористой керамики на основе гауссовых случайных полей и их использования для моделирования неоднородного распределения деформации в образцах пористой керамики на основе диоксида циркония при диаметральной сжатии. Модели основаны на стохастическом описании неоднородного распределения упругих свойств керамики.

Постановка задачи и методы моделирования

Моделирование механического поведения пористой циркониевой керамики в условиях диаметральной сжатия выполнялось в рамках механики сплошных сред с помощью метода конечных разностей [26, 27]. Согласно данному подходу система уравнений механики деформируемого твердого тела включает основные законы сохранения и определяющие соотношения.

Законы сохранения массы и количества движения при лагранжевом описании движения среды имеют вид:

$$\rho_0 V_0 = \rho V, \quad \rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^j},$$

где ρ_0 и ρ – начальное и текущее значения плотности материала; V_0 и V – начальное и текущее значения бесконечно малого объема среды; v_i – компонента вектора скорости перемещений; x^j – пространственная координата; σ_{ij} – компонента тензора истинных напряжений Коши; $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – компонента тензора скорости дефор-

мации; использовалась плоская постановка задачи, поэтому $i, j = 1, 2$. Поскольку используется модель баротропной среды, то закон сохранения энергии не рассматривался.

В систему уравнений входят также геометрические соотношения:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right), \quad \dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right),$$

где $\dot{\omega}_{ij}$ – компонента тензора скорости вращения, а точка сверху символов обозначает материальную производную по времени. Законы сохранения и геометрические соотношения записаны в декартовой системе координат.

Тензор напряжений записан как сумма шаровой (давление P) и девиаторной (s_{ij}) частей: $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + s_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера.

Описание упругого отклика материала выполнялось с использованием соотношений гипотезы для изотропной среды:

$$\dot{P} = -K\dot{\theta}, \quad \dot{s}_{ij} = 2G \left[\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\dot{\theta}\delta_{ij} \right] + \dot{\omega}_{ik}s_{kj} - s_{ik}\dot{\omega}_{kj},$$

где K – модуль объемной упругости; $\theta = \varepsilon_{ii}$ – объемная деформация; G – модуль сдвига, $\dot{\omega}_{ik}s_{kj} - s_{ik}\dot{\omega}_{kj}$ – поправка на поворот.

Предполагается, что структура материала является неоднородной, т.е. упругие модули – функции пространственных координат. Для пористой циркониевой керамики основными элементами неоднородности структуры являются поры и зерна. Кроме того, исследуемая керамика может содержать моноклинную и тетрагональную фазы с различными физико-механическими свойствами. Для задания неоднородной структуры материала были использованы случайные гауссовы поля – случайные функции двух пространственных переменных. Такой подход является универсальным и в последнее время активно используется при моделировании в разных научных областях. Параметры случайных гауссовых полей можно увязать с особенностями поровой структуры (размеры, форма, связность / изолированность), которые ответственны за образование тех или иных картин неоднородного распределения деформаций. Многомерное гауссово поле \mathbf{x} характеризуется вектором математических ожиданий $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_d)^T$ и ковариационной матрицей $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij})$, а его плотность вероятности имеет следующий вид:

$$p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right).$$

Здесь d – размерность вектора случайных величин (поля), т.е. в нашем случае $d = 2$, размерность матрицы $\boldsymbol{\Sigma}$ равна $d \times d$, а ее элементы Σ_{ij} полностью определяют свойства случайного поля.

Неоднородность структуры пористой керамики моделировалась путем изменения упругих свойств (модуля объемной упругости и модуля сдвига) в разных точках расчетной области в соответствии со следующим законом:

$$K = K_0 + (f - 0.5)\Delta K, \quad G = G_0 + (f - 0.5)\Delta G,$$

где $f(x, y)$ – нормированное случайное поле, изменяющееся от 0 до 1, а ΔK и ΔG – некоторые параметры, задающие возможный разброс соответствующих упругих характеристик в пределах моделируемого образца.

Величины ΔK и ΔG составляли 12.5% от значения соответствующих модулей. Для выполнения моделирования гауссовы случайные поля были сгенерированы с использованием функции `RMstable` из библиотеки `RandomFields`, реализующей гауссово случайное поле в программном пакете R [28]. Используя эту функцию, можно независимо от размеров расчетной сетки ввести параметр масштаба, а также параметр, характеризующий анизотропию случайного поля. Таким образом, размер неоднородности получается управляемым, а его расположение в пространстве остается случайным.

На рис. 1 представлены примеры моделей структуры исследуемых образцов, сгенерированные с помощью гауссовых случайных полей в программном комплексе R. В этих статистических моделях случайные величины (элементы случайного поля) пространственно скоррелированы в соответствии с выбранными параметрами ковариационной матрицы. Параметры статистической модели подбирались таким образом, чтобы описать образование горизонтально вытянутых эллиптических областей, наблюдаемых в полях неоднородной деформации пористой керамики в экспериментах [29, 30].

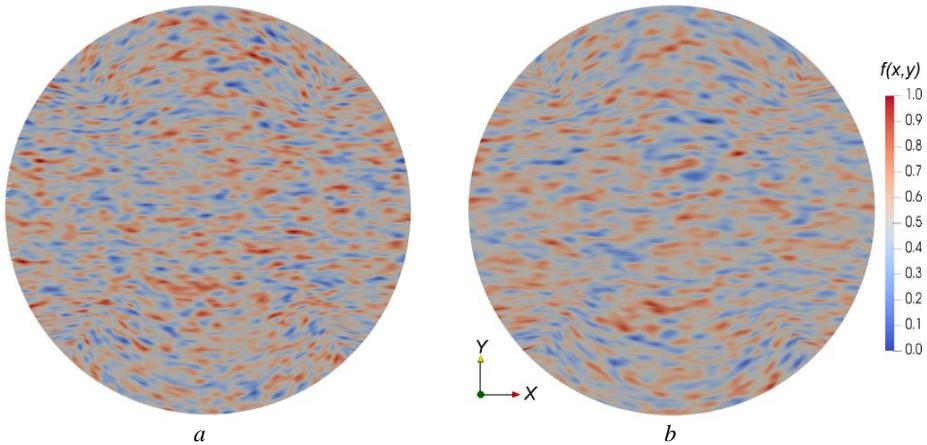


Рис. 1. Реализации гауссовых случайных полей, моделирующих неоднородность упругих свойств в образцах с разной пористостью: 4% (a) и 42% (b)

Fig. 1. Realization of Gaussian random fields modeling the inhomogeneity of elastic properties in specimens of various porosities: (a) 4 and (b) 42%

Исследование механического поведения в условиях бразильского теста выполнялось для образцов циркониевой керамики диаметром 30 мм с разной пористостью: $\Pi = 4$ и $\Pi = 42\%$. В рамках принятого метода моделирования разная пористость керамики была учтена через ее эффективные механические свойства и параметры корреляционной матрицы случайного гауссова поля.

Моделирование диаметрального сжатия образцов пористой керамики проводилось в двумерной постановке в условиях плоской деформации. Дискретизация области моделирования была выполнена структурированной криволинейной сеткой, состоящей из 40 000 четырехугольных ячеек с размером вычислительной ячейки около 150 мкм. В верхней и нижней частях образца вблизи центральной вертикальной оси задавалось нагружение образца через значения скорости вы-

бранных точек. Для обработки и графического представления результатов моделирования применялась программа Paraview [31].

Результаты моделирования и их обсуждение

Проанализированы картины распределения компоненты тензора деформации ε_{xx} для исследуемых образцов (рис. 2), а также подробно изучена их эволюция в центральной части образцов (прямоугольная область на рис. 2; 10×6.5 мм). Видно, что распределения компоненты тензора деформации являются неоднородными и максимальные значения деформации наблюдаются в местах приложения нагрузки, а также в местах, соответствующих ячейкам расчетной сетки с ослабленными упругими свойствами. Следует отметить, что в зависимости от значения пористости в исследуемых образцах наблюдаются разные картины распределения деформации. Несмотря на выраженную горизонтально ориентированную анизотропию случайного поля, заметную на рис. 1, на распределениях деформаций выделяются полосы локализованной деформации с наклоном около 45° к оси нагружения. Причем для образцов с пористостью 42% эти направления более выражены.

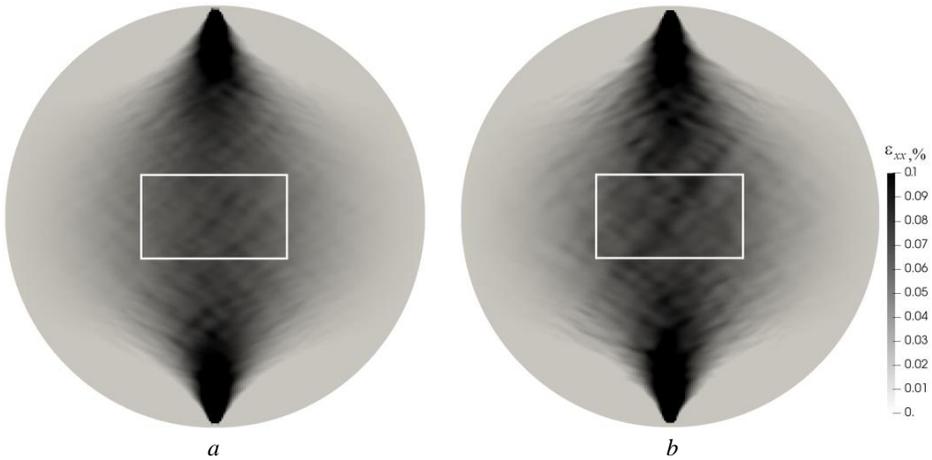


Рис. 2. Распределение компоненты тензора деформации ε_{xx} в образцах с разной пористостью: 4%(a) и 42 % (b)
Fig. 2. Distribution of the strain tensor component ε_{xx} in specimens of various porosities: (a) 4 and (b) 42%

На рис. 3 представлена эволюция неоднородного распределения деформаций на разных этапах деформирования (зарождение деформации, распространение и предразрушение). В образце с пористостью 4% на этапе зарождения деформации наблюдается формирование неоднородных полей локальных деформаций в виде отдельных хаотично расположенных очагов локализации деформации (см. рис. 3, a). С ростом нагрузки очаги локальной деформации увеличиваются за счет увеличения значений локальных деформаций в них, а также становятся более выраженными другие очаги. На картинах распределения локальных деформаций наблю-

даются увеличение площади, занимаемой локализованной деформацией, и рост разброса значений деформаций.

Для образца с пористостью 42% наблюдаются иные картины распределения деформации. На начальном этапе (см. рис. 3, *d*) формируется полоса локализованной деформации, расположенная под углом 45° к оси нагружения в центральной части анализируемой области. С ростом нагрузки значения деформаций увеличиваются, что влечет за собой появление выраженных очагов локализации деформации с формированием сопряженных полос на представленных картинах распределения, а также увеличивается область, занимаемая очагами локализованной деформации.

Полученные картины распределения неоднородных полей деформаций качественно согласуются с наблюдаемыми в экспериментах, представленными в работе [29].

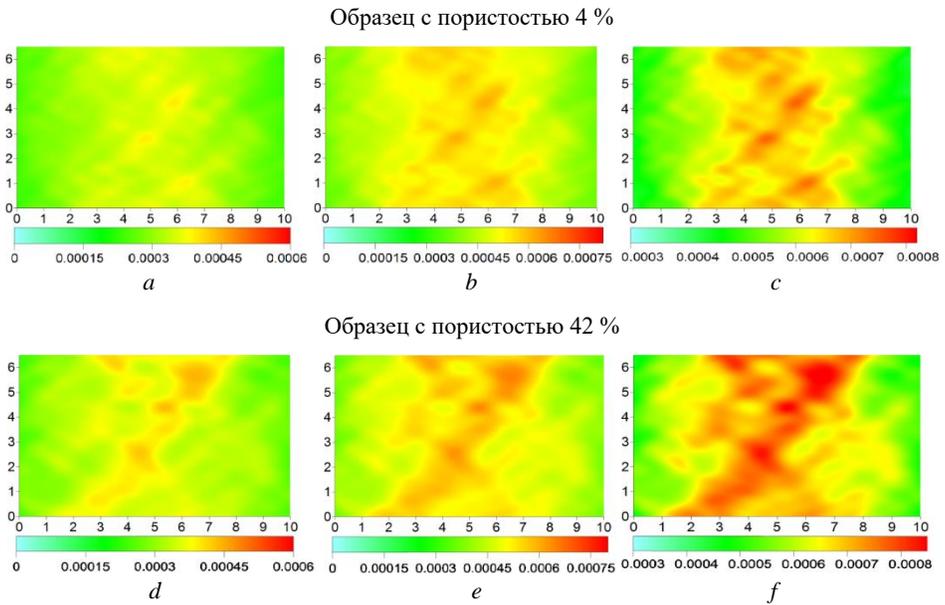


Рис. 3. Распределение компоненты тензора деформации ε_{xx} в центральной части неоднородных образцов в последовательные моменты процесса деформирования: зарождение деформаций (*a, d*), распространение (*b, e*) и предразрушение (*c, f*)

Fig. 3. Distribution of the strain tensor component ε_{xx} in the central part of inhomogeneous specimens at successive moments of deformation: (*a, d*) generation of deformations, (*b, e*) propagation, and (*c, f*) pre-fracture

Природа образования полос локализации под углом $\approx 45^\circ$ к оси нагружения, весьма вероятно, связана со сдвиговыми напряжениями. Это хорошо проявляется в распределениях сдвиговой деформации. На рис. 4 показаны картины распределения сдвиговой компоненты тензора деформации ε_{xy} в образце с пористостью 42%, а также в его центральной части. Наблюдаемая симметрия в распределениях деформаций на рис. 4, *a, b* обусловлена круговой формой образца. Видно, что в центре образца преобладают положительные значения сдвиговой компоненты

тензора деформации. Именно для них наиболее ярко выражена полоса, расположенная под углом $\approx 45^\circ$ к оси нагружения (см. рис. 4, *c*).

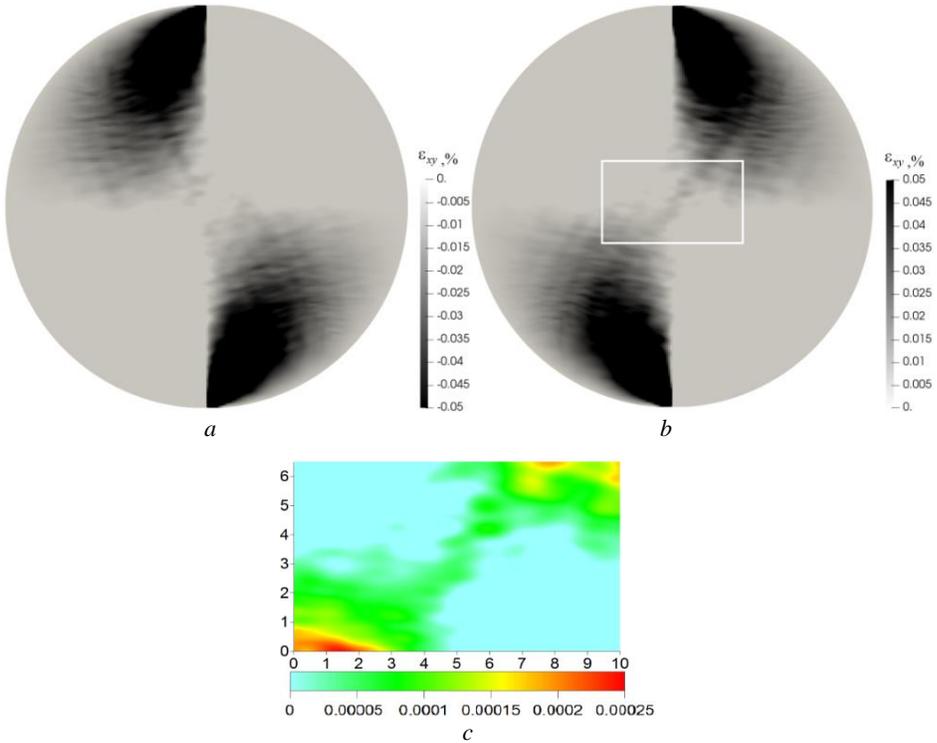


Рис. 4. Распределение сдвиговой компоненты тензора деформации ϵ_{xy} в образце с пористостью 42%: отрицательные значения (*a*), положительные значения (*b*) и положительные значения в центральной части образца (*c*)

Fig. 4. Distribution of the shear component of the strain tensor ϵ_{xy} in a specimen with porosity 42%: (*a*) negative values, (*b*) positive values, and (*c*) positive values in the central part of the specimen

Различие в распределениях деформации для образцов с разной пористостью в выполненных расчетах обусловлено разными моделями неоднородной структуры. Как видно из рис. 1 для образца с пористостью 4% характерно большее количество областей неоднородности с меньшим размером по сравнению с образцом с $\Pi = 42\%$. Предложенный подход для задания неоднородной структуры пористых керамик с использованием случайных гауссовых полей позволяет получать модели неоднородной структуры с разной формой и размерами характерных элементов этой структуры. Варьирование параметров случайного гауссового поля позволяет получать широкий диапазон моделей структуры, среди которых можно выбрать наиболее близкие к реальным структурам материалов, а следовательно, и увеличить корреляцию между экспериментальными и численными результатами по изучению распределения неоднородной деформации. Это является задачей для будущих исследований.

Заключение

В работе численно с использованием метода конечных разностей исследовано распределение неоднородной деформации в пористой циркониевой керамике при диаметральной сжатии. Моделирование неоднородной структуры исследуемой керамики выполнено с помощью гауссова случайного поля путем изменения упругих свойств в разных точках расчетной области. Представленный способ описания неоднородности структуры в образцах привел к развитию неоднородных полей деформаций разной степени и масштаба неоднородности, отличающихся в зависимости от значений пористости. Показано, что деформация локализуется в виде полос, расположенных под углом 45° к оси нагружения. Полученные картины распределения неоднородных полей деформаций качественно согласуются с представленными в работе [29] экспериментальными данными. Для лучшего совпадения результатов моделирования с экспериментом необходимо более точно воспроизвести неоднородность конкретного образца, поскольку, как известно, эта неоднородность отличается от образца к образцу. А именно, регулируя размеры и степень анизотропии областей корреляции гауссовых случайных полей, можно улучшать соответствие результатов моделирования с экспериментальными данными. В результате проведенного моделирования сделан вывод о том, что учет неоднородности свойств в образце с помощью стохастического метода позволяет получить неоднородность распределения деформаций, соответствующую экспериментальным данным.

Список источников

1. ГОСТ 21153.3–85. Породы горные. Методы определения предела прочности при одноосном растяжении, М. : Изд-во стандартов, 1986. 14 с.
2. ASTM D3967–08. Standard Test Method for Splitting Tensile Strength of Intact Rock Core Specimens. West Conshohocken, PA : ASTM International, 2008. 4 p.
3. *Abdullah R., Tsutsumi T., Amin M.F.M., Rashid A.S.A., Khalfalla F.A.I., Ahmed U.A., Shahrin I.* Evolution on deformation behaviour of Brazilian test under different contact area using particle image velocimetry and finite element modeling // *Measurement*. 2020. V. 159. Art. 107796. doi: 10.1016/j.measurement.2020.107796
4. *Abshirini M., Soltani N., Marashizadeh P.* On the mode I fracture analysis of cracked Brazilian disc using a digital image correlation method // *Optics and Lasers in Engineering*. 2016. V. 78. P. 99–105. doi: 10.1016/j.optlaseng.2015.10.006
5. *Kundu S., Stroisz A., Pradhan S.* A simple discrete-element-model of Brazilian test // *The European Physical Journal B*. 2016. V. 89. P. 130-1–130-7. doi: 10.1140/epjb/e2016-60915-y
6. *Zhu W.C., Tang C.A.* Numerical simulation of Brazilian disk rock failure under static and dynamic loading // *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*. 2006. V. 43. P. 236–252. doi: 10.1016/j.ijrmms.2005.06.008
7. *Mousavi Nezhad M., Fisher Q.J., Gironacci E., Rezanian M.* Experimental study and numerical modeling of fracture propagation in shale rocks during Brazilian disk test // *Rock Mechanics and Rock Engineering*. 2018. V. 51. P. 1755–1775. doi: 10.1007/s00603-018-1429-x
8. *Jadaan O.M., Wereszczak A.A.* Effective Size Analysis of the Diametral Compression (Brazil) Test Specimen. Report ORNL-TM-2009/100. Oak Ridge, TN : Oak Ridge National Laboratory, 2009. 39 p.
9. *Reddy S., Mukunda P.G., Aithal K., Shetty P.B.* Strength evaluation of flake and spheroidal graphite cast irons using diametral compression test // *Journal of Materials Research and Technology*. 2017. V. 6 (1). P. 96–100. doi: 10.1016/j.jmrt.2016.09.005

10. *Gálvez F., Rodríguez J., Sánchez V.* Tensile strength measurements of ceramic materials at high rates of strain // *Journal de Physique IV Proceedings, EDP Sciences.* 1997. V. 07 (C3). P. C3-151–C3-156. doi: 10.1051/jp4:1997328
11. *Bouali M.F., Bouassida M.* Numerical Simulation of the effect of loading angle on initial cracks position point: Application to the Brazilian test // *Applied Sciences.* 2021. V. 11 (8). P. 3573-1–3573-21. doi: 10.3390/app11083573
12. *Torquato S.* *Random Heterogeneous Materials: Microstructures and Macroscopic Properties.* New York : Springer, 2002. 724 p.
13. *Rahman S.* A random field model for generating synthetic microstructures of functionally graded materials // *The International Journal for Numerical Methods in Engineering.* 2008. V. 76, is. 7. P. 972–993. doi: 10.1002/nme.2340
14. *Yeong C.L.Y., Torquato S.* Reconstructing random media // *Physical Review E.* 1998. V. 57 (1). P. 495–506. doi: 10.1103/PhysRevE.57.495
15. *Sahimia M., Tahmasebib P.* Reconstruction, optimization, and design of heterogeneous materials and media: Basic principles, computational algorithms, and applications // *Physics Reports.* 2021. V. 939. P. 1–82. doi: 10.1016/j.physrep.2021.09.003
16. *Bochenek B., Pyrz R.* Reconstruction of random microstructures – A stochastic optimization problem // *Computational Materials Science.* 2004. V. 31 (1). P. 93–112. doi: 10.1016/j.commatsci.2004.01.038
17. *Quiblier J.A.* A new three-dimensional modeling technique for studying porous media // *Journal of Colloid and Interface Science.* 1984. V. 98 (1). P. 84–102. doi: 10.1016/0021-9797(84)90481-8
18. *Feng J., Li C., Cen S., Owen D.* Statistical reconstruction of two-phase random media // *Computers & Structures.* 2014. V. 137. P. 78–92. doi: 10.1016/j.compstruc.2013.03.019
19. *Feng J., Cen S., Li C., Owen D.* Statistical reconstruction and Karhunen–Loève expansion for multiphase random media // *The International Journal for Numerical Methods in Engineering.* 2016. V. 105 (1). P. 3–32. doi: 10.1002/nme.4957
20. *Севостьянова И.Н., Саблина Т.Ю., Бурлаченко А.Г., Кульков С.Н.* Механика деформирования и разрушения композита WC-(Fe-Mn-C) при осевом сжатии // *Физическая мезомеханика.* 2021. Т. 24, № 6. С. 50–57. doi: 10.24412/1683-805X-2021-6-50-57
21. *Скрипняк В.В., Иохим К.В., Скрипняк В.А.* Локализация пластической деформации технически чистого титана в сложном напряженном состоянии при высокоскоростном растяжении // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2021. № 70. С. 89–102. doi: 10.17223/19988621/70/8
22. *Ташкинов М.А., Шалимов А.С.* Моделирование влияния микромасштабных морфологических параметров на деформационное поведение пористых материалов с металлической матрицей // *Физическая мезомеханика.* 2021. Т. 24, № 5. С. 130–137. doi: 10.24412/1683-805X-2021-5-130-137
23. *Бакаев Р.А., Макаров П.В., Перишкин А.Ю., Промахов В.В., Жуков А.С., Климова-Корсик О.Г.* Экспериментальное и численное изучение механических свойств и особенностей деформирования и разрушения металлокерамического композита TiNi–TiV₂, полученного методом прямого лазерного выращивания // *Физическая мезомеханика.* 2018. Т. 21, № 5. С. 56–66. doi: 10.24411/1683-805X-2018-15006
24. *Анисимова М.А., Князева А.Г.* Оценка напряжений и деформаций в процессе формирования переходного слоя между частицей и матрицей // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2020. № 63. С. 60–71. doi: 10.17223/19988621/63/6
25. *Микушина В.А., Смолин И.Ю.* Численное моделирование деформирования и разрушения пористой алюмооксидной керамики на мезоуровне // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2019. №. 58. С. 99–108. doi: 10.17223/19988621/58/8
26. *Седов Л.И.* *Механика сплошной среды : в 2 т.* СПб. : Лань, 2004. 528, 560 с.

27. Wilkins M.L. Computer Simulation of Dynamic Phenomena. Berlin : Springer-Verlag, 1999. 246 p.
28. Schlather M., Malinowski A., Menck P.J., Oesting M., Strokorb K. Analysis, simulation and prediction of multivariate random fields with package Random Fields // Journal of Statistical Software. 2015. V. 63 (8). P. 1–25. doi: 10.18637/jss.v063.i08
29. Smolin I.Yu., Zimina V.A., Sablina T.Yu., Sevostyanova I.N., Gorbatenko V.V., Kulkov S.N. Experimental and numerical investigation of strain inhomogeneity in zirconia during a Brazilian test // International Journal of Solids and Structures. 2022. V. 256. Art. 111978. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2022.111978
30. Кульков С.Н., Смолин И.Ю., Микушина В.А., Саблина Т.Ю., Севостьянова И.Н., Горбатенко В.В. Исследование локализации деформации в хрупких материалах при их испытаниях методом «бразильского теста» // Известия вузов. Физика. 2020. Т. 63, № 6 (750). С. 70–76. doi: 10.17223/00213411/63/6/70
31. Ayachit U. The ParaView Guide: A Parallel Visualization Application. Kitware Inc., 2015. 276 p.

References

1. GOST 21153.3–85 (1986) *Porody gornye. Metody opredeleniya predela prochnosti pri odnosnom rastyazhenii* [Rocks. Methods for determination of uniaxial tensile strength].
2. ASTM D3967-08 (2008) *Standard Test Method for Splitting Tensile Strength of Intact Rock Core Specimens*. West Conshohocken, PA: ASTM International.
3. Abdullah R., Tsutsumi T., Amin M.F.M., Rashid A.S.A., Khalfalla F.A.I., Ahmed U.A., Shahrin I. (2020) Evolution on deformation behaviour of Brazilian test under different contact area using particle image velocimetry and finite element modeling. *Measurement*. 159. Article 107796. doi: 10.1016/j.measurement.2020.107796
4. Abshirini M., Soltani N., Marashizadeh P. (2016) On the mode I fracture analysis of cracked Brazilian disc using a digital image correlation method. *Optics and Lasers in Engineering*. 78. pp. 99–105. doi: 10.1016/j.optlaseng.2015.10.006
5. Kundu S., Stroisz A., Pradhan S. (2016) A simple discrete-element-model of Brazilian test. *The European Physical Journal B*. 89. Article 130. doi: 10.1140/epjb/e2016-60915-y
6. Zhu W.C., Tang C.A. (2006) Numerical simulation of Brazilian disk rock failure under static and dynamic loading. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*. 43. pp. 236–252. doi: 10.1016/j.ijrmms.2005.06.008
7. Mousavi Nezhad M., Fisher Q.J., Gironacci E., Rezanian M. (2018) Experimental study and numerical modeling of fracture propagation in shale rocks during Brazilian disk test. *Rock Mechanics and Rock Engineering*. 51. pp. 1755–1775. doi: 10.1007/s00603-018-1429-x
8. Jadaan O.M., Wereszczak A.A. (2009) *Effective Size Analysis of the Diametral Compression (Brazil) Test Specimen*. Report ORNL-TM-2009/100. Oak Ridge National Laboratory.
9. Reddy S., Mukunda P.G., Aithal K., Shetty P.B. (2017) Strength evaluation of flake and spheroidal graphite cast irons using diametral compression test. *Journal of Materials Research and Technology*. 6(1). pp. 96–100. doi: 10.1016/j.jmrt.2016.09.005
10. Gálvez F., Rodríguez J., Sánchez V. (1997) Tensile strength measurements of ceramic materials at high rates of strain. *Journal de Physique IV Proceedings, EDP Sciences*. 07(C3). pp. 151–156. doi: 10.1051/jp4:1997328
11. Bouali M.F., Bouassida M. (2021) Numerical simulation of the effect of loading angle on initial cracks position point: application to the Brazilian test. *Applied Sciences*. 11(8). Article 3573. doi: 10.3390/app11083573
12. Torquato S. (2002) *Random Heterogeneous Materials: Microstructures and Macroscopic Properties*. New York: Springer.
13. Rahman S. (2008) A random field model for generating synthetic microstructures of functionally graded materials. *The International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 76(7). pp. 972–993. doi: 10.1002/nme.2340

14. Yeong C.L.Y., Torquato S. (1998) Reconstructing random media. *Physical Review E*. 57(1). pp. 495–506. doi: 10.1103/PhysRevE.57.495
15. Sahimia M., Tahmasebib P. (2021) Reconstruction, optimization, and design of heterogeneous materials and media: basic principles, computational algorithms, and applications. *Physics Reports*. 939. pp. 1–82. doi: 10.1016/j.physrep.2021.09.003
16. Bochenek B., Pyrz R. (2004) Reconstruction of random microstructures – A stochastic optimization problem. *Computational Materials Science*. 31(1). pp. 93–112. doi: 10.1016/j.commatsci.2004.01.038
17. Quiblier J.A. (1984) A new three-dimensional modeling technique for studying porous media. *Journal of Colloid and Interface Science*. 98(1). pp. 84–102. doi: 10.1016/0021-9797(84)90481-8
18. Feng J., Li C., Cen S., Owen D. (2014) Statistical reconstruction of two-phase random media. *Computers & Structures*. 137. pp. 78–92. doi: 10.1016/j.compstruc.2013.03.019
19. Feng J., Cen S., Li C., Owen D. (2016) Statistical reconstruction and Karhunen–Loève expansion for multiphase random media. *The International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 105(1). pp. 3–32. doi: 10.1002/nme.4957
20. Sevostyanova I.N., Sablina T.Y., Burlachenko A.G., Kulkov S.N. (2022) Deformation and fracture mechanics of WC-(Fe-Mn-C) composite in axial compression. *Physical Mesomechanics*. 25. pp. 142–148. doi: 10.1134/S1029959922020059
21. Skripnyak V.V., Iokhim K.V., Skripnyak V.A. (2021) Lokalizatsiya plasticheskoy deformatsii tekhnicheskii chistogo titana v slozhnom napryazhennom sostoyanii pri vysokoskorostnom rastyazhenii [Localization of plastic deformation in commercially pure titanium in a complex stress state under high-speed tension]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta, matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 70. pp. 89–102. doi: 10.17223/19988621/70/8
22. Tashkinov M.A., Shalimov A.S. (2021) Modeling of the effect of microscale morphological parameters on the deformation behavior of porous materials with a metal matrix. *Physical Mesomechanics*. 24. pp. 618–624. doi: 10.1134/S1029959921050131
23. Bakeev R.A., Makarov P.V., Peryshkin A.Yu., Promakhov V.V., Zhukov A.S., Klimova-Korsmik O.G. (2018) Eksperimental'noe i chislennoe izuchenie mekhanicheskikh svoystv i osobennostey deformirovaniya i razrusheniya metallokeramicheskogo kompozita TiNi–TiB₂, poluchennogo metodom pryamogo lazernogo vyrashchivaniya [Experimental and numerical study of the mechanical properties and features of deformation and fracture of the TiNi–TiB₂ ceramic-metal composite obtained by direct laser growth]. *Fizicheskaya mezomekhanika – Physical Mesomechanics*. 21(5). pp. 56–66. doi: 10.24411/1683-805X-2018-15006
24. Anisimova M.A., Knyazeva A.G. (2019) Otsenka napryazheniy i deformatsiy v protsesse formirovaniya perekhodnogo sloya mezhdru chastitsey i matritsey [Evaluation of the stress and strain during transition layer formation between a particle and a matrix]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta, matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 63. pp. 60–71. doi: 10.17223/19988621/63/6
25. Mikushina V.A., Smolin I.Yu. (2019) Chislennoe modelirovanie deformirovaniya i razrusheniya poristoy alyumooksidnoy keramiki na mezourovne [Numerical modeling of the deformation and fracture of a porous alumina ceramics at mesoscale]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta, matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 58. pp. 99–108. doi: 10.17223/19988621/58/8
26. Sedov L.I. (1997) *Mechanics of Continuous Media. Series in Theoretical and Applied Mechanics*. Singapore: World Scientific.
27. Wilkins M.L. (1999) *Computer Simulation of Dynamic Phenomena*. Berlin: Springer-Verlag.
28. Schlather M., Malinowski A., Menck P.J., Oesting M., Storkorb K. (2015) Analysis, simulation and prediction of multivariate random fields with package Random Fields. *Journal of Statistical Software*. 63(8). pp. 1–25. doi: 10.18637/jss.v063.i08
29. Smolin I.Yu., Zimina V.A., Sablina T.Yu., Sevostyanova I.N., Gorbatenko V.V., Kulkov S.N. (2022) Experimental and numerical investigation of strain inhomogeneity in zirconia during

- a Brazilian test. *International Journal of Solids and Structures*. 256. Article 111978. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2022.111978
30. Kulkov S.N., Smolin I.Yu., Mikushina V.A., Sablina T.Yu., Sevostyanova I.N., Gorbatenko V.V. (2020) Studying strain localization in brittle materials during the Brazilian test. *Russian Physics Journal*. 63. pp. 976–983. doi: 10.1007/s11182-020-02126-z
31. Ayachit U. (2015) *The ParaView Guide: A Parallel Visualization Application*. New York: Kitware Inc.

Сведения об авторе:

Зими́на Валентина Алексеевна – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, Россия. E-mail: miva@ispms.ru

Information about the author:

Zimina Valentina A. (Candidate of Physics and Mathematics, Junior Researcher of Institute of Strength Physics and Materials Science SB RAS, Tomsk, Russian Federation). E-mail: miva@ispms.ru

Статья поступила в редакцию 07.10.2022; принята к публикации 10.10.2023

The article was submitted 07.10.2022; accepted for publication 10.10.2023

Научная статья

УДК 533.17

doi: 10.17223/19988621/85/10

Математическое моделирование взаимодействия одиной сверхзвуковой струи с подвижной преградой

Ануар Магжанович Кагенов¹, Кирилл Владимирович Костюшин²,
Анастасия Владимировна Червакова³,
Иван Владимирович Еремин⁴,

1, 2, 3, 4 Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ anuar@ftf.tsu.ru

² kostushink@niipmm.tsu.ru

³ ch-nastya1997@mail.ru

⁴ iveremin@niipmm.tsu.ru

Аннотация. Описаны результаты исследования взаимодействия одиной сверхзвуковой струи с подвижной преградой. Преграда приближалась и отдалялась перпендикулярно оси струи от среза сопла со скоростью 1 м/с. Дистанция перемещения преграды составляла 0.03 м. При движении преграды по потоку преграда находилась в зоне возрастания чисел Маха, а при движении против – в зоне убывания. Получено, что для всех расчетных вариантов ударно-волновая структура не является стационарной. Показано, что при движении преграды против течения струи реализуется автоколебательный режим с массорасходным механизмом возникновения пульсаций. Для конфигурации с движением преграды против течения струи амплитуда колебаний в 3–5 раз выше, чем для конфигурации с движением преграды по течению струи.

Ключевые слова: газовая динамика, математическое моделирование, численные исследования, импактная сверхзвуковая струя, подвижная преграда, OpenFOAM

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации МК-761.2022.1.1.

Для цитирования: Еремин И.В., Кагенов А.М., Костюшин К.В., Червакова А.В. Математическое моделирование взаимодействия одиной сверхзвуковой струи с подвижной преградой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 85. С. 146–156. doi: 10.17223/19988621/85/10

Mathematical modeling of the interaction of a single supersonic jet with a moving barrier

Anuar M. Kagenov¹, Kirill V. Kostyushin²,
Anastasiya V. Chervakova³, Ivan V. Eremin⁴,

^{1, 2, 3, 4} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ anuar@ftf.tsu.ru

² kostushink@niipmm.tsu.ru

³ ch-nastya1997@mail.ru

⁴ iveremin@niipmm.tsu.ru

Abstract. This paper presents the results of research on a single supersonic jet interaction with a moving obstacle. The problem is described mathematically using the Favre-averaged Navier-Stokes equations. OpenFOAM free software is used to implement physical and mathematical modeling and perform numerical calculations. The obstacle moves forward and back perpendicular to the axis of the jet from the nozzle section at a velocity of 1 m/s over a distance of 0.03 m. When the obstacle moves along the flow, it appears in the zone of increasing Mach numbers, and when it moves against the flow, in the zone of decreasing Mach numbers. For all calculation options, the shock-wave structure is found to be non-stationary. It is shown that when the obstacle moves against the jet flow, an auto-oscillatory mode with mass-consuming nature of pulsations occurs. The amplitude of oscillations is 3-5 times higher when using the configuration with the obstacle moving against the jet flow than when using the configuration with the obstacle moving along the jet flow.

Keywords: gas dynamics, mathematical modeling, numerical studies, impact supersonic jet, moving obstacle, OpenFOAM

Acknowledgments: This research was carried out with a financial support of the grant from the President of the Russian Federation MK-761.2022.1.1.

For citation: Eremin, I.V., Kagenov, A.M., Kostyushin, K.V., Chervakova, A.V. (2023) Mathematical modeling of the interaction of a single supersonic jet with a moving barrier. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 146–156. doi: 10.17223/19988621/85/10

Введение

Развитие современной и перспективной ракетно-космической техники связано с решением ряда фундаментальных и прикладных задач. Одна из них – доставка космических аппаратов и полезной нагрузки на поверхности тел Солнечной системы. При выполнении космическим аппаратом старта или посадки важной проблемой являются нестационарные процессы взаимодействия сверхзвуковых струй с поверхностями, в результате чего образуются области торможения потока, а вдоль поверхности распространяется периферийное течение. В области между срезом сопла и поверхностью реализуется сложная конфигурация струи. Картина течения включает в себя контактные разрывы, волны разряжения и удар-

ные волны, присутствуют зоны смешения. На сегодняшний день опубликован ряд работ, посвященных изучению различных аспектов данной задачи. В большинстве из них рассматривается случай взаимодействия одиночной сверхзвуковой струи с плоской преградой. В работах [1–7] проведен ряд экспериментальных и численных исследований взаимодействия струй с поверхностями, показано два режима такого взаимодействия: стационарный и нестационарный. Авторами работы [8] проведены экспериментальные исследования нестационарного взаимодействия недорасширенной струи с преградой, рассмотрен ряд автоколебательных режимов и их особенностей. Более полный обзор литературы по взаимодействию сверхзвуковых струй с преградой приведен в [9, 10].

Большинство экспериментальных и теоретических работ посвящено исследованию взаимодействия сверхзвуковых струй с неподвижными поверхностями. Наблюдается недостаток исследований особенностей газодинамических процессов, происходящих при взаимодействии сверхзвуковых струй с подвижными преградами. Цель данной работы – математическое моделирование взаимодействия одиночной сверхзвуковой струи с подвижной преградой.

Физико-математическая постановка задачи и метод решения

Для математического описания задачи использовалась система уравнений Навье–Стокса, осредненная по Фавру в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 [11].

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\rho} \tilde{u}_j] = 0, \quad (1)$$

где $\bar{\rho}$ – плотность; t – время; \tilde{u}_j – скорость; x_j – координата.

Уравнение импульса:

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \bar{p} \delta_{ij} - \tilde{\tau}_{ij}] = 0, \quad (2)$$

где $i = 1, 2, 3$; \bar{p} – давление; δ_{ij} – символ Кронекера.

Уравнение энергии:

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{E})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{E} + \tilde{u}_j \bar{p} + \tilde{q}_j - \tilde{u}_i \tilde{\tau}_{ij}] = 0, \quad (3)$$

где \tilde{E} – полная внутренняя энергия; \tilde{q}_j – тепловой поток.

Система уравнений (1)–(3) замыкается уравнением состояния идеального газа и моделью турбулентности SST $k - \omega$ [8].

Тензор вязких напряжений имеет следующий вид:

$$\tilde{\tau}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} - \overline{\rho u_i'' u_j''},$$

где μ – коэффициент динамической вязкости.

Расчеты выполнялись от минимального сечения сопла аналогично работе [6]. Схема расчетной области приведена на рис. 1. В качестве граничных условий на границе $\Gamma 1$ задавался вектор скорости $\bar{u} = u_* \bar{n}$ (где \bar{n} – вектор внутренней нор-

мали к границе $\Gamma 1$), давление и температура: $P = P_*$, $T = T_*$, кинетическая энергия турбулентности и диссипация кинетической энергии турбулентности: $k = k_*$, $\omega = \omega_*$, где индексом * обозначены параметры в критическом сечении сопла. На границах $\Gamma 2$, $\Gamma 5$ для скорости задавались условия прилипания: $\bar{u} = [0, 0, 0]$; для температуры условия тепловой изоляции: $\text{grad}(T) = 0$; для давления: $\text{grad}(P) = 0$. Для постановки граничных условий для характеристик турбулентности на стенках используется метод пристеночных функций. Граничные условия для $\Gamma 3$ имеют следующий вид: $P = P_a$, $T = T_a$, $\bar{u} = [0, 0, 0]$, где индексом a обозначены параметры на бесконечности. Для границы $\Gamma 4$ использовались мягкие граничные условия: $\partial/\partial n = 0$. Граница $\Gamma 5$ движется по направлению против потока со скоростью 1 м/с. В качестве начальных условий во всей расчетной области задаются параметры невозмущенной среды: $P = P_a$, $T = T_a$, $\bar{u} = [0, 0, 0]$.

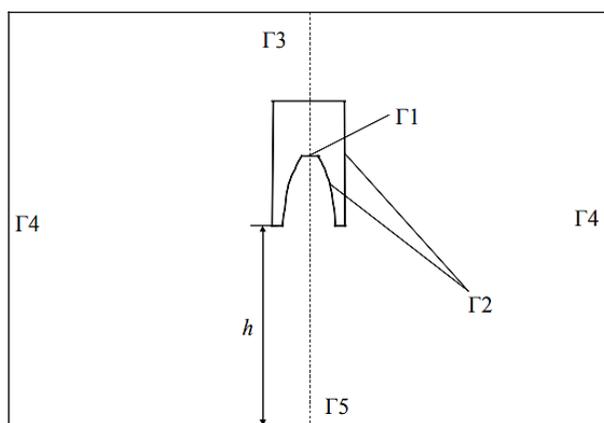


Рис. 1. Схема расчетной области
Fig. 1. Scheme of a computational domain

Для решения использовалась схема, основанная на методе С.К. Годунова второго порядка точности с ограничителем van Leer [12]. Дискретизация по времени производилась методом Рунге–Кутты второго порядка аппроксимации. Движение границы реализовано с использованием алгоритма, основанного на изменении координат вершин расчетных ячеек, лежащих на поверхности преграды, с сохранением топологии расчетной сетки [13]. Численное моделирование данной задачи было проведено с помощью открытого пакета OpenFOAM. Расчеты выполнены на базе суперкомпьютера СКИФ Cyberia. Распараллеливание задачи осуществлялось методом декомпозиции расчетной области Scotch с использованием технологий MPI [14].

Результаты численных исследований

В расчетах использовался профиль сопла из работ [6, 7, 15]. Преграда приближалась перпендикулярно оси струи к срезу сопла со скоростью 1 м/с. В качестве

рабочего тела был использован воздух с параметрами: показатель адиабаты $k = 1.4$, газовая постоянная $R = 287$ Дж/(кг·К), динамическая вязкость $\mu = 1.8 \cdot 10^{-5}$ Па·с, давление и температура в критическом сечении $P^* = 56$ атм, $T^* = 250$ К. Длина расчетной области составила 10 м, ширина – 10 м, высота – 4 м. Расстояние от среза сопла до преграды $h = 0.308$ м. В расчетах использовалась генерируемая с помощью программного обеспечения Salome гексаэдральная структурированная расчетная сетка с числом ячеек 4 млн. Расчетная сетка обеспечивала 20 ячеек на радиус среза сопла. Расчет проводился до момента времени 0.03 с. Дистанция перемещения преграды составляла 0.03 м, что обеспечивало смещение поверхности преграды на расстояние, не превышающее половину длины второй «бочки» Маха невозмущенной струи. При движении преграды по потоку преграда находилась в зоне возрастания чисел Маха, а при движении против – в зоне убывания.

На рис. 2 показано изменение давления в критической точке на поверхности преграды для расчетных конфигураций с движением преграды по течению и против течения истекающей струи. Для расчетной конфигурации с движением преграды по течению струи получено хорошее количественное и качественное совпадение с результатами экспериментальной работы [7]. Анализ расчетных данных показывает, что для рассматриваемых расчетных конфигураций при удалении преграды на дистанцию более 5 мм уровень давления в критической точке при движении преграды по течению струи выше, чем при движении против течения, в 3.5 раза. При движении преграды против течения струи наблюдаются существенные колебания давления, амплитуда и частота колебаний значительно выше, чем при движении преграды по течению струи. Это обусловлено различной локальной нестационарной картиной течения в окрестности преграды. При незначительном удалении преграды (на расстояние менее 4 мм) уровень давления на преграде в критической точке для расчетных конфигураций с движением преграды по и против течения струи согласуется с экспериментальными [7] и расчетными [6, 15] данными для неподвижной преграды.

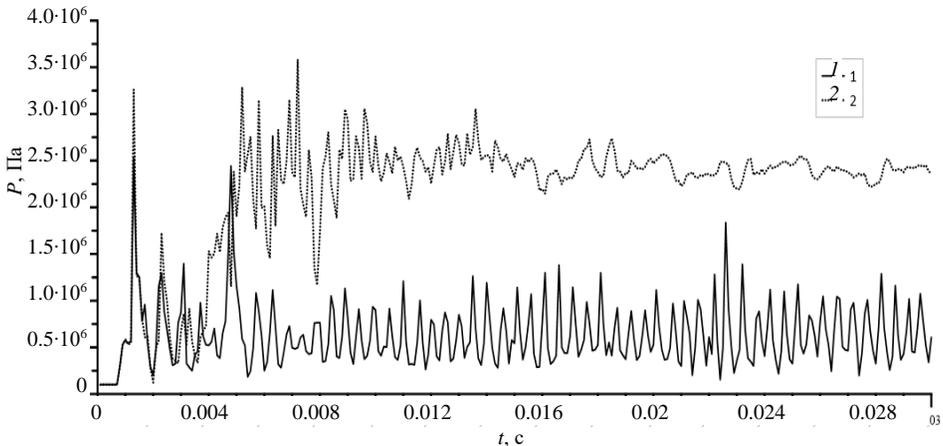


Рис. 2. Давление на преграде в критической точке: 1 – с движением преграды против течения струи, 2 – с движением преграды по течению струи

Fig. 2. Pressure on the obstacle at a critical point: the obstacle is moving (1) against and (2) along the jet flow

На рис. 3 и рис. 4 для иллюстрации ударно-волновой картины течения показан модуль градиента плотности для расчетных конфигураций с движением преграды по течению и против течения струи. Видно, что при движении преграды по течению струи сохраняется симметричная картина течения. Ударно-волновая структура не является стационарной, реализуются периодические колебания относительно вертикальной оси. На всем временном промежутке в окрестности преграды вблизи оси наблюдается отраженная ударная волна с криволинейным фронтом. Течение в области между отраженной ударной волной и преградой – дозвуковое, с увеличением расстояния до преграды высота зоны торможения остается практически неизменной. Колебания не превышают 10% толщины зоны торможения, а осредненного по объему давления в зоне торможения – 5%. Максимум давления на преграде располагается в окрестности критической точки (рис. 5, *b*).

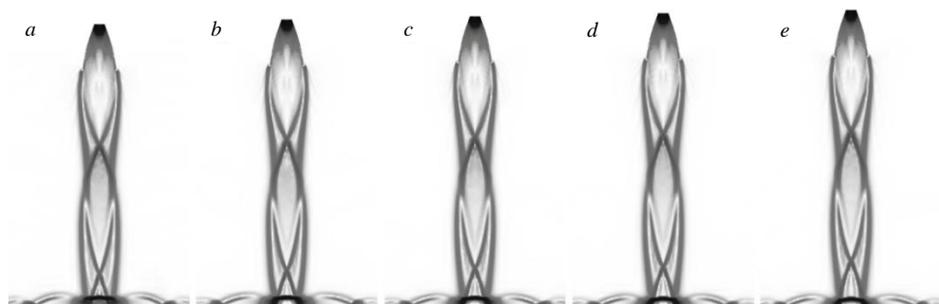


Рис. 3. Градиент плотности для расчетной конфигурации с движением преграды по течению струи в моменты времени: *a* – 0.01 с, *b* – 0.015 с, *c* – 0.02 с, *d* – 0.025 с, *e* – 0.03 с

Fig. 3. Density gradient for the calculated configuration with the obstacle moving along the jet flow at the time instants of (*a*) 0.01, (*b*) 0.015, (*c*) 0.02, (*d*) 0.025, and (*e*) 0.03 s

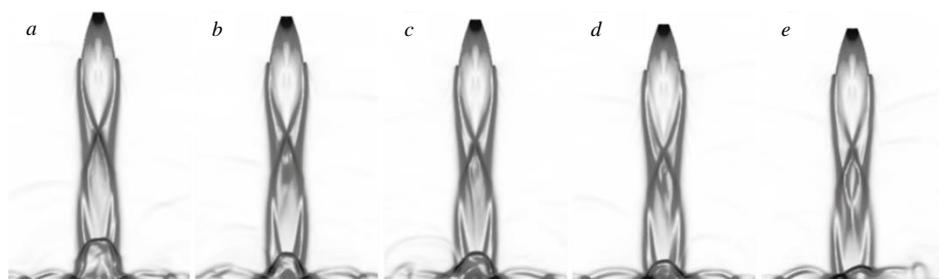


Рис. 4. Градиент плотности для расчетной конфигурации с движением преграды против течения струи в моменты времени: *a* – 0.01 с, *b* – 0.015 с, *c* – 0.02 с, *d* – 0.025 с, *e* – 0.03 с

Fig. 4. Density gradient for the calculated configuration with the obstacle moving against the jet flow at the time instants of (*a*) 0.01, (*b*) 0.015, (*c*) 0.02, (*d*) 0.025, and (*e*) 0.03 s

При движении преграды против течения струи реализуется автоколебательный режим течения с массорасходным механизмом возникновения пульсаций [4, 5]. В отличие от конфигурации с движением преграды по течению струи перемещения диска Маха относительно вертикальной оси на автоколебательном режиме происходят с большей амплитудой и частотой. Картина течения в окрестности преграды – существенно несимметричная (см. рис. 4). В окрестности оси струи

наблюдается рост массы газа. В области за центральной ударной волной происходит рост давления (рис. 6, *a*). Данное явление вызвано тем, что максимум давления на преграде располагается в окрестности границы струи. В результате происходит смещение прямой центральной ударной волны вверх по потоку (рис. 6, *b, c*) и выброс избыточной массы газа (рис. 6, *c–e*). В области между отраженной ударной волной и преградой отмечается наличие локальных зон сверхзвукового течения. В результате выброса массы газа через боковую поверхность давление вблизи преграды падает, а центральная ударная волна смещается по направлению к преграде (рис. 6, *e, f*). Процесс сопровождается образованием вихревого течения с тороидальным вихрем, расположенным под наклоном к поверхности преграды (рис. 5, *a*). Область в окрестности пересечения плоскости главного меридиана тороидального вихря и плоскости преграды соответствует зоне выброса массы газа.

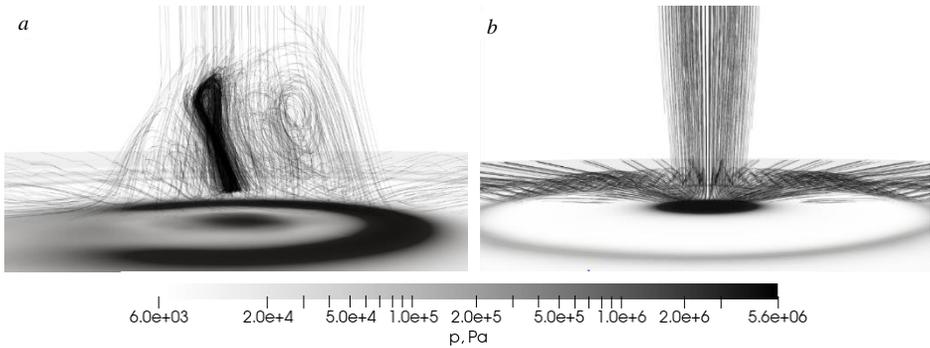


Рис. 5. Линии тока и распределение давления на поверхности преграды в момент времени 0.02 с для расчетной конфигурации: *a* – с движением преграды против течения струи, *b* – с движением преграды по течению струи

Fig. 5. Streamlines and pressure distribution on the obstacle surface at a time of 0.02 s for the calculated configuration: the obstacle is moving (*a*) against and (*b*) along the jet flow



Рис. 6. Эволюция ударно-волновой структуры течения в окрестности преграды для расчетной конфигурации с движением преграды против течения струи в моменты времени: *a* – 0.0226 с, *b* – 0.0227 с, *c* – 0.0228 с, *d* – 0.0229 с, *e* – 0.023 с, *f* – 0.0231 с

Fig. 6. Evolution of a shock wave structure of the flow in the barrier vicinity for the calculated configuration with the obstacle moving against the jet flow at the time instants of (*a*) 0.0226, (*b*) 0.0227, (*c*) 0.0228, (*d*) 0.0229, (*e*) 0.023, and (*f*) 0.0231 s

Изменение максимального давления на поверхности преграды для рассматриваемых расчетных конфигураций с движением преграды по течению и против течения струи показано на рис. 7. Видно, что процессы выброса избыточной массы приводят к значительному увеличению амплитуды и частоты колебаний максимального давления. Для конфигурации с движением преграды против течения

струи амплитуда колебаний в 3–5 раз выше, чем для конфигурации с движением преграды против течения струи.

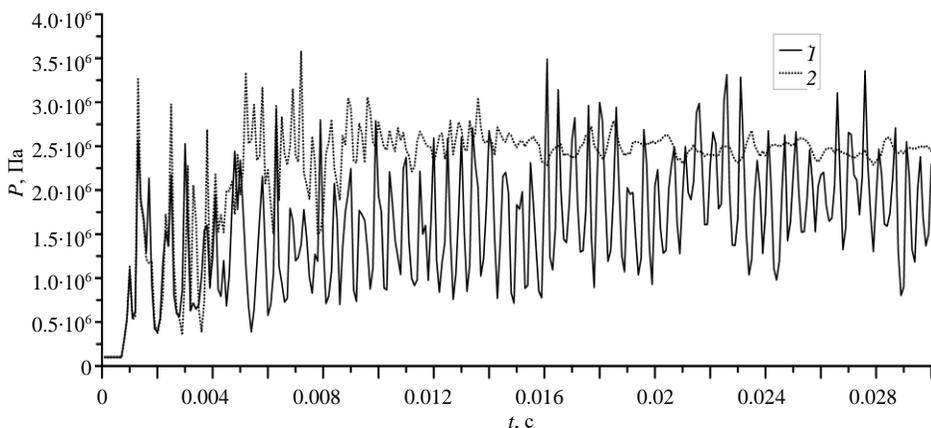


Рис. 7. Максимальное давление на поверхности преграды для расчетной конфигурации: 1 – с движением преграды против течения струи, 2 – с движением преграды по течению струи

Fig. 7. Maximum pressure on the obstacle surface for the calculated configuration: the obstacle is moving (1) against and (2) along the jet flow

Данный эффект может оказать значительное влияние на оценку процессов эрозии поверхности при воздействии сверхзвуковых струй посадочных аппаратов.

Заключение

В результате выполнения данной работы проведены математическое моделирование и численные исследования взаимодействия одиночной сверхзвуковой струи с подвижной плоской преградой. Преграда приближалась и отдалялась перпендикулярно оси струи от среза сопла со скоростью 1 м/с на расстояние 30 мм. Показана эволюция ударно-волновой картины течения. Исследован характер нестационарного течения газа в окрестности торможения струи. Получено, что для всех расчетных вариантов ударно-волновая структура не является стационарной. При движении преграды по течению струи в области за прямым скачком отсутствует развитое вихревое течение, а колебания толщины зоны торможения не превышают 10%. При движении преграды против течения струи реализуется автоколебательный режим с массорасходным механизмом возникновения пульсаций.

Список источников

1. Lamont P.J., Hunt B.L. The impingement of underexpanded axisymmetric jets on wedges // Journal of Fluid Mechanics. 1976. V. 76. P. 307–336. doi:10.1017/S0022112076000657
2. Мельникова М.Ф., Нестеров Ю.Н. Воздействие сверхзвуковой нерасчетной струи на плоскую преграду, перпендикулярную оси струи // Ученые записки ЦАГИ. 1971. Т. 2, № 5. С. 44–58.
3. Alvi F.S., Ladd J.A., Bower W.W. Experimental and computational investigation of supersonic impinging jets // AIAA Journal. 2002. V. 40 (4). P. 599–609. doi: 10.2514/2.1709

4. Киселев С.П., Киселев В.П., Зайковский В.Н. О механизме автоколебаний при натекании сверхзвуковой струи на преграду. 1. Преграда с иглой // Прикладная механика и техническая физика. 2014. Т. 55, № 4. С. 50–59.
5. Киселев С.П., Киселев В.П., Зайковский В.Н. О механизме автоколебаний при натекании сверхзвуковой струи на преграду. 2. Преграда без иглы // Прикладная механика и техническая физика. 2014. Т. 55, № 5. С. 21–28.
6. Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В., Третьякова О.Н. Численное моделирование взаимодействия многоблочных сверхзвуковых турбулентных струй с преградой // Труды МАИ. 2013. № 70. С. 1–14.
7. Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В., Третьякова О.Н. Результаты экспериментальных исследований взаимодействия многоблочных сверхзвуковых турбулентных струй с преградой // Труды МАИ. 2013. № 69. С. 1–11.
8. Горшков Г.Ф., Усков В.Н. Особенности автоколебаний, возникающих при обтекании ограниченной преграды сверхзвуковой недорасширенной струей // Прикладная механика и техническая физика. 1999. Т. 40, № 4. С. 143–149.
9. Савельев А.Д. Использование составных компактных схем высокого порядка при решении задачи взаимодействия сверхзвуковой струи с поверхностью // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53, № 10. С. 1746–1759. doi: 10.7868/S0044466913080103
10. Запрягаев В.И., Киселев Н.П., Кундасев С.Г. Структура течения при взаимодействии сверхзвуковой перерасширенной струи с плоской наклонной преградой // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. 2016. № 45. С. 32–49. doi: 10.15593/2223-9982/2016.45.02
11. Wilcox D.C. Turbulence modeling for CFD. La Canada, CA: DCW Industries. 1998. 460 p.
12. B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comp. Phys. 1979. V. 32 (1). P. 101–136. doi: 10.1016/00219991(79)90145-1
13. Костюшин К.В. Численное исследование нестационарных газодинамических процессов при старте твердотопливных ракет // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 67. С. 127–143. doi: 10.17223/19988621/67/12
14. MPI Forum. URL: <https://www.mpi-forum.org> (accessed: 04.04.2021).
15. Глазунов А.А., Кагенов А.М., Костюшин К.В., Еремин И.В., Котонозов В.А., Алигасанова К.Л. Математическое моделирование взаимодействия одиночной сверхзвуковой струи с преградами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 63. С. 87–101. doi: 10.17222/19988621/63/8

References

1. Lamont P.J., Hunt B L. (1976) The impingement of underexpanded axisymmetric jets on wedges. *Journal of Fluid Mechanics*. 76(2). pp. 307–336. doi: 10.1017/S0022112076000657
2. Mel'nikova M.F., Nesterov Yu.N. (1971) Vozdeystvie sverkhzvukovoy nerashchetnoy strui na ploskuyu pregradu, perpendikulyarnuyu osi strui [The impact of an off-design supersonic jet on a flat barrier perpendicular to the jet axis]. *Uchenye zapiski TSAGI*. 2(5). pp. 105–108.
3. Alvi F.S., Ladd J.A., Bower W.W. (2002) Experimental and computational investigation of supersonic impinging jets. *AIAA Journal*. 40(4). pp. 599–609. doi: 10.2514/2.1709
4. Kiselev S.P., Kiselev V.P., Zaikovskii V.N. (2014) Mechanism of self-oscillations in a supersonic jet impact onto an obstacle 1. Obstacle with a spike. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 55(4). pp. 593–601. doi: 10.1134/S0021894414040063
5. Kiselev S.P., Kiselev V.P., Zaikovskii V.N. (2014) Mechanism of self-oscillations in a supersonic jet impact onto an obstacle 2. Obstacle with no spike. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 55(4). pp. 742–749. doi: 10.1134/S0021894414050034

6. Kudimov N.F., Safronov A.V., Tret'yakova O.N. (2013) Chislennoe modelirovanie vzaimodeystviya mnogoblochnykh sverkhzvukovykh turbulentnykh struy s pregradoy [Numerical simulation of the interaction of multiblock supersonic turbulent jets with an obstacle]. *Trudy MAI*. 70. pp. 1–14.
7. Kudimov N.F., Safronov A.V., Tret'yakova O.N. (2013) Rezul'taty eksperimental'nykh issledovaniy vzaimodeystviya mnogoblochnykh sverkhzvukovykh turbulentnykh struy s pregradoy [Results of experimental research of the interaction of multiblock supersonic turbulent jets with an obstacle]. *Trudy MAI*. 69. pp. 1–11.
8. Gorshkov G.F., Uskov V.N. (1999) Osobennosti avtokolebaniy, voznikayushchikh pri obtekanii ogranichennoy pregrady sverkhzvukovoy nedorasshirennoy strui [Features of self-oscillations arising during the flow around a limited obstacle by a supersonic underexpanded jet]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 40(4). pp. 143–149.
9. Savel'ev A.D. (2013) Ispol'zovanie sostavnykh kompaktnykh skhem vysokogo poryadka pri reshenii zadachi vzaimodeystviya sverkhzvukovoy strui s poverkhnost'yu [The use of composite compact high-order schemes in solving the problem of the interaction of a supersonic jet with a surface]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 53(10). pp. 1746–1759. doi: 10.7868/S0044466913080103
10. Zapryagaev V.I., Kiselev N.P., Kundasev S.G. (2016) Struktura techeniya pri vzaimodeystvii sverkhzvukovoy pererasshirennoy strui s ploskoy naklonnoy pregradoy [Flow structure during the interaction of a supersonic overexpanded jet with a flat inclined barrier]. *Vestnik PNIPU. Aerokosmicheskaya tekhnika – PNRPU Aerospace Engineering Bulletin*. 2(45). pp. 32–49. doi: 10.15593/2223-9982/2016.45.02
11. Wilcox D.C. (1998) *Turbulence Modeling for CFD*. California: DCW industries.
12. B. van Leer. (1979) Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method. *Journal of Computational Physics*. 32(1). pp. 101–136. doi: 10.1016/00219991(79)90145-1
13. Kostyushin K.V. (2020) Chislennoe issledovanie nestatsionarnykh gazodinamicheskikh protsessov pri starte tverdoplivnykh raket [Numerical investigation of unsteady gasdynamic processes at the launch of solid-propellant rockets]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 67. pp. 127–143. doi: 10.17223/19988621/67/12
14. *MPI Forum*. URL: <https://www.mpi-forum.org> (Accessed Apr 04, 2021).
15. Glazunov A.A., Kagenov A.M., Kostyushin K.V., Eremin I.V., Kotonogov V.A., Aligasanova K.L. (2020) Matematicheskoe modelirovanie vzaimodeystviya odinochnoy sverkhzvukovoy strui s pregradami [Mathematical modeling of the interaction of a single supersonic jet with obstacles]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 63. pp. 87–101. doi: 10.17223/19988621/63/8

Сведения об авторах:

Еремин Иван Владимирович – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией 101 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: iveremin@niipmm.tsu.ru

Кагенов Ануар Магжанович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной аэромеханики физико-технического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: anuar@ftf.tsu.ru

Костюшин Кирилл Владимирович – младший научный сотрудник лаборатории математической физики Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: kostushink@niipmm.tsu.ru

Червакова Анастасия Владимировна – младший научный сотрудник лаборатории математической физики Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: ch-nastya1997@mail.ru

Information about the authors:

Eremin Ivan V. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: iveremin@niipmm.tsu.ru

Kagenov Anuar M. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: anuar@ftf.tsu.ru

Kostyushin Kirill V. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kostushink@niipmm.tsu.ru

Chervakova Anastasiya V. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ch-nastya1997@mail.ru

Статья поступила в редакцию 08.12.2022; принята к публикации 10.10.2023

The article was submitted 08.12.2022; accepted for publication 10.10.2023

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/85/12

Об обращении нелинейных определяющих соотношений для гиперупругих анизотропных материалов

Марина Юрьевна Соколова¹, Дмитрий Викторович Христич²

Тульский государственный университет, Тула, Россия

¹ *m.u.sokolova@gmail.com*

² *dmitrykhristich@rambler.ru*

Аннотация. Сформулированы условия, накладываемые на упругие потенциалы полиномиального вида, при выполнении которых возможно обращение нелинейных определяющих соотношений между напряжениями и деформациями. Исходя из полученных условий для изотропного материала и анизотропного материала, относящегося по типу симметрии свойств к кубической кристаллографической системе, получены выражения коэффициентов упругих податливостей второго и третьего порядков через константы упругости второго и третьего порядков.

Ключевые слова: анизотропия, гиперупругость, конечные деформации, тензорные базисы, нелинейные определяющие соотношения

Благодарности: Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

Для цитирования: Соколова М.Ю., Христич Д.В. Об обращении нелинейных определяющих соотношений для гиперупругих анизотропных материалов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 85. С. 157–167. doi: 10.17223/19988621/85/12

Original article

On the inversion of nonlinear constitutive relations for hyperelastic anisotropic materials

Marina Yu. Sokolova¹, Dmitry V. Khristich²

Tula State University, Tula, Russian Federation

¹ *m.u.sokolova@gmail.com*

² *dmitrykhristich@rambler.ru*

Abstract. The polynomial elastic potentials represented by the power functions of their arguments are considered for hyperelastic anisotropic materials. The conditions for the elastic free energy $W(\epsilon)$ and Gibbs potential $V(\mathbf{T})$ in isothermal processes are assigned so

that the nonlinear constitutive relations can be inverted. For polynomial elastic potentials, whose coefficients are dependent on elastic constants of the second and third orders, a dependence between the coefficients of the potential $W(\epsilon)$ (elasticity constants) and the coefficients of the potential $V(T)$ (elastic compliances) is obtained.

The relationships between the elastic constants and the coefficients of elastic compliance of the second and third orders for an isotropic material and for an anisotropic material corresponding to a cubic crystallographic system are found. For a copper crystal belonging to the cubic system, uniaxial loading along one of the anisotropy axes is considered. The stress-strain dependence obtained from direct and inverted relations coincides in the vicinity of zero.

The stress-strain dependence calculated using direct and inverted relations for copper crystals has made it possible to determine the strain range in which the results of calculations using direct and inverted relations differ by less than 5%.

Keywords: anisotropy, hyperelasticity, finite strains, tensor bases, nonlinear constitutive relations

Acknowledgments: This study was carried out within the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of Russian Federation (No. FEWG-2023-0002).

For citation: Sokolova, M.Yu., Khristich, D.V. (2023) On the inversion of nonlinear constitutive relations for hyperelastic anisotropic materials. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 157–167. doi: 10.17223/19988621/85/12

Введение

Современные материалы при воздействии эксплуатационных нагрузок, приводящих к конечным деформациям, проявляют нелинейность своих механических свойств. Во многих случаях достоверные математические модели таких явлений строятся на основе нелинейной теории упругости [1–4]. Учет геометрической нелинейности осуществляется путем использования различных мер конечных деформаций и сопряженных с ними тензоров напряжений [1–5]. Во многих случаях деформации сопровождаются проявлением физической нелинейности, что приводит к необходимости использования определяющих соотношений в виде нелинейной связи тензоров напряжений и деформаций [1, 4, 6].

Наиболее распространенной формой нелинейных определяющих соотношений являются соотношения, в которых напряжения представляются как некоторые функции деформаций (см., напр.: [7, 8]). При решении практических задач в случаях, когда задано напряженное состояние в теле, такая форма определяющих соотношений приводит к необходимости отыскания деформаций как решения некоторой нелинейной системы уравнений даже при простейших видах нагружения. Эта задача еще более усложняется, если рассматриваемый материал обладает анизотропией свойств. В этом случае обычно используют определяющие соотношения, в которых деформации определяются как функции напряжений [9, 10].

Другой подход к решению данной проблемы заключается в возможном обращении определяющих соотношений и представлении их как функции деформаций от напряжений. Вопрос об обращении нелинейной формы связи между тензорами напряжений и деформаций рассматривался в работе [1] для изотропных материалов. Автор работы пришел к выводу, что вопрос об обращении нелинейной связи

между двумя тензорами в общем случае не может быть решен. В случае гиперупругих (имеющих потенциал напряжений) изотропных материалов обращение связи между тензорами напряжений и деформаций возможно с помощью обратного преобразования Лежандра. Еще один вариант обращения такой нелинейной связи в [1] основывался на использовании тригонометрических преобразований В.В. Новожилова [2]. Для анизотропных материалов в работах [11, 12] использовался термодинамический подход к определению связи между модулями упругости второго и третьего порядков с коэффициентами упругой податливости.

В данной статье для гиперупругих анизотропных материалов формулируются условия, накладываемые на производные потенциалов напряжений и деформаций, при выполнении которых возможно обращение нелинейной связи между напряжениями и деформациями. Рассматриваются упругие потенциалы полиномиального вида, представляемые степенными функциями своих аргументов. На основе сформулированных условий для изотропного материала и анизотропного материала, относящегося к кубической кристаллографической системе [3, 4, 13], получены соотношения между модулями упругости и коэффициентами упругой податливости второго и третьего порядков. Результаты решения задачи на одноосное нагружение нелинейных кубических кристаллов с использованием прямых и обращенных соотношений позволяют определить диапазон деформаций, в котором для рассматриваемого материала обращение нелинейной связи между напряжениями и деформациями производится с допустимой точностью.

Связь между упругими потенциалами

Рассмотрим конечные деформации однородного анизотропного гиперупругого материала. Введем потенциал напряжений $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ так, что его дифференциал совпадает с удельной (отнесенной к единице начального объема) элементарной работой напряжений:

$$dW = \mathbf{T} : d\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформаций Коши–Грина, \mathbf{T} – энергетический тензор напряжений (второй тензор Пиолы–Кирхгоффа) [1, 4]. Знаком $[:]$ обозначено двойное скалярное произведение (свертка) тензоров.

Если для рассматриваемого материала упругий потенциал известен, то в соответствии с (1) напряжения определяются соотношениями

$$\mathbf{T} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (2)$$

В простейшем случае, когда упругий потенциал представляется квадратичной функцией деформаций $W = 0.5 \mathbf{N}^{IV} :: \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}$, соотношения (2) приводят к линейной связи между напряжениями и деформациями

$$\mathbf{T} = \mathbf{N}^{IV} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3)$$

где \mathbf{N}^{IV} – постоянный тензор четвертого ранга, симметричный по парам индексов [4].

В случае бесконечно малых деформаций тензор $\boldsymbol{\varepsilon}$ совпадает с линейным тензором деформаций, тензор \mathbf{T} – с тензором истинных напряжений Коши, а линейные соотношения (3) – с обобщенным законом Гука для анизотропного материала [3, 4].

Соотношения (3) естественным образом обращаются, что приводит к выражению

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^{\text{IV}} : \mathbf{T}, \quad (4)$$

где тензор четвертого ранга \mathbf{A}^{IV} называют тензором упругой податливости [3, 4].

Тензоры \mathbf{N}^{IV} и \mathbf{A}^{IV} взаимно обратные, связаны условием

$$\mathbf{N}^{\text{IV}} : \mathbf{A}^{\text{IV}} = \mathbf{I}^{\text{IV}}, \quad (5)$$

где \mathbf{I}^{IV} – единичный тензор четвертого ранга такой, что $\mathbf{I}^{\text{IV}} : \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}$.

Если для упругого потенциала $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ принято более сложное представление, то связь между напряжениями и деформациями оказывается нелинейной [11, 12, 14]:

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}). \quad (6)$$

Нелинейные соотношения (6) при бесконечно малых деформациях также должны асимптотически совпадать с обобщенным законом Гука: при $\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow 0$ тензорная функция $\mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}) \rightarrow \mathbf{N}^{\text{IV}} : \boldsymbol{\varepsilon}$, поэтому асимптотическое представление нелинейных соотношений (6) $\mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon})$ при $\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow 0$ допускает обращение так же, как и соотношения (3). Возникает вопрос о возможности обращения нелинейных соотношений (6) в общем случае для анизотропного материала. Пользуясь подходом, описанным в монографии [1] для изотропных материалов, рассмотрим общий случай гиперупругих анизотропных материалов.

В качестве производящей функции обратного преобразования используем потенциал деформаций $V(\mathbf{T})$, связанный с потенциалом напряжений $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ соотношением

$$V(\mathbf{T}) = W(\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{T} : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (7)$$

Можно показать [4, 15], что упругие потенциалы $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ и $V(\mathbf{T})$ в случае изотермических процессов совпадают с удельными (отнесенными к единице начального объема) термодинамическими потенциалами свободной энергии и Гиббса соответственно, а в случае адиабатических процессов – с удельными (отнесенными к единице начального объема) термодинамическими потенциалами внутренней энергии и энтальпии.

Дифференциал потенциала (7) с учетом выражения (1) имеет вид:

$$dV = -\boldsymbol{\varepsilon} : d\mathbf{T}. \quad (8)$$

Из представления (8) следует, что деформации определяются через потенциал $V(\mathbf{T})$ по формулам

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{T}}. \quad (9)$$

Для тензоров напряжений и деформаций имеет место соотношение

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{T}} = \mathbf{I}^{\text{IV}}, \quad (10)$$

которое на основании выражений (2) и (9) приводит к связи между вторыми производными потенциалов $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ и $V(\mathbf{T})$:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} : \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{T}^2} = -\mathbf{I}^{\text{IV}}. \quad (11)$$

Продифференцируем (11) по тензору напряжений:

$$\left(\frac{\partial^3 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^3} \left(: \right) \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{T}^2} \right) : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{T}} + \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} : \frac{\partial^3 V}{\partial \mathbf{T}^3} = \mathbf{0}$$

или

$$-\left(\frac{\partial^3 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^3}(\cdot)\frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{T}^2}\right) : \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{T}^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} : \frac{\partial^3 V}{\partial \mathbf{T}^3} = \mathbf{0}. \quad (12)$$

В соотношениях (12) знаком $[\cdot]$ обозначено двойное скалярное произведение средней диады тензора шестого ранга $\partial^3 W/\partial \boldsymbol{\varepsilon}^3$ и левой диады тензора четвертого ранга $\partial^2 V/\partial \mathbf{T}^2$. Соотношения (11) и (12) устанавливают связи между вторыми и третьими производными потенциалов $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ и $V(\mathbf{T})$. При выполнении условий (11) и (12) в общем случае нелинейная связь между напряжениями и деформациями (2) может быть обращена. Обращённые определяющие соотношения имеют вид (9).

Рассмотрим случай, когда потенциалы $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ и $V(\mathbf{T})$ имеют полиномиальный вид:

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2!} \mathbf{N}^{\text{IV}} :: \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{3!} \mathbf{N}^{\text{VI}} ::: \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (13)$$

$$V(\mathbf{T}) = \frac{1}{2!} \mathbf{A}^{\text{IV}} :: \mathbf{T} \mathbf{T} + \frac{1}{3!} \mathbf{A}^{\text{VI}} ::: \mathbf{T} \mathbf{T} \mathbf{T}, \quad (14)$$

где тензоры четвертого \mathbf{N}^{IV} , \mathbf{A}^{IV} и шестого \mathbf{N}^{VI} , \mathbf{A}^{VI} рангов постоянные, определяются через константы упругости второго и третьего порядков соответственно.

В этом случае

$$\mathbf{N}^{\text{IV}} = \left. \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}}, \quad \mathbf{N}^{\text{VI}} = \left. \frac{\partial^3 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^3} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}}; \quad (15)$$

$$\mathbf{A}^{\text{IV}} = - \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{T}^2} \right|_{\mathbf{T}=\mathbf{0}}, \quad \mathbf{A}^{\text{VI}} = - \left. \frac{\partial^3 V}{\partial \mathbf{T}^3} \right|_{\mathbf{T}=\mathbf{0}}. \quad (16)$$

Тогда в окрестности ненапряженного и недеформированного состояния соотношения (11) и (12) приводят к связи между тензорами (15) и (16) в виде:

$$\mathbf{N}^{\text{IV}} : \mathbf{A}^{\text{IV}} = \mathbf{I}^{\text{IV}}, \quad (\mathbf{N}^{\text{VI}}(\cdot)\mathbf{A}^{\text{IV}}) : \mathbf{A}^{\text{IV}} + \mathbf{N}^{\text{IV}} : \mathbf{A}^{\text{VI}} = \mathbf{0}.$$

Первое из этих соотношений повторяет связь между тензорами упругости и упругой податливости (5), получающуюся при обращении линейных соотношений. Умножим второе из этих соотношений слева на \mathbf{A}^{IV} и преобразуем с учетом первого соотношения к виду:

$$\mathbf{A}^{\text{VI}} = -\mathbf{A}^{\text{IV}} : (\mathbf{N}^{\text{VI}}(\cdot)\mathbf{A}^{\text{IV}}) : \mathbf{A}^{\text{IV}}. \quad (17)$$

Связь между напряжениями и деформациями является следствием соотношений (2), (9). Для потенциалов в форме (13) и (14) эта связь имеет вид:

$$\mathbf{T} = \mathbf{N}^{\text{IV}} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \mathbf{N}^{\text{VI}} :: \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^{\text{IV}} : \mathbf{T} + \frac{1}{2} \mathbf{A}^{\text{VI}} :: \mathbf{T} \mathbf{T}. \quad (19)$$

Если тензоры \mathbf{N}^{IV} , \mathbf{N}^{VI} , входящие в соотношения (18), и тензоры \mathbf{A}^{IV} , \mathbf{A}^{VI} , входящие в соотношения (19), удовлетворяют условиям (5) и (17), то нелинейные соотношения (19) представляют собой обращение нелинейных соотношений (18) так же, как соотношения (4) представляют собой обращение линейных соотношений (3).

**Обращение нелинейных определяющих соотношений
для некоторых материалов**

Для различных типов анизотропных материалов различным оказывается число независимых компонент тензоров упругости четвертого и шестого рангов, входящих в определяющие соотношения (18) и (19), поэтому различным является и число независимых упругих констант второго и третьего порядков. Наиболее простые представления для тензоров (15) и (16) получаются при разложении их по собственным упругим состояниям материала [4, 16] в виде:

$$\mathbf{N}^{IV} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} N_{\alpha} \mathbf{\Omega}^{(\alpha)}, \quad \mathbf{A}^{IV} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} A_{\alpha} \mathbf{\Omega}^{(\alpha)}, \quad \mathbf{N}^{VI} = \sum_{\beta=1}^{\beta=k} n_{\beta} \mathbf{B}^{(\beta)}, \quad \mathbf{A}^{VI} = \sum_{\beta=1}^{\beta=k} a_{\beta} \mathbf{B}^{(\beta)}. \quad (20)$$

В разложениях (20) $\mathbf{\Omega}^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, \dots, m$, – собственные тензоры для тензоров упругих свойств четвертого ранга, $\mathbf{B}^{(\beta)}$, $\beta = 1, \dots, k$, – собственные тензоры для тензоров упругих свойств шестого ранга. Число m равно количеству различных собственных значений тензора упругости четвертого ранга и числу независимых констант упругости второго порядка, а число k – количество различных собственных значений тензора шестого ранга и, следовательно, число независимых констант упругости третьего порядка. В соответствии с соотношениями (20) тензоры упругости и тензоры упругой податливости одинаковых рангов раскладываются по одним и тем же собственным базисным тензорам.

В работах [4, 16] были получены представления для собственных тензоров $\mathbf{\Omega}^{(\alpha)}$ в главных осях анизотропии для материалов, относящихся ко всем кристаллографическим системам, в том числе и для изотропного материала. В работах [14, 17] получены представления собственных тензоров шестого ранга $\mathbf{B}^{(\beta)}$ для изотропного материала и анизотропного материала, относящегося к кубической кристаллографической системе.

Собственные тензоры $\mathbf{\Omega}^{(\alpha)}$ и $\mathbf{B}^{(\beta)}$ удобно представлять в тензорных базисах четвертого и шестого рангов, построенных на основе канонического тензорного базиса А.А. Ильющина [4]:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^0 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3\mathbf{a}_3), \quad \mathbf{I}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2), \quad \mathbf{I}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2), \\ \mathbf{I}^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1), \quad \mathbf{I}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3\mathbf{a}_2), \quad \mathbf{I}^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1\mathbf{a}_3); \\ \mathbf{I}^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\mathbf{I}^{\alpha}\mathbf{I}^{\beta} + \mathbf{I}^{\beta}\mathbf{I}^{\alpha}), \quad \mathbf{I}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{6}(\mathbf{I}^{\alpha}\mathbf{I}^{\beta}\mathbf{I}^{\gamma} + \mathbf{I}^{\beta}\mathbf{I}^{\alpha}\mathbf{I}^{\gamma} + \mathbf{I}^{\gamma}\mathbf{I}^{\alpha}\mathbf{I}^{\beta} + \mathbf{I}^{\alpha}\mathbf{I}^{\gamma}\mathbf{I}^{\beta} + \mathbf{I}^{\beta}\mathbf{I}^{\gamma}\mathbf{I}^{\alpha} + \mathbf{I}^{\gamma}\mathbf{I}^{\beta}\mathbf{I}^{\alpha}), \end{aligned}$$

где $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \dots, 5$, а векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ – единичные ортогональные векторы, направленные в случае анизотропных материалов вдоль главных (канонических) осей анизотропии [4, 14].

Известно [1, 4], что упругие свойства изотропного материала характеризуются двумя константами второго порядка и тремя константами третьего порядка. Для изотропного материала разложения (20) принимают вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^{IV} &= N_1\mathbf{\Omega}^{(1)} + N_2\mathbf{\Omega}^{(2)}, \quad \mathbf{N}^{VI} = n_1\mathbf{B}^{(1)} + n_2\mathbf{B}^{(2)} + n_3\mathbf{B}^{(3)}, \\ \mathbf{A}^{IV} &= A_1\mathbf{\Omega}^{(1)} + A_2\mathbf{\Omega}^{(2)}, \quad \mathbf{A}^{VI} = a_1\mathbf{B}^{(1)} + a_2\mathbf{B}^{(2)} + a_3\mathbf{B}^{(3)}, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}^{(1)} &= \mathbf{I}^{00}, \quad \boldsymbol{\Omega}^{(2)} = \mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22} + \mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55}, \quad \mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{I}^{000}, \\ \mathbf{B}^{(2)} &= \mathbf{I}^{011} + \mathbf{I}^{022} + \mathbf{I}^{033} + \mathbf{I}^{044} + \mathbf{I}^{055}, \\ \mathbf{B}^{(3)} &= \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{I}^{111} - \frac{6}{\sqrt{6}}(\mathbf{I}^{122} + \mathbf{I}^{133}) + \frac{3}{\sqrt{6}}(\mathbf{I}^{144} + \mathbf{I}^{155}) + \frac{3}{\sqrt{2}}(\mathbf{I}^{255} - \mathbf{I}^{244} + 2\mathbf{I}^{345}).\end{aligned}$$

Подставляя разложения (21) в условия (5) и (17), после непосредственных вычислений можно определить связь между константами упругости и константами упругой податливости второго и третьего порядков для изотропного материала в наиболее простом виде [15]:

$$A_1 = N_1^{-1}, \quad A_2 = N_2^{-1}, \quad a_1 = -A_1^3 n_1, \quad a_2 = -A_1 A_2^2 n_2, \quad a_3 = -A_2^3 n_3.$$

Найденная связь между константами решает вопрос об обращении нелинейных соотношений (18) для изотропного материала. В обращенных соотношениях (19) тензоры упругих свойств \mathbf{A}^{IV} и \mathbf{A}^{VI} имеют вид (21).

Для анизотропных материалов, по типу симметрии свойств относящихся к кубической кристаллографической системе, разложения (20) имеют вид:

$$\mathbf{N}^{IV} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=3} N_{\alpha} \boldsymbol{\Omega}^{(\alpha)}, \quad \mathbf{A}^{IV} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=3} A_{\alpha} \boldsymbol{\Omega}^{(\alpha)}, \quad \mathbf{N}^{VI} = \sum_{\beta=1}^{\beta=6} n_{\beta} \mathbf{B}^{(\beta)}, \quad \mathbf{A}^{VI} = \sum_{\beta=1}^{\beta=6} a_{\beta} \mathbf{B}^{(\beta)}, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}^{(1)} &= \mathbf{I}^{00}, \quad \boldsymbol{\Omega}^{(2)} = \mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22}, \quad \boldsymbol{\Omega}^{(3)} = \mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55}; \\ \mathbf{B}^{(1)} &= \mathbf{I}^{000}, \quad \mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{I}^{011} + \mathbf{I}^{022}, \quad \mathbf{B}^{(3)} = \mathbf{I}^{033} + \mathbf{I}^{044} + \mathbf{I}^{055}, \\ \mathbf{B}^{(4)} &= \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{I}^{111} - 3\mathbf{I}^{122}), \quad \mathbf{B}^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{I}^{144} + \mathbf{I}^{155} - 2\mathbf{I}^{133}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{I}^{255} - \mathbf{I}^{244}), \quad \mathbf{B}^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{I}^{345}.\end{aligned}$$

После подстановки разложений (22) в соотношения (5) и (17) получаем связь между константами упругости и упругой податливости второго и третьего порядков для материалов, относящихся к кубической кристаллографической системе:

$$\begin{aligned}A_1 &= N_1^{-1}, \quad A_2 = N_2^{-1}, \quad A_3 = N_3^{-1}, \\ a_1 &= -A_1^3 n_1, \quad a_2 = -A_1 A_2^2 n_2, \quad a_3 = -A_1 A_3^2 n_3, \\ a_4 &= -A_2^3 n_4, \quad a_5 = -A_2 A_3^2 n_5, \quad a_6 = -A_3^3 n_6.\end{aligned} \quad (23)$$

Рассмотрим в качестве примера кубический кристалл меди, для которого по данным работ [18, 19, 20] определены значения констант упругости второго порядка (в МПа): $N_1 = 4.13 \cdot 10^5$, $N_2 = 0.47 \cdot 10^5$, $N_3 = 1.51 \cdot 10^5$, и третьего порядка (в МПа): $n_1 = -7.22 \cdot 10^6$, $n_2 = -4.23 \cdot 10^6$, $n_3 = -2.71 \cdot 10^6$, $n_4 = 2.14 \cdot 10^6$, $n_5 = -2.33 \cdot 10^6$, $n_6 = -0.81 \cdot 10^6$, а упругие податливости вычислены по формулам (23). Упругие податливости второго порядка (в МПа⁻¹): $A_1 = 2.42 \cdot 10^{-6}$, $A_2 = 2.13 \cdot 10^{-5}$, $A_3 = 6.64 \cdot 10^{-6}$. Упругие податливости третьего порядка (в МПа⁻²): $a_1 = 1.03 \cdot 10^{-10}$, $a_2 = 4.64 \cdot 10^{-9}$, $a_3 = 2.89 \cdot 10^{-10}$, $a_4 = -2.06 \cdot 10^{-8}$, $a_5 = 2.19 \cdot 10^{-9}$, $a_6 = 2.36 \cdot 10^{-10}$. Таким образом, для этого материала по формулам (22) определены тензоры \mathbf{N}^{IV} , \mathbf{N}^{VI} и \mathbf{A}^{IV} , \mathbf{A}^{VI} , входящие в определяющие соотношения (18) и обращенные соотношения (19).

Рассмотрим одноосное растяжение призматического образца, ось которого совпадает с одной из главных осей анизотропии кубического кристалла, а в поперечном сечении лежит квадрат, стороны которого параллельны двум другим главным осям анизотропии. Тензор напряжений в этом случае равен $\mathbf{T} = \sigma \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1$, где σ – задаваемое напряжение. По обращенным соотношениям (19) находим

тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}) = \varepsilon_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + \varepsilon_2 (\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3)$. При подстановке полученных деформаций в соотношения (18) находим вычисляемые напряжения $\mathbf{T} = T \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1$. На рис. 1 представлены зависимости задаваемых σ (сплошная линия) и вычисляемых напряжений T (пунктирная линия) от продольной деформации ε , отнесенных к модулю упругости N_1 .

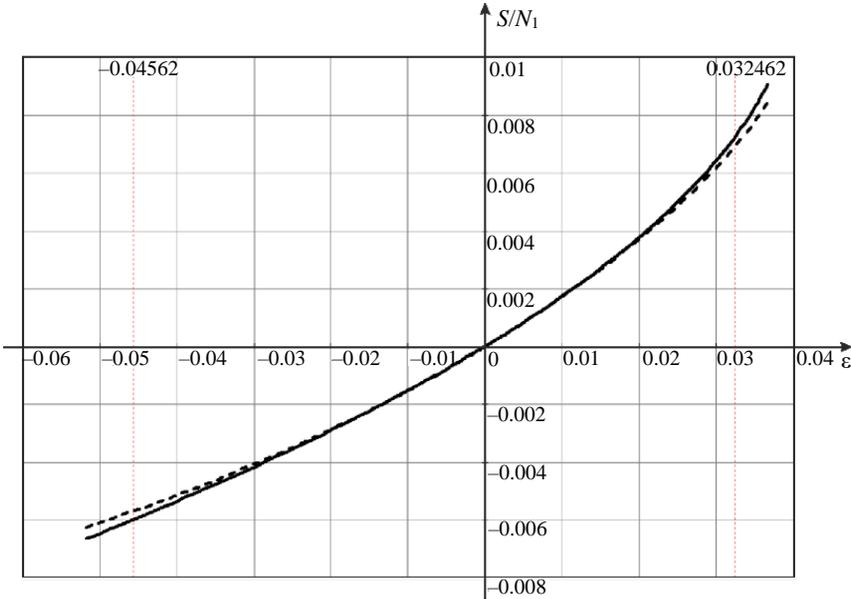


Рис. 1. Зависимость напряжений от деформаций при одноосном нагружении при расчетах по прямым (T) и обращенным (σ) соотношениям

Fig. 1. Stress-strain dependence under uniaxial loading in calculations using direct (T) and inverted (σ) relations

Приведенные на рис. 1 кривые полностью совпадают в окрестности нулевых деформаций. Это объясняется тем, что в области бесконечно малых деформаций соотношения (18) и (19) вырождаются в обобщенный закон Гука (3), (4) и допускают точное обращение. Поскольку тензоры упругих свойств (15) и (16) определены через упругие потенциалы $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ и $V(\mathbf{T})$ вблизи значений $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ и $\mathbf{T} = 0$, то с ростом деформаций расчеты по прямым и обращенным соотношениям начинают расходиться. В частности, расхождение кривых, приведенных на рис. 1, увеличивается с ростом деформаций. Если при одной и той же осевой деформации $\varepsilon^* \neq 0$ определить напряжения σ^* и T^* , то относительная погрешность при расчетах по прямым и обращенным соотношениям характеризуется величиной $\delta = |(\sigma^* - T^*)/\sigma^*| \cdot 100\%$. При растяжении кубического кристалла меди величина δ достигает 5% при деформациях $\varepsilon_p^* = 0.032$, а при сжатии – при деформациях $\varepsilon_c^* = -0.046$. Найденные деформации определяют диапазон $[\varepsilon_c^*, \varepsilon_p^*]$, в котором с заданной точностью возможно использование как прямых, так и обращенных определяющих соотношений. Фактически этот диапазон превышает интервал изменения деформаций кристалла меди, в котором его можно считать нелинейно упругим материалом.

Заключение

В работе сформулированы условия, которым должны удовлетворять в изотермических процессах упругие потенциалы свободной энергии $W(\epsilon)$ и Гиббса $V(T)$ для того, чтобы построенные по ним нелинейные определяющие соотношения допускали обращение. Для упругих потенциалов полиномиального вида, коэффициенты которых связаны с упругими постоянными второго и третьего порядков, получена связь между коэффициентами потенциала $W(\epsilon)$ (константами упругости) и коэффициентами потенциала $V(T)$ (упругими податливостями). Полученные соотношения (5) и (17) записаны в инвариантной форме и могут быть конкретизированы для различных анизотропных сред, в том числе для изотропного материала.

В статье получены соотношения между константами упругости и коэффициентами упругих податливостей второго и третьего порядков для изотропного материала и анизотропного материала, относящегося к кубической кристаллографической системе. Для кристалла меди, относящегося к кубической системе, рассмотрено одноосное нагружение вдоль одной из осей анизотропии. Связь между напряжениями и деформациями, полученная по прямым и обращенным соотношениям, совпадает в окрестности нуля. Получен диапазон деформаций, в котором результаты расчетов по прямым и обращенным соотношениям расходятся менее, чем на 5%.

Список источников

1. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. 512 с.
2. Новожилов В.В. Теория упругости. Л. : Судпромгиз, 1958. 370 с.
3. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. М. : Наука, 1988. 192 с.
4. Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. М.: Физматлит, 2013. 320 с.
5. Бровка Г.Л. Определяющие соотношения механики сплошной среды: развитие математического аппарата и основ общей теории. М. : Наука, 2017. 432 с.
6. Маркин А.А., Соколова М.Ю., Христин Д.В. Постулат А.А. Ильюшина для анизотропных материалов и вариант определяющих соотношений // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 1. С.38–45.
7. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды для плоской деформации в декартовых координатах при биквадратичной аппроксимации замыкающих уравнений // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 76. С. 70–86. doi: 10.17223/19988621/76/6
8. Козлов В.В., Маркин А.А. Апробация определяющих соотношений нелинейной теории упругости при осевом сдвиге полого цилиндра // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 63. С. 102–114. doi: 10.17223/19988621/63/9
9. Lomakin E.V., Fedulov B.N. Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites // *Mechanica*. 2015. V. 50 P. 1527–1535. doi: 10.1007/s11012-015-0104-5.
10. Трещев А.А., Гвоздев А.Е., Юценко Н.С., Калинин А.А. Нелинейная математическая модель связи тензоров второго ранга для композитных материалов // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, № 3. С. 224–237. doi: 10.22405/2226-8383-2022-23-224-237
11. Brugger K. Thermodynamic definition of higher order elastic coefficients // *Phys. Rev.* 1964. V. 133. P. A1611–A1612. doi: 10.1103/PhysRev.133.A1611
12. Barsch G.R. Relation between third-order elastic constants of single crystals and polycrystals // *Journal of Applied Physics* 1968. V. 39 (8). P. 3780–3793. doi: 10.1063/1.1656855

13. Thomas S.D. Single-crystal elastic properties of minerals and related materials with cubic symmetry // *American Mineralogist*. 2018. V. 103 (6). P. 977–988. doi: 10.2138/am-2018-6285
14. Соколова М.Ю., Христич Д.В. Конечные деформации нелинейно упругих анизотропных материалов // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2021. № 70. С. 103–116. doi: 10.17223/19988621/70/9
15. Соколова М.Ю., Христич Д.В., Артюх Е.В. Обращение связи между напряжениями и деформациями в модели Мурнагана // *Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер/ Механика предельного состояния*. 2022. № 3 (53). С. 52–62. doi: 10.37972/chgpu.2022.53.3.006
16. Остросаблин Н.И. Об уравнениях линейной теории упругости // *Прикладная механика и техническая физика*. 1992. Вып. 3. С. 131–140.
17. Astapov Y., Khristich D., Markin A., Sokolova M. The construction of nonlinear elasticity tensors for crystals and quasicrystals // *International Journal of Applied Mechanics*. 2017. V. 9 (6). P. 1750080-1–1750080-15. doi: 10.1142/S1758825117500806
18. Knowles K.M. The plane strain Young's modulus in cubic materials // *Journal of Elasticity*. 2017. V. 128 (2). P. 1–27. doi: 10.1007/s10659-017-9621-x
19. Li X. First-principles study of the third-order elastic constants and related anharmonic properties in refractory high-entropy alloys // *Acta Materialia*. 2018. V. 142. P. 29–36. doi: 10.1016/j.actamat.2017.09.041.
20. Lubarda V.A. New estimates of the third-order elastic constants for isotropic aggregates of cubic crystals // *J. Mech. Phys. Solids*. 1997. V. 45(4). P. 471–490. doi: 10.1016/s0022-5096(96)00113-5.

References

1. Lurie A.I. (2012) *Non-linear Theory of Elasticity*. North Holland.
2. Novozhilov V.V. (1961) *Theory of Elasticity*. London: Pergamon Press.
3. Chernykh K.F. (1988) *Vvedenie v anizotropnyuyu uprugost'* [Introduction to anisotropic elasticity]. Moscow: Nauka.
4. Markin A.A., Sokolova M.Yu. (2015) *Thermomechanics of Elastoplastic Deformation*. Cambridge: Cambridge International Science Publishing.
5. Brovko G.L. (2017) *Opredelyayushchie sootnosheniya mekhaniki sploshnoy sredy: razvitie matematicheskogo apparata i osnov obshchey teorii* [Constitutive relations of continuum mechanics: development of the mathematical apparatus and the foundations of general theory]. Moscow: Nauka.
6. Markin A.A., Sokolova M.Yu., Khristich D.V. (2011) A.A. Il'yushin's postulate for anisotropic materials and a version of constitutive relations. *Mechanics of Solids*. 46(1). pp. 30–35. doi: 10.3103/S0025654411010055
7. Bakushev S.V. (2022) Differentsial'nye uravneniya ravovesiya sploshnoy sredy dlya ploskoy deformatsii v dekartovykh koordinatakh pri bikvadrachnoy approksimatsii zamykayushchikh uravneniy [Differential equations of continuum equilibrium for plane deformation in Cartesian axials at biquadratic approximation of closing equations]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 70–86. doi: 10.17223/19988621/76/6
8. Kozlov V.V., Markin A.A. (2020) Aprobatsiya opredelyayushchikh sootnosheniy nelineynoy teorii uprugosti pri osevom sdvige pologo tsilindra [Testing of defining relations of nonlinear theory of elasticity in an axial strain of a hollow cylinder]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 63. pp. 102–114. doi: 10.17223/19988621/63/9
9. Lomakin E.V., Fedulov B.N. (2015) Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites. *Meccanica*. 50. pp. 1527–1535. doi: 10.1007/s11012-015-0104-5
10. Treschev A.A., Gvozdev A.E., Yushchenko N.S., Kalinin A.A. (2022) Nelineynaya matematicheskaya model' svyazi tenzorov vtorogo ranga dlya kompozitnykh materialov

- [Nonlinear mathematical model of relation of second-rank tensors for composite materials]. *Chebyshevskiy sbornik*. 23(3). pp. 224–237. doi: 10.22405/2226-8383-2022-23-224-237
11. Brugger K. (1964) Thermodynamic definition of higher order elastic coefficients. *Physical Review*. 133(6A). pp. A1611–A1612. doi: 10.1103/PhysRev.133.A1611
 12. Barsch G.R. (1968) Relation between third-order elastic constants of single crystals and polycrystals. *Journal of Applied Physics*. 39(8). pp. 3780–3793. doi: 10.1063/1.1656855
 13. Thomas S.D. (2018) Single-crystal elastic properties of minerals and related materials with cubic symmetry. *American Mineralogist*. 103(6). pp. 977–988. doi: 10.2138/am-2018-6285
 14. Sokolova M.Yu., Khristich D.V. (2021) Konechnye deformatsii nelineynno uprugikh anizotropnykh materialov [Finite strains of nonlinear elastic anisotropic materials]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 70. pp. 103–116. doi: 10.17223/19988621/70/9
 15. Sokolova M.Yu., Khristich D.V., Artyukh E.V. (2022) Obrashchenie svyazi mezhdu napryazheniyami i deformatsiyami v modeli Murnagana [Reversal of the relationship between stresses and strains in the Murnaghan model]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya – Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. 3(53). pp. 52–62. doi: 10.37972/chgpu.2022.53.3.006
 16. Ostrosablin N.I. (1992) Equations of the linear theory of elasticity. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 33(3). pp. 438–446. doi: 10.1007/BF00851743
 17. Astapov Y., Khristich D., Markin A., Sokolova M. (2017) The construction of nonlinear elasticity tensors for crystals and quasicrystals. *International Journal of Applied Mechanics*. 9(6). Article 1750080. pp. 1–15. doi: 10.1142/S1758825117500806
 18. Knowles K.M. (2017) The plane strain Young's modulus in cubic materials. *Journal of Elasticity*. 128(2). pp. 1–27. doi: 10.1007/s10659-017-9621-x
 19. Li X. (2018) First-principles study of the third-order elastic constants and related anharmonic properties in refractory high-entropy alloys. *Acta Materialia*. 142. pp. 29–36. doi: 10.1016/j.actamat.2017.09.041
 20. Lubarda V.A. (1997) New estimates of the third-order elastic constants for isotropic aggregates of cubic crystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 45(4). pp. 471–490. doi: 10.1016/s0022-5096(96)00113-5

Сведения об авторах:

Соколова Марина Юрьевна – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета, Тула, Россия. E-mail: m.u.sokolova@gmail.com

Христич Дмитрий Викторович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета, Тула, Россия. E-mail: dmitrykhristich@rambler.ru

Information about the authors:

Sokolova Marina Yu. (Doctor of Physics and Mathematics, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: m.u.sokolova@gmail.com

Khristich Dmitriy V. (Doctor of Physics and Mathematics, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: dmitrykhristich@rambler.ru

Статья поступила в редакцию 18.02.2023; принята к публикации 10.10.2023

The article was submitted 18.02.2023; accepted for publication 10.10.2023

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

2023. № 85

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано в печать 31.10.2023 г. Формат 70×100^{1/16}.
Печ. л. 10,5; усл. печ. л. 13,6. Цена свободная.
Тираж 250 экз. Заказ № 5635.

Дата выхода в свет 09.11.2023 г.

Адрес издателя и редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Томский государственный университет

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru