

**В Е С Т Н И К  
ТОМСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА  
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

TOMSK STATE UNIVERSITY  
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

---

***Научный журнал***

---

**2023**

**№ 84**

Свидетельство о регистрации  
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.  
выдано Федеральной службой по надзору  
в сфере массовых коммуникаций, связи  
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Учредитель:**

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Национальный исследовательский  
Томский государственный университет»

**РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА  
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.  
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА**

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), И.А. Колесников (отв. секретарь по разделу «Математика»), А.Д. Сидоров (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, В.Г. Бутов, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, Е.Л. Лобода, Г.О. Рябова, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Е. А. Тимошенко, М.А. Шеремет, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

**EDITORIAL COUNCIL**

**Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics**

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

**EDITORIAL BOARD**

**Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics**

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Ivan A. Kolesnikov (Executive Editor of the Mathematics Section), Aleksey D. Sidorov (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimatov, Aleksey M. Bubenichikov, Vladimir G. Butov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Egor L. Loboda, Galina O. Ryabova, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Egor A. Timoshenko, Mikhail A. Sheremet, Gennadiy R. Shragер, Ernst R. Shragер.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферруется в MatSciNet.

**Адрес редакции:** 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

**Электронный адрес:** <http://journals.tsu.ru/mathematics>

**Контактный тел./факс:** (3822) 529-740

**E-mail:** [vestnik\\_tgu\\_mm@math.tsu.ru](mailto:vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru)

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

<b>Дудин И.В., Крылов П.А.</b> Тензорное произведение алгебр инцидентности и групповых алгебр .....	5
<b>Зюзьков В.М.</b> Последовательности биномиальных коэффициентов по простому модулю .....	14
<b>Корнев Е.С.</b> Кэлеровы и сублагранжевы подмногообразия .....	23

### МЕХАНИКА

<b>Анурьев Д.А., Фёдоров К.М., Гильманов А.Я., Шевелёв А.П., Морозовский Н.А., Торопов К.В.</b> Анализ возможности блокирования трещин автоГРП суспензионной системой .....	36
<b>Архипов В.А., Бондарчук С.С. Бондарчук И.С., Золоторёв Н.Н., Козлов Е.А., Орлова М.П.</b> Математическое моделирование утилизации головного обтекателя ракеты-носителя после его отработки .....	52
<b>Богданова С.Б., Гладков С.О.</b> О траекториях тел в неинерциальных системах отсчета .....	68
<b>Борзенко Е.И., Усанина А.С., Шрагер Г.Р.</b> Влияние поверхностно-активного вещества на скорость всплытия пузырька в вязкой жидкости .....	81
<b>Бушланов В.П., Бутов В.Г., Глазунов А.А.</b> К построению математической модели двухфазного течения в осесимметричном сопле Лавала .....	93
<b>Дьячковский А.С., Рогаев К.С., Ищенко А.Н., Саморокова Н.М., Сидоров А.Д., Степанов Е.Ю., Кодякова А.Д.</b> Исследование особенностей горения высокоплотных топлив в условиях сопловой установки .....	109
<b>Светашков А.А., Куприянов Н.А., Павлов М.С.</b> Метод разделения переменных для задач линейно вязкоупругого анизотропного тела .....	123
<b>Смирнов А.С., Дегилевич Е.А.</b> Устойчивость равномерного прямолинейного движения тягача с двумя прицепами .....	139
<b>Худойназаров Х.</b> Математическая модель физически нелинейных крутильных колебаний круглого упругого стержня .....	152

### МЕМУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

<b>Туганбаев А.А., Тимошенко Е.А., Фомин А.А., Царев А.В., Чехлов А.Р., Кайгородов Е.В., Норбосамбуев Ц.Д.</b> Петр Андреевич Крылов. К 75-летию со дня рождения .....	167
--	-----

## CONTENTS

### MATHEMATICS

<b>Dudin I.V., Krylov P.A.</b> Tensor Product of Incidence Algebras and Group Algebras .....	5
<b>Zyuz'kov V.M.</b> Sequences of binomial coefficients modulo prime .....	14
<b>Kornev E.S.</b> Kähler and Sublagrangian Submanifolds .....	23

### MECHANICS

<b>Anur'ev D.A., Fedorov K.M., Gil'manov A.Ya., Shevelev A.P., Morozovskiy N.A., Toropov K.V.</b> Analysis of the possibility of technogenic fracture blocking using a suspension system .....	36
<b>Arkhipov V.A., Bondarchuk S.S., Bondarchuk I.S., Zolotarev E.A., Kozlov N.N., Orlova M.P.</b> Mathematical modeling of disposal of the payload fairing of a launch vehicle after completion .....	52
<b>Bogdanova S.B., Gladkov S.O.</b> On the trajectories of bodies in non-inertial reference frames .....	68
<b>Borzenko E.I., Usanina A.S., Shrager G.R.</b> Effect of surfactant on bubble rising velocity in viscous liquid .....	81
<b>Bushlanov V.P., Butov V.G., Glazunov A.A.</b> On the development of a mathematical model of a two-phase flow in an axisymmetric de Laval nozzle .....	93
<b>D'yachkovskiy A.S., Rogaev K.S., Ishchenko A.N., Samorokova N.M., Sidorov A.D., Stepanov E.Yu., Kodyakova A.D.</b> A study of combustion features of high-density propellants in a nozzle test facility .....	109
<b>Svetashkov A.A., Kupriyanov N.A., Pavlov M.S.</b> The method of separation of variables for linear viscoelastic anisotropic body problems .....	123
<b>Smirnov A.S., Degilevich E.A.</b> Stability of uniform rectilinear motion of a tractor with two trailers .....	139
<b>Khudoynazarov Kh.</b> A mathematical model of physically nonlinear torsional vibrations of a circular elastic rod .....	152

### MEMOIRS, MEMORABLE DATES, PERSONALITIES

<b>Tuganbaev A.A., Timoshenko E.A., Fomin A.A., Tsarev A.V., Chekhlov A.R., Kaigorodov E.V., Norbosambuev Ts.D.</b> Pyotr Andreevich Krylov. To the 75th birthday .....	167
--	-----

## МАТЕМАТИКА

## MATHEMATICS

Научная статья

УДК 512.552

doi: 10.17223/19988621/84/1

MSC: 16R99

**Тензорное произведение алгебр инцидентности  
и групповых алгебр****Илья Вячеславович Дудин<sup>1</sup>, Петр Андреевич Крылов<sup>2</sup>**<sup>1,2</sup> *Томский государственный университет, Томск, Россия*<sup>1</sup> *overchalito228@gmail.com*<sup>2</sup> *krylov@math.tsu.ru*

**Аннотация.** Пусть  $I(X, R)$  и  $I(Y, S)$  – алгебры инцидентности, где  $X$  и  $Y$  – предупорядоченные множества,  $R$  и  $S$  – алгебры над некоторым коммутативным кольцом  $T$ . Доказывается существование гомоморфизма алгебр  $I(X, R) \otimes_T I(Y, S) \rightarrow I(X \times Y, R \otimes_T S)$ . Если  $X$  и  $Y$  – конечные множества, то имеет место изоморфизм. Для произвольных групп  $G$  и  $H$  доказано, что справедлив изоморфизм алгебр  $R[G] \otimes_T S[H] \cong (R \otimes_T S)[G \times H]$ .

**Ключевые слова:** тензорное произведение, алгебра инцидентности, групповая алгебра

**Благодарности:** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00375, <https://rscf.ru/project/23-21-00375/>

**Для цитирования:** Дудин И.В., Крылов П.А. Тензорное произведение алгебр инцидентности и групповых алгебр // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 5–13. doi: 10.17223/19988621/84/1

Original article

**Tensor Product of Incidence Algebras and Group Algebras****Ilya V. Dudin<sup>1</sup>, Piotr A. Krylov<sup>2</sup>**<sup>1,2</sup> *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*<sup>1</sup> *overchalito228@gmail.com*<sup>2</sup> *krylov@math.tsu.ru*

**Abstract.** We consider the tensor product of incidence algebras and group algebras. Let  $X$  and  $Y$  be locally finite preordered sets,  $R$  and  $S$  be algebras over a commutative ring  $T$ .

**Theorem 1.1.** There exists a canonical  $R \otimes_T S$ -modular and ring homomorphism of  $T$ -algebras

$$\theta: I(X, R) \otimes_T I(Y, S) \rightarrow I(X \times Y, R \otimes_T S).$$

All three algebras in the theorem are the corresponding incidence algebras.

In general,  $\theta$  is not an isomorphism.

For group algebras, the situation is more favorable. Let  $G$  and  $H$  be arbitrary groups.

**Theorem 2.2.** There is a canonical  $R \otimes_T S$ -modular and ring isomorphism of  $T$ -algebras

$$\omega : R[G] \otimes_T S[H] \rightarrow (R \otimes_T S)[G \times H].$$

Theorem 2.2 generalizes the well-known result for the situation where  $R = F = S$  and  $F$  is a field.

If  $X$  is a finite set, then the incidence ring  $I(X, R)$  is often called the structural matrix ring. It is known that there exists an isomorphism of algebras  $I(X, R) \rightarrow M(n, B, R)$ , where

$M(n, B, R)$  is a structural matrix ring,  $B$  is a Boolean matrix defined by preorder  $\leq$  on the set  $X$ . Let  $Y$  be a finite set and  $\Gamma_Y : I(Y, S) \rightarrow M(m, C, S)$  be the corresponding isomorphism.

The well-known concept of the Kronecker product of matrices can be transferred to matrices with values in different rings. Then the pre-ordered set  $X \times Y$  will be the corresponding Boolean matrix  $B \otimes C$ , where  $B \otimes C$  is the Kronecker product of the matrices  $B$  and  $C$ . Therefore, there exists the isomorphism

$$\Gamma_{X \times Y} : I(X \times Y, R \otimes S) \rightarrow M(nm, B \otimes C, R \otimes S).$$

There exists a canonical map

$$\Delta : M(n, B, R) \otimes_T M(m, C, S) \rightarrow M(nm, B \otimes C, R \otimes S).$$

**Corollary 3.1.** 1) There is equation  $\Delta(\Gamma_X \times \Gamma_Y) = \Gamma_{X \times Y} \theta$ .

2) The maps  $\theta$  and  $\Delta$  are isomorphism.

From Theorem 2.2 and Corollary 3.1 one can obtain Corollary 3.2.

**Corollary 3.2.** Let  $G$  and  $H$  be arbitrary groups. The statements written below are valid:

1) If  $X$  and  $Y$  are finite preordered sets, then there exists the isomorphism of algebras

$$I(X, R)[G] \otimes_T I(Y, S)[H] \cong I(X \times Y, R \otimes_T S)[G \times H].$$

2) Let there be given rings of structural matrices  $M(n, B, R)$  and  $M(m, C, S)$ . Then the following isomorphism of algebras takes place:

$$M(n, B, R)[G] \otimes_T M(m, C, S)[H] \cong M(nm, B \otimes C, R \otimes_T S)[G \times H].$$

**Keywords:** tensor product, incidence algebras, group algebra

**Acknowledgments:** The research was supported by the Russian Science Foundation, Project No. 23-21-00375, <https://rscf.ru/en/project/23-21-00375/>

**For citation:** Dudin, I.V., Krylov, P.A. (2023) Tensor Product of Incidence Algebras and Group Algebras. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 5–13. doi: 10.17223/19988621/84/1

## Введение

Тензорное произведение модулей и алгебр играет большую роль в математике. Данная статья направлена на решение ряда вопросов. Во-первых, будет ли тензорное произведение двух алгебр инцидентности также алгеброй инцидентности? Во-вторых, является ли тензорное произведение двух групповых алгебр тоже групповой алгеброй? В случае алгебр инцидентности найден лишь некоторый канонический гомоморфизм (теорема 1.1). В случае же, если предупорядоченные множества в определении алгебр инцидентности конечны, то имеем изоморфизм алгебр (следствие 3.1). Это дает законченный ответ на первый вопрос. Поскольку алгебры инцидентности в данном случае изоморфны определенным кольцам

структуральных матриц, то получаем также изоморфизм для тензорных произведений колец структуральных матриц (следствие 3.1).

Что касается второго вопроса, то здесь получен полный ответ без дополнительных условий (теорема 2.2). Теорема 2.2, в частности, обобщает следующий результат из [1]: имеет место канонический изоморфизм алгебр  $K[G] \otimes_K K[H] \cong K[G \times H]$ , где  $K$  – поле,  $G$  и  $H$  – группы.

Все кольца в работе – ассоциативные с ненулевой единицей. При этом считаем, что кольца являются алгебрами над некоторым коммутативным кольцом  $T$ . Тензорное произведение алгебр рассматриваем над кольцом  $T$ . Обычно символ  $T$  в тензорном произведении вида  $A \otimes_T B$  опускаем. Если  $R$  – некоторое кольцо (алгебра), то  $M(n, R)$  – кольцо всех  $n \times n$  матриц со значениями в  $R$ .

Групповые кольца и кольца инцидентности представляют характерные и важные алгебраические объекты. Теории таких колец представлены в работах [1] и [2] соответственно.

Пусть  $\langle X, \leq \rangle$  – предупорядоченное множество, т.е.  $\leq$  – рефлексивное и транзитивное отношение. Для алгебры  $R$  символ  $I(X, R)$  обозначает алгебру инцидентности локально конечного предупорядоченного множества  $X$  над кольцом  $R$  [2].

Для группы  $G$  имеем групповую алгебру  $R[G]$  группы  $G$  над алгеброй  $R$  [1]. Единицу группы и единицу кольца обозначаем одним символом  $1$ . Элемент  $1 \cdot g$  отождествляем с  $g$  ( $g \in G$ ), а элемент  $r \cdot 1$  отождествляем с  $r$  ( $r \in R$ ).

## 1. Алгебры инцидентности

Пусть  $X$  и  $Y$  – предупорядоченные множества,  $R$  и  $S$  – алгебры над коммутативным кольцом  $T$ . Отметим, что декартово произведение  $X \times Y$  также будет предупорядоченным множеством относительно лексикографического порядка. Алгебра инцидентности  $I(X, R)$  является левым  $R$ -модулем. Если  $r \in R$ ,  $f \in I(X, R)$ ,  $x, y \in X$ , то равенство  $(rf)(x, y) = rf(x, y)$  задает структуру  $R$ -модуля.

**Теорема 1.1.** Существует канонический  $R \otimes_T S$ -модульный и кольцевой гомоморфизм  $T$ -алгебр

$$\theta: I(X, R) \otimes_T I(Y, S) \rightarrow I(X \times Y, R \otimes_T S).$$

**Доказательство.** Возьмем произвольные функции  $f \in I(X, R)$  и  $g \in I(Y, S)$ . Обозначим через  $f \circ g$  функцию  $(X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow R \otimes S$ , определенную следующим образом. Для пары элементов  $(a, b) \in (X \times Y) \times (X \times Y)$ , где  $a = (x_1, y_1)$ ,  $b = (x_2, y_2)$ , полагаем  $(f \circ g)(a, b) = f(x_1, x_2) \otimes g(y_1, y_2)$ . Функция  $f \circ g$  есть элемент алгебры  $I(X \times Y, R \otimes S)$ . Пусть  $\eta: I(X, R) \times I(Y, S) \rightarrow I(X \times Y, R \otimes S)$  – отображение, определенное по правилу  $\eta(f, g) = f \circ g$  для любых  $f \in I(X, R)$  и  $g \in I(Y, S)$ . Нетрудно убедиться, что  $\eta$  – сбалансированное над  $T$  отображение. Поэтому имеется  $T$ -модульный гомоморфизм  $\theta: I(X, R) \otimes I(Y, S) \rightarrow I(X \times Y, R \otimes S)$  со свойством

$$\theta(f \otimes g) = \eta(f, g),$$

т.е.

$$\theta(f \otimes g) = f \circ g. \quad (1)$$

На самом деле  $\theta$  является гомоморфизмом алгебр. Для проверки нужно показать справедливость равенства  $\theta((f \otimes g)(f_1 \otimes g_1)) = \theta(f \otimes g)\theta(f_1 \otimes g_1)$ , где  $f, f_1 \in I(X, R)$ ,  $g, g_1 \in I(Y, S)$ , или равенства

$$ff_1 \circ gg_1 = (f \circ g)(f_1 \circ g_1) \quad (2)$$

в алгебре  $I(X \times Y, R \otimes S)$ . Технические вычисления мы опустим. Также без труда проверяется, что  $\theta$  – гомоморфизм  $R \otimes S$ -модулей. ■

**Следствие 1.2.** Если  $R$  – коммутативное кольцо, то имеем гомоморфизм  $R$ -алгебр

$$I(X, R) \otimes_R I(Y, R) \rightarrow I(X \times Y, R).$$

**Доказательство.** В теореме 1.1 нужно положить  $R = T = S$ . Гомоморфизм  $\theta$  в данной ситуации действует следующим образом. Для функций  $f \in I(X, R)$ ,  $g \in I(Y, R)$  и элемента  $(a, b) = ((x_1, y_1), (x_2, y_2))$  имеем  $\theta(f \otimes g) = f \circ g$ , где  $(f \circ g)(a, b) = f(x_1, x_2) \cdot g(y_1, y_2)$ . ■

**Замечание 1.3.** Гомоморфизм из следствия 1.2 не обязан быть изоморфизмом. Простейший пример получается, если в качестве кольца  $R$  взять произведение  $\prod_{p=2,3,5,\dots} \mathbb{Z}_p$  и положить  $X = Y = \mathbb{N}$ .

## 2. Случай групповых алгебр

Как и в предыдущем разделе,  $R$  и  $S$  – некоторые алгебры.  $G$  и  $H$  – произвольные группы.

**Лемма 2.1.** 1) Существует канонический гомоморфизм  $T$ -алгебр  $R \otimes_T S \rightarrow R[G] \otimes_T S[H]$ .

2) Тензорное произведение  $R[G] \otimes_T S[H]$  является левым  $R \otimes_T S$ -модулем.

**Доказательство.** 1) Имеем гомоморфизмы  $T$ -алгебр  $R \rightarrow R[G]$ ,  $r \mapsto r \cdot 1$  ( $r \in R$ ), и  $S \rightarrow S[H]$ ,  $s \mapsto s \cdot 1$  ( $s \in S$ ). Они индуцируют гомоморфизм  $T$ -алгебр  $\alpha: R \otimes S \rightarrow R[G] \otimes S[H]$ ,  $r \otimes s \mapsto r \cdot 1 \otimes s \cdot 1 = r \otimes s$  [3. § 9.2, следствие в)].

2) Исходя из гомоморфизма  $\alpha$  на группе  $R[G] \otimes S[H]$  можно задать структуру притягивающего левого  $R \otimes S$ -модуля с помощью формулы

$$(r \otimes s) \left( \sum_{a \in G} r_a a \otimes \sum_{b \in H} s_b b \right) = \sum_{a \in G} r r_a a \otimes \sum_{b \in H} s s_b b. \quad (3)$$

Далее будем использовать более краткую и удобную форму записи элементов тензорного произведения  $R[G] \otimes S[H]$ . Именно, верно равенство

$$\sum_{a \in G} r_a a \otimes \sum_{b \in H} s_b b = \sum_{a \in G, b \in H} (r_a \otimes s_b)(a \otimes b). \quad (4)$$

Произвольный элемент  $u \in R[G] \otimes S[H]$  может быть записан следующим образом:

$$u = \sum_{a \in G, b \in H} p_{ab}(a \otimes b), \quad (5)$$

где  $p_{ab} \in R \otimes S$  для всех  $a$  и  $b$ .

Для сокращения записи вместо  $\sum_{a \in G}$  (соответственно,  $\sum_{a \in G, b \in H}$ ) пишем  $\sum_a$  (соответственно,  $\sum_{a,b}$ ).

С помощью равенства (5) можно вывести простую формулу для умножения в кольце  $R[G] \otimes S[H]$ . Пусть  $u = \sum_{a,b} p_{ab}(a \otimes b)$  и  $v = \sum_{a,b} q_{ab}(a \otimes b)$  – элементы этого кольца. Вычисления подтверждают справедливость следующего равенства:

$$uv = \sum_{a,b} \left( \sum_{(c,d) \cdot (e,f) = (a,b)} p_{cd} q_{ef} \right) (a \otimes b). \quad (6)$$

Видим, что умножение представляет собой некоторую свертку (что вполне естественно).

**Теорема 2.2.** Имеется канонический  $R \otimes_T S$ -модульный изоморфизм и кольцевой изоморфизм  $T$ -алгебр  $\omega: R[G] \otimes_T S[H] \rightarrow (R \otimes_T S)[G \times H]$ .

**Доказательство.** Отображение

$$\begin{aligned} \psi: R[G] \times S[H] &\rightarrow (R \otimes S)[G \times H], \\ \psi\left(\sum_a r_a a, \sum_b s_b b\right) &= \sum_{a,b} (r_a \otimes s_b)(a, b) \end{aligned}$$

является сбалансированным. Следовательно, существует  $T$ -модульный гомоморфизм  $\omega: R[G] \otimes S[H] \rightarrow (R \otimes S)[G \times H]$ , для которого  $\omega\left(\sum_a r_a a \otimes \sum_b s_b b\right) = \sum_{a,b} (r_a \otimes s_b)(a, b)$ . На произвольном элементе  $u$  из  $R[G] \otimes S[H]$ , представленном

в форме (3),  $\omega$  действует следующим образом:

$$\omega(u) = \omega\left(\sum_{a,b} p_{ab}(a \otimes b)\right) = \sum_{a,b} p_{ab}(a, b). \quad (7)$$

Из равенства (7) несложно получить, что  $\omega$ - $R \otimes S$ -модульный гомоморфизм, т.е.  $\omega(pv) = p\omega(v)$ , для всех  $p \in R \otimes S$  и  $v \in R[G] \otimes S[H]$ . Используя равенства (6) и (7) можно проверить, что  $\omega(uv) = \omega(u)\omega(v)$  для любых  $u, v \in R[G] \otimes S[H]$ . Следовательно,  $\omega$  – гомоморфизм алгебр.

Пусть элемент  $u \in R[G] \otimes S[H]$  записан, как в (5). Если  $\omega(u) = 0$ , то из (7), учитывая единственность записи элементов группового кольца, находим, что  $p_{ab} = 0$  для всех  $a, b$ . Откуда  $u = 0$  и  $\omega$  – инъективное отображение. Если же  $\sum_{(a,b)} s_{ab}(a, b) \in (R \otimes S)[G \times H]$ , то  $\omega\left(\sum_{a,b} s_{ab}(a \otimes b)\right) = \sum_{(a,b)} s_{ab}(a, b)$ . Это означает, что  $\omega$  – сюръекция. Очевидно, что единичный элемент  $\omega$  переводит в единичный элемент. В итоге можно утверждать, что  $\omega$  – изоморфизм. ■

**Следствие 2.3.** Группа  $R[G] \otimes_r S[H]$  является свободным  $R \otimes S$ -модулем. Множество элементов  $a \otimes b$ ,  $a \in G, b \in H$ , образует свободный базис этого модуля.

### 3. Кольца структуральных матриц

Рассмотрим более детально ситуацию, когда предупорядоченные множества  $X$  и  $Y$  конечны. Прежде всего обратим внимание, что элементы конечного множества  $X$  (а также  $Y$ ) допускают такую нумерацию  $x_1, \dots, x_n$ , что из  $x_i \leq x_j$  следует  $i \leq j$  [2. Лемма 1.2.5]. Если  $X$  содержит  $n$  элементов, то кольцо инцидентности  $I(X, R)$  часто называют кольцом структуральных матриц (см.: [4]). Известно, что кольцо структуральных матриц представимо в виде кольца блочных треугольных матриц [5], и, таким образом, оно является одним из видов колец формальных (говорят еще «обобщенных») матриц. Подобным кольцам посвящена книга [6].

Развернем подробнее сказанное в предыдущем абзаце. Пронумеруем элементы множества  $X$  числами от 1 до  $n$  так, как указано выше. Тогда в принципе можно считать, что  $X$  – это множество  $\{1, \dots, n\}$ . Поставив в соответствие функции  $f$  из  $I(X, R)$  матрицу  $(f(x_i, x_j))$  (в позиции  $(i, j)$  стоит элемент  $f(x_i, x_j)$ ), получим вложение колец  $I(X, R) \rightarrow M(n, R)$ . Образ этого вложения обозначим через  $M(n, \leq, R)$ . Тогда имеем равенство  $M(n, \leq, R) = \{(a_{ij}) \in M(n, R) \mid i \not\leq j \Rightarrow a_{ij} = 0\}$ . Работая с конкретным кольцом структуральных матриц, как правило, сразу считают его подкольцом в  $M(n, R)$ .

Пусть  $B = (b_{ij})$  – булева матрица, соответствующая предпорядку  $\leq$  на  $X$ , т.е.  $b_{ij} = \begin{cases} 1, & i \leq j; \\ 0, & i \not\leq j. \end{cases}$

Кольцо  $M(n, \leq, R)$  также обозначают как  $M(n, B, R)$ , где

$$M(n, B, R) = \{(a_{ij}) \in M(n, R) \mid b_{ij} = 0 \Rightarrow a_{ij} = 0\}.$$

Матрица  $B$  обладает свойствами:  $b_{ii} = 1$ , и из  $b_{ik} = b_{kj} = 1$  следует  $b_{ij} = 1$  (говорят, что  $B$  – рефлексивная и транзитивная булева матрица). Опираясь на данные свойства, можно доказать существование подстановки  $\sigma$  степени  $n$  такой, что булева матрица  $\sigma B$  является верхней блочно-треугольной матрицей [4, 5] (здесь  $\sigma B = (b_{\sigma(i)\sigma(j)})$ , см.: [6]). Ясно, что кольцо  $M(n, \sigma B, R)$  состоит из блочно-треугольных матриц. Наконец, существует канонический изоморфизм колец  $M(n, B, R) \cong M(n, \sigma B, R)$ ,  $(a_{ij}) \mapsto (a_{\sigma(i)\sigma(j)})$ .

Прежде чем сформулировать основные результаты раздела, приведем некоторые рассуждения. Сначала расширим понятие кронекерова произведения матриц на матрицы со значениями в разных кольцах. Пусть  $R$  и  $S$  – кольца,  $n$  и  $m$  – натуральные числа. Для матриц  $A = (a_{ij}) \in M(n, R)$  и  $B = (b_{ij}) \in M(m, S)$  кронекерово произведение  $A \otimes B$  определим как блочную матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} \otimes B & \dots & a_{1n} \otimes B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \otimes B & \dots & a_{nn} \otimes B \end{pmatrix},$$

блок  $a_{ij} \otimes B$  которой равен

$$\begin{pmatrix} a_{ij} \otimes b_{11} & \cdots & a_{ij} \otimes b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ij} \otimes b_{m1} & \cdots & a_{ij} \otimes b_{mm} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица  $A \otimes B$  имеет порядок  $nm$  и принимает значения в кольце  $R \otimes S$ .

Строки и столбцы матрицы  $A \otimes B$  пронумеруем естественным образом парами чисел  $(i, j)$ , где  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$ , после чего элемент  $a_{ij} \otimes b_{kl}$  будет находиться в позиции  $((i, k), (j, l))$ . Обратим еще внимание на весьма полезное равенство

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD. \quad (8)$$

Для колец инцидентности  $I(X, R)$  существуют аналоги матричных единиц. Обозначим через  $e_{xy}$  такую функцию  $X \times X \rightarrow R$ , что

$$e_{xy}(s, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } (s, t) = (x, y); \\ 0, & (s, t) \neq (x, y). \end{cases}$$

Функции  $e_{xy}$  обладает свойством: если  $x \leq z \leq y$ , то  $e_{xz} e_{zy} = e_{xy}$ .

Изоморфизм алгебр  $I(X, R) \rightarrow M(n, B, R)$ ,  $f \mapsto (f(x_i, x_j))$ , полученный ранее, обозначим через  $\Gamma_X$ . Ясно, что  $\Gamma_X$  переводит функции  $e_{xy}$  в матричные единицы кольца  $M(n, B, R)$ .

Пусть  $I(Y, S)$  – еще одна алгебра инцидентности и  $M(m, C, S)$  – соответствующее кольцо структуральных матриц с булевой матрицей  $C$ . Далее пусть  $\Gamma_Y : I(Y, S) \rightarrow M(m, C, S)$  – изоморфизм алгебр, аналогичный  $\Gamma_X$ .

Понятно, что  $B \otimes C$  – булева рефлексивная и транзитивная матрица. Следовательно, имеем кольцо структуральных матриц  $M(nm, B \otimes C, R \otimes S)$ . Проверка показывает, что предупорядоченному множеству  $X \times Y$  соответствует булева матрица  $B \otimes C$ . Значит, мы располагаем изоморфизмом

$$\Gamma_{X \times Y} : I(X \times Y, R \otimes S) \rightarrow M(nm, B \otimes C, R \otimes S).$$

С другой стороны, существует каноническое отображение

$$\Delta : M(n, B, R) \otimes M(m, C, S) \rightarrow M(nm, B \otimes C, R \otimes S), \quad G \otimes_r H \rightarrow G \otimes H.$$

Из равенства (1) вытекает, что  $\Delta$  – гомоморфизм алгебр. Введенные гомоморфизмы удовлетворяют равенству

$$\Delta(\Gamma_X \otimes \Gamma_Y) = \Gamma_{X \times Y} \theta, \quad (9)$$

т.е. коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} I(X, R) \otimes I(Y, S) & \xrightarrow{\Gamma_X \otimes \Gamma_Y} & M(n, B, R) \otimes M(m, C, S) \\ \theta \downarrow & & \downarrow \Delta \\ I(X \times Y, R \otimes S) & \xrightarrow{\Gamma_{X \times Y}} & M(nm, B \otimes C, R \otimes S) \end{array} \quad (10)$$

**Следствие 3.1.** 1) Если  $X$  и  $Y$  – конечные предупорядоченные множества, то гомоморфизм  $\theta$  является изоморфизмом.

2) Гомоморфизм  $\Delta$  в диаграмме (10) является изоморфизмом.

**Доказательство.** Так как  $\Gamma_X \otimes \Gamma_Y$  и  $\Gamma_{X \times Y}$  суть изоморфизмы, то утверждения 1 и 2 равносильны. И доказать их можно, исходя из одинаковых соображений. В случае 1 нужно использовать функции  $e_{xy}$  и аналогичные функции для двух оставшихся колец инцидентности.

Более внимательно посмотрим на  $\Delta$ . Пусть  $E_{ij}$  и  $F_{kl}$  – матричные единицы колец  $M(n, B, R)$  и  $M(m, C, S)$  соответственно. Тогда  $\{E_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\}$  – свободный базис для  $M(n, B, R)$  как левого  $R$ -модуля,  $\{F_{kl} \mid k, l = 1, \dots, m\}$  – свободный базис для  $M(m, C, S)$  как левого  $S$ -модуля. А все матрицы вида  $E_{ij} \otimes F_{kl}$  образуют свободный базис для кольца  $M(nm, B \otimes C, R \otimes S)$ , если его рассмотреть как левый  $R \otimes S$ -модуль. И все получается за счет того, что  $\Delta$  переводит свободный базис в свободный базис. ■

Из теоремы 2.2 и следствия 3.1 непосредственно выводится такой результат.

**Следствие 3.2.** Пусть  $G$  и  $H$  – произвольные группы. Справедливы записанные ниже утверждения.

1. Если  $X$  и  $Y$  – конечные предпорядоченные множества, то существует изоморфизм алгебр

$$I(X, R)[G] \otimes_T I(Y, S)[H] \cong I(X \times Y, R \otimes_T S)[G \times H].$$

2. Пусть даны кольца структуральных матриц  $M(n, B, R)$  и  $M(m, C, S)$ . Тогда имеет место изоморфизм алгебр

$$M(n, B, R)[G] \otimes_T M(m, C, S)[H] \cong M(nm, B \otimes C, R \otimes_T S)[G \times H].$$

#### Список источников

1. Passman D.S. The Algebraic Structure of Group Rings. New York : John Wiley and Sons, 1977. 734 p.
2. Spiegel E., O'Donnell C.J. Incidence Algebras. New York : Marcel Dekker, 1997. 334 p.
3. Pierce R.S. Associative Algebras. Berlin : Springer-Verlag, 1982. 406 p.
4. Dăscălescu S., Wyk L. van. Do isomorphic structural matrix rings have isomorphic graphs? // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. V. 124 (5). P. 1385–1391.
5. Smith K.C., Wyk L. van. An internal characterization of structural matrix rings // Commun. Algebra. 1994. V. 22 (4). P. 5599–5622.
6. Krylov P., Tuganbaev A. Formal Matrices. Berlin : Springer-Verlag, 2017. 164 p.

#### References

1. Passman D.S. (1977) *The Algebraic Structure of Group Rings*. New York: John Wiley and Sons.
2. Spiegel E., O'Donnell C.J. (1997) *Incidence Algebras*. New York: Marcel Dekker.
3. Pierce R.S. (1982) *Associative Algebras*. Berlin: Springer-Verlag.
4. Dăscălescu S., Wyk L. van (1996) Do isomorphic structural matrix rings have isomorphic graphs? *Proceedings of the American Mathematical Society*. 124(5). pp. 1385–1391.
5. Smith K.C., Wyk L. van (1994) An internal characterization of structural matrix rings. *Communications in Algebra*. 22(4). pp. 5599–5622.
6. Krylov P., Tuganbaev A. (2017) *Formal Matrices*. Berlin: Springer-Verlag.

***Сведения об авторах:***

**Дудин Илья Вячеславович** – магистрант, младший научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории алгебры и топологии Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: overchalito228@gmail.com

**Крылов Пётр Андреевич** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: krylov@math.tsu.ru

***Information about the authors:***

Dudin Ilya V. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: overchalito228@gmail.com

Krylov Piotr A. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: krylov@math.tsu.ru

*Статья поступила в редакцию 20.04.2023; принята к публикации 10.07.2023*

*The article was submitted 20.04.2023; accepted for publication 10.07.2023*

Научная статья

УДК 511.17 + 519.682

MSC: 11B65, 11A07

doi: 10.17223/19988621/84/2

## Последовательности биномиальных коэффициентов по простому модулю

Валентин Михайлович Зюзьков

*Томский государственный университет, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Томск, Россия, vmz@math.tsu.ru*

**Аннотация.** Рассматривается поведение бесконечных последовательностей биномиальных коэффициентов  $\binom{x}{y} \bmod p$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots$  по простому модулю  $p$ . В поисках закономерностей предварительно проводятся математические эксперименты с помощью Wolfram Mathematica. Доказывается периодичность данных последовательностей и определяется длина периода как  $p$  в степени  $\lfloor \log_p(y) \rfloor + 1$ .

**Ключевые слова:** экспериментальная математика, последовательности биномиальных коэффициентов, периоды, сравнения, система Mathematica

**Для цитирования:** Зюзьков В.М. Последовательности биномиальных коэффициентов по простому модулю // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 14–22. doi: 10.17223/19988621/84/2

Original article

## Sequences of binomial coefficients modulo prime

Valentin M. Zyuz'kov

*Tomsk State University, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, Russian Federation, vmz@math.tsu.ru*

**Abstract.** The behavior of infinite sequences of binomial coefficients  $\binom{x}{y} \bmod p$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots$ ;  $p$  is a prime number) is considered. In the search of regularities, preliminary mathematical experiments are carried out using Wolfram Mathematica. The periodicity of these sequences is proved and the length of the period is determined as  $p$  to the power of  $\lfloor \log_p(y) \rfloor + 1$ .

**Keywords:** experimental mathematics, sequences of binomial coefficients, periods, congruences, Mathematica system

**For citation:** Zyuz'kov, V.M. (2023) Sequences of binomial coefficients modulo prime. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 14–22. doi: 10.17223/19988621/84/2

Экспериментальная математика – это тип математического исследования, в котором вычисления используются для изучения математических структур и определения их основных свойств и закономерностей. Как и экспериментальная наука, экспериментальная математика может использоваться для составления математических предсказаний, которые затем подтверждаются или опровергаются на основе дополнительных вычислительных экспериментов. Такие исследования должны завершаться доказательством. Разработка широкого спектра математических программных продуктов, таких как Mathematica [1] с языком программирования Wolfram, позволила математикам с разным опытом и интересами использовать компьютер в качестве важного инструмента в своей повседневной работе. Современное состояние экспериментальной математики описано в [2]. Примеры экспериментов в теории чисел, подтверждений и опровержений приведены в [3]. Современной экспериментальной математике свойственно изложение результатов, следуя Эйлеру, который в своих работах показывал все подробности: каким образом он приходил к формулировкам теорем, на каких предположениях основывался [3. Гл. VI; 4].

В тексте статьи присутствуют написанные на языке Wolfram фрагменты программ, каждый из которых отмечается слева вертикальной чертой. Входные выражения, которые Mathematica вычисляет, выделяются полужирным шрифтом и являются (1) определениями новых функций или (2) вызовами встроенных функций (либо ранее определенных функций) с аргументами. Во втором случае выходное выражение – значение вычисленного выражения – помещается сразу после входа без выделения жирности. Имена функций языка Wolfram, введенные пользователем, пишутся с маленькой буквы курсивом как в программных фрагментах, так и в остальном тексте. Имена встроенных функций языка Wolfram в соответствии с синтаксисом пишутся с большой буквы прямым шрифтом.

Начинаем исследование с рассмотрения бесконечных последовательностей

$\left( \begin{matrix} n \\ p^t \end{matrix} \right) \bmod p$  остатков биномиальных коэффициентов при делении на простое  $p$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , с неотрицательным целым  $t$ . В данном контексте обозначение  $\bmod$  используется для арифметической операции нахождения остатка при целочисленном делении. Элементы последовательности на языке Wolfram можно определить функцией

**|**  $h[p\_ , t\_ , n\_ ] := \text{Mod}[\text{Binomial}[n, p^t], p]$

с фиксированными натуральными параметрами  $t \geq 0$  и  $p$ .

Изучим поведение при некоторых небольших  $p$  и  $t$ . Диапазон изменения  $n$  задается с помощью встроенной функции Range:

**|**  $h[2, 1, \#] \& /@ \text{Range}[0, 15]$   
 $\{0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1\}$



Вторая функция  $test2[ps, t, ns]$  при фиксированном  $t$  проверяет истинность гипотезы для диапазонов значений  $ns$  и  $ps$ :

**|**  $test2[ps_, t_, ns_] := \text{And} @@ (test1[\#, t, ns] \& /@ ps)$

Следующее вычисление показывает, что  $\binom{n}{p^4} \pmod p = \binom{n+p^5}{p^4} \pmod p$  для всех  $n$  от

0 до 100 и для всех первых десяти простых чисел. Выражение  $\text{Prime}[\text{Range}[10]]$  задает список первых 10 простых чисел:

**|**  $test2[\text{Prime}[\text{Range}[10]], 4, \text{Range}[0, 100]]$

**|** True

Приступим к доказательству гипотезы 1.

**Лемма 1.** Если  $p$  – простое число, то

$$\binom{x}{y} \equiv \binom{\lfloor x/p \rfloor}{\lfloor y/p \rfloor} \binom{x \bmod p}{y \bmod p} \pmod p$$

при любых целых неотрицательных  $x$  и  $y$ .

Формулировку утверждения см.: [5. С. 278], доказательство приведено в работе [5. С. 586].

**Лемма 2.** Пусть натуральные числа  $t > 0$ ,  $s \geq 0$  и  $p$  – простое число. Тогда

$$\binom{\lfloor n/p^s \rfloor}{p^t} \equiv \binom{\lfloor n/p^{s+1} \rfloor}{p^{t-1}} \pmod p$$

**Доказательство.** Применяя лемму 1, имеем

$$\begin{aligned} \binom{\lfloor n/p^s \rfloor}{p^t} &\equiv \binom{\lfloor \lfloor n/p^s \rfloor / p \rfloor}{\lfloor p^t / p \rfloor} \binom{\lfloor n/p^s \rfloor \bmod p}{p^t \bmod p} \equiv \binom{\lfloor n/p^{s+1} \rfloor}{p^{t-1}} \binom{\lfloor n/p^s \rfloor \bmod p}{0} \equiv \\ &\equiv \binom{\lfloor n/p^{s+1} \rfloor}{p^{t-1}} \times 1 \equiv \binom{\lfloor n/p^{s+1} \rfloor}{p^{t-1}} \pmod p. \end{aligned}$$

Следующая теорема в частности (утверждение 2) доказывает гипотезу 1.

**Теорема 1.** Если  $p$  – простое,  $t > 0$ , то

1)  $\binom{n}{p^t} \equiv \lfloor n/p^t \rfloor \pmod p$ .

2) последовательность биномиальных коэффициентов по модулю  $\binom{n}{p^t} \pmod p$ ,

$n = 0, 1, 2, \dots$ , является периодической с длиной периода  $p^{t+1}$ .

**Доказательство первого утверждения.** Представим  $\binom{n}{p^t}$  в виде  $\binom{\lfloor n/p^s \rfloor}{p^t}$ ,

где  $s = 0$ , и применим лемму 2. Получаем сравнение

$$\binom{n}{p^t} \equiv \lfloor n/p^t \rfloor \pmod p.$$

Если  $t - 1 \neq 0$ , то снова воспользуемся леммой 2 для новой левой части  $\binom{\lfloor n/p \rfloor}{p^{t-1}}$

сравнения и будем продолжать, создавая новые цепочки сравнений, пока показатель степени числа  $p$  у нижнего индекса биномиального коэффициента не станет равным 0. Таким образом, окончательно получаем

$$\binom{n}{p^t} \equiv \lfloor n/p^t \rfloor \pmod{p}. \quad (1)$$

Для наглядности рассмотрим, как это доказывается для случая  $t = 3$ :

$$\begin{aligned} \binom{n}{p^3} &\equiv \binom{\lfloor n/p \rfloor}{\lfloor p^3/p \rfloor} \binom{n \bmod p}{p^t \bmod p} \equiv \binom{\lfloor n/p \rfloor}{p^2} \binom{n \bmod p}{0} \equiv \binom{\lfloor n/p \rfloor}{p^2} \times 1 \equiv \binom{\lfloor n/p \rfloor}{p^2} \equiv \\ &\equiv \binom{\lfloor \lfloor n/p \rfloor / p \rfloor}{\lfloor p^2/p \rfloor} \binom{\lfloor n/p \rfloor \bmod p}{p^2 \bmod p} \equiv \binom{\lfloor n/p^2 \rfloor}{p} \binom{\lfloor n/p \rfloor \bmod p}{0} \equiv \binom{\lfloor n/p^2 \rfloor}{p} \times 1 \equiv \\ &\equiv \binom{\lfloor n/p^2 \rfloor}{p} \equiv \binom{\lfloor \lfloor n/p^2 \rfloor / p \rfloor}{\lfloor p/p \rfloor} \binom{\lfloor n/p^2 \rfloor \bmod p}{p \bmod p} \equiv \binom{\lfloor n/p^3 \rfloor}{1} \binom{\lfloor n/p^2 \rfloor \bmod p}{0} \equiv \\ &\equiv \binom{\lfloor n/p^3 \rfloor}{1} \times 1 \equiv \binom{\lfloor n/p^3 \rfloor}{1} \equiv \lfloor n/p^3 \rfloor \pmod{p}. \end{aligned}$$

**Доказательство второго утверждения.** Из первого утверждения следует

$$\binom{n+p^{t+1}}{p^t} \equiv \lfloor (n+p^{t+1})/p^t \rfloor \equiv \lfloor n/p^t \rfloor + p \equiv \lfloor n/p^t \rfloor \pmod{p}.$$

То есть имеем

$$\binom{n+p^{t+1}}{p^t} \equiv \lfloor n/p^t \rfloor \pmod{p}. \quad (2)$$

Сравнения (1) и (2) вместе дают

$$\binom{n}{p^t} \equiv \binom{n+p^{t+1}}{p^t} \pmod{p}. \quad (3)$$

что доказывает второе утверждения теоремы.

Следующий результат был также найден с помощью экспериментов в системе Wolfram Mathematica. Исследовалось поведение последовательности

$$\binom{x}{y} \pmod{p}, x = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

где  $x \geq 1$  – целое,  $p$  – простое число, и натуральное положительное  $y$  было произвольно.

Определим функцию для вычисления  $\binom{x}{y} \pmod{p}$ :

**|**  $b[p\_ , y\_ , x\_ ] := \text{Mod}[\text{Binomial}[x, y], p]$

Мы будем применять ее для диапазона значений  $x = 0, 1, 2, 3, \dots, m$ , где величина  $m$  выбирается таким образом, чтобы можно было визуально обнаружить перио-

дическое повторение значений функции  $b$ . Для этой же цели также список полученных значений каждого вызова функции  $b[p, y, x]$  разбивается на подписки с помощью встроенных функций Partition и Column языка Wolfram:

```
Partition[b[3, 3^0, #]& /@ Range[0, 9], 3] // Column
```

```
{0, 1, 2}
{0, 1, 2}
{0, 1, 2}
```

В данном случае вы видим, что период значений функции  $b$  равен  $\{0, 1, 2\}$ . Рассмотрим последовательности для всех значений  $y \leq 9$ :

```
Partition[b[3, 2, #]& /@ Range[0, 9], 3] // Column
```

```
{0, 0, 1}
{0, 0, 1}
{0, 0, 1}
```

```
Partition[b[3, 3, #]& /@ Range[0, 18], 9] // Column
```

```
{0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2}
{0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2}
```

```
Partition[b[3, 4, #]& /@ Range[0, 18], 9] // Column
```

```
{0, 0, 0, 0, 1, 2, 0, 2, 1}
{0, 0, 0, 0, 1, 2, 0, 2, 1}
```

```
Partition[b[3, 5, #]& /@ Range[0, 18], 9] // Column
```

```
{0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 2}
{0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 2}
```

```
Partition[b[3, 6, #]& /@ Range[0, 18], 9] // Column
```

```
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1}
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1}
```

```
Partition[b[3, 7, #]& /@ Range[0, 18], 9] // Column
```

```
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2}
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2}
```

```
Partition[b[3, 8, #]& /@ Range[0, 18], 9] // Column
```

```
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}
```

```
Partition[b[3, 3^2, #]& /@ Range[0, 54], 27] // Column
```

```
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2}
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2}
```

Были рассмотрены и другие случаи с небольшими значениями  $p$  и  $y$ . В изученных примерах обнаружилось, что если  $p^k \leq y < p^{k+1}$  для натурального показателя  $k$ , то выполнена гипотеза 2:

$$\binom{x}{y} \equiv \binom{x + p^{k+1}}{y} \pmod{p}.$$

Более сложный тест для проверки гипотезы состоит в случайном выборе чисел  $p, k, y, x$  и выдает булевское значение. Ниже приведен код этого теста: вызов теста и полученный результат – True.

```
xs = { }; Do[p = RandomChoice[{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17}]; k = RandomInteger[{0, 5}];
y = RandomInteger[{p^k, p^(k + 1) - 1}]; x = RandomInteger[{0, 2p^k}];
AppendTo[xs, Mod[Binomial[x, y], p] == Mod[Binomial[x + p^(k + 1), y], p]],
1000];
And @@ xs
True
```

Тест проверяет 1 000 вариантов для случайного выбора значений  $p, k, y, x$ . Значение  $p$  выбирается среди простых чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13 и 17. Возможные значения  $k$  суть 0, 1, 2, 3, 4, 5. Целое значение  $y$  удовлетворяет условию  $p^k \leq y < p^{k+1}$ . Возможные значения переменной  $x$  удовлетворяют условию  $0 \leq x < 2p^{k+1}$ . Логические значения True или False – результаты проверки каждого варианта, накапливаются в одном списке  $xs$ . После получения тысячи булевских значений тест вычисляет конъюнкцию этих значений. Тест запускался несколько раз, и после того как он выдал значение True во всех проделанных попытках, была доказана гипотеза 2.

**Теорема 2 (обобщение теоремы 1).** Пусть  $x \geq 1$  – целое,  $k \geq 0$  – целое,  $p$  – простое число, и выполнено неравенство  $p^k \leq y < p^{k+1}$ . Тогда

$$\binom{x}{y} \equiv \binom{x + p^{k+1}}{y} \pmod{p}. \quad (4)$$

Для доказательства нам понадобится теорема Люка и лемма 3.

**Теорема Люка** [6. С. 43]. Пусть  $p$  – простое число, и пусть  $n, m, q, r$  – неотрицательные числа, причем  $0 \leq q < p, 0 \leq r < p$ . Тогда

$$\binom{pn + q}{pm + r} \equiv \binom{n}{m} \binom{q}{r} \pmod{p}.$$

**Лемма 3.** Пусть  $x \geq 1$  – целое,  $p$  – простое число и  $0 \leq y < p$ . Тогда

$$\binom{x}{y} \equiv \binom{x + p}{y} \pmod{p}. \quad (5)$$

**Доказательство.** Пусть  $n, q$  – неотрицательные целые, такие что  $x = np + q$  и  $0 \leq q < p$ . Применяя теорему Люка по отдельности к биномиальным коэффициентам

там  $\binom{x}{y}$  и  $\binom{x + p}{y}$  имеем

$$\begin{aligned} \binom{x}{y} &= \binom{nx + q}{0 \times p + y} \equiv \binom{n}{0} \binom{q}{y} \equiv \binom{q}{y} \pmod{p}. \\ \binom{x + p}{y} &= \binom{(n + 1)p + q}{0 \times p + y} \equiv \binom{n + 1}{0} \binom{q}{y} \equiv \binom{q}{y} \pmod{p}. \end{aligned}$$

Из полученных сравнений следует сравнение (5).

**Доказательство теоремы 2.** Индукция по  $k$ . Базис при  $k = 0$  доказан в лемме 3. Для доказательства индуктивного перехода предположим, что сравнение (4) выполнено при  $k = t$ . Докажем выполнимость (4) для  $k = t + 1$ . Положим  $x = np + q$

и  $0 \leq q < p$ , где  $n$  – целое неотрицательное число,  $y = p^{t+1} + r$  и  $0 \leq r < p$ . По теореме Люка имеем

$$\binom{x}{y} = \binom{np+q}{p^t \times p+r} \equiv \binom{n}{p^t} \binom{q}{r} \pmod{p}.$$

Теперь начнем с правой части сравнения (4) при  $k = t + 1$ . По теореме Люка получаем

$$\binom{x+p^{t+2}}{y} = \binom{p(n+p^{t+1})+q}{p^t p+r} \equiv \binom{n+p^{t+1}}{p^t} \binom{q}{r} \pmod{p}.$$

И заключение данной теоремы следует из сравнения (3), полученного в пункте 2 теоремы 1.

**Следствие.** Пусть  $p$  – простое число,  $y$  – положительное целое число, тогда последовательность

$$\binom{x}{y} \pmod{p}, x = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

является периодической с длиной периода  $d = p^{\lfloor \log_p(y) \rfloor + 1}$ .

**Доказательство.** Для  $y$  существует единственное целое  $k$ , для которого  $p^k \leq y < p^{k+1}$ . Это значение  $k$  равно  $\lfloor \log_p(y) \rfloor$ . Теорема 2 говорит, что последовательность (6) является периодической с длиной периода  $p^{k+1}$ .

#### Список источников

1. Wolfram Mathematica. URL: <http://www.wolfram.com/mathematica>
2. Weisstein E.W. Experimental Mathematics // Wolfram MathWorld. URL: <https://mathworld.wolfram.com/ExperimentalMathematics.html>
3. Зюзьков В.М. Эксперименты в теории чисел. Томск : Изд-во НТЛ, 2019. 348 с.
4. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. М. : Мир ; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. 703 с.
5. Табачников С.Л., Фукс Д.Б. Математический дивертисмент : 30 лекций по классической математике. М. : МЦНМО, 2011. 512 с.

#### References

1. Wolfram Mathematica. URL: <http://www.wolfram.com/mathematica>
2. Weisstein Eric W. *Experimental Mathematics. From MathWorld – A Wolfram Web Resource.* <https://mathworld.wolfram.com/ExperimentalMathematics.html>
3. Zyuz'kov V.M. (2019) *Eksperty v teorii chisel* [Experiments in the number theory]. Tomsk: NTL.
4. Graham R., Knut D., Patashnik O. (1994) *Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science.* Addison-Wesley.
5. Tabachnikov S.L., Fuks D.B. (2011) *Matematicheskiy divertiment. 30 lektsiy po klassicheskoy matematike* [Mathematical divertisement. 30 lectures on classical mathematics]. Moscow: MCCME.

#### Сведения об авторе:

**Зюзьков Валентин Михайлович** – старший научный сотрудник, доцент кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования Томского государственного

университета, профессор кафедры компьютерных систем управления и проектирования Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники, Томск, Россия. E-mail: vmz@math.tsu.ru

***Information about the author:***

**Zyuz'kov Valentin M.** (Senior Researcher, Associate Professor of chair of Computational Mathematics and Computer Modeling, Tomsk State University, Professor of the Chair of Computer Systems in Control and Design of the Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vmz@math.tsu.ru

*Статья поступила в редакцию 15.09.2022; принята к публикации 10.07.2023*

*The article was submitted 15.09.2022; accepted for publication 10.07.2023*

Научная статья

УДК 514.765

MSC: 53B35

doi: 10.17223/19988621/84/3

## Кэлеровы и сублагранжевы подмногообразия

Евгений Сергеевич Корнев

*Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия, q148@mail.ru*

**Аннотация.** Описан способ получения кэлеровых и сублагранжевых подмногообразий в многообразиях произвольной размерности. Для этого используется понятие субвисторной и субкэлеровой структуры, которое обобщает классические твисторные и кэлеровы структуры на вещественные многообразия любой размерности с вырожденной фундаментальной 2-формой. Приведены явные примеры таких подмногообразий, показано, как субвисторная структура на многообразии позволяет локально разложить его в прямое произведение подмногообразий.

**Ключевые слова:** субвисторная структура, субкэлерова структура, кэлерово подмногообразие, сублагранжево подмногообразие, вырожденная 2-форма

**Для цитирования:** Корнев Е.С. Кэлеровы и сублагранжевы подмногообразия // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 23–35. doi: 10.17223/19988621/84/3

Original article

## Kähler and Sublagrangian Submanifolds

Eugene S. Kornev

*Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation, q148@mail.ru*

**Abstract.** The work describes a way to obtain Kähler and sublagrangian submanifolds in real manifolds of arbitrary dimension. For this purpose, the concept of subtwistor and sub-Kähler structure is used. They generalize the classic concepts of twistor and Kähler structures to real manifolds of any dimension with a degenerate fundamental 2-form. The explicit examples of such submanifolds are presented. It is also shown how the subtwistor structure on the manifold allows one to factorize locally this manifold into direct products of submanifolds.

**Keywords:** subtwistor structure, sub-Kähler structure, Kähler submanifold, sublagrangian submanifold, degenerate 2-form

**For citation:** Kornev, E.S. (2023) Kähler and Sublagrangian Submanifolds. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 23–35. doi: 10.17223/19988621/84/3

## Введение

На вещественных многообразиях четной размерности широко изучаются кэлеровы, твисторные и эрмитовы структуры, а на вещественных многообразиях нечетной размерности – контактные и почти контактные метрические структуры (см.: [1]). Однако на вещественном многообразии нечетной размерности любая кососимметричная 2-форма является вырожденной. В [2] было введено понятие субтвисторной и субкэлеровой структуры, которое обобщает классические твисторные и кэлеровы структуры на вещественные многообразия любой размерности с вырожденной фундаментальной 2-формой. В данной работе описано, как субтвисторные и субкэлеровы структуры позволяют получать в вещественных многообразиях произвольной размерности кэлеровы и сублагранжевы подмногообразия. Понятие сублагранжева подмногообразия является обобщением классического лагранжева подмногообразия для многообразий произвольной размерности с субтвисторной или субкэлеровой структурой. Частный случай субтвисторной структуры – аффинорная метрическая структура, обобщающий понятие контактной и почти контактной метрической структуры на многообразия произвольной размерности, изучен для групп Ли и алгебр Ли в работах [3, 4]. Таким образом, субтвисторные структуры, субкэлеровы структуры и аффинорные метрические структуры дают общую теорию метрических структур на вещественных многообразиях любой размерности с вырожденной или нет фундаментальной 2-формой.

Субтвисторной структурой на многообразии  $M$  размерности  $\geq 3$  называется набор объектов  $(\Omega, D, \Phi, g)$ , где  $\Omega$  – регулярная ненулевая возможно вырожденная кососимметричная 2-форма на  $M$ ,  $D$  – так называемое рабочее расслоение четного ранга на  $M$ ,  $\Phi$  – аффинор, ассоциированный с 2-формой  $\Omega$ , и  $g$  – риманова метрика на  $M$ , связывающая аффинор  $\Phi$  и 2-форму  $\Omega$ . Если в  $M$  существует подмногообразии  $Q: TQ = D|_Q$ , ограничение  $\Phi$  на  $Q$  есть комплексная структура, и 2-форма  $\Omega$  замкнута на  $M$ , субтвисторная структура вместе с подмногообразием  $Q$  называется субкэлеровой структурой. Цель данной работы – показать, как с помощью субтвисторных и субкэлеровых структур можно получать в вещественных многообразиях произвольной размерности кэлеровы и сублагранжевы подмногообразия, а также как субтвисторная структура на многообразии влияет на локальную геометрию этого многообразия.

В разд. 1 приведены необходимые сведения и определения для субтвисторных структур, следуя работе [2]. В разд. 2 рассмотрен частный случай субтвисторной структуры – субкэлерова структура. В разд. 3 введено понятие тензора кручения субтвисторной структуры и показано, как субтвисторная структура с нулевым тензором кручения влияет на локальную геометрию многообразия. В разд. 4 приведены явные примеры многообразий, на которых не существует кэлеровой структуры, но существуют субкэлерова структура и кэлеровы подмногообразия, а также получены необходимые топологические условия существования на многообразии субтвисторной или субкэлеровой структуры. В разд. 5 даются определения и примеры сублагранжевых подмногообразий в многообразиях произвольной размерности. В данной работе используются определения и результаты, подробно описанные в работах [2–4].

## 1. Субтвисторные структуры

Пусть  $M$  – гладкое вещественное многообразие размерности  $n \geq 3$ ,  $\Omega$  – ненулевая кососимметричная 2-форма на  $M$ ,  $X$  – векторное поле на  $M$ . Внутренним произведением 2-формы  $\Omega$  и векторного поля  $X$  называется 1-форма  $I_X \Omega$ , такая что для любого векторного поля  $Y \in C^1(TM)$

$$I_X(Y) = \Omega(X, Y).$$

**Определение 1.1.** *Радикалом 2-формы  $\Omega$  в точке  $x \in M$  называется касательное подпространство*

$$\text{rad}\Omega_x = \{v \in T_x M : I_v \Omega_x = 0\}.$$

2-форма  $\Omega$  называется *регулярной*, если размерность подпространства  $\text{rad}\Omega_x$  не зависит от точки  $x$ .

Радикалом регулярной 2-формы  $\Omega$  на многообразии  $M$  называется распределение касательных подпространств

$$\text{rad}\Omega = \bigcup_{x \in M} \text{rad}\Omega_x.$$

Объединяя результаты доказанные в [2, 3], имеем следующее:

**Теорема 1.2.** *Пусть  $M$  – вещественное многообразие размерности  $n \geq 3$ ,  $\Omega$  – ненулевая регулярная кососимметричная 2-форма на  $M$ , и  $r$  – ранг распределения  $\text{rad}\Omega$ . Тогда:*

- 1) Если  $n$  четно, то и  $r$  четно, и  $0 \leq r \leq n - 2$ ;
- 2) Если  $n$  нечетно, то и  $r$  нечетно, и  $1 \leq r \leq n - 2$ ;
- 3) Если 2-форма  $\Omega$  замкнута, т.е.  $d\Omega = 0$ , то распределение  $\text{rad}\Omega$  инволютивно.

Пусть  $g$  – риманова метрика на многообразии  $M$ , и  $D$  – ортогональное дополнение к  $\text{rad}\Omega$ . Распределение  $D$  называется *рабочим расслоением* для 2-формы  $\Omega$ . Говорят, что 2-форма  $\Omega$  не вырождена, если  $\text{rad}\Omega = \{0\}$ . Из теоремы 1.2 сразу получаем:

**Следствие 1.3.** *Пусть  $\Omega$  – ненулевая регулярная кососимметричная 2-форма на многообразии  $M$  размерности  $n \geq 3$  с рабочим расслоением  $D$ . Тогда ранг распределения  $D$  является четным при любом  $n$ , и ограничение 2-формы  $\Omega$  на сечения распределения  $D$  есть невырожденная 2-форма.*

Зафиксируем следующий набор объектов:  $(\Omega, D, g)$ , где  $\Omega$  – ненулевая регулярная 2-форма на многообразии  $M$ ,  $D$  – рабочее расслоение для  $\Omega$ ,  $g$  – риманова метрика на  $M$ .

**Определение 1.4.** *Аффиномом, ассоциированным с 2-формой  $\Omega$ , называется непрерывное поле эндоморфизмов  $\Phi$  касательных подпространств на  $M$ , удовлетворяющее следующим свойствам:*

$$\Omega(X, Y) = g(\Phi X, Y), \quad X, Y \in C^1(TM),$$

$$G(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y), \quad X, Y \in C^1(D).$$

В [2] доказано, что непосредственно из определения вытекают следующие свойства аффинора:

**Предложение 1.5.** Пусть  $\Phi$  – аффинор, ассоциированный с ненулевой регулярной 2-формой  $\Omega$  с рабочим расслоением  $D$ . Тогда:

- 1)  $\ker \Phi = \text{rad} \Omega$ ;
- 2)  $\Phi^2 \Big|_D = -\text{id}$ , где  $\text{id}$  – поле тождественных операторов на  $M$ ;
- 3)  $\Phi^* \Omega = \Omega \circ \Phi = \Omega$ ;
- 4) Для любых  $X, Y \in C^1(D)\Omega(X, \Phi Y)$  есть скалярное произведение на сечениях рабочего расслоения.

Таким образом, аффинор  $\Phi$  есть обобщение почти комплексной структуры, положительно ассоциированной с невырожденной 2-формой на многообразии произвольной размерности с вырожденной регулярной 2-формой. А четверка  $(\Omega, D, \Phi, g)$  есть обобщение твисторной структуры.

**Определение 1.6.** Субтвисторной структурой на многообразии  $M$  размерности  $n \geq 3$  называется набор объектов  $(\Omega, D, \Phi, g)$ , где  $\Omega$  – ненулевая регулярная кососимметричная 2-форма на  $M$ ,  $D$  – рабочее расслоение на  $M$ ,  $\Phi$  – аффинор, ассоциированный с 2-формой  $\Omega$ ,  $g$  – риманова метрика на  $M$ .

Из этого определения видно, что кэлерова, почти кэлерова и твисторная структуры являются частными случаями субтвисторной структуры в случае, когда  $\text{rad} \Omega = \{0\}$  и  $n$  четно. В этом случае рабочее расслоение  $D = TM$ .

2-форма  $\Omega$  в определении 1.6 называется *фундаментальной 2-формой* субтвисторной структуры. Из п. 3 теоремы 1.2 и теоремы Фробениуса для распределений следует, что если вещественное многообразие  $M$  размерности  $\geq 3$  допускает субтвисторную структуру с замкнутой фундаментальной 2-формой  $\Omega$ , то через каждую точку  $x \in M$  проходит интегральное риманово подмногообразие

$R_x : TR_x = \text{rad} \Omega \Big|_{R_x}$ . Отсюда получаем:

**Следствие 1.7.** Если вещественное многообразие  $M$  допускает субтвисторную структуру с замкнутой фундаментальной 2-формой и радикалом ранга  $r \geq 1$ , то  $M$  есть слоение с римановыми слоями размерности  $r$ .

## 2. Субкэлеровы структуры

Здесь мы рассмотрим частный случай субтвисторных структур – субкэлеровы структуры.

**Определение 2.1.** Субкэлеровой структурой на вещественном многообразии  $M$  размерности  $n \geq 3$  называется субтвисторная структура  $(\Omega, D, \Phi, g) : d\Omega = 0$  на  $M$  вместе с подмногообразием  $Q : TQ = D \Big|_Q$ , и ограничение аффинора  $\Phi$  на  $Q$  есть комплексная структура.

Из определения видно, что ограничение субкэлеровой структуры на подмногообразии  $Q$  есть кэлерова структура на  $Q$ . Таким образом, если на вещественном многообразии размерности  $n \geq 3$  существует субкэлерова структура с радикалом ранга  $r \geq 1$ , то в  $M$  существует кэлерово подмногообразие комплексной размерности  $\frac{n-r}{2}$ . Из теоремы Фробениуса для распределений следует, что для инволютив-

ного распределения всегда существует интегральное подмногообразие максимальной размерности. Таким образом, чтобы субтвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой и инволютивным рабочим расслоением индуцировала субкэлерову структуру, достаточно найти интегральное подмногообразие максимальной размерности для рабочего расслоения, ограничение на которое аффинора есть комплексная структура на этом подмногообразии. Далее рассмотрим примеры субтвисторных структур, удовлетворяющих этим условиям.

**Определение 2.2.** *Аффинорной метрической структурой на вещественном многообразии  $M$  размерности  $n \geq 3$  называется набор объектов  $(\alpha, D, \Phi, g)$ , где  $\alpha$  – 1-форма на  $M$ , внешний дифференциал которой есть регулярная ненулевая 2-форма на  $M$ ,  $D$  – рабочее расслоение для 2-формы  $d\alpha$ ,  $\Phi$  – аффинор, ассоциированный с 2-формой  $d\alpha$ ,  $g$  – риманова метрика на  $M$ .*

Поскольку  $d^2\alpha = 0$ , из этого определения следует, что аффинорная метрическая структура всегда индуцирует субтвисторную структуру с замкнутой фундаментальной 2-формой. Аффинорная метрическая структура является обобщением контактной метрической структуры на многообразии произвольной размерности. В частности, контактная метрическая структура на многообразии нечетной размерности есть аффинорная метрическая структура с радикалом ранга 1.

Пусть  $(\alpha, D, \Phi, g)$  – аффинорная метрическая структура на многообразии  $M$ . По теореме Фробениуса рабочее расслоение  $D$  инволютивно тогда и только тогда, когда через каждую точку  $x \in M$  проходит интегральное подмногообразие  $Q_x : TQ_x = D|_{Q_x}$ . Остается выяснить, когда ограничение аффинора  $\Phi$  на такие подмногообразия есть комплексная структура. Сначала заметим, что ограничение аффинора  $\Phi$  на любое подмногообразие  $Q : TQ = D|_Q$  есть почти комплексная структура на  $Q$  в силу п. 2 предложения 1.5. Необходимо, чтобы эта почти комплексная структура была интегрируемой, т.е. позволяла ввести на подмногообразии  $Q$  комплексные локальные координаты, согласованные с действием поля линейных операторов  $\Phi$  в слоях касательного расслоения  $TQ$  (см.: [5. Гл. 9]).

Пусть  $D^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes D$  – комплексификация рабочего расслоения  $D$ . Тогда  $D^{\mathbb{C}} = W_+ \oplus W_-$ , где

$$W_+ = \{X \in C^1(D^{\mathbb{C}}) : \Phi X = X\},$$

$$W_- = \{X \in C^1(D^{\mathbb{C}}) : \Phi X = -X\}.$$

Если  $TQ = D|_Q$ , то ограничение аффинора  $\Phi$  на  $Q$  есть интегрируемая почти комплексная структура тогда и только тогда, когда распределения  $W_+|_Q$  и  $W_-|_Q$  инволютивны (см.: [5. Гл. 9]). Поскольку в случае инволютивного рабочего расслоения  $D$  подмногообразии  $Q$  можно провести через любую точку  $x \in M$ , окончательно получаем:

**Теорема 2.3.** *Аффинорная метрическая структура  $(\alpha, D, \Phi, g)$  на вещественном многообразии  $M$  размерности  $n \geq 3$  индуцирует субкэлерову структуру на  $M$ , если все распределения  $D, W_+, W_-$  инволютивны. В этом случае ограничение*

индуцированной субкэлеровой структуры на любое подмногообразие  $Q: TQ = D|_Q$  есть кэлерова структура на  $Q$ , и  $Q$  есть кэлерово подмногообразие в  $M$ .

Радикалом аффинорной метрической структуры называется радикал индуцированной этой аффинорной метрической структурой субвисторной структуры.

**Следствие 2.4.** Если вещественное многообразие  $M$  размерности  $n \geq 3$  допускает аффинорную метрическую структуру с радикалом ранга  $r \geq 1$ , инволютивным рабочим расслоением  $D$  и инволютивными комплексными распределениями  $W_+$ ,  $W_-$ , то  $M$  есть слоение с кэлеровыми слоями комплексной размерности  $\frac{n-r}{2}$ .

Простейшим примером многообразия, допускающего аффинорную метрическую структуру с инволютивным рабочим расслоением, является прямое произведение  $Q \times R$ , где  $Q$  – симплектическое многообразие с точной симплектической структурой,  $R$  – любое риманово многообразие. В этом случае рабочее расслоение – это  $TQ$ , а радикал – это  $TR$ . В частности, многообразие  $T^{2n} \times P$ , где  $T^{2n}$  –  $2n$ -мерный тор, а  $P$  – риманово многообразие нечетной размерности, не допускает кэлеровой структуры, но допускает субкэлерову структуру с радикалом  $TP$ . Примером многообразия, не допускающего субкэлерову структуру, является четырехмерная сфера  $S^4$ . В [2] доказано, что  $S^4$  не допускает субвисторных структур с радикалом любого допустимого ранга, а следовательно, не допускает субкэлеровых структур.

**Замечание 2.5.** Поскольку контактная метрическая структура – это аффинорная метрическая структура с радикалом ранга 1, а контактное распределение всегда максимально неинволютивно, контактная метрическая структура не может индуцировать субкэлерову структуру с инволютивным рабочим расслоением.

### 3. Кручение субвисторной структуры

Чтобы получить условие, когда субвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой порождает субкэлерову структуру, нам потребуется ввести дополнительный объект.

**Определение 3.1.** Тензором кручения субвисторной структуры  $(\Omega, D, \Phi, g)$  на многообразии  $M$  размерности  $\geq 3$  называется непрерывное тензорное поле  $N$  типа  $(2, 1)$ , определенное на паре векторных полей  $X, Y \in C^1(TM)$  следующим образом:

$$N(X, Y) = [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y] + \Phi^2[X, Y],$$

где  $[X, Y]$  – скобка Ли векторных полей  $X$  и  $Y$ .

Из определения 3.1 и предложения 1.5 следует, что для любого интегрального подмногообразия  $Q: TQ = D|_Q$  ограничение тензора кручения  $N$  на  $Q$  есть тензор Нейенхейса почти комплексной структуры  $\Phi|_Q$ . Интегрируемость этой почти комплексной структуры на  $Q$  эквивалентна условию  $N|_Q = 0$  (см.: [5. Гл. 9]).

**Теорема 3.2.** Пусть  $M$  – вещественное многообразие размерности  $n \geq 3$ , и  $(\Omega, D, \Phi, g)$  – субвисторная структура на  $M$  с радикалом ранга  $r \geq 1$ , замкнутой фундаментальной 2-формой  $\Omega$  и нулевым тензором кручения. Тогда рабочее расслоение  $D$  есть инволютивное распределение на  $M$ , любое интегральное подмногообразие  $Q: TQ = D|_Q$  есть кэлерово подмногообразие комплексной размерности  $\frac{n-r}{2}$ , и  $(Q, \Omega, D, \Phi, g)$  есть субкэлерова структура на  $M$ .

**Доказательство.** Будем обозначать проекцию векторного поля  $X$  на распределение  $\text{rad}\Omega$  через  $X_R$ . Из предложения 2.5 следует, что  $\Phi(TM) = D$ . Если  $X, Y \in C^1(D)$ , то из определения 3.1 получаем

$$N_R(X, Y) = [\Phi X, \Phi Y]_R.$$

Условие  $N = 0$  влечет  $N_R = 0$ , откуда  $[\Phi X, \Phi Y]_R = 0$ . Поскольку  $\Phi$  есть линейный автоморфизм слоев рабочего расслоения  $D$ , получаем, что распределение  $D$  инволютивно. По теореме Фробениуса инволютивное распределение вполне голономно, а следовательно, через каждую точку  $x \in M$  проходит подмногообразие  $Q: TQ = D|_Q$ . Ограничение аффинора  $\Phi$  на любое такое подмногообразие есть почти комплексная структура на  $Q$ , и ограничение тензора кручения  $N$  на  $Q$  есть ее тензор Нейенхейса. Условие  $N = 0$  влечет, что  $\Phi$  есть комплексная структура на  $Q$ , и  $Q$  есть кэлерово подмногообразие комплексной размерности  $\frac{n-r}{2}$ .

Таким образом, выполнено определение 2.1, и теорема доказана. ■

Заметим, что аффинор субвисторной структуры с нулевым тензором кручения удовлетворяет данному в [6] определению оператора Нейенхейса. Следовательно, аффинор субвисторной структуры с нулевым тензором кручения всегда есть оператор Нейенхейса с набором собственных значений  $0, \pm i$ , где  $i = \sqrt{-1}$ .

Субвисторная структура  $(\Omega, D, \Phi, g)$  на многообразии  $M$  с нетривиальным радикалом всегда задает разложение касательного расслоения  $TM$  в сумму Уитни распределений  $D$  и  $\text{rad}\Omega$ . Эта пара распределений задает на  $M$  структуру почти произведения  $\psi$ :

$$\psi|_D = \Phi^2 = -\text{id}, \psi|_{\text{rad}\Omega} = \text{id}.$$

Для структуры почти произведения  $\psi$  определен тензор кручения  $P_\psi$ :

$$P_\psi(X, Y) = [\psi X, \psi Y] + [X, Y] - \psi[\psi X, Y] - \psi[X, \psi Y],$$

$$X, Y \in C^1(TM).$$

Будем называть этот тензор *тензором индуцированного кручения субвисторной структуры*. В случае, когда распределения  $D$  и  $\text{rad}\Omega$  инволютивны, структура почти произведения  $\psi$  называется интегрируемой, или *структурой произведения* на многообразии  $M$ . По аналогии с почти комплексной структурой структура почти произведения интегрируема тогда и только тогда, когда ее тензор кручения равен 0 на  $M$ . Если структура почти произведения  $\psi$  интегрируема, то многообразие  $M$  локально диффеоморфно прямому произведению подмногообразий  $Q: TQ = D|_Q$

и  $R : TR = \text{rad}\Omega|_R$ . В случае, когда  $d\Omega = 0$ , если тензор кручения этой субтвисторной структуры равен 0 на  $M$ , то из теоремы 3.2 следует, что  $(Q, \Omega, D, \Phi, g)$  есть субкэлерова структура на  $M$ . Заметим, что в этом случае ограничение метрики  $g$  на подмногообразии  $Q$  есть кэлерова метрика на  $Q$ , ограничение метрики  $g$  на подмногообразии  $R$  есть риманова метрика на  $R$ , а метрика  $g$  есть метрика прямого произведения на  $Q \times R$ . Таким образом, получаем:

**Предложение 3.3.** *Если вещественное многообразие  $M$  допускает субкэлерову структуру с радикалом ранга  $r \geq 1$  и нулевым тензором индуцированного кручения, то  $M$  локально изометрично прямому произведению кэлерова подмногообразия  $Q$  коразмерности  $r$  и риманова подмногообразия  $R$  размерности  $r$ .*

Тензоры кручения и индуцированного кручения субтвисторной структуры можно объединить в один объект.

**Определение 3.4.** Пусть  $(\Omega, D, \Phi, g)$  – субтвисторная структура на вещественном многообразии  $M$ ,  $T_{\mathbb{C}}M = \mathbb{C} \otimes TM$  – комплексификация касательного расслоения  $TM$ ,  $N$  – тензор кручения этой субтвисторной структуры, и  $p_{\Psi}$  – тензор индуцированного кручения. Комплексным кручением субтвисторной структуры называется трилинейная форма  $\tau$  на  $M$ :

$$\tau(X, Y, Z) = g(N(X, Y), Z) + ig(p_{\Psi}(X, Y), Z),$$

$$X, Y, Z \in C^1(T_{\mathbb{C}}M), i = \sqrt{-1}.$$

Сразу из определения следует, что  $\tau = 0$  тогда и только тогда, когда  $N = p_{\Psi} = 0$ . Из теоремы 3.2 и предложения 3.3 получаем:

**Следствие 3.5.** *Если вещественное многообразие  $M$  допускает субтвисторную структуру с радикалом ранга  $r \geq 1$ , замкнутой фундаментальной 2-формой и нулевым комплексным кручением, то  $M$  локально изометрично прямому произведению кэлерова подмногообразия  $Q$  коразмерности  $r$  и риманова подмногообразия  $R$  размерности  $r$ .*

Поскольку множество нулей любой полилинейной формы всегда есть замкнутое множество, и для связного многообразия  $M$  любое непустое открытое и замкнутое подмножество совпадает с  $M$ , получаем:

**Следствие 3.6.** *Если дивизор комплексного кручения субтвисторной структуры  $(\Omega, D, \Phi, g) : d\Omega = 0$  на вещественном связном многообразии  $M$  есть открытое множество в  $M$ , то  $(\Omega, D, \Phi, g)$  индуцирует субкэлерову структуру на  $M$ , распределение  $D$  инволютивно, и  $M$  локально изометрично прямому произведению кэлерова подмногообразия  $Q : TQ = D|_Q$  и риманова подмногообразия*

$$R : TR = \text{rad}\Omega|_R.$$

#### 4. Необходимые и достаточные условия существования субкэлеровых структур

Здесь мы приведем условия и примеры существования на многообразиях субкэлеровых структур. Сначала получим необходимые топологические условия существования субтвисторной структуры.

Пусть  $(\Omega, D, \Phi, g)$  – субвисторная структура на многообразии  $M$  размерности  $\geq 3$ ,  $w_1(E)$  – первый класс Штиффеля–Уитни векторного расслоения  $E$ ,  $e(E)$  – класс Эйлера векторного расслоения  $E$ , и  $\lambda^n(M)$  – расслоение внешних форм степени  $n$  на многообразии  $M$ . Из предложения 1.5 видно, что аффиноор  $\Phi$  есть комплексная структура в слоях рабочего расслоения  $D$ . Поскольку комплексная структура всегда задает ориентацию в векторном пространстве, аффиноор  $\Phi$  задает непрерывный выбор ориентации в слоях рабочего расслоения на  $M$ . Это дает  $w_1(D) = 0$  (см.: [7]). Кроме того, поскольку фундаментальная 2-форма  $\Omega$  есть глобальное, всюду отличное от нуля, сечение векторного расслоения  $\lambda^n(M)$ ,  $e(\lambda^2(M)) = 0$  (см.: [7]). Таким образом получаем:

**Предложение 4.1.** *Если вещественное многообразие  $M$  размерности  $\geq 3$  допускает субвисторную (в частности субкэлерову) структуру с рабочим расслоением  $D$ , то*

$$w_1(D) = e(\lambda^2(M)) = 0.$$

Если  $M$  – компактное многообразие без края с эйлеровой характеристикой  $\chi(M)$ , то из равенства  $\chi(M) = \int_M e(M)$ , где  $e(M)$  – класс Эйлера касательного расслоения  $TM$ , и предложения 4.1 получаем:

**Следствие 4.2.** *Если вещественное многообразие  $M$  размерности  $\geq 3$  допускает субвисторную (в частности субкэлерову) структуру, а пространство расслоения  $\lambda^2(M)$  есть компактное многообразие без края, то  $\chi(\lambda^2(M)) = 0$ .*

С помощью этого следствия в [8] получены примеры многообразий, не допускающих субвисторных структур, в частности четырехмерная сфера  $S^4$  и прямое произведение  $S^4 \times S^4$ . Следующий результат дает пример многообразия, допускающего субкэлерову структуру.

**Предложение 4.3.** *Пусть  $P$  – главное расслоение над кэлеровым многообразием  $M$  со слоем  $G$ . Тогда на  $P$  существует субкэлерова структура с радикалом  $TG$ .*

**Доказательство.** Пусть  $(\Omega_0, J_0, h_0)$  – кэлерова структура на многообразии  $M$ , где  $\Omega_0$  – симплектическая структура на  $M$ ,  $J_0$  – комплексная структура на  $M$ , сохраняющая 2-форму  $\Omega_0$ ,  $h_0$  – кэлерова метрика на  $M$ , а  $\pi$  – проекция  $P \rightarrow M$ . Поскольку слоем главного расслоения  $P$  является группа Ли  $G$ , а любая группа Ли всегда допускает правоинвариантную риманову метрику, на группе Ли  $G$  существует риманова метрика  $g_0$ . Пусть  $\rho$  – проекция  $TP \rightarrow TG$ . Тогда  $g = h_0 \circ d\pi + g_0 \circ \rho$  есть риманова метрика на многообразии  $P$ . Обозначим через  $D$  ортогональное дополнение к распределению  $TG$  относительно метрики  $g$ . Положим  $\Omega = \Omega_0 \circ d\pi$ .  $\Omega$  есть замкнутая регулярная кососимметричная 2-форма на  $P$  с радикалом  $TG$  и рабочим расслоением  $D$ . Заметим, что  $D$  есть связность на главном расслоении  $P$ , т.е.  $TP = D \oplus TG$ . Ограничение  $d\pi$  на рабочее расслоение  $D$  есть линейный изоморфизм  $D \rightarrow TM$ . Определим аффиноор  $\Phi$ , ассоциированный с 2-формой  $\Omega$  на  $P$ , следующим образом:

$$\Phi \Big|_D = d\pi^{-1} \circ J_0 \circ d\pi, \quad \Phi \Big|_{TG} = 0.$$

Мы получили субвисторную структуру  $(\Omega, D, \Phi, g): d\Omega = 0$  на многообразии  $P$  с радикалом  $TG$ . Ограничение этой субвисторной структуры на подмногообразии  $Q = P/G$  в многообразии  $P$  по построению есть кэлерова структура на  $Q$ .

Поскольку  $TQ = D|_Q$ , выполнено определение 2.1, и теорема доказана. ■

Заметим, что пространство расслоения вещественных ортонормированных реперов на кэлеровом многообразии комплексной размерности  $n$  имеет вещественную размерность  $n(2n + 1)$ . При нечетном  $n$  это число также нечетно, а следовательно, пространство расслоения не допускает кэлерову структуру при нечетном  $n$ . Слой этого расслоения имеет вещественную размерность  $n(2n - 1)$ . Из предложения 4.3 получаем:

**Следствие 4.4.** Пусть  $M$  – кэлерово многообразие комплексной размерности  $n$ , и  $P$  – расслоение вещественных ортонормированных реперов на  $M$ . Тогда на  $P$  существует субкэлерова структура с радикалом ранга  $n(2n - 1)$ .

Поскольку нечетномерную сферу  $S^{2n+1}$  можно рассматривать как расслоение Хопфа над комплексным проективным пространством комплексной размерности  $n$  со слоем  $S^1$ , получаем:

**Следствие 4.5.** Нечетномерная сфера  $S^{2n+1}$  не допускает кэлерову структуру, но допускает субкэлерову структуру с радикалом ранга 1.

Заметим, что субкэлерова структура в следствии 4.5 имеет ненулевой тензор кручения, поскольку ее рабочее расслоение есть контактное распределение контактной метрической структуры, построенной в [9], а по теореме 3.2 субвисторная структура с нулевым тензором кручения имеет инволютивное рабочее расслоение.

## 5. Сублагранжевы подмногообразия

В симплектической геометрии для многообразий четной размерности хорошо известно понятие лагранжева подмногообразия (см.: [10]). Здесь мы обобщим это понятие для субвисторных структур с замкнутой фундаментальной 2-формой на многообразиях любой размерности. Сначала выясним, какую максимальную размерность может иметь подмногообразие, касающееся во всех своих точках рабочего расслоения субвисторной структуры, на котором фундаментальная 2-форма обращается в 0.

**Предложение 5.1.** Пусть  $(\Omega, D, \Phi, g): d\Omega = 0$  – субвисторная структура на многообразии  $M$  размерности  $\geq 3$ , и ранг рабочего расслоения  $D$  равен  $2k$ . Тогда для любого подмногообразия  $Q: TQ \subset D|_Q, \Omega|_Q = 0$  размерность подмногообразия  $Q \leq k$ .

**Доказательство.** Поскольку  $TQ \subset D|_Q$ ; из определения 1.4 следует, что для любых  $X, Y \in C^1(TQ)$

$$g(\Phi X, Y) = \Omega(X, Y) = 0,$$

т.е. распределение  $\Phi TQ$  ортогонально  $TQ$  относительно метрики  $g$ . Поскольку  $\Phi$  есть линейный автоморфизм в слоях рабочего расслоения  $D$ , имеем  $\text{rank}(\Phi(TQ)) = \text{rank}(TQ)$ . Отсюда  $2\text{rank}(TQ) = \text{rank}(\Phi(TQ) \oplus TQ) \leq \text{rank}(D) = 2k$ . ■

**Определение 5.2.** Сублагранжевым подмногообразием для субвисторной структуры  $(\Omega, D, \Phi, g) : d\Omega = 0$  на вещественном многообразии  $M$  размерности  $\geq 5$  с радикалом ранга  $r \geq 1$  называется подмногообразие  $Q : TQ \subset D|_Q, \Omega|_Q = 0$ , и  $\dim(Q) = \frac{n-r}{2} \geq 2$ .

Заметим, что для четырехмерных многообразий по теореме 1.2 субвисторная структура может иметь только радикал либо ранга 2, либо ранга 0. Следовательно, сублагранжево подмногообразие может быть только либо классическим лагранжевым подмногообразием, либо одномерным подмногообразием. Поэтому в определении 5.2 требуется, чтобы размерность исходного многообразия была не меньше 5, а сублагранжева подмногообразия – не меньше 2. Пример субвисторной структуры, допускающей сублагранжево подмногообразие дает следующий результат:

**Предложение 5.3.** Пусть  $P$  – главное расслоение над комплексным проективным пространством  $\mathbb{C}P^n$  со слоем  $G$ . Тогда  $P$  допускает субвисторную структуру с замкнутой фундаментальной 2-формой, и в  $P$  существует сублагранжево подмногообразие для этой субвисторной структуры.

**Доказательство.** Пусть  $\pi$  – проекция  $P \rightarrow \mathbb{C}P^n$ . Комплексное проективное пространство  $\mathbb{C}P^n$  допускает кэлерову структуру  $(\Omega_0, J_0, h_0)$ , где

$$\Omega_0 = i \frac{\sum_{k=0}^n dz_k \wedge d\bar{z}_k}{\sum_{k=0}^n |z_k|^2}, (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\},$$

$J_0$  – комплексная структура, индуцированная умножением на мнимую единицу  $i$ ,  $h_0$  – метрика Фубини–Штуди. По предложению 4.3 эта кэлерова структура индуцирует на  $P$  субвисторную структуру  $(\Omega, D, \Phi, g)$  с радикалом  $TG$  и замкнутой фундаментальной 2-формой  $\Omega = \Omega_0 \circ d\pi$ . Рассмотрим в  $\mathbb{C}P^n$  вещественное подмногообразие

$$Q = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} : \operatorname{Re}(z_k) = \operatorname{Im}(z_k), k = 0, 1, \dots, n\}.$$

Подмногообразие  $Q$  имеет вещественную размерность  $n$ , и  $\Omega_0|_Q = 0$ . Теперь рассмотрим подмногообразие  $S = \pi^{-1}(Q)$  в  $P$ . Подмногообразие  $S$  инвариантно относительно действия группы  $G, \Omega|_S = 0$ , и  $TS \subset D|_S \oplus TG|_S$ . Поскольку фундаментальная 2-форма  $\Omega$  инвариантна относительно действия группы  $G$ , подмногообразие  $W = S/G$  есть сублагранжево подмногообразие в  $P$ . ■

**Замечание 5.4.** В предложении 5.3 вместо комплексного проективного пространства можно рассматривать произвольное кэлерово многообразие, содержащее лагранжево подмногообразие.

Поскольку нечетномерная сфера  $S^{2n+1}$  есть расслоение Хопфа над  $\mathbb{C}P^n$  со слоем  $S^1$ , из предложения 5.3 и следствия 4.5 получаем:

**Следствие 5.5.** *Нечетномерная сфера  $S^{2n+1}$  допускает субтвисторную структуру с замкнутой фундаментальной 2-формой и радикалом ранга 1, а при  $n \geq 2$  содержит сублагранжево подмногообразие вещественной размерности  $n$ .*

Простым примером субтвисторной структуры на многообразии  $M$  произвольной размерности  $n \geq 5$ , для которой не существует сублагранжева подмногообразия, является субтвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой и радикалом ранга  $n - 2$ . В этом случае рабочее расслоение  $D$  имеет ранг 2, и для любого интегрального для распределения  $D$  подмногообразия определение 5.2 не выполняется.

#### Список источников

1. Blair D.E. *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*. Boston : Birkhauser, 2010. 260 p.
2. Корнев Е.С. Субкомплексные и субкэлеровы структуры // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57, № 5. С. 1062–1077.
3. Корнев Е.С. Инвариантные аффинорные метрические структуры на группах Ли // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53, № 1. С. 107–123.
4. Корнев Е.С. Аффинорные структуры на векторных расслоениях // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55, № 6. С. 1283–1296.
5. Kobayashi Sh., Nomizu K. *Основы дифференциальной геометрии* : в 2 т. М. : Наука, 1981.
6. Bolsinov A.V., Konyaev A.Y., Matveev V.S. *Nijenhuis Geometry* // *Advances In Mathematics*. 2022. V. 394. P. 108001–108131.
7. Милнор Дж., Стасеф Дж. *Характеристические классы*. М. : Мир, 1979. 371 с.
8. Корнев Е.С. Субтвисторные структуры и субтвисторное расслоение // Сибирский математический журнал. 2019. Т. 60, № 6. С. 1310–1323.
9. Boothby W., Wang H. *On contact manifolds* // *Annals of Math*. 1958. V. 68. P. 721–734.
10. Фоменко А.Т. *Симплектическая геометрия : методы и приложения*. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1988. 413 с.

#### References

1. Blair D.E. (2010) *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*. Boston: Birkhauser.
2. Kornev E.S. (2016) Subcomplex and sub-Kähler structures. *Siberian Mathematical Journal*. 57(5). pp. 830–840.
3. Kornev E.S. (2012) Invariant affinor metric structures on Lie groups. *Siberian Mathematical Journal*. 53(1). pp. 87–99.
4. Kornev E.S. (2014) Affinor structures on vector bundles. *Siberian Mathematical Journal*. vol. 55, no. 6, 1045–1055.
5. Kobayashi Sh., Nomizu K. (1963) *Foundations of Differential Geometry*. Vols. 1 and 2. New York: Interscience Publishers.
6. Bolsinov A.V., Konyaev A.Y., Matveev V.S. (2022) Nijenhuis Geometry. *Advances In Mathematics*. 394. pp. 108001–108131.
7. Milnor J.W., Stasheff J.D. (1974) *Characteristic Classes*. Princeton: University Press.
8. Kornev E.S. (2019) Subtwistor structures and subtwistor bundle. *Siberian Mathematical Journal*. 60(6). pp. 1022–1031.
9. Boothby W., Wang H. (1958) *On contact manifolds*. *Annals of Mathematics*. 68. pp. 721–734.
10. Fomenko A.T. (1988) *Simplekticheskaya geometriya. Metody i prilozheniya* [Symplectic geometry. Methods and applications]. Moscow: Moscow State University.

***Сведения об авторе:***

**Корнев Евгений Сергеевич** – младший научный сотрудник научно-инновационного управления Кемеровского государственного университета, Кемерово, Россия. E-mail: q148@mail.ru

***Information about the author:***

**Kornev Eugene S.** (Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation). E-mail: q148@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 27.02.2023; принята к публикации 10.07.2023*

*The article was submitted 27.02.2023; accepted for publication 10.07.2023*

## МЕХАНИКА

## MECHANICS

Научная статья

УДК 532.5-1/-9

doi: 10.17223/19988621/84/4

**Анализ возможности блокирования трещин автоГРП  
суспензионной системой****Денис Алексеевич Анурьев<sup>1</sup>, Константин Михайлович Фёдоров<sup>2</sup>,  
Александр Янович Гильманов<sup>3</sup>, Александр Павлович Шевелёв<sup>4</sup>,  
Никита Александрович Морозовский<sup>5</sup>,  
Константин Витальевич Торопов<sup>6</sup>**<sup>1</sup> ООО «Тюменский нефтяной научный центр», Тюмень, Россия<sup>2, 3, 4</sup> Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия<sup>5, 6</sup> ПАО «НК «Роснефть», Москва, Россия<sup>1</sup> [daanuriev@tmc.rosneft.ru](mailto:daanuriev@tmc.rosneft.ru)<sup>2</sup> [k.m.fedorov@utmn.ru](mailto:k.m.fedorov@utmn.ru)<sup>3</sup> [a.y.gilmanov@utmn.ru](mailto:a.y.gilmanov@utmn.ru)<sup>4</sup> [a.p.shevelev@utmn.ru](mailto:a.p.shevelev@utmn.ru)<sup>5</sup> [N\\_morozovski@rosneft.ru](mailto:N_morozovski@rosneft.ru)<sup>6</sup> [K\\_toropov@rosneft.ru](mailto:K_toropov@rosneft.ru)

**Аннотация.** Оценивается коагулирующее действие полимер-дисперсных составов с использованием математической модели закачки и транспорта суспензии по трещине. Предполагается, что частицы суспензии больше размеров поровых каналов и не проникают в пласт. Определено, что в момент подхода разрыва на фронте оторочки суспензии к концу трещины формируется разрыв объемной доли частиц, который движется как отраженная волна навстречу потоку и характеризует блокирование трещины. С использованием разработанной модели рассчитан закоагулированный размер трещины.

**Ключевые слова:** трещина автоГРП, суспензия, объемное содержание частиц, закон сохранения массы, закон Пуазейля, контактный разрыв, отраженная волна

**Для цитирования:** Анурьев Д.А., Фёдоров К.М., Гильманов А.Я., Шевелёв А.П., Морозовский Н.А., Торопов К.В. Анализ возможности блокирования трещин автоГРП суспензионной системой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 36–51. doi: 10.17223/19988621/84/4

Original article

## Analysis of the possibility of technogenic fracture blocking using a suspension system

Denis A. Anur'ev<sup>1</sup>, Konstantin M. Fedorov<sup>2</sup>, Aleksandr Ya. Gil'manov<sup>3</sup>, Aleksandr P. Shevelev<sup>4</sup>, Nikita A. Morozovskiy<sup>5</sup>, Konstantin V. Toropov<sup>6</sup>

<sup>1</sup> Tyumen Petroleum Research Center, Tyumen, Russian Federation

<sup>2, 3, 4</sup> University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation

<sup>5, 6</sup> Rosneft Oil Company, Moscow, Russian Federation

<sup>1</sup> daanuriev@mnc.rosneft.ru

<sup>2</sup> k.m.fedorov@utmn.ru

<sup>3</sup> a.y.gilmanov@utmn.ru

<sup>4</sup> a.p.shevelev@utmn.ru

<sup>5</sup> N\_morozovskiy@rosneft.ru

<sup>6</sup> K\_toropov@rosneft.ru

**Abstract.** The problem of technogenic fracture blocking by a suspension mixture is relevant for preventing the producing wells from additional water inflow. The aim of this work is to evaluate the effect of fracture colmatation with polymer-dispersed compositions using a mathematical model of suspension transporting through a fracture. The suspension particles are assumed to be larger than the pore channels and do not penetrate into the reservoir. The problem is solved using a system of equations of continuum mechanics. The leading edge of the suspension slug represents contact discontinuity. It is determined that when the discontinuity approaches the end of the fracture, a reflected wave of the volume fraction of particles is formed, which moves toward the flow and blocks the fracture. At the same time, due to the need to maintain the same flow rate and fracture size reduction, there is a sharp increase in the downhole pressure preventing the fracture from complete blockage. Thus, the maximum blocked fracture size is determined. The obtained results are compared with field data.

**Keywords:** technogenic fracture, suspension, volume content of particles, law of conservation of mass, Poiseuille law, contact discontinuity, reflected wave

**For citation:** Anur'ev, D.A., Fedorov, K.M., Gil'manov, A.Ya., Shevelev, A.P., Morozovskiy, N.A., Toropov, K.V. (2023) Analysis of the possibility of technogenic fracture blocking using a suspension system. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 36–51. doi: 10.17223/19988621/84/4

### Введение

Заводнение (процесс закачки воды в пласт для вытеснения нефти) плотных низкопроницаемых коллекторов (пористых горных пород, способных пропускать через себя жидкости) с высоким пластовым давлением часто сопровождается формированием техногенных трещин, или трещин автогидроразрыва пласта (автоГРП) [1, 2], что может приводить к раннему обводнению (повышению доли воды) продукции [3]. Так как этот процесс неконтролируемый, обычно проводятся специальные исследования по определению давления или градиента давления, при котором проис-

ходит раскрытие трещин [4, 5]. Такие исследования позволяют ограничить давление закачки и не допустить формирования трещин автоГРП. Полный анализ указанных процессов сопровождается геомеханическим исследованием [6, 7]. Такой подход позволяет детально моделировать образование и развитие трещин автоГРП.

Однако в ряде случаев образование трещин автоГРП все же происходит. Примером может служить месторождение Daqing, на котором в 12% нагнетательных скважин при эксплуатации происходит существенное падение приемистости (расхода закачиваемой воды) [8]; для компенсации этого падения приходится поднимать в нагнетательных скважинах забойное давление. При давлениях закачки, отличающихся от давления гидроразрыва пласта на 1–2 МПа, начинается массовое формирование трещин автоГРП.

Другим примером формирования значительного количества трещин автоГРП является Приобское месторождение. Высокие пластовые давления и низкая приемистость воды за счет малого значения относительной фазовой проницаемости воды при остаточной нефтенасыщенности  $k(S_{or})$  (способность воды течь в пласте в присутствии других фаз при таком отношении объема нефти к объему пор, при котором нефть не течет) вынуждают для компенсации отбора продукции закачкой воды держать забойное давление выше давления раскрытия трещин [9]. Диагностика приемистости нагнетательных скважин показывает наличие излома на индикаторной диаграмме [10]; гидропрослушивание скважин и специальные индикаторные исследования указывают на рост трещин [11–13]. Часто размеры этих трещин достигают километровой длины. Пример моделирования развития таких трещин описан в работе [13].

Существует подход к моделированию процессов в техногенной трещине, в котором в случае нестационарного притока распределение давления в окружающем пласте и в трещине находят с помощью уравнения пьезопроводности [14].

Гидродинамические расчеты процесса заводнения позволили выделить зоны аномально высокого пластового давления и ввести ограничения по приемистости нагнетательных скважин для предотвращения образования трещин автоГРП [15]. Однако в этом случае ограничение приемистости скважин приводит к существенному ограничению закачки воды и снижению компенсации отбора продукции закачкой воды.

Разбуривание скважин в областях аномально высокого давления также сопровождается образованием техногенных трещин и аварийными ситуациями [16].

Если размеры трещин автоГРП в нагнетательных скважинах невелики, то происходит просто увеличение приемистости скважин, но сближение этих трещин с добывающими скважинами приводит к раннему прорыву воды в них [17, 18] и образованию высокопроницаемых каналов связи между нагнетательными и добывающими скважинами. Ограничение расхода воды в нагнетательной скважине может приводить к частичному или полному закрытию трещин, но не дает уверенности в снижении проводимости созданных трещин [19].

С другой стороны, для ограничения притока воды по высокопроницаемому каналу проводят закачку в трещину автоГРП гелеобразующих или полимердисперсных составов [20]. Распространенным полимером для этого является гидролизированный полиакриламид. Экспериментальные исследования на керновом материале показывают, что в результате закачки гелеобразующих составов происходит ограничение эффективных размеров трещины автоГРП вследствие оседа-

ния частиц геля вплоть до полного блокирования трещины [20], причем в случае наличия нескольких трещин в пласте реагент преимущественно будет заходить в более высокопроницаемую трещину, оставляя менее проницаемые трещины практически не заблокированными. Применение гидродинамических моделей для прогнозирования этих процессов невозможно за счет существенно разных масштабов процессов в трещине, около нее и в области межскважинного пространства.

Цель работы – оценка кольматирующего действия полимер-дисперсных составов с использованием математической модели закачки и транспорта суспензии по трещине. В статье впервые разработана математическая модель закачки и транспорта суспензии по трещине и оценивается кольматирующее действие полимер-дисперсных составов, когда размеры частиц больше размеров поровых каналов и не проникают в пласт. Проводится сравнение полученных оценок с промысловыми данными для понимания механизма воздействия суспензионного состава. Сопоставление показывает, что часто такие обработки нагнетательных скважин приводят к частичной кольматации трещин и ограничению их длины.

### Оценка и анализ параметров трещин автоГРП

Для оценки процессов формирования трещин автоГРП были рассмотрены промысловые данные по закачке воды в вертикальные и наклонные скважины Усть-Тегусского месторождения. По данным анализа приемистости скважин, динамики забойного давления и графика Холла [21] было установлено наличие трещин автоГРП на определенном количестве нагнетательных скважин.

Для дальнейшего анализа рассматривались только скважины, на которых проводилась обработка скважин полимер-дисперсным составом (ПДС) [22]. Таких скважин оказалось три, данные по ним приведены в табл. 1, где введены обозначения:  $k_{av}$  – средняя проницаемость по продуктивному интервалу,  $\mu_w$  – вязкость закачиваемой воды в пластовых условиях,  $h$  – мощность продуктивного интервала (толщина пласта),  $h_e$  – эффективная мощность пласта (за вычетом глинистых пропластков),  $W$  – коэффициент приемистости (отношение расхода воды в нагнетательной скважине к перепаду давления),  $k_r(S_{or})$  – относительная фазовая проницаемость воды при остаточной нефтенасыщенности,  $\Delta p$  – депрессия на пласт (перепад давления в пласте),  $p_w$  – забойное давление.

Таблица 1

Данные по отобраным нагнетательным скважинам Усть-Тегусского месторождения

№	$W$ , м <sup>3</sup> /(сут.·атм)	$\Delta p$ , атм	$p_w$ , атм	$k_{av}$ , мД	$\mu_w$ , сП	$h_e$ , м	$h$ , м	$k_r(S_{or})$
2164	1.9	44	313	315	0.34	11.1	26.4	0.1
2731	2.2	82	331	298	0.34	15.1	26.1	0.1
2305	2.4	108	429	75	0.34	16.8	17.1	0.1

Суспензия бентонитовой глины с объемной долей частиц 0.03 была стабилизирована водным раствором полимера (полиакриламид (ПАА)) с массовой концентрацией 0.02, вязкостью 8 сП [23]. Результаты обработки ПДС выбранных скважин приведены в табл. 2;  $Q_d$  – дополнительная добыча нефти из окружающих добывающих скважин.

**Результаты обработки нагнетательных скважин полимер-дисперсными составами**

№	Объем закачки суспензии, м <sup>3</sup>	Относительное падение приемистости, %	$Q_d$ , тыс. м <sup>3</sup>	Оценка длины трещины, м	
				до обработки	после обработки
2164	800	23.6	8.54	436	153
2731	1600	24.3	0.39	529	201
2305	500	22.8	0.1	418	168

Предварительную оценку длины трещин можно сделать по формуле Пратса [24], которая связывает скин-фактор, обусловленный наличием трещины, с искомой длиной:

$$Q = \frac{2\pi k_{av} h_e k_r (S_{or})}{\mu_w} \frac{\Delta p}{\ln \frac{r_c}{r_w} + S} = \frac{2\pi k_{av} h_e k_r (S_{or})}{\mu_w} \frac{\Delta p}{\ln \frac{2r_c}{l}}, \quad (1)$$

где  $Q$  – расход воды в нагнетательной скважине,  $r_w$ ,  $r_c$  – радиусы скважины и контура питания (расстояние, где устанавливаются параметры невозмущенного пласта),  $S$  – скин-фактор (характеризует увеличение притока из-за наличия трещин),  $l$  – полудлина трещины. По формуле (1) можно рассчитать длину трещины через скин-фактор, и наоборот. Скин-фактор выражается из формулы (1) с учетом значения коэффициента приемистости  $W = Q/\Delta p$ , значения необходимых параметров для вычисления приведены в табл. 1, радиус контура питания равнялся 250 м. Результаты таких расчетов при радиусе скважины 0.1 м также приведены в табл. 2.

**Математическое описание процесса кольтации трещин суспензией**

Рассматривается задача о линейном одномерном потоке суспензии по трещине зафиксированной прямоугольной формы с полудлиной  $l$ , шириной  $w$  и высотой  $h$ . Вдоль боковых поверхностей трещины происходит отток несущей жидкости  $q$ , частицы суспензии не проникают в пласт. Суспензия с объемным содержанием частиц  $\alpha$  закачивается при постоянном расходе на забое скважины  $Q$  и движется по трещине с соответствующей скоростью  $v$  ( $Q = 2h w v$ ). Вводится декартова прямоугольная система координат, где ось  $x$  направлена вдоль трещины, а ось  $y$  перпендикулярна ей.

Основу суспензии составляют частицы глины, которые считаются недеформируемыми. Сопоставление скоростей движения суспензии по трещине и осаждения частиц показывает, что гравитационные силы играют в процессе незначительную роль (скорость сегрегации на два порядка меньше) с учетом стабилизации суспензии раствором полимера или слабым полимерным гелем [25]. Механизмами прилипания частиц на стенках трещины также пренебрегается. Скорости движения частиц и несущей фазы считаются равными. С учетом этих допущений уравнения сохранения массы частиц и несущей жидкости имеют вид:

$$\frac{\partial(h w \alpha)}{\partial t} + \frac{\partial(h w \alpha v)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial(hw(1-\alpha))}{\partial t} + \frac{\partial(hw(1-\alpha)v)}{\partial x} = -q,$$

где  $t$  – время. Данная система часто применяется для анализа процесса транспорта пропанта в трещине гидроразрыва пласта [19, 26, 27].

Движение суспензии по трещине описывается законом Пуазейля для прямоугольного канала, а отток несущей жидкости через боковые поверхности трещины определяется законом Дарси:

$$v = -\frac{w^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad q = \frac{k_{av}k_r(S_{or})h_e}{\mu L} (p - p_r),$$

где  $\mu$  – вязкость несущей фазы,  $p$  – давление в трещине,  $L$  – расстояние до контура питания,  $p_r$  – пластовое давление в невозмущенной зоне.

Поставленная задача разбивается на два этапа: на первом решается задача о транспорте закачиваемой оторочки суспензии в трещину, на втором формируется обратная волна кольтматации трещины, которая распространяется от конца трещины к скважине. На первом этапе распределение давления в трещине имеет стационарный вид и определяется уравнением

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = \frac{12k_{av}k_r(S_{or})h_e}{w^3 Lh} (p - p_r). \quad (2)$$

Для решения уравнения (2) необходимо задать два крайних условия. Первое определяется закачиваемым расходом  $Q_0$  на входе в трещину, второе является балансом закачиваемой жидкости и жидкости, утекающей в пласт по всей длине трещины. Это условие определяется интегро-дифференциальным уравнением

$$Q_0 = -\frac{hw^3}{12\mu} \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad -\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{24k_{av}k_r(S_{or})h_e}{(1-\alpha_0)w^3 Lh} \int_0^l (p - p_r) dx, \quad (3)$$

где  $\alpha_0$  – объемная доля дисперсных частиц в закачиваемой суспензии.

Решение для фиксированного забойного давления в скважине рассмотрено авторами в [28]. Решение уравнения (2) для заданных крайних условий (3) имеет вид:

$$p = \frac{p_f - p_r}{\operatorname{ch} A} \operatorname{ch}\left(\frac{Ax}{l}\right) + \frac{Q_0 \mu}{\operatorname{ch} A} \sqrt{\frac{12L}{w^3 k_{av} h h_e k_r(S_{or})}} \operatorname{sh}\left(A\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right) + p_r,$$

$$p_f = p_r(1 + D),$$

$$D = \frac{Q_0(1-\alpha_0)\mu L A \operatorname{ch} A}{2k_{av}k_r(S_{or})h_e p_r l \operatorname{sh} A} + \frac{Q_0 \mu}{p_r} \sqrt{\frac{12L}{w^3 k_{av} h h_e k_r(S_{or})}} \frac{1 - \operatorname{ch} A}{\operatorname{sh} A},$$

где введены обозначения:  $p_f$  – давление на конце трещины,  $D$  – безразмерный комплекс подобия,  $A$  – безразмерный параметр, характеризующий соотношение оттока жидкости в пласт и потока в трещине:

$$A = l \sqrt{\frac{12k_{av}h_e k_r(S_{or})}{w^3 Lh}}.$$

Задача движения оторочки суспензии по трещине определяется уравнением переноса частиц, которое можно представить в характеристическом виде:

$$\frac{dx}{dt} = v: \quad \frac{d\alpha}{dt} = -\alpha \frac{dv}{dx}, \quad (4)$$

$$v = \frac{1}{\mu \operatorname{ch} A} B \left( J \operatorname{ch} \left( A \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \right) - (p_f - p_r) \operatorname{sh} \left( \frac{Ax}{l} \right) \right),$$

где введены обозначения:

$$B = \sqrt{\frac{wk_{av}h_e k_r(S_{or})}{12Lh}}, \quad J = Q_0 \mu \sqrt{\frac{12L}{w^3 k_{av} h_e k_r(S_{or})}}.$$

Начальные и граничные условия для задачи о транспорте оторочки суспензии имеют вид:

$$\begin{aligned} x > 0, \quad t = 0: \quad \alpha &= 0; \\ x = 0, \quad 0 < t < t_o: \quad \alpha &= \alpha_0; \\ x = l, \quad t > t_f: \quad \alpha &= 1, \end{aligned}$$

где  $t_o$  – время закачки оторочки суспензии (объемом  $V = Q_0 t_o$ ),  $t_f$  – время начала кольматации конца трещины.

Передний фронт оторочки суспензии представляет собой контактный разрыв, движущийся с переменной скоростью, траектория которого определяется формулой

$$t = \frac{l\mu \operatorname{ch} A}{AB\sqrt{\gamma\beta}} \left( \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} + e^{-\frac{Ax}{l}}}{\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} - e^{-\frac{Ax}{l}}} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} + 1}{\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} - 1} \right| \right),$$

где введены обозначения:

$$\beta = p_r - p_f + Je^A, \quad \gamma = p_r - p_f - Je^A.$$

Из условия  $x = l$  определяется время начала кольматации трещины  $t_f$ .

При движении оторочки по трещине объемное содержание частиц возрастает за счет оттока несущей жидкости в пласт. Решение для эволюции объемной доли частиц на фронте имеет вид:

$$\alpha = \alpha_0 \exp \left( \frac{At}{l\mu \operatorname{ch} A} B \left( J \operatorname{sh} \left( A \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \right) + (p_f - p_r) \operatorname{ch} \left( \frac{Ax}{l} \right) \right) \right).$$

В момент подхода контактного разрыва  $t = t_f$  к концу трещины  $x = l$  формируется разрыв объемной доли частиц, в котором перед фронтом разрыва  $\alpha = \alpha^-$ , а за разрывом  $\alpha = 1$ . Значение  $\alpha^-$  определяется решением характеристической системы (4). Сформировавшийся разрыв движется как отраженная волна навстречу потоку, условия на разрыве имеют вид:

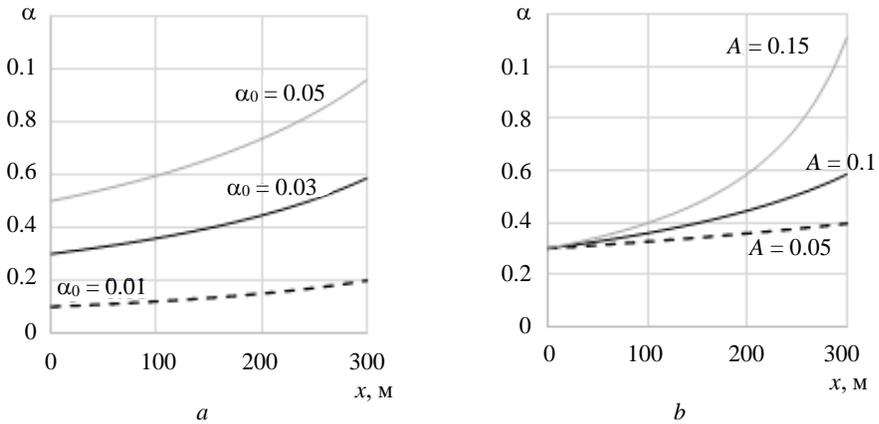
$$(1 - \alpha^-) \frac{dx_c}{dt} + v^- \alpha^- = 0,$$

где  $v^-$  – значение скорости перед разрывом,  $x_c$  – координата начала закольматированной области трещины. Согласно полученному ранее решению, распределение частиц в трещине перед разрывом  $\alpha^-$  является стационарным  $\alpha^- = \alpha^-(x)$ , но

выражается достаточно громоздкой формулой. Для упрощения решения были получены квадратичные корреляции этой функции

$$\alpha^- = F_1 \frac{x^2}{l^2} + F_2 \frac{x}{l} + \alpha_0,$$

которые зависят от определяющих комплексов  $\alpha_0$ ,  $A$ , но не зависят от параметра  $D$ . Зависимость функции  $\alpha^-(x)$  от параметров  $\alpha_0$ ,  $A$  приведена на рис. 1, а коэффициентов корреляционных формул  $F_1$  и  $F_2$  от этих параметров – в табл. 3. При этих расчетах значение комплекса  $D$  принято равным 0.0265,  $l = 300$  м.



**Рис. 1.** Зависимость распределения объемного содержания частиц перед фронтом кольтации трещины от определяющих параметров  $\alpha_0$  (a),  $A$  (b)  
**Fig. 1.** Distribution of the volume content of particles ahead of the fracture colmatation front versus governing parameters (a)  $\alpha_0$  and (b)  $A$

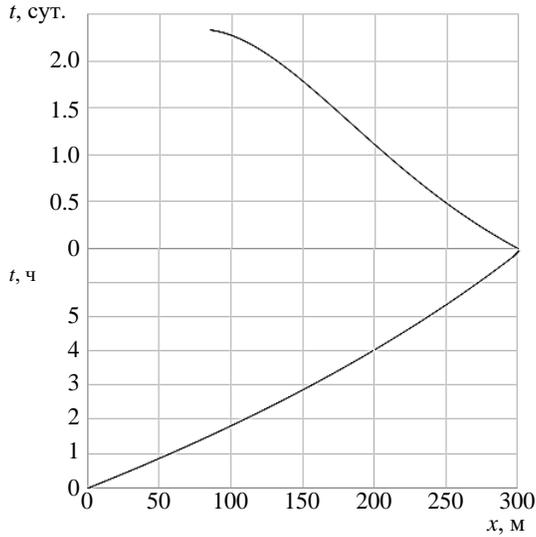
Таблица 3

**Зависимость коэффициентов корреляционных формул от определяющих параметров  $\alpha_0$ ,  $A$**

Значение параметра $A$ ( $\alpha_0 = 0.03$ )→	0.05	0.1	0.15	0.2
Значение параметра $\alpha_0$ ( $A = 0.1$ )↓				
0.01	$F_1 = 0.0009$ $F_2 = 0.0023$	$F_1 = 0.0064$ $F_2 = 0.0031$	$F_1 = 0.0322$ $F_2 = -0.0077$	$F_1 = 0.1528$ $F_2 = -0.0720$
0.02	$F_1 = 0.0018$ $F_2 = 0.0047$	$F_1 = 0.0123$ $F_2 = 0.0062$	$F_1 = 0.0611$ $F_2 = -0.0137$	$F_1 = 0.3542$ $F_2 = -0.1023$
0.03	$F_1 = 0.0026$ $F_2 = 0.0069$	$F_1 = 0.0179$ $F_2 = 0.0094$	$F_1 = 0.0870$ $F_2 = -0.0181$	$F_1 = 0.5446$ $F_2 = -0.2973$
0.04	$F_1 = 0.0033$ $F_2 = 0.0091$	$F_1 = 0.0231$ $F_2 = 0.0127$	$F_1 = 0.1102$ $F_2 = -0.0211$	$F_1 = 0.7452$ $F_2 = -0.4203$
0.05	$F_1 = 0.0041$ $F_2 = 0.0113$	$F_1 = 0.0279$ $F_2 = 0.0160$	$F_1 = 0.1309$ $F_2 = -0.0228$	$F_1 = 0.9179$ $F_2 = -0.5250$

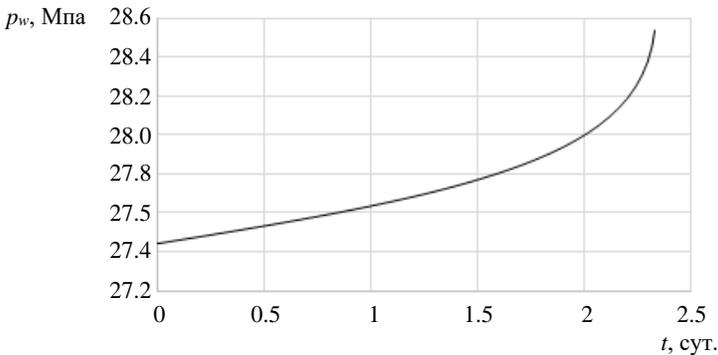
Результаты расчетов

Рассматривается модельный случай, в котором параметры пласта, трещины и суспензии имеют значения:  $k = 70$  мД,  $k_r(S_{or}) = 0.8$ ,  $\alpha_0 = 0.03$ ,  $w = 2$  мм,  $l = 300$  м,  $L = 500$  м,  $\mu = 1$  сПз,  $Q_0 = 0.001$  м<sup>3</sup>/с,  $p_r = 27$  МПа,  $h = 30$  м,  $h_e = 20$  м. Траектории контактного разрыва при движении суспензии к концу трещины и обратного кольматационного разрыва для модельного случая приведены на рис. 2.



**Рис. 2.** Траектория движения контактного разрыва, соответствующего переднему фронту оторочки (нижняя кривая), и разрыва, определяющего закольматированную зону трещины (верхняя кривая)

**Fig. 2.** Trajectories of the contact discontinuity corresponding to a leading edge of the slug (lower curve) and the discontinuity determining the fracture colmatation zone (upper curve)



**Рис. 3.** Рост забойного давления в скважине в процессе кольматации трещины (начальный момент соответствует началу кольматации)

**Fig. 3.** The downhole pressure rise in a well during fracture colmatation (the initial moment corresponds to the onset of colmatation)

Следует отметить, что заполнение трещины суспензией происходит на порядок быстрее, чем кольматационный процесс. Кольматационный процесс сопровождается резким возрастанием забойного давления, эта зависимость приведена на рис. 3. Рост давления определяется сокращением размеров незакольматированной трещины и несогласованием подаваемого расхода и приемистости скважины. Таким образом, кольматация всей длины трещины невозможна из-за резкого роста забойного давления. Для рассмотренного случая максимальный кольматируемый размер составляет 440 м, при этом коэффициент приемистости скважины (отношение расхода суспензии к перепаду давления) падает на 52%. Следует отметить, что ограничение притока, например штуцерованием скважины, может привести к частичному схлопыванию трещины и в идеале тем же результатам, что и кольматация трещины. Однако этот процесс менее контролируемый и неопределенный по результатам, так как зависит от геомеханической обстановки в пласте и полноты схлопывания трещины до исходного состояния.

### Верификация полученного решения на промысловых данных

Для верификации предложенной модели кольматации трещин автоГРП и подтверждения вывода об ограничении длины трещин в результате закачки ПДС были смоделированы результаты обработки выбранных нагнетательных скважин с наличием трещин автоГРП и сопоставлены с результатами, полученными на практике. По промысловым данным можно оценить приемистость скважины до и после воздействия. По значению приемистости скважины можно по формуле Дюпюи (1) определить скин-фактор скважины до и после воздействия. По формуле Пратса скин-фактор пересчитывается в размер трещины до и после воздействия. Такая обработка данных позволяет дать оценку изменения длины трещины в результате обработки ПДС.

С другой стороны, полученные в работе решения позволяют рассчитать для параметров трещины до воздействия (толщина трещины считалась постоянной (2 мм), а высота трещины совпадает с мощностью продуктивного интервала) изменение длины трещины при сформулированных ранее допущениях. Результаты расчетов сведены в табл. 4;  $N$  – количество реагирующих скважин.

Таблица 4

#### Промысловые данные по обработке нагнетательных скважин полимер-дисперсными составами

№	Длина трещины автоГРП до обработки, м	Оценка длины трещины после воздействия по реальным данным, м	Оценка длины трещины после воздействия из расчетов по модели, м	Точность согласования данных, %	$N$
2164	436.364	153	144	1	3
2731	529.801	201	185	3	1
2305	418.994	168	159	4	1

Результаты сопоставления показывают удовлетворительное согласование. Следует отметить, что все операции планировались для выравнивания профиля приемистости. Среднее количество реагирующих добывающих скважин для всех

выполненных операций составляло 7, т.е. для площадной системы расположения скважин дополнительная добыча наблюдалась в большинстве окружающих скважин, что согласуется с механизмом, положенным в основу выравнивания профиля приемистости. По выбранным скважинам с автоГРП количество реагирующих скважин меньше; это говорит о том, что ограничение длины скважины блокирует высокопроницаемый канал связи трещина–добывающая скважина.

Таким образом, проведенные расчеты показывают, что предложенный в работе механизм блокирования трещин автоГРП и порожденных ими высокопроницаемых каналов связи косвенно подтверждается.

### Заключение

Предлагается гипотеза, что при больших длинах трещины автоГРП может образовываться высокопроницаемый канал между нагнетательной и окружающими добывающими скважинами.

Предложена упрощенная модель кольматации трещины автоГРП ПДС с частицами заведомо большего размера, чем поровые каналы. Эта модель не учитывает кольматацию призабойной зоны пласта, кроме кольматации трещины автоГРП, поскольку предполагается наличие утечек в пласт только несущей жидкости (воды). Разработанная модель необходима для оценки возможности кольматации трещины автоГРП, чтобы предотвратить прорыв воды по этой трещине от нагнетательной скважины в зону дренирования добывающей скважины. При дальнейшем совершенствовании модели предполагается возможность учета кольматации призабойной зоны нагнетательной скважины.

Полученное аналитическое решение показывает, что в этом случае возможна кольматация лишь части трещины, при сокращении размеров трещины величина расхода не согласована с приемистостью кольматированной трещины, что приводит к резкому росту забойного давления в нагнетательной скважине на определенном этапе обработки.

Решение позволяет рассчитать закольматированный размер трещины и оценить необходимый объем суспензии и падение коэффициента приемистости скважины после обработки.

Анализ промысловых данных по обработке скважин с автоГРП ПДС показывает, что в большинстве случаев снижение обводненности окружающих скважин происходит именно за счет кольматации трещины и ликвидации высокопроницаемого канала связи.

### Список источников

1. Мальцев В.В., Асмандияров Р.Н., Байков В.А., Усманов Т.С., Давлетбаев А.Я. Исследование развития трещин автоГРП на опытном участке Приобского месторождения с линейной системой разработки // Нефтяное хозяйство. 2012. № 5. С. 70–73.
2. Gitaov A.A., Bazyrov I.S. The development method of low-permeability and ultra-low-permeability reservoirs by waterflooding // SPE Russian Petroleum Technology Conference, Moscow, Russia, 12–15 October 2021. 2021. Paper SPE-206416-MS. doi: 10.2118/206416-MS
3. Изотов А.А., Афонин Д.Г. О взаимосвязи факторов, влияющих на эффективность разработки низкопроницаемых коллекторов с применением заводнения // Нефтяное хозяйство. 2020. № 12. С. 106–109. doi: 10.24887/0028-2448-2020-12-106-109

4. Cheng C., Milsch H. Hydromechanical investigations on the self-propping potential of fractures in tight sandstones // *Rock Mech. Rock Eng.* 2021. V. 54 (6). P. 5407–5432. doi: 10.1007/s00603-021-02500-4
5. Singh P., Agarwal R.G. Two-step rate test: new procedure for determining formation parting pressure // *J. Pet. Technol.* 1990. V. 42 (1). P. 84–90. doi: 10.2118/18141-PA
6. Ридель А.А., Маргарит А.С., Гарифуллина Р.А., Мажар В.А., Альмухаметов М.А., Петров И.А. Повышение эффективности разработки нефтегазовых месторождений посредством оптимизации эксплуатации скважин нагнетательного фонда // Российская техническая нефтегазовая конференция и выставка SPE по разведке и добыче, Москва, Россия, 16–18 октября 2012. 2012. Paper SPE-162057-RU. С. 1–7. doi: /10.2118/162057-RU
7. Баллин Д.В., Алехин И.Г., Бровко В.И., Наймушин А.Г. Использование 3D геомеханического моделирования для повышения достоверности ГДМ в терригенном коллекторе, осложненном большим количеством тектонических нарушений // Российская нефтегазовая техническая конференция SPE, Москва, Россия, 26–29 октября 2020. 2020. Paper SPE-201977-RU. С. 1–20. doi: 10.2118/201977-RU
8. Yan W., Demin W., Zhi S., Changlan S., Gang W., Desheng L. Hydraulic fracturing of polymer injection wells // *SPE Asia Pacific Oil and Gas Conference and Exhibition, Perth, Australia, 18–20 October 2004.* 2004. Paper SPE 88592. P. 1–4. doi: 10.2118/88592-MS
9. Байков В.А., Бураков И.М., Латышов И.Д., Яковлев А.А., Асмандияров Р.Н. Контроль развития техногенных трещин автоГРП при поддержании пластового давления на месторождения ООО «РН-Юганскнефтегаз» // *Нефтяное хозяйство.* 2012. № 11. С. 30–33.
10. Holzhausen G.R., Egan H.N. Detection and control of hydraulic fractures in water injection wells // *SPE California Regional Meeting, Ventura, California, USA, 8–10 April 1987.* 1987. Paper SPE 16362. P. 1–8. doi: 10.2118/16362-MS
11. Байков В.А., Давлетбаев А.Я., Усманов Т.С., Степанова З.Ю., Асмандияров Р.Н. Специальные гидродинамические исследования для мониторинга за развитием трещин ГРП в нагнетательных скважинах // *Нефтегазовое дело.* 2011. № 1. С. 65–77.
12. Давлетбаев А.Я., Байков В.А., Бикбулатова Г.Р., Асмандияров Р.Н., Назаргалин Э.Р., Слабецкий А.А., Сергейчев А.В., Нуриев Р.И. Промысловые исследования по изучению самопроизвольного развития техногенных трещин в нагнетательных скважинах // Российская техническая нефтегазовая конференция и выставка SPE по разведке и добыче, Москва, Россия, 14–16 октября 2014. 2014. Paper SPE-171232-RU. С. 1–9. doi: 10.2118/171232-RU
13. Давлетова А.Р., Бикбулатова Г.Р., Федоров А.И., Давлетбаев А.Я. Геомеханическое моделирование направления и траектории развития трещин гидроразрыва пласта при разработке низкопроницаемых коллекторов // *Научно-технический вестник НК «Роснефть».* 2014. № 1 (34). С. 40–43.
14. Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А. Моделирование нестационарной фильтрации в системе пласт – трещина гидроразрыва // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2022. № 77. С. 158–168. doi: 10.17223/19988621/77/12
15. Петухов Н.Ю., Кулушев М.М., Емельянов А.Г., Мироненко А.А. Опыт реализации программы ограничения закачки рабочего агента на Приобском месторождении // *Нефтяное хозяйство.* 2020. № 10. С. 54–58. doi: 10.24887/0028-2448-2020-10-54-58
16. Исламов А.И., Фасхутдинов Р.Р., Колупаев Д.Ю., Верецагин С.А. О механизмах возникновения зон с аномально высоким пластовым давлением и методах их прогнозирования в неразрабатываемых пластах на примере Приобского месторождения // *Нефтяное хозяйство.* 2018. № 10. С. 54–59. doi: 10.24887/0028-2448-2018-10-54-59
17. Feng N., Chang Y., Wang Z., Liang T., Guo X., Zhu Y., Hu L., Wan Y. Comprehensive evaluation of waterflooding performance with induced fractures in tight reservoir: a field case // *Geofluids.* 2021. V. 2021. P. 1–11. doi: 10.1155/2021/6617211
18. Давлетова А.Р., Федоров А.И., Щутский Г.А. Анализ риска самопроизвольного роста трещины гидроразрыва пласта в вертикальном направлении // *Нефтяное хозяйство.* 2019. № 6. С. 50–53. doi: 10.24887/0028-2448-2019-6-50-53

19. Шель Е.В., Кабанова П.К., Ткаченко Д.Р., Базыров И.Ш., Логвинюк А.В. Моделирование инициации и распространения трещины гидроразрыва пласта на нагнетательной скважине для нетрещиноватых терригенных пород на примере Приобского месторождения // ПРОНЕФТЬ. Профессионально о нефти. 2020. № 2 (16). С. 36–42. doi: 10.7868/S2587739920020056
20. Seright R.S. Use of preformed gels for conformance control in fractured systems // SPE Prod. Fac. 1997. V. 12 (1). P. 59–65. doi: 10.2118/35351-PA
21. Уолкотт Д. Разработка и управление месторождениями при заводнении. Методы проектирования, осуществления и мониторинга, позволяющие оптимизировать темпы добычи и освоения запасов. М. : ЮКОС, 2001. 144 с.
22. Газизов А.Ш., Низамов Р.Х. Оценка эффективности технологии применения полимер-дисперсной системы по результатам промысловых исследований // Нефтяное хозяйство. 1990. № 7. С. 49–52.
23. Фёдоров К.М., Шевелёв А.П., Кобяшев А.В., Захаренко В.А., Кочетов А.В., Неклеса Р.С., Усольцев А.В. Определение фильтрационных параметров суспензии по экспериментальным данным // Российская нефтегазовая техническая конференция SPE, Москва, Россия, 26–29 октября 2020. 2020. Paper SPE-202018-RU. С. 1–16. doi: 10.2118/202018-RU
24. Экономидес М. Унифицированный дизайн гидроразрыва пласта. М. : ПетроАльянс Сервисис Компани Лимитед, 2004. 316 с.
25. Dontsov E.V., Peirce A.P. Slurry flow, gravitational settling and a proppant transport model for hydraulic fractures // J. Fluid Mech. 2014. V. 760. P. 567–590. doi: 10.1017/jfm.2014.606
26. Татосов А.В., Шлякин А.С. Движение пропанта в раскрывающейся трещине гидроразрыва пласта // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, № 2. С. 217–226. doi: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-217-226
27. Шлякин А.С., Татосов А.В. О решении задачи гидроразрыва пласта в одномерной математической постановке // Нефтяное хозяйство. 2020. № 12. С. 118–121. doi: 10.24887/0028-2448-2020-12-118-121
28. Гильманов А.Я., Фёдоров К.М., Шевелёв А.П. Задача о блокировании техногенной трещины в пласте суспензионной смесью // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2022. № 6. С. 27–35. doi: 10.31857/S0568528122600230

### References

1. Mal'tsev V.V., Asmandiyarov R.N., Baykov V.A., Usmanov T.S., Davletbaev A.Ya. (2012) Issledovanie razvitiya treshchin avtoGRP na opytном uchastke Priobskogo mestorozhdeniya s lineynoy sistemoy razrabotki [Testing of auto hydraulic-fracturing growth of the linear oilfield development system of Priobskoye oil field]. *Neftyanoe Khozyaystvo – Oil Industry*. 5. pp. 70–73.
2. Gimazov A.A., Bazyrov I.S. (2021) The development method of low-permeability and ultra-low-permeability reservoirs by waterflooding. *SPE Russian Petroleum Technology Conference, Moscow, Russia, October 12–15, 2021*. Article SPE-206416-MS. doi: 10.2118/206416-MS
3. Izotov A.A., Afonin D.G. (2020) O vzaimosvyazi faktorov, vliyayushchikh na effektivnost' razrabotki nizkoprofitsaemykh kollektorov s primeneniem zavodneniya [The collection of factors affecting the efficiency of low-permeable reservoirs development using flooding]. *Neftyanoe Khozyaystvo – Oil Industry*. 12. pp. 106–109. doi: 10.24887/0028-2448-2020-12-106-109
4. Cheng C., Milsch H. (2021) Hydromechanical investigations on the self-propping potential of fractures in tight sandstones. *Rock Mechanics and Rock Engineering*. 54(6). pp. 5407–5432. doi: 10.1007/s00603-021-02500-4
5. Singh P., Agarwal R.G. (1990) Two-step rate test: new procedure for determining formation parting pressure. *Journal of Petroleum Technology*. 42(1). pp. 84–90. doi: 10.2118/18141-PA
6. Ridel A.A., Margarit A.S., Garifoullina R.A., Mazhar V.A., Almukhametov M.A., Petrov I.A. (2012) Improving the efficiency of oil and gas field development by optimizing the operation of injection wells. *SPE Russian Oil & Gas Exploration & Production Technical Conference*

- and Exhibition, Moscow, Russia, October 16–18, 2012. Article SPE-162057-MS. pp. 1–7. doi: 10.2118/162057-MS
7. Balin D.V., Alekhin I.G., Brovko V.I., Naimyshin A.G. (2020) Application of 3D geomechanics modeling to enhance reservoir simulation model forecast in terrigenous fractured reservoir. *SPE Russian Petroleum Technology Conference, Moscow, Russia, October 26–29, 2020*. Article SPE-201977-MS. pp. 1–16. doi: 10.2118/201977-MS
  8. Yan W., Demin W., Zhi S., Changlan S., Gang W., Desheng L. (2004) Hydraulic fracturing of polymer injection wells. *SPE Asia Pacific Oil and Gas Conference and Exhibition, Perth, Australia, October 18–20, 2004*. Article SPE 88592. pp. 1–4. doi: 10.2118/88592-MS
  9. Baykov V.A., Burakov I.M., Latypov I.D., Yakovlev A.A., Asmandiyarov R.N. (2012) Kontrol' razvitiya tekhnogennykh treshchin avtoGRP pri podderzhanii plastovogo davleniya na mestorozhdeniyakh OOO "RN-Yuganskneftegaz" [The control of self-induced hydraulic fracturing process on RN-Yuganskneftegaz LLC oilfields]. *Neftyanoe Khozyaystvo – Oil Industry*. 11. pp. 30–33.
  10. Holzhausen G.R., Egan H.N. (1987) Detection and control of hydraulic fractures in water injection wells. *SPE California Regional Meeting, Ventura, California, USA, April 8–10, 1987*. Article № SPE 16362. pp. 1–8. doi: 10.2118/16362-MS
  11. Baykov V.A., Davletbaev A.Ya., Usmanov T.S., Stepanova Z.Yu., Asmandiyarov R.N. (2011) Spetsial'nye gidrodinamicheskie issledovaniya dlya monitoringa za razvitiem treshchin GRP v nagnetatel'nykh skvazhinakh [Special hydrodynamic studies to monitor the development of fractures in injection wells]. *Neftgazovoe delo*. 1. pp. 65–77.
  12. Davletbaev A., Baikov V., Bikbulatova G., Asmandiyarov R., Nazargalin E., Slabetskiy A., Sergeychev A., Nuriev R. (2014) Field studies of spontaneous growth of induced fractures in injection wells. *SPE Russian Oil and Gas Exploration and Production Technical Conference and Exhibition, Moscow, Russia, October 14–16, 2014*. Article SPE-171232-MS. pp. 1–10. doi: 10.2118/171232-MS
  13. Davletova A.R., Baykov V.A., Fedorov A.I., Davletbaev A.Ya. (2014) Geomekhanicheskoe modelirovanie napravleniya i traektorii razvitiya treshchin gidrorazryva plasta pri razrabotke nizkopronitsaemykh kollektorov [Geomechanical modeling of the direction and trajectory of hydraulic fractures in the development of low-permeability reservoirs]. *Nauchno-tekhnicheskij vestnik "NK "Rosneft"*. 1(34). pp. 40–43.
  14. Khabibullin I.L., Khisamov A.A. (2022) Modelirovanie nestatsionarnoy fil'tratsii v sisteme plast-treshchina gidrorazryva [Modeling of unsteady filtration in a formation-hydraulic fracture system]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 158–168. doi: 10.17223/19988621/77/12
  15. Petukhov N.Yu., Kulushev M.M., Emel'yanov A.G., Mironenko A.A. (2020) Opyt realizatsii programmy ogranicheniya zakachki rabocheho agenta na Priobskom mestorozhdenii [Experience in implementation a program for limiting the injection of a working agent at the Priobskoye field]. *Neftyanoe Khozyaystvo – Oil Industry*. 10. pp. 54–58. doi: 10.24887/0028-2448-2020-10-54-58
  16. Islamov A.I., Faskhutdinov R.R., Kolupaev D.Yu., Vereshchagin S.A. (2018) O mekhaniz-makh vozniknoveniya zon s anomal'no vysokim plastovym davleniem i metodakh ikh prognozirovaniya v nerazrabatyvaemykh plastakh na primere Priobskogo mestorozhdeniya [On the mechanisms of the formation of zones with abnormally high rock pressure and methods for predicting them in undeveloped rock systems, Priobskoye field case study]. *Neftyanoe Khozyaystvo – Oil Industry*. 10. pp. 54–59. doi: 10.24887/0028-2448-2018-10-54-59
  17. Feng N., Chang Y., Wang Z., Liang T., Guo X., Zhu Y., Hu L., Wan Y. (2021) Comprehensive evaluation of waterflooding performance with induced fractures in tight reservoir: a field case. *Geofluids*. 2021. pp. 1–11. doi: 10.1155/2021/6617211
  18. Davletova A.R., Fedorov A.I., Shchutskiy G.A. (2019) Analiz riska samoproizvol'nogo rosta treshchiny gidrorazryva plasta v vertikal'nom napravlenii [Risk analysis of self-induced

- hydraulic fracture growth in vertical plane]. *Neftyanoe Khozyaystvo – Oil Industry*. 6. pp. 50–53. doi: 10.24887/0028-2448-2019-6-50-53
19. Shel' E.V., Kabanova P.K., Tkachenko D.R., Bazyrov I.Sh., Logvinyuk A.V. (2020) Modelirovanie initsiatsii i rasprostraneniya treshchiny gidrorazryva plasta na nagnetatel'noy skvazhine dlya netreshchinovytykh terrigennykh porod na primere Priobskogo mestorozhdeniya [Modeling of a hydraulic fracture initiation and propagation on an injection well for non-fractured terrigenous rocks on the Priobskoye field]. *PRONEFT'. Professional'no o nefti. PRONEft. Professionally about Oil*. 2(16). pp. 36–42. doi: 10.7868/S2587739920020056
  20. Seright R.S. (1997) Use of preformed gels for conformance control in fractured systems. *SPE Production & Facilities*. 12(1). pp. 59–65. doi: 10.2118/35351-PA
  21. Wolcott D. (2009) *Applied Waterflood Field Development*. Houston: Energy Tribune Publishing.
  22. Gazizov A.Sh., Nizamov R.Kh. (1990) Otsenka effektivnosti tekhnologii primeneniya polimer-dispersnoy sistemy po rezul'tatam promyslovykh issledovaniy [Evaluation of the effectiveness of the suspension system application technology based on the results of field studies]. *Neftyanoe Khozyaystvo – Oil Industry*. 7. pp. 49–52.
  23. Fedorov K.M., Shevelev A.P., Kobayashv A.V., Zakharenko V.A., Kochetov A.V., Neklesa R.S., Usoltsev A.V. (2020) Determination of suspension filtration parameters from experimental data. *SPE Russian Petroleum Technology Conference, Moscow, Russia, October 26–29, 2020*. Article SPE-202018-MS. pp. 1–15. doi: 10.2118/202018-MS
  24. Economides M. (2001) *Unified Fracture Design*. Alvin: Orsa Press.
  24. Dontsov E.V., Peirce A.P. (2014) Slurry flow, gravitational settling and a proppant transport model for hydraulic fractures. *Journal of Fluid Mechanics*. 760. pp. 567–590. doi: 10.1017/jfm.2014.606
  26. Tatosov A.V., Shlyapkin A.S. (2018) Dvizhenie proppanta v raskryvayushcheysya treshchine gidrorazryva plasta [The motion of propping agent in an opening crack in hydraulic fracturing plast]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika – Izvestiya of Saratov University (New Series). Series Mathematics. Mechanics. Informatics*. 18(2). pp. 217–226. doi: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-217-226
  27. Shlyapkin A.S., Tatosov A.V. (2020) O reshenii zadachi gidrorazryva plasta v odnomernoy matematicheskoy postanovke [On solving the fracturing problem in a hybrid PKN-KGD formulation]. *Neftyanoe Khozyaystvo – Oil Industry*. 12. pp. 118–121. doi: 10.24887/0028-2448-2020-12-118-121
  28. Gilmanov A.Y., Fedorov K.M., Shevelev A.P. (2022) Problem of blocking a technogenic fracture in the reservoir using a suspension mixture. *Fluid Dynamics*. 57. pp. 720–728. doi: 10.1134/S0015462822600936

#### **Сведения об авторах:**

**Анурьев Денис Алексеевич** – кандидат технических наук, начальник экспертно-аналитического управления ООО «Тюменский нефтяной научный центр», Тюмень, Россия. E-mail: daanuriev@tnnc.rosneft.ru

**Фёдоров Константин Михайлович** – доктор физико-математических наук, профессор, научный руководитель Физико-технического института Тюменского государственного университета, Тюмень, Россия. E-mail: k.m.fedorov@utmn.ru

**Гильманов Александр Янович** – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры моделирования физических процессов и систем кафедры моделирования физических процессов и систем Физико-технического института Тюменского государственного университета, Тюмень, Россия. E-mail: a.y.gilmanov@utmn.ru

**Шевелёв Александр Павлович** – кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры моделирования физических процессов и систем Физико-технического института Тюменского государственного университета, Тюмень, Россия. E-mail: a.p.shevelev@utmn.ru

**Морозовский Никита Александрович** – кандидат технических наук, главный специалист ПАО «НК «Роснефть»», Москва, Россия. E-mail: N\_morozovskiy@rosneft.ru

**Торопов Константин Витальевич** – главный специалист ПАО «НК «Роснефть»», Москва, Россия. E-mail: K\_toropov@rosneft.ru

**Information about the authors:**

**Anur'ev Denis A.** (Candidate of Technical Sciences, Tyumen Petroleum Research Center, Tyumen, Russian Federation). E-mail: daanuriev@tnc.rosneft.ru

**Fedorov Konstantin M.** (Doctor of Physics and Mathematics, University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation). E-mail: k.m.fedorov@utmn.ru

**Gil'manov Aleksandr Ya.** (Candidate of Physics and Mathematics, University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation). E-mail: a.y.gilmanov@utmn.ru

**Shevelev Aleksandr P.** (Candidate of Physics and Mathematics, University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation). E-mail: a.p.shevelev@utmn.ru

**Morozovskiy Nikita A.** (Candidate of Technical Sciences, Rosneft Oil Company, Moscow, Russian Federation). E-mail: N\_morozovskiy@rosneft.ru

**Toropov Konstantin V.** (Rosneft Oil Company, Moscow, Russian Federation). E-mail: K\_toropov@rosneft.ru

*Статья поступила в редакцию 16.08.2022; принята к публикации 10.07.2023*

*The article was submitted 16.08.2022; accepted for publication 10.07.2023*

Научная статья

УДК 536.42+536.24

doi: 10.17223/19988621/84/5

## Математическое моделирование утилизации головного обтекателя ракеты-носителя после его отработки

Владимир Афанасьевич Архипов<sup>1</sup>, Сергей Сергеевич Бондарчук<sup>2</sup>,  
Иван Сергеевич Бондарчук<sup>3</sup>, Николай Николаевич Золоторёв<sup>4</sup>,  
Евгений Александрович Козлов<sup>5</sup>, Мария Павловна Орлова<sup>6</sup>

*1, 2, 3, 4, 5, 6 Томский государственный университет, Томск, Россия*

*<sup>1</sup>leva@niipmm.tsu.ru*

*<sup>2</sup>isbi@mail.ru*

*<sup>3</sup>ivanich\_91@mail.ru*

*<sup>4</sup>nikzlotorev@mail.ru*

*<sup>5</sup>kozlovea@niipmm.tsu.ru*

*<sup>6</sup>maria-orlova-93@mail.ru*

**Аннотация.** Представлена математическая модель процессов горения, течения продуктов сгорания и тепломассообмена в элементах пиротехнического устройства, предназначенного для сжигания головного обтекателя ракеты-носителя после его отработки. Проведен анализ результатов расчетов данных процессов для трех конфигураций твердотопливного заряда-заполнителя, входящего в состав пиротехнического устройства, расположенного внутри обшивки обтекателя. Для рассмотренных конфигураций твердотопливного заряда-заполнителя получены пространственно-временные распределения давления, скорости, температуры продуктов сгорания в каналах пиротехнического устройства, а также параметры прогрева наружной обшивки обтекателя.

**Ключевые слова:** головной обтекатель ракеты-носителя, пиротехническое устройство, заряд-заполнитель, твердое топливо, горение, продукты сгорания, математическое моделирование

**Благодарности:** Исследование выполнено при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет-2030) и гранта Президента РФ для молодых ученых – кандидатов наук МК-2463.2022.4.

**Для цитирования:** Архипов В.А., Бондарчук С.С., Бондарчук И.С., Золоторёв Н.Н., Козлов Е.А., Орлова М.П. Математическое моделирование утилизации головного обтекателя ракеты-носителя после его отработки // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 52–67. doi: 10.17223/19988621/84/5

Original article

## Mathematical modeling of disposal of the payload fairing of a launch vehicle after completion

Vladimir A. Arkhipov<sup>1</sup>, Sergey S. Bondarchuk<sup>2</sup>, Ivan S. Bondarchuk<sup>3</sup>,  
Nikolay N. Zolotarev<sup>4</sup>, Evgeniy A. Kozlov<sup>5</sup>, Mariya P. Orlova<sup>6</sup>

<sup>1, 2, 3, 4, 5, 6</sup> Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

<sup>1</sup> leva@niipmm.tsu.ru

<sup>2</sup> isbi@mail.ru

<sup>3</sup> ivanich\_91@mail.ru

<sup>4</sup> nikzolotarev@mail.ru

<sup>5</sup> kozlovea@niipmm.tsu.ru

<sup>6</sup> maria-orlova-93@mail.ru

**Abstract.** The payload launching into Earth orbit is carried out by launch vehicles. At certain stages of the flight, once the dense layers of the atmosphere are passed through, the spent stages of rocket engines and large payload fairings are jettisoned. Falling of separated parts in the designated areas causes economic, environmental, and social problems. This paper presents a mathematical model of the combustion of a pyrotechnic device with a charge-filler from a solid propellant. The model is developed to calculate combustion processes, the flow of the products of combustion and heat and mass exchange in elements of the pyrotechnic device. Calculations are carried out for three configurations of the solid propellant charge-filler. The obtained spatial and temporal distributions of the parameters of occurring flows allow one to assess the feasibility of the pyrotechnic device, namely defragmentation and combustion of the payload fairing elements. The calculated results for the model pyrotechnic device are in satisfactory agreement with experimental data.

**Keywords:** launch vehicle payload fairing, pyrotechnic device, charge-filler, solid propellant, combustion, combustion products, mathematical modeling

**Acknowledgments:** This study was supported by the Tomsk State University Development Programme (Priority-2030) and a grant from the President of the Russian Federation for young scientists – candidates of sciences MK-2463.2022.4.

**For citation:** Arkhipov, V.A., Zolotarev, E.A., Orlova, M.P., Kozlov, N.N., Bondarchuk, I.S., Bondarchuk, S.S. (2023) Mathematical modeling of disposal of the payload fairing of a launch vehicle after completion. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 52–67. doi: 10.17223/19988621/84/5

### Введение

В настоящее время единственным способом доставки космических аппаратов и модулей на околоземную орбиту является использование ракет-носителей. Важная задача – обеспечение безопасности полезной нагрузки, расположенной в головной части ракеты, на всей траектории полета. Головной обтекатель (ГО) ракеты-носителя обеспечивает защиту выводимого на орбиту полезного груза от воздействия неблагоприятных условий – высоких температур – при аэродинамическом нагреве в плотных слоях атмосферы. При достижении высоты, на которой

действие набегающего потока разреженного воздуха уже не представляет опасности, происходит отделение головного обтекателя от ракеты-носителя. Отделение головного обтекателя позволяет снизить пассивный вес и подготовить орбитальный вывод полезной нагрузки. Головной обтекатель крупногабаритных полезных грузов обычно разделяется на две части (створки), которые под действием силы тяжести, частично обгорая, планируют на поверхность Земли, создавая определенную угрозу населению и инфраструктуре в районе падения. В частности, головной обтекатель ракет-носителей типа «Союз» имеет массу 1 400 кг, длину 10.4 м и диаметр 3.7 м [1]. Существенного снижения негативных последствий можно достигнуть сжиганием ГО или его дроблением на более мелкие фрагменты, вероятность сгорания которых в атмосфере более высокая.

В качестве конструкционных материалов для несущих слоев обтекателя чаще всего применяются высокопрочные и высокомодульные полимерные композиционные материалы из углепластика, стеклопластика или органопластика с каким-либо наполнителем сотовой структуры [2]. Одним из возможных вариантов утилизации ГО за счет сжигания является применением пиротехнического устройства [3–7]. Данное устройство содержит систему каналов, боковая поверхность которых на (60 ÷ 80)% образована зарядом-наполнителем из твердого топлива, а остальная поверхность – материалом обшивки обтекателя. Один из концов канала заглушен, а второй сообщается с внешней средой, характеризующейся давлением, соответствующим высоте полета ракеты-носителя. В районе глухого торца канала имеется проволочный нагреватель, посредством которого осуществляется локальное зажигание заряда-наполнителя.

Цель настоящей статьи – разработка физико-математической модели процессов горения, течения продуктов сгорания и тепломассообмена в элементах пиротехнического устройства, предназначенного для утилизации ГО путем сжигания, а также анализ параметров функционирования пиротехнического устройства для трех конфигураций твердотопливного заряда-наполнителя. Оценка адекватности разработанной физико-математической модели анализируемой конструкции была проведена сравнением с экспериментальными данными по наружной температуре обшивки пиротехнического устройства [6, 7].

Математическая постановка задачи предусматривала следующее развитие процесса функционирования устройства. В начальный момент времени, когда канал заполнен холодным газом с параметрами внешней среды, проволочный нагреватель инициирует зажигание твердого топлива в районе глухого конца канала. В результате горения твердого топлива давление в этой области повышается, и горячие продукты горения начинают двигаться к открытому для истечения концу канала, вытесняя «начальный» холодный газ. За счет механизмов конвекции и излучения происходит повышение температуры как еще не подключившегося к горению твердого топлива, так и органопластика обшивки. По мере прогрева к горению постепенно подключается вся рабочая поверхность твердого топлива. Давление в канале нарастает, и через некоторое время устанавливаются параметры квазистационарного режима, когда локальные вдоль канала параметры потока слабо меняются во времени. Происходит неравномерное выгорание твердого топлива и соответствующее изменение геометрических характеристик канала.

Указанные выше особенности развития баллистического процесса определяют математическую модель как нестационарную с учетом:

- постепенности воспламенения поверхности твердого топлива;
- неравномерности выгорания твердотопливных разделяющих каналы пластин;
- воспламенения органопластиковой обшивки в случае «горючести» ее материала или прогрева этого материала при температурном механизме его деструкции.

### Математическая постановка задачи моделирования течения продуктов сгорания

Считается, что смесь, образованная продуктами сгорания твердого топлива, возможной газификации конструкционного материала и газа, заполнявшего изначально канал конструкции, подчиняется уравнению состояния идеального невязкого газа [8–14].

В рамках данного предположения диссипативные эффекты, обусловленные трением и теплообменом на ограничивающих поток поверхностях, учитываются введением специальных членов источникового типа. Уравнения записываются применительно к контрольному объему  $V$ , ограниченному замкнутой поверхностью, частично или полностью состоящей из проницаемой для газа поверхности  $A$  (проходное сечение канала с площадью  $A$ ) и непроницаемыми поверхностями твердого топлива  $S_1$  и органопластика обшивки  $S_2$ , на которых происходит тепломассообмен между газовым потоком в канале и элементами конструкции. Система уравнений, отражающая основные законы сохранения (массы, количества движения и энергии), записывается в интегральном виде, не зависящем от выбора системы координат [8, 9, 11, 12]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_A \rho N dA &= \int_{S_1} m_1 dS_1 + \int_{S_2} m_2 dS_2, \\
 \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho R dV + \int_A \rho R N dA &= \int_{S_1} R_1 m_1 dS_1 + \int_{S_2} R_2 m_2 dS_2, \\
 \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho c_p dV + \int_A \rho c_p N dA &= \int_{S_1} c_{p1} m_1 dS_1 + \int_{S_2} c_{p2} m_2 dS_2, \\
 \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{u} dV + \int_A \mathbf{\Pi} dA + \int_{S_1+S_2} \rho \frac{|\mathbf{u}|}{2} f dS &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho E dV + \int_A (E + p) N dA + \int_{S_1} q_1 dS_1 + \int_{S_2} q_2 dS_2 &= \int_{S_1} H_1 m_1 dS_1 + \int_{S_2} H_2 m_2 dS_2.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Соотношения для полной энергии  $E$ , температуры  $T$  и показателя адиабаты  $\gamma$ :

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}, \quad T = \frac{p}{\rho R}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_p - R}.$$

Здесь  $t$  – время;  $p$ ,  $\rho$  – давление и плотность;  $R$ ,  $c_p$  – газовая постоянная, изобарическая теплоемкость;  $\mathbf{\Pi} = p\mathbf{n} + \rho\mathbf{u}N$  – поток импульса;  $N = (\mathbf{u}, \mathbf{n})$  – нормальная к поверхности скорость, определяемая скалярным произведением вектора скорости  $\mathbf{u}$  на единичный вектор  $\mathbf{n}$  внешней нормали к поверхности;  $f$  – коэффициент сопротивления (трения) газа на поверхностях;  $H$  – энтальпия вдуваемых с по-

верхностей  $S_1$  и  $S_2$  газообразных продуктов;  $q$  – плотность теплового потока к поверхностям  $S_1$  и  $S_2$ . Индекс «1» – для твердого топлива, «2» – для органопластика корпуса.

Для вычисления параметров взаимодействия газового потока в канале (трения и теплообмена) с элементами конструкции необходимо знать такие параметры смеси газов, как вязкость и коэффициент теплопроводности, которые не являются аддитивными по массе компонентов смеси. Тем не менее для смеси газов, небогатых водородом и не имеющих максимумов на кривых зависимостей вязкости от состава, для оценки коэффициента динамической вязкости  $\mu$  можно использовать уравнение сохранения комплекса  $\rho\mu\sqrt{R}$  [9, 12]. В соответствии с этим вязкость многокомпонентной смеси продуктов сгорания твердого топлива, начального газа и возможной газификации органопластика материала обшивки можно определить решением уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho\sqrt{R}dV + \int_A \rho\sqrt{R}NdA &= \int_{S_1} \sqrt{R_1}m_1dS_1 + \int_{S_2} \sqrt{R_2}m_2dS_2, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho\mu\sqrt{R}dV + \int_A \rho\mu\sqrt{R}NdA &= \int_{S_1} \mu_1\sqrt{R_1}m_1dS_1 + \int_{S_2} \mu_2\sqrt{R_2}m_2dS_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Начальными условиями для решения системы уравнений (1) и (2) являются значения и поля соответствующих параметров:

$$\rho = \rho_0, \quad \mathbf{u} = 0, \quad R = R_0, \quad c_p = c_{p0}, \quad E = E_0, \quad \mu = \mu_0,$$

где индекс «0» характеризует условия начала процесса работы устройства. Начальные значения энергии и плотности удобно определять через заданные стартовые значения давления и температуры:

$$E_0 = \frac{p_0}{\gamma - 1}, \quad \rho_0 = \frac{p_0}{R_0 T_0}, \quad T = \frac{p}{\rho R}.$$

Расчет плотности притока массы  $m_1$  за счет горения твердого топлива (для конкретной начальной температуры) задается в виде зависимости [10, 14]

$$m_1 = \rho_1 \varepsilon u_0 p^\nu,$$

где  $\rho_1$  – плотность топлива;  $u_0, \nu$  – эмпирические константы; обычно используют размерности  $[u_0] = \text{мм/с}$ ,  $[p] = \text{атм}$ .

Для твердотопливных составов скорость горения может существенно зависеть от скорости «обдувающего» горящее топливо потока – реализуется так называемый эффект эрозионного горения [14]. В частности, коэффициент эрозии  $\varepsilon$  для баллиститных составов может определяться следующей экспериментальной зависимостью по величине «пороговой» скорости [14]:

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{если } u < u_*, \\ 1 + K_u (u - u_*), & \text{если } u \geq u_*, \end{cases}$$

где  $u$  – скорость обдувающего газового потока,  $K_u$  и  $u_*$  – эмпирические константы. Для типично баллиститного твердого топлива  $K_u = 0.0022 \text{ с/м}$ ;  $u_* = (180 \div 200) \text{ м/с}$  [14].

Учет эрозионного эффекта может быть существенно важен при расчете течений в длинных «горящих» каналах.

Разгар канала (изменение площадей проходных сечений, поверхности горения и «обнажающейся» площади органопластика обшивки) рассчитывается по вели-

чине изменения так называемой глубины выгорания твердого топлива  $e$  по длине канала:

$$\frac{de}{dt} = \varepsilon u_0 p^v, \quad e(t=0) = 0.$$

Для расчета плотности притока массы  $m_2$  за счет возможной газификации органопластика обшивки используются экспериментальные данные работ [2, 10].

Расчет параметров теплообмена между элементами конструкции и горячими продуктами сгорания проводится посредством законов Ньютона–Рихмана и Стефана–Больцмана [10, 14], описывающих передачу тепла конвекцией и излучением:

$$q = \alpha(T - T_w) = (\alpha_c + \alpha_r)(T - T_w),$$

где  $\alpha_c$ ,  $\alpha_r$  – конвективная и радиационная (лучистая) составляющие коэффициента теплоотдачи;  $T_w$  – температура «обдуваемой» поверхности (так называемая температура «стенки»).

Эффективное значение интегрального коэффициента излучения (степени черноты) системы газ–поверхность, необходимое для расчета лучистой составляющей теплового потока, определяется на основе методик, изложенных в работах [10, 14].

Коэффициент конвективной теплоотдачи  $\alpha_c$  определяется критериально-опытной зависимостью через числа Нуссельта  $Nu$  и Прандтля  $Pr$  (соотношение Г. Крауссольда (Н. Kraussold) для теплообмена в круглой трубе [10, 14, 15]):

$$\alpha_c = \frac{\lambda}{l} Nu = \frac{\mu c_V}{l} Nu = \frac{\mu(c_p - R)}{l} Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4} \frac{\mu(c_p - R)}{l},$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности газовой смеси;  $Re = |\mathbf{u}|l/\mu$  – число Рейнольдса.

Характерный размер  $l$  определяется через так называемый смоченный периметр  $\Pi$  проходного сечения канала с площадью сечения  $A$ :

$$l = \frac{A}{4\Pi}.$$

Расчет силы сопротивления вследствие трения в уравнении движения (1) через оценку коэффициента сопротивления  $f$ , вычисляемого по соотношению [13, 14]:

$$f = \begin{cases} \frac{16}{Re}, & Re < 4 \cdot 10^3, \\ 0.0032 + \frac{0.221}{Re^{0.237}}, & Re > 4 \cdot 10^3. \end{cases}$$

Одной из проблем, которые приходится решать совместно с расчетом газодинамического поля течения, является задача по подключению к горению элементов поверхности твердого топлива в процессе его зажигания. При этом в рамках наиболее простых подходов предполагается, что зажигание элемента поверхности (включение его в процесс горения) происходит мгновенно после достижения температурой поверхности некоторого критического значения. В случаях когда вычисление времени подключения элемента поверхности к горению (или газификации) не является существенно определяющим фактором при расчете зажигания твердого топлива, а течение имеет такой характер, что тепловой поток в твердые «стенки» положительный, можно использовать приближенные, в частности интегральные, методы решения уравнения теплопроводности. Хорошие

результаты интегральный метод дает для кубического профиля температуры [16]. Искомым параметром является температура поверхности  $T_w$ , для которой на основе интегрального метода теплового баланса записывается экономичное при программной реализации обыкновенное дифференциальное уравнение [16, 17]:

$$\frac{dT_w}{dt} = \frac{4\alpha_1}{3\lambda_1^2} \frac{\alpha^2 (T - T_w)^3}{(T_w - T_0)(2T - T_w - T_0)},$$

где  $\alpha_1$ ,  $\lambda_1$  – коэффициенты температуропроводности и теплопроводности материала топлива;  $T$  – температура газового потока;  $\alpha$  – эффективный коэффициент теплоотдачи.

Начальным условием для этого уравнения является  $T_w = T_0$ .

В качестве условия подключения элемента поверхности к горению топлива (или начала возможной газификации органопластика обшивки) использовалось достижение температурой поверхности некоторого значения – так называемой температуры вспышки твердого топлива, или критических условий глубины прогрева органопластика [18].

Для инертного материала обшивки изменение температуры по глубине материала описывалось одномерным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2},$$

где  $y$  – координата, направленная вглубь материала обшивки;  $\alpha_2$  – коэффициенты температуропроводности органопластика.

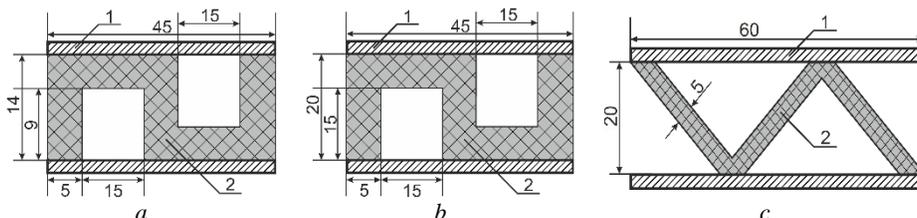
Численная реализация представленных нестационарных гиперболических уравнений (1) и (2) на идеях метода конечного объема [19, 20] с расчетом потоковых величин методом С.К. Годунова посредством точного решения газодинамической задачи распада произвольного разрыва описана в [21].

Граничными условиями, необходимыми для завершения математической постановки задачи, являются условия непротекания на глухом конце канала и свободного истечения через его открытый конец. Последние формулируются как задача расчета характеристик течения на границе области, где со стороны внешней среды заданы значения термодинамических параметров газа внешней среды – так называемая задача полураспада разрыва. Количество граничных условий определяется количеством характеристик (характеристических поверхностей в общем виде), «входящих» в область решения [22].

В случае дозвукового истечения газа из области решения используется одно граничное условие – равенства давления на открытом срезе канала давлению внешней среды. При этом скорость истечения и плотность газа в выходном сечении канала в зависимости от давления внешней среды определяются из соотношений, связывающих параметры газа в ударной волне или волне разрежения. При сверхзвуковом истечении, когда возмущения извне в расчетную область не распространяются и граничных условий не требуется, параметры «сносятся» (традиционный подход) на границу из расчетной области. При этом учитывается, что в процессе расчета может возникнуть ситуация, когда граница со временем попадает в область волны разрежения. В этом случае используются соответствующие специальные соотношения [22].

## Результаты расчетов

Вычисления и эксперимент проводились для модели пиротехнического устройства, включающего обшивку из органопластика 1 и пластины твердого топлива 2 (рис. 1). Пластины твердого топлива 2 образуют каналы, конфигурации которых приведены на рис. 1: *a* – прямоугольный канал 15 × 9 мм, *b* – прямоугольный канал 15 × 15 мм, *c* – треугольный канал высотой 20 мм. Длина каналов 2 и обшивки 1 одинакова для всех конфигураций модели пиротехнического устройства и составляет 50 мм.



**Рис. 1.** Геометрические конфигурации (поперечное сечение) и размеры элементов ГО, включающих обшивку из органопластика 1 и твердое топливо 2: *a* – прямоугольный канал 15 × 9 мм, *b* – прямоугольный канал 15 × 15 мм, *c* – треугольный канал высотой 20 мм  
**Fig. 1.** Geometric configurations (cross-sections) and dimensions of payload fairing elements including (1) fairing from organic plastics and (2) solid propellant: (a) rectangular channel 15 × 9 mm, (b) rectangular channel 15 × 15 mm, and (c) triangular channel 20 mm high

При вычислениях использовались следующие основные характеристики материалов и свойств продуктов сгорания:

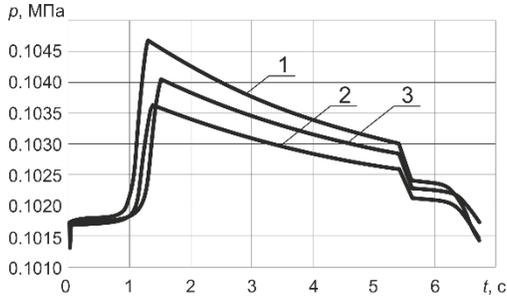
- плотность твердого топлива  $\rho_1 = 1\,820 \text{ кг/м}^3$ ;
- коэффициент теплопроводности твердого топлива  $\lambda_1 = 1.1 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ ;
- закон скорости горения топлива: константа  $u_0 = 0.9 \text{ мм/с}$ , показатель  $\nu = 0.22$ ;
- начальная температура  $T_0 = 300 \text{ К}$  при давлении  $p_0 = 0.1 \text{ МПа}$ ;
- температура горения твердого топлива – 2 700 К;
- $\gamma = 1.13$ ,  $R_1 = 268 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ ,  $c_{p1} = 2\,330 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$  – показатель адиабаты, газовая постоянная и изобарическая теплоемкость продуктов сгорания.

Материал обшивки характеризовался следующими параметрами:

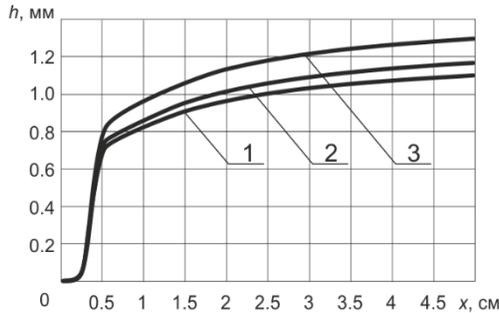
- плотность материала  $\rho_2 = 1\,250 \text{ кг/м}^3$ ;
- коэффициент теплопроводности материала  $\lambda_2 = 0.19 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ .

Начальная поверхность горения твердого топлива в момент времени  $t = 0$  определялась размером нагревательного элемента. В течение некоторого времени ( $\Delta t \approx 0.8 \text{ с}$ ) горячие продукты горения начального участка прогревают твердое топливо на достаточно ограниченной длине канала ( $\Delta x \approx 16 \text{ мм}$ ) и, охлаждаясь вследствие теплообмена с материалом обшивки и топливом, истекают во внешнюю среду. Когда температура на данном участке достигает заданного значения (так называемой температуры вспышки), поверхность воспламеняется, газоприход горячих продуктов горения интенсифицируется, и к горению ко времени  $t = 1.2 \text{ с}$  подключается вся рабочая поверхность твердого топлива. Давление в канале сравнительно резко возрастает до значения, определяемого соотношением поверхности твердого топлива и площади выходного сечения канала (рис. 2). Далее

начинается период относительно квазистационарного горения образующего стенки канала топлива, сопровождающийся соответствующим прогревом ограничивающей поток обшивки. Ко времени  $t \approx 5.4$  с глубина выгорания на начальном участке образующих канал пластин твердого топлива достигает их толщины (рис. 3), и начинается период спада давления.



**Рис. 2.** Зависимость изменения давления от времени: 1 – прямоугольный канал (рис. 1, a), 2 – прямоугольный канал (рис. 1, b), 3 – треугольный канал (рис. 1, c)  
**Fig. 2.** Time dependence of pressure: (1) rectangular channel (fig. 1a), (2) rectangular channel (fig. 1b), and (3) triangular channel (fig. 1c)

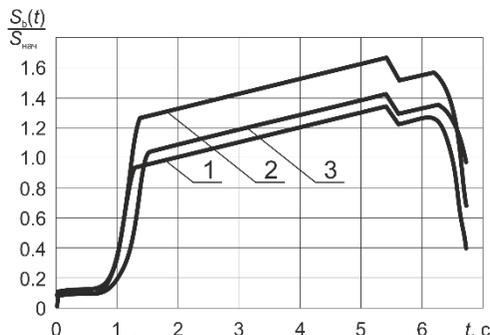


**Рис. 3.** Толщина  $h$  канал-образующих пластин твердого топлива на момент ( $t \approx 5.4$  с) начала их догорания: 1 – прямоугольный канал (рис. 1, a), 2 – прямоугольный канал (рис. 1, b), 3 – треугольный канал (рис. 1, c)  
**Fig. 3.** Thickness  $h$  of the channel-forming plates of solid propellant at the moment of their afterburning initiation ( $t \approx 5.4$  s): (1) rectangular channel (fig. 1a), (2) rectangular channel (fig. 1b), and (3) triangular channel (fig. 1c)

В начале режима спада имеется короткий участок типа скачка (см. рис. 2), обусловленный прогаром области первичного подключения поверхности канала к горению; далее некоторое время происходит частичный разгар остаточной поверхности (с некоторым локальным повышением давления). Полное сгорание твердого топлива завершается к моменту времени  $t \approx 6.8$  с.

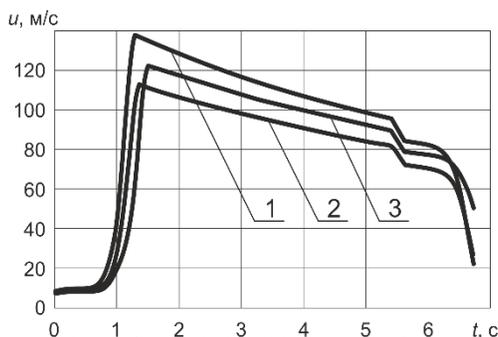
Достаточно равномерное снижение давления на квазистационарном участке (см. рис. 2) обусловлено тем, что при разгаре твердого топлива, образующего стенки канала, поверхность горения увеличивается приблизительно пропорционально глубине выгорания, а площадь выходного сечения канала – пропорционально квадрату этой величины. На рис. 4 приведена картина изменения поверхно-

сти горения относительно ее начального (в момент времени  $t = 0$  с) значения  $S_{нач}$ ; полученная зависимость хорошо коррелирует как с развитием кривой зависимости изменения давления от времени (см. рис. 2), так и с изменением скорости истечения продуктов сгорания через выходное сечение канала (см. рис. 5).



**Рис. 4.** Зависимость изменения относительной поверхности горения от времени: 1 – прямоугольный канал (рис. 1, а), 2 – прямоугольный канал (рис. 1, б), 3 – треугольный канал (рис. 1, с)

**Fig. 4.** Time dependence of relative burning surface: (1) rectangular channel (fig. 1a), (2) rectangular channel (fig. 1b), and (3) triangular channel (fig. 1c)

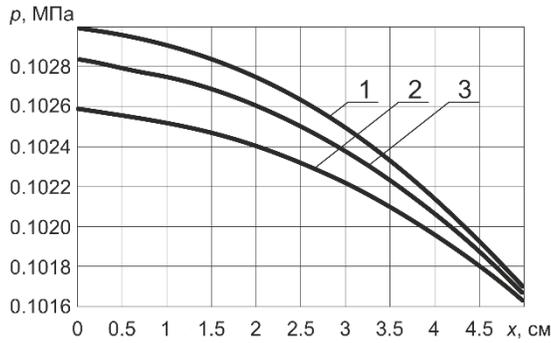


**Рис. 5.** Скорость истечения продуктов горения через выходное сечение канала: 1 – прямоугольный канал (рис. 1, а), 2 – прямоугольный канал (рис. 1, б), 3 – треугольный канал (рис. 1, с)

**Fig. 5.** Exhaust velocity in the outlet section of the channel: (1) rectangular channel (fig. 1a), (2) rectangular channel (fig. 1b), and (3) triangular channel (fig. 1c)

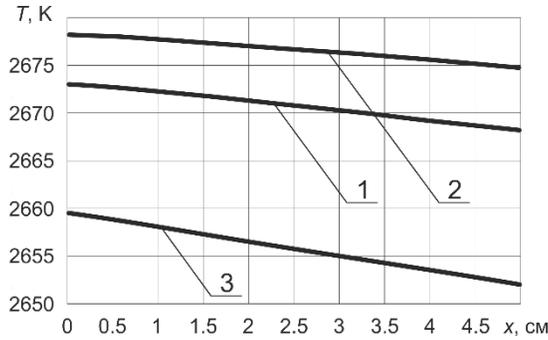
На рис. 6–8 представлены распределения газодинамических параметров потока продуктов сгорания на момент времени, предшествующий началу первого прогара твердого топлива боковой стенки канала ( $t \approx 5.4$  с). Качественно данные зависимости характерны для всего квазистационарного периода функционирования модели, когда наблюдаются достаточно равномерное снижение давления вдоль канала (см. рис. 6), снижение температуры газа за счет увеличения скорости потока (см. рис. 8) и теплообмена с обшивкой (см. рис. 7).

Увеличение скорости потока в направлении открытого конца канала повышает коэффициент конвективной теплоотдачи в материал обшивки, что, в свою очередь, обуславливает увеличение ее температуры в данном направлении (рис. 9).



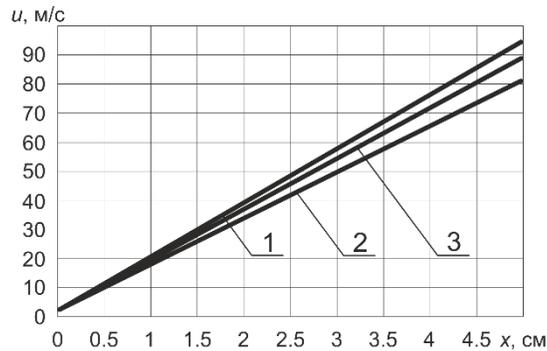
**Рис. 6.** Распределение давления по длине канала: 1 – прямоугольный канал (рис. 1, a), 2 – прямоугольный канал (рис. 1, b), 3 – треугольный канал (рис. 1, c)

**Fig. 6.** Pressure distribution along the channel length: (1) rectangular channel (fig. 1a), (2) rectangular channel (fig. 1b), and (3) triangular channel (fig. 1c)



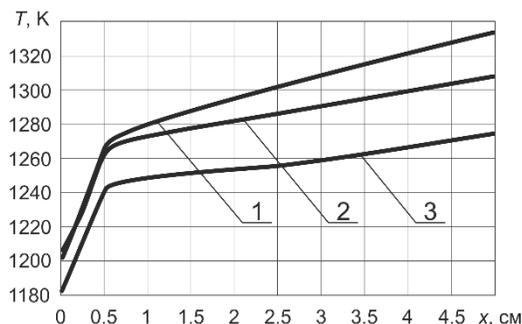
**Рис. 7.** Распределение температуры газа по длине канала: 1 – прямоугольный канал (рис. 1, a), 2 – прямоугольный канал (рис. 1, b), 3 – треугольный канал (рис. 1, c)

**Fig. 7.** Distribution of gas temperature along the channel length: (1) rectangular channel (fig. 1a), (2) rectangular channel (fig. 1b), and (3) triangular channel (fig. 1c)



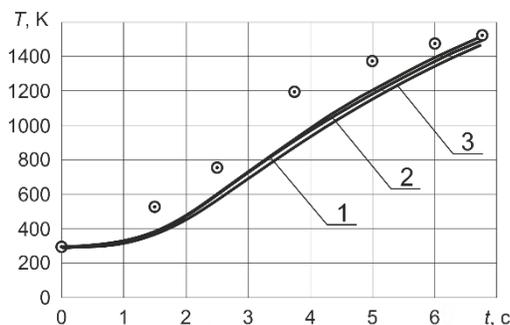
**Рис. 8.** Распределение скорости газа по длине канала: 1 – прямоугольный канал (рис. 1, a), 2 – прямоугольный канал (рис. 1, b), 3 – треугольный канал (рис. 1, c)

**Fig. 8.** Distribution of gas velocity along the channel length: (1) rectangular channel (fig. 1a), (2) rectangular channel (fig. 1b), and (3) triangular channel (fig. 1c)



**Рис. 9.** Распределение температуры внешней поверхности обшивки по длине канала: 1 – прямоугольный канал (рис. 1, а), 2 – прямоугольный канал (рис. 1, б), 3 – треугольный канал (рис. 1, с)

**Fig. 9.** Distribution of temperature of the external casing surface along the channel length: (1) rectangular channel (fig. 1a), (2) rectangular channel (fig. 1b), and (3) triangular channel (fig. 1c)



**Рис. 10.** Температура наружной поверхности обшивки к моменту завершения истечения продуктов горения: 1 – прямоугольный канал (рис. 1, а), 2 – прямоугольный канал (рис. 1, б), 3 – треугольный канал (рис. 1, с);  $\odot$  – экспериментальные данные

**Fig. 10.** External temperature of the casing at the end of combustor discharge: (1) rectangular channel (fig. 1a), (2) rectangular channel (fig. 1b), and (3) triangular channel (fig. 1c);  $\odot$  – experimental data

На рис. 10 приведены расчетные (сплошные линии) и экспериментальная (точки) [6, 7] зависимости температуры наружной поверхности обшивки к моменту завершения истечения продуктов горения из канала ( $t \approx 6.8$  с). Наибольшее отличие между расчетными и экспериментальными данными ( $\sim 25\%$ ) наблюдается на 3–4-й секундах работы модели пиротехнического устройства, что связано, по-видимому, с недостаточно точным учетом в математической модели параметров внешнего теплообмена обшивки с окружающей средой.

### Заключение

Таким образом, в работе представлена математическая модель функционирования пиротехнического устройства головного обтекателя ракеты-носителя, предназначенного для снижения угрозы инфраструктуре и населению в районе падения его остатков. Модель учитывает основные особенности развития внутрибалли-

стических процессов в каналах устройства (постепенность воспламенения твердого топлива, теплообмен горячих продуктов сгорания с элементами конструкции обтекателя и т.д.).

Для трех рассмотренных конфигураций каналов получены расчетные зависимости пространственно-временных распределений параметров реализующихся течений, позволяющие провести оценки достижения целевой функции пиротехнического устройства – дефрагментации и сжигания элементов головного обтекателя.

Сравнение результатов вычислений с данными выполненными экспериментами для модельного пиротехнического устройства показали их удовлетворительное соответствие.

### Список источников

1. Средства выведения // Научно-производственное объединение им. С.А. Лавочкина. URL: <https://www.laspace.ru/ru/activities/products/sredstva-vyvedeniya/>
2. Гардымов Г.П., Мешков Е.В., Пчелинцев А.В., Лашманов Г.П., Афанасьев Ю.А. Композиционные материалы в ракетно-космическом аппаратостроении. СПб. : СпецЛит, 1999. 271 с.
3. Лемперт Д.Б., Трушляков В.И., Зарко В.Е. Оценка массы пиротехнической смеси для сжигания головного обтекателя космической ракеты // Физика горения и взрыва. 2015. Т. 51, № 5. С. 121–125.
4. Трушляков В.И., Жариков К.И., Лемперт Д.Б., Яновский Л.С. Исследование полимерных материалов для сжигания сбрасываемых частей летательных аппаратов // Журнал прикладной химии. 2021. Т. 94, № 1. С. 98–102.
5. Trushlyakov V.I., Panichkin A.V. Methodology for the design of combustible structures of separating launch vehicle parts // Journal of Spacecraft and Rockets. 2021. V. 58 (4). P. 1200–1206.
6. Иордан Ю.В. Экспериментальные исследования термодинамических процессов горения сжигаемых демонстраторов // Динамика систем, механизмов и машин. 2021. Т. 9, № 2. С. 97–103.
7. Архипов В.А., Глазунов А.А., Золоторёв Н.Н., Козлов Е.А., Коротких А.Г., Кузнецов В.Т., Трушляков В.И. Анализ возможности сжигания элементов головного обтекателя ракеты-носителя // Физика горения и взрыва. 2023. Т. 59, № 5. (в печати).
8. Li Z., Wang N., Shi B., Li S., Yang R. Effects of particle size on two-phase flow loss in aluminized solid rocket motors // Acta Astronautica. 2019. V. 159. P. 33–40. doi: 10.1016/j.actaastro.2019.03.022
9. Zhukov I.S., Bondarchuk S.S., Zhukov A.S., Borisov B.V. Verification of model of calculation of intra-chamber parameters in hybrid solid-propellant rocket engines // MATEC Web of Conferences. 2016. V. 72. Art. 01135. P. 1–4.
10. Губертюв А.М., Миронов В.В., Борисов Д.М. и др. Газодинамические и теплофизические процессы в ракетных двигателях твердого топлива / под ред. А.С. Коротеева. М. : Машиностроение, 2004. 512 с.
11. Bondarchuk S.S. Mathematical simulation of a large size rocket motors // Tomsk State Pedagogical University Bulletin. 2002. № 2 (30). P. 23–32.
12. Borisov B.V. Features applications of the approaches when constructing efficient algorithms during the modelling of some intracanal flows // EPJ Web of Conferences. 2016. V. 110. Art. 01012. P. 1–4. doi: 10.1051/epjconf/201611001012
13. Архипов В.А., Золоторёв Н.Н., Бондарчук С.С., Жуков А.С. Анализ рабочих процессов в гибридном ракетном двигателе // Материалы VI Всероссийской научно-технической

- конференции «Фундаментальные основы баллистического проектирования», Санкт-Петербург, 2018. СПб. : Балт. гос. техн. ун-т, 2018. С. 70–73.
14. Шишков А.А., Панин С.Д., Румянцев Б.В. Рабочие процессы в ракетных двигателях твердого топлива : справочник. М. : Машиностроение, 1988. 240 с.
  15. Kraussold H. Heat transfer to liquids in tubes in the case of turbulent flow // *Forschung*. 1933. V. 39 (1).
  16. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности : учеб. пособие для вузов. М. : Высш. школа, 1978. 328 с.
  17. Goodman T.R. Integral Methods for nonlinear heat transfer // *Advances in Heat Transfer* / T. Irvine, J. Hartnett (eds). New-York : Academic Press, 1964. V. 1. P. 51–122.
  18. Бондарчук С.С., Жуков А.С. Программа для ЭВМ № 2017610017. Программа расчета параметров функционирования аблирующей теплозащиты. 2017.
  19. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М. : Мир, 1980. 616 с.
  20. Rizzy F.W., Inoue M. Time-split finite-volume method for three-dimensional blunt-body flows // *AIAA Journal*. 1973. V. 11 (11). P. 1478–1485.
  21. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики / под ред. С.К. Годунова. М. : Наука, 1976. 400 с.
  22. Алалыкин Г.Б., Годунов С.К., Киреев И.Л., Плинер Л.А. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках. М. : Наука, 1978. 112 с.

### References

1. *Launch Vehicles*. Scientific and Production Association named after. S.A. Lavochkin. URL: <https://www.laspace.ru/company/products/launch-vehicles/>
2. Gardymov G.P., Meshkov E.V., Pchelintsev A.V., Lashmanov G.P., Afanas'ev Yu.A. (1999) *Kompozitsionnye materialy v raketno-kosmicheskom apparatostroenii* [Composite materials /in space rocket engineering]. Saint Petersburg: SpetsLit.
3. Lempert D.B., Trushlyakov V.I., Zarko V.E. (2015) Estimating the mass of a pyrotechnic mixture for burning the launch vehicle nose fairing. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 51(5). pp. 619–622. doi: 10.1134/S0010508215050147
4. Trushlyakov V.I., Zharikov K.I., Lempert D.B., Yanovskii L.S. (2021) Polymer materials for combustion of discarded parts of aerospace vehicles. *Russian Journal of Applied Chemistry*. 94(1). pp. 94–98. doi: 10.1134/S1070427221010134
5. Trushlyakov V.I., Panichkin A.V. (2021) Methodology for the design of combustible structures of separating launch vehicle parts. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 58(4). pp. 1200–1206. doi: 10.2514/1.A34920
6. Iordan Yu. V. (2021) Experimental studies of thermodynamic combustion processes of combustible demonstrators. *Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines*. 9(2). pp. 97–103. doi: 10.25206/2310-9793-9-2-97-103
7. Arkhipov V.A., Glazunov A.A., Zolotarev N.N., Kozlov E.A., Korotkikh A.G., Kuznetsov V.T., Trushlyakov V.I. (2023) Analysis of the possibility of burning the elements of the head fairing of the launch vehicle. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 59(5). (in print)
8. Li Z., Wang N., Shi B., Li S., Yang R. (2019) Effects of particle size on two-phase flow loss in aluminized solid rocket motors. *Acta Astronautica*. 159. pp. 33–40. doi: 10.1016/j.actaastro.2019.03.022
9. Zhukov I.S., Bondarchuk S.S., Zhukov A.S., Borisov B.V. (2016) Verification of model of calculation of intra-chamber parameters in hybrid solid-propellant rocket engines. *MATEC Web of Conferences*. 72. Article 01135. pp. 1–4. doi: 10.1051/mateconf/2016727201135
10. Gubertov A.M., Mironov V.V., Borisov D.M. (2004) *Gazodinamicheskie i teplofizicheskie protsessy v raketnykh dvigatelyakh tverdogo topliva* [Gasodynamic and thermophysical processes in solid rocket propulsion]. Moscow: Mashinostroenie.

11. Bondarchuk S.S. (2002) Mathematical simulation of a large size rocket motors. *Tomsk State Pedagogical University Bulletin*. 2(30). pp. 23–32.
12. Borisov B.V. (2016) Features applications of the approaches when constructing efficient algorithms during the modelling of some intracanal flows. *EPJ Web of Conferences*. 110. Article 01012. pp. 1–4. doi: 10.1051/epjconf/201611001012
13. Arkhipov V.A., Zolotarev N.N., Bondarchuk S.S., Zhukov A.S. (2018) Analiz rabochikh protsessov v gibridnom raketnom dvigatele [Analysis of workflows in a hybrid rocket engine]. *VI All-Russian Scientific and Technical Conference «Fundamentals of Ballistic Design»*, Saint Petersburg. pp. 70–73.
14. Shishkov A.A., Panin S.D., Rummyantsev B.V. (1988) *Rabochie protsessy v raketnykh dvigatelyakh tverdogo topliva: Spravochnik* [Working processes in solid-propellant rocket engines. Handbook]. Moscow: Mashinostroenie.
15. Kraussold H. (1933) Heat transfer to liquids in tubes in the case of turbulent flow. *Forschung*. 39(1).
16. Belyaev N.M., Ryadno A.A. (1978) *Metody nestatsionarnoy teploprovodnosti: Uchebnoe posobie dlya vuzov* [Methods of transient thermal conductivity: a textbook for universities]. Moscow: Vysshaya shkola.
17. Goodman T.R. (1964) Integral methods for nonlinear heat transfer. *Advances in Heat Transfer*. 1. pp. 51–122.
18. Bondarchuk S.S., Zhukov A.S. (2017) *Programma rascheta parametrov abliuyushchey teplozashchity* [A program for calculating ablating heat protection operation parameters]. Computer Program No. 2017610017.
19. Roache P.J. (1980) *Vychislitel'naya gidrodinamika* [Computational fluid dynamics]. Moscow: Mir.
20. Rizzy F.W., Inouye M. (1973) Time-split finite-volume method for three-dimensional blunt-body flows. *AIAA Journal*. 11(11). pp. 1478–1485. doi: 10.2514/3.50614
21. Godunov S.K., Zabrodin A., Ivanov M.I., Krayko A.N., Prokopov G.P. (1976) *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki* [Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics]. Moscow: Nauka.
22. Alalykin G.B., Godunov S.K., Kireeva I.L., Pliner L.A. (1970) *Reshenie odnomernykh zadach gazovoy dinamiki v podvizhnykh setkakh* [Solving of one-dimension problems of gas dynamics in moving grids]. Moscow: Nauka.

**Сведения об авторах:**

**Архипов Владимир Афанасьевич** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом газовой динамики и физики взрыва Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: leva@niipmm.tsu.ru

**Бондарчук Сергей Сергеевич** – доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник лаборатории высокоэнергетических и специальных материалов Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: isbi@mail.ru

**Бондарчук Иван Сергеевич** – инженер лаборатории проблем опасных космических объектов Национального исследовательского Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: ivanich\_91@mail.ru

**Золоторёв Николай Николаевич** – кандидат физико-математических наук, инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: nikzolotarev@mail.ru

**Козлов Евгений Александрович** – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: kozlovea@niipmm.tsu.ru

**Орлова Мария Павловна** – аспирант физико-технического факультета Национального исследовательского Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: maria-orlova-93@mail.ru

***Information about the authors:***

**Arkhipov Vladimir A.** (Doctor of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: leva@niipmm.tsu.ru

**Bondarchuk Sergey S.** (Doctor of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: isbi@mail.ru

**Bondarchuk Ivan S.** (National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ivanich\_91@mail.ru

**Zolotorev Nikolay N.** (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nikzolotorev@mail.ru

**Kozlov Evgeniy A.** (Doctor of Technical Sciences, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kozlovea@niipmm.tsu.ru

**Orlova Mariya P.** (National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: maria-orlova-93@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 30.01.2023; принята к публикации 10.07.2023*

*The article was submitted 30.01.2023; accepted for publication 10.07.2023*

Научная статья

УДК 531-14, 531.113.8

doi: 10.17223/19988621/84/6

## О траекториях тел в неинерциальных системах отсчета

Софья Борисовна Богданова<sup>1</sup>, Сергей Октябрьнович Гладков<sup>2</sup>

<sup>1, 2</sup> *Московский авиационный институт (МАИ), Москва, Россия*

<sup>1</sup> *sonjaf@list.ru*

<sup>2</sup> *sgrad51@mail.ru*

**Аннотация.** С помощью аналитически полученных в подвижном базисе уравнений движения найдены различные траектории тел в неинерциальных системах отсчета (НСО) при условии, что они движутся по заданным траекториям. Решение найденной системы уравнений проанализировано в одном конкретном случае, когда роль действующей силы принадлежит силе тяжести. С помощью численных методов найдены решения уравнений, приведены их графические иллюстрации в нескольких частных случаях, когда траектории НСО заданы в виде прямой, окружности и брахистохроны.

**Ключевые слова:** подвижный базис, абсолютное и относительное движение, неинерциальная система отсчета

**Для цитирования:** Богданова С.Б., Гладков С.О. О траекториях тел в неинерциальных системах отсчета // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 68–80. doi: 10.17223/19988621/84/6

Original article

## On the trajectories of bodies in non-inertial reference frames

Sof'ya B. Bogdanova<sup>1</sup>, Sergey O. Gladkov<sup>2</sup>

<sup>1, 2</sup> *Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation*

<sup>1</sup> *sonjaf@list.ru*

<sup>2</sup> *sgrad51@mail.ru*

**Abstract.** This paper considers a trajectory of the body moving under the influence of the force  $\mathbf{F}$  in a non-inertial reference frame (NRF), which is "tied" to a given curve  $y = y(x)$  and is described by a natural movable basis  $\boldsymbol{\tau}\text{-}\mathbf{n}$ . For this NRF, a system of linear differential equations is obtained to simulate various types of trajectories resulting from the action of certain forces. The common Cartesian coordinate system is chosen as a fixed basis  $\mathbf{i}\text{-}\mathbf{j}$ . Several examples of motion along the given trajectories  $y = y(x)$  are considered with gravity as an acting force  $\mathbf{F}$ . For these specific cases, the analytic expressions for absolute (in the system  $\mathbf{i}\text{-}\mathbf{j}$ ), relative (in the system  $\boldsymbol{\tau}\text{-}\mathbf{n}$ ), and translational accelerations are given. The corresponding trajectories of motion under free fall conditions in terms of

NRF are constructed. The following trajectories  $y = y(x)$  are studied: uneven motion along a straight line, a brachistochrone, and a circle. Using computer modeling tools, the results are presented as plots showing the qualitative difference between the trajectories of the same body in the inertial and non-inertial frames of reference. The considered limiting cases of motion confirm the validity of the obtained general system of equations in the NRF.

**Keywords:** movable basis, absolute and relative motion, non-inertial reference frame

**For citation:** Bogdanova, S.B., Gladkov, S.O. (2023) On the trajectories of bodies in non-inertial reference frames. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 68–80. doi: 10.17223/19988621/84/6

## Введение

Задача, о которой пойдет речь, относится к классу задач из области механики относительного движения. Когда мы говорим о подвижном базисе (см.: [1–10]), то для неподвижного наблюдателя траектория движения определяется концом радиус-вектора, проведенного из начала неподвижной системы координат в точку наблюдения. При этом траектория движения должна диктоваться конкретно действующей силой, роль которой определяется только постановкой задачи.

Во избежание в дальнейшем изложении путаницы с сокращениями заметим, что аббревиатуры НСК (неинерциальная система координат) и НСО (неинерциальная система отсчета) в нашем понимании абсолютно идентичны.

Цель настоящей работы – определение формы тех траекторий, в которые будут деформироваться траектории в неподвижных системах координат при переходе к НСО. Подчеркнем, что ни в одной из известных нам публикаций соответствующего решения мы не обнаружили, и в силу практической значимости этой задачи мы остановимся на ее решении по возможности наиболее подробно.

## Основные уравнения

Предположим, что имеется некоторая заданная двумерная кривая, определяемая уравнением  $y_0 = y_0(x_0)$ . Пусть на этой кривой в произвольной ее точке выбран подвижный базис  $\mathbf{t}-\mathbf{n}$ , где  $\mathbf{t}$  – единичный вектор касательной, а  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к этой кривой (рис. 1). Отметим, что метод подвижного базиса был неоднократно апробирован при решении различного рода задач, ряд которых подробно описан, например, в публикациях [11–13].

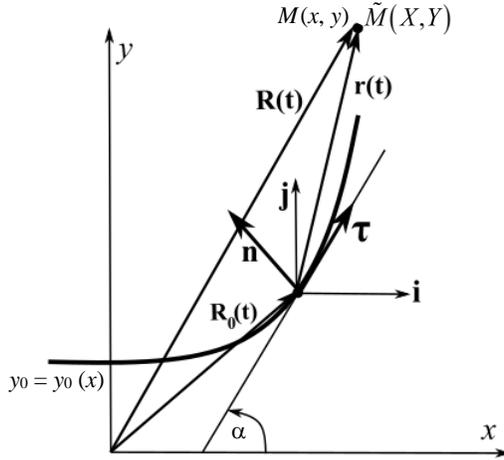
Следуя рис. 1, зададим на плоскости  $x_0y_0$  кривую

$$\mathbf{R}_0(t) = \mathbf{i}x_0(t) + \mathbf{j}y_0(t), \quad (1)$$

по которой может перемещаться мгновенный подвижный базис НСК, характеризующийся ортами  $\mathbf{t}-\mathbf{n}$ , со скоростью  $v_0 = |\dot{\mathbf{R}}_0(t)| = \left| \frac{d\mathbf{R}_0(t)}{dt} \right|$ , где  $t$  – абсолютный момент времени в нерелятивистском приближении ( $v_0 \ll c$ ,  $c$  – скорость света в вакууме). Везде далее для сокращения записи явная зависимость всех функций

от времени  $t$  будет опускаться. При этом кривизна кривой известна и задается уравнением [14, 15]

$$K = \frac{|\dot{x}_0\ddot{y}_0 - \dot{y}_0\ddot{x}_0|}{(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2)$$



**Рис. 1.** Схематическое изображение постановки задачи. Здесь кривая  $y_0 = y_0(x)$  считается годографом вектор-функции  $\mathbf{R}_0(t) = \mathbf{i}x_0(t) + \mathbf{j}y_0(t)$

**Fig. 1.** Schematic representation of the problem formulation. Curve  $y_0 = y_0(x)$  is a godograph of a vector-function  $\mathbf{R}_0(t) = \mathbf{i}x_0(t) + \mathbf{j}y_0(t)$

Поскольку единичный вектор касательной в соответствии с рис. 1 может быть разложен по базису  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  согласно соотношению  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha$ , где  $\alpha$  – угол между касательной к кривой и положительным направлением оси  $ox$ , то, пользуясь известной формулой дифференциальной геометрии  $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = K\mathbf{n}$  [15], где  $ds$  – дифференциал длины дуги кривой, для единичного вектора нормали найдем, что  $\mathbf{n} = -\mathbf{i} \sin \alpha + \mathbf{j} \cos \alpha$ . Следовательно, для обратного преобразования имеем

$$\begin{cases} \mathbf{i} = \boldsymbol{\tau} \cos \alpha - \mathbf{n} \sin \alpha, \\ \mathbf{j} = \boldsymbol{\tau} \sin \alpha + \mathbf{n} \cos \alpha. \end{cases} \quad (3)$$

Будем считать, что точечное тело массы  $m$  находится в произвольной точке  $\tilde{M}(X, Y)$  (см. рис.1), где координаты  $(X, Y)$  относятся к НСО, а наблюдатель движется вместе с ней и находится в ее начале.

Точки  $M(x, y)$  и  $\tilde{M}(X, Y)$  по своему смыслу совпадают, но первая относится к инерциальной системе координат, а вторая – к НСК.

Как следует из этого рисунка, для неподвижной СК, характеризуемой ортами  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ , радиус-вектор можно представить в виде суммы  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{r} = \boldsymbol{\tau}X + \mathbf{n}Y$ . После дифференцирования вектора  $\mathbf{R}$  имеем

$$\mathbf{v}_{abs} = \dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_0 + \dot{\mathbf{r}}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{v}_{abs}$  – абсолютная скорость движения тела относительно ИСО  $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ .

Согласно (1) имеем  $\dot{\mathbf{R}}_0 = \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} = v_0 \boldsymbol{\tau}$ , где  $v_0$  – скорость движения подвижного базиса  $\boldsymbol{\tau}-\mathbf{n}$  в ИСК по заданной кривой  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{i}x_0 + \mathbf{j}y_0$ . А так как  $\mathbf{r} = \boldsymbol{\tau}X + \mathbf{n}Y$ , то производная от него

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\tau}X + \mathbf{n}Y) = \boldsymbol{\tau}\dot{X} + \mathbf{n}\dot{Y} + \dot{\boldsymbol{\tau}}X + \dot{\mathbf{n}}Y. \quad (5)$$

Первые два слагаемых в (5) вполне понятны, а для остальных с учетом формулы  $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \frac{1}{v_0} = K\mathbf{n}$ , имеем

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = v_0 K\mathbf{n}, \\ \frac{d\mathbf{n}}{dt} = -v_0 K\boldsymbol{\tau}. \end{cases} \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), находим

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\tau}\dot{X} + \mathbf{n}\dot{Y} + v_0(\mathbf{n}X - \boldsymbol{\tau}Y) = \boldsymbol{\tau}(\dot{X} - v_0 KY) + \mathbf{n}(\dot{Y} + v_0 KX). \quad (7)$$

Поэтому, согласно формуле (5), с учетом (7) абсолютная скорость материальной точки будет

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{abs} &= \boldsymbol{\tau}\dot{X} + \mathbf{n}\dot{Y} + [\boldsymbol{\tau}(1 - KY) + \mathbf{n}KX]v_0 = \\ &= \boldsymbol{\tau}[\dot{X} + (1 - KY)v_0] + \mathbf{n}[\dot{Y} + KXv_0], \end{aligned} \quad (8)$$

где первые два слагаемых описывают относительную скорость движения ( $\mathbf{v}_{rel} = \boldsymbol{\tau}\dot{X} + \mathbf{n}\dot{Y}$ ), а вектор  $[\boldsymbol{\tau}(1 - KY) + \mathbf{n}KX]v_0$  представляет собой линейную связь скорости тела в системе НСК ( $\boldsymbol{\tau}-\mathbf{n}$ ), движущегося вдоль кривой  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{i}x_0 + \mathbf{j}y_0$ , со скоростью  $v_0 = |\dot{\mathbf{R}}_0|$ .

Дифференцирование формулы (8) дает  $\ddot{\mathbf{R}} = \ddot{\mathbf{R}}_0 + \ddot{\mathbf{r}}$ , где  $\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{a}_{abs}$  – абсолютное ускорение в ИСО  $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ . Первое слагаемое в правой части можно представить как

$$\ddot{\mathbf{R}}_0 = \frac{d}{dt}(v_0 \boldsymbol{\tau}) = \dot{v}_0 \boldsymbol{\tau} + v_0^2 K\mathbf{n}, \quad (9)$$

где  $\dot{v}_0$  – тангенциальное ускорение, а  $v_0^2 K$  – центростремительное; второе слагаемое с учетом (8) и (6) дает

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{X}\boldsymbol{\tau} + \ddot{Y}\mathbf{n} + \left\{ -\boldsymbol{\tau} \left( 2v_0 K\dot{Y} + \frac{d(v_0 K)}{dt} Y + v_0^2 K^2 X \right) + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{n} \left( 2v_0 K\dot{X} + \frac{d(v_0 K)}{dt} X - v_0^2 K^2 Y \right) \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где сумма  $\ddot{X}\boldsymbol{\tau} + \ddot{Y}\mathbf{n}$  описывает относительное ускорение в НСК  $\boldsymbol{\tau}-\mathbf{n}$ . Поэтому с учетом (9) и (10) имеем

$$\mathbf{a}_{abs} = \mathbf{a}_{rel} + \boldsymbol{\tau} \left( \dot{v}_0 - 2v_0 K \dot{Y} + \frac{d(v_0 K)}{dt} Y + v_0^2 K^2 X \right) + \mathbf{n} \left( v_0^2 K + 2v_0 K \dot{X} + \frac{d(v_0 K)}{dt} X - v_0^2 K^2 Y \right). \quad (11)$$

Воспользовавшись вторым законом Ньютона  $\mathbf{a}_{abs} = \frac{\mathbf{F}}{m}$ , из общего выражения (11) получаем

$$\mathbf{a}_{rel} = \frac{\mathbf{F}}{m} - \mathbf{a}_{mov}, \quad (12)$$

где относительное ускорение  $\mathbf{a}_{rel} = \ddot{X}\boldsymbol{\tau} + \ddot{Y}\mathbf{n}$ , а переносное

$$\mathbf{a}_{mov} = \boldsymbol{\tau} \left( \dot{v}_0 - 2v_0 K \dot{Y} + \frac{d(v_0 K)}{dt} Y + v_0^2 K^2 X \right) + \mathbf{n} \left( v_0^2 K + 2v_0 K \dot{X} + \frac{d(v_0 K)}{dt} X - v_0^2 K^2 Y \right). \quad (13)$$

Если теперь подставить формулы (12) и (13) в динамическое уравнение Ньютона и спроектировать его на орты  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{n}$ , то мы придем к следующей системе дифференциальных уравнений в НСК:

$$\begin{cases} \ddot{X} = \frac{F_\tau}{m} - \dot{v}_0 + 2v_0 K \dot{Y} - \frac{d(v_0 K)}{dt} Y - v_0^2 K^2 X, \\ \ddot{Y} = \frac{F_n}{m} - v_0^2 K - 2v_0 K \dot{X} - \frac{d(v_0 K)}{dt} X + v_0^2 K^2 Y. \end{cases} \quad (14)$$

Уравнения (14) позволяют нам ответить на вопрос, как будет выглядеть траектория движения в подвижном базисе  $\boldsymbol{\tau}$ - $\mathbf{n}$ , если траектория движения наблюдателя, находящегося в центре базиса НСК, нам известна.

### Анализ уравнений движения (14) в некоторых частных случаях

Будем предполагать, что наше тело движется под воздействием только силы тяжести  $\mathbf{F} = m\mathbf{g} = -mg\mathbf{j}$  (рис. 2). В качестве первого примера траекторию  $\mathbf{R}_0(t)$  зададим в виде прямой, по которой инерциальная система координат движется с постоянной скоростью. Поскольку ее кривизна  $K = 0$ , а скорость движения  $v = const$ , то, как и должно быть, переносное ускорение исчезает ( $\mathbf{a}_{mov} = 0$ ), и формула (12) сводится к очевидной:  $\mathbf{a}_{rel} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \mathbf{a}_{abs}$ .

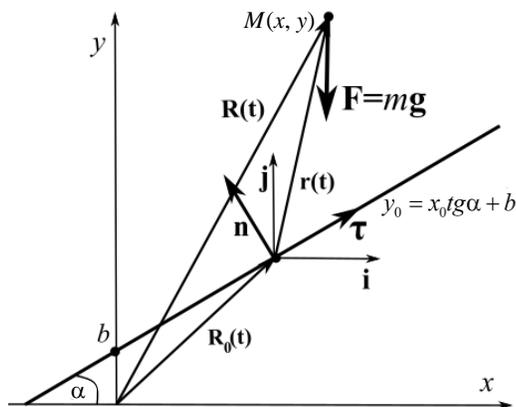
Для силы тяжести  $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$  ее проекции на базис НСК  $\boldsymbol{\tau}$ - $\mathbf{n}$  таковы:

$$F_\tau = -mg \sin \alpha, \quad F_n = -mg \cos \alpha.$$

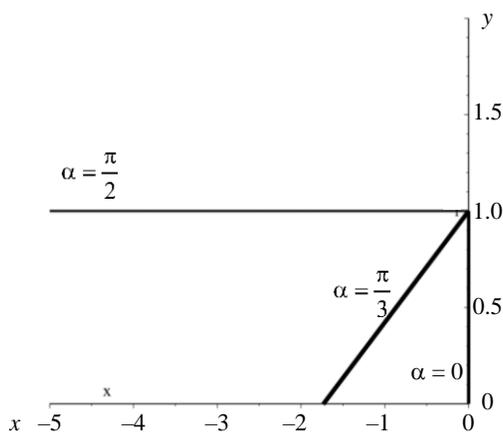
Поэтому система (14) сильно упрощается, и в результате имеем:

$$\begin{cases} \ddot{X} = -g \sin \alpha, \\ \ddot{Y} = -g \cos \alpha. \end{cases} \quad (15)$$

Решение данной системы уравнений для различных значений угла  $\alpha$  показано на рис. 3.



**Рис. 2.** Подвижный базис  $\tau$ - $n$  движется по прямой  $y_0 = x_0 tg \alpha + b$   
**Fig. 2.** The movable basis  $\tau$ - $n$  moves along a straight line  $y_0 = x_0 tg \alpha + b$



**Рис. 3.** Траектории движения тела в НСК (выделенные линии) при начальных условиях:  
 $X(0) = 0, Y(0) = 1, X'(0) = 0, Y'(0) = 0$

**Fig. 3.** Trajectories of the body in a non-inertial frame of reference (heavy lines)  
 at initial conditions:  $X(0) = 0, Y(0) = 1, X'(0) = 0, Y'(0) = 0$

Результат построения подтверждает корректность уравнений (14). Действительно:

I. Если прямая  $y_0 = y_0(x_0)$  горизонтальна,  $\alpha = 0$ , то из вершины движущейся НСК  $\tau$ - $n$  падение тела видно естественным образом, т.е. по вертикальной прямой.

II. Если прямая  $y_0 = y_0(x_0)$  вертикальна, то есть угол  $\alpha$  прямой ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ), то НСК  $\tau$ - $n$  движется параллельно падающему телу, и его траектория падения также воспринимается как параллельная прямая.

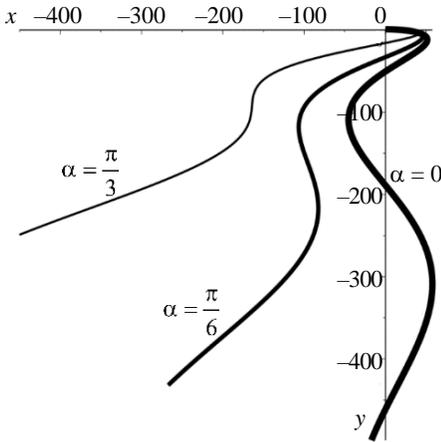
III. Если прямая  $y_0 = y_0(x_0)$  имеет угол наклона, скажем,  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ , то и падение

тела в НСК  $\tau$ - $n$  видится по наклонной прямой.

Как мы только что убедились, траектории тела в НСК  $\tau$ - $n$  при ее равномерном движении по заданной прямой не зависят от величины скорости этого движения, поскольку при  $v = const$  НСК, по сути, является инерционной. Рассмотрим теперь такой случай. Пусть теперь  $v \neq const$ , но движение происходит по прямой. Тогда снова  $K = 0$ , а из (12) и (13) следует, что  $\mathbf{a}_{mov} = \dot{v} \boldsymbol{\tau}$ , и уравнение движения в НСК  $\tau$ - $n$  становится таким:  $\mathbf{a}_{rel} = \mathbf{F}m^{-1} - \dot{v} \boldsymbol{\tau}$ . С учетом приведенных выше проекций вектора  $\mathbf{F} = mg$  на оси  $\tau$ - $n$  (14) запишутся в виде:

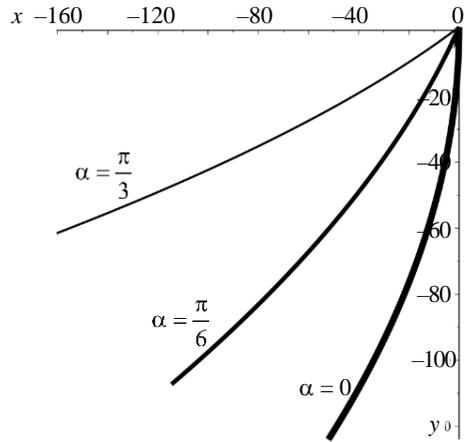
$$\begin{cases} \ddot{X} = -g \sin \alpha - \dot{v}, \\ \ddot{Y} = -g \cos \alpha. \end{cases} \quad (16)$$

Решения уравнений (16) для двух законов изменения скорости  $v(t)$  проиллюстрированы рис. 4, 5.



**Рис. 4.** Изменение скорости подчиняется закону  $v = -50 \cos t$ , начальные условия  $X(0) = 0, Y(0) = 1, X'(0) = 0, Y'(0) = 0$

**Fig. 4.** Velocity variation according to the law  $v = -50 \cos t$  at initial conditions  $X(0) = 0, Y(0) = 1, X'(0) = 0, Y'(0) = 0$



**Рис. 5.** Изменение скорости подчиняется закону  $v = t^3 / 3$ . Начальные условия  $X(0) = 0, Y(0) = 1, X'(0) = 0, Y'(0) = 0$

**Fig. 5.** Velocity variation according to the law  $v = t^3 / 3$  at initial conditions  $X(0) = 0, Y(0) = 1, X'(0) = 0, Y'(0) = 0$

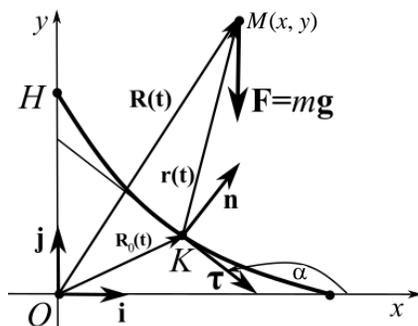
Рассмотрим теперь случай, когда НСК  $\tau$ - $n$  движется по брахистохроне (рис. 6), а сам мгновенный базис  $\tau$ - $n$  находится в центре масс движущегося по линии наибоыстрейшего спуска тела.

Поскольку  $\mathbf{F} = -mg\mathbf{j}$ , то, согласно преобразованиям (3), для силы тяжести имеем:  $\mathbf{F} = -mg(\sin \alpha \cdot \boldsymbol{\tau} + \cos \alpha \cdot \mathbf{n})$ . При этом параметрическое уравнение брахистохроны можно записать следующим образом (см.: [16]):

$$\begin{cases} x_0(\alpha) = \frac{H}{2}(2\alpha - \pi + \sin 2\alpha), \\ y_0(\alpha) = \frac{H}{2}(1 - \cos 2\alpha), \end{cases} \quad (17)$$

где  $0,5\pi \leq \alpha \leq \pi$ , а зависимость угла  $\alpha$  от времени в случае движения по брахистохроне подчиняется линейному закону [7–9,12]

$$\alpha(t) = t\sqrt{0,5gH^{-1}} + 0,5\pi. \quad (18)$$



**Рис. 6.** НСК  $\tau$ - $n$  движется по брахистохроне, центр которой находится в центре масс тела  
**Fig. 6.** The non-inertial frame of reference  $\tau$ - $n$  moves along a brachistochrone whose center is located in the center of the body mass

С учетом сказанного параметрическое решение (17) можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} x_0(t) = t\sqrt{0,5Hg^{-1}} - 0,5H \sin\left(t\sqrt{0,5Hg^{-1}}\right), \\ y_0(t) = -0,5H \left(1 - \cos\left(t\sqrt{0,5Hg^{-1}}\right)\right), \end{cases} \quad (19)$$

где время движения  $t$  подчиняется неравенству

$$0 \leq t \leq \pi\sqrt{0,5Hg^{-1}}. \quad (20)$$

Согласно (19) скорость НСК по брахистохроне определяется в результате зависимости:  $v = \sqrt{2gH} \sin\left(0,5t\sqrt{2gH^{-1}}\right)$ , а кривизна брахистохроны согласно (2)

и (19) будет подчиняться закону  $K(t) = \frac{1}{2H \sin\left(0,5t\sqrt{2gH^{-1}}\right)}$ . Факторизация этих

выражений дает

$$vK = \sqrt{0,5gH^{-1}} = const. \quad (21)$$

Соотношение (21), справедливое только для брахистохроны, оно сильно упрощает уравнения (14). В результате

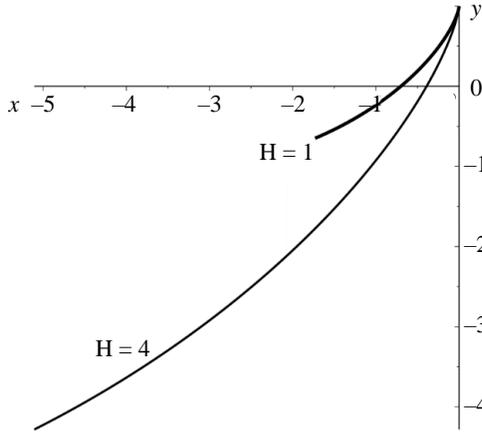
$$\begin{cases} \ddot{X} = \sqrt{2gH^{-1}}\dot{Y} - 0,5gH^{-1}X, \\ \ddot{Y} = -2g \sin\left(0,5t\sqrt{2gH^{-1}}\right) - \sqrt{2gH^{-1}}\dot{X} - 0,5gH^{-1}Y. \end{cases} \quad (22)$$

Вводя здесь безразмерное время  $\tau = 0,5t\sqrt{2gH^{-1}}$ , уравнения (22) можно переписать в следующем виде

$$\begin{cases} X'' = 2Y' - X, \\ Y'' = -4H \sin \tau - 2X' - Y, \end{cases} \quad (23)$$

где штрихи означают дифференцирование по  $\tau$ , которое подчиняется неравенству  $0 \leq \tau \leq 0,5\pi$ .

Численное решение уравнений (23) проиллюстрировано на рис. 7.



**Рис. 7.** Решение системы уравнений (14) при начальных условиях  $X(0) = 0, Y(0) = 1, \dot{X}(0) = 0, \dot{Y}(0) = 0$  демонстрирует, как выглядит свободное падение тела в НСК, движущейся по брахистохроне

**Fig. 7.** The solution to the system of equations (14) at initial conditions  $X(0) = 0, Y(0) = 1, \dot{X}(0) = 0, \dot{Y}(0) = 0$  demonstrates the free fall of a body in the non-inertial frame of reference moving along the brachistochrone

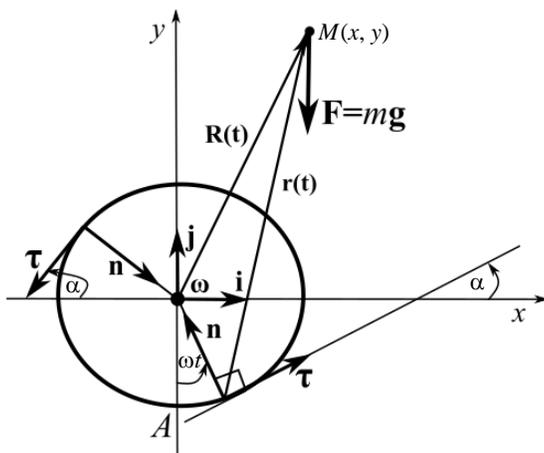
Рассмотрим теперь последний пример. Пусть НСК  $\tau$ - $\mathbf{n}$  равномерно вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  по окружности радиуса  $R$  (рис. 8). В этом случае  $v_0 = \omega R = const$ ,  $K = \frac{1}{R} = const$ , а движение начинается из точки  $A$  против часовой стрелки.

Поскольку угол  $\alpha$  меняется непрерывно от 0 до  $2\pi k$ , то сила тяжести согласно преобразованиям (3) подчиняется соотношению  $\mathbf{F} = -mg(\sin \alpha \cdot \tau + \cos \alpha \cdot \mathbf{n})$ . Как видно из рис. 8, угол  $\alpha$  зависит от времени линейно, и его можно определить в виде  $\alpha = \omega t$ . Переносное ускорение, согласно формуле (13), имеет в этом случае вид:

$$\mathbf{a}_{mov} = \tau(\dot{v}_0 - 2v_0 K \dot{Y} + v_0^2 K^2 X) + \mathbf{n}K(v_0^2 + 2v_0 X - v_0^2 KY).$$

Поэтому система уравнений (14) принимает вид:

$$\begin{cases} \ddot{X} = F_\tau m^{-1} + 2\omega \dot{Y} - \omega^2 X, \\ \ddot{Y} = F_n m^{-1} - \omega^2 R - 2\omega \dot{X} + \omega^2 Y, \end{cases} \quad (24)$$

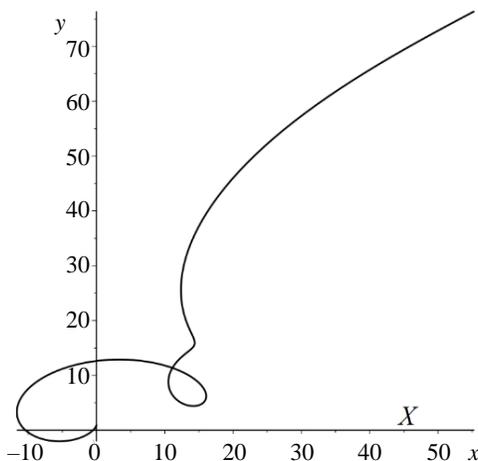


**Рис. 8.** НСК непрерывным образом движется по окружности, увлекая за собой и угол  $\alpha$   
**Fig. 8.** The non-inertial frame of reference continuously moves around a circumference dragging the angle  $\alpha$  with it

С учетом явного выражения для силы тяжести уравнения (24) переходят тогда в следующую систему:

$$\begin{cases} \ddot{X} = -g \sin \alpha + 2\omega \dot{Y} - \omega^2 X, \\ \ddot{Y} = -g \cos \alpha - \omega^2 R - 2\omega \dot{X} + \omega^2 Y. \end{cases} \quad (25)$$

Результат численного интегрирования уравнений (25) показан на рис. 9.



**Рис. 9.** Траектория тела в системе  $\tau$ - $n$ , совершающей 1,5 оборота по окружности радиуса  $R = 1$  с частотой  $\omega = 1$ ,  $0 \leq t \leq 3\pi\omega^{-1}$ . Начальные условия  $X(0) = 0, Y(0) = 1, X'(0) = 0, Y'(0) = 0$

**Fig. 9.** Trajectory of the body in  $\tau$ - $n$  system making 1.5 turns around the circumference of the radius  $R = 1$  with a frequency of  $\omega = 1$ ,  $0 \leq t \leq 3\pi\omega^{-1}$  at initial conditions  $X(0) = 0, Y(0) = 1, X'(0) = 0, Y'(0) = 0$

### Заключение

В заключение работы обобщим полученные результаты:

1. Получена общая система дифференциальных уравнений, описывающая траекторию движения тела в неинерциальной системе отсчета, движущейся по заданной кривой  $y = y(x)$ .

2. Проведен анализ полученных уравнений для свободно падающего (без трения) тела в случае, когда неинерциальная система отсчета  $\tau$ - $n$  движется по прямой, по брахистохроне и по окружности.

3. С помощью компьютерного моделирования построены траектории свободно падающего тела в неинерциальной системе отсчета  $\tau$ - $n$ , движущейся по прямой, брахистохроне и окружности.

### Список источников

1. Ландау Л.Д. Курс теоретической физики : в 10 т. М. : Физматлит, 1988. Т. 1: Механика.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики : в 5 т. М. : Физматлит, 2010. Т. 1: Механика.
3. Стрелков С.П. Механика. М. : Физматлит, 1975.
4. Иванов А.И. О брахистохроне частицы переменной массы с постоянным отношением количества присоединяемых и отделяемых частиц // Доклады АН УССР. Серия А. 1968. С. 683–686.
5. Dupreux G., Le Goff A., Quéré D., Clanet C. The spinning ball spiral // New Journal of Physics. 2010. V. 12. Art. 093004.
6. Denman H.H. Remarks on brachistochrone – tautochrone problems // Amer. J. Phys. 1985. V. 53. P. 224–227.
7. Бордовицына Т.В., Александрова А.Г., Чувашов И.Н. Численное моделирование динамики околоземных космических объектов искусственного происхождения с использованием параллельных вычислений // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 4 (16). С. 34–48.
8. Матвиенко О.В., Андропова А.О., Андиясян А.В., Мамадраимова Н.А. Математическое моделирование движения сферической частицы по наклонной поверхности в сдвиговом потоке // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 52. С. 75–88. doi: 10.17223/19988621/52/8
9. Ashby N., Brittin W.E., Love W.F., Wyss W. Brachistochrone with Coulomb friction // Amer. J. Phys. 1975. V. 43 (10). P. 902–905
10. Hayen J.C. Brachistochrone with Coulomb friction // Int. J. Non-Linear Mech. 2005. V. 40 (8). P. 1057–1075.
11. Гладков С.О., Богданова С.Б. Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 1. Ст. 161101. P. 1–5.
12. Гладков С.О., Богданова С.Б. О форме брахистохроны, вращающейся в вертикальной плоскости // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 78. С. 86–98.
13. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Analytical and numerical solution of the problem on brachistochrones in some general cases // Journal of Mathematical Sciences. 2020. V. 245 (4). P. 528–537.
14. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М. : Физматлит, 1962. Т. 1.
15. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М. : Физматлит, 1967. Т. 3.
16. Богданова С.Б., Григорьевский Н.В. Об одном методическом подходе к описанию свойств циклоиды // Физическое образование в вузах. 2021. Т. 27, № 3. С. 47–56.

## References

1. Landau L., Lifshitz E. (1976) *Mechanics*. Oxford: Butterworth-Heinemann.
2. Sivukhin D.V. (2010) *Obshchiy kurs fiziki. Mekhanika* [General course of physics. Mechanics]. Moscow: Fizmatlit.
3. Strelkov S.P. (1975) *Mekhanika* [Mechanics]. Moscow: Nauka.
4. Ivanov A.I. (1968) O brakhistokhrone chastitsy peremennoy massy s postoyannym otношением kolichestva prisoedinyaemykh i otdelyaemykh chastits [On the brachistochron of a variable-mass particle with a constant ratio of the number of attached and separated particles]. *Doklady AN USSR. Seriya A*. pp. 683–686.
5. Dupeux G., Le Goff A., Quéré D., Clanet C. (2010) The spinning ball spiral. *New Journal of Physics*. 12. Article 093004. doi: 10.1088/1367-2630/12/9/093004
6. Denman H.H. (1985) Remarks on brachistochrone-tautochrone problems. *American Journal of Physics*. 53. pp. 224–227. doi: 10.1119/1.14125
7. Bordovitsyna T.V., Aleksandrova A.G., Chuvashov I.N. (2011) Chislennoe modelirovanie dinamiki okolozemnykh kosmicheskikh ob"ektov iskusstvennogo proiskhozhdeniya s ispol'zovaniem parallel'nykh vychisleniy [Numerical simulation of near earth artificial space object dynamics using parallel computation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 16. pp. 34–48.
8. Matvienko O.V., Andropova A.O., Andriasyan A.V., Mamadramova N.A. (2018) Matematicheskoe modelirovanie dvizheniya sfericheskoy chastitsy po naklonnoy poverkhnosti v sdvigovom potoke [Mathematical modelling of the spherical particle motion along an inclined surface in the shear flow]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 52. pp. 75–88. doi: 10.17223/19988621/52/8
9. Ashby N., Brittin W.E., Love W.F., Wyss W. (1975) Brachistochrone with Coulomb friction. *American Journal of Physics*. 43(10). pp. 902–905. doi: 10.1119/1.9976
10. Hayen J.C. (2005) Brachistochrone with Coulomb friction. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 40(8). pp. 1057–1075. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2005.02.004
11. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2016) Geometricheskii fazovyy perekhod v zadache o brachistokhrone [Geometric phase transition in the problem of brachistochrone]. *Uchenye zapiski fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta – Memoires of the Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University*. 1. Article 161101. pp. 1–5.
12. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2022) O forme brakhistokhrony, vrashchayushchey v vertikal'noy ploskosti [On the shape of the brachistochrone rotating in a vertical plane]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 78. pp. 86–98. doi: 10.17223/19988621/78/7
13. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. (2020) Analytical and numerical solution of the problem on brachistochrones in some general cases. *Journal of Mathematical Sciences*. 245(4). pp. 528–537. doi: 10.1007/s10958-020-04709-0
14. Fikhtengol'ts G.M. (1962) *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Course of differential and integral calculus]. Moscow: Fizmatlit.
15. Smirnov V.I. (1967) *Kurs vysshey matematiki* [Course of higher mathematics]. Moscow: Fizmatlit.
16. Bogdanova S.B., Grigorevskiy N.V. (2021) Ob odnom metodicheskom podkhode k opisaniyu svoystv tsikloidy [On the one methodological approach to the description of the cycloid properties]. *Fizicheskoe obrazovanie v vuzakh – Physics in Higher Education*. 27(3). pp. 47–58.

**Сведения об авторах:**

**Богданова Софья Борисовна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры 311 «Прикладные программные средства и математические методы» Московского авиационного института (МАИ), Москва, Россия. E-mail: sonjaf@list.ru

**Гладков Сергей Октябрьнович** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры 311 «Прикладные программные средства и математические методы» Московского авиационного института (МАИ), Москва, Россия. E-mail: sglad51@mail.ru

**Information about the authors:**

**Bogdanova Sof'ya B.** (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation). E-mail: sonjaf@list.ru

**Gladkov Sergey O.** (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation). E-mail: sglad51@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 08.10.2022; принята к публикации 10.07.2023*

*The article was submitted 08.10.2022; accepted for publication 10.07.2023*

Научная статья

УДК 532.613, 532.517

doi: 10.17223/19988621/84/7

## Влияние поверхностно-активного вещества на скорость всплытия пузырька в вязкой жидкости

Евгений Иванович Борзенко<sup>1</sup>, Анна Сергеевна Усанина<sup>2</sup>,  
Геннадий Рафаилович Шрагер<sup>3</sup>

<sup>1, 2, 3</sup> *Томский государственный университет, Томск, Россия*

<sup>1</sup> *borzenko@ftf.tsu.ru*

<sup>2</sup> *usaninaanna@mail.ru*

<sup>3</sup> *shg@ftf.tsu.ru*

**Аннотация.** Проведено численное исследование скорости всплытия одиночного газового пузырька в вязкой жидкости с растворенным поверхностно-активным веществом (ПАВ) и характеристик гидродинамического и диффузионного процессов на свободной поверхности в условиях доминирования сил вязкого трения над гравитационными силами. Представлена оригинальная методика расчета с учетом сил поверхностного натяжения и эффекта Марангони. Продемонстрированы эффекты влияния концентрации поверхностно-активных веществ на характеристики гидродинамического и диффузионного процессов.

**Ключевые слова:** газовый пузырек, вязкая жидкость, поверхностно-активное вещество, всплытие, скорость, численное моделирование, параметрические исследования

**Благодарности:** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-79-10028, <https://rscf.ru/project/22-79-10028/>

**Для цитирования:** Борзенко Е.И., Усанина А.С., Шрагер Г.Р. Влияние поверхностно-активного вещества на скорость всплытия пузырька в вязкой жидкости // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 81–92. doi: 10.17223/19988621/84/7

Original article

## EFFECT OF SURFACTANT ON BUBBLE RISING VELOCITY IN VISCOUS LIQUID

Evgeniy I. Borzenko<sup>1</sup>, Anna S. Usanina<sup>2</sup>, Gennadiy R. Shragher<sup>3</sup>

<sup>1, 2, 3</sup> *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

<sup>1</sup> *borzenko@ftf.tsu.ru*

<sup>2</sup> *usaninaanna@mail.ru*

<sup>3</sup> *shg@ftf.tsu.ru*

**Abstract.** This paper presents a study of the rising velocity of a single gas bubble in a viscous liquid with a dissolved surfactant and the characteristics of hydrodynamic and

diffusion processes on the free surface under conditions of dominance of viscous friction forces over gravitational forces. The original computational method accounting for the surface tension forces and the Marangoni effect caused by the surfactant concentration gradient along the boundary is presented. The mathematical formulation of the problem includes the equations of motion, continuity, and convective diffusion. The boundary conditions on the free surface are written with account for the discontinuity of shear and normal stresses. The surfactant transport on the surface is described in accordance with the Langmuir model. The free surface motion is carried out in compliance with the kinematic condition. The approach is based on the simultaneous use of the finite volume method and the method of invariants, which allows one to explicitly identify a free surface with valid natural boundary conditions. The effect of concentration of surfactants on the characteristics of hydrodynamic and diffusion processes is demonstrated.

**Keywords:** gas bubble, viscous liquid, surfactant, rising velocity, numerical simulation, parametric studies

**Acknowledgments:** This work was partially supported by the Russian Science Foundation (project № 22-79-10028), <https://rscf.ru/project/22-79-10028/>

**For citation:** Borzenko, E.I., Usanina, A.S., Shrager, G.R. (2023) Effect of surfactant on bubble rising velocity in viscous liquid. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 81–92. doi: 10.17223/19988621/84/7

## Введение

Движение газовых пузырьков в вязких средах имеет большое практическое значения для различных отраслей промышленности. Характерной особенностью многих технологических процессов является наличие растворенных в жидкости поверхностно-активных веществ, которые влияют на динамику всплытия газовых включений. Их присутствие приводит к снижению скорости всплытия вследствие эффектов, вызванных неравномерным распределением ПАВ на поверхности раздела [1].

Экспериментальное исследование динамики жидкости в окрестности движущегося пузырька – достаточно сложная и трудоемкая задача, которая ограничивается лишь фиксацией интегральных характеристик, например скорости всплытия и формы поверхности [2–5]. Математическая постановка задачи о движении пузырька в вязкой среде с растворенным ПАВ является достаточно сложной, и ее успешная реализация возможна лишь с помощью численных методов. Численное моделирование процесса всплытия одиночного пузырька при числах Рейнольдса порядка 100 представлено в [6–8]. Модель *stagnant-cap*, которая разделяет поверхность пузырька на два участка, используется для упрощения математической постановки задачи. В кормовой части пузырька поверхность считается твердой, и на ней выполняется условие прилипания, а на передней части выполняется условие проскальзывания [6, 9, 10]. При использовании такого допущения распределение концентрации ПАВ вдоль поверхности пузырька выбирается на основе экспериментальных данных.

Целью настоящей работы является исследование скорости всплытия одиночного газового пузырька в вязкой жидкости с растворенным ПАВ и характеристик

гидродинамического и диффузионного процессов на свободной поверхности в условиях доминирования сил вязкого трения над гравитационными силами.

### Математическая постановка задачи

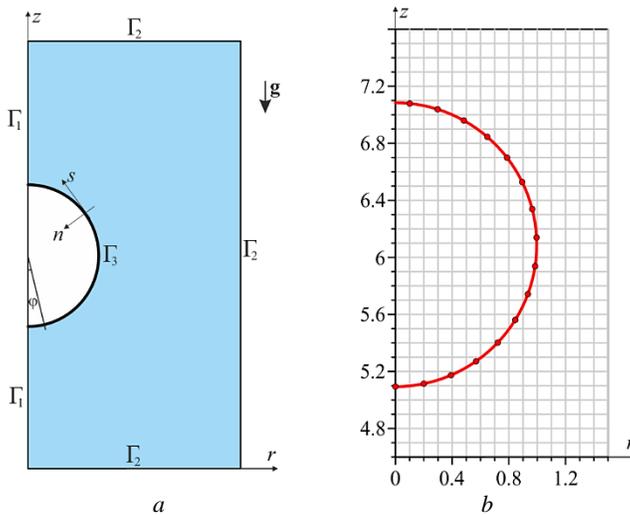
Рассматривается задача о всплытии воздушного пузырька в вязкой жидкости с растворенным ПАВ. Движение предполагается осесимметричным, а газ в пузырьке – идеальным. Область течения и система координат представлены на рис. 1, а. Движение вязкой жидкости описывается системой уравнений Навье–Стокса и неразрывности, а перенос ПАВ – уравнением конвективной диффузии, которые в векторной форме имеют следующий вид:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c = D \nabla^2 c.$$
(1)

Здесь  $\rho$  – плотность жидкости,  $\mathbf{u}$  – вектор скорости,  $t$  – время,  $p$  – давление,  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости,  $c$  – объемная концентрация поверхностно-активного вещества,  $D$  – коэффициент объемной диффузии,  $\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения.



**Рис. 1.** Область течения (а) и ее дискретизация (б) в окрестности пузырька  
**Fig. 1.** (a) Flow region and (b) its discretization in the vicinity of a bubble

На оси симметрии  $\Gamma_1$  выполняются условия симметрии, на внешних границах  $\Gamma_2$  жидкость покоится. При этом границы  $\Gamma_2$  удалены на достаточное расстояние от пузыря, чтобы избежать их влияния на динамику всплытия. Граничные условия на свободной поверхности включают динамические условия для нормальных и касательных напряжений:

$$\begin{aligned}
 -p + 2\mu \frac{\partial u_n}{\partial n} &= -p^* + \sigma(k_1 + k_2), \\
 \mu \left( \frac{\partial u_n}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial n} \right) &= -\nabla_s \sigma,
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

где  $p^*$  – давление газа в пузырьке,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $k_1, k_2$  – главные кривизны свободной поверхности,  $n, s$  – нормальное и касательное направление на свободной поверхности соответственно. Движение поверхности описывается кинематическим граничным условием. Значение коэффициента  $\sigma$  определяется по формуле Фрумкина

$$\sigma = \sigma_0 + R_g T c_\infty^\Sigma \ln \left( 1 - \frac{c^\Sigma}{c_\infty^\Sigma} \right),
 \tag{3}$$

где  $\sigma_0$  – коэффициент поверхностного натяжения для чистой жидкости,  $R_g$  – универсальная газовая постоянная,  $T$  – температура на границе раздела,  $c^\Sigma$  – поверхностная концентрация ПАВ,  $c_\infty^\Sigma$  – поверхностная концентрация насыщения.

Поверхностная концентрация ПАВ рассчитывается в соответствии со следующим уравнением [1]:

$$\frac{\partial c^\Sigma}{\partial t} + \nabla_s \cdot (\mathbf{u} c^\Sigma) = D^\Sigma \nabla_s^2 c^\Sigma + S^\Sigma.
 \tag{4}$$

Здесь  $D^\Sigma$  – поверхностный коэффициент диффузии,  $S^\Sigma$  – источниковый член, определяемый по формуле

$$S^\Sigma = -D \nabla c^{|\Sigma} \cdot \mathbf{n},
 \tag{5}$$

где  $c^{|\Sigma}$  – объемная концентрация ПАВ вблизи границы, значение которой определяется из условия [1]

$$-D \nabla c^{|\Sigma} \cdot \mathbf{n} = k_a c^{|\Sigma} (c_\infty^\Sigma - c^\Sigma) - k_d c^\Sigma.
 \tag{6}$$

В последнем уравнении  $k_a, k_d$  – константы скорости адсорбции и десорбции соответственно. Выражение (6) является граничным условием на свободной границе для уравнения конвективной диффузии системы (1).

В начальный момент времени пузырек имеет форму сферы с радиусом  $R$  и находится в покоящейся жидкости на глубине  $H$ . При этом объемная концентрация ПАВ равна  $c_0$ , а поверхностная концентрация определяется из условия равновесия процесса адсорбции и десорбции

$$c^\Sigma = \frac{k_a c^{|\Sigma} c_\infty^\Sigma}{k_a + k_d c^{|\Sigma}}.$$

Физическое содержание представленной математической модели подробно описано в [11].

Для проведения численного моделирования поставленная задача записывается в безразмерном виде с использованием величины  $R$  для масштаба длины и следующих безразмерных переменных:

$$\mathbf{U} = \frac{\mu \mathbf{u}}{\rho g R^2}, \quad \tau = \frac{\rho g R t}{\mu}, \quad P = \frac{p - \rho g H}{\rho g R}, \quad C = \frac{c}{c_0}, \quad \Gamma = \frac{c^\Sigma}{c_\infty^\Sigma}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_0}.$$

Тогда система уравнений (1) переписется в виде:

$$\begin{aligned} \text{Ga} \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} \right) &= -\nabla P + \nabla^2 \mathbf{U} + \mathbf{e}, \\ \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0, \\ \text{Pe} \left( \frac{\partial C}{\partial \tau} + \mathbf{U} \cdot \nabla C \right) &= \nabla^2 C, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\mathbf{e} = \mathbf{g} / g$ .

Граничные условия на свободной поверхности (2) в безразмерной форме имеют вид:

$$\begin{aligned} -P + \frac{\partial U_n}{\partial n} &= -P^* + \frac{\bar{\sigma}}{\text{Bo}} (\bar{k}_1 + \bar{k}_2), \\ \left( \frac{\partial U_n}{\partial s} + \frac{\partial U_s}{\partial n} \right) &= -\frac{1}{\text{Bo}} \nabla_s \bar{\sigma}. \end{aligned} \quad (8)$$

Математическая постановка сопряженной задачи (4)–(6) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Pe}^\Sigma \left( \frac{\partial C^\Sigma}{\partial \tau} + \nabla_s \cdot (\mathbf{U} C^\Sigma) \right) &= \nabla_s^2 C^\Sigma + \frac{\bar{S}^\Sigma}{\text{K}}, \\ \bar{S}^\Sigma &= -\nabla C^{|\Sigma} \cdot \mathbf{n}, \\ -\nabla C^{|\Sigma} \cdot \mathbf{n} &= \text{Pe Ha K} \left[ C^{|\Sigma} (1 - \Gamma) - \frac{1}{\text{La}} \Gamma \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Значение безразмерного коэффициента поверхностного натяжения определяется согласно формуле

$$\bar{\sigma} = 1 + \text{Ma} \ln(1 - \Gamma).$$

Постановка задачи в безразмерных переменных (7)–(9) включает следующие безразмерные числа подобия:  $\text{Ga} = \frac{\rho^2 g R^3}{\mu^2}$  – число Галилея,  $\text{Pe} = \frac{\rho g R^3}{\mu D}$  – объем-

ное число Пекле,  $\text{Bo} = \frac{\rho g R^2}{\sigma_0}$  – число Бонда,  $\text{Pe}^\Sigma = \frac{\rho g R^3}{\mu D^\Sigma}$  – поверхностное число

Пекле,  $\text{A} = \text{Ha K}$ ,  $\text{Ha} = \frac{c_0 k_a \mu}{\rho g R}$  – число Хатта (Hatta),  $\text{K} = \frac{c_\infty^\Sigma}{c_0 R}$  – безразмерная

длина адсорбции,  $\text{La} = \frac{c_0 k_a}{k_d}$  – число Лангмюра,  $\text{Ma} = \frac{R_g T c_\infty^\Sigma}{\sigma_0}$  – число Марангони.

### Метод расчета

Для решения поставленной задачи используется оригинальная численная методика, в основе которой лежит смешанный эйлерово-лагранжев подход [12]. Система уравнений (7) дискретизируется на фиксированной разнесенной сетке методом контрольного объема. Алгоритм SIMPLE [13] применяется для выполнения разностного аналога уравнения неразрывности. Гидродинамические харак-

теристики на свободной поверхности рассчитываются с использованием метода инвариантов [14]. Свободная поверхность представляется набором маркерных частиц, которые являются расчетными узлами и перемещаются в соответствии с кинематическим условием. Вид расчетной сетки внутри области решения представлен на рис. 1 *b*.

По мере всплытия пузырька маркеры, расположенные в начальный момент времени равномерно, перемещаются вдоль границы, что приводит к необходимости их перераспределения. Данная процедура проводится с использованием интерполяционного сплайна для сглаживания поверхности [15] с дальнейшим применением метода прогонки для пятидиагональной матрицы [16].

Шаг по времени выбирается в соответствии с формулой

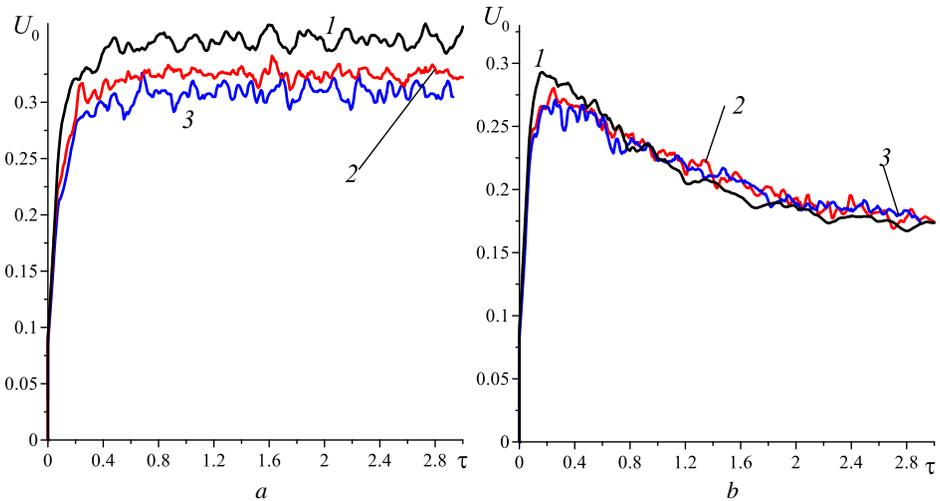
$$\Delta\tau = 0.25 Ga h^2,$$

где  $h$  – шаг квадратной сетки по пространству.

Описанная вычислительная методика тестировалась на задаче о всплытии пузырька в двух режимах, при этом значения безразмерных критериев соответствовали всплытию воздушного пузырька в глицерине. Первый режим всплытия пузырька – в жидкости без ПАВ, а второй режим – всплытие с растворенным ПАВ в рамках сформулированной постановки задачи. В обоих случаях устанавливается стационарная скорость всплытия пузырька  $U_0$ . Известно, что для случая малых значений числа  $Re$  коэффициент сопротивления  $C_D$  определяется из решения

Адамара–Рыбчинского и равен  $16/Re$ , где  $Re = \frac{2\rho R u_0}{\mu}$  – число Рейнольдса.

Проверка аппроксимационной сходимости проводилась по скорости всплытия пузырька в двух режимах и продемонстрирована на рис. 2.



**Рис. 2.** Зависимость скорости всплытия пузырька от времени ( $Ga = 0.1$ ,  $Bo = 0.015$ ,  $Pe = Pe^\Sigma = 103$ ,  $Ma = 0.3$ ,  $A = 0.48$ ; 1, 2, 3 –  $h = 1/10, 1/20, 1/40$ ): *a* –  $La = 0.22 \cdot 10^{-3}$ , *b* –  $La = 56 \cdot 10^{-3}$

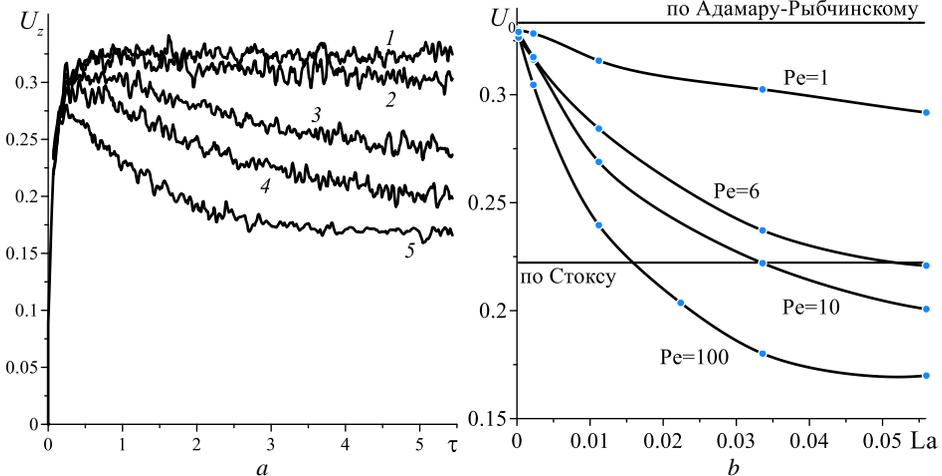
**Fig. 2.** Time dependence of the bubble rising velocity ( $Ga = 0.1$ ,  $Bo = 0.015$ ,  $Pe = Pe^\Sigma = 103$ ,  $Ma = 0.3$ ,  $A = 0.48$ ;  $h = (1) 1/10, (2) 1/20, (3) 1/40$ ): (*a*)  $La = 0.22 \cdot 10^{-3}$  and (*b*)  $La = 56 \cdot 10^{-3}$

Колебательный характер поведения кривых сходимости связан с такими особенностями вычислительной технологии, как перестройка расчетных сеток внутри области и на поверхности раздела, возникновение нерегулярных узлов вблизи свободной границы и т.п.

### Результаты расчетов

Скорость всплытия пузырька в вязкой жидкости устанавливается, когда гравитационные силы уравниваются гидродинамическими силами. Силы гидродинамического сопротивления определяются соотношением нормальных и касательных напряжений на поверхности раздела. Для пузырька, всплывающего в чистой жидкости, справедливо допущение о нулевых касательных напряжениях. Наличие растворенного в жидкости ПАВ приводит к формированию на поверхности движущегося пузыря слоя с неоднородным распределением концентрации ПАВ. Как следствие, возникают ненулевые касательные напряжения, вызванные эффектом Марангони.

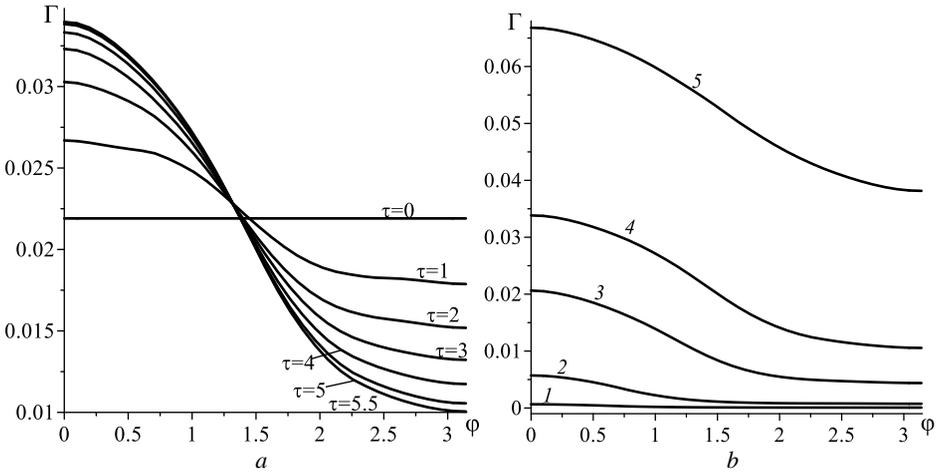
Рассмотрим процесс установления скорости всплытия пузырька в зависимости от числа Лангмюра  $La$  (рис. 3, *a*) при прочих равных ( $Ga = 0.1$ ,  $Bo = 0.015$ ,  $Re = Re^z = 103$ ,  $Ma = 0.3$ ,  $A = 0.48$ ), что соответствует изменению начальной концентрации ПАВ  $c_0$ . Малость  $Ga$  обеспечивает практически сферическую форму поверхности [17]. Значения физико-химических констант модели соответствуют паре воздух–глицерин, при этом пузырек имеет миллиметровые размеры. Для низких значений числа  $La$ , что соответствует малой концентрации, наблюдается достаточно быстрый выход скорости всплытия на стационарное значение. Увеличение  $La$  приводит к формированию максимума на кривой, при этом стационарное значение скорости уменьшается с ростом  $La$ .



**Рис. 3.** Зависимость скорости всплытия пузырька от времени (*a*): 1, 2, 3, 4, 5 –  $La = 0.22 \cdot 10^{-3}$ ,  $2.2 \cdot 10^{-3}$ ,  $11 \cdot 10^{-3}$ ,  $22 \cdot 10^{-3}$ ,  $56 \cdot 10^{-3}$ ; зависимость установившейся скорости всплытия от параметра  $La$  (*b*)

**Fig. 3.** (*a*) Bubble rising velocity versus time:  $La = (1) 0.22 \cdot 10^{-3}$ , (2)  $2.2 \cdot 10^{-3}$ , (3)  $11 \cdot 10^{-3}$ , (4)  $22 \cdot 10^{-3}$ , and (5)  $56 \cdot 10^{-3}$ ; (*b*) steady rising velocity versus parameter  $La$

На начальной стадии распределение концентрации вдоль свободной границы имеет практически однородный характер, поэтому динамика всплытия близка к случаю чистой жидкости. Однако с течением времени происходит перераспределение поверхностно-активного вещества вдоль границы, что приводит к проявлению эффектов, описанных выше. Аналогичный характер установления скорости всплытия пузырька в жидкости с ПАВ наблюдается в эксперименте [2, 4]. Эволюция профиля поверхностной концентрации представлена на рис. 4, *a*. Угол  $\varphi$  отсчитывается от оси  $z$ , ноль соответствует нижней части пузырька (см. рис 1, *a*). С течением времени распределение  $\Gamma$  устанавливается, в нижней части формируется зона повышенной концентрации вследствие сноса ПАВ потоком вязкой жидкости.

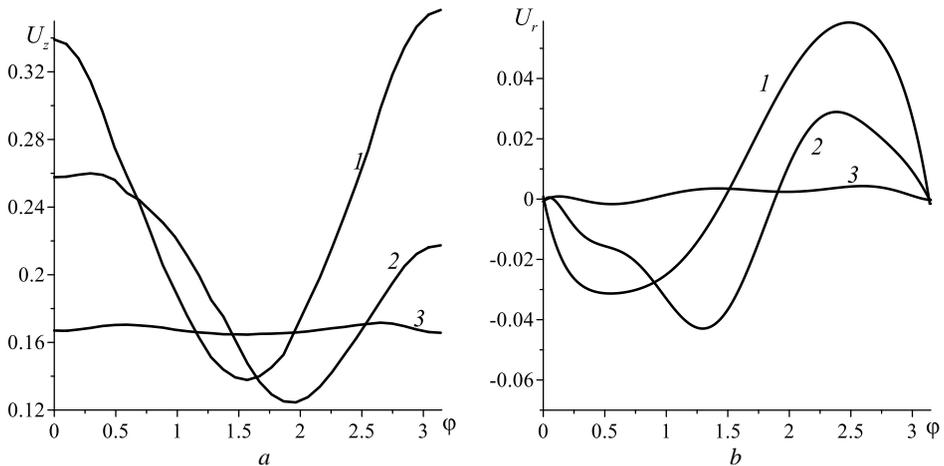


**Рис. 4.** Концентрация ПАВ вдоль границы от  $\varphi$ : (*a*)  $La = 0.022$ ; (*b*)  $La = 0.22 \cdot 10^{-3}, 2.2 \cdot 10^{-3}, 11 \cdot 10^{-3}, 22 \cdot 10^{-3}, 56 \cdot 10^{-3}$  – кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответственно,  $\tau = 5$   
**Fig. 4.** Surfactant concentration along the boundary versus  $\varphi$ : (*a*)  $La = 0.022$ ; (*b*)  $La = (1) 0.22 \cdot 10^{-3}, (2) 2.2 \cdot 10^{-3}, (3) 11 \cdot 10^{-3}, (4) 22 \cdot 10^{-3},$  and (5)  $56 \cdot 10^{-3}$  at  $\tau = 5$

Зависимость установившейся скорости всплытия от числа  $La$  представлена на рис. 3, *b* для различных значений параметра  $Re$ . Видно, что с ростом числа Лангмюра скорость монотонно убывает и выходит на постоянное значение. Такое поведение объясняется характером кривых установившегося распределения концентрации на поверхности пузырька (рис. 4, *b*). С ростом  $La$  растут абсолютные значения концентрации, при этом ее градиент вдоль поверхности, который определяет значение касательного напряжения, для случаев  $La = 22 \cdot 10^{-3}, 56 \cdot 10^{-3}$  при  $Re=100$  практически совпадает, как следствие установившиеся значения скорости всплытия отличаются слабо. Уменьшение  $Re$  приводит к падению роли конвективного переноса вещества и, соответственно, меньшим градиентам концентрации ПАВ вдоль поверхности, что, в свою очередь, снижает коэффициент сопротивления.

Распределения аксиальной и радиальной скоростей жидкости на свободной поверхности представлены на рис. 5. Для малого значения  $La$  форма профилей скорости соответствует решению Адамара–Рыбчинского (кривая 1). Увеличение концентрации ПАВ в жидкости приводит к формированию касательного напря-

жения на поверхности, пропорционального градиенту концентрации, которое препятствует движению частиц вдоль поверхности к кормовой части пузырька. В результате при  $La = 56 \cdot 10^{-3}$  радиальная скорость близка к нулю, а профиль аксиальной – практически однородный. Пузырь всплывает как твердое тело. Значение установившейся скорости всплытия при этом ниже, чем по Стоксу, что, по-видимому, объясняется зависимостью лапласовского давления на границе раздела от концентрации ПАВ.



**Рис. 5.** Распределение скоростей  $U_z$  и  $U_r$  вдоль поверхности в момент  $t = 5$ :  
1, 2, 3 –  $La = 0.22 \cdot 10^{-3}$ ,  $11 \cdot 10^{-3}$ ,  $56 \cdot 10^{-3}$

**Fig. 5.** Distribution of velocities  $U_z$  and  $U_r$  along the surface at a time instant of  $t=5$ :  
 $La = (1) 0.22 \cdot 10^{-3}$ , (2)  $11 \cdot 10^{-3}$ , and (3)  $56 \cdot 10^{-3}$

На верхней части пузыря коэффициент поверхностного натяжения больше, чем на нижней, следовательно, давление на верхней части больше, чем на нижней, что приводит к дополнительному сопротивлению по сравнению со случаем всплытия твердой сферы.

### Заключение

Проведено численное исследование влияния ПАВ на динамику всплытия газового пузырька в вязкой жидкости в условиях доминирования сил вязкого трения над гравитационными силами ( $Ga = 0.1$ ). Физическая постановка задачи предполагает формирование поверхностного слоя на свободной границе за счет процессов адсорбции и десорбции ПАВ. Основу математического описания рассматриваемого процесса образуют уравнения Навье–Стокса, неразрывности, уравнения конвективной диффузии ПАВ в объеме жидкости и на поверхности раздела. Вычислительная технология включает использование метода контрольного объема для расчета характеристик внутри области и метода инвариантов для определения гидродинамических характеристик свободной поверхности. В результате параметрических исследований получены зависимости установив-

шейся скорости всплытия пузырька от определяющих параметров ( $Pe = 1-100$ ,  $La = 0.22 \cdot 10^{-3}-56 \cdot 10^{-3}$ ). Установлено, что эффект Марангони, вызванный зависимостью поверхностного натяжения от концентрации ПАВ, замедляет скорость всплытия по сравнению со случаем чистой жидкости, и при некоторых значениях параметров эта скорость может быть меньше таковой для стоковского режима.

#### Список источников

1. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М. : Физматлит, 1959. 700 с.
2. Pang M., Jia M., Fei Y. Experimental study on effect of surfactant and solution property on bubble rising motion // J. Mol. Liq. 2023. V. 375. Art. 121390. doi: 10.1016/j.molliq.2023.121390
3. Fayzi P., Bastani D., Lotfi M. A note on the synergistic effect of surfactants and nanoparticles on rising bubble hydrodynamics // Chem. Engineering & Processing: Process Intensification. 2020. V. 155. Art. 108068. doi: 10.1016/j.ces.2020.108068
4. Luo Y. et al. Experimental Study of the Effect of the Surfactant on the Single Bubble Rising in Stagnant Surfactant Solutions and a Mathematical Model for the Bubble Motion // Ind. Eng. Chem. Res. 2022. V. 61 (26). P. 9514–9527. doi: 10.1021/acs.iecr.2c01620
5. Архипов В.А., Васенин И.М., Усанина А.С. Динамика всплытия пузырька в присутствии поверхностно-активных веществ // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2016. № 2. С. 142–151. doi: 10.7868/S0568528116020067
6. Fleckenstein S., Bothe D. Simplified modeling of the influence of surfactants on the rise of bubbles in VOF-simulations // Chem. Eng. Sci. 2013. V. 102. P. 514–523. doi: 10.1016/j.ces.2013.08.033
7. Pesci C. et al. Computational analysis of single rising bubbles influenced by soluble surfactant // J. Fluid Mech. 2018. V. 856. P. 709–763. doi: 10.1017/jfm.2018.723
8. Matsumoto Y., Uda T., Takagi S. The Effect of Surfactant on Rising Bubbles // IUTAM Symposium on Computational Approaches to Multiphase Flow. Dordrecht : Springer Netherlands, 2004. P. 311–321. doi: 10.1007/1-4020-4977-3\_31
9. He Z., Maldarelli C., Dagan Z. The size of stagnant caps of bulk soluble surfactant on the interfaces of translating fluid droplets // J. Colloid Interface Sci. 1991. V. 146 (2). P. 442–451. doi: 10.1016/0021-9797(91)90209-Q
10. Kenthewaran K. et al. Direct numerical simulation of gas-liquid mass transfer around a spherical contaminated bubble in the stagnant-cap regime // Int. J. Heat Mass Transf. 2022. V. 198. Art. 123325. doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2022.123325
11. Manikantan H., Squires T.M. Surfactant dynamics: hidden variables controlling fluid flows // J. Fluid Mech. 2020. V. 892. P. 1–115. doi: 10.1017/jfm.2020.170
12. Якутенок В.А., Борзенко Е.И. Численное моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью на основе метода SIMPLE // Математическое моделирование. 2007. Т. 19, № 3. P. 52–58.
13. Patankar S.V. Numerical heat transfer and fluid flow. Hemisphere Pub. Corp., 1980. 197 p.
14. Васенин И.М., Сидонский О.Б., Шрагер Г.Р. Численное решение задачи о движении вязкой жидкости со свободной поверхностью // Доклады АН СССР. 1974. Т. 217, № 2. P. 295–298.
15. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М. : Наука, 1980. 352 p.
16. Askar S.S., Karawia A.A. On Solving Pentadiagonal Linear Systems via Transformations // Math. Probl. Eng. 2015. V. 2015. Art. 232456. P. 1–9. doi: 10.1155/2015/232456
17. Bhaga D., Weber M.E. Bubbles in viscous liquids: shapes, wakes and velocities // J. Fluid Mech. 1981. V. 105 (1). P. 61–85. doi: 10.1017/S002211208100311X

## References

1. Levich V.G. (1962) *Physicochemical Hydrodynamics*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
2. Pang M., Jia M., Fei Y. (2023) Experimental study on effect of surfactant and solution property on bubble rising motion. *Journal of Molecular Liquids*. 375. Article 121390. doi: 10.1016/j.molliq.2023.121390
3. Fayzi P., Bastani D., Lotfi M. (2020) A note on the synergistic effect of surfactants and nanoparticles on rising bubble hydrodynamics. *Chemical Engineering and Processing*. 155. Article 108068. doi: 10.1016/j.cep.2020.108068
4. Luo Y., Wang Z., Zhang B., Guo K., Zheng L., Xiang W., Liu H., Liu C. (2022) Experimental study of the effect of the surfactant on the single bubble rising in stagnant surfactant solutions and a mathematical model for the bubble motion. *Industrial & Engineering Chemistry Research*. 61(26). pp. 9514–9527. doi: 10.1021/acs.iecr.2c01620
5. Arkhipov V.A., Vasenin I.M., Usanina A.S. (2016) Dynamics of bubble rising in the presence of surfactants. *Fluid Dynamics*. 51(2). pp. 266–274. doi: 10.1134/S0015462816020137
6. Fleckenstein S., Bothe D. (2013) Simplified modeling of the influence of surfactants on the rise of bubbles in VOF-simulations. *Chemical Engineering Science*. 102. pp. 514–523. doi: 10.1016/j.ces.2013.08.033
7. Pesci C., Weiner A., Marschall H., Bothe D. (2018) Computational analysis of single rising bubbles influenced by soluble surfactant. *Journal of Fluid Mechanics*. 856. pp. 709–763. doi: 10.1017/jfm.2018.723
8. Matsumoto Y., Uda T., Takagi S. (2004) The effect of surfactant on rising bubbles. *IUTAM Symposium on Computational Approaches to Multiphase Flow*. Dordrecht: Springer Netherlands. pp. 311–321. doi: 10.1007/1-4020-4977-3\_31
9. He Z., Maldarelli C., Dagan Z. (1991) The size of stagnant caps of bulk soluble surfactant on the interfaces of translating fluid droplets. *Journal of Colloid and Interface Science*. 146(2). pp. 442–451. doi: 10.1016/0021-9797(91)90209-Q
10. Kenthewaran K., Dietrich N., Tanguy S., Lalanne B. (2022) Direct numerical simulation of gas-liquid mass transfer around a spherical contaminated bubble in the stagnant-cap regime. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 198. Article 123325. doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2022.123325
11. Manikantan H., Squires T.M. (2020) Surfactant dynamics: hidden variables controlling fluid flows. *Journal of Fluid Mechanics*. 892. pp. 1–115. doi: 10.1017/jfm.2020.170
12. Yakutenok V.A., Borzenko E.I. (2007) Chislennoe modelirovanie techeniy vyazkoy neszhi-maemoy zhidkosti so svobodnoy poverkhnost'yu na osnove metoda SIMPLE [Numerical simulation flows of incompressible viscous fluid with free surface based on SIMPLE method]. *Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical Models and Computer Simulations*. 19(3). pp. 52–58.
13. Patankar S.V. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere Publishing Corporation.
14. Vasenin I.M., Sidonskiy O.B., Shragar G.R. (1974) Chislennoe reshenie zadachi o dvizhenii vyazkoy zhidkosti so svobodnoy poverkhnost'yu [Numerical solution to the problem of viscous fluid motion with a free surface]. *Doklady AN SSSR*. 217(2). pp. 295–298.
15. Zavyalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L. (1980) *Metody splayn-funktsiy* [Spline function methods]. Moscow: Nauka.
16. Askar S.S., Karawia A.A. (2015) On solving pentadiagonal linear systems via transformations. *Mathematical Problems in Engineering*. 2015. Article 232456. pp. 1–9. doi: 10.1155/2015/232456
17. Bhaga D., Weber M.E. (1981) Bubbles in viscous liquids: shapes, wakes and velocities. *Journal of Fluid Mechanics*. 105(1). pp. 61–85. doi: 10.1017/S002211208100311X

**Сведения об авторах:**

**Борзенко Евгений Иванович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной газовой динамики и горения Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

**Усанина Анна Сергеевна** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: usaninaanna@mail.ru

**Шрагер Геннадий Рафаилович** – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной газовой динамики и горения Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: shg@ftf.tsu.ru

**Information about the authors:**

**Borzenko Evgeniy I.** (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

**Usanina Anna S.** (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: usaninaanna@mail.ru

**Shrager Gennadiy R.** (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: shg@ftf.tsu.ru

*Статья поступила в редакцию 30.03.2023; принята к публикации 10.07.2023*

*The article was submitted 30.03.2023; accepted for publication 10.07.2023*

Научная статья

УДК 532.529

doi: 10.17223/19988621/84/8

## К построению математической модели двухфазного течения в осесимметричном сопле Лавала

Владимир Петрович Бушланов<sup>1</sup>, Владимир Григорьевич Бутов<sup>2</sup>,  
Анатолий Алексеевич Глазунов<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Государственный морской университет им. адмирала Ф.Ф. Ушакова, Новороссийск, Россия

<sup>2, 3</sup> Томский государственный университет, Томск, Россия

<sup>1</sup> [bpv@ngs.ru](mailto:bpv@ngs.ru)

<sup>2</sup> [bvg@niipmm.tsu.ru](mailto:bvg@niipmm.tsu.ru)

<sup>3</sup> [gla@niipmm.tsu.ru](mailto:gla@niipmm.tsu.ru)

**Аннотация.** В трудах И.М. Васенина разработан кинетический подход для создания математических моделей двухфазных сред. На его основе создана и реализована модель двухфазного течения в соплах Лавала с учетом вращения капель конденсата. Показано, что при многочисленных столкновениях моменты вращения некоторых капель могут превысить критическое значение и произойдет разрушение капель центробежными силами. Данный подход распространен на построение математической модели двухфазного течения в осесимметричном сопле Лавала с учетом силы Магнуса, действующей на вращающиеся капли.

**Ключевые слова:** кинетический подход, осесимметричное сопло Лавала, момент вращения капли, система уравнений двухфазного течения с учетом силы Магнуса

**Благодарности:** Исследование выполнено при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет-2030) и Государственного морского университета им. адмирала Ф.Ф. Ушакова в г. Новороссийске.

**Для цитирования:** Бушланов В.П., Бутов В.Г., Глазунов А.А. К построению математической модели двухфазного течения в осесимметричном сопле Лавала // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 93–108. doi: 10.17223/19988621/84/8

Original article

## On the development of a mathematical model of a two-phase flow in an axisymmetric de Laval nozzle

Vladimir P. Bushlanov<sup>1</sup>, Vladimir G. Butov<sup>2</sup>, Anatoliy A. Glazunov<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Admiral Ushakov Maritime State University, Novorossiysk, Russian Federation

<sup>2, 3</sup> Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

<sup>1</sup> [bpv@ngs.ru](mailto:bpv@ngs.ru)

<sup>2</sup> *byg@niipmm.tsu.ru*

<sup>3</sup> *gla@niipmm.tsu.ru*

**Abstract.** When modeling the flow of two-phase media, a number of authors use the kinetic approach. In the 1980s, I.M. Vasenin et al. obtained equations describing the flow of gas and liquid particles based on the equation for a drop distribution function in terms of masses, velocities, temperatures, and intrinsic angular momentum. They differ from the known equations by an additional equation for the mean square of the rotation moment. A numerical solution to the equations shows that due to numerous collisions and coagulation, the rotation moments of some drops exceed the critical value, and the drops are destroyed by centrifugal forces. In this paper, the kinetic approach is extended to the model of a two-phase flow in an axisymmetric de Laval nozzle with account for the radial diffusion of drops under the action of the Magnus force acting on a rotating drop. The system of equations is derived from the kinetic equation up to second-order moments using the method of moments. Only second-order moments, which affect diffusion to the wall, are taken into account. Diffusion leads to an earlier occurrence of drops on the wall and therefore must be considered when profiling the contour of the nozzle.

**Keywords:** kinetic approach, axisymmetric de Laval nozzle, moment of drop rotation, system of two-phase flow equations with allowance for the Magnus force

**Acknowledgments:** This study was supported by the Tomsk State University Development Programme (Priority 2030) and by the Admiral Ushakov Maritime State University in Novorossiysk.

**For citation:** Bushlanov, V.P., Butov, V.G., Glazunov, A.A. (2023) On the development of a mathematical model of a two-phase flow in an axisymmetric de Laval nozzle. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 93–108. doi: 10.17223/19988621/84/8

*Авторы посвящают статью памяти своего Учителя  
Игоря Михайловича Васенина, основателя кинетического  
подхода в теории двухфазных течений в соплах*

## Введение

Широкое применение ракетных двигателей на твердом топливе обуславливает проведение работ по созданию новых и совершенствованию существующих конструкций. Такие работы проводятся по ряду направлений [1, 2], и одним из них является углубленное изучение двухфазной газодинамики продуктов сгорания в сопле Лавалья. Это связано с тем, что интегральные энерго-тяговые характеристики двигателя определяются параметрами двухфазного течения, силами, действующими на стенки сопла. К настоящему времени выполнено большое количество исследований по разработке физико-математических моделей и изучению особенностей в них [3–17], которые усвершенствуются путем учета новых физических эффектов в соплах. В большинстве моделей рассмотрены эффекты, связанные с поступательным движением капель, хотя в ряде работ отмечается возможность вращения капель за счет различных процессов [15, 18–20]. В работах [12–15] показано, что в результате многочисленных столкновений капель различ-

ных размеров момент импульса у них может накапливаться и даже достигать критических значений для их разрушения центробежными силами [1, 18]. Для описания разрушения капель из-за вращения в [1, 12–15] к системе газодинамических уравнений двухфазного течения добавлено уравнение для квадрата момента вращения капель.

В двухфазных течениях в сопле Лавала жидкие капли сталкиваются [1]. Если до столкновения они не вращались, то после коагуляции момент вращения образовавшейся капли равен

$$\vec{M}_0 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (r_1 + r_2) \vec{e}_0 \times \vec{v}, \quad (1)$$

где 1 и 2 – индексы капель,  $\vec{v} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$  – вектор относительной скорости капель,  $\vec{e}_0$  – единичный вектор в направлении отрезка, соединяющего центры сфер в момент столкновения. Угловая скорость вращения капли  $\omega = |\vec{M}_0|/I$  может достигать величин  $\sim 10^7$  1/сек, где момент инерции образовавшейся сферической капли  $I = 0.4mr^2$ , если принять радиусы частиц  $r = 5 \cdot 10^{-6}$  м, и  $|\vec{v}| \sim 100$  м/с в минимальном сечении сопла.

Считая приближенно вращающиеся капли сферами, запишем уравнения вращения и движения сферы в газе:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\frac{\vec{M}}{t_{\text{вп}}}, t_{\text{вп}} = \frac{r^2 \rho}{15\rho_r v_r} \quad (2)$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = 0.3\varphi \frac{\vec{u}_r - \vec{u}}{t_{\text{вп}}} + \frac{(\vec{u}_r - \vec{u}) \times \vec{M}}{8mv_r t_{\text{вп}}}, \varphi = -\left(1 + \frac{3r}{8} \frac{|\vec{u}_r - \vec{u}|}{v_r}\right) \quad (3)$$

где  $\vec{M}$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{u}_r$  – момент количества движения, скорость сферы и скорость газа,  $v_r$ ,  $\rho_r$  – кинематическая вязкость и плотность газа,  $m$  – масса капли.

Выражение (2) получено в приближении Стокса, а (3) – в приближении Озена для движения сферы в вязкой жидкости. В сверхзвуковых соплах Лавала, как следует из многочисленных расчетов (см.: [1, 8, 17]), вектор разности скоростей  $\vec{v}$  сталкивающихся капель в области сильной коагуляции (в области минимального сечения) почти параллелен оси сопла, поэтому момент вращения  $\vec{M}_0$  перпендикулярен  $\vec{v}$  и лежит в радиальной плоскости сопла. Вектор  $\vec{u}_r - \vec{u}$  также почти параллелен оси сопла, поэтому вектор силы Магнуса (см. второй член правой части (3)) находится в радиальной плоскости сопла. В области горла сопла перемещения частиц в радиальном направлении за счет силы Магнуса отодвинут предельные линии частиц к стенке сопла и сдвинут место выпадения частиц к минимальному сечению, что важно при профилировании контура сопла.

Цель работы – на основе кинетического подхода [21] построить математическую модель двухфазного течения, описывающую диффузию вращающихся капель под действием силы Магнуса в осесимметричном сопле Лавала.

**Постановка задачи**

Среднестатистические параметры будем задавать с помощью функции распределения. Разобьем все капли на входе в сопло на  $K_p$  фракций. К каплям  $i$ -той фракции отнесем все капли массой  $m$  в интервале масс  $m_i < m < m_{i+1}$ .

Пусть  $x_1, x_2, x_3$  – декартовы координаты. Обозначим функцию распределения  $i$ -той фракции

$$f^i(t, x_1, x_2, x_3, m, u_1, u_2, u_3, T, M_1, M_2, M_3). \quad (4)$$

В дальнейшем вместо (4) будем использовать компактную форму записи:

$$f^i(t, m, \bar{\Omega}), \quad \bar{\Omega} = \{x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3, T, M_1, M_2, M_3\} \quad (5)$$

Число капель  $i$ -той фракции с параметрами  $\bar{\Omega}$ , принимающими значения в фазовом объеме  $d\bar{\Omega}$ , равно  $f^i(t, m, \bar{\Omega})d\bar{\Omega}$ .

Выделим в момент времени  $t$  капли  $i$ -той фракции с параметрами  $\bar{\Omega}$  в фазовом объеме  $d\bar{\Omega}$ . В момент времени  $t + \Delta t$  у этих капель параметры станут  $\Omega$ , и они займут фазовый объем  $d\Omega$ . Разность числа выделенных капель в моменты  $t + \Delta t$  и  $t$  равна

$$\Delta N = \int_{\Omega_x} f^i(t + \Delta t, \bar{\Omega})d\bar{\Omega} - \int_{\Omega_x} f^i(t, \bar{\Omega})d\bar{\Omega} = \Delta t \int \frac{\partial_c J^i}{\partial t} d\bar{\Omega}, \quad (6)$$

где скорость прихода капель в единицу времени в единице фазового объема  $\Omega$  в результате столкновений условно обозначена  $\frac{\partial_c J^i}{\partial t}$ . Из (6)

$$\int_{\Omega} \frac{\partial_c J^i}{\partial t} d\bar{\Omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{\Omega} [f^i(t + \Delta t, \bar{\Omega}) - f^i(t, \bar{\Omega})] d\bar{\Omega} \right\} + \\ + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega - \Omega} f^i(t + \Delta t, \bar{\Omega})d\bar{\Omega} = \int_{\Omega} \frac{\partial f^i}{\partial t} d\bar{\Omega} + \int_{\Sigma} f^i \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} n d\Sigma, \quad (7)$$

где  $\Sigma$  – поверхность, ограничивающая  $\Omega$ , а  $\bar{n}$  – единичная внешняя нормаль к ней,  $\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t}$  – скорость изменения вектора  $\bar{\Omega}$ .

Воспользовавшись теоремой Остроградского, с учетом произвольности  $\Omega$  из (7) получим

$$\frac{\partial f^i}{\partial t} + \frac{\partial u_k f^i}{\partial x_k} + \frac{\partial a_k f^i}{\partial u_k} + \frac{\partial B_k f^i}{\partial M_k} + \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{qS}{mc_v} f^i \right) = \frac{\partial_c J^i}{\partial t}, \quad (8)$$

$$\text{где} \quad a_k = \frac{du_k}{dt}, B_k = \frac{dM_k}{dt}, \frac{dT}{dt} = \frac{qS}{mc_v}, \quad (9)$$

$S$  – площадь поверхности сферической капли,  $c_v$  – удельная теплоемкость вещества капли при постоянном объеме,  $q$  – поток тепла в единицу времени на единицу поверхности капли.

### Уравнение переноса признака частиц

Запишем теперь уравнение для признака капли  $\Phi(t, m, \bar{\Omega})$ , под которым будем понимать произвольную величину, переносящуюся вместе с каплей и зависящую от ее массы, скорости, момента и температуры.

Уравнение для признака частиц получим способом, аналогичным [6]. Умножим левую и правую части (8) на функцию признака  $\Phi(t, m, \bar{\Omega})$  и проинтегрируем по всему фазовому объему  $\Omega$  и массам  $m$ , тогда

$$\int_{\Omega} \Phi \frac{\partial f^i}{\partial t} d\bar{\Omega} dm + \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial u_k f^i}{\partial x_k} d\bar{\Omega} dm + \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial}{\partial u_k} (a_k f^i) d\bar{\Omega} dm + \int_{\Omega} \frac{s}{mc_v} \Phi \frac{\partial}{\partial T} (q f^i) d\bar{\Omega} dm + \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial}{\partial M_k} (B_k f^i) d\bar{\Omega} dm = \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial_c J^i}{\partial t} d\bar{\Omega} dm. \quad (10)$$

Обозначим

$$\int_{\Omega} \Phi(t, m, \bar{\Omega}) f^i(t, m, \bar{\Omega}) d\bar{\Omega} dm dT dm = \langle \Phi^i(t, \bar{x}) \rangle \langle f^i(t, \bar{x}) \rangle = \Phi^i f^i. \quad (11)$$

Предполагая, что  $f^i = 0$  на границе  $\Omega$ , интегрированием по частям из (10) получим (индекс  $i$ , указывающий номер фракции, опустим):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi f) - f \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_k} (f \langle \Phi u_k \rangle) - f \left\langle u_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right\rangle - f \left\langle a_k \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} \right\rangle - \frac{s}{mc_v} f \left\langle q \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right\rangle - f \left\langle B_k \frac{\partial \Phi}{\partial M_k} \right\rangle = \\ = \Delta(\Phi) = \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial_c J}{\partial t} d\bar{\Omega} dm. \end{aligned} \quad (12)$$

Перейдем в (12) к новым переменным  $\bar{v}$ ,  $\theta$ ,  $\bar{L}$ :

$$\bar{v} = \bar{u} - \langle \bar{u} \rangle, \quad \theta = T - \langle T \rangle, \quad \bar{L} = \bar{M} - \langle \bar{M} \rangle \quad (13)$$

Из (12) и (13) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi f) - f \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_k} (f \langle \Phi u_k \rangle) + \frac{\partial}{\partial x_k} (f \langle u_k \rangle \langle \Phi \rangle) - f \left[ \langle u_k \rangle \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right\rangle + \frac{\partial \langle \Phi u_k \rangle}{\partial x_k} + \left\langle a_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right\rangle + \right. \\ \left. + \frac{s}{mc_v} f \left\langle q \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\rangle - \left\langle B_k \frac{\partial \Phi}{\partial L_k} \right\rangle \right] = \Delta(\Phi), \end{aligned} \quad (14)$$

где из (2)–(3)

$$\begin{aligned} a_k = a \Delta u_k - a v_k + b \varepsilon_{kpq} \langle \langle M_p \rangle \Delta u_q + L_p \Delta u_q - \langle M_p \rangle v_q - L_p v_q \rangle, \\ B_k = B \langle M_k \rangle + B L_k, \Delta u_k = u_{rk} - \langle u_k \rangle. \end{aligned} \quad (15)$$

Поток теплоотдачи  $q = \alpha \Delta T - \alpha \theta$ ,  $\Delta T = T_r - \langle T \rangle$ , где  $u_{rk}$  и  $T_r$  – компоненты скоростей газа и температура газа,  $\alpha = 0.3\varphi$ ,  $b = \frac{1}{8m v_r t_{вр}}$ ,  $B = -\frac{1}{t_{вр}}$  – коэффициенты, не зависящие от  $\bar{v}$ ,  $\theta$ ,  $\bar{L}$ ,  $\varepsilon_{kpq}$  – тензор Леви-Чевиты. Из (15)

$$\left\langle a_k \frac{\partial \Phi}{\partial v_k} \right\rangle = a \Delta u_k \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial v_k} \right\rangle - a \left\langle v_k \frac{\partial \Phi}{\partial v_k} \right\rangle + b A(\Phi), \quad (16)$$

$$\left\langle B_k \frac{\partial \Phi}{\partial L_k} \right\rangle = B \langle M_k \rangle \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial L_k} \right\rangle + B \left\langle L_k \frac{\partial \Phi}{\partial L_k} \right\rangle, \left\langle q \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\rangle = a \Delta T \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\rangle - a \left\langle \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\rangle,$$

$$A(\Phi) = \varepsilon_{kpq} \left( \langle M_p \rangle \Delta u_q \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial v_k} \right\rangle + \Delta u_q \left\langle L_p \frac{\partial \Phi}{\partial v_k} \right\rangle - \langle M_p \rangle \left\langle v_q \frac{\partial \Phi}{\partial v_k} \right\rangle - \left\langle L_p v_q \frac{\partial \Phi}{\partial v_k} \right\rangle \right).$$

Полагая в (14)  $\Phi = 1, m, v_k, \theta, L_k, v_k u_k, v_k L_p, L_k L_q, v_k \theta, L_k \theta, \theta^2$  и пренебрегая моментами выше второго, получим систему уравнений до моментов второго порядка включительно. Величины  $\langle v_k^p \theta^q L_q^p \rangle$  будем называть моментами порядка  $P_1 + P_2 + P_3$ .

В дальнейшем моментами выше второго порядка будем пренебрегать, а моменты первого порядка обозначать  $\langle M_p \rangle = M_p, \langle T \rangle = T, \langle u_k \rangle = u_k$ .

### Интегралы столкновений

Выясним вид правой части (8).  $\frac{\partial_c J^i}{\partial t}$  будем называть интегралом столкновений. Имеем

$$\frac{\partial_c J^i}{\partial t} = \sum_{j=1}^i A_{ij} - \sum_{j=i+1}^{K_p} A_{ij}^-, \quad (17)$$

где  $A_{ij}$  – скорость прихода капель  $i$ -той фракции с параметрами  $\bar{\Omega}$  в результате коагуляции капель  $i$ -той и  $j$ -той фракций,  $i \geq j$ ,  $A_{ij}^-$  – скорость ухода капель  $i$ -той фракции с параметрами  $\bar{\Omega}$  в результате слияний с каплями  $j$ -той фракции. Такое отнесение образовавшихся после коагуляции капель к каплям большей фракции позволит далее решать уравнения методом Лагранжа. Здесь также предполагается, что после не слияния параметры сталкивающихся капель не изменяются.

Установим вид  $A_{ij}$ . Обозначим параметры сталкивающихся капель как  $\bar{\Omega}_{m1}$  и  $\bar{\Omega}_{m2}$ :

$$\bar{\Omega}_{mk} = \{m_k, \bar{u}_k, T_k, \bar{M}_k\}, \quad k = 1, 2. \quad (18)$$

Пусть капля с параметрами  $m, \bar{u}, T, \bar{M}$  образуется при столкновении-слиянии двух капель с параметрами  $\bar{\Omega}_{m1}$  и  $\bar{\Omega}_{m2}$ . Тогда имеем следующие уравнения законов сохранения:

$$m = m_1 + m_2, m \bar{u} = m_1 \bar{u}_1 + m_2 \bar{u}_2, E_n(\bar{\Omega}) = E_n(\bar{\Omega}_1) + E_n(\bar{\Omega}_2),$$

$$\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \bar{M}_0, E_n(\bar{\Omega}_k) = m_k c_v T_k + m_k \frac{\bar{u}_k^2}{2} + \frac{\bar{M}_k^2}{2I_k} + \sigma S_k, \quad (19)$$

где  $\bar{M}_0$  вычисляется из (1),  $S_k = 4\pi r_k^2$ ,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $I_k = \frac{2}{5} m_k r_k^2$ .

Из (19) видно, что параметры  $\bar{\Omega}_m$  вычисляются через  $\bar{\Omega}_{m1}$  и  $\bar{\Omega}_{m2}$  и случайные координаты  $\theta$  и  $\varphi$  вектора столкновения  $\vec{e}_0$ . Число столкновений в единице объема

за единицу времени капель  $i$ -той фракции с параметрами  $\bar{\Omega}_{m1}$ , с каплями  $j$ -той фракции с параметрами  $\bar{\Omega}_{m2}$  равно

$$k_{ij}(\bar{\Omega}_{m1}, \bar{\Omega}_{m2}) = f_i(t, \bar{x}, \bar{\Omega}_{m1}) f_j(t, \bar{x}, \bar{\Omega}_{m2}) \left| \bar{u}_1 - \bar{u}_2 \right| \pi (r_1 + r_2)^2, \quad (20)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  – радиусы сферических капель  $i$ -той и  $j$ -той фракций соответственно (индекс 1 относится к  $i$ -той фракции, а 2 – к  $j$ -той фракции).

Из (20) имеем, учитывая, что якобиан перехода  $J$  от переменных  $\bar{\Omega}_{m2}$  к  $\bar{\Omega}_m$  из (19) равен  $J = \frac{\partial \bar{\Omega}_{m2}}{\partial \bar{\Omega}_m} = \left( \frac{m}{m - m_1} \right)^4$ :

$$A_{ij} = \int_{\Omega^+} k_{ij}(\bar{\Omega}_{m1}, \bar{\Omega}_{m2}) \left( \frac{m}{m - m_1} \right)^4 v(\theta, \varphi) d\bar{\Omega}_{m1} d\theta d\varphi, \quad (21)$$

где  $\Omega^+$  – область переменных  $\bar{\Omega}_{m1}, \theta, \varphi$ , в которой происходит слияние капель с параметрами  $\bar{\Omega}_{m1}, \bar{\Omega}_{m2} = \bar{\Omega}_{m2}(\bar{\Omega}_{m1}, \bar{\Omega}_m, \theta, \varphi)$ . Векторная функция  $\bar{\Omega}_{m2}(\bar{\Omega}_{m1}, \bar{\Omega}_m, \theta, \varphi)$  вычисляется по формулам (19);  $v(\theta, \varphi)$  – вероятность того, что вектор  $\bar{e}_0$  имеет координаты  $\theta, \varphi$ .

При условии равномерности в объеме капель, имеющих любые параметры  $\bar{\Omega}_1$ , будем считать, что на единицу площади, перпендикулярной  $\bar{u}_1 - \bar{u}_2$ , приходится равное число столкновений. Элементарная площадка на этой площади равна

$$dS = r dr d\varphi; r = (r_1 + r_2) \sin \theta, dr = (r_1 + r_2) \cos \theta d\theta, \quad (22)$$

где  $\theta$  – угол между  $\bar{e}_0$  и  $\bar{u}_1 - \bar{u}_2$ , угол  $\varphi$  отсчитывается в радиальной плоскости. Тогда, учитывая (22), имеем:

$$v(\theta, \varphi) = \frac{dS}{\pi (r_1 + r_2)^2} = \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi}{\pi}. \quad (23)$$

Из (21)–(23)

$$A_{ij} = \int_{\Omega^+} k_{ij}(\bar{\Omega}_{m1}, \bar{\Omega}_{m2}) \frac{\sin \theta \cos \theta}{\pi} \left( \frac{m}{m - m_1} \right)^4 d\bar{\Omega}_{m1} d\theta d\varphi, \quad (24)$$

где параметры  $\bar{\Omega}_{m2}$  выражаются по формулам (19).

Для того, чтобы определить  $A_{ij}^-$ , заметим, что любое слияние капель с параметрами  $\bar{\Omega}_{m1}$  изменяет  $\bar{\Omega}_m$ , поэтому

$$A_{ij}^- = \int_{\Omega^-} k_{ij}(\bar{\Omega}_m, \bar{\Omega}_{m1}) d\bar{\Omega}_{m1}, \quad (25)$$

где  $\Omega^-$  – область коагуляции для переменных  $\bar{\Omega}_{m1}$ .

Для того, чтобы выражения  $A_{ij}$  и  $A_{ij}^-$  были полностью определены, установим вид областей  $\Omega^+$  и  $\Omega^-$ . Условимся, что слияние происходит, если выполнены необходимые условия слияния капель при соударениях

$$\Omega^+ : |\overline{M}| = |\overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \overline{M}_0| < \Omega_{n^*} (\rho\sigma(r_1^3 + r_2^3))^{\frac{7}{3}}, \quad \Omega_{n^*} = 5.23, \quad (26)$$

$$\Omega^- : |\overline{M} + \overline{M}_1 + \overline{M}_0| < \Omega_{n^*} (\rho\sigma(r_1^3 + r_2^3))^{\frac{7}{3}}. \quad (27)$$

Вычислим  $\Delta(\Phi)_i$ . Из (12)  $\Delta(\Phi)_i = \int_{\Omega_\infty} \Phi \frac{\partial_c J^i}{\partial t} d\overline{\Omega} dm$ . Здесь  $\Omega_\infty$  – вся область изменения параметров  $\overline{\Omega}$ . Из (17) получим

$$\begin{aligned} \Delta(\Phi)_i &= \sum_{j=1}^i I_{A_j} - \sum_{j=i+1}^{K_p} I_{A_j}, \\ I_{A_j} &= \int_{\Omega_\infty} \Phi A_{ij} d\overline{\Omega}, \quad I_{A_j^-} = \int_{\Omega_\infty} \Phi A_{ij}^- d\overline{\Omega}. \end{aligned} \quad (28)$$

Перейдем в этих интегралах от переменных  $\overline{\Omega}$  к  $\overline{\Omega}_2$  по формулам (19). Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} I_{A_j} &= I_{ij}, \quad i \geq j; \quad I_{A_j^-} = I_{ij}, \quad i < j; \\ I_{ij} &= \int_{\Omega_\infty} \int_{\Omega^+} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \Phi K_{ij}(\overline{\Omega}_{m1}, \overline{\Omega}_{m2}) \frac{\sin \theta \cos \theta}{\pi} \right\} d\overline{\Omega}_{m1} d\overline{\Omega}_{m2}. \end{aligned} \quad (29)$$

### Задача о диффузии вращающихся капель под действием силы Магнуса в осесимметричном сопле

Применим полученные уравнения для описания диффузии вращающихся капель под действием силы Магнуса в осесимметричном сопле Лавала. Пусть характерное время затухания колебаний  $T_1$  в образовавшейся после коагуляции капле намного меньше характерного времени между столкновениями  $T_{ст}$ , тогда в течение времени между столкновениями капли будут вращаться, как квазитвердые тела.

Рассмотрим осесимметричное двухфазное течение, когда ортогональные векторы базиса  $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$  есть  $\overline{e}_r, \overline{e}_\varphi, \overline{e}_x$  – единичные векторы цилиндрической системы координат. Относительная скорость коагулирующих капель параллельна оси сопла  $x$ . Направление вектора  $\overline{e}_0$  (см. формулу (1)) при столкновениях равновероятно в радиальной плоскости, а потеря момента количества движения за счет трения о газ (см. формулу (3)) не изменяет его направления, уменьшая только его модуль. Поэтому интеграл столкновения  $\Delta(\overline{M}) = 0$  и величины вектора момента вращения капель  $\langle \overline{M} \rangle = 0$ , если нет градиента концентрации капель в радиальной плоскости сопла. Но в двухфазном потоке в сопле имеются градиенты концентраций капель в радиальном сечении. Покажем, что в этом случае величины  $\langle M_2 \rangle$  уже не будут нулевыми. Действительно, сила Магнуса в радиальном направлении

$$(\overline{a}_m)_1 = -\frac{M_2(u_{r3} - u_3)}{8m v_{r \text{ вр}}}, \quad (30)$$

и если есть диффузионный поток капель в радиальном направлении, то в этом потоке капли имеют компоненту  $M_2$  того знака, который отвечает за перемещение капель в направлении меньших концентраций, т.е. к стенке, поэтому  $\langle M_2 \rangle \neq 0$ . Поток компоненты  $M_2$  в радиальном направлении пропорционален  $\langle u_1 M_2 \rangle = \langle u_1 \rangle \langle M_2 \rangle + \langle v_1 L_2 \rangle$ , поэтому величина  $\langle u_1 M_2 \rangle$  должна отвечать за создание ненулевого  $\langle M_2 \rangle$ . Заметим, что на самой стенке капли имеют  $M_2$  одного знака, так что здесь  $\langle M_2 \rangle$  может быть порядка  $\langle \overline{M}^2 \rangle^{1/2}$ . Согласно формуле (3), величина силы Магнуса пропорциональна  $\langle u_3 M_2 \rangle = \langle u_3 \rangle \langle M_2 \rangle + \langle v_3 L_2 \rangle$ .

Приведенные выше рассуждения показывают, что при учете вращения капель в виде (2)–(3) в области больших градиентов нужно учитывать величины  $M_2, \langle v_1 L_2 \rangle, \langle v_3 L_2 \rangle$ . В ядре потока (вдали от стенки сопла) должны рассчитываться величины  $\langle f \rangle = n, \langle mf \rangle = \rho, u, v, T, \langle L_1 L_1 \rangle, \langle L_2 L_2 \rangle$ , где  $n$  – число капель в единице объема,  $\rho$  – массовая плотность.

Помимо прочего, около стенки должны быть учтены величины  $\langle v_1 v_1 \rangle, \langle v_1 v_3 \rangle$ , определяющие вектор плотности потока диффузионного количества движения относительно вектора средней скорости.

Для того чтобы более строго обосновать приведенные выше рассуждения, рассмотрим общую систему моментных уравнений до вторых моментов при следующих предположениях:

1) так как векторы  $|\vec{u}_1 - \vec{u}_2|$  и  $\vec{u}_r - \vec{u}$  имеют компоненты в направлении вдоль оси сопла на порядок большие, чем радиальные, то из (1)–(3) будем считать, что векторы собственных моментов количества движения и векторы силы Магнуса лежат в радиальной плоскости сопла;

2) диффузия вращающихся капель к стенке сопла под действием большого градиента концентрации капель в радиальном направлении приводит к тому, что нужно рассматривать и моментные уравнения второго порядка в области больших градиентов концентраций;

3) в ядре потока отличны от нуля только следующие моменты второго порядка:  $\langle L_1 L_1 \rangle, \langle L_2 L_2 \rangle, \langle v_1 v_1 \rangle, \langle v_3 v_3 \rangle$ ;

4) из соображений симметрии и из-за равновероятности столкновений относительно вектора  $\vec{e}_0$  и малых градиентов концентраций капель в направлениях 2 и 3  $\langle \vec{M}_1 \rangle = 0$  и

$$\Delta(L_1 L_1) = \Delta(L_2 L_2); \quad (31)$$

5) в осесимметричном случае

$$\langle v_1 v_2 \rangle = \langle v_2 v_2 \rangle = \langle v_3 v_2 \rangle = 0, \langle v_2 L_1 \rangle = \langle v_2 L_2 \rangle = \langle v_2 L_3 \rangle = 0; \quad (32)$$

6) так как из предположения 3 имеем  $M_3 = 0$  для всех капель, то

$$M_3 = 0, \langle L_3 v_1 \rangle = \langle L_3 v_2 \rangle = \langle L_3 v_3 \rangle = 0, \langle L_3 L_1 \rangle = \langle L_3 L_2 \rangle = \langle L_3 L_3 \rangle = 0; \quad (33)$$

7) пренебрежем величинами

$$\langle \theta v_1 \rangle = \langle \theta v_2 \rangle = \langle \theta v_3 \rangle = 0, \langle \theta L_1 \rangle = \langle \theta L_2 \rangle = \langle \theta L_3 \rangle = 0. \quad (34)$$

В системе уравнений моментов до второго порядка включительно в области больших градиентов пренебрежем градиентами всех моментов второго порядка по сравнению с градиентом концентрации в радиальном направлении. Тогда с учетом предположений 1–7 будем рассматривать следующие уравнения для моментов второго порядка:

$$\begin{aligned} (\varepsilon - 2a)\langle v_1 v_1 \rangle + b[2\Delta u_3 \langle L_2 v_1 \rangle - 2M_2 \langle v_3 v_1 \rangle] + \Delta \langle v_1 v_1 \rangle &= 0, \\ (\varepsilon - 2a)\langle v_1 v_3 \rangle + b[\Delta u_3 \langle L_2 v_3 \rangle - M_2 \langle v_3 v_3 \rangle - \Delta u_1 \langle L_2 v_1 \rangle + M_2 \langle v_1 v_1 \rangle] &= 0, \\ (\varepsilon - 2a)\langle v_3 v_3 \rangle + b[-2\Delta u_1 \langle L_2 v_3 \rangle + 2M_2 \langle v_1 v_3 \rangle] + \Delta \langle v_3 v_3 \rangle &= 0, \\ (\varepsilon - a + B)\langle v_1 L_1 \rangle + b[\Delta u_3 \langle L_2 L_1 \rangle - M_2 \langle v_3 L_1 \rangle] &= 0, \\ (\varepsilon - a + B)\langle v_1 L_2 \rangle - bM_2 \langle v_3 L_2 \rangle + b\Delta u_3 \langle L_2 L_2 \rangle &= 0, \\ (\varepsilon - a + B)\langle v_3 L_2 \rangle + bM_2 \langle v_1 L_2 \rangle - b\Delta u_1 \langle L_2 L_2 \rangle &= 0, \\ (\varepsilon - a + B)\langle v_3 L_1 \rangle + b[-\Delta u_1 \langle L_2 L_1 \rangle + M_2 \langle v_1 v_1 \rangle] &= 0, \\ (\varepsilon - a + B)\langle L_1 L_2 \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (35)$$

где 
$$\varepsilon = -\frac{u_1}{r} \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial r}. \quad (36)$$

Из уравнения (35)  $\langle L_1 L_2 \rangle = 0$ . Уравнение для  $\langle v_1 L_1 \rangle$  и  $\langle v_3 L_1 \rangle$  однородны, и определитель  $(\varepsilon - a + B)^2 + b^2 M_2^2 > 0$ , тогда  $\langle v_1 L_1 \rangle = 0, \langle v_3 L_1 \rangle = 0$ .

Уравнения для  $\langle v_1 L_2 \rangle$  и  $\langle v_3 L_2 \rangle$  имеют решение

$$\begin{aligned} \langle v_1 L_2 \rangle &= \frac{b \langle L_2 L_2 \rangle}{\Delta} [(\varepsilon - a + B)\Delta u_3 - bM_2 \Delta u_1], \\ \langle v_3 L_2 \rangle &= -\frac{b \langle L_2 L_2 \rangle}{\Delta} [(\varepsilon - a + B)\Delta u_1 + bM_2 \Delta u_3], \Delta = (\varepsilon - a + B)^2 + b^2 M_2^2. \end{aligned} \quad (37)$$

Из уравнений для  $\langle v_1 v_1 \rangle, \langle v_1 v_3 \rangle$  получим

$$\begin{aligned} \langle v_1 v_1 \rangle &= \left\{ [(\varepsilon - a + B)^2 + 2b^2 M_2^2] [2b\Delta u_3 \langle v_1 L_2 \rangle - \Delta \langle v_1 v_1 \rangle] + 2b^2 M_2 (\varepsilon - 2a) \times \right. \\ &\quad \left. \times [\Delta u_1 \langle v_1 L_2 \rangle - \Delta u_3 \langle v_3 L_2 \rangle] + 2b^2 M_2^2 [2\Delta u_1 \langle v_3 L_2 \rangle - \Delta \langle v_3 v_3 \rangle] \right\} / \Delta 1, \\ \langle v_1 v_3 \rangle &= \left\{ [(\varepsilon - 2a)b] [\Delta u_3 \langle v_1 L_2 \rangle - \Delta u_3 \langle v_3 L_2 \rangle] - bM_2 [2b\Delta u_3 \langle v_1 L_2 \rangle - \Delta \langle v_1 v_1 \rangle] + \right. \\ &\quad \left. + bM_2 [2\Delta u_1 \langle v_3 L_2 \rangle - \Delta \langle v_3 v_3 \rangle] \right\} (\varepsilon - 2a) / \Delta 1, \\ \Delta 1 &= (\varepsilon - 2a) [(\varepsilon - 2a)^2 + 4b^2 M_2^2], \\ \langle v_3 v_3 \rangle &= \left\{ [(\varepsilon - 2a - 2bM_2)] [2b\Delta u_1 \langle v_3 L_2 \rangle - \Delta \langle v_3 v_3 \rangle] - \right. \\ &\quad \left. - 2b^2 M_2 [\Delta u_1 \langle v_1 L_2 \rangle - \Delta u_3 \langle v_3 L_2 \rangle] + \right. \\ &\quad \left. + (\varepsilon - 2a) [2b\Delta u_3 \langle v_1 L_2 \rangle - \Delta \langle v_1 v_1 \rangle] \right\} (\varepsilon - 2a) / \Delta 1. \end{aligned} \quad (38)$$

Из решений (35)–(38) около стенки сопла видно, что влияние на диффузию членов  $\langle v_1 L_1 \rangle$ ,  $\langle v_3 L_1 \rangle$ ,  $\langle L_1 L_2 \rangle$  мало по сравнению с величинами  $\langle v_1 v_1 \rangle$ ,  $\langle v_1 v_3 \rangle$ ,  $\langle v_1 L_2 \rangle$ ,  $\langle v_3 L_2 \rangle$ .

В уравнениях для моментов первого порядка только  $\langle v_1 v_1 \rangle$ ,  $\langle v_1 L_2 \rangle$ ,  $\langle v_1 v_3 \rangle$  входят с градиентом  $f$  в радиальном направлении. На этом основании уравнения для  $\langle v_3 v_3 \rangle$ ,  $\langle v_3 L_2 \rangle$  рассматривать не будем, и в остальных уравнениях будем считать  $\langle v_3 v_3 \rangle = 0$ ,  $\langle v_3 L_2 \rangle = 0$ .

Так как  $\langle v_1 v_3 \rangle$  входит в уравнение для  $u_3$ , то будем принимать и  $\langle v_1 v_3 \rangle = 0$ , так как влияние диффузии за счет силы Магнуса на компоненту  $u_3$  мало по сравнению с влиянием на компоненту  $u_1$ .

Уравнения для моментов с учетом рассмотренных выше предположений (1–7) и  $\langle v_3 v_3 \rangle = \langle v_1 v_3 \rangle = 0$ ,  $\langle v_3 L_2 \rangle = 0$  следующие:

$$\hat{D}n = \Delta(1), \hat{D}\rho = \Delta(m), \quad (39)$$

$$f \hat{D}_t \rho u_1 + \frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 \langle v_1 v_1 \rangle \rho) - \rho [a \Delta u_1 + b M_2 \Delta u_3] = \Delta(m v_1), \quad (40)$$

$$f \hat{D}_t \rho u_3 - \rho [a \Delta u_3 - b M_2 \Delta u_1 + b \langle v_1 L_2 \rangle] = \Delta(m v_3), \quad (41)$$

$$f \hat{D}_t \rho M_2 + \frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 \langle v_1 L_2 \rangle f) - b M_2 f = \Delta(L_2), \quad (42)$$

$$f \hat{D}_t \rho T - \frac{sa}{mc_v} \Delta T \rho = \Delta(m \theta), \quad (43)$$

$$\hat{D}_t (\langle v_1 v_1 \rangle \rho) + 2 \langle v \rho v_1 \rangle \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \rho [-2a \langle v_1 v_1 \rangle + 2b \langle v_1 L_2 \rangle] = \Delta(v_1 v_1), \quad (44)$$

$$\hat{D}_t (\langle v_1 L_2 \rangle n) + n \left[ \langle v_1 L_2 \rangle \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \langle v_1 v_1 \rangle \frac{\partial M_2}{\partial x_1} \right] - n [(B-a) \langle v_1 L_2 \rangle + b \Delta u_3 L_2 L_2] = \Delta(v_1 L_2), \quad (45)$$

$$\hat{D}_t (\langle L_1 L_1 \rangle n) - 2B \langle L_1 L_1 \rangle n = \Delta(L_1 L_1), \quad (46)$$

$$\hat{D}_t (\langle L_2 L_2 \rangle n) + 2n \langle v_1 L_2 \rangle \frac{\partial M_2}{\partial x_1} - 2B \langle L_2 L_2 \rangle n = \Delta(L_2 L_2), \quad (47)$$

где применены обозначения:

$$\hat{D}\psi = \frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 u_1 \psi) + \frac{\partial}{\partial x_3} (u_3 \psi),$$

$$\hat{D}_t \psi = u_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} (x_1 u_1 \psi) + u_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3}.$$

Сделаем еще одно допущение. В уравнении (47) будем считать произведение  $\langle v_1 L_2 \rangle \frac{\partial M_2}{\partial x_1}$  величиной более высокого порядка малости, чем члены, порождаю-

щие диффузионные поправки в рассматриваемых уравнениях. Другими словами, если  $\langle v_1 L_2 \rangle \sim \varepsilon U M$  и  $\frac{\partial M_2}{\partial x_1} \sim \varepsilon \frac{M_2}{L_1}$ , где  $\varepsilon$  – малая величина, равная нулю, если диффузии нет, а  $U, M_2, L_1$  – масштабы скорости, момента количества движения и длины, то  $\langle v_1 L_2 \rangle \frac{\partial M_2}{\partial x_1} \sim \varepsilon^2 \frac{U M^2}{L_1}$ .

Заметим также следующее. В уравнениях (46)–(47)  $\langle L_1 L_1 \rangle = \langle L_2 L_2 \rangle = \frac{1}{2} (\langle \overline{M^2} \rangle - M_2^2)$  что следует из предположения 4. Тогда, вычитая уравнения, получим  $\hat{D}[(\langle L_1 L_1 \rangle - \langle L_2 L_2 \rangle) f] - 2B(\langle L_1 L_1 \rangle - \langle L_2 L_2 \rangle) f = 0$ . Решением этого уравнения при начальном условии на входе в сопло  $\langle L_1 L_1 \rangle - \langle L_2 L_2 \rangle = 0$  является  $\langle L_1 L_1 \rangle - \langle L_2 L_2 \rangle = 0$ . Так как  $\langle \overline{M^2} \rangle = \langle L_1 L_1 \rangle + \langle L_2 L_2 \rangle + M_2^2$ , имеем

$$\langle L_1 L_1 \rangle = \langle L_2 L_2 \rangle = \frac{1}{2} (\langle \overline{M^2} \rangle - M_2^2). \quad (48)$$

Поэтому вместо уравнений (46), (47) будем рассматривать только уравнение для  $\langle \overline{M^2} \rangle$ , которое будет иметь следующий вид:

$$\hat{D}_t (\langle \overline{M^2} \rangle n) + \frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 M_2 \langle v_1 L_2 \rangle n) - 2B \langle \overline{M^2} \rangle n = \Delta (\overline{M^2}). \quad (49)$$

Система моментных уравнений до второго порядка включительно с учетом сформулированных предположений окончательно в консервативной форме будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial A}{\partial x_3} + \frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 B) = C. \quad (50)$$

Здесь

$$A = u \begin{vmatrix} n \\ \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho T \\ \langle \overline{M^2} \rangle \\ M_2 \\ v M_2 + \langle v_1 L_2 \rangle \\ \rho v^2 + \langle \rho v_1 v_1 \rangle \end{vmatrix}, \quad B = f \begin{vmatrix} v \\ \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + \rho \langle v_1 v_1 \rangle \\ \rho v T \\ v \langle \overline{M^2} \rangle + M_2 \langle v_1 L_2 \rangle \\ v M_2 + \langle v_1 L_2 \rangle \\ 2v \langle v_1 L_2 \rangle + M_2 \langle v_1 v_1 \rangle + v^2 M_2 \\ \rho v (v^2 + 3 \langle v_1 v_1 \rangle) \end{vmatrix}, \quad (51)$$

$$C = \left. \begin{array}{l} \Delta(1) \\ \Delta(m) \\ \Delta(mv) - \rho(a_f(u - u_r) - b_f M_2 \Delta v + b_f \langle v_1 L_2 \rangle) \\ \Delta(mv) - \rho [a_f(v - v_r) + b_f M_2 \Delta u] \\ \Delta(mT) - a_f(T - T_r)\rho \\ \Delta(\overline{M}^2) - 2B_f \langle \overline{M}^2 \rangle n \\ \Delta(M_2) - B_f M_2 n \\ \Delta(vM_2) - n \left\{ (a_f + B_f)(M_2 v + \langle v_1 L_2 \rangle) - a_f M_2 v_r + b_f \Delta u (M_2^2 \langle \overline{M}^2 \rangle) / 2 \right\} \\ \Delta(mv^2) - \rho \left\{ 2a_f (\langle v_1 v_1 \rangle - v \Delta v) + 2b_f \Delta u (M_2 v + \langle v_1 L_2 \rangle) \right\} \end{array} \right\}, \quad (52)$$

где

$$u = u_3, v = u_1, a_f = a, B_f = -B, b_f = -b. \quad (53)$$

### Заключение

В настоящей статье кинетический подход распространен на модель двухфазного течения в осесимметричном сопле Лавала, которая учитывает радиальную диффузию капель под влиянием силы Магнуса, действующей на вращающуюся каплю, движущуюся со скоростью порядка 100 м/сек относительно газа в минимальном сечении сопла. Система уравнений с диффузией получена методом моментов из кинетического уравнения с точностью до моментов второго порядка. Учтены только моменты второго порядка, которые влияют на диффузию к стенке. Диффузия приведет к более раннему выпадению капель на стенку и разрушению сопла, поэтому она должна учитываться при профилировании контура сопла таким образом, чтобы срез сопла был ближе места выпадения.

### Список источников

1. Васенин И.М., Архипов В.А., Бутов В.Г., Глазунов А.А., Трофимов В.Ф. Газовая динамика двухфазных течений в соплах. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1986. 262 с.
2. Алиев А.В. и др. Внутренняя баллистика РДТТ / РАН / под ред. А.М. Липанова, Ю.М. Милёхина. М. : Машиностроение, 2007. 504 с.
3. Крайко А.Н., Нигматулин Р.И., Старков В.К., Стернин Л.Е. Механика многофазных сред // Итоги науки и техники Гидромеханика. М. : Изд-во ВИНТИ, 1972. Т. 6. С. 93–174.
4. Стернин Л.Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М. : Машиностроение, 1974. 212 с.
5. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М. : Наука, 1987. Ч. 1. 464 с.; Ч. 2. 360 с.
6. Крайко А.Н., Шрайбер А.А. К построению модели, описывающей в одномерном приближении двухфазное течение с коагуляцией частиц полидисперсного конденсата // ЖПМТФ. 1974. № 2. С. 67–74.
7. Стернин Л.Е., Маслов Б.Н., Шрайбер А.А., Подвысоцкий А.М. Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. М. : Машиностроение, 1980. 172 с.

8. Яненко Н.Н., Солоухин Р.И., Папырин А.Н., Фомин В.М. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц. Новосибирск : Наука, 1980. 160 с.
9. Шрайбер А.А. Многофазные полидисперсные течения с переменным фракционным составом дисперсных включений // Итоги науки и техники. Комплексные и специальные разделы механики. М. : Изд-во ВИНТИ, 1988. Т. 3. С. 3–80.
10. Рычков А.Д. Математическое моделирование газодинамических процессов в каналах и соплах. Новосибирск : Наука, 1986. 222 с.
11. Шишков А.А., Панин С.Д., Румянцев В.В. Рабочие процессы в ракетных двигателях твердого топлива. М. : Машиностроение, 1989. 239 с.
12. Липанов А.М., Бобрышев В.П., Алиев А.В., Спиридонов Ф.Ф., Лисица В.Д. Численный эксперимент в теории РДТТ / под ред. А.М. Липанова. Екатеринбург : Наука, 1994. 304 с.
13. Glazunov A.A., Vasenin I.M., Ivanov V.A., Kuvshinov N.E., Narimanov R.K. Two-Phase Flow in the Nozzles of Solid Rocket Motors // Journal of Propulsion and Power. 1995. V. 11 (4). P. 583–592.
14. Глазунов А.А., Васенина Т.В., Ерёмин И.В., Кувшинов Н.Е. Исследование неравновесных пространственных двухфазных течений в эллиптических соплах с учетом коагуляции, дробления и вращения частиц и полидисперсной модели осколков // Известия вузов. Физика. 2004. № 10. С. 31–36.
15. Стернин Л.Е., Шрайбер А.А. Многофазные течения газа с частицами. М. : Машиностроение, 1994. 320 сс.
16. Бутов В.Г., Васенин И.М., Дьяченко Н.Н. Модель движения полидисперсного конденсата с учетом случайных пульсаций скорости и температуры коагулирующихся частиц // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1981. № 3. С. 33–39.
17. Губертов А.М., Миронов В.В., Борисов Д.М. и др. Газодинамические и теплофизические процессы в ракетных двигателях твердого топлива / под ред. А.С. Коротева. М. : Машиностроение, 2004. 512 с.
18. Архипов В.А., Бушланов В.П., Васенин И.М. и др. Равновесные формы и устойчивость вращающихся капель // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1982. № 4. С. 13–20.
19. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Течение газа с частицами. М. : Физматлит, 2008. 600 с.
20. Наумов В.А., Соломенко А.Д., Яценко В.П. Влияние силы Магнуса на движение сферического твердого тела при большой угловой скорости // Инженерно-физический журнал. 1993. Т. 65, № 3. С. 287–290.
21. Гиришфельдер Дж., Керпис Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М. : Изд-во иностр. лит., 1961. 932 с.

### References

1. Vasenin I.M., Arhipov V.A., Butov V.G., Glazunov A.A., Trofimov V.F. (1986) *Gazovaya dinamika dvukhfaznykh techeniy v soplakh* [Gas dynamics of two-phase flows in nozzles]. Tomsk: Izdatel'stvo Tomskogo universiteta.
2. Aliev A. V., Amaratov G. N., Akhmadeev V. F., Babuk V. A. (2007) *Vnutrennyaya ballistika RDTT* [Internal ballistics of solid propellant rocket engine]. Moscow. Mashinostroenie.
3. Krayko A.N., Nigmatulin R.I., Starkov V.K., Sternin L.E. (1972) *Mekhanika mnogofaznykh sred* [Mechanics of multiphase media]. *Itogi nauki i tekhniki. Gidromekhanika*. 6. Moscow: Izdatel'stvo VINITI.
4. Sternin L.E. (1974) *Osnovy gazodinamiki dvukhfaznykh techeniy v soplakh* [Fundamentals of gas dynamics of two-phase flows in nozzles]. Moscow: Mashinostroenie.
5. Nigmatulin R.I. (1987) *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of multiphase media]. Part I. Moscow: Nauka.
6. Krayko A.N., Shrayber A.A. (1974). К построению модели, описывающей в одномерном приближении двухфазное течение с коагуляцией частиц полидисперсного конденсата

- [On the development of a one-dimensional model describing a two-phase flow with coagulation of particles of polydisperse condensate]. *ZHPMTF*. 2. pp. 67–74.
7. Sternin L.E., Maslov B.N., Shrayber A.A., Podvysotskiy A.M. (1980) *Dvukhfaznye mono- i polidispersnye techeniya gaza s chastitsami* [Two-phase mono- and polydisperse flows of gas with particles]. Moscow: Mashinostroenie.
  8. Yanenko N.N., Soloukhin R.I., Papyrin A.N., Fomin V.M. (1980) *Sverkhzvukovye dvukhfaznye techeniya v usloviyakh skorostnoy neravnovesnosti chastits* [Supersonic two-phase flows under conditions of velocity nonequilibrium of particles]. Novosibirsk: Nauka.
  9. Shrayber A.A. (1988) *Mnogofaznye polidispersnye techeniya s peremennym fraktsionnym sostavom dispersnykh vkluycheniy* [Multiphase polydisperse flows with variable fractional composition of dispersed inclusions]. 3. Moscow: Izdatel'stvo. VINITI.
  10. Rychkov A.D. (1986) *Matematicheskoe modelirovanie gazodinamicheskikh protsessov v kanalakh i soplakh* [Mathematical modeling of gas-dynamic processes in channels and nozzles]. Novosibirsk: Nauka.
  11. Shishkov A.A., Panin S.D., Rummyantsev V.V. (1989) *Rabochie protsessy v raketnykh dvigatelyakh tverdogo topliva* [Working processes in solid propellant rocket engines]. Moscow: Mashinostroenie.
  12. Lipanov A.M., Bobryshev V.P., Aliev A.V., Spiridonov F.F., Lisitsa V.D. (1994) *Chislennyy eksperiment v teorii RDTT* [Numerical experiment in the theory of solid propellant rocket engines]. Ekaterinburg: Nauka.
  13. Glazunov A.A., Vasenin I.M., Ivanov V.A., Kuvshinov N.E., Narimanov R.K. (1995) Two-phase flow in the nozzles of solid rocket motors. *Journal of Propulsion and Power*. 11(4). pp. 583–592.
  14. Glazunov A.A., Vasenina T.V., Eryomin I.V., Kuvshinov N.E. (2004) Issledovanie neravnovesnykh prostranstvennykh dvukhfaznykh techeniy v ellipticheskikh soplakh s uchedom koagulyatsii, drobleniya i vrashcheniya chastits i polidispersnoy modeli oskolok [Investigation of non-equilibrium spatial two-phase flows in elliptical nozzles with account for coagulation, breakup, and rotation of particles and polydisperse model of fragments]. *Fizika. Izvestiya VUZov – Russian Physics Journal*. 10. pp. 31–36.
  15. Sternin L.E., Shrayber A.A. (1994) *Mnogofaznye techeniya gaza s chastitsami* [Multiphase flows of gas with particles]. Moscow: Mashinostroenie.
  16. Butov V.G., Vasenin I.M., D'yachenko N.N. (1981) Model' dvizheniya polidispersnogo kondensata s uchedom sluchaynykh pul'satsiy skorosti i temperatury koaguliruyushchikhsya chastits [Model of polydisperse condensate motion with allowance for random pulsations of velocity and temperature of coagulating particles]. *Izvestiya AN SSSR. MZHG*. 3. pp. 33–39.
  17. Gubertov A.M., Mironov V.V., Borisov D.M., Baskakov V.N., Volkova L.I., Volkov N.N., Gollender R.G., Gurina I.N., Dolganov Ya.A., Kalinin S.V., Kochetkov Yu.M., Kuranov M.L., Sivenkov V.N., Sonin V.I., Trusov Yu.D., Filimonov M.L., Yakovleva T.A. (2004) *Gazodinamicheskie i teplofizicheskie protsessy v raketnykh dvigatelyakh tverdogo topliva* [Gasdynamic and thermophysical processes in solid rocket propulsion]. Moscow: Mashinostroenie.
  18. Arkhipov V.A., Bushlanov V.P., Vasenin I.M., Rusakov V.V., Trofimov V.F. (1982) Ravnovesnye formy i ustoychivost' vrashchayushchikhsya kapel' [Equilibrium shapes and stability of rotating drops]. *Izvestiya. AN SSSR. MZHG*. 4. pp. 13–20.
  19. Volkov K.N., Emel'yanov V.N. (2008) *Techenie gaza s chastitsami* [Flow of a gas with particles]. Moscow: FIZMATLIT.
  20. Naumov V.A., Solomenko A.D., Yatsenko V.P. (1993) Vliyanie sily Magnusa na dvizhenie sfericheskogo tverdogo tela pri bol'shoi uglovoi skorosti [Effect of the Magnus force on the spherical rigid body motion at high angular velocity]. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal – Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 65(3). pp. 287–290.
  21. Hirschfelder J.O., Curtiss Ch.F., Bird R.B. (1954) *Molecular Theory of Gases and Liquids*. New York: John Wiley and Sons.

**Сведения об авторах:**

**Бушланов Владимир Петрович** – доктор физико-математических наук, профессор Государственного морского университета им. адмирала Ф.Ф. Ушакова, Новороссийск, Россия. E-mail: bpv@ngs.ru

**Бутов Владимир Григорьевич** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом математической физики Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: bvg@niipmm.tsu.ru

**Глазунов Анатолий Алексеевич** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: gla@niipmm.tsu.ru

**Information about the authors:**

**Bushlanov Vladimir P.** (Doctor of Physics and Mathematics, Admiral Ushakov Maritime State University, Novorossiysk, Russian Federation). E-mail: bvp@ngs.ru

**Butov Vladimir G.** (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bvg@niipmm.tsu.ru

**Glazunov Anatoliy A.** (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gla@niipmm.tsu.ru

*Статья поступила в редакцию 13.06.2023; принята к публикации 10.07.2023*

*The article was submitted 13.06.2023; accepted for publication 10.07.2023*

Научная статья

УДК 533.17, 536.46, 662.612

doi: 10.17223/19988621/84/9

## Исследование особенностей горения высокоплотных топлив в условиях сопловой установки

Алексей Сергеевич Дьячковский<sup>1</sup>, Константин Сергеевич Рогаев<sup>2</sup>,  
Александр Николаевич Ищенко<sup>3</sup>, Нина Михайловна Саморокова<sup>4</sup>,  
Алексей Дмитриевич Сидоров<sup>5</sup>, Евгений Юрьевич Степанов<sup>6</sup>,  
Анастасия Денисовна Кодякова<sup>7</sup>

*1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 Томский государственный университет, Томск, Россия*

*<sup>1</sup> lex\_okha@mail.ru*

*<sup>2</sup> rogaev@jf.tsu.ru*

*<sup>3</sup> ichan@niipmm.tsu.ru*

*<sup>4</sup> Samorokova\_nina@mail.ru*

*<sup>5</sup> alex\_sid92@mail.ru*

*<sup>6</sup> stepanov\_eu@mail.ru*

*<sup>7</sup> ssstasya.kod@mail.ru*

**Аннотация.** Рассмотрено горение высокоплотных топлив в условиях манометрической бомбы и сопловой установки. Исследованы некоторые особенности истечения продуктов сгорания пороха и топлива через различные конфигурации соплового блока. Предложены некоторые способы открытия соплового блока. Получены законы горения исследуемых топлив в условиях замкнутого и полужамкнутого объема при истечении газа через сопло.

**Ключевые слова:** сопловая установка, закон горения, истечение, высокоплотное топливо, пастообразное топливо

**Благодарности:** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-79-10054, <https://rscf.ru/project/21-79-10054/>

**Для цитирования:** Дьячковский А.С., Рогаев К.С., Ищенко А.Н., Саморокова Н.М., Сидоров А.Д., Степанов Е.Ю., Кодякова А.Д. Исследование особенностей горения высокоплотных топлив в условиях сопловой установки // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 109–122. doi: 10.17223/19988621/84/9

Original article

## A study of combustion features of high-density propellants in a nozzle test facility

Aleksey S. D'yachkovskiy<sup>1</sup>, Konstantin S. Rogaev<sup>2</sup>,  
Aleksandr N. Ishchenko<sup>3</sup>, Nina M. Samorokova<sup>4</sup>, Aleksey D. Sidorov<sup>5</sup>,  
Evgeniy Yu. Stepanov<sup>6</sup>, Anastasiya D. Kodyakova<sup>7</sup>

<sup>1, 2, 3, 4, 5, 6, 7</sup> Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

<sup>1</sup> lex\_okha@mail.ru

<sup>2</sup> rogaev@ftf.tsu.ru

<sup>3</sup> ichan@niipmm.tsu.ru

<sup>4</sup> Samorokova\_nina@mail.ru

<sup>5</sup> alex\_sid92@mail.ru

<sup>6</sup> stepanov\_eu@mail.ru

<sup>7</sup> ssstasya.kod@mail.ru

**Abstract.** This paper considers the combustion of high-density propellants with the use of a manometric bomb and a nozzle test facility. The propellant combustion within the manometric bomb is explored at ignition pressures of 18, 50, and 100 MPa. The study results for the propellant combustion in the laboratory nozzle test facility, including a set of nozzles with throat diameters varying from 8 to 20 mm, are presented. The nozzle cluster allows one to adjust the opening pressure up to about 200 MPa. A microwave radar is used to detect the moment of nozzle opening. Some features of the outflow of gunpowder and propellant combustion products are revealed at various geometric dimensions of the nozzle cluster and its opening methods. The laws of propellant combustion along the end face in closed and semi-closed volumes with the gas outflow from a nozzle are obtained. Good agreement is observed in terms of the pressure curve shapes on the ascending and descending branches. The discrepancy in the maximum pressure is less than 5%. The parametric study results for the end combustion of high-density propellants at various nozzle diameters are presented. It is shown that the considered propellants can be used to maintain constant pressure in a semi-closed volume.

**Keywords:** nozzle test facility, burning law, outflow, high-density propellant, paste-like propellant

**Acknowledgments:** This research was supported by the Russian Science Foundation (project No. 21-79-10054).

**For citation:** D'yachkovskiy, A.S., Rogaev, K.S., Ishchenko, A.N., Samorokova, N.M., Sidorov, A.D., Stepanov, E.Yu., Kodyakova, A.D. (2023) A study of combustion features of high-density propellants in a nozzle test facility. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 109–122. doi: 10.17223/19988621/84/9

### Введение

В настоящее время одним из перспективных направлений исследований повышения скорости артиллерийских снарядов является использование нетрадицион-

ной схемы выстрела с присоединенным зарядом [1–3]. Для проведения натуральных испытаний перспективных зарядов необходимы знания об особенностях горения новых высокоплотных топлив в условиях, приближенных к реальным. Условия, реализуемые в сопловой установке, являются близкими к реальному выстрелу из ствольной системы, в отличие от манометрической бомбы [4–8]. Сопловая установка позволяет воспроизвести газодинамические параметры, а также компоновку заряда и среднюю плотность заряжения, как в условиях ствольной системы. В таких устройствах практически отсутствует теплообмен с окружающей средой, и можно считать процесс истечения адиабатным. Ранее было получено, что для пироксилиновых порохов происходит снижение скорости горения частицы при резком спаде давления, реализуемом, например, при выходе снаряда из ствола или открытии соплового канала [9].

Цель данной работы – исследование горения модельных высокоэнергетических высокоплотных топлив в условиях замкнутого и полузамкнутого объема и определение режимов работы сопловой установки.

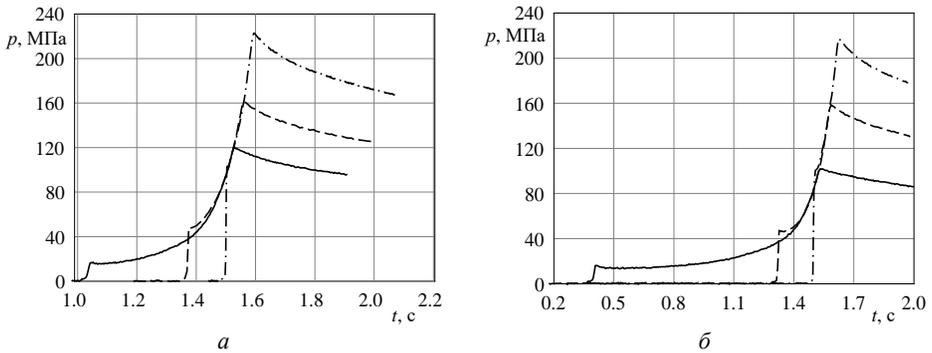
### **Экспериментальное исследование закона горения высокоплотного топлива в условиях манометрической бомбы**

В серии предварительных экспериментов исследована зависимость закона горения высокоплотных топлив в условиях манометрической бомбы (марок Т1 и Т2) для различных уровней давления воспламенения. Исследуемые составы Т1 и Т2 отличаются по своим физико-химическому составу и скорости горения. Начальное давление воспламенения необходимо высокоплотному топливу для перехода от медленного горения, которое реализуется при низких давлениях (до 10 МПа), к ускоренному режиму, приближенному к номинальному (рабочему).

Начальное давление воспламенения 18, 50 и 100 МПа создавалось массой порохового воспламенителя 2,5, 7 и 14 г соответственно. Несмотря на то, что весь пороховой заряд успевает сгореть полностью до начала момента горения исследуемого топлива, для более точного определения закона горения высокоплотного топлива ранее в серии предварительных экспериментов уточнен закон горения пороха [10]. На рис. 1 показаны зависимости давления от времени для высокоплотных топлив Т1 и Т2 при различной массе порохового воспламенителя.

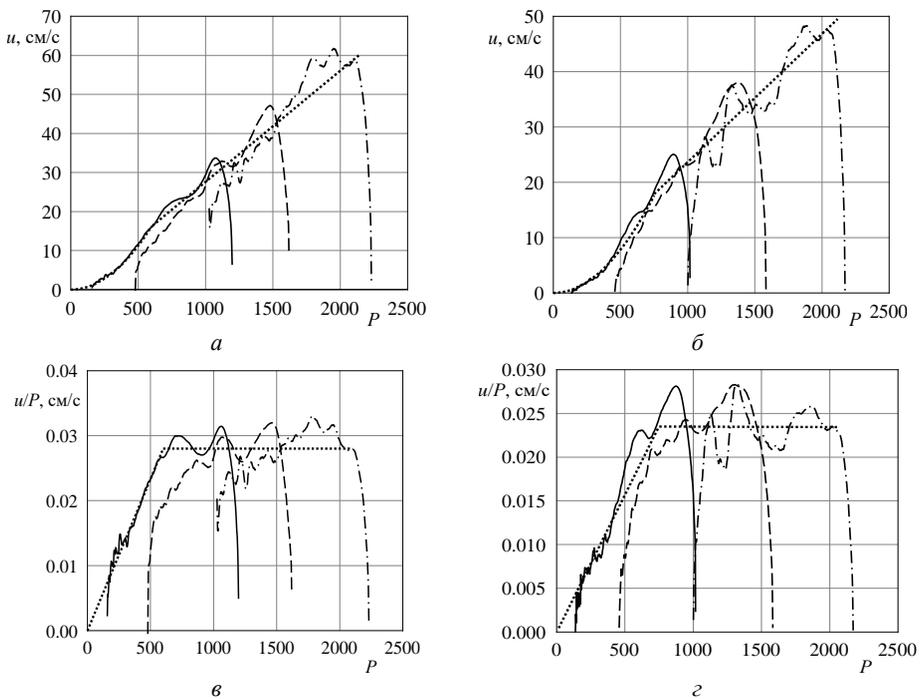
Из рис. 1 видно, что при наименьшем давлении воспламенения (18 МПа) для топлива марки Т1 от начала воспламенения до момента полного сгорания заряда проходит около 500 мс, а для топлива марки Т2 – более чем в два раза дольше – 1 100 мс. Для обоих составов наблюдается рост скорости горения с увеличением давления. Увеличение давления воспламенения до 100 МПа сокращает общее время горения топлив примерно до 100 мс.

Полученные для исследуемых топлив зависимости давления от времени при различных начальных давлениях воспламенителя хорошо дополняют друг друга, образуя единую кривую горения заряда. Хорошее совпадение кривых на пересекающихся участках свидетельствует о том, что скорость горения исследуемых топлив не зависит от уровня давления воспламенения. Для проверки данного предположения проведена обработка экспериментальных зависимостей. Зависимость послойной скорости горения  $u(P)$ , где безразмерное давление  $P = p/p_0$ ,  $p_0 = 0.1$  Мпа, определяется аналогично [11].



**Рис. 1.** Экспериментальная зависимость давления от времени для высокоплотных топлив T1 (а) и T2 (б) при массе порохового воспламенителя: — — 2.5 г; - - - - - 7.0 г; - · - · - · 14.0 г

**Fig. 1.** Experimental time dependence of pressure for (a) T1 and (b) T2 high-density propellants at powder igniter masses of: — — 2.5 g; - - - - - 7.0 g; and - · - · - · 14.0 g



**Рис. 2.** Полученные зависимости скорости горения (а, б) и скорости горения, деленной на давление (в, з), от давления для высокоплотных топлив T1 (а, в) и T2 (б, з) при массе порохового воспламенителя: — — 2.5 г; - - - - - 7.0 г; - · - · - · 14.0 г (· · · · · — полученный закон горения)

**Fig. 2.** The obtained pressure dependences of the (a, b) burning rate and (c, d) burning rate divided by pressure for (a, c) T1 and (b, d) T2 high-density propellants at powder igniter masses of: — — 2.5 g; - - - - - 7.0 g; and - · - · - · 14.0 g (the dotted line denotes the obtained burning law)

На рис. 2 показаны полученные зависимости скорости горения  $u$  (а, б) и отношения скорости горения к давлению  $u/P$  (в, г) от давления для высокоплотных топлив Т1 и Т2 при различных начальных уровнях давления воспламенения заряда в условиях манометрической бомбы.

На рис. 2, в, г можно увидеть некоторые закономерности при горении топлив в исследованном диапазоне давлений, показывающие, что на начальном этапе с ростом давления идет «разгорание» топлив до определенного значения (600–750), а после можно считать, что величина  $u(P)/P$  постоянна и не зависит от давления. Анализ полученных экспериментальных результатов показал, что закон горения для топлив марок Т1 и Т2 практически не зависит от начального давления, создаваемого воспламенителем, а законы горения топлив удобно аппроксимировать двучленной зависимостью. Для топлива марки Т1 (см. рис. 2, а, в) зависимость  $u/P(P)$  можно представить в виде:

$$\begin{cases} u/P(P) = 4.66 \cdot 10^{-5} P & (0 < P < 600), \\ u/P(P) = 2.83 \cdot 10^{-2} & (P \leq 600). \end{cases}$$

Тогда закон горения исследуемого топлива  $u(P)$  будет иметь вид (размерность см/с):

$$\begin{cases} u(P) = 4.66 \cdot 10^{-5} P^2 & (0 < P < 600), \\ u(P) = 2.83 \cdot 10^{-2} P & (P \leq 600). \end{cases} \quad (1)$$

Аналогичные зависимости получены для топлива марки Т2 (см. рис. 2, б, г):

$$\begin{cases} u/P(P) = 3.128 \cdot 10^{-5} P & (0 < P < 750), \\ u/P(P) = 2.344 \cdot 10^{-2} & (P \leq 750), \\ u(P) = 3.128 \cdot 10^{-5} P^2 & (0 < P < 750), \\ u(P) = 2.344 \cdot 10^{-2} P & (P \leq 750). \end{cases} \quad (2)$$

Представленные законы горения использовались для определения условий зажигания сопловой баллистической установки.

### Экспериментальная сопловая установка для исследования горения высокоплотных топлив

В исследовании использовалась лабораторная сопловая установка с возможностью замены сопла с диаметром критического сечения до 20 мм и свободным объемом камеры сгорания 118 см<sup>3</sup> (рис. 3). На рис. 3 показано расположение основных элементов установки: в корпусе установки (1) имеется камера сгорания, в которой располагаются исследуемое топливо (2) и пороховой воспламенитель (3). Для зажигания используется воспламенительное устройство (5), а для регистрации давления в камере сгорания применяется пьезоэлектрический датчик давления 2Т6000 (4) совместно с комплексом аппаратуры регистрации давления «Нейва-10000». В сопловом блоке (7) располагается сопло (6) с вышибным снарядам-заглушкой, позволяющим удерживать давление в сопловой камере до определенного значения, называемого «давлением форсирования». Для отслеживания момента форсирования снарядам-заглушки и открытия сопла используется СВЧ-радар. Точность регулировки уровня давления, при котором вскрывается сопло, напря-

мую зависит от точности выведения диаметра снаряда-заглушки для обеспечения посадки с натягом. В случае изготовления снаряда-заглушки из текстолита ее диаметр контролируется с точностью до 0.01 мм.



**Рис. 3.** Схема сопловой установки (а) и ее внешний вид (б): 1 – корпус, 2 – место расположения исследуемого топлива в камере сгорания, 3 – место расположения порохового заряда, 4 – датчик давления, 5 – воспламенительное устройство, 6 – сопло со снарядом-заглушкой, 7 – сопловой блок

**Fig. 3.** (a) Layout and (b) design of a nozzle test facility: 1, casing; 2, location of the studied propellant in a combustion chamber; 3, location of a powder charge; 4, pressure sensor; 5, igniter; 6, nozzle with a plug-like projectile; and 7, nozzle cluster

В установке возможно реализовать несколько способов открытия сопла; наиболее частыми являются три способа с различными конструкциями снаряда-заглушки: из полиэтиленовой пробки, полиэтиленовой пробки с «утяжелителем» и текстолитовой пробки. Полиэтиленовая пробка, запрессованная в сопло, обеспечивает его открытие (форсирование снаряда-заглушки) при давлении в камере заряжения до 40 МПа. Полиэтилен является радиопрозрачным материалом для электромагнитного излучения, поэтому для регистрации движения такой пробки на торец крепилась алюминиевая фольга. Во втором случае использовался «утяжелитель» для увеличения времени выхода полиэтиленового снаряда-заглушки из сопла. Для этого к торцу снаряда-заглушки крепился «утяжелитель» в виде стального стержня, располагаемый в сопловом блоке сразу за соплом. Увеличение массы утяжелителя приводит к более медленному движению снаряда-заглушки по соплу, тем самым увеличивая максимальное давление, развиваемое в камере сгорания при изменении внутреннего объема. Другим вариантом увеличения давления в камере сгорания может быть увеличение трения снаряда-заглушки при движении по соплу и величины давления форсирования. Замена материала снаряда-заглушки с полиэтилена на текстолит позволяет увеличить (регулировать) величину давления форсирования снаряда-заглушки вплоть до 200 МПа. В экспериментальных исследованиях в качестве материала снаряда-заглушки использовался текстолит.

### Экспериментальные исследования горения высокоплотного топлива в условиях сопловой установки

В условиях сопловой установки исследовано горение топлива марки Т2. В качестве воспламенительного заряда использовался порох массой 2.0 г, формирующий давление воспламенения в камере сопловой установки до 17 МПа. Внутри

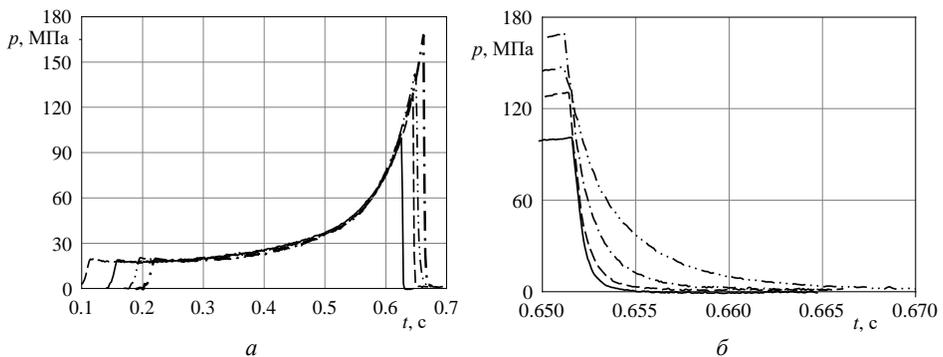
установки высокоэнергетическое топливо располагалось в полиэтиленовых контейнерах с внутренним диаметром 20 мм. Внешний вид контейнера с топливом, подготовленным к эксперименту, представлен на рис. 4.



**Рис. 4.** Внешний вид топлива в полиэтиленовом контейнере, подготовленного к эксперименту: (а) вид сверху; (б) вид сбоку

**Fig. 4.** Arrangement of the propellant in a polyethylene container prepared for the experiment: (a) top and (b) side views

На рис. 5 представлены экспериментальные зависимости давления от времени для высокоплотного топлива Т2 для различных диаметров критического сечения сопла (8, 12, 17 и 20 мм). До момента открытия сопла сопловую установку можно рассматривать как манометрическую бомбу и аналогичным образом получить закон горения топлива. Картина горения топлива Т2 в условиях сопловой установки представлена на рис. 5, а. В начале кривой наблюдается быстрый рост давления до определенного значения, формируемого пороховым воспламенительным зарядом. Имеется небольшой разброс во времени воспламенения топлива, однако наблюдается хорошее совпадение кривых на участке горения топлива; основное различие наблюдается в максимальном давлении, соответствующем моменту открытия соплового блока.

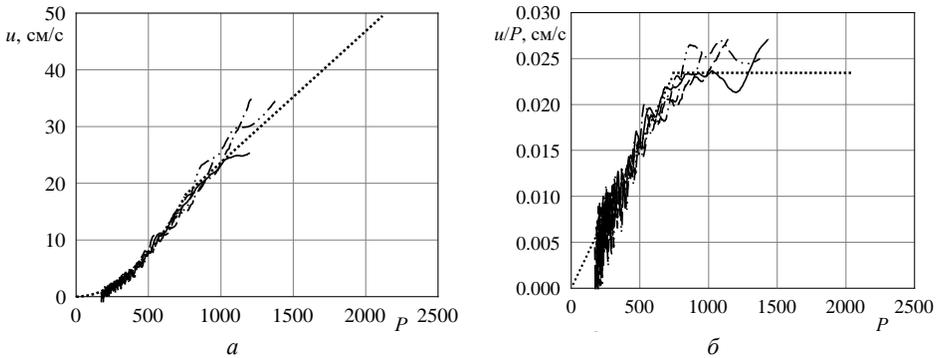


**Рис. 5.** Экспериментальные зависимости давления от времени для высокоплотного топлива Т2 для различных диаметров критического сечения сопла:  
 — 20 мм; - - - - - 17 мм; - · - · - 12 мм; · · · · · 8 мм

**Fig. 5.** Experimental time dependences of pressure for T2 high-density propellant at various nozzle throat diameters: — 20 mm; - - - - - 17 mm; - · - · - 12 mm; and · · · · · 8 mm

Рассмотрим более детально кривые давления в момент открытия соплового блока. На рис. 5, б представлены экспериментальные зависимости давления от времени в момент открытия соплового блока для различных диаметров критического сечения сопла. Из рис. 5, б видно, что уменьшение диаметра критического сечения сопла, как и ожидалось, приводит к более медленному падению давления внутри сопловой установки. В такой конфигурации газоприход, получаемый при сгорании топлива, позволит поддерживать давление до уровня 10 МПа после открытия соплового блока всего 1.2 мс. Уменьшение площади сопла в 6.2 раза (до диаметра 8 мм) увеличило время истечения продуктов горения до аналогичного давления в камере до 9.0 мс.

На рис. 6 показаны полученные зависимости скорости горения  $u(P)$  (см. рис. 6, а) и отношения скорости горения к давлению  $u/P(P)$  (см. рис. 6, б) от давления для высокоплотного топлива марки Т2 для различных диаметров критического сечения. Сравнивая полученные для Т2 зависимости  $u(P)$  и  $u/P(P)$  с аппроксимацией, полученной ранее для экспериментов, проведенных в манометрической бомбе (пунктирные линии), видим достаточно хорошее совпадение. Возможные особенности закона горения исследуемого топлива в условиях сопловой установки при открытии сопла можно получить путем математической обработки кривых давления.



**Рис. 6.** Зависимости скорости горения (а) и отношения скорости горения к давлению (б) от давления для высокоплотного топлива Т2 для различных диаметров критического сечения сопла: — — — — 20 мм; - - - - 17 мм; - · - · - 12 мм; · · · · · 8 мм (· · · · · — полученный закон горения)

**Fig. 6.** Pressure dependences of the (a) burning rate and (c) burning rate divided by pressure for T2 high-density propellant at various nozzle throat diameters: — — — — 20 mm; - - - - 17 mm; - · - · - 12 mm; and · · · · · 8 mm (the dotted line denotes the obtained burning law)

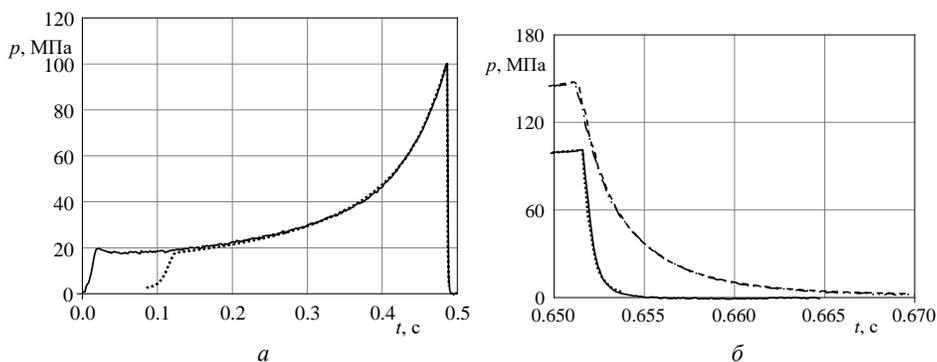
Из рис. 6, а видно, что для топлива марки Т2 в различных экспериментах наблюдается небольшое отличие в значениях скорости горения. Аналогично результатам манометрических исследования для топлива Т2 (см. рис. 6, б) также наблюдается период разгорания с выходом на постоянную скорость горения, не зависящую от давления, а значит, торцевой закон горения топлива марки Т2 можно оставить в виде (2).

Эксперименты с топливом марки Т1 в условиях сопловой бомбы не проводились, так как анализ горения топлива Т2 в торцевом режиме показал, что при горении топлива марки Т1 в аналогичных условиях диаметр сопла будет отли-

чаться незначительно и существенно не изменит картину газоприхода при спаде давления после открытия сопла.

### Параметрическое исследование горения высокоплотных топлив для различных сопел

Проведя обработку экспериментальных данных с использованием полученных законов горения, решая прямую задачу внутренней баллистики с движением поршня и истечением газо-пороховой смеси, получаем хорошее согласование формы расчетных и экспериментальных зависимостей кривых давления от времени на всех участках (при росте и снижении давления). На рис. 7 представлен результат согласования расчетной и экспериментальной зависимостей давления от времени при сгорании топлива Т2 в условиях сопловой установки.

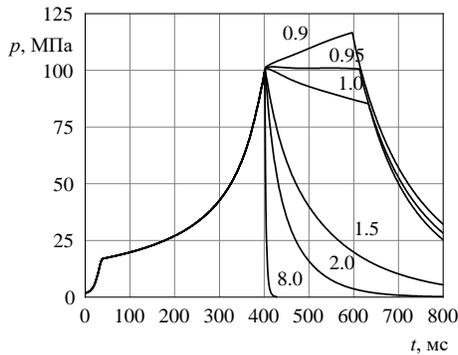


**Рис. 7.** Расчетные и экспериментальные зависимости давления от времени для различных диаметров критического сечения сопла: 20 мм (— — эксперимент, ····· — расчет); 8 мм (· - - - - — эксперимент, - - - - - расчет)

**Fig. 7.** Calculated and experimental time dependences of pressure at various nozzle diameters: 20 mm (— — experiment, ····· — calculation) and 8 mm (· - - - - — experiment, - - - - - calculation)

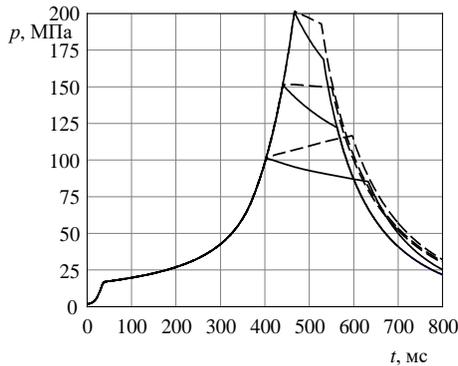
Обработка экспериментальных результатов проводилась с применением аппарата математического моделирования [12]. Получено хорошее согласование по форме кривой давления на восходящей и нисходящей ветвях. Рассогласование по величине максимального давления не превысило 5%. Это свидетельствует о том, что закон скорости горения при падении давления не изменяется в данном диапазоне давлений.

С применением данного закона горения топлива марки Т2 проведено параметрическое исследование влияния диаметра критического сечения сопла на формирование картины газоприхода в камере сопловой установки. На рис. 8 представлены результаты расчетного параметрического исследования в виде зависимостей давления от времени для различных диаметров критических сечений сопла. Из графиков видно, что для каждого типа топлива можно подобрать такой диаметр истечения, при котором давление в камере сопловой установки будет повышаться или оставаться постоянным в период горения заряда.



**Рис. 8.** Расчетные зависимости давления от времени для различных режимов истечения сопла; диаметры критических сечений: 8.0, 2.0, 1.5, 1.0, 0.9 мм при давлении 100 МПа  
**Fig. 8.** Calculated time dependences of pressure at various nozzle flow regimes with nozzle throat diameters of: 8.0; 2.0; 1.5; 1.0; and 0.9 mm at a pressure of 100 МPa

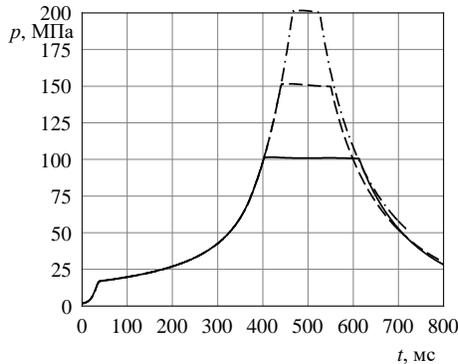
На рис. 9 показаны расчетные зависимости давления в сопловой камере от времени для различных режимов истечения сопла. Рассмотрим диаметры критического сечения сопла 0.9 и 1.0 мм при режимах форсирования снаряда-заглушки, соответствующих давлению 100, 150 и 200 МПа.



**Рис. 9.** Расчетные зависимости давления от времени для различных режимов истечения сопла:  
 - - - - - 0.9 мм при давлении 100 МПа, 150 МПа, 200 МПа  
 — — — — — 1.0 мм при давлении 100 МПа, 150 МПа, 200 МПа  
**Fig. 9.** Calculated time dependences of pressure at various nozzle flow regimes:  
 - - - - - a nozzle diameter of 0.9 mm at pressures of 100, 150, and 200 МPa;  
 — — — — — a nozzle diameter of 1.0 mm at pressures of 100, 150, and 200 МPa

Из рис. 9 видно, что при истечении из сопла с диаметром 1.0 мм при любом давлении открытия сопла в интервале 100–200 МПа газоприход от горящего в торцевом режиме топлива не превышает расход газа через сопло, тем самым давление в сопловом блоке постоянно понижается. Уменьшение диаметра сопла до 0.9 мм при давлении открытия сопла 100 МПа позволяет получить газоприход от горящего в торцевом режиме топлива, превышающий расход газа через сопло, тем самым повышая давление в сопловом блоке. Однако при увеличении давле-

ния открытия сопла до 150 и 200 МПа роста давления в сопловой камере уже не наблюдается, а присутствует его некоторое снижение, что говорит о необходимости регулировки уровня газоприхода от топлива или изменения критического диаметра сопла для поддержания равномерной тяги.



**Рис. 10.** Расчетные зависимости давления от времени для различных режимов истечения из сопла:

——— 0.95 мм (100 МПа); - - - - - 0.9 мм (150 МПа); - · - · - · - 0.87 мм (200 МПа)

**Fig. 10.** Calculated time dependences of pressure at various nozzle flow regimes:

——— 0.95 mm (at 100 MPa); - - - - - 0.9 mm (at 150 MPa); and - · - · - · - 0.87 mm (at 200 MPa)

На рис. 10 представлены расчетные зависимости давления от времени для нескольких вариантов диаметров критического сечения сопла (0.87, 0.9, 0.95 мм), позволяющие поддерживать одинаковый уровень давления в сопловой камере при различных давлениях в камере сопловой установки (100, 150 и 200 МПа) без изменения величины газоприхода от топлива. Другим вариантом поддержания равномерного давления в сопловой камере может быть управление поверхностью пастообразного топливного элемента. Тем самым показано, что используемые высокоплотные топлива могут быть использованы для поддержания давления в полузамкнутом объеме.

### Заключение

Рассмотрены некоторые особенности истечения продуктов сгорания пороха и топлива через различные конфигурации соплового блока. Предложены различные способы открытия соплового блока. Получены законы горения исследуемых высокоплотных топлив в условиях замкнутого объема и при истечении газа через сопло. Определены диаметры сечения сопла, позволяющие поддерживать одинаковый уровень давления в сопловой камере при различных давлениях в камере сопловой установки. Показано, что используемые высокоплотные топлива могут быть использованы для поддержания давления в полузамкнутом объеме. В результате расчетов получено, что при горении топлива Т2 в торцевом режиме для поддержания уровня давления в камере сопловой установки 100 МПа после открытия сопла необходимо иметь диаметр критического истечения равным 0.95 мм.

## Список источников

1. Lu X., Zhou Y., Yu Y. Experimental and numerical investigations on traveling charge gun using liquid fuels // J. Appl. Mech. 2011. V. 78, is. 5. P. 051002-1– 051002-6.
2. Liang T., Lv B., Ma Z., Zhong-liang Xiao. The research on energy releasing control of travelling charge // International Conference on Computer Science and Electronic Technology (ICCSET 2014). 2014. P. 67–70.
3. Ермолаев Б.С., Сулимов А.А., Романьков А.В. Присоединенный высокоплотный заряд конвективного горения в комбинированной схеме выстрела: новые результаты // Горение и взрыв. 2013. № 6. С. 206–210.
4. Ермолаев Б.С., Сулимов А.А., Романьков А.В., Храповский В.Е., Беляев А.А., Кроули А.Б. Конвективное горение блочных зарядов из семиканальных пороховых зерен, ингибированных поливинилбутиралем // Химическая физика. 2015. Т. 34, № 5. С. 47–57.
5. Пенский О.Г., Русаков С.В. К расчету истечения пороховых газов из сосуда с соплом // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы : межвуз. сб. науч. тр. Пермь : Пермский гос. ун-т, 2007. Вып. 39. С. 184–196.
6. Новожилов Б.В., Каганова З.И., Беляев А.А. Нестационарные режимы горения пороха в полузамкнутом объеме // Химическая физика. 2009. Т. 28, № 12. С. 31–39.
7. Маршаков В.Н., Новожилов Б.В. Переходные режимы горения баллиститного пороха в полузамкнутом объеме // Химическая физика. 2011. Т. 30, № 1. С. 25–37.
8. Иванов С.М., Цуканов Н.А. Оценка динамических характеристик нестационарного горения твердого топлива в полузамкнутом объеме по измерениям регулируемого давления // Физика горения и взрыва. 2002. Т. 38, № 1. С. 80–91.
9. Серебряков М.Е. Внутренняя баллистика ствольных систем и пороховых ракет. М. : Оборонгиз, 1962. 703 с.
10. Хоменко Ю.П., Ищенко А.Н., Саморокова Н.М. Интегриродифференциальный метод определения законов скорости горения конденсированных систем в условиях постоянного объема // Физика горения и взрыва. 1999. Т. 35, № 1. С. 67–71.
11. Рогаев К.С., Дьячковский А.С., Ищенко А.Н., Саморокова Н.М., Степанов Е.Ю., Гимаева Н.Р. Исследование особенностей зажигания и горения высокоплотных зарядов в условиях постоянного объема // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 81. С. 123–132. doi: 10.17223/19988621/81/11
12. Хоменко Ю.П., Ищенко А.Н., Касимов В.З. Математическое моделирование внутрибаллистических процессов в ствольных системах. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 1999. 256 с.

## References

1. Lu X., Zhou Y., Yu Y. (2011) Experimental and numerical investigations on traveling charge gun using liquid fuels. *Journal of Applied Mechanics*. 78(5). Article 051002. pp. 1–6. doi: 10.1115/1.4004292
2. Liang T., Lv B., Ma Z., Xiao Z. (2015) The research on energy releasing control of travelling charge. *Proceedings of the 2014 International Conference on Computer Science and Electronic Technology*. pp. 67–70. doi: 10.2991/iccset-14.2015.15
3. Ermolaev B.S., Sulimov A.A., Roman'kov A.V. (2013) Prisoedinyonnyy vysokoplotnyy zaryad konvektivnogo gorenija v kombinirovannoy skheme vystrela: Novye rezul'taty [Traveling high-density charge of convective burning in a hybrid configuration: new results]. *Gorenie i vzryv – Combustion and Explosion*. 6. pp. 206–210.
4. Ermolaev B.S., Sulimov A.A., Roman'kov A.V., Khrapovskiy V.E., Belyaev A.A., Krouli A.B. (2015) Konvektivnoe gorenje blochnykh zaryadov iz semikanal'nykh porokhovykh zeren, inhibirovannykh polivinilbutiralem [Convective combustion of block charges from seven-channel powder grains inhibited by polyvinyl butyral]. *Khimicheskaya fizika – Russian Journal of Physical Chemistry*. 34(5). pp. 47–57.

5. Penskiy O.G., Rusakov S.V. (2007) K raschetu istecheniya porokhovykh gazov iz sudov s soplom [To the calculation of the outflow of powder gases from vessels with a nozzle]. *Problemy mekhaniki i upravleniya: Nelineynye ob"emnye sistemy*. 39. pp. 184–196.
6. Novozhilov B.V., Kaganova Z.I., Belyaev A.A. (2009) Nestatsionarnye rezhimy gorenija porokha v poluzamknutom ob"eme [Non-stationary modes of gunpowder combustion in a semi-closed volume]. *Khimicheskaya fizika – Russian Journal of Physical Chemistry*. 28(12). pp. 31–39.
7. Marshakov V.N., Novozhilov B.V. (2011) Perekhodnye rezhimy gorenija ballistitnogo porokha v poluzamknutom ob"eme [Transitional modes of ballistic powder combustion in a semi-closed volume]. *Khimicheskaya fizika – Russian Journal of Physical Chemistry*. 30(1). pp. 25–37.
8. Ivanov S.M., Tsukanov N.A. (2002) Otsenka kharakteristik nestatsionarnogo gorenija tverdogo topliva v poluzamknutom ob"eme po izmereniyam reguliruemogo davleniya [Evaluation of dynamic characteristics of non-stationary combustion of solid fuel in a semi-closed volume by measuring controlled pressure]. *Fizika gorenija i vzryva – Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 38(1). pp. 80–91.
9. Serebryakov M.E. (1962) *Vnutrennyaya ballistika stvol'nykh sistem i porokhovykh raket* [Internal ballistics of barrel systems and powder rockets]. Moscow: Oborongiz.
10. Khomenko Yu.P., Ishchenko A.N., Samorokova N.M. (1999) Integrodifferentsial'nyy metod opredeleniya zakonov skorosti gorenija kondensirovannykh sistem v usloviyakh postoyannogo ob"ema [Integral and differential method for determining the laws of the burning rate of condensed systems under constant volume conditions]. *Fizika gorenija i vzryva – Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 35(1). pp. 67–71.
11. Rogaev K.S., D'yachkovskiy A.S., Ishchenko A.N., Samorokova N.M., Stepanov E.Yu., Gimaeva N.R. (2023) Issledovanie priznakov zazhiganiya i gorenija vysokoplotnykh zaryadov v usloviyakh postoyannoy obstanovki [A study of the ignition and combustion of high-density charges under constant volume conditions]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 81. pp. 123–132. doi: 10.17223/19988621/81/11
12. Khomenko Yu.P., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z. (1999) *Matematicheskoe modelirovanie vnutriballisticheskikh protsessov v stvolovykh sistemakh* [Mathematical modeling of intraballistic processes in barrel systems]. Novosibirsk: Izdatel'stvo SO RAN.

#### **Сведения об авторах:**

**Дьячковский Алексей Сергеевич** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: lex\_okha@mail.ru

**Рогаев Константин Сергеевич** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: rogaev@ftf.tsu.ru

**Ищенко Александр Николаевич** – доктор физико-математических наук, директор Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

**Саморокова Нина Михайловна** – научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: Samorokova\_nina@mail.ru

**Сидоров Алексей Дмитриевич** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: alex\_sid92@mail.ru

**Степанов Евгений Юрьевич** – младший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: stepanov\_eu@mail.ru

**Кодякова Анастасия Денисовна** – студент физико-технического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: ssstasya.kod@mail.ru

**Information about the authors:**

**D'yachkovskiy Aleksey S.** (Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lex\_okha@mail.ru

**Rogaev Konstantin S.** (Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: rogaev@ftf.tsu.ru

**Ishchenko Aleksandr N.** (Doctor of Physics and Mathematics, Director, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

**Samorokova Nina M.** (Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: Samorokova\_nina@mail.ru

**Sidorov Aleksey D.** (Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: alex\_sid92@mail.ru

**Stepanov Evgeniy Yu.** (Junior Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: stepanov\_eu@mail.ru

**Kodyakova Anastasiya D.** (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ssstasiya.kod@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 17.04.2023; принята к публикации 10.07.2023*

*The article was submitted 17.04.2023; accepted for publication 10.07.2023*

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/84/10

## Метод разделения переменных для задач линейно вязкоупругого анизотропного тела

Александр Андреевич Светашков<sup>1</sup>,  
Николай Амвросьевич Куприянов<sup>2</sup>, Михаил Сергеевич Павлов<sup>3</sup>

<sup>1, 2, 3</sup> *Томский политехнический университет, Томск, Россия*

<sup>3</sup> *Томский государственный университет, Томск, Россия*

<sup>1</sup> *svetashkov@tpu.ru*

<sup>2</sup> *kupriyanov@tpu.ru*

<sup>3</sup> *mmpavlov@tpu.ru*

**Аннотация.** В современной технике широко применяются композиционные материалы. Их особенностями являются вязкоупругие свойства связующего и компонент, а также анизотропия и неоднородность механических свойств. Последнее многократно усложняет прочностные расчеты. Для решения задач линейно вязкоупругого тела, обладающего свойствами анизотропии, сформулирован обобщенный принцип соответствия, согласно которому для вязкоупругого решения константы упругой анизотропии достаточно заменить некоторыми функциями времени.

**Ключевые слова:** эффективные модули лагранжевого и кастильянового типов, вариационная задача, анизотропия, ортотропия, интегральные операторы

**Для цитирования:** Светашков А.А., Куприянов Н.А., Павлов М.С. Метод разделения переменных для задач линейно вязкоупругого анизотропного тела // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 123–138. doi: 10.17223/19988621/84/10

Original article

## The method of separation of variables for linear viscoelastic anisotropic body problems

Aleksandr A. Svetashkov<sup>1</sup>, Nikolay A. Kupriyanov<sup>2</sup>, Mikhail S. Pavlov<sup>3</sup>

<sup>1, 2, 3</sup> *Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation*

<sup>3</sup> *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

<sup>1</sup> *svetashkov@tpu.ru*

<sup>2</sup> *kupriyanov@tpu.ru*

<sup>3</sup> *mmpavlov@tpu.ru*

**Abstract.** Nowadays, polymers are widely used in various fields. Such materials often exhibit viscoelastic properties. Engineering analysis considering viscoelasticity is laborious

and requires certain expertise. This paper proposes a method for solving linear viscoelastic problems in a simpler way and presents a variant of the solution extension to an anisotropic case.

The Volterra correspondence principle allows one to analyze viscoelastic bodies on the basis of the analytical solution like an elastic problem. The developed method is described in a similar way. It allows determining of some functions of time and material constants whose values at a certain point in time can be used as elastic constants. The solutions to these two problems are identical. To substantiate this statement, the authors consider the conditions for maximum equivalence of specific potential energy functionals of strain and stress (for the cases of kinematic and force boundary conditions, respectively) of viscoelastic and reference elastic media. The functions satisfying these conditions have been found, and a new method for solving the problems of linear viscoelasticity of an anisotropic body has been shown using several examples.

**Keywords:** effective modules of Lagrange and Castilian types, variational problem, anisotropy, orthotropy, integral operators

**For citation:** Svetashkov, A.A., Kupriyanov, N.A., Pavlov, M.S. (2023) The method of separation of variables for linear viscoelastic anisotropic body problems. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 123–138. doi: 10.17223/19988621/84/10

## Введение

Начало математического анализа вязкоупругих сред было положено Максвеллом, который сформулировал закон деформирования, зависящего от времени, в дифференциальном виде [1]. Далее Больцман и Вольтерра определили общий математический аппарат для описания линейной ползучести [2–4]. В течение XX столетия вопрос математического описания вязкоупругих свойств материалов был существенно развит [5, 6].

Практически единственным аналитическим способом точного решения прикладных задач остается принцип соответствия (Вольтерра). Главной проблемой для практического использования данного принципа, помимо вычислительной сложности, является необходимость иметь соответствующее упругое решение. В свою очередь, число аналитически решенных упругих задач ограничено. В связи с этим разработано большое число приближенных, в первую очередь численных, методов.

Ильющин [7], Шепери [8], сформулировали способы решения задач линейной вязкоупругости, основанные на преобразовании Лапласа и получившие широкое распространение в том числе и для задач, учитывающих анизотропию свойств анализируемой среды. Например, Wu и соавт. [9] используют подобный подход для анализа динамического отклика сваи в трансверсально изотропном слоистом грунте.

Калоеров и Кошкин в работе [10] развивают метод малого параметра для задач изгиба анизотропных вязкоупругих пластин.

Каминский и Селиванов в [11] рассматривают метод ветвящихся цепных дробей применительно к линейно вязкоупругим анизотропным телам.

Хольцапфель и Гассер [12] разработали способ моделирования вязкоупругих армированных волокнами композитов методом конечных элементов, опираясь в том числе на работу Симо [13], где, в свою очередь, была представлена трехмерная вязкоупругая модель с конечными деформациями, не ограниченная условием изотропии.

В задаче о деформации плоского ортотропного тела [14] использован метод представления ядер вязкоупругой ортотропии в виде, в котором временная составляющая каждого из ядер одинакова. Разница между ядрами определяется только наличием постоянных множителей. Аналогичный метод применили и М.Н.М. Аллам, Б.Е. Победря [15].

Цель настоящей работы – развитие и обобщение метода разделения переменных [16] на случай вязкоупругих материалов, обладающих свойствами анизотропии.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим определяющие уравнения нестарееющего линейно вязкоупругого тела, обладающего свойствами анизотропии общего вида:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \Gamma_{ijkl}^* \sigma_{kl}, \quad \langle i, j = 1, 2, 3 \rangle, \quad (k, l = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Здесь по индексам, заключенным в круглые скобки, производится суммирование от 1 до 3. Если же индексы заключены в угловые скобки, то суммирование не производится. Оператор релаксации зададим следующим образом:

$$\Gamma_{ijkl}^* \sigma_{kl} = \int_0^t R_{ijkl}(t-\tau) \dot{\sigma}_{kl}(\tau) d\tau, \quad (k, l = 1, 2, 3), \quad \langle i, j = 1, 2, 3 \rangle.$$

Здесь  $R_{ijkl}(t)$  – функции релаксации, обладающие следующими свойствами симметрии:

$$R_{ijkl}(t) = R_{jikl}(t) = R_{ijlk}(t).$$

Кроме того, имеют место соотношения [17]

$$R_{ijkl}(t) = R_{klij}(t), \\ R_{ijkl}(0) = G_{ijkl}^0.$$

Здесь  $G_{ijkl}^0$  – тензор упруго-мгновенных постоянных. Число независимых функций памяти (и, следовательно, упругих постоянных) равняется 21.

Физические уравнения, разрешенные относительно напряжений, имеют следующий вид:

$$\sigma_{ij}(t) = C_{ijkl}^* \varepsilon_{kl}, \quad \langle i, j = 1, 2, 3 \rangle, \quad (k, l = 1, 2, 3). \\ C_{ijkl}^* \varepsilon_{kl} \equiv \int_0^t K_{ijkl}(t-\tau) \dot{\varepsilon}_{kl}(\tau) d\tau.$$

Свойства симметрии тензора функций ползучести  $K_{ijkl}(t)$  аналогичны свойствам соответствующих функций релаксации  $R_{ijkl}(t)$ .

Система уравнений равновесия в перемещениях имеет следующий вид:

$$\left[ C_{ijkl}^* u_{k,l} \right]_{,j} + X_i = 0, \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle, \quad (j, k, l = 1, 2, 3). \quad (2)$$

Здесь запятая перед индексом соответствует дифференцированию по пространственной координате. Например:

$$u_{k,l} = \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \quad \langle k, l = 1, 2, 3 \rangle,$$

здесь

$$\bar{u} = (u_1, u_2, u_3).$$

Граничные условия в напряжениях имеют вид:

$$C_{ijkl}^* u_{k,l} n_j \Big|_{\Sigma_1} = S_i^0, \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle, \quad (j, k, l = 1, 2, 3). \quad (3)$$

Здесь  $S_i^0$  – граничные нагрузки,  $\Sigma_1$  – часть границы  $\Sigma$ , на которой заданы напряжения,  $n_j$  – направляющие косинусы нормали к границе.

Граничные условия в перемещениях:

$$\bar{u} \Big|_{\Sigma_2} = \bar{u}^0,$$

где  $\bar{u}^0$  – вектор граничных перемещений,  $\Sigma_2$  – часть границы тела  $\Sigma$ , на которой заданы перемещения.

## 2. Вывод выражений эффективных модулей кастильянового типа

Как и в случае изотропного вязкоупругого тела [16], задача определения эффективных модулей анизотропии разбивается на две. Первая задача заключается в нахождении модулей, дающих решение граничной задачи II рода, когда на границе заданы напряжения. Вторая задача состоит в определении эффективных по времени модулей для граничных задач I рода, при заданных на границе перемещениях.

Для первого случая эффективные модули носят название эффективных по времени модулей кастильянового типа, для второго – эффективных по времени модулей лагранжевого типа. С целью простоты изложения в дальнейших рассуждениях будем опускать фразу «по времени» в ссылках на термин «эффективные модули».

Рассмотрим сначала определение эффективных модулей кастильянового типа граничной задачи II рода для вязкоупругих тел, обладающих свойствами анизотропии общего вида. Без ограничения общности будем полагать, что граничные напряжения можно представить в виде произведения заданной функции координат на заданную функцию времени:

$$\sigma_{ij} n_j = S_i^0, \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle, \quad (j = 1, 2, 3).$$

Не ограничивая общности, будем полагать, что

$$S_i^0 = S_{ik}^0(\bar{x}) H_{ik}(t), \quad \langle i = 1, 2, 3 \rangle, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

где  $n$  – количество членов в разложении граничной нагрузки.

Заданные функции времени  $H_{ik}(t)$  будем считать положительными и отличными от 0 на интервале  $(0; T]$ , где  $T$  – граница временного интервала, на котором отыскивается решение граничной задачи.

Для формулировки вариационной задачи нам понадобятся определяющие уравнения упругой среды сравнения с модулями, зависящими от времени. Зададим их в следующем виде:

$$\varepsilon_{ij}^0(t) = P_{ijkl}(t) \sigma_{kl}(t), \quad \langle i, j = 1, 2, 3 \rangle, \quad (k, l = 1, 2, 3). \quad (4)$$

Здесь  $P_{ijkl}(t)$  – искомые эффективные модули, вид которых пока неизвестен.

Запишем выражения функционалов удельных потенциальных энергий напряжений для сред с определяющими уравнениями (1), (2):

$$P(\dot{\sigma}_{ij}) = \int_0^T \dot{\sigma}_{ij}(t) \Gamma_{ijkl}^* \sigma_{kl} dt, \quad (5)$$

$$P_0(\dot{\sigma}_{ij}) = \int_0^T \dot{\sigma}_{ij}(t) P_{ijkl}(t) \sigma_{kl}(t) dt, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3). \quad (6)$$

Функционалы (5), (6) могут быть приведены к положительно-определенному виду [18]. Существуют постоянные  $M > m > 0$ , для которых будут справедливы следующие неравенства:

$$mP_0(\dot{\sigma}_{ij}) \leq P(\dot{\sigma}_{ij}) \leq MP_0(\dot{\sigma}_{ij}). \quad (7)$$

Константы  $M, m$  можно найти путем решения двух вариационных задач на условный экстремум:

$$m = \min P(\dot{\sigma}_{ij}), \quad M = \max P(\dot{\sigma}_{ij}),$$

$$P_0(\dot{\sigma}_{ij}) = 1, \quad P_0(\dot{\sigma}_{ij}) = 1.$$

Перейдем от решений задач на условный экстремум к решению задачи на безусловный экстремум для функционала

$$P_1(\dot{\sigma}_{ij}) = P(\dot{\sigma}_{ij}) - \mu P_0(\dot{\sigma}_{ij}), \quad (8)$$

введя множитель Лагранжа  $\mu$ .

Варьирование функционала (8) по  $\dot{\sigma}_{ij}$  даст нам необходимые условия экстремума

$$\Gamma_{1111}^* \sigma_{11} + \Gamma_{1122}^* \sigma_{22} + \Gamma_{1133}^* \sigma_{33} - \mu [P_{1111}(t) \sigma_{11}(t) + P_{1122}(t) \sigma_{22}(t) + P_{1133}(t) \sigma_{33}(t)] = 0, \quad (9)$$

$$\Gamma_{2211}^* \sigma_{11} + \Gamma_{2222}^* \sigma_{22} + \Gamma_{2233}^* \sigma_{33} - \mu [P_{2211}(t) \sigma_{11}(t) + P_{2222}(t) \sigma_{22}(t) + P_{2233}(t) \sigma_{33}(t)] = 0, \quad (10)$$

$$\Gamma_{3311}^* \sigma_{11} + \Gamma_{3322}^* \sigma_{22} + \Gamma_{3333}^* \sigma_{33} - \mu [P_{3311}(t) \sigma_{11}(t) + P_{3322}(t) \sigma_{22}(t) + P_{3333}(t) \sigma_{33}(t)] = 0, \quad (11)$$

$$\Gamma_{1212}^* \sigma_{12} - \mu P_{1212}(t) \sigma_{12}(t) = 0, \quad (12)$$

$$\Gamma_{1313}^* \sigma_{13} - \mu P_{1313}(t) \sigma_{13}(t) = 0, \quad (13)$$

$$\Gamma_{2323}^* \sigma_{23} - \mu P_{2323}(t) \sigma_{23}(t) = 0. \quad (14)$$

Перепишем уравнения системы (9)–(14) для нормальных напряжений в следующем виде:

$$[\Gamma_{1111}^* - \mu P_{1111}(t)] \sigma_{11} + [\Gamma_{1122}^* - \mu P_{1122}(t)] \sigma_{22} + [\Gamma_{1133}^* - \mu P_{1133}(t)] \sigma_{33} = 0, \quad (15)$$

$$[\Gamma_{2211}^* - \mu P_{2211}(t)] \sigma_{11} + [\Gamma_{2222}^* - \mu P_{2222}(t)] \sigma_{22} + [\Gamma_{2233}^* - \mu P_{2233}(t)] \sigma_{33} = 0, \quad (16)$$

$$[\Gamma_{3311}^* - \mu P_{3311}(t)] \sigma_{11} + [\Gamma_{3322}^* - \mu P_{3322}(t)] \sigma_{22} + [\Gamma_{3333}^* - \mu P_{3333}(t)] \sigma_{33} = 0. \quad (17)$$

Условия нормировки:

$$\int_0^t \dot{\sigma}_{ij}(t) P_{ijkl}(t) \sigma_{kl}(t) dt = 1, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3). \quad (18)$$

Кроме того, в точке стационарности (8) мы можем записать еще одно уравнение:

$$\int_0^t \dot{\sigma}_{ij}(t) \Gamma_{ijkl}^* \sigma_{kl} dt = \mu, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3). \quad (19)$$

Рассмотрим вначале левое неравенство (7). Из него видно, что  $\mu_1 = m = 1$  есть наибольшее значение собственного числа  $\mu$ , удовлетворяющее этому неравенству. Аналогично  $\mu_2 = M = 1$  есть наименьшее значение  $\mu$ , удовлетворяющее правому неравенству (7). На этом основании положим в уравнениях (9)–(17) и (19)  $\mu = 1$  в качестве условия максимальной энергетической близости функционалов (5), (6), тогда разность (18) и (19) даст нам

$$\int_0^t \dot{\sigma}_{ij}(t) [\Gamma_{ijkl}^* - P_{ijkl}(t)] \sigma_{kl} dt = 0, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3).$$

Отсюда следует

$$[\Gamma_{ijkl}^* - P_{ijkl}(t)] \sigma_{kl} = 0, \quad \langle i, j, k, l = 1, 2, 3 \rangle. \quad (20)$$

Заметим, что система необходимых условий экстремума на (9)–(17) выполняется при подстановке в нее соотношений (20). Из (20) имеем следующие выражения эффективных модулей:

$$P_{ijkl}(t) = \frac{\Gamma_{ijkl}^* \sigma_{kl}}{\sigma_{kl}(t)}, \quad \langle i, j, k, l = 1, 2, 3 \rangle. \quad (21)$$

Полагая в (21)

$$\sigma_{kl} = \tilde{\sigma}_{kl}(\bar{x}) H(t),$$

где  $H(t)$  – заданная функция времени, получим

$$P_{ijkl}(t) = \frac{\Gamma_{ijkl}^* H}{H(t)}, \quad \langle i, j, k, l = 1, 2, 3 \rangle. \quad (22)$$

Модули, определяемые соотношениями (22), будем называть эффективными модулями кастильянового типа. В последующем тексте будем отличать эффективные модули кастильянового типа с помощью верхнего индекса  $c$ . Таким образом, соотношения (22) можно записать следующим образом:

$$P_{ijkl}^c(t) = \frac{\Gamma_{ijkl}^* H}{H(t)}, \quad \langle i, j, k, l = 1, 2, 3 \rangle.$$

### 3. Эффективные модули лагранжевого типа

Рассмотрим вывод выражений эффективных модулей лагранжевого типа. Процедуру вывода проведем на основании преобразований определяющих уравнений. В качестве примера возьмем трансверсально изотропную вязкоупругую среду с определяющими уравнениями, разрешенными относительно напряжений. В цилиндрических координатах имеем

$$\sigma_r = A_{11}^* \varepsilon_r + A_{12}^* \varepsilon_\theta + A_{13}^* \varepsilon_z, \quad (23)$$

$$\sigma_\theta = A_{12}^* \varepsilon_r + A_{11}^* \varepsilon_\theta + A_{13}^* \varepsilon_z, \quad (24)$$

$$\sigma_z = A_{13}^* (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + A_{33}^* \varepsilon_z, \quad (25)$$

$$\tau_{0z} = A_{44}^* \gamma_{0z}, \quad \tau_{rz} = A_{44}^* \gamma_{rz}, \quad \tau_{r0} = \frac{1}{2} (A_{11}^* - A_{12}^*) \gamma_{r0}. \quad (26)$$

В соответствии с граничными условиями в перемещениях I рода будем искать решение в виде:

$$u(\bar{x}, t) = \tilde{u}(x) F(t). \quad (27)$$

Покажем, что подстановка (27) в (23)–(26) преобразует определяющие уравнения трансверсально изотропного вязкоупругого тела в соответствующие уравнения упругого тела с модулями, являющимися некоторыми функциями времени. Рассмотрим преобразование на примере определяющего уравнения для радиального напряжения  $\sigma_r$ , входящего в (23). Поскольку деформации, соответствующие (27), можно представить как

$$\varepsilon_r(\bar{x}, t) = \tilde{\varepsilon}_r(\bar{x}) F(t),$$

$$\varepsilon_0(\bar{x}, t) = \tilde{\varepsilon}_0(\bar{x}) F(t),$$

$$\varepsilon_z(\bar{x}, t) = \tilde{\varepsilon}_z(\bar{x}) F(t),$$

то, образуя свертки операторов  $A_{11}^*$ ,  $A_{12}^*$ ,  $A_{13}^*$  с функцией  $F(t)$ , мы получим

$$\sigma_r = A_{11}^* F \tilde{\varepsilon}_r + A_{12}^* F \tilde{\varepsilon}_0 + A_{13}^* F \tilde{\varepsilon}_z.$$

Выделим в последнем соотношении

$$g_{11}^l(t) = \frac{A_{11}^* F}{F(t)}, \quad g_{12}^l(t) = \frac{A_{12}^* F}{F(t)}, \quad g_{13}^l(t) = \frac{A_{13}^* F}{F(t)}. \quad (28)$$

В результате получим

$$\sigma_r = g_{11}^l(t) \tilde{\varepsilon}_r + g_{12}^l(t) \tilde{\varepsilon}_0 + g_{13}^l(t) \tilde{\varepsilon}_z \quad (29)$$

Следует отметить, что деформации в правой части (29) представляют собой определяющие уравнения упругого тела.

Модули  $g_{11}^l(t)$ ,  $g_{12}^l(t)$ ,  $g_{13}^l(t)$ , ... назовем модулями лагранжевого типа, соответствующими определяющим уравнениям трансверсально-изотропного тела.

Обобщение для вязкоупругого тела с анизотропией общего вида имеет вид:

$$g_{ijk}^l(t) = \frac{C_{ijkm}^* F}{F(t)}, \quad \langle i, j, k, m = 1, 2, 3 \rangle.$$

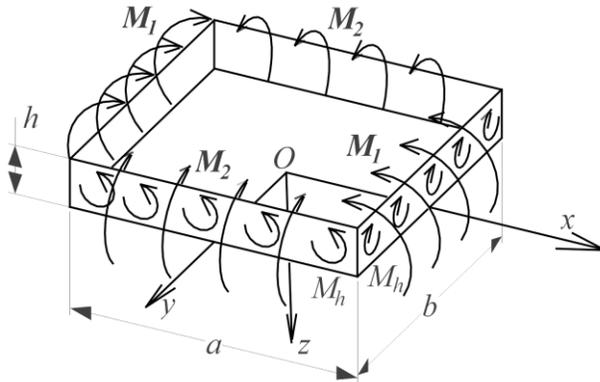
Здесь  $C_{ijkm}^*$  – тензор операторов ползучести.

## 4. Примеры задач

### 4.1. Изгиб прямоугольной вязкоупругой пластинки

Пусть мы имеем однородную прямоугольную вязкоупругую пластинку из материала, обладающего анизотропией общего вида. Решение соответствующей задачи для упругого тела приведено в [19]. На рис. 1 показана расчетная схема такой пластинки.

Пусть пластинка изгибается и скручивается равномерно распределенными по границам пластины моментами, которые постоянны по величине вдоль каждой из сторон пластины.



**Рис. 1.** Изгиб прямоугольной вязкоупругой пластинки  
**Fig. 1.** Bending of a rectangular viscoelastic plate

Примем, что срединной плоскостью пластины будет плоскость  $xOy$  и что усилия, приложенные к пластине, приводятся к постоянным по длине стороны крутящим и изгибающим моментам. Считая, что изгибающие и крутящие моменты меняются по толщине пластины по линейному закону (будучи нулевыми на срединной поверхности), получим, что напряжения распределяются по толщине так же, как и в случае изотропной пластины.

Выражения упругих перемещений согласно [19] представимы как

$$u = \frac{6}{h^3} \left[ M_1 (a_{15}z^2 + a_{16}yz + 2a_{11}xz) + M_2 (a_{25}z^2 + a_{26}yz + 2a_{12}xz) + M_h (a_{56}z^2 + a_{66}yz + 2a_{16}xz) \right], \quad (30)$$

$$v = \frac{6}{h^3} \left[ M_1 (a_{14}z^2 + 2a_{12}yz + 2a_{16}xz) + M_2 (a_{24}z^2 + 2a_{22}yz + a_{26}xz) + M_h (a_{46}z^2 + 2a_{26}yz + 2a_{66}xz) \right], \quad (31)$$

$$w = \frac{6}{h^3} \left[ M_1 (-a_{11}x^2 - a_{12}y^2 + a_{13}z^2 - a_{16}xy) + M_2 (-a_{12}x^2 - a_{22}y^2 + a_{23}z^2 - a_{26}xy) + M_h (-a_{16}x^2 - a_{26}y^2 + a_{36}z^2 - a_{66}xy) \right]. \quad (32)$$

Рассмотрим решение для случая ортотропного материала, т.е. когда тело имеет три плоскости упругой симметрии. Одна из плоскостей параллельна срединной поверхности пластины. Определяющие уравнения упругого ортотропного тела имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z, & \gamma_{yz} &= a_{44}\tau_{yz}, \\ \varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z, & \gamma_{xz} &= a_{55}\tau_{xz}, \\ \varepsilon_z &= a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\sigma_z, & \gamma_{xy} &= a_{66}\tau_{xy}. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь

$$a_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad a_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad a_{13} = -\frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad (34)$$

$$a_{21} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad a_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad a_{23} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}, \quad (35)$$

$$a_{44} = \frac{1}{G_1}, \quad a_{55} = \frac{1}{G_2}, \quad a_{66} = \frac{1}{G_3}. \quad (36)$$

Перейдем от  $a_{ij}$  к константам  $G_i, K_i$  где  $i = 1, 2, 3$ , полагая, что в каждой из трех плоскостей симметрии ортотропного тела выполняются соотношения между упругими константами, аналогичные изотропному телу. Будем иметь

$$\frac{1}{E_1} = \frac{1}{3G_1} + \frac{1}{9K_1}, \quad \frac{1}{E_2} = \frac{1}{3G_2} + \frac{1}{9K_2}, \quad \frac{1}{E_3} = \frac{1}{3G_3} + \frac{1}{9K_3}, \quad (37)$$

$$\frac{\nu_{22}}{E_1} = \frac{1}{6G_1} - \frac{1}{9K_1}, \quad \frac{\nu_{21}}{E_1} = \frac{1}{6G_2} - \frac{1}{9K_2}, \quad \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{1}{6G_3} - \frac{1}{9K_3}. \quad (38)$$

Таким образом, модель ортотропного тела содержит 9 постоянных, определяемых (36)–(38). По сравнению со случаем общей анизотропии 12 постоянных будут нулевыми:

$$a_{16} = a_{26} = a_{36} = a_{45} = 0, \quad (39)$$

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{15} = a_{25} = a_{35} = a_{56} = 0. \quad (40)$$

С учетом (39), (40) соотношения (30)–(32) будут иметь вид:

$$u = \frac{6}{h^3} [2a_{11}xzM_1 + M_2 2a_{12}xz + M_h a_{66}yz], \quad (41)$$

$$v = \frac{6}{h^3} [-a_{12}yzM_1 + M_2 a_{22}yz + M_h 2a_{66}xz], \quad (42)$$

$$w = \frac{6}{h^3} [M_1 (-a_{11}x^2 - a_{12}y^2 - a_{13}z^2) + M_2 (-a_{12}x^2 + a_{22}y^2 + a_{23}z^2) - M_h a_{66}xy]. \quad (43)$$

При переходе к решению для вязкоупругой ортотропной пластинки необходимо в (41)–(43) упругие константы заменить вязкоупругими операторами

$$a_{11} \rightarrow a_{11}^*, \quad a_{12} \rightarrow a_{12}^*, \dots, a_{33} \rightarrow a_{33}^*,$$

где, согласно (34)–(38),

$$a_{11}^* = \frac{1}{E_1^*} = \frac{1}{3G_1^*} + \frac{1}{9K_1^*}, \quad a_{12}^* = -\frac{\nu_{12}^*}{E_1^*} = \frac{1}{6G_1^*} - \frac{1}{9K_1^*}, \quad \dots, \quad a_{33}^* = \frac{1}{E_2^*} = \frac{1}{3G_3^*} + \frac{1}{9K_3^*}.$$

Зададим внешние нагрузки следующим образом:

$$M_1 = \tilde{M}_1 H_1(t), \quad M_2 = \tilde{M}_2 H_2(t), \quad M_h = \tilde{M}_3 H_3(t),$$

где  $\tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \tilde{M}_3$  – константы. Здесь мы имеем случай, когда внешние нагрузки могут меняться во времени по индивидуальным законам. Поэтому необходимо применять принцип суперпозиции решений. Согласно данному принципу, перемещения тела от суммы усилий (или моментов) будут суммой перемещений от каждого усилия в отдельности.

Следуя приведенным соображениям, введем обозначения для эффективных модулей кастильянового типа ортотропного вязкоупругого тела:

$$g_{m,c}^l(t) = \frac{G_m^{*l-1} H_l}{H_l(t)}, \quad K_{m,c}^l(t) = \frac{K_m^{*l-1} H_l}{H_l(t)}, \quad \langle m = 1, 2, 3 \rangle, \quad \langle l = 1, 2, 3 \rangle. \quad (44)$$

Тогда получим следующие соотношения. Перемещения от нагрузки, пропорциональной  $H_1(t)$ , будут иметь вид:

$$u_1 = \frac{6}{h^3} \tilde{M}_1 2a_{11}^* H_1, \quad (45)$$

$$v_1 = \frac{6}{h^3} \tilde{M}_1 2a_{12}^* H_1, \quad (46)$$

$$w_1 = \frac{6}{h^3} \tilde{M}_1 (-a_{11}^* H_1 x^2 - a_{12}^* H_1 y^2 + a_{13}^* H_1 z^2). \quad (47)$$

Перемещения, обусловленные действием изгибающих моментов  $M_2$

$$u_2 = \frac{6}{h^3} \tilde{M}_2 2a_{12}^* H_2, \quad (48)$$

$$v_2 = \frac{6}{h^3} \tilde{M}_2 2a_{22}^* H_2, \quad (49)$$

$$w_2 = \frac{6}{h^3} \tilde{M}_2 (-a_{12}^* H_2 x^2 - a_{22}^* H_2 y^2 + a_{23}^* H_2 z^2). \quad (50)$$

Перемещения, обусловленные скручивающим моментом

$$u_3 = \frac{6}{h^3} \tilde{M}_3 2a_{66}^* H_3 yz, \quad (51)$$

$$v_3 = \frac{6}{h^3} \tilde{M}_3 2a_{66}^* H_3 xz, \quad (52)$$

$$w_3 = \frac{6}{h^3} \tilde{M}_3 a_{66}^* H_3 xy. \quad (53)$$

Здесь

$$a_{66}^* = \frac{1}{G_3}.$$

Общее решение поставленной задачи:

$$u = \sum_{i=1}^3 u_i, \quad v = \sum_{i=1}^3 v_i, \quad w = \sum_{i=1}^3 w_i.$$

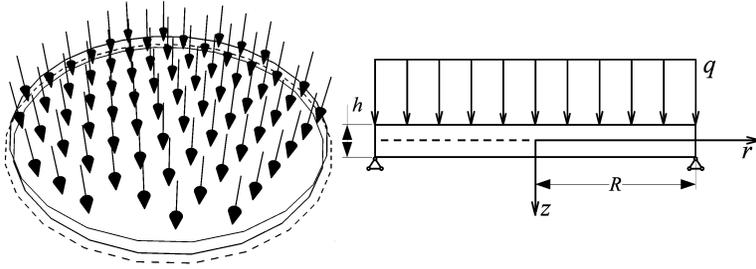
Таким образом, получаем, что в случае, когда вязкоупругие операторы анизотропии входят в решение задачи в виде линейной комбинации, решение, полученное на основе метода разделения переменных, тождественно совпадает с решением, найденным с помощью классического метода Вольтерры.

#### 4.2. Изгиб вязкоупругой круглой плиты под действием равномерно распределенного давления

Плита шарнирно оперта по краю и изгибается равномерно распределенной нагрузкой. Материал плиты трансверсально-изотропный, плоскости изотропии параллельны срединной. Задача решается в цилиндрических координатах  $r, z$ . На рис. 2 показана расчетная схема для этой задачи.

Граничные условия в напряжениях:

$$\sigma_z = \tau_{rz} = 0, \quad z = \frac{h}{2}, \quad \sigma_z = -q, \quad \tau_{rz} = 0, \quad z = -\frac{h}{2}.$$



**Рис. 2.** Изгиб вязкоупругой круглой плиты  
**Fig. 2.** Bending of a circular viscoelastic plate

Граничные условия по боковой поверхности удовлетворяются приближенно [19]. Уравнения, выражающие равенства нулю радиальной составляющей силы и момента, возьмем в виде:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r dz = 0, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z z dz = 0.$$

Упругие напряжения, рассчитанные с помощью функции напряжений трансверсально-изотропного тела, имеют вид:

$$\sigma_r = \frac{3q}{4h^3} (3 + \nu) (R^2 - r^2) z + qm \left( \frac{z^3}{h^3} - \frac{3z}{20h} \right), \quad (54)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{3q}{4h^3} [(3 + \nu) R^2 - (1 + 3\nu) r^2] z + qm \left( \frac{z^3}{h^3} - \frac{3z}{20h} \right), \quad (55)$$

$$\sigma_z = \frac{q}{2} \left( -1 + \frac{3z}{h} - 4 \frac{z^3}{h^3} \right), \quad (56)$$

$$\tau_{rz} = -\frac{3q}{4h} r \left( 1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right). \quad (57)$$

Здесь

$$m = \frac{E}{1 - \nu} \frac{1}{G_1} - \frac{\nu_1}{E_1} (3 + \nu) \frac{E}{1 - \nu}. \quad (58)$$

Для перехода к вязкоупругому решению в (54)–(57) необходимо произвести замены

$$E \rightarrow E^*, \quad \nu \rightarrow \nu^*, \quad \nu_1 \rightarrow \nu_1^*, \quad E_1 \rightarrow E_1^*, \quad m \rightarrow m^*$$

и далее рассчитать воздействие оператора  $m^*$  на заданную функцию

$$q = \tilde{q}H(t), \quad \tilde{q} = const.$$

Положим, что объемная релаксация в плоскости изотропии и в плоскости, ортогональной ей, отсутствует.

$$K^* = K = const, \quad K_1^* = K_1 = const.$$

В этом случае вязкоупругое поведение материала определяется базовыми упруго-наследственными операторами  $G^*, G_1^*$ :

$$G^* x = G \left[ x(t) - \lambda \mathfrak{E}_{\gamma + \lambda}^* x \right], \quad (59)$$

$$G_1^* x = G_1 \left[ x(t) - \lambda_1 \mathfrak{E}_{\gamma_1 + \lambda_1}^* x \right]. \quad (60)$$

Здесь  $\mathfrak{E}_\alpha^*$  – дробно-экспоненциальные операторы Работнова [6]. В частном случае операторы  $\mathfrak{E}_\alpha^*$  с экспоненциальным ядром имеют вид:

$$\mathfrak{E}^*(\gamma)x = \mathfrak{E}_\gamma^*x = \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}x(\tau)d\tau. \quad (61)$$

Для получения вязкоупругого решения необходимо свести операторы  $E^*$ ,  $V^*$  и  $E_1^*$ ,  $V_1^*$ , а также  $m^*$  к операторам, содержащим пары операторов  $G^*$ ,  $K$  и  $G_1^*$ ,  $K_1$ . Для этого можно использовать алгебру операторов Работнова [6].

Решение задачи на основе метода разделения переменных получается путем замен констант упругости на эффективные модули в выражении (58):

$$G \rightarrow g_c(t) = \frac{H(t)}{G^{*\alpha-1}H}, \quad G_1 \rightarrow g_c^1(t) = \frac{H(t)}{G_1^{*\alpha-1}H}.$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда параметры задачи заданы следующим образом.

Параметры ядер релаксации:

$$\lambda = 0.00253, \quad \gamma = 0.0005, \quad \lambda_1 = 0.0055, \quad \gamma_1 = 0.00071 \text{ min}^{-1}.$$

Упруго-мгновенные значения модулей сдвига:

$$G = 0,8 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad \nu = 0,17, \\ G_1 = 0,591 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad \nu_1 = 0,1.$$

Размеры пластины:

$$R = 12 \text{ м}, \quad h = 0,02 \text{ м}.$$

Нагрузка:

$$q = 1,5 \cdot 10^3 \text{ МПа}.$$

Для выбранных параметров материала пластинки величина  $\eta$ , определяемая как отношение мгновенного модуля к длительному

$$\eta = \frac{G_0}{G_\infty} = \frac{\lambda + \gamma}{\gamma},$$

составила для соответствующих направлений  $\eta = 6,06$  и  $\eta_1 = 8,75$ . На рис. 3 показано сравнение радиальных напряжений, рассчитанных по методу разделения переменных, с расчетом по методу Вольтерры. Максимальное расхождение составляет величину, чуть большую 1%.

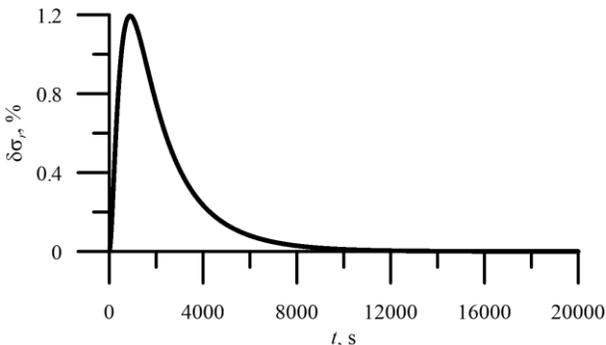


Рис. 3. Отклонения радиальных напряжений  
Fig. 3. Deviations of radial stresses

Значительно меньшую погрешность имеют тангенциальные напряжения  $\sigma_\theta$ , показанные на рис. 4.

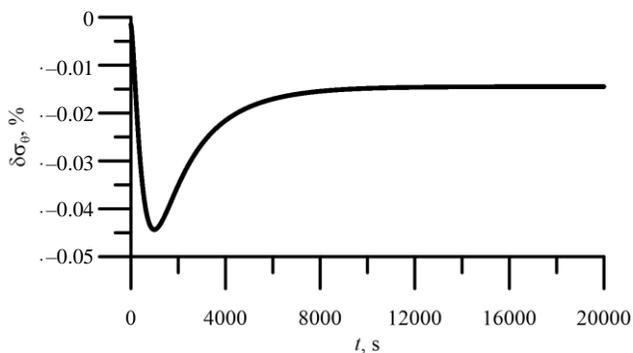


Рис. 4. Отклонения тангенциальных напряжений  
Fig. 4. Deviations of tangential stresses

Таким образом, проведенные расчеты напряженного состояния круглой анизотропной вязкоупругой плиты показывают достаточную точность в сравнении с аналитическим методом Вольтерры.

### Заключение

Полученные в настоящей работе теоретические результаты сформулированы для двух типов задач линейно вязкоупругого анизотропного тела. Задачи II рода могут быть разрешены на основе применения эффективных модулей кастильянского типа; задачи I рода предлагается решать с помощью эффективных модулей лагранжевого типа.

Результаты численной апробации предлагаемого алгоритма позволяют сделать следующие выводы:

1. Для задач анизотропного вязкоупругого тела, в которых выражения упругих напряжений и деформаций линейно зависят от упругих констант анизотропии, решения, полученные методом разделения переменных, тождественно совпадают с решением по методу Вольтерры.

2. Для произвольной формы зависимости упругих напряжений от констант анизотропии получаем некоторые различия в расчетах по методу разделения переменных от метода Вольтерры. Однако данные отличия мало влияют на итоговые значения вязкоупругих напряжений.

Ограничения предлагаемого метода вытекают из процедур их вывода. Так, эффективные модули кастильянского типа обращают в тождества уравнения равновесия в напряжениях и определяющие уравнения, разрешенные относительно деформаций. Однако данные модули не удовлетворяют системе уравнений равновесия в перемещениях и определяющим уравнениям, разрешенным относительно напряжений.

Как следствие, в решениях задач возникает некоторая погрешность по сравнению с аналитическим методом Вольтерры. Замечено, что сравнительно больших значений такая погрешность может достигать на тех участках истории

нагружения, где имеет место изменение скорости реологических процессов в материале.

Неоспоримые достоинства предлагаемого подхода состоят в следующем:

- а) метод не опирается на факт наличия упругого решения соответствующей линейно-вязкоупругой задачи;
- б) применение метода разделения переменных позволяет автоматически удовлетворить граничным условиям в напряжениях или в перемещениях;
- в) метод может быть использован как при аналитическом, так и при численном решении задач;
- г) предлагаемый метод достаточно прост в применении – для получения вязкоупругого решения достаточно заменить константы упругости на соответствующие эффективные модули.

### Список источников

1. *Maxwell J.C.* On the dynamical theory of gases // *Philosophical Transactions*. 1867. V. 157. P. 49–88. doi: 10.1098/rstl.1867.0004
2. *Boltzman L.* Zur theorie der elastischen nachwirkung // *Wiener Berichte*. 1874. Is. 70. P. 275–306. doi: 10.1002/andp.18782411107
3. *Volterra V.* Lecons sur Les Fonctions de Lignes. Paris : Gautierr Villars, 1912. 230 p.
4. *Volterra V.* Theory of Functionals and of Integral and integrodifferential Equations. London ; Glasgow : Blackie & Son Limited, 1930. 226 p.
5. *Cristensen R.M.* Theory of Viscoelasticity: An Introduction. New York : Academic, 1980. 364 p.
6. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М. : Наука, 1966. 752 с.
7. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термо-вязкоупругости. М. : Наука, 1970. 280 с.
8. *Schapery R.A.* Stress analysis of viscoelastic composite materials // *Journal of Composite Materials*. 1967. V. 1, is. 3. P. 228–267.
9. *Wu W., Jiang G., Huang S., Leo C.J.* Vertical dynamic response of pile embedded in layered transversely isotropic soil // *Mathematical Problems in Engineering*. 2014. V. 2014. Art. 126916. 12 p.
10. *Kaloerov S.A., Koshkin A.A.* Solving the problem of linear viscoelasticity for piecewise-homogeneous anisotropic plates // *International Applied Mechanics*. 2017. V. 53, is. 6. P. 1123–1129. doi: 10.1007/s10778-018-0851-9
11. *Kaminskii A.A., Selivanov M.F.* A Method for solving boundary-value problems of linear viscoelasticity for anisotropic composites // *International Applied Mechanics*. 2003. V. 39, is. 11. P. 1294–1304. doi: 10.1023/B:INAM.0000015599.90700.86
12. *Holzapfel G.A., Gasser T.C.* A viscoelastic model for fiber-reinforced composites at finite strains: Continuum basis, computational aspects and applications // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2003. V. 190, is. 34. P. 4379–4403. doi: 10.1016/S0045-7825(00)00323-6
13. *Simo J.C.* On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: Formulation and computational aspects // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1987. V. 60. P. 153–173. doi: 10.1016/0045-7825(87)90107-1
14. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М. : Наука, 1980. 304 с.
15. *Аллам М.Н.М., Победря Б.Е.* К решению квазистатических задач анизотропной вязкоупругости // *Известия Академии наук Армянской ССР. Механика*. 1978. № 2. С. 19–27.
16. *Svetashkov A.A., Kupriyanov N.A., Pavlov M.S., Vakurov A.A.* Variable separation method for solving boundary value problems of isotropic linearly viscoelastic bodies // *Acta Mechanica*. 2020. V. 231, is. 9. P. 3583–3606. doi: 10.1007/s00707-020-02698-4

17. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М. : Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
18. Svetashkov A., Kupriyanov N., Manabaev K. Modification of the iterative method for solving linear viscoelasticity boundary value problems and its implementation by finite element method // *Acta Mechanica*. 2018. V. 229, is. 6. P. 2539–2559. doi: 10.1007/s00707-018-2129-z
19. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М. : Наука, 1977. 416 с.

### References

1. Maxwell J.C. (1867) On the dynamical theory of gases. *Philosophical Transactions*. 157. pp. 49–88. doi: 10.1098/rstl.1867.0004
2. Boltzman L. (1874) Zur Theorie der Elastischen Nachwirkung. *Wiener Berichte*. 70. pp. 275–306. doi: 10.1002/andp.18782411107
3. Volterra V. (1912) *Lecons sur Les Fonctions de Lignes*. Paris: Gautierr Villars.
4. Volterra V. (1930) *Theory of Functionals and of Integral and integrodifferential Equations*. London – Glasgow: Blackie & Son Limited.
5. Cristensen R.M. (1980) *Theory of Viscoelasticity: An Introduction*. New York: Academic.
6. Rabotnov Y. N. (1969) *Creep Problems in Structural Members*. Amsterdam: North-Holland.
7. Il'yushin A.A., Pobedrya B.E. (1970) *Osnovy matematicheskoy teorii termovязкоупругosti* [Fundamentals of mathematical theory of thermoviscoelasticity]. Moscow: Nauka.
8. Schapery R.A. (1967) Stress analysis of viscoelastic composite materials. *Journal of Composite Materials*. 1(3). pp. 228–267. doi: 10.1177/00219983670010030
9. Wu W., Jiang G., Huang S., Leo C.J. (2014) Vertical dynamic response of pile embedded in layered transversely isotropic soil. *Mathematical Problems in Engineering*. 12. Article 126916. pp. 1–12. doi: 10.1155/2014/126916
10. Kaloerov S.A., Koshkin A.A. (2017) Solving the problem of linear viscoelasticity for piecewise-homogeneous anisotropic plates. *International Applied Mechanics*. 53(6). pp. 1123–1129. doi: 10.1007/s10778-018-0851-9
11. Kaminskii A.A., Selivanov M.F. (2003) A method for solving boundary-value problems of linear viscoelasticity for anisotropic composites. *International Applied Mechanics*. 39(11). pp. 1294–1304. doi: 10.1023/B:INAM.0000015599.90700.86
12. Holzapfel G.A., Gasser T.C. (2003) A viscoelastic model for fiber-reinforced composites at finite strains: continuum basis, computational aspects and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 190(34). pp. 4379–4403. doi: 10.1016/50045-7825(00)00323-6
13. Simo J.C. (1987) On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: formulation and computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 60. pp. 153–173. doi: 10.1016/0045-7825(87)90107-1
14. Galin L.A. (1980) *Kontaknyye zadachi teorii uprugosti i vyazkouprugosti* [Contact problems of the theory of elasticity and viscoelasticity]. Moscow: Nauka.
15. Allam M.N.M., Pobedrya B.E. (1978) K resheniyu kvazistaticheskikh zadach anizotropnoy vyazkouprugosti [On the solution to quasi-static problems of anisotropic viscoelasticity]. *Izvestiya AN Armyanskoy SSR. Mekhanika..* 2 pp. 19–27.
16. Svetashkov A.A., Kupriyanov N.A., Pavlov M.S., Vakurov A.A. (2020) Variable separation method for solving boundary value problems of isotropic linearly viscoelastic bodies. *Acta Mechanica*. 231(9). pp. 3583–3606. doi: 10.1007/s00707-020-02698-4
17. Pobedrya B.E. (1984) *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite materials]. Moscow: Izdatel'stvo Moskovskogo Universiteta.
18. Svetashkov A., Kupriyanov N., Manabaev K. (2018) Modification of the iterative method for solving linear viscoelasticity boundary value problems and its implementation by finite element method. *Acta Mechanica*. 229(6). pp. 2539–2559. doi: 10.1007/s00707-018-2129-z
19. Lekhnitskiy S.G. (1981) *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [Theory of elasticity of an anisotropic body]. Moscow: Mir.

**Сведения об авторах:**

**Светашков Александр Андреевич** – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, профессор отделения общетехнических дисциплин Томского политехнического университета, Томск, Россия. E-mail: svetashkov@tpu.ru

**Куприянов Николай Амвросьевич** – кандидат технических наук, доцент отделения общетехнических дисциплин Томского политехнического университета, Томск, Россия. E-mail: kupriyanov@tpu.ru

**Павлов Михаил Сергеевич** – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель отделения нефтегазового дела Томского политехнического университета, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: mspavlov@tpu.ru

**Information about the authors:**

**Svetashkov Aleksandr A.** (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: svetashkov@tpu.ru

**Kupriyanov Nikolay A.** (Candidate of Technical Sciences, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kupriyanov@tpu.ru

**Pavlov Mikhail S.** (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk Polytechnic University, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mspavlov@tpu.ru

*Статья поступила в редакцию 17.02.2023; принята к публикации 10.07.2023*

*The article was submitted 17.02.2023; accepted for publication 10.07.2023*

Научная статья

УДК 531.38

doi: 10.17223/19988621/84/11

## Устойчивость равномерного прямолинейного движения тягача с двумя прицепами

Алексей Сергеевич Смирнов<sup>1</sup>, Егор Алексеевич Дегилевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

<sup>1,2</sup> Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> ООО «Центр Технологического Консалтинга», Санкт-Петербург, Россия

<sup>1</sup> smirnov.alexey.1994@gmail.com

<sup>2</sup> DegilevichEgor@gmail.com

**Аннотация.** Исследуется устойчивость движения тягача, едущего прямолинейно и с постоянной скоростью, за которым следуют два одноосных прицепа. При этом помимо шарнирного соединения элементов данной системы учитывается податливость каждого сцепления. Строится математическая модель системы, в ходе исследования которой выявляются условия устойчивости ее движения. Полученные результаты представлены в удобной графической форме, в виде областей устойчивости на плоскости безразмерных параметров задачи.

**Ключевые слова:** тягач, прицеп, метод D-разбиений, область устойчивости движения

**Для цитирования:** Смирнов А.С., Дегилевич Е.А. Устойчивость равномерного прямолинейного движения тягача с двумя прицепами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 139–151. doi: 10.17223/19988621/84/11

Original article

## Stability of uniform rectilinear motion of a tractor with two trailers

Aleksey S. Smirnov<sup>1</sup>, Egor A. Degilevich<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russia

<sup>1,2</sup> Institute of Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russia

<sup>2</sup> CMT-Engineering, Saint Petersburg, Russia

<sup>1</sup> smirnov.alexey.1994@gmail.com

<sup>2</sup> DegilevichEgor@gmail.com

**Abstract.** This paper investigates the stability of uniform linear motion of a tractor followed by two identical single-axle trailers. It is shown that in addition to the articulated

connection of the first trailer with the tractor and the second trailer with the first one, the mechanical compliance of each coupling should be taken into account when identifying the conditions of motion stability for the system. The Appel equations are used to develop a mathematical model of the motion of the system with two nonholonomic constraints in a linear formulation. Dimensionless problem parameters, dimensionless generalized coordinates, and dimensionless time are introduced to represent the mathematical model in the most compact and convenient form. By analyzing the characteristic equation of the sixth order using the D-decomposition method and the Liénard-Chipard criterion, the stability motion regions are constructed on the plane of two dimensionless parameters for different values of the other two dimensionless parameters. The obtained data are compared with the solution of the motion stability problem for a tractor with one trailer. The results allow determining the qualitative and quantitative features of the derived solution. The conclusions drawn in this paper are of interest not only from a theoretical point of view, but can also be useful for practical applications.

**Keywords:** tractor, trailer, D-decomposition method, motion stability region

**For citation:** Smirnov, A.S., Degilevich, E.A. (2023) Stability of uniform rectilinear motion of a tractor with two trailers. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 139–151. doi: 10.17223/19988621/84/11

## Введение

Вопросам движения тягача с присоединенным к нему прицепом посвящен целый ряд научных работ [1–12]. Это связано с тем, что такие системы часто встречаются как в повседневной жизни, так и в промышленности, а также являются неотъемлемой частью одного из важнейших разделов аналитической динамики – неголономной механики. Естественно, что первоочередное значение здесь приобретают вопросы устойчивости движения таких систем. В самом деле, иногда происходят различные нештатные ситуации, когда прицеп, следующий за автомобилем по горизонтальной дороге, начинает совершать опасные поперечные колебания, которые могут привести к неблагоприятным последствиям. Хорошо известна классическая задача такого рода, представленная в [3], а само описанное в ней явление потери устойчивости называют «шимми прицепа» по аналогии с эффектом, возникающим на стойке шасси самолета при его движении по земле [13].

Следует отметить, что особый интерес представляют задачи о движении тягача, за которым следует не один, а несколько прицепов [10]. Эти вопросы недостаточно подробно освещены в научной литературе, а вместе с тем они имеют серьезное практическое значение при эксплуатации подобных систем, поэтому заслуживают отдельного внимания. Именно к этому направлению относится предлагаемая статья, в которой обсуждается динамика тягача с двумя прицепами и строится математическая модель такой системы, в результате аналитического исследования которой определяются условия устойчивости движения и дается их наглядная графическая интерпретация.

## Постановка задачи

Рассмотрим тягач, движущийся в продольном направлении равномерно и прямолинейно со скоростью  $v$ , за которым следуют два одноосных прицепа, причем

первый прицеп шарнирно присоединен к тягачу, а второй – к первому прицепу (рис. 1, а). Для упрощения аналитического исследования задачи будем полагать, что оба прицепа представляют собой твердые тела и являются идентичными, т.е. обладают одинаковыми параметрами:  $m$  – масса,  $J$  – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости рисунка,  $l$  – длина,  $b$  – расстояние от оси колесной пары до точки крепления,  $a$  – расстояние от центра масс до той же точки. В качестве обобщенных координат примем углы отклонения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  прицепов от продольного направления.

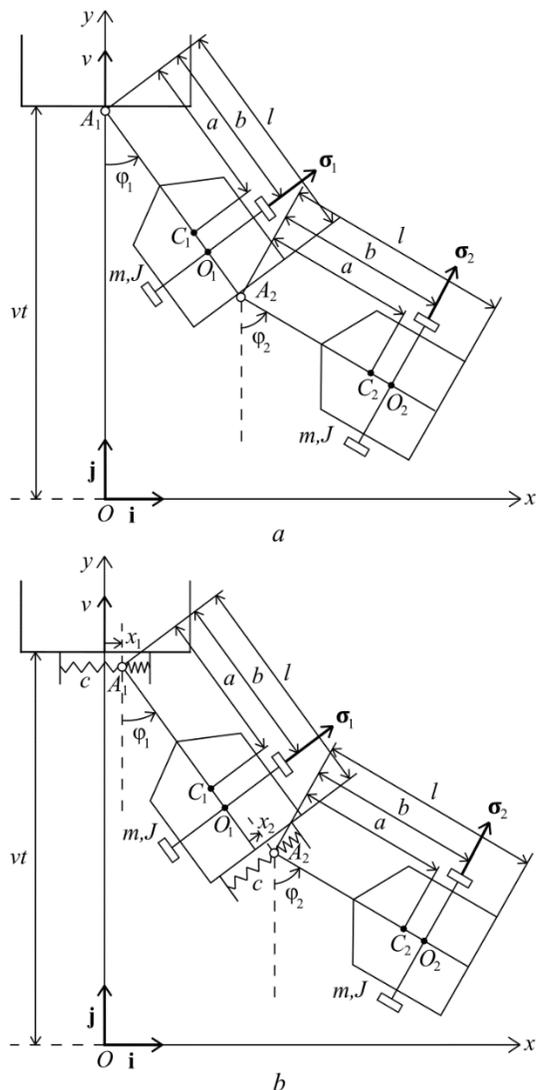


Рис. 1. Расчетная схема тягача с двумя прицепами:  
(а) простейшая схема, (б) модифицированная схема

Fig. 1. Computational scheme of a tractor with two trailers: (a) simple and (b) modified schemes

Полагая, что колеса обоих прицепов не имеют бокового проскальзывания, запишем соответствующие условия

$$\sigma_1 \cdot v_{O_1} = 0, \quad \sigma_2 \cdot v_{O_2} = 0, \quad (1)$$

которые показывают, что скорости  $v_{O_1}$  и  $v_{O_2}$  точек  $O_1$  и  $O_2$ , лежащих на осях колесных пар, перпендикулярны единичным векторам  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , направленным по этим осям. Легко понять, что при достаточно малых значениях углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  можно записать следующие выражения для величин, входящих в формулу (1):

$$v_{O_1} = b\dot{\varphi}_1 \mathbf{i} + v \mathbf{j}, \quad v_{O_2} = (l\dot{\varphi}_1 + b\dot{\varphi}_2) \mathbf{i} + v \mathbf{j}, \quad (2)$$

$$\sigma_1 = \mathbf{i} + \varphi_1 \mathbf{j}, \quad \sigma_2 = \mathbf{i} + \varphi_2 \mathbf{j},$$

где удержаны только слагаемые не выше первого порядка малости по обобщенным координатам и скоростям, а  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$  – единичные векторы декартовой системы координат. Поэтому условия (1) с учетом выражений (2) примут вид:

$$b\dot{\varphi}_1 + v\varphi_1 = 0, \quad l\dot{\varphi}_1 + b\dot{\varphi}_2 + v\varphi_2 = 0. \quad (3)$$

Видно, что эти соотношения фактически играют роль уравнений движения системы. Это означает, что система имеет только две кинематические степени свободы и не обладает динамическими степенями свободы, так что писать уравнения динамики здесь не требуется. Решая уравнения (3), устанавливаем следующий закон изменения обобщенных координат  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  во времени  $t$ :

$$\varphi_1(t) = \varphi_{10} e^{-\alpha t}, \quad \varphi_2(t) = (\varphi_{20} + \beta \varphi_{10} \alpha t) e^{-\alpha t}, \quad \alpha = \frac{v}{b}, \quad \beta = \frac{l}{b}, \quad (4)$$

где  $\varphi_{10}$  и  $\varphi_{20}$  – начальные значения величин  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  соответственно. Видно, что поведение угла  $\varphi_2$  оказывается более сложным, чем характер изменения угла  $\varphi_1$ , так как в структуре выражения для  $\varphi_2$  содержится функция  $te^{-\alpha t}$ , имеющая не-монотонный характер. В результате можно сделать вывод, что в рамках данной модели гарантируется асимптотическая устойчивость движения, однако при этом второй прицеп будет испытывать более значительные отклонения от продольного направления, чем первый [10]. Тем не менее на практике иногда приходится наблюдать ярко выраженную неустойчивость движения, которая, как показывают приведенные рассуждения, не может быть выявлена посредством анализа представленной простейшей модели тягача с двумя прицепами.

Сказанное означает, что для выявления условий устойчивости движения, которые и представляют существенный интерес, следует модифицировать исходную расчетную схему так, чтобы она обладала динамическими степенями свободы, требующими привлечения уравнений динамики неголономных систем, при этом также приблизив ее к реальным условиям. С этой целью, следуя классической модели тягача с одним прицепом, на основе которой и было описано явление потери устойчивости прицепа в книге [3], откажемся от предположения абсолютной жесткого крепления шарниров в точках  $A_1$  и  $A_2$ , поскольку при практической реализации указанные точки шарнирного соединения не являются неподвижными относительно тягача и первого прицепа соответственно. Поэтому мы будем дополнительно учитывать податливость сцепления первого прицепа с тягачом и второго прицепа с первым, что может быть осуществлено посредством внесения

в конструкцию системы упругих элементов. При этом примем для простоты жесткости обеих пружин одинаковыми и обозначим их за  $c$ . Ясно, что для описания движения системы в данной ситуации необходимо ввести еще две обобщенные координаты  $x_1$  и  $x_2$ , которые будут характеризовать смещения точек  $A_1$  и  $A_2$  в направлениях, отвечающих единичным векторам  $\mathbf{i}$  и  $\boldsymbol{\sigma}_1$  соответственно. В результате вместо простейшей расчетной схемы будем иметь модифицированную расчетную схему, которая представлена на рис. 1, *b*. Как продемонстрирует последующий анализ, математическая модель в этом случае окажется намного более сложной, чем та, которая была построена и проанализирована выше для упрощенного варианта.

Таким образом, основной целью настоящей работы является определение и анализ условий устойчивости движения системы, приведенной на рис. 1, *b*, а также построение соответствующих им областей устойчивости в терминах безразмерных параметров задачи.

### Построение математической модели

Перейдем к построению математической модели, отвечающей модифицированной расчетной схеме с рис. 1, *b*, полагая, что все обобщенные координаты являются малыми. Сначала запишем выражения, аналогичные формулам (2):

$$\mathbf{v}_{o_1} = (\dot{x}_1 + b\dot{\varphi}_1)\mathbf{i} + v\mathbf{j}, \quad \mathbf{v}_{o_2} = (\dot{x}_1 + l\dot{\varphi}_1 + \dot{x}_2 + b\dot{\varphi}_2)\mathbf{i} + v\mathbf{j}, \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{i} + \varphi_1\mathbf{j}, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \mathbf{i} + \varphi_2\mathbf{j}.$$

Тогда из условий (1) получим следующие два уравнения неголономных связей:

$$\dot{x}_1 + b\dot{\varphi}_1 + v\varphi_1 = 0, \quad \dot{x}_1 + l\dot{\varphi}_1 + \dot{x}_2 + b\dot{\varphi}_2 + v\varphi_2 = 0, \quad (6)$$

которые здесь уже не являются уравнениями движения. Для получения динамических уравнений проще всего воспользоваться известными уравнениями Аппеля для неголономных систем [14]. С этой целью составим энергию ускорений системы

$$S = \frac{1}{2}m(\dot{x}_{C_1}^2 + \dot{y}_{C_1}^2 + \dot{x}_{C_2}^2 + \dot{y}_{C_2}^2) + \frac{1}{2}J(\ddot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_1^4 + \ddot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_2^4). \quad (7)$$

Для ее вычисления выпишем декартовы координаты центров масс обоих прицепов с точностью до величин первого порядка малости по обобщенным координатам

$$x_{C_1} = x_1 + a\varphi_1, \quad y_{C_1} = vt - a, \quad x_{C_2} = x_1 + l\varphi_1 + x_2 + a\varphi_2, \quad y_{C_2} = vt - l - a, \quad (8)$$

гарантирующие квадратичную аппроксимацию энергии ускорений (7). Дифференцируя их дважды по времени и исключая ускорения  $\ddot{x}_1$  и  $\ddot{x}_2$  при помощи уравнений неголономных связей (6), получим

$$\ddot{x}_{C_1} = -v\dot{\varphi}_1 + (a-b)\ddot{\varphi}_1, \quad \ddot{y}_{C_1} = 0, \quad \ddot{x}_{C_2} = -v\dot{\varphi}_2 + (a-b)\ddot{\varphi}_2, \quad \ddot{y}_{C_2} = 0. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (7), получим после преобразований следующее выражение для энергии ускорений в квадратичной аппроксимации:

$$S = \frac{1}{2}m\left[(r^2 + (b-a)^2)(\ddot{\varphi}_1^2 + \ddot{\varphi}_2^2) + 2(b-a)v(\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_2)\right], \quad (10)$$

где принято, что  $J = mr^2$ , причем  $r$  – радиус инерции каждого прицепа относительно оси, проходящей через его центр масс и перпендикулярной плоскости

рисунка; а также в выражении (10) отброшены несущественные слагаемые, не зависящие от обобщенных ускорений. Записывая далее выражение для элементарной работы упругих сил, обусловленных податливыми сцеплениями

$$\delta'W = -cx_1\delta x_1 - cx_2\delta x_2, \quad (11)$$

и исключая входящие в него вариации  $\delta x_1$  и  $\delta x_2$  посредством соотношений, вытекающих из уравнений неголономных связей (6) (с учетом того, что виртуальные перемещения вычисляются при «замороженном времени», т.е.  $\delta t = 0$ ):

$$\delta x_1 = -b\delta\varphi_1, \quad \delta x_2 = -(l-b)\delta\varphi_1 - b\delta\varphi_2, \quad (12)$$

получим следующее выражение:

$$\delta'W = Q_1\delta\varphi_1 + Q_2\delta\varphi_2, \quad Q_1 = cbx_1 + c(l-b)x_2, \quad Q_2 = cbx_2. \quad (13)$$

Записывая далее уравнения Аппеля в обобщенных координатах в виде

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\varphi}_1} = Q_1, \quad \frac{\partial S}{\partial \ddot{\varphi}_2} = Q_2 \quad (14)$$

и объединяя эти уравнения с уравнениями неголономных связей (6), получим следующую систему четырех уравнений для определения четырех неизвестных функций  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $x_1$  и  $x_2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} m(r^2 + (b-a)^2)\ddot{\varphi}_1 + m(b-a)v\dot{\varphi}_1 = cbx_1 + c(l-b)x_2, \\ m(r^2 + (b-a)^2)\ddot{\varphi}_2 + m(b-a)v\dot{\varphi}_2 = cbx_2, \\ \dot{x}_1 + b\dot{\varphi}_1 + v\varphi_1 = 0, \\ \dot{x}_1 + l\dot{\varphi}_1 + \dot{x}_2 + b\dot{\varphi}_2 + v\varphi_2 = 0. \end{array} \right. \quad (15)$$

Для того чтобы записать эту систему в более удобной форме, введем в рассмотрение следующие величины:

$$\rho = \frac{r}{b}, \quad \delta = \frac{a}{b}, \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \gamma = \frac{v}{bk}, \quad \beta = \frac{l}{b}, \quad \xi_1 = \frac{x_1}{b}, \quad \xi_2 = \frac{x_2}{b}, \quad \tau = kt. \quad (16)$$

Поясним их физический и геометрический смысл:  $\rho$  – безразмерный радиус инерции каждого прицепа;  $\delta$  – безразмерное расстояние от центра масс каждого прицепа до точки его шарнирного крепления;  $k$  – частота колебаний груза  $m$  на пружине жесткости  $c$  (эта величина необходима для дальнейшего обезразмеривания);  $\gamma$  – безразмерная скорость движения тягача;  $\beta$  – безразмерная длина каждого прицепа (причем, исходя из смысла задачи,  $l > b$ , так что  $\beta > 1$ );  $\xi_1$  и  $\xi_2$  – безразмерные обобщенные координаты;  $\tau$  – безразмерное время. Отметим, что безразмерные параметры  $\rho$ ,  $\delta$  и  $\gamma$  введены так же, как и в работах [11, 12], где рассматривалась устойчивость движения тягача с одним прицепом. Условия устойчивости движения в этой задаче имели вид:

$$\gamma > 0, \quad \delta < 1, \quad \rho < \sqrt{\delta(1-\delta)}, \quad (17)$$

и они понадобятся нам при дальнейших сопоставлениях, которые в силу идентичного введения параметров можно будет провести наиболее наглядным образом. Что же касается параметра  $\beta$ , то он уже ранее вводился нами при исследовании простейшей модели тягача с двумя прицепами в выражении (4). В результате с учетом обозначений (16) систему (15) можно привести к следующему виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\rho^2 + (1-\delta)^2)\varphi_1'' + \gamma(1-\delta)\varphi_1' - \xi_1 - (\beta-1)\xi_2 = 0, \\ (\rho^2 + (1-\delta)^2)\varphi_2'' + \gamma(1-\delta)\varphi_2' - \xi_2 = 0, \\ \xi_1' + \varphi_1' + \gamma\varphi_1 = 0, \\ \xi_1' + \beta\varphi_1' + \xi_2' + \varphi_2' + \gamma\varphi_2 = 0, \end{array} \right. \quad (18)$$

где штрихом обозначается производная по безразмерному времени  $\tau$ :  $(\ )' = d / d\tau$ .

Система уравнений (18) представляет собой математическую модель движения системы, изображенной на рис. 1, б. Ее несомненным достоинством является достаточная компактность, которая связана с изначально принятой идентичностью параметров обоих прицепов, и именно она позволяет далее проделать еще ряд аналитических построений в отношении исследования устойчивости движения рассматриваемой системы.

### Определение условий устойчивости движения

Обращаясь теперь к установлению условий устойчивости движения тягача с двумя прицепами, запишем определитель системы уравнений (18) и приравняем его нулю:

$$\begin{vmatrix} (\rho^2 + (1-\delta)^2)\lambda^2 + \gamma(1-\delta)\lambda & 0 & -1 & -(\beta-1) \\ 0 & (\rho^2 + (1-\delta)^2)\lambda^2 + \gamma(1-\delta)\lambda & 0 & -1 \\ \lambda + \gamma & 0 & \lambda & 0 \\ \beta\lambda & \lambda + \gamma & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

Раскрывая этот определитель, например, по элементам третьей строки, приходим после серии преобразований к следующему характеристическому уравнению шестой степени в безразмерном виде:

$$a_0\lambda^6 + a_1\lambda^5 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6 = 0, \quad (20)$$

причем его коэффициенты определяются выражениями:

$$\begin{aligned} a_0 &= (\rho^2 + (1-\delta)^2)^2, \\ a_1 &= 2(\rho^2 + (1-\delta)^2)\gamma(1-\delta), \\ a_2 &= \gamma^2(1-\delta)^2 + (\rho^2 + (1-\delta)^2)(\beta^2 - 2\beta + 3), \\ a_3 &= \gamma[(3-\beta)(\rho^2 + (1-\delta)^2) + (1-\delta)(\beta^2 - 2\beta + 3)], \end{aligned} \quad (21)$$

$$a_4 = \gamma^2(1-\delta)(3-\beta) + 1,$$

$$a_5 = 2\gamma,$$

$$a_6 = \gamma^2.$$

Видно, что все семь коэффициентов зависят лишь от четырех безразмерных параметров задачи:  $\rho$ ,  $\delta$ ,  $\gamma$  и  $\beta$ . Для определения условий устойчивости можно воспользоваться критерием Льенара–Шипара [15]. Согласно ему, во-первых, должны быть выполнены условия Стодолы, т.е. все коэффициенты (21) должны быть положительными. В частности, из положительности коэффициентов  $a_1$  и  $a_5$  можно немедленно установить, что  $\gamma > 0$  и  $\delta < 1$ , как это было и в задаче о тягаче с одним прицепом, где условия устойчивости имели вид (17).

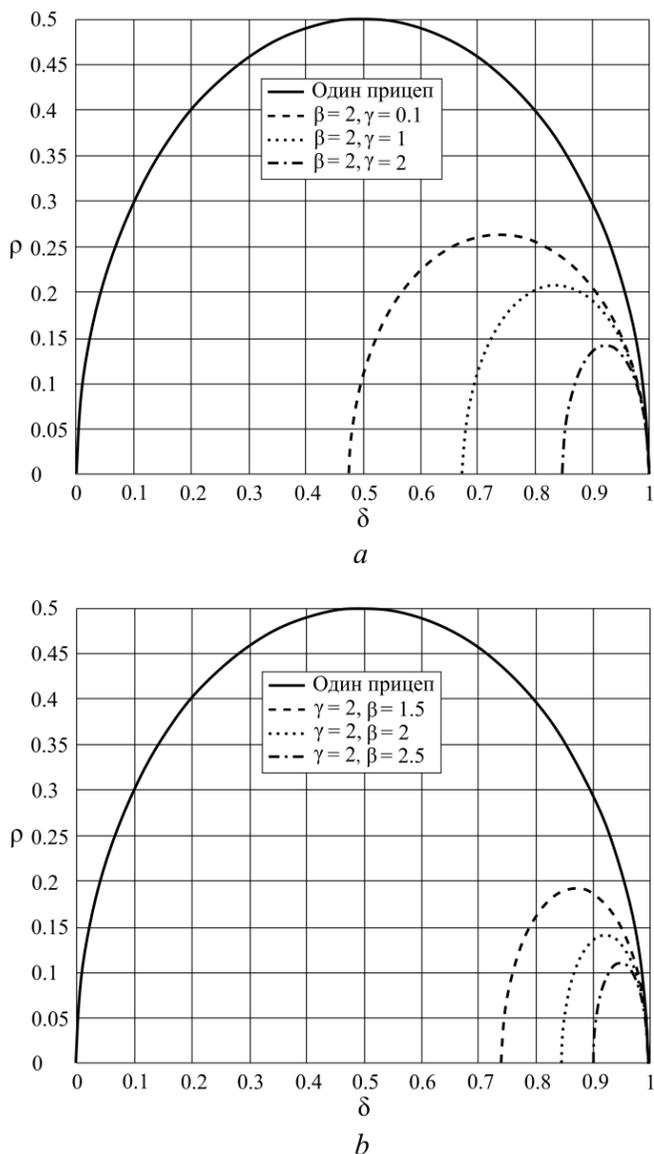
Во-вторых, для устойчивости следует также потребовать выполнения половины условий Гурвица, которые выражают положительность главных миноров определителя Гурвица нечетного порядка. Однако для характеристических уравнений высокого порядка вычисление подобных определителей с учетом перебора различных значений параметров задачи в большом количестве их комбинаций становится слишком трудоемким делом. Поэтому в данной ситуации целесообразно использовать метод  $D$ -разбиений [15, 16], который позволяет построить границы искомой области устойчивости в пространстве безразмерных параметров задачи. Согласно ему, необходимо получить отображение мнимой оси плоскости корней характеристического уравнения в пространство безразмерных параметров. Для этого следует подставить  $\lambda = i\omega$  в уравнение (20) и приравнять вещественную и мнимую части получившегося выражения нулю. В результате приходим к следующей системе:

$$\begin{cases} u(\omega, \rho, \delta, \gamma, \beta) = a_6 - a_4\omega^2 + a_2\omega^4 - a_0\omega^6 = 0, \\ v(\omega, \rho, \delta, \gamma, \beta) = a_5\omega - a_3\omega^3 + a_1\omega^5 = 0. \end{cases} \quad (22)$$

где необходимо учесть, что коэффициенты характеристического уравнения имеют вид (21). Таким образом, в уравнениях (22) помимо параметра  $\omega$ , который следует изменять от  $-\infty$  до  $+\infty$ , входят и четыре безразмерных параметра  $\rho$ ,  $\delta$ ,  $\gamma$  и  $\beta$ . Система (22) описывает так называемую кривую  $D$ -разбиения, которая и представляет указанное отображение мнимой оси и разделяет пространство безразмерных параметров задачи на несколько областей с различным расположением корней характеристического уравнения относительно мнимой оси. Для того чтобы выявить область устойчивости движения системы, проще всего взять любую точку в каждой из этих областей и применить к ней критерий Льенара–Шипара. Если в какой-либо области для принятой точки указанный критерий будет выполняться, то это будет означать, что он будет выполнен и в каждой точке этой области, т.е. она и будет являться областью устойчивости. Ясно, что для ее детального исследования и графического изображения целесообразно использовать уже компьютерные методы анализа, к чему мы далее и переходим.

### Обсуждение результатов

Обращаясь к графической интерпретации полученных результатов на основе приведенных выше рассуждений, будем строить границы областей устойчивости на плоскости параметров  $\delta\rho$  при различных значениях двух оставшихся параметров  $\gamma$  и  $\beta$ . При этом также построим и границу области устойчивости для тягача с одним прицепом согласно (17), которая не зависит от конкретных значений параметров  $\gamma > 0$  и  $\beta > 1$ .



**Рис. 2.** Области устойчивости движения тягача с одним и двумя прицепами на плоскости параметров  $\delta\rho$ : (а)  $\beta = 2$ ,  $\gamma$  варьирует; (б)  $\gamma = 2$ ,  $\beta$  варьирует  
**Fig. 2.** Stability regions of the tractor motion with one and two trailers on the plane of parameters  $\delta\rho$ : (а)  $\beta = 2$  at variable  $\gamma$  and (б)  $\gamma = 2$  at variable  $\beta$

На рис. 2, а приведены указанные границы для случая  $\beta = 2$ , когда параметр  $\gamma$  варьирует (приняты значения  $\gamma = 0.1; 1; 2$ ), а на рис. 2, б представлены эти границы для случая  $\gamma = 2$ , когда варьирует уже параметр  $\beta$  (приняты значения  $\beta = 1.5; 2; 2.5$ ). При этом области устойчивости расположены ниже построенных

границ. Из приведенных иллюстраций видно, что при фиксированном значении  $\beta$  увеличение параметра  $\gamma$  приводит к уменьшению области устойчивости, и та же тенденция имеет место при увеличении параметра  $\beta$  для случая зафиксированного параметра  $\gamma$ . Отметим, что при изменении параметров  $\gamma$  и  $\beta$  в достаточно широких диапазонах устойчивость движения системы обеспечивается выбором значения  $\delta$ , несколько меньшего 1, и заданием весьма небольшого значения  $\rho$ .

Необходимо подчеркнуть, что во всех случаях область устойчивости движения тягача с двумя прицепами оказывается существенно более узкой, чем для тягача с одним прицепом, как этого можно было ожидать. Это важное обстоятельство и предопределяет довольно редкое использование на практике тягачей, за которым следуют два прицепа, поскольку при этом крайне высок риск наступления неблагоприятных последствий, связанных с возникновением неустойчивости. Именно поэтому наибольшее распространение получили тягачи с одним прицепом, эксплуатация которых позволяет заметно уменьшить число подобных ситуаций.

### Заключение

В настоящей работе была рассмотрена задача об устойчивости равномерного прямолинейного движения тягача, за которым следуют два идентичных одноосных прицепа. Показано, что для выявления условий устойчивости движения необходимо учесть податливость сцепления первого прицепа с тягачом и второго прицепа с первым. При помощи уравнений Аппеля для неголономных систем построена математическая модель системы в линейной постановке, записанная в удобном виде с учетом введения безразмерных параметров задачи, безразмерных обобщенных координат и безразмерного времени. Проведенный анализ ее характеристического уравнения, имеющего шестой порядок, позволил на основе метода  $D$ -разбиений с использованием критерия Лъенара–Шипара построить области устойчивости движения на плоскости двух безразмерных параметров при различных значениях двух других безразмерных параметров. Приведенные графические иллюстрации позволяют установить качественные и количественные особенности полученного решения и сопоставить его с известным ранее решением для случая тягача с одним прицепом. Сделанные в работе выводы не только имеют теоретическое значение, но представляют и большой практический интерес.

В завершение следует отметить, что представленная в работе методика исследования остается пригодной и в том случае, когда геометрические, инерционные и упругие параметры обоих прицепов и их сцеплений оказываются различными. Разумеется, в этом случае задача будет обладать еще большим количеством параметров, что сильно усложнит как саму математическую модель, так и последующий анализ устойчивости движения на ее основе, который с самого начала, т.е. с момента получения характеристического уравнения, будет целесообразно проводить с использованием компьютерных процедур.

### Список источников

1. *Рокар И.* Неустойчивость в механике. М. : Изд-во иностр. лит., 1959. 287 с.
2. *Закин Я.Х.* Прикладная теория движения автопоезда. М. : Транспорт, 1967. 255 с.
3. *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. М. : Мир, 1971. 192 с.

4. Rouchon P., Fliess M., Levine J., Martin P. Flatness and motion planning: The car with n trailers // *Proceedings of the European Control Conference, Groningen, The Netherlands*, 1993. P. 1518–1522.
5. Tanaka K., Kosaki T. Design of a stable fuzzy controller for an articulated vehicle // *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Part B*. 1997. V. 27 (3). P. 552–558. doi: 10.1109/3477.584963
6. Astolfi A., Bolzern P., Locatelli A. Path-Tracking of a Tractor-Trailer Vehicle Along Rectilinear and Circular Paths: A Lyapunov-Based Approach // *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 2004. V. 20 (1). P. 154–160. doi: 10.1109/TRA.2003.820928
7. Lin J.J.-C., Yang C.-E., Hung W.-H., Kang S.-C. Accessibility evaluation system for site layout planning – a tractor trailer example // *Visualization in Engineering*. 2013. V. 1 (1). P. 1–11. doi: 10.1186/2213-7459-1-12
8. Nastasiu M., Ispas N. Comparative analysis into the tractor-trailer braking dynamics: tractor with single axle brakes, tractor with all wheel brakes // *Central European Journal of Engineering*. 2014. V. 4 (2). P. 142–147. doi: 10.2478/s13531-013-0155-0
9. Меркин Д.Р., Бауэр С.М., Смольников Б.А., Смирнов А.Л. Теория устойчивости в примерах и задачах. М. ; Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2007. 208 с.
10. Смирнов А.С., Смольников Б.А., Леонтьев В.А. Принципы неголономной механики в управлении движением группы транспортных роботов // *Научно-технические ведомости СПбПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление*. 2017. № 3. С. 83–91. doi: 10.18721/JCSTCS.10307
11. Муравьев А.С., Смирнов А.С. Динамика и устойчивость движения тягача с прицепом // *Неделя науки СПбПУ : материалы науч. конф. с междунар. участием. С.-Петербург, 18–23 ноября 2019 г. СПб. : Политех-Пресс, 2019. С. 92–95.*
12. Муравьев А.С., Смирнов А.С. Устойчивость движения тягача с прицепом с учетом сил сопротивления // *Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2020–2021 гг. СПб. : Наука, 2021. С. 29–40.*
13. Вибрации в технике : справочник : в 6 т. / под ред. И.И. Блехмана. М. : Машиностроение, 1979. Т. 2: Колебания нелинейных механических систем. 351 с.
14. Меркин Д.Р., Смольников Б.А. Прикладные задачи динамики твердого тела. СПб. : Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2003. 534 с.
15. Теория автоматического управления / под ред. А.А. Воронова. Изд. 2-е, перераб. и доп. М. : Высш. школа, 1986. Ч. 1: Теория линейных систем автоматического регулирования. 367 с.
16. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2000. 560 с.

## References

1. Rokard Y. (1954) *L'instabilité en mécanique. Automobiles. Avions. Ponts suspendus*. Paris: Masson.
2. Zakin Ya.Kh. (1967) *Prikladnaya teoriya dvizheniya avtopoezda* [Applied theory of road train motion]. Moscow: Transport.
3. Ziegler H. (1968) *Principles of Structural Stability*. Waltham – Massachusetts – Toronto – London: Blaisdell Publishing Company.
4. Rouchon P., Fliess M., Levine J., Martin P. (1993). Flatness and motion planning: The car with n trailers. *Proceedings of the European Control Conference, Groningen, The Netherlands*. pp. 1518–1522.
5. Tanaka K., Kosaki T. (1997) Design of a stable fuzzy controller for an articulated vehicle. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Part B*. 27(3). pp. 552–558. doi: 10.1109/3477.584963

6. Astolfi A., Bolzern P., Locatelli A. (2004) Path-tracking of a tractor-trailer vehicle along rectilinear and circular paths: a Lyapunov-based approach. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 20(1). pp. 154–160. doi: 10.1109/TRA.2003.820928
7. Lin J.J.-C., Yang C.-E., Hung W.-H., Kang S.-C. (2013) Accessibility evaluation system for site layout planning – a tractor trailer example. *Visualization in Engineering*. 1(1). pp. 1–11. doi: 10.1186/2213-7459-1-12
8. Nastasoiu M., Ispas N. (2014) Comparative analysis into the tractor-trailer braking dynamics: tractor with single axle brakes, tractor with all wheel brakes. *Central European Journal of Engineering*. 4(2). pp. 142–147. doi: 10.2478/s13531-013-0155-0
9. Merkin D.R., Bauer S.M., Smirnov A.L., Smolnikov B.A. (2007) *Teoriya ustoychivosti v primerakh i zadachakh* [The theory of stability in examples and problems]. Moscow – Izhevsk: R&C Dynamics.
10. Smirnov A.S., Smol'nikov B.A., Leont'ev V.A. (2017) Printsipy negolonomnoy mekhaniki v upravlenii dvizheniem gruppy transportnykh robotov [Principles of nonholonomic mechanics in controlling a transport robot group]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbPU. Informatika. Telekommunikatsii. Upravlenie – St. Petersburg Polytechnical University Journal. Computer Science. Telecommunication and Control Systems*. 3. pp. 83–91. doi: 10.18721/JCSTCS.10307
11. Murav'yov A.S., Smirnov A.S. (2019) Dinamika i ustoychivost' dvizheniya tyagacha s pritsepom [Dynamics and stability of movement of a tractor with a trailer]. *Week of Science of SPbPU, Proceedings of a Scientific Conference with International Participation. St. Petersburg, November 18–23, 2019*. Saint Petersburg: POLYTECH-PRESS. pp. 92–95.
12. Murav'yov A.S., Smirnov A.S. (2021) Ustoychivost' dvizheniya tyagacha s pritsepom s uchetom sil soprotivleniya [The motion stability of a tractor with a trailer taking into account the resistance forces]. *Proceedings of the seminar "Computer Methods in Continuum Mechanics" 2020–2021*. Saint Petersburg: Nauka. pp. 29–40.
13. Blekhnman I.I. (ed.) (1979) *Vibratsii v tekhnike. Spravochnik. Tom 2. Kolebaniya nelineynykh mekhanicheskikh sistem* [Vibrations in technology. Handbook. Volume 2. Oscillations of nonlinear mechanical systems]. Moscow: Mashinostroenie.
14. Merkin D.R., Smol'nikov B.A. (2003) *Prikladnye zadachi dinamiki tverdogo tela* [Applied problems of the dynamics of rigid bodies]. Saint Petersburg: Saint Petersburg State University Publishing House.
15. Voronov A.A. (ed.) (1986) *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya. Chast' 1. Teoriya lineynykh sistem avtomaticheskogo regulirovaniya* [Automatic control theory. Part I. Theory of linear systems of automatic control]. Moscow: Vysshaya shkola.
16. Rabinovich M.I., Trubetskov D.I. (2000) *Vvedenie v teoriyu kolebaniy i voln* [Introduction to the theory of oscillations and waves]. Izhevsk: Regul'yarnaya i khaoticheskaya dinamika.

**Сведения об авторах:**

**Смирнов Алексей Сергеевич** – ассистент Высшей школы механики и процессов управления Физико-механического института Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, младший научный сотрудник Лаборатории мехатроники Института проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: smirnov.alexey.1994@gmail.com

**Дегилевич Егор Алексеевич** – инженер ООО «Центр Технологического Консалтинга», аспирант Института проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: DegilevichEgor@gmail.com

**Information about the authors:**

**Smirnov Aleksey S.** (Peter the Great Saint Petersburg Polytechnic University, Institute of Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russian Federation). E-mail: smirnov.alexey.1994@gmail.com

**Degilevich Egor A.** (CMT-Engineering, Institute of Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russian Federation). E-mail: DegilevichEgor@gmail.com

*Статья поступила в редакцию 04.10.2022; принята к публикации 10.07.2023*

*The article was submitted 04.10.2022; accepted for publication 10.07.2023*

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/84/12

## Математическая модель физически нелинейных крутильных колебаний круглого упругого стержня

Хайрулла Худойназаров

*Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан,  
kh.khudoyn@gmail.com*

**Аннотация.** Разработана математическая модель нестационарных крутильных колебаний круглого упругого стержня с учетом нелинейного закона упругости Г. Каудерера. Нелинейное уравнение движения упругого тела для случая крутильных колебаний стержня приведено к двум линеаризованным уравнениям в преобразованиях. Выведено физически нелинейное уравнение крутильных колебаний стержня, из которого в частном случае можно получить некоторые известные физически нелинейные уравнения колебания. Разработан алгоритм, позволяющий по полю искомым функций однозначно определить напряженно-деформированное состояние точек произвольного сечения стержня по пространственным координатам и времени.

**Ключевые слова:** математическая модель, нестационарность, крутильные колебания, нелинейные уравнения, физическая нелинейность, напряжения, перемещение

**Для цитирования:** Худойназаров Х. Математическая модель физически нелинейных крутильных колебаний круглого упругого стержня // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 152–166. doi: 10.17223/19988621/84/12

Original article

## A mathematical model of physically nonlinear torsional vibrations of a circular elastic rod

Khayrulla Khudoynazarov

*Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan, kh.khudoyn@gmail.com*

**Abstract.** A mathematical model of non-stationary torsional vibrations of a circular elastic rod is developed taking into account the Kauderer nonlinear law of elasticity. To solve this problem, the nonlinear equation of motion of an elastic body with torsional vibrations of a rod is reduced to two linear Bessel equations (homogeneous and inhomogeneous) in transformations. Considering general solutions of the obtained equations with zero initial and given boundary conditions on the surface of the rod,

a refined physically nonlinear equation of torsional vibrations of the rod made of homogeneous and isotropic material is derived. In particular, this equation may be used to obtain some well-known classical oscillation equations. An algorithm is proposed that allows one to determine the stress-strain state of the points along an arbitrary cross-section of the rod in terms of space and time coordinates using the field of the desired functions. Some special cases resulting from the obtained results are analyzed. In particular, by reducing the expressions of Bessel functions in the form of power series to the first few terms, an approximate equation of the circular rod oscillations is derived. Comparative analysis of findings and available data of other authors shows that the obtained equation generalizes the well-known classical linear equation and nonlinear equations of G. Kauderer and Professor I.G. Filippov. Based on the proposed equation and formulas for stresses and displacement, the applied problem of physically nonlinear torsional vibrations of a circular elastic rod under end and surface loads is solved.

**Keywords:** mathematical model, non-stationary, torsional vibrations, nonlinear equations, physical nonlinearity, stresses, displacement

**For citation:** Khudoynazarov, Kh. (2023) A mathematical model of physically nonlinear torsional vibrations of a circular elastic rod. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 152–166. doi: 10.17223/19988621/84/12

## Введение

Цилиндрические оболочки и круглые стержни являются одними из основных элементов различных инженерных конструкций [1], и исследования их нелинейного динамического поведения имеют важное прикладное значение [2, 3]. Такие элементы в процессе эксплуатации часто находятся под воздействием динамических нагрузок, которые приводят к их нестационарным колебаниям [4, 5]. Как отмечено М. Амабили [6], В.И. Цурпаль [7] и другими исследователями, линейные теории не всегда достаточно точно описывают такие колебательные процессы, и поэтому для их исследования применяются различного рода нелинейные (геометрически и физически) теории [8, 9]. При этом во многих нелинейных задачах механики деформируемых твердых тел учитывается геометрическая нелинейность [10]. При сравнительно больших напряжениях, когда деформации остаются малыми, имеют место нелинейные зависимости между компонентами тензоров напряжений и деформаций [11].

Вопросам нестационарных колебаний элементов инженерных конструкций с учетом физической нелинейности в целом посвящено небольшое количество работ [12]. При исследовании динамического поведения элементов инженерных конструкций имеет важное значение разработка математических основ изучения процесса [13, 14]. Сюда примыкают и исследования крутильных колебаний цилиндрических оболочек и стержней, которые наряду с их продольными и поперечными колебаниями имеют важные приложения в стержневых системах. Так, в работах В.И. Ерофеева и соавт. [15] предложены математические модели, обобщающие уравнения крутильных колебаний стержней Кулона и Власова с учетом геометрической нелинейности. В общем случае нелинейность учитывается как в системе перемещений, так и в соотношениях, связывающих перемещения и деформации.

Трехслойные конструкционные элементы широко применяются в авиа- и судостроении, строительстве зданий и сооружений, космической промышленности и других отраслях. Поэтому актуальной является проблема разработки эффективных методов расчета напряженно-деформированного состояния трехслойных элементов конструкций, а также обобщения классических теорий с применением уточненных моделей, включая нелинейные, отражающие динамическое поведение современных материалов. В этом плане в работе А.В. Кудина и соавт. [16] приведен вариант уравнений изгиба трехслойных пластин симметричного строения с изотропными наружными слоями и физически нелинейно-упругим изотропным материалом заполнителя. Разработана трехмерная конечно-элементная модель трехслойной пластины, на основе которой получены численные оценки параметров состояния трехслойной конструкции.

Одной из основных проблем в исследовании динамического поведения оболочек и стержней является выбор уравнений колебания, который должен осуществляться, исходя из конкретных физико-механических свойств их материалов [17]. Поэтому во многих случаях исследователям приходится разрабатывать подходящие уравнения колебания [18]. Естественно, при этом используются различные методы вывода уравнений. К одному из таких методов относится метод использования общих решений в преобразованиях трехмерных задач теории упругости [19, 20]. Сущность метода сводится к изучению построенных решений при различных типах внешних воздействий [21, 22] и выяснению условий, при выполнении которых смещения или их «главные части» удовлетворяют несложным уравнениям колебания, а также к нахождению алгоритма, позволяющего по полю этих «главных частей» вычислять приближенные значения полей смещений и напряжений в любом сечении для произвольного момента времени.

Таким образом, можно утверждать, что в настоящее время существует незначительное количество работ, посвященных практически важной задаче исследования физически нелинейных, нестационарных колебаний цилиндрических оболочек и стержней. Поэтому актуальной является проблема [13, 14] усовершенствования существующих и создания новых моделей динамического расчета таких систем, находящихся под действием динамических нагрузок с учетом свойств физической нелинейности их материала. Цель данной работы – вывод физически нелинейных уравнений колебания кругового упругого стержня, разработка алгоритма определения напряженно-деформированного состояния (НДС) произвольной его точки, а также решение прикладной задачи о физически нелинейных нестационарных колебаниях такого стержня на основе полученных уравнений колебания и формул для определения НДС.

### Постановка задачи

В цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  рассматривается однородный и изотропный упругий стержень кругового поперечного сечения радиуса  $r_0$ . Считается, что стержень имеет неограниченную длину. Для исследования крутильных колебаний такого стержня принимаются уравнения движения упругого тела. Известно [21], что при решении осесимметричных задач о нестационарных колебаниях круговых цилиндрических оболочек и круглых стержней задачу о их

крутильных колебаниях можно исследовать отдельно от задачи о их продольно-радиальных колебаниях. Поэтому крутильные колебания круглого стержня описываются уравнением

$$\frac{\partial \sigma_{r0}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r0}}{r} = \rho \frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2}, \quad (0 \leq r \leq r_0). \quad (1)$$

Далее будем считать, что крутильные колебания рассматриваемой оболочки возбуждаются внешним усилием, действующим на внешней поверхности ( $r = r_0$ ), т.е. граничное условие задачи при  $r = r_0$  имеет вид:

$$\sigma_{r0}(r_0, z, t) = f_{r0}(z, t), \quad \sigma_{z0}(r_0, z, t) = 0. \quad (2)$$

Начальные условия нулевые.

В случае крутильных колебаний круглого упругого стержня нелинейный закон упругости между ненулевыми компонентами тензоров напряжений и деформаций принимает вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{r0} &= G \left[ \varepsilon_{r0} + \frac{2}{3} \alpha \gamma_2 (\varepsilon_{r0}^3 + \varepsilon_{z0}^2 \varepsilon_{r0}) \right], \\ \sigma_{z0} &= G \left[ \varepsilon_{z0} + \frac{2}{3} \alpha \gamma_2 (\varepsilon_{r0}^2 \varepsilon_{z0} + \varepsilon_{z0}^3) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

здесь  $\alpha$  – малый параметр,  $\gamma_2$  – параметр нелинейности [11],

$$\varepsilon_{r0} = \frac{\partial U_0}{\partial r} - \frac{U_0}{r}; \quad \varepsilon_{z0} = \frac{\partial U_0}{\partial z}. \quad (4)$$

Таким образом, задача о нелинейных крутильных колебаниях круглого упругого стержня приводится к интегрированию уравнений движения (1) при нелинейном законе упругости (4) с граничными (2) и нулевыми начальными условиями.

### Методика решения

Выводим уравнения физически нелинейных крутильных колебаний круглого стержня. Подставляя выражения (3) в уравнения движения (1), получим нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных относительно деформаций  $\varepsilon_{r0}$  и  $\varepsilon_{z0}$

$$\Delta_0(\varepsilon_{r0}, \varepsilon_{z0}) + \alpha \gamma_2 \left[ \Delta_0(\varepsilon_{r0}, \varepsilon_{z0}) \Psi_0^2 + \varepsilon_{r0} \frac{\partial \Psi_0^2}{\partial r} + \varepsilon_{z0} \frac{\partial \Psi_0^2}{\partial z} \right] = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2}, \quad (5)$$

где

$$\Delta_0(\varepsilon_{r0}, \varepsilon_{z0}) = \frac{\partial \varepsilon_{r0}}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_{z0}}{\partial z} + \frac{2\varepsilon_{r0}}{r}.$$

Разложим деформации и перемещение, входящие в уравнение (5), в степенные ряды по степеням малого параметра  $\alpha$ . Далее из-за малости перемещения и деформаций членами, содержащими квадрат малого параметра и выше, можно пренебречь, т.е. представим деформации и перемещения в виде:

$$\varepsilon_{i0} = \varepsilon_{i0}^{(0)} + \alpha \varepsilon_{i0}^{(1)}, \quad U_0 = U_0^{(0)} + \alpha U_0^{(1)}, \quad (6)$$

где индекс  $i$  принимает значения  $r$  или  $z$ . Подставив (6) в уравнения (5), получим следующее уравнение относительно деформации:

$$\begin{aligned} \Delta_0 \left( \varepsilon_{r0}^{(0)}, \varepsilon_{z0}^{(0)} \right) + \alpha \Delta_0 \left( \varepsilon_{r0}^{(1)}, \varepsilon_{z0}^{(1)} \right) + \alpha \gamma_2 \left\{ F_1 + F_2 + \alpha \left[ F_3 + F_4 + \Delta_0 \left( \varepsilon_{i0}^{(1)} \right) \Psi_0^2 \right] \right\} = \\ = \frac{\rho}{G} \left( \frac{\partial^2 U_0^{(0)}}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial^2 U_0^{(1)}}{\partial t^2} \right), \quad (i = r, z). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_1 \left( \varepsilon_{r0}^{(0)}, \varepsilon_{z0}^{(0)} \right) &= \frac{2}{3} \left( \frac{\partial \varepsilon_{r0}^{(0)}}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_{z0}^{(0)}}{\partial z} + \frac{2}{3} \varepsilon_{r0}^{(0)} \right) \left[ \left( \varepsilon_{r0}^{(0)} \right)^2 + \left( \varepsilon_{z0}^{(0)} \right)^2 \right], \\ F_2 \left( \varepsilon_{r0}^{(0)}, \varepsilon_{z0}^{(0)} \right) &= \left( \varepsilon_{r0}^{(0)} \right)^2 \frac{\partial \varepsilon_{r0}^{(0)}}{\partial r} + \varepsilon_{r0}^{(0)} \varepsilon_{z0}^{(0)} \left( \frac{\partial \varepsilon_{r0}^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{z0}^{(0)}}{\partial r} \right) + \left( \varepsilon_{z0}^{(0)} \right)^2 \frac{\partial \varepsilon_{z0}^{(0)}}{\partial z}, \\ F_3 \left( \varepsilon_{r0}^{(0)}, \varepsilon_{z0}^{(0)} \right) &= \frac{4}{3} \left( \frac{\partial \varepsilon_{r0}^{(0)}}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_{z0}^{(0)}}{\partial z} + \frac{2}{r} \varepsilon_{r0}^{(0)} \right) \left( \varepsilon_{r0}^{(0)} \varepsilon_{r0}^{(1)} + \varepsilon_{z0}^{(0)} \varepsilon_{z0}^{(1)} \right), \\ F_4 \left( \varepsilon_{r0}^{(0)}, \varepsilon_{z0}^{(0)} \right) &= \varepsilon_{r0}^{(0)} \left( 2 \varepsilon_{r0}^{(1)} \frac{\partial \varepsilon_{r0}^{(0)}}{\partial r} + \varepsilon_{r0}^{(0)} \frac{\partial \varepsilon_{r0}^{(1)}}{\partial r} \right) + \left( \varepsilon_{r0}^{(1)} \varepsilon_{z0}^{(0)} + \varepsilon_{r0}^{(0)} \varepsilon_{z0}^{(1)} \right) \left( \frac{\partial \varepsilon_{r0}^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{z0}^{(0)}}{\partial r} \right) + \\ &+ \varepsilon_{z0}^{(0)} \varepsilon_{r0}^{(0)} \left( \frac{\partial \varepsilon_{r0}^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{z0}^{(1)}}{\partial r} \right) + \varepsilon_{z0}^{(0)} \left( 2 \varepsilon_{z0}^{(1)} \frac{\partial \varepsilon_{z0}^{(0)}}{\partial z} + \varepsilon_{z0}^{(0)} \frac{\partial \varepsilon_{z0}^{(1)}}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Пренебрегая опять членами, содержащими квадрат малого параметра, из (7) получим

$$\Delta_0 \left( \varepsilon_{r0}^{(0)}, \varepsilon_{z0}^{(0)} \right) + \alpha \left[ \Delta_0 \left( \varepsilon_{r0}^{(1)}, \varepsilon_{z0}^{(1)} \right) + \gamma_2 \left( F_1 + F_2 \right) \right] = \frac{\rho}{G} \left( \frac{\partial^2 U_0^{(0)}}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial^2 U_0^{(1)}}{\partial t^2} \right).$$

Отсюда, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра  $\alpha$ , будем иметь следующие уравнения:

$$\Delta U_0^{(0)} = 0, \quad (8)$$

$$\Delta U_0^{(1)} + \gamma_2 F \left( \varepsilon_{r0}^{(0)}, \varepsilon_{z0}^{(0)} \right) = 0, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} F \left( \varepsilon_{r0}^{(0)}, \varepsilon_{z0}^{(0)} \right) &= F_1 \left( \varepsilon_{r0}^{(0)}, \varepsilon_{z0}^{(0)} \right) + F_2 \left( \varepsilon_{r0}^{(0)}, \varepsilon_{z0}^{(0)} \right), \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, получено два линейные уравнения, одно из которых однородное, а другое неоднородное. При этом правая часть неоднородного уравнения (9) определяется по результатам решения линейного уравнения (8).

Для решения уравнений (8), (9) функции внешних воздействий в граничных условиях будем считать принадлежащими к классу функций, представимых в виде [22]:

$$f_{r0} \left( z, t \right) = \int_0^{\infty} \left. \begin{array}{l} \sin kz \\ -\cos kz \end{array} \right\} dk \int_{(t)} \bar{f}_{r0} \left( k, p \right) e^{pt} dp, \quad (10)$$

где  $(l)$  – разомкнутый контур в плоскости  $p$ , прилегающий справа к участку  $(-i\omega_0, i\omega_0)$  мнимой оси. Кроме того, функции  $f_{r_0}(k, p)$ , которые необходимы при выводе уравнений колебания, пренебрежимо малы вне области  $k \leq k_0$ ,  $|\text{Im } p| \leq \omega_0$ .

Представив перемещение  $U_0^{(0)}$  также как (10), обозначив при этом его изображение через  $\bar{U}_0^{(0)}$  и применив к уравнению (8), получим обыкновенное дифференциальное уравнение Бесселя, общее решение которого равно

$$\bar{U}_0^{(0)}(r) = CI_1(\beta r), \quad \beta^2 = \frac{p^2}{b^2} + k^2, \quad b^2 = G/\rho \quad (11)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования;  $I_1(\beta r)$  – функция Бесселя;  $b$  – скорость поперечных волн. Используя стандартные разложения функции Бесселя в степенной ряд по степеням радиальной координаты, вводя новую искомую функцию по формуле

$$\bar{U}(p, k) = \frac{1}{2} \beta C \quad (12)$$

и ограничиваясь первым приближением в бесконечной сумме степенного ряда, для преобразованного по (10) перемещения  $\bar{U}_0^{(0)}$ , получим

$$U_0^{(0)}(r, z, t) = \left( r + \frac{r^3}{8} \lambda \right) U(z, t), \quad (13)$$

где функция  $U(z, t)$  является оригиналом функций  $\bar{U}(p, k)$ , а оператор  $\lambda$  определяется как [23]

$$\lambda^n [U(z, t)] = \int_0^\infty \frac{\sin kz}{-\cos kz} \left. \right\} dk \int_{(l)} \beta^{2n} [\bar{U}(p, k)] e^{pt} dp. \quad (14)$$

При этом, исходя из вида (11) для  $\beta$ , нетрудно заключить что оператор  $\lambda^n$  в переменных  $(z, t)$  имеет вид:

$$\lambda^n(\zeta) = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2(\zeta)}{\partial z^2}. \quad (15)$$

Аналогично для  $U_0^{(1)}(r, z, t)$  решается однородная часть уравнения (9). Далее для решения неоднородного уравнения применен метод вариации постоянных и найдено

$$U_0^{(1)}(r, z, t) = \frac{2}{3} r^2 F[U_0^{(0)}]. \quad (16)$$

Формулы (13) и (16) позволяет находить перемещение  $U_0(r, z, t)$ , а через него и деформации  $\varepsilon_{r_0}$  и  $\varepsilon_{z_0}$ , подстановка которых в граничные условия (2) приводит к следующему уравнению:

$$\left( \lambda U + \frac{r_0^2}{6} \lambda^2 U \right) \left[ 1 + \frac{2}{3} \gamma_2 \left( r_0^2 \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \frac{5r_0^6}{196} \lambda^2 U \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right) \right] = \frac{4}{r_0^2} \frac{f_{r_0}(z, t)}{G}. \quad (17)$$

Уравнение (17), в соответствии с (15), представляет собой уравнение физически нелинейных крутильных колебаний круглого упругого стержня. Это уравнение зависит от оператора  $\lambda$  и главной части  $U(z, t)$  крутильного перемещения  $U_0(r, z, t)$

точек оси стержня. При этом, в соответствии с выражением крутильного перемещения (13), функция  $U(z, t)$  имеет размерность деформации и в случае первого приближения в (13) является углом поворота. Кроме того, уравнение (17) в своей структуре учитывает деформацию поперечного сдвига и инерцию вращения, а также правильно учитывает силы, действующие на внешнюю поверхности стержня.

Для сравнительного анализа в уравнении (17) целесообразно пренебречь членами с производными четвертого и выше порядков, что дает

$$\lambda U - \frac{2}{3} \gamma_2 r_0^2 \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right) \lambda U \right] = \frac{4}{Gr_0^2} f_{r_0}(z, t). \quad (18)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи, следующие из уравнения (18).

1. Если в уравнении (18) пренебречь вторым слагаемым в квадратных скобках, то следует уравнение И.Г. Филиппова [24]

$$\frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \left( 1 + \frac{2}{3} \gamma_2 r_0^2 \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{4}{Gr_0^2} f_{r_0}(z, t). \quad (19)$$

2. Если положить  $\gamma_2 = 0$  и учесть выражение (15), то из (18) следует известное классическое линейное уравнение крутильных колебаний кругового стержня.

3. Если заменить числовой коэффициент  $2/3$  при нелинейном члене уравнения (19) на  $4/3$  и положить  $f_{r_0}(z, t) \equiv 0$ , то следует уравнение Г. Каудерера [11] с отличной от (19) правой частью.

Наряду с уравнением колебания выведены формулы для перемещения и ненулевых компонент напряжения, которые имеют вид:

$$U_\theta(r, z, t) = rU - \alpha \gamma_2 \frac{r^5}{12} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

$$\sigma_{z\theta}(r, z, t) = G \left\{ r \frac{\partial U}{\partial z} - \alpha \gamma_2 \frac{r^5}{36} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right] \right\},$$

$$\sigma_{r\theta}(r, z, t) = G \left\{ \frac{r^2}{4} \lambda U - \alpha \gamma_2 \frac{r_0^4}{3} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \lambda U \right] \right\}.$$

Ниже решена задача о физически нелинейных колебаниях кругового стержня, находящегося под действием комбинированной нагрузки, на основе указанных четырех уравнений.

### Нелинейные колебания стержня под действием торцевой и поверхностной нагрузок

Стержень с одним зашпеленным и другим свободным концами подвергается действиям кинематического возбуждения  $g(t)$  на свободном конце и динамической нагрузки  $f_{r_0}(z, t) = const$  на поверхности. Требуется определить перемещение и напряжения в точках стержня. Решим задачу на основе различных уравнений (линейного, Г. Каудерера, И.Г. Филиппова и предложенного (17)) с одинаковыми

правыми частями, равными  $(4/Gr_0^2)f_{,r0}(z,t)$ . Предварительно все четыре уравнения переводятся в безразмерные координаты по формулам  $U = U^*$ ,  $t = (l/b)t^*$ ,  $0 \leq t^* \leq 1$ ,  $z = z^*l$ ,  $0 \leq z^* \leq 1$  ( $l$  – длина стержня). В дальнейшем для удобства записи звездочки над буквами опускаются. Уравнения (18), (19) и их указанные частные случаи имеют второй порядок по производным. Поэтому граничные условия задачи для всех рассматриваемых уравнений имеют вид:

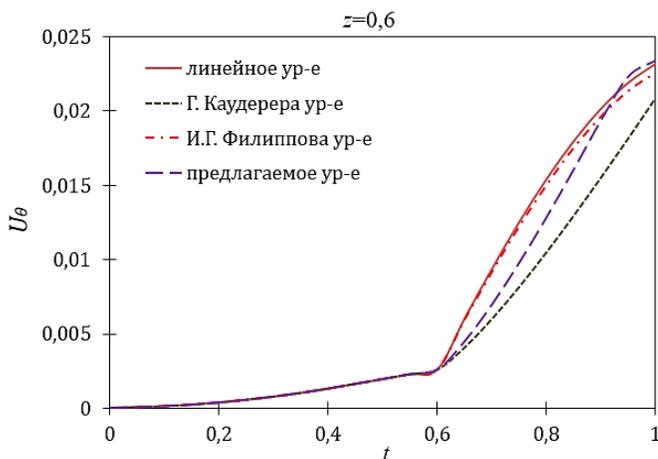
$$U(z,t)|_{z=0} = g(t), \quad U(z,t)|_{z=1} = 0, \quad (20)$$

Начальные условия считаются нулевыми, т.е.

$$U(z,t)|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial U(z,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq z \leq 1. \quad (21)$$

Функция  $g(t)$  принимается в виде  $g(t) = A \sin(\pi t)$ , где  $A = const$ . Интенсивность поверхностной нагрузки определена как  $f_{,r0}(z,t) = P/S_{бок}$ , где  $P = const$ ,  $S_{бок} = 2\pi lr_0$ .

Задача решена численно методом конечных разностей. Для расчетов приняты следующие значения параметров алюминиевого сплава Д16Т [7, 16]:  $\gamma_2 = -0.3878 \cdot 10^6$ ,  $G = 0.277 \cdot 10^5$  МПа,  $\rho = 2780$  кг/м<sup>3</sup>,  $l = 1$  м;  $r_0 = 0.02$  м,  $A = 0.4 \cdot 10^{-3}$ . Полученные результаты приведены на рис. 3 в виде зависимостей крутильного перемещения  $U_\theta$  и касательных напряжений  $\sigma_{r0}(r,z,t)$ ,  $\sigma_{z0}(r,z,t)$  от времени и продольной координаты.



**Рис. 1.** Зависимости перемещения  $U_\theta$  от безразмерного времени в поверхностных точках стержня в сечении  $z = 0.6$  согласно различным уравнениям

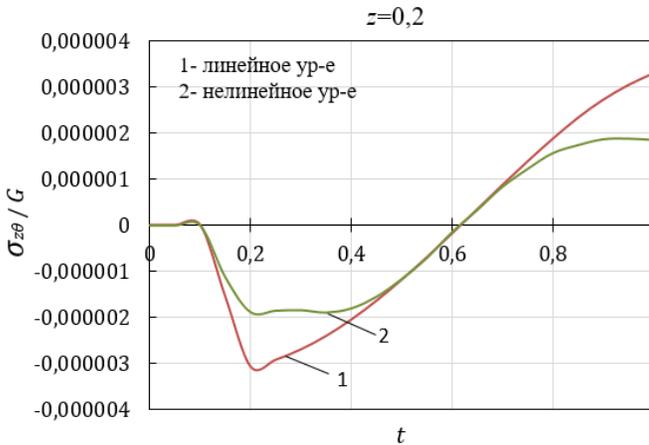
**Fig. 1.** Dependences of displacement  $U_\theta$  on dimensionless time at the surface points of the rod along the cross-section  $z = 0.6$  according to various equations

На рис. 1 приведены зависимости от времени перемещения  $U_\theta$  точек на поверхности стержня в сечении  $z = 0.6$  по уравнениям Г. Каудерера, И.Г. Филиппова,

по предлагаемому уравнению (17), а также по классическому линейному уравнению. Из представленных графиков следует, что наибольшие значения перемещения дает линейное уравнение, а наименьшее – уравнение Г. Каудерера. Значения, полученные на основе уравнения (17), лежат в промежутке между значениями, полученными по результатам решения уравнения Г. Каудерера и линейного уравнения. Результаты, полученные по уравнению И.Г. Филиппова, очень близки к полученным на основе решения линейного уравнения. При этом, например, в момент времени  $t = 0.8$ , значения  $U_\theta$  по линейной теории отличаются от значений по Г. Каудереру на 47%, по уравнению (17) на 20.2%, по И.Г. Филиппову на 2.5% (таблица). Следует отметить, что указанные разницы значений перемещения, вычисленных на основе различных теорий, зависят от времени и для различных моментов времени различны.

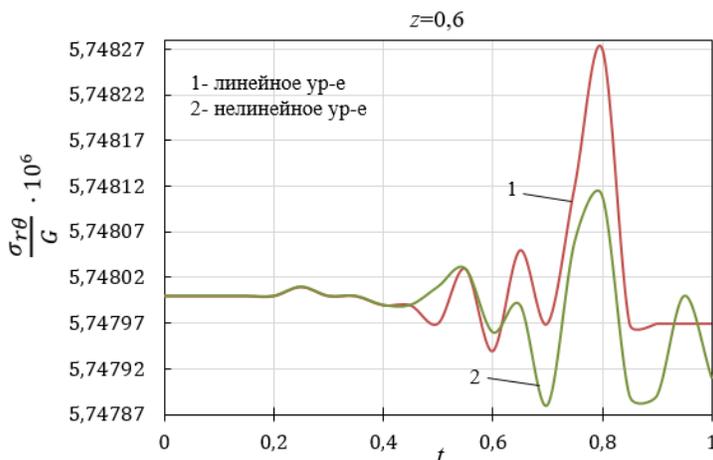
**Значения перемещения  $U_\theta$  в поверхностных точках стержня в сечении  $z = 0.6$ , вычисленные по различным уравнениям**

$t$	Линейное ( $\gamma_2 = 0$ )	Г. Каудерер ( $\gamma_2 \neq 0$ )	И.Г. Филиппов ( $\gamma_2 \neq 0$ )	Уравнение (17) ( $\gamma_2 \neq 0$ )
0	0	0	0	0
0.1	0.00011	0.00011	0.00011	0.00011
0.2	0.00036	0.00036	0.00036	0.00036
0.3	0.00075	0.00075	0.00075	0.00075
0.4	0.00129	0.00129	0.00129	0.00129
0.5	0.00194	0.00194	0.00194	0.00194
0.6	0.00258	0.00258	0.00258	0.00258
0.7	0.00938	0.00599	0.00917	0.00696
0.8	0.01542	0.01049	0.01504	0.01283
0.9	0.02017	0.01554	0.01965	0.01936
1	0.02319	0.02090	0.02261	0.02337



**Рис. 2.** Зависимости напряжения  $\sigma_{z0}$  от безразмерного времени в точках сечения  $z = 0.2$  по линейному и по предлагаемому (17) уравнениям  
**Fig. 2.** Dependences of stress  $\sigma_{z0}$  on dimensionless time at the points along the cross-section  $z = 0.2$  according to linear and proposed (17) equations

На рис. 2. приведены зависимости от безразмерного времени напряжения  $\sigma_{z\theta}$  в точках сечения  $z = 0.2$  на поверхности стержня по предлагаемому нелинейному (17) и по классическому линейному уравнениям. Из представленных графиков следует, что разница между максимальными амплитудами напряжения при  $t = 0.2$  составляет 63%. Значения этого напряжения, вычисленные по линейной теории (по абсолютному значению) выше, чем вычисленные по нелинейной теории. Возбуждение напряжения  $\sigma_{z\theta}$  в сечении  $z = 0.2$  начинается в момент времени  $t = 0.15$  и в дальнейшем носит синусоидальный характер.

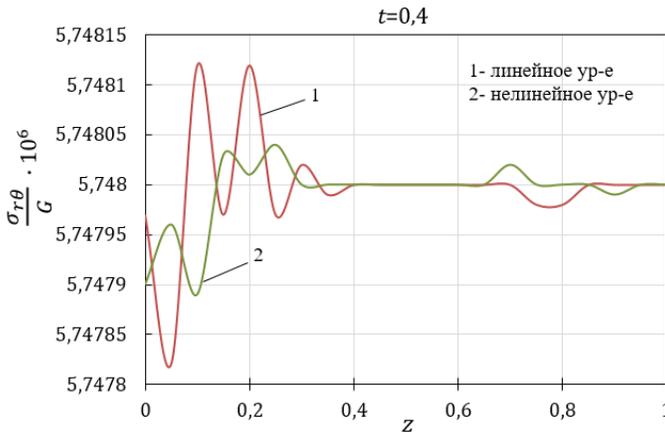


**Рис. 3.** Зависимости напряжения  $\sigma_{r\theta}$  от безразмерного времени в поверхностных точках сечения  $z = 0.6$  по линейному и предлагаемому (17) уравнениям

**Fig. 3.** Dependences of stress  $\sigma_{r\theta}$  on dimensionless time at the surface points along the cross-section  $z = 0.6$  according to linear and proposed (17) equations

На рис. 3. приведены зависимости напряжения  $\sigma_{r\theta}$  от безразмерного времени в поверхностных точках сечения  $z = 0.6$  по линейному и предлагаемому нелинейному (17) уравнениям. Из графиков видно, что в сечении стержня  $z = 0.6$  возбуждение напряжения  $\sigma_{r\theta}$  начинается примерно в момент времени  $t = 0.40$ , но в отличие от напряжения  $\sigma_{z\theta}$  не носит синусоидального характера. При этом графики напряжения  $\sigma_{r\theta}$  по обоим теориям имеют локальные максимумы и минимумы. Из представленных графиков видно, что напряжение  $\sigma_{r\theta}$  возбуждается под действием поверхностной силы и имеет постоянное значение, равное  $5.748G \cdot 10^6$ , которое остается почти неизменным, пока волна кручения, возбужденная торцевой нагрузкой, не доходит до сечения. С подходом волны к сечению в момент времени  $t = 0.4$  значения  $\sigma_{r\theta}$  начинают увеличиваться и примерно в момент времени  $t = 0.8$ , как по линейной, так и по нелинейной теории, достигают своего максимума. Следует отметить, что различие максимальных значений по линейной и нелинейной теориям невелико.

На рис.4 приведены зависимости напряжения  $\sigma_{r\theta}$  от координаты в момент  $t = 0.4$  по линейному и по предлагаемому (17) нелинейному уравнениям. Представленные графики показывают, что напряжение затухает по координате относительно быстро согласно обеим теориям.



**Рис. 4.** Зависимости напряжения  $\sigma_{r\theta}$  от координаты в момент  $t = 0.4$  по линейному и предлагаемому (17) уравнениям

**Fig. 4.** Dependences of stress  $\sigma_{r\theta}$  on the coordinate at a time instant of  $t = 0.4$  according to linear and proposed (17) equations

Возбужденное в сечении  $z = 0$  (свободный торец) напряжение полностью затухает в сечении  $z = 0.4$ . При этом линейная теория дает завышенные результаты. В дальнейшем, при  $z > 0.4$ , обе теории дают одинаковый результат, и изменениями напряжения можно пренебречь.

### Заключение

В результате проведенного исследования получены следующие результаты:

- выведены физически нелинейные уравнения крутильных колебаний круглого упругого стержня относительно главной части крутильного перемещения оси стержня, из которых в частном линейном случае следуют результаты работы [21];

- получены формулы для напряжений и перемещений, позволяющие в произвольной точке стержня произвести нелинейный расчет напряженно-деформированного состояния стержня с требуемой точностью по пространственным координатам и времени. В линейном случае данные формулы переходят в известные [24];

- на примере решения на основе полученных нелинейных уравнений прикладной задачи о физически нелинейных колебаниях круглого стержня под действием торцевой и поверхностной нагрузок показано, что линейная теория дает завышенные значения крутильного перемещения и касательных напряжений по сравнению с нелинейной теорией, что согласуется с результатами работ [11, 16];

- разницы значений перемещения, полученные на основе уравнений различных теорий, для различных моментов времени различны. Например, в момент времени  $t = 0,8$ , значение  $U_6$ , вычисленное по линейной теории, больше значения, вычисленного по предлагаемому уравнению, на 20,2%;

- значения перемещения и напряжений, вычисленные по линейной теории, можно принять как верхние границы значений по сравнению со значениями, вычисленными по нелинейной теории. Данное утверждение подтверждает вывод, сделанный в работе [7] для значений прогиба пластины, вычисленных по линейной и нелинейной теориям.

Список источников

1. Худаяров Б.А., Комилова К.М. Численное моделирование колебаний вязкоупругих трубопроводов, транспортирующих двухфазную среду в режиме пробкового течения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 61. С. 95–110. doi: 10.17223/19988621/61/9
2. Худойназаров Х.Х., Халмурадов Р.И., Ялгашев Б.Ф. Продольно-радиальные колебания упругой цилиндрической оболочки с вязкой сжимаемой жидкостью // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 69. С.139–154. doi: 10.17223/19988621/69/11
3. Khudoynazarov Kh., Abdurazakov J., Kholikov D. Nonlinear torsional vibrations of a circular cylindrical elastic shell // AIP Conference Proceedings. 2022. V. 2637. Art. 020003. doi: 10.1063/5.0118844
4. Awrejcewicz J., Krysko V.A. Nonlinear coupled problems in dynamics of shells // International Journal of Engineering Science. 2003. V. 41. P. 587–607.
5. Khudoynazarov K., Yalgashev B. Longitudinal vibrations of a cylindrical shell filled with a viscous compressible liquid // E3S Web of Conferences. 2021. V. 264. Art. 02017. doi: 10.1051/e3sconf/202126402017
6. Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. New York : Cambridge University Press, 2008. 374 p.
7. Цурпаль И.А. Расчет элементов конструкций из нелинейно-упругих материалов. Киев : Техника, 1976. 176 с.
8. Петров В.В. Расчет неоднородных по толщине оболочек с учетом физической и геометрической нелинейностей // Academia. Архитектура и строительство. 2016. № 1. С. 112–117.
9. Khudoynazarov Kh., Kholikov D., Abdurazakov J. Torsional vibrations of a conical elastic shell // AIP Conference Proceedings. 2022. V. 2637. Art. 030024. doi: 10.1063/5.0118846
10. Khalmuradov R., Nishonov U. Nonlinear deformation of circular discrete ribbed plate under influence of pulse loading // E3S Web of Conferences. 2021. V. 264. Art. 02018. doi: 10.1051/e3sconf/202126402018
11. Каудерпер Г. Нелинейная механика : пер. с нем. М. : Изд-во иностр. лит., 1961. 777 с.
12. Pellicano F. Vibrations of circular cylindrical shells: theory and experiments // Journal of Sound and Vibration. 2007. V. 303. P. 154–170.
13. Khodzhaev D.A., Abdikarimov R.A., Mirsaidov M.M. Dynamics of a physically nonlinear viscoelastic cylindrical shell with a concentrated mass // Magazine of Civil Engineering. 2019. V. 91 (7). P. 39–48. doi: 10.18720/MCE.91.4
14. Бакушев С.В. Разрешающие дифференциальные уравнения физически-нелинейной теории упругости в напряжениях для плоской деформации // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 63. С. 72–86. doi: 10.17223/19988621/63/7
15. Ерофеев В.И., Кажжаев В.В., Семерикова Н.П. Крутильные волны конечной амплитуды в упругом стержне // Известия РАН. Механика твердого тела. 2007. № 6. С. 157–163.
16. Кудин А.В., Тамуров Ю.Н. Применение метода малого параметра при моделировании изгиба симметричных трехслойных пластин с нелинейно-упругим наполнителем // Вісник Східноукраїнського національного університету ім. Володимира Даля. 2011. № 11 (165). С. 32–40.
17. Вячкин Е.С., Каледин В.О., Решетникова Е.В., Вячкина Е.А., Гилева А.Е. Разработка математической модели статического деформирования слоистых конструкций с не-сжимаемыми слоями // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 55. С. 72–83. doi: 10.17223/19988621/55/7
18. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды для плоской деформации в декартовых координатах при биквадратичной аппроксимации замыка-

- ющих уравнений // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 76. С. 70–86. doi: 10.17223/19988621/76/6
19. Khudoynazarov Kh.Kh. Transversal vibrations of thick and thin cylindrical shells, interacting with deformable medium // Shell structures. Theory and applications : Proc. of the 8th international conference on shell structures (SSTA 2005), 12–14 October 2005, Jurata, Gdansk, Poland. London : Taylor & Francis Group, 2006. P. 343–347.
  20. Filippov I.G., Kudajazarov K. Boundary value problems of longitudinal oscillations of the circular cylindrical shells // Gongye Jianzhu. Industrial Construction. 1998. V. 28 (12). P. 34–40.
  21. Филиппов И.Г., Филиппов С.И. Колебательные и волновые процессы в сплошных сжимаемых средах. М. : Произв.-издат. комбинат ВИНТИ, 2007. 429 с.
  22. Петрашень Г.И. Проблемы инженерной теории колебаний вырожденных систем // Исследования по упругости и пластичности. Л. : Изд-во ЛГУ, 1966. Вып. 5. С. 3–33.
  23. Khudoynazarov Kh., Gadayev A., Akhatov Kh. Torsional vibrations of a rotating viscoelastic rod // E3S Web of Conferences. 2023. V. 365. Art. 02016. doi: 10.1051/e3sconf/202336502016
  24. Филиппов И.Г., Егорычев О.А. Волновые процессы в линейных вязкоупругих средах. М. : Машиностроение. 1983. 270 с.

### References

1. Khudayarov B.A., Komilova K.M. (2019) Chislennoe modelirovanie kolebaniy vyazkoupругikh truboprovodov, transportiriyushikh dvukhfaznuyu sredu v rezhime probkovogo techeniya [Numerical simulation of vibrations of viscoelastic pipelines conveying two-phase medium in a slug flow regime]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 61. pp. 95–110. doi: 10.17223/19988621/61/9
2. Khudoynazarov Kh.Kh., Khalmuradov R.I., Yalgashev B.F. (2021) Prodol'no–radial'nye kolebaniya uprugoy tsilindricheskoy obolochki s vyazkoy szhimaemoy zhidkost'yu [Longitudinal-radial vibrations of a elastic cylindrical shell filled with a viscous compressible liquid]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 69. pp. 139–154. doi: 10.17223/19988621/69/11
3. Khudoynazarov Kh., Abdurazakov J., Kholikov D. (2022) Nonlinear torsional vibrations of a circular cylindrical elastic shell. *AIP Conference Proceedings*. 2637. Article 020003. doi: 10.1063/5.0118844
4. Awrejcewicz J., Krysko V.A. (2003) Nonlinear coupled problems in dynamics of shells. *International Journal of Engineering Science*. 41. pp. 587–607. doi: 10.1016/S0020-7225(02)00279-3
5. Khudoynazarov K., Yalgashev B.F. (2021) Longitudinal vibrations of a cylindrical shell filled with a viscous compressible liquid. *E3S Web of Conferences*. 264. Article 02017. doi: 10.1051/e3sconf/202126402017
6. Amabili M. (2008) *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates*. New York: Cambridge University Press.
7. Tsurpal I.A. (1976) *Raschet elementov konstruksiy iz nelineyno-uprugikh materialov* [Calculation of structural elements made of nonlinear elastic materials]. Kyiv: Tekhnika.
8. Petrov V.V. (2016) Raschet neodnorodnykh po tolshchine obolochek s uchetom fizicheskoy i geometricheskoy nelineynosti [Calculation of inhomogeneous thickness of shells with considering physical and geometrical nonlinearities]. *Akademiya arkhitektury i stroitel'stva – Academia Architecture and Construction*. 1. pp. 112–117.
9. Khudoynazarov Kh., Kholikov D., Abdurazakov J. (2022) Torsional vibrations of a conical elastic shell. *AIP Conference Proceedings*, 2637. Article 030024. doi: 10.1063/5.0118846

10. Khalmuradov R., Nishonov U. (2021) Nonlinear deformation of circular discrete ribbed plate under influence of pulse loading. *E3S Web of Conferences*. 264. Article 02018. doi: 10.1051/e3sconf/202126402018
11. Kauderer H. (1958) *Nichtlineare Mechanik*. Berlin: Springer–Verlag.
12. Pellicano F. (2007) Vibrations of circular cylindrical shells: theory and experiments. *Journal of Sound and Vibration*. 303. pp. 154–170. doi: 10.1016/j.jsv.2007.01.022
13. Khodzhaev D.A., Abdikarimov R.A., Mirsaidov M.M. (2019) Dynamics of a physically nonlinear viscoelastic cylindrical shell with a concentrated mass. *Magazine of Civil Engineering*. 91(7). pp. 39–48. doi: 10.18720/MCE.91.4
14. Bakushev S.V. (2020) Razreshayushchie differentsial'nye uravneniya fizicheski nelineynoy teorii uprugosti v napryazheniyakh dlya ploskoy deformatsii [Resolving differential equations of physically nonlinear theory of elasticity in terms of stresses for a plane strain]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 63. pp.72–86. doi: 10.17223/19988621/63/7
15. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Semerikova N.P. (2007) Krutil'nye volny konechnoy amplitudy v uprugom sterzhne [Torsional waves of finite amplitude in an elastic rod]. *Izvestiya Rossiyskoy Akademii Nauk. Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*. 6. pp. 157–163.
16. Kudin A.V., Tamurov Yu.N. (2011) Primenenie metoda malogo parametra pri modelirovanii izgiba simmetrichnykh trekhslonnykh plastin s nelineyno-uprugim zapolnitelem [Application of the small parameter method in modeling the bending of symmetrical three-layer plates with a nonlinear elastic filler]. *Bulletin of the Volodymyr Dahl East Ukrainian National University*. 11(165). pp 32–40.
17. Vyachkin E.S., Kaledin V.O., Reshetnikova E.V., Vyachkina E.A., Gileva A.E. (2018) Razrabotka matematicheskoy modeli staticheskogo deformirovaniya sloistykh konstruktсий s neshhimaemymi sloyami [Mathematical modeling of static deformation of a layered construction with incompressible layers]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 55. pp.72–83. doi: 10.17223/19988621/55/7
18. Bakushev S.V. (2022) Differentsial'nye uravneniya ravnovesiya sploshnoy sredy dlya ploskoy deformatsii v dekartovykh koordinatakh pri bikvadrachnoy approksimatsii zamykayushchikh uravneniy [Differential equations of continuum equilibrium for plane deformation in Cartesian axials at biquadratic approximation of closing equations]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 70–86. doi: 10.17223/19988621/76/6
19. Khudoynazarov Kh.Kh. (2006) Transversal vibrations of thick and thin cylindrical shells, interacting with deformable medium. *Shell Structures. Theory and Applications: Proceedings of the 8th International Conference on Shell Structures, October 12–14, 2005, Jurata, Gdansk, Poland*. London: Taylor & Francis Group. pp. 343–347.
20. Filippov I.G., Kudajazarov K. (1998) Boundary value problems of longitudinal oscillations of the circular cylindrical shells. *Gongye Jianzhu. Industrial Construction*. 28(12). pp. 34–40. doi: 10.1007/BF02700874
21. Filippov I.G., Filippov S.I. (2007) *Kolebatel'nye i volnovye protsessy v sploshnykh szhimaemykh sredakh* [Vibratory and wave processes in continuous compressible media]. Moscow: PIK VINITI.
22. Petrashen G.I. (1966) Problemy inzhenernoy teorii vyrozhdennykh sistem [Problems of the engineering theory of vibrations of degenerate systems]. *Issledovaniya po uprugosti i plastichnosti – Research on Elasticity and Plasticity*. Leningrad: Publishing House of LSU. 5. pp. 3–33.
23. Khudoynazarov Kh., Gadayev A., Akhatov Kh (2023) Torsional vibrations of a rotating viscoelastic rod. *E3S Web of Conferences*. 365. Article 02016. doi: 10.1051/e3sconf/202336502016
24. Filippov I.G., Egorychev O.A. (1983) *Volnovye protsessy v lineynykh vyazkouprugikh sredakh* [Wave processes in linear viscoelastic medium]. Moscow: Mashinostroenie.

**Сведения об авторе:**

**Худойназаров Хайрулла** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики Самаркандского государственного университета, Самарканд, Узбекистан. E-mail: kh.khudoyn@gmail.com

**Information about the author:**

**Khudoynazarov Khayrulla** (Doctor of Technical Sciences, Head of Department of Theoretical and Applied Mechanics, Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan). E-mail: kh.khudoyn@gmail.com

*Статья поступила в редакцию 01.09.2022; принята к публикации 10.07.2023*

*The article was submitted 01.09.2022; accepted for publication 10.07.2023*

**МЕМУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ****MEMOIRS, MEMORABLE DATES, PERSONALITIES**

Научная статья

УДК 51

doi: 10.17223/19988621/84/13

**Петр Андреевич Крылов.  
К 75-летию со дня рождения**

Петр Андреевич Крылов родился 12 марта 1948 г. в селе Глинка Березовского района Красноярского края в семье сельских учителей, участников Великой Отечественной войны Андрея Степановича Крылова и Веры Петровны Крыловой (в девичестве – Никифоровой). Родители – выходцы из крестьянских семей, потомки переселенцев из европейской части России.

В 1966 г. Петр Андреевич окончил Новоподрозновскую среднюю школу Тисульского района Кемеровской области. Школьником участвовал в областной математической олимпиаде в г. Кемерово. В 1971 г. окончил механико-математический факультет Томского государственного университета. Еще будучи студентом, получил замечательные научные результаты, его студенческая работа была награждена премией имени заслуженного деятеля науки РСФСР П.П. Куфа-

рева и опубликована в журнале «Математические заметки». Дипломную работу Петр Андреевич писал у известного математика, основателя Томской алгебраической школы по абелевым группам, завоевавшей высокий авторитет в стране и за рубежом, Исаака Хаимовича Беккера. Отметим, что некоторые факты биографии П.А. Крылова изложены в более ранней работе [1].

Обе диссертации (кандидатскую в 1975 г. и докторскую в 1991 г.) Петр Андреевич защитил в Институте математики СО РАН. Оппонентами докторской диссертации выступили профессора А.В. Михалев, Ю.М. Рябухин и В.К. Харченко.

Научные интересы Петра Андреевича относятся к теории колец эндоморфизмов абелевых групп, абелевым группам с большим числом эндоморфизмов (транзитивные и вполне транзитивные группы и др.), группам расширений и гомоморфизмов абелевых групп, теории колец формальных матриц и колец инцидентности. В теории абелевых групп и теории колец и модулей он является одним из ведущих мировых специалистов.

Большой цикл работ П.А. Крылова посвящен исследованию абелевых групп как модулей над своими кольцами эндоморфизмов. В этих работах изучались группы, являющиеся плоскими, проективными, образующими и регулярными модулями над своими кольцами эндоморфизмов. Описаны нередуцированные эндорегулярные группы и эндорегулярные группы конечного ранга без кручения. Описаны абелевы группы  $A$  и  $B$ , такие что группа гомоморфизмов  $\text{Hom}(A, B)$  является инъективным левым модулем над кольцом эндоморфизмов  $E(B)$  группы  $B$  или инъективным правым модулем над кольцом эндоморфизмов  $E(A)$  группы  $A$ . Для произвольных абелевых групп  $A$  и  $B$  найдены условия артиновости группы гомоморфизмов  $\text{Hom}(A, B)$  как модуля над кольцом эндоморфизмов группы  $B$  или  $A$ . Выяснен вопрос, когда группа  $\text{Hom}(A, B)$  алгебраически компактна.

Изучались также абелевы группы и модули с различными кольцевыми свойствами (наследственность, полупервичность, нетеровость), налагаемыми на их кольца эндоморфизмов, хопфовы и кохопфовы абелевы группы и модули. Наследственность кольца эндоморфизмов модуля  $A$  тесно связана с вопросом, когда подмодули  $A$ -свободных ( $A$ -проективных) модулей  $A$ -свободны ( $A$ -проективны). Получено обобщение теоремы Бэра–Колеттиса для модулей, включающее все известные ранее результаты. В классе групп без кручения с нетеровыми кольцами эндоморфизмов выполнение для группы теоремы Бэра равносильно наследственности и полупервичности ее кольца эндоморфизмов. Описаны эндообразующие группы без кручения конечного ранга, такая группа изоморфна прямой сумме проективных идеалов из центра ее кольца эндоморфизмов. Исследовался вопрос, когда группа автоморфизмов абелевой группы аддитивно порождает ее кольцо эндоморфизмов. Доказан интересный факт, что каждый эндоморфизм прямой суммы попарно изоморфных групп может быть представлен в виде суммы четырех ее автоморфизмов.

Петр Андреевич ввел в рассмотрение  $sr$ -группы (смешанные группы, которые естественным образом вкладываются в качестве чистых подгрупп в прямые произведения своих  $p$ -компонент). Им исследовались эндоплоская и эндопроективная размерности смешанных абелевых  $sr$ -групп. Получено полное описание эндопроективных и эндообразующих самомалых смешанных  $sr$ -групп конечного ранга без кручения, выяснены условия правой и левой наследственности кольца эндоморфизмов. Одновременно с профессором А.А. Фоминым П.А. Крыловым

было введено понятие кольца псевдорациональных чисел и показано, что всякая самамаладая смешанная  $sr$ -группа конечного ранга без кручения является конечно-порожденным модулем над кольцом псевдорациональных чисел. Все это привело к открытию нового направления – теории модулей над этим кольцом и над различными его обобщениями, которое и сейчас продолжает активно развиваться.

Петром Андреевичем получены глубокие результаты по теории радикалов колец эндоморфизмов абелевых групп. Он перенес результаты Р.П. Пирса о радикале Джекобсона кольца эндоморфизмов примарной группы на группы без кручения и смешанные  $sr$ -группы. Им дана характеристика радикала Джекобсона кольца эндоморфизмов группы без кручения конечного ранга и вполне разложимой группы без кручения. Полностью выяснено, когда радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов группы без кручения конечного ранга нильпотентен или равен нулю. Исследовались полупрimitивность колец эндоморфизмов и характеристизации факторколец колец эндоморфизмов по модулю радикала Джекобсона.

Петр Андреевич распространил введенное И. Капланским понятие вполне транзитивной примарной абелевой группы на случай группы без кручения и получил ряд существенных и важных результатов по этим и близким к ним классам групп (транзитивные, сильно однородные, квазисервантно инъективные). Один из классов таких групп специалисты сейчас называют транзитивными по Крылову группами. Петр Андреевич получил описание счетных однородных вполне транзитивных групп без кручения и вполне транзитивных групп без кручения, совпадающих со своим псевдоколеом. Он доказал, что любой топологический изоморфизм колец эндоморфизмов двух однородных вполне транзитивных групп без кручения индуцируется изоморфизмом этих групп. Доказал, что квазисервантно инъективная группа без кручения с циклическими  $p$ -базисными подгруппами является межпрямой суммой неразложимых квазисервантно инъективных групп, допускающих удовлетворительное описание. Показал, что сильно однородная группа без кручения  $A$  обладает интересным свойством групп ранга 1, а именно всякий элемент прямой суммы произвольного числа экземпляров группы  $A$  можно вложить в прямое слагаемое, изоморфное  $A$ . Серьезное значение для теории имеют построенные Петром Андреевичем примеры исследуемых групп, к каковым относится пример счетной суперразложимой (т.е. не имеющей ненулевых неразложимых прямых слагаемых) вполне транзитивной группы без кручения с нулевым псевдоколеом. Получены разнообразные результаты о  $E$ -кольцах и  $E$ -модулях; ассоциативное кольцо  $R$  называется  $E$ -кольцом, если имеет место канонический изоморфизм самого кольца  $R$  с кольцом эндоморфизмов его аддитивной группы  $R^+$ . Эти и другие результаты об абелевых группах изложены в монографиях [2–4].

Петром Андреевичем изучался вопрос, когда тензорное произведение  $A \otimes C$  абелевых групп  $A$  и  $C$  является нетеровым модулем над кольцом эндоморфизмов группы  $A$ . Напомним, что аффинной группой модуля называется полупрямое расширение аддитивной группы модуля с помощью группы его автоморфизмов. Изучение аффинных групп модулей связано с теориями абелевых и некоммутативных групп, модулей и колец. В аффинной группе проявляется зависимость между структурой модуля и его аддитивной группы, группой модульных автоморфизмов и аддитивных. Петр Андреевич описал максимальные абелевы нормальные подгруппы аффинной группы и доказал, что операторные изоморфизмы

аффинных групп индуцируются изоморфизмами модулей. Он изучал автоморфизмы аффинной группы, не оставляющие модуль на месте, и нашел условия нехарактеристичности модуля в его аффинной группе. Им изучены условия, при которых группа расширений не имеет кручения. Для абелевых групп без кручения конечного ранга он получил ответ на задачу 11.51, поставленную А. Мадером в сборнике нерешенных проблем по теории групп, известном под названием Коуровской тетради, а также на проблему 43 из монографии [5]. В частности, доказано, что если  $A$  и  $B$  – группы без кручения конечного ранга, не имеющие циклических прямых слагаемых, то их группы расширений  $\text{Ext}(A, C)$  и  $\text{Ext}(B, C)$  изоморфны для любой группы  $C$  тогда и только тогда, когда группы  $A$  и  $B$  квазиизоморфны. Доказано также, что для редуцированных групп  $A$  и  $B$  без кручения конечного ранга существуют группы  $C_1, \dots, C_n$  без кручения конечного ранга такие, что из квазиизоморфизма групп  $\text{Hom}(A, C_i)$  и  $\text{Hom}(B, C_i)$  при  $i = 1, \dots, n$  следует квазиизоморфизм  $A$  и  $B$ .

Позже в совместном с профессором А.А. Туганбаевым цикле работ Петр Андреевич исследует модули над кольцами обобщенных (или формальных) матриц. Кольца формальных матриц привлекают большое внимание специалистов. Это естественно, поскольку такие кольца регулярно появляются в теории колец и модулей. В частности, они играют важную роль при изучении ряда классов артиновых колец и алгебр. Они также служат источником разнообразных примеров для общей теории колец и модулей. Так, класс колец формальных матриц порядка  $n$  совпадает с классом колец эндоморфизмов модулей, разложимых в прямую сумму  $n$  ненулевых слагаемых. Кольца формальных матриц порядка 2 часто называют кольцами контекста Мориты. В конкретных задачах могут появляться кольца формальных матриц любого порядка  $n$ . В общей теории обычно изучаются кольца матриц порядка 2, в основном по причине технического удобства. Случай  $n > 2$  иногда можно в определенном смысле свести к случаю матриц порядка 2: кольцо формальных матриц порядка  $n > 2$  изоморфно некоторому кольцу формальных матриц порядка  $k$  для каждого  $k = 2, \dots, n - 1$ . Существуют различные конструкции, позволяющие, наоборот, исходя из данного кольца формальных матриц, строить кольца формальных матриц большего порядка. П.А. Крыловым охарактеризованы инъективные, плоские, проективные и наследственные модули над кольцами обобщенных матриц. В ряде случаев вычислены группа Гротендика  $K_0$  и группа Уайтхеда  $K_1$  кольца обобщенных матриц, а также найдены связи этих групп с соответствующими группами исходных колец. Доказан следующий красивый результат: кольца формальных матриц  $K_s(R)$  и  $K_t(R)$  изоморфны в точности тогда, когда элементы  $s$  и  $t$  кольца  $R$  с точностью до автоморфизма отличаются на обратимый элемент. Введено понятие (коммутативного) определителя обобщенной матрицы и гомоморфизма Фробениуса между кольцами обобщенных матриц. Для колец формальных матриц над данным кольцом рассматривались (совместно с профессором А.А. Туганбаевым) задачи реализации и изоморфизма, описания групп автоморфизмов колец формальных матриц. Введено и изучено понятие определителя формальной матрицы над данным кольцом. Найдено строение группы автоморфизмов алгебры формальных матриц над данным кольцом. Группа автоморфизмов такой алгебры является полупрямым произведением нескольких подгрупп, состоящих из автоморфизмов с известным строением. Это достигается за счет того, что алгебра формальных матриц представляется как расщепляющее-

ся расширение некоторого нильпотентного идеала с помощью произведения обычных колец матриц. Данные подходы и результаты распространены на группы автоморфизмов произвольных колец формальных матриц.

В последнее время П.А. Крылов заинтересовался смежными вопросами теории категорий и теории модулей, алгебрами и коалгебрами инцидентности, их автоморфизмами и дифференцированиями. Алгебры инцидентности были введены в середине 1960-х гг. как естественная среда для изучения некоторых комбинаторных проблем, например для обобщений формулы обращения Мебиуса в теории чисел. Вскоре стало ясно, что этот объект интересен и сам по себе. В частности, он включает в себя произведение  $n$  копий кольца  $R$  и кольцо верхнетреугольных матриц над  $R$ . Существует тесная связь между алгебрами инцидентности и подалгебрами кольца матриц над полем. П.А. Крылов в соавторстве с А.А. Туганбаевым выполнил исследование автоморфизмов и дифференцирований алгебр и коалгебр инцидентности. В случае коалгебр важным оказалось то, что дуальная алгебра для коалгебры инцидентности изоморфна определенной алгебре инцидентности. П.А. Крыловым совместно с А.А. Туганбаевым получены различные результаты об идемпотентных функторах и локализациях в категориях модулей и абелевых групп. Установлено, что идемпотентные функторы и, в частности, локализации сохраняют кольцевые и модульные структуры. Введены стандартные идемпотентные функторы и стандартные локализации. С их помощью найдены локализации некоторых модулей и абелевых групп. Ими рассмотрены также стандартные колокализации модулей и двойственность в категории абелевых групп без кручения.

Петр Андреевич является соавтором книг [2–4, 7–15]. После известной переводной двухтомной монографии американского алгебраиста Л. Фукса [5] (в 2015 г. вышло новое издание [6]) книги [2, 3] являются наиболее полными и подробными энциклопедиями по теории колец эндоморфизмов абелевых групп и близких к ним классов модулей; эти книги, а также книга [11] стали настольными у большинства отечественных алгебраистов, занимающихся абелевыми группами. Кольца эндоморфизмов абелевых групп также рассматриваются в публикациях А.Г. Куроша [16], Д. Арнольда [17], К. Бенабдаллаха [18]. По своему содержанию работы А.Г. Куроша, Л. Фукса, К. Бенабдаллаха, Д. Арнольда и книги [2, 3] во многом дополняют друг друга; в [2, 3] представлены все основные направления теории колец эндоморфизмов, изложены как классические результаты, так и последние достижения и открытые проблемы; читатель подводится к переднему краю исследований. Отметим, что в [11] впервые систематизирован накопленный богатый и содержательный материал о модулях над (не обязательно коммутативными) областями дискретного нормирования. Книги [3, 11, 13] вышли также за рубежом: в Нидерландах [4], Германии [12, 14]. Работа [11] также опубликована в КНР на китайском языке.

П.А. Крылов является экспертом РФ (и ранее РФФИ) по алгебре. Неоднократно был членом оргкомитетов ряда математических конференций, рецензент нескольких математических журналов, оппонировал кандидатские и докторские диссертации. Он является членом редакционных коллегий научных журналов «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» и «Прикладная дискретная математика», председателем диссертационного совета НИ ТГУ 01.01 при Томском университете. Четверть века (1998–

2022) он заведовал кафедрой алгебры Томского государственного университета и руководил научным семинаром в ТГУ по алгебре.

Сорок восемь лет Петр Андреевич преподает в Томском университете, на высочайшем уровне читал и продолжает читать основные курсы лекций – алгебру, дискретную математику – для всех студентов ММФ ТГУ, а также разработал несколько специальных курсов для студентов-алгебраистов. Петр Андреевич – заботливый, чуткий и вместе с тем требовательный научный руководитель, десять его учеников успешно защитили кандидатские диссертации и один – докторскую (Е.А. Тимошенко). На сегодняшний день половина сотрудников кафедры алгебры ТГУ – прямые «научные потомки» Петра Андреевича.

За научно-педагогические и организаторские достижения Петр Андреевич награжден нагрудным знаком «Почетный работник высшего профессионального образования РФ», медалью «За заслуги перед Томским университетом», медалью «Д.И. Менделеев», юбилейной медалью «400 лет городу Томску», почетными грамотами с благодарностью администрации Томской области за большой вклад в развитие науки и высшего образования, дважды награждался премией Томского университета за высокие достижения в науке; П.А. Крылов – лауреат премии Томской области в сфере образования, науки, здравоохранения и культуры.

В высшей степени образованный и многосторонне одаренный человек, глубокий исследователь и знаток человеческой души, талантливейший педагог и добрый наставник, Петр Андреевич снискал глубокое уважение со стороны студентов и преподавателей механико-математического факультета Томского университета. Студенты мехмата отмечают, что Петр Андреевич, начиная с первых занятий, умеет расположить к себе, заронить искру интереса к алгебре, предлагая серьезные лекции и практические задачи, которые соединяют в себе крайнюю степень абстракции, изящество и какое-то манящее желание постигнуть этот уровень видения красоты математики, каким мастерски владеет их лектор. По-видимому, в этом и заключается искусство настоящего педагога – все очень трудное, с чем знакомит студентов Петр Андреевич, становится в его умелых руках и увлекательном изложении не столько легким, сколько интересным и впечатляющим. И трудности отступают.

Сотни выпускников мехмата признательны Петру Андреевичу за приобщение к служению математике, за глубокие знания. Академический стиль чтения лекций и математическая строгость изложения материала, присущие П.А. Крылову, формируют у студента совершенно правильное отношение к математике как науке, стремящейся к четко сформулированным принципам, индуктивной и дедуктивной доказательности, дисциплине, задающей образец научности.

Петр Андреевич обладает незаурядными личностными качествами. Талант ученого и педагога, жизненная мудрость, строгость и требовательность, открытость, доброта, необыкновенная работоспособность, широчайший кругозор, эрудиция, доскональное знание своего предмета, энергия и оптимизм, педантичность, умение работать с людьми, тактично и оперативно решать самые сложные проблемы, неизменно выбирая оптимальные стратегии для решения, готовность помочь, поддержать, способность увлечь студентов знаниями и научить их мыслить самостоятельно, доброжелательное, объективное и уважительное отношение к студентам и коллегам – все эти замечательные качества притягивают к нему людей и являются основой его успехов.

П.А. Крылов – большой любитель природы, сельского труда и ценитель душеполезного общения; теплое время года он проводит на даче в приятных садово-огородных хлопотах. И земля не томит ожиданием: по осени Петр Андреевич собирает богатый урожай ягод, плодов и овощей.

Редакционная коллегия журнала «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика», коллектив и студенты механико-математического факультета, авторы заметки от всей души поздравляют Петра Андреевича с юбилеем, желают ему крепкого сибирского здоровья, творческого долголетия, счастья, радости от занятия любимой наукой и общения с близкими, коллегами и учениками.

#### Список источников

1. *Гриншпон С.Я., Чехлов А.Р.* Крылов Петр Андреевич (к 65-летию со дня рождения). Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 1 (21). С. 116–122.
2. *Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А.* Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2002.
3. *Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А.* Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М. : Факториал Пресс, 2006.
4. *Krylov P.A., Mikhailov A.V., Tuganbaev A.A.* Endomorphism Rings of Abelian Groups. Dordrecht–Boston–London : Kluwer Academic Publishers, 2003.
5. *Фуке Л.* Бесконечные абелевы группы. М. : Мир, 1974. Т. 1; 1977. Т. 2.
6. *Fuchs L.* Abelian Groups. Cham : Springer, 2015. (Springer Monogr. Math.).
7. *Крылов П.А., Туганбаев А.А., Чехлов А.Р.* Задачи по теории колец, модулей и полей. М. : Факториал Пресс, 2007.
8. *Крылов П.А., Туганбаев А.А., Чехлов А.Р.* Упражнения по группам, кольцам и полям. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2008.
9. *Крылов П.А., Туганбаев А.А., Чехлов А.Р.* Упражнения по группам, кольцам и полям. М. : Флинта, 2012, 2017.
10. *Крылов П.А., Туганбаев А.А., Чехлов А.Р.* Задачи и упражнения по основам общей алгебры. М. : Флинта, 2012, 2017.
11. *Крылов П.А., Туганбаев А.А.* Модули над областями дискретного нормирования. М. : Факториал Пресс, 2006.
12. *Krylov P.A., Tuganbaev A.A.* Modules over Discrete Valuation Domains. Berlin : Walter de Gruyter, 2008, 2018.
13. *Крылов П.А., Туганбаев А.А.* Кольца формальных матриц и модули над ними. М. : МЦНМО, 2017.
14. *Krylov P., Tuganbaev A.* Formal Matrices. Berlin : Springer-Verlag, 2017.
15. *Крылов П.А., Туганбаев А.А.* Кольца инцидентности: автоморфизмы и дифференцирование. М. : Флинта, 2023.
16. *Курош А.Г.* Теория групп. М. : Наука, 1967.
17. *Arnold D.* Finite rank torsion-free Abelian groups and rings. Berlin ; New York : Springer-Verlag, 1982. (Lecture Notes Math.; v. 931).
18. *Benabdallah K.* Groupes abéliens sans torsion. Montréal, Qué. : Presses de l'Université de Montréal, 1981.

*А.А. Туганбаев, Е.А. Тимошенко, А.А. Фомин, А.В. Царев,  
А.Р. Чехлов, Е.В. Кайгородов, Ц.Д. Норбосамбуев*

*Научный журнал*

**ВЕСТНИК  
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.  
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

**2023. № 84**

Редактор Е.Г. Шумская  
Оригинал-макет Е.Г. Шумской  
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано в печать 17.08.2023 г. Формат 70×100<sup>1/16</sup>.  
Печ. л. 10,9; усл. печ. л. 14,1. Цена свободная.  
Тираж 250 экз. Заказ № 5545.

Дата выхода в свет 23.08.2023 г.

**Адрес издателя и редакции:** 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36  
Томский государственный университет

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании  
Издательства Томского государственного университета  
634050, г. Томск, Ленина, 36  
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75  
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: [rio.tsu@mail.ru](mailto:rio.tsu@mail.ru)