

**ВЕСТНИК  
ТОМСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА  
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY  
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

---

*Научный журнал*

---

**2023**

**№ 65**

**Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере  
массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия  
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-29497 от 27 сентября 2007 г.)**

**Подписной индекс в объединённом каталоге «Пресса России» 44031**

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий,  
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций  
на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук»,  
Высшей аттестационной комиссии

Учредитель – Национальный исследовательский Томский государственный университет (НИ ТГУ)

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Замятин Александр Владимирович** – гл. редактор, проф., д-р техн. наук, НИ ТГУ. Тел. +73822529496  
**Смагин Валерий Иванович** – зам. гл. редактора, проф., д-р техн. наук, НИ ТГУ. Тел. +73822529485  
**Нежелская Людмила Алексеевна** – ответственный секретарь, д-р физ.-мат. наук, НИ ТГУ. Тел. +73822529485  
E-mail: vestnik\_uvvt@mail.tsu.ru

**Воробейчиков Сергей Эрикович** – д-р физ.-мат. наук, НИ ТГУ  
**Вишневецкий Владимир Миронович** – проф., д-р техн. наук, Институт проблем управления РАН (г. Москва)  
**Гордов Евгений Петрович** – проф., д-р физ. мат. наук, Институт мониторинга климатических и экологических систем СО РАН (г. Томск)  
**Кошкин Геннадий Михайлович** – проф., д-р физ.-мат. наук, НИ ТГУ  
**Костюк Юрий Леонидович** – проф., д-р техн. наук, НИ ТГУ  
**Матросова Анжела Юрьевна** – проф., д-р техн. наук, НИ ТГУ  
**Назаров Анатолий Андреевич** – проф., д-р техн. наук, НИ ТГУ  
**Пашинская Татьяна Юрьевна** – д-р физ.-мат. наук, НИ ТГУ  
**Перепелкин Евгений Александрович** – проф., д-р техн. наук, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения (г. Санкт-Петербург)  
**Самуйлов Константин Евгеньевич** – проф., д-р техн. наук, РУДН (г. Москва)  
**Семенкин Евгений Станиславович** – проф., д-р техн. наук, СибГУ им. акад. М.Ф. Решетнева (г. Красноярск)  
**Сущенко Сергей Петрович** – проф., д-р техн. наук, НИ ТГУ  
**Фархадов Маис Паша оглы** – д-р техн. наук, Институт проблем управления РАН (г. Москва)  
**Харин Юрий Семенович** – академик НАНБ, проф., д-р физ.-мат. наук, БГУ, Республика Беларусь (г. Минск)  
**Цициашвили Гурами Шалвович** – проф., д-р физ.-мат. наук, ИПМ ДВО РАН (г. Владивосток)

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**Александр Николаевич Дудин** – проф., д-р физ.-мат. наук, БГУ, Минск, Республика Беларусь  
**Ана Роза Ковали (Ana Rosa Cavalli)** – проф., д-р. философии (PhD), University VII Paris, Франция  
**Енцо Орзингер (Enco Orzinger)** – проф., д-р. философии (PhD), University of Rome, Италия  
**Паоло Принетто (Paolo Prinetto)** – проф. Politechnic Institute, Torino, Италия  
**Раймонд Убар (Raimund Ubar)** – проф., д-р. (PhD), University of Technology Tallinn, Эстония  
**Нина Владимировна Евтушенко** – проф., д-р. техн. наук, ИСП РАН им. Иванникова В.П., Москва, Россия  
**Эрвант Зорниан (Yervant Zorian)** – д-р. философии (PhD), Synopsys, Mountain View, США

## JOURNAL INFO

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is an independent peer-reviewed research journal that welcomes submissions from across the world.

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is issued four times per year, and can be subscribed to in the Russian Press Joint Catalogue (Subscription Index 44031)

The publication in the journal is free of charge and may be in Russian or in English.

The topics of the journal are the following:

- *control of dynamical systems,*
- *mathematical modeling,*
- *data processing,*
- *informatics and programming,*
- *discrete function and automation,*
- *designing and diagnostics of computer systems.*

Rules of registration articles are given in a site:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

## О ЖУРНАЛЕ

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» выходит ежеквартально и распространяется по подписке

Статьи публикуются на русском и английском языках.

Тематика публикаций журнала:

- *управление динамическими системами,*
- *математическое моделирование,*
- *обработка информации,*
- *информатика и программирование,*
- *дискретные функции и автоматы,*
- *проектирование и диагностика вычислительных систем.*

Журнал входит в систему Российского Индекса Научного Цитирования (РИНЦ).

Правила оформления статей приведены на сайте:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

**СОДЕРЖАНИЕ**

**CONTENTS**

**УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ**

**CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS**

**Керимова А.В., Мансимов К.Б.**  
Аналог дискретного принципа максимума Понтрягина в ступенчатой задаче управления для систем, описываемых разностными уравнениями типа Вольтерра ..... 4

**Karimova A.V., Mansimov K.B.**  
An analogue of Pontryagin's discrete maximum principle in the stepwise control problem for systems described by Volterra type difference equations ..... 4

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

**MATHEMATICAL MODELING**

**Дель И.В., Старченко А.В.**  
Использование методов нейросетевого моделирования для прогнозирования качества атмосферного воздуха ..... 15  
**Жуков И.Б., Кипяткова В.А., Темираев Ю.Р.**  
Сетевые модели распространения инноваций ..... 25  
**Иванова Д.В., Жбанкова Е.А., Маркова Е.В., Гайдамака Ю.В.**  
СМО с прерыванием обслуживания для моделирования нарезки радиоресурсов в беспроводных сетях 5G ..... 36  
**Яблонский В.О.**  
Математическая модель и анализ влияния конструкции корпуса гидроциклона на эффективность разделения вязкопластических сред напорной флотацией ..... 47

**Del I.V., Starchenko A.V.**  
Using neural network modeling for air quality prediction ..... 15  
**Zhukov I.B., Kipyatkova V.A., Temiraev Yu.R.**  
Network models of innovation diffusion ..... 25  
**Ivanova D.V., Zhbankova E.A., Markova E.V., Gaidamaka Y.V.**  
Queueing system with preemptions for modeling network slicing in 5G ..... 36  
**Yablonsky V.O.**  
Mathematical model and analysis of the effect of the hydrocyclone body design on the efficiency of separation of viscoplastic media by pressure flotation ..... 47

**ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ**

**DATA PROCESSING**

**Батенков К.А., Фокин А.Б.**  
Анализ надежности телекоммуникационных сетей, поддерживающих механизмы защитного переключения и восстановления для одного основного маршрута ..... 58  
**Игнатьев Н.А., Акбаров Б.Х.**  
Оценка близости структур отношений объектов обучающей выборки на многообразиях наборов латентных признаков ..... 69  
**Перелевский С.С., Пчелинцев Е.А.**  
Улучшенное непараметрическое оценивание для диффузионной эпидемиологической SIR модели по неполным данным ..... 79  
**Цициашвили Г.Ш., Боcharников В.Н.**  
Две естественно-научные задачи статистической оценки при наличии мешающего параметра ..... 89

**Batenkov K.A., Fokin A.B.**  
Reliability analysis of telecommunication networks supporting protective switching and recovery mechanisms for one main route ..... 58  
**Ignatev N.A., Akbarov B.Kh.**  
Estimation of the proximity of structures of relations of objects of the training sample on manifolds of sets of latent features ..... 69  
**Perelevskiy S.S., Pchelintsev E.A.**  
Improved nonparametric estimation for diffusion epidemiological SIR model from incomplete data ..... 79  
**Tsitsiashvili G.Sh., Bocharnikov V.N.**  
Two natural science problems of statistical evaluation in the presence of an interfering parameter ..... 89

**ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ**

**INFORMATICS AND PROGRAMMING**

**Gasimov V.A., Mammadov J.I., Mammadzade N.F.**  
Method of hidden transmission of information based on fractals and its software ..... 95  
**Салмиянов В.О., Масловская А.Г.**  
Программный комплекс системы сегментации и мультифрактальной диагностики цифровых изображений компьютерной томографии легких ..... 105  
**Шашев Д.В., Бондарчук А.С.**  
Алгоритм вычисления координат связанных компонент бинарного изображения с помощью перестраиваемой вычислительной среды ..... 116

**Gasimov V.A., Mammadov J.I., Mammadzade N.F.**  
Method of hidden transmission of information based on fractals and its software ..... 95  
**Salmiyonov V.O., Maslovskaya A.G.**  
Software package for segmentation and multifractal diagnostics system of lung computed tomography digital images ..... 105  
**Shashev D.V., Bondarchuk A.S.**  
Algorithm for calculating the coordinates of connected components of a binary image using a tunable computing environment ..... 116

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ**

**DESIGNING AND DIAGNOSTICS  
OF COMPUTER SYSTEMS**

**Ефанов Д.В.**  
Особенности реализации самопроверяемых структур на основе метода инвертирования данных и линейных кодов ..... 126

**Efanov D.V.**  
The self-checking structures implementation features based on the inverting data and linear block code method ..... 126

## УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

## CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

Научная статья

УДК 517.977.56

doi: 10.17223/19988605/65/1

**Аналог дискретного принципа максимума Понтрягина в ступенчатой задаче управления для систем, описываемых разностными уравнениями типа Вольтерра****Айтадж Вагиф кызы Керимова<sup>1</sup>, Камиль Байрамали оглы Мансимов<sup>2</sup>**<sup>1,2</sup> *Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан*<sup>2</sup> *Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджана, Баку, Азербайджан*<sup>1</sup> *aytac.mansimli@mail.ru*<sup>2</sup> *kamilbmansimov@gmail.com*

**Аннотация.** Рассматривается ступенчатая задача оптимального управления для системы, описываемой разностными уравнениями типа Вольтерра, которые представляют собой дискретные аналоги интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. При предположении, что управляющие функции принадлежат непустым и ограниченным множествам, решена задача оптимального управления для функционала типа Больца.

Применяя один вариант классического метода приращений, построена формула для приращения функционала качества. Доказан аналог дискретного принципа максимума, носящий глобальный характер, и, как следствие, получен точечный аналог дискретного принципа максимума.

**Ключевые слова:** дискретный принцип максимума Понтрягина; разностное уравнение типа Вольтерра; метод приращений; функционал качества; допустимое управление; необходимое условие оптимальности; приращение функционала.

**Для цитирования:** Керимова А.В., Мансимов К.Б. Аналог дискретного принципа максимума Понтрягина в ступенчатой задаче управления для систем, описываемых разностными уравнениями типа Вольтерра // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 65. С. 4–14. doi: 10.17223/19988605/65/1

Original article

doi: 10.17223/19988605/65/1

**An analogue of Pontryagin's discrete maximum principle in the stepwise control problem for systems described by Volterra type difference equations****Aytaj V. Karimova<sup>1</sup>, Kamil B. Mansimov<sup>2</sup>**<sup>1,2</sup> *Baku State University, Baku, Azerbaijan*<sup>2</sup> *Institute of Control Systems of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan*<sup>1</sup> *aytac.mansimli@mail.ru*<sup>2</sup> *kamilbmansimov@gmail.com*

**Abstract.** A stepwise optimal control problem is considered for a system described by Volterra-type difference equations, which are discrete analogues of Volterra type integro-differential equations. Assuming that the control functions belong to nonempty and bounded sets, the optimal control problem for a Boltz type functional is solved.

Using one variant of the classical increment method, a formula for incrementing the quality functional is constructed. An analogue of the discrete maximum principle, which is of a global nature, is proved, and as a consequence, a point analogue of the discrete maximum principle is obtained.

**Keywords:** Pontryagin's discrete principle of maximum; Volterra type difference equation, increment method; quality functionality; admissible control; necessary optimality condition; increment of the functional.

**For citation:** Karimova, A.V., Mansimov, K.B. (2023) An analogue of Pontryagin's discrete maximum principle in the stepwise control problem for systems described by Volterra type difference equations. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnik i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 65. pp. 4–14. doi: 10.17223/19988605/65/1

## Введение

К настоящему времени дискретные задачи оптимального управления еще относительно мало исследованы. Вместе с тем проблема установления необходимых условий оптимальности в ряде дискретных задач оптимального управления рассмотрена в работах [1–4]. В работе [1] получены необходимые условия оптимальности в задаче управления, описываемой разностным аналогом одномерного уравнения Вольтерра.

Работа [2] посвящена доказательству линеаризованного условия максимума и исследованию случая его вырождения в одной задаче управления, описываемой дискретным аналогом гиперболического уравнения первого порядка.

Исследование случая вырождения дискретного аналога принципа максимума для задачи оптимального управления, описываемой дискретным аналогом системы Гурса–Дарбу, выполнено в работе [3].

В [4] для одной дискретной задачи оптимального управления с недифференцируемым критерием качества получено необходимое условие оптимальности в терминах производных по направлениям.

В ряде работ исследуются многоэтапные и ступенчатые процессы, а также процессы с переменной структурой [5–9]. Изучению многоэтапных (ступенчатых) задач оптимального управления, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, посвящены работы [5–10] и др. В исследованиях [5, 6, 8], используя различные приемы, авторы получили необходимые условия оптимальности типа принципа максимума Понтрягина. Последовательному улучшению многоэтапных процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, посвящена работа [7]. В [10] получены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в случае открытых областей управления.

В предлагаемой работе рассматривается одна двухэтапная (ступенчатая) задача оптимального управления, описываемая различными разностными уравнениями, представляющими собой дискретный аналог интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. Получены необходимые условия оптимальности типа принципа максимума Л.С. Понтрягина [11].

## 1. Постановка задачи оптимального управления

Пусть  $U \subset R^r$ ,  $V \subset R^q$  – заданные непустые и ограниченные множества,  $u(t)$  –  $r$ -мерная дискретная,  $v(t)$  –  $q$ -мерная дискретная вектор-функции управляющих воздействий,  $T_1 = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\}$  и  $T_2 = \{t_1, t_1 + 1, \dots, t_2 - 1\}$  – заданные конечные последовательности, причем разности  $t_1 - t_0$  и  $t_2 - t_1$  являются натуральными числами.

Каждую пару  $(u(t), v(t))$  управляющих воздействий  $u(t)$  и  $v(t)$ , удовлетворяющих условиям

$$u(t) \in U \subset R^r, t \in T_1, \quad (1)$$

$$v(t) \in V \subset R^q, t \in T_2 \quad (2)$$

назовем допустимым управлением.

Рассмотрим задачу нахождения минимального значения функционала типа Больца

$$J(u, v) = \varphi_1(x(t_1)) + \varphi_2(y(t_2)) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[ \sum_{\tau=t_0}^t F_1(t, \tau, x(\tau), u(\tau)) \right] + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \left[ \tau \sum_{\tau=t_1}^t F_2(t, \tau, y(\tau), v(\tau)) \right], \quad (3)$$

определенного на решениях системы разностных уравнений Вольтерра

$$x(t+1) = f_1(t, x(t), u(t)) + \sum_{\tau=t_0}^t g_1(t, \tau, x(\tau), u(\tau)), \quad t \in T_1, \quad (4)$$

$$y(t+1) = f_2(t, y(t), v(t)) + \sum_{\tau=t_1}^t g_2(t, \tau, y(\tau), v(\tau)), \quad t \in T_2 \quad (5)$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, \quad (6)$$

$$y(t_1) = G(x(t_1)). \quad (7)$$

Как видно, уравнения (4) и (5) являются дискретными аналогами интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. Здесь  $\varphi_1(x), \varphi_2(y)$  – заданные, непрерывно дифференцируемые скалярные функции,  $g_1(t, \tau, x, u), g_2(t, \tau, y, v)$  – заданные дискретные по  $(t, \tau)$  и непрерывные по  $(x, u)$  и  $(y, v)$  соответственно  $n$ -мерные вектор-функции,  $f_1(t, x, u), f_2(t, y, v)$  – заданные, дискретные по  $t$  и непрерывные по  $(x, u)$  и  $(y, v)$  соответственно  $n$ -мерные вектор-функции,  $F_1(t, \tau, x, u), F_2(t, \tau, y, v)$  – заданные дискретные по  $(t, \tau)$  и непрерывные по  $(x, u)$  и  $(y, v)$  вместе с  $\frac{\partial F_1(t, \tau, x, u)}{\partial x}, \frac{\partial F_2(t, \tau, y, v)}{\partial y}$  соответственно скалярные функции,  $x_0$  – заданный постоянный вектор,  $G(x)$  – заданная непрерывно дифференцируемая  $n$ -мерная вектор-функция.

Допустимое управление  $(u(t), v(t))$ , доставляющее минимальное значение функционалу (3) при ограничениях (1), (2), (4)–(7), назовем оптимальным управлением.

Предполагается, что в рассматриваемой задаче оптимальное управление существует.

Цель работы – вывод необходимых условий оптимальности первого порядка в рассматриваемой задаче.

## 2. Построение формулы приращения функционала качества

Пусть  $(u^0(t), v^0(t), x^0(t), y^0(t))$  и  $(\bar{u}(t) = u^0(t) + \Delta u(t), \bar{v}(t) = v^0(t) + \Delta v(t), \bar{x}(t) = x^0(t) + \Delta x(t), \bar{y}(t) = y^0(t) + \Delta y(t))$  – некоторые допустимые процессы. Тогда, ясно, что приращение  $(\Delta x(t), \Delta y(t))$  траектории  $(x^0(t), y^0(t))$  будет решением задачи

$$\Delta x(t+1) = \left[ f_1(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f_1(t, x^0(t), u^0(t)) \right] + \sum_{\tau=t_0}^t \left[ g_1(t, \tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) - g_1(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau)) \right], \quad (8)$$

$$x(t_0) = 0, \quad (9)$$

$$\Delta y(t+1) = \left[ f_2(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t)) - f_2(t, y^0(t), v^0(t)) \right] + \sum_{\tau=t_1}^t \left[ g_2(t, \tau, \bar{y}(\tau), \bar{v}(\tau)) - g_2(t, \tau, y^0(\tau), v^0(\tau)) \right], \quad (10)$$

$$\Delta y(t_1) = G(\bar{x}(t_1)) - G(x^0(t_1)). \quad (11)$$

Запишем общее приращение функционала

$$\begin{aligned} \Delta J(u^0, v^0) = & \varphi_1(\bar{x}(t_1)) - \varphi_1(x^0(t_1)) + \varphi_2(\bar{y}(t_2)) - \varphi_2(y^0(t_2)) + \\ & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{\tau=t_0}^t \left[ F_1(t, \tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) - F_1(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau)) \right] + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{\tau=t_1}^t \left[ F_2(t, \tau, \bar{y}(\tau), \bar{v}(\tau)) - F_2(t, \tau, y^0(\tau), v^0(\tau)) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Предположим, что  $\psi_i^0 = \psi_i^0(t), i=1,2$ , – пока произвольные  $n$ -мерные дискретные и ограниченные вектор-функции.

Из тождеств (8) и (10) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi_1^{0'}(t) \Delta x(t+1) &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi_1^{0'}(t) [f_1(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f_1(t, x^0(t), u^0(t))] + \\ &+ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[ \sum_{\tau=t_0}^t \psi_1^{0'}(\tau) [g_1(t, \tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) - g_1(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau))] \right], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_1}^{t_2} \psi_2^{0'}(t) \Delta y(t+1) &= \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \psi_2^{0'}(t) [f_2(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t)) - f_2(t, y^0(t), v^0(t))] + \\ &+ \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \left[ \sum_{\tau=t_1}^t \psi_2^{0'}(\tau) [g_2(t, \tau, \bar{y}(\tau), \bar{v}(\tau)) - g_2(t, \tau, y^0(\tau), v^0(\tau))] \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Учитывая начальные условия (9) и (11) легко доказать, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi_1^{0'}(t) \Delta x(t+1) = \psi_1^{0'}(t_1-1) \Delta x(t_1) + \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \psi_1^{0'}(\tau-1) \Delta x(\tau), \quad (15)$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2} \psi_2^{0'}(t) \Delta y(t+1) = \psi_2^{0'}(t_2-1) \Delta y(t_2) - \psi_2^{0'}(t_1-1) \Delta y(t_1) + \sum_{\tau=t_1}^{t_2-1} \psi_2^{0'}(\tau-1) \Delta y(\tau). \quad (16)$$

Введем аналоги функций Гамильтона–Понтрягина в виде:

$$H_1(t, x(t), u(t), \psi_1^0(t)) = \psi_1^{0'}(t) f_1(t, x(t), u(t)) + \sum_{\tau=t}^{t_1-1} [\psi_1^{0'}(\tau) g_1(\tau, t, x(t), u(t)) - F_1(\tau, t, x(t), u(t))],$$

$$H_2(t, y(t), v(t), \psi_2^0(t)) = \psi_2^{0'}(t) f_2(t, y(t), v(t)) + \sum_{\tau=t}^{t_2-1} [\psi_2^{0'}(\tau) g_2(\tau, t, y(t), v(t)) - F_2(\tau, t, y(t), v(t))].$$

С учетом вида функции Гамильтона–Понтрягина и тождества (13)–(16) приращение (12) функционала качества (3) представляется в виде:

$$\begin{aligned} \Delta J(u^0, v^0) &= \varphi_1(\bar{x}(t_1)) - \varphi_1(x^0(t_1)) + \varphi_2(\bar{y}(t_2)) - \varphi_2(y^0(t_2)) + \\ &+ \psi_1^{0'}(t_1-1) \Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi_1^{0'}(t-1) \Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [H_1(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi_1^0(t)) - H_1(t, x^0(t), u^0(t), \psi_1^0(t))] + \\ &+ \psi_2^{0'}(t_2-1) \Delta y(t_2) - \psi_2^{0'}(t_1-1) (G(\bar{x}(t_1)) - G(x^0(t_1))) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \psi_2^{0'}(t-1) \Delta y(t) - \\ &- \sum_{t=t_1}^{t_2-1} (H_2(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t), \psi_2^0(t)) - H_2(t, y^0(t), v^0(t), \psi_2^0(t))). \end{aligned} \quad (17)$$

Используя аналог формулы Тейлора, получим

$$\varphi_1(\bar{x}(t_1)) - \varphi_1(x^0(t_1)) = \frac{\partial \varphi_1'(x^0(t_1))}{\partial x} \Delta x(t_1) + o_1(\|\Delta x(t_1)\|), \quad (18)$$

$$\varphi_2(\bar{y}(t_2)) - \varphi_2(y^0(t_2)) = \frac{\partial \varphi_2'(y^0(t_2))}{\partial y} \Delta y(t_2) + o_2(\|\Delta y(t_2)\|), \quad (19)$$

$$\psi_2^{0'}(t_1-1) (G(\bar{x}(t_1)) - G(x^0(t_1))) = \psi_2^{0'}(t_1-1) G_x(x^0(t_1)) \Delta x(t_1) + o_3(\|\Delta x(t_1)\|), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} &H_1(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi_1^0(t)) - H_1(t, x^0(t), u^0(t), \psi_1^0(t)) = \\ &= H_1(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi_1^0(t)) - H_1(t, x^0(t), u^0(t), \psi_1^0(t)) + \\ &+ \left[ \frac{\partial H_1(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi_1^0(t))}{\partial x} - \frac{\partial H_1(t, x^0(t), u^0(t), \psi_1^0(t))}{\partial x} \right] \Delta x(t) + \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial H_1'(t, x^0(t), u^0(t), \psi_1^0(t))}{\partial x} \Delta x(t) + o_4(\|\Delta x(t)\|), \\
 & H_2(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t), \psi_2^0(t)) - H_2(t, y^0(t), v^0(t), \psi_2^0(t)) = \\
 & = H_2(t, y^0(t), \bar{v}(t), \psi_2^0(t)) - H_2(t, y^0(t), v^0(t), \psi_2^0(t)) + \\
 & + \left[ \frac{\partial H_2(t, y^0(t), \bar{v}(t), \psi_2^0(t))}{\partial y} - \frac{\partial H_2(t, y^0(t), v^0(t), \psi_2^0(t))}{\partial y} \right] \Delta y(t) + \\
 & + \frac{\partial H_2'(t, y^0(t), v^0(t), \psi_2^0(t))}{\partial y} \Delta y(t) + o_5(\|\Delta y(t)\|). \tag{22}
 \end{aligned}$$

Здесь  $\|\alpha\|$  есть норма вектора  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)'$  в линейном  $n$ -мерном пространстве  $R^n$ , определяемая формулой  $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$ ,  $o(\alpha)$  – величина, имеющая более высокий порядок малости, чем  $\alpha$ , т.е.  $\frac{o(\alpha)}{\alpha} \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow 0$ , а  $(\cdot)$  для векторов – операция скалярного произведения, для матриц – транспонирования.

Учитывая разложения (18)–(22), в формуле приращения (17) получим, что

$$\begin{aligned}
 \Delta J(u^0, v^0) & = \frac{\partial \varphi_1'(x^0(t_1))}{\partial x} \Delta x(t_1) + \frac{\partial \varphi_2'(y^0(t_2))}{\partial y} \Delta y(t_2) + \\
 & + \psi_1^0(t_1 - 1) \Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi_1^0(t-1) \Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \frac{\partial H_1'(t, x^0(t), u^0(t), \psi_1^0(t))}{\partial x} \Delta x(t) - \\
 & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[ H_1(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi_1^0(t)) - H_1(t, x^0(t), u^0(t), \psi_1^0(t)) \right] - \\
 & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[ \frac{\partial H_1(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi_1^0(t))}{\partial x} - \frac{\partial H_1(t, x^0(t), u^0(t), \psi_1^0(t))}{\partial x} \right] \Delta x(t) + \\
 & + \psi_2^0(t_2 - 1) \Delta y(t_2) - \psi_2^0(t_1 - 1) \frac{\partial G'(x^0(t_1))}{\partial x} \Delta x(t_1) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \frac{\partial H_2'(t, y^0(t), v^0(t), \psi_2^0(t))}{\partial y} \Delta y(t) - \\
 & - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \left( H_2(t, y^0(t), \bar{v}(t), \psi_2^0(t)) - H_2(t, y^0(t), v^0(t), \psi_2^0(t)) \right) - \\
 & - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \left[ \frac{\partial H_2(t, y^0(t), \bar{v}(t), \psi_2^0(t))}{\partial y} - \frac{\partial H_2(t, y^0(t), v^0(t), \psi_2^0(t))}{\partial y} \right] \Delta y(t) + \\
 & + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) + o_2(\|\Delta y(t_2)\|) - o_3(\|\Delta x(t_1)\|) + \sum_{t=t_0}^{t_1} o_4(\|\Delta x(t)\|) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} o_5(\|\Delta y(t)\|). \tag{23}
 \end{aligned}$$

Если предполагать, что вектор-функции  $\psi_i^0 = \psi_i^0(t)$ ,  $i = 1, 2$ , удовлетворяют соответственно соотношениям

$$\psi_1^0(t-1) = \frac{\partial H_1(t, x^0(t), u^0(t), \psi_1^0(t))}{\partial x}, \tag{24}$$

$$\psi_1^0(t_1-1) = -\frac{\partial \varphi_1(x^0(t_1))}{\partial x} + \frac{\partial G'(x^0(t_1))}{\partial x} \psi_2^0(t_1-1), \tag{25}$$

$$\psi_2^0(t-1) = \frac{\partial H_2(t, y^0(t), v^0(t), \psi_2^0(t))}{\partial y}, \quad (26)$$

$$\psi_2^0(t_2-1) = -\frac{\partial \varphi_2(y^0(t_2))}{\partial y}, \quad (27)$$

то формула приращения (23) примет вид:

$$\begin{aligned} \Delta J(u^0, v^0) = & -\sum_{t=t_0}^{t_1-1} [H_1(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi_1^0(t)) - H_1(t, x^0(t), u^0(t), \psi_1^0(t))] - \\ & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[ \frac{\partial H_1(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi_1^0(t))}{\partial x} - \frac{\partial H_1(t, x^0(t), u^0(t), \psi_1^0(t))}{\partial x} \right] \Delta x(t) - \\ & - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} (H_2(t, y^0(t), \bar{v}(t), \psi_2^0(t)) - H_2(t, y^0(t), v^0(t), \psi_2^0(t))) - \\ & - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \left[ \frac{\partial H_2(t, y^0(t), \bar{v}(t), \psi_2^0(t))}{\partial y} - \frac{\partial H_2(t, y^0(t), v^0(t), \psi_2^0(t))}{\partial y} \right] \Delta y(t) + \\ & + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) + o_2(\|\Delta y(t_2)\|) - o_3(\|\Delta x(t_1)\|) + \sum_{t=t_0}^{t_1} o_4(\|\Delta x(t)\|) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} o_5(\|\Delta y(t)\|). \end{aligned} \quad (28)$$

Заметим, что соотношения (24)–(25) и (26)–(27) являются задачами Коши для линейных разностных уравнений (24) и (27) относительно  $\psi_1^0(t)$  и  $\psi_2^0(t)$  соответственно. Они являются сопряженной системой для рассматриваемой задачи.

### 3. Оценка норм приращений $\Delta x(t)$ и $\Delta y(t)$ траекторий $x^0(t)$ и $y^0(t)$

Для получения необходимых условий оптимальности с помощью формулы приращения (28) понадобятся оценки для  $\|\Delta x(t)\|$  и  $\|\Delta y(t)\|$ . Принимая во внимания задачу (8)–(9) и применяя дискретный аналог формулы Фубини (см., напр.: [12]) можно записать

$$\begin{aligned} \Delta x(t+1) = & \sum_{\tau=t_0}^t (f_1(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) - f_1(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau))) + \\ & + \sum_{\tau=t_0}^t \left[ \sum_{s=t_0}^{\tau} [g_1(\tau, s, \bar{x}(s), \bar{u}(s)) - g_1(\tau, s, x^0(s), u^0(s))] \right] - \sum_{\tau=t_0}^t \Delta x(\tau) = \\ = & \sum_{\tau=t_0}^t (f_1(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) - f_1(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau))) + \sum_{\tau=t_0}^t \left[ \sum_{s=\tau}^t [g_1(s, \tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) - g_1(s, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau))] \right] - \sum_{\tau=t_0}^t \Delta x(\tau) = \\ = & \sum_{\tau=t_0}^t (f_1(\tau, x^0(\tau), \bar{u}(\tau)) - f_1(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau))) + \sum_{s=\tau}^t [g_1(s, \tau, x^0(\tau), \bar{u}(\tau)) - g_1(s, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau))] - \sum_{\tau=t_0}^t \Delta x(\tau) = \\ = & \sum_{\tau=t_0}^t (f_1(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) - f_1(\tau, x^0(\tau), \bar{u}(\tau))) + \sum_{s=\tau}^t [g_1(s, \tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) - g_1(s, \tau, x^0(\tau), \bar{u}(\tau))] - \sum_{\tau=t_0}^t \Delta x(\tau). \end{aligned}$$

Из последнего соотношения, переходя к норме и используя условие Липшица, а также правило треугольника, получим

$$\|\Delta x(t+1)\| \leq L_1 \sum_{\tau=t_0}^t \|\Delta x(\tau)\| + \sum_{\tau=t_0}^t \left[ \|f_1(\tau, x^0(\tau), \bar{u}(\tau)) - f_1(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau))\| + \right.$$

$$+ \sum_{s=\tau}^t \left\| g_1(s, \tau, x^0(\tau), \bar{u}(\tau)) - g_1(s, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau)) \right\|,$$

где  $L_1 = \text{const} > 0$  – некоторая постоянная.

Применяя к последнему неравенству дискретный аналог леммы Гронуолла–Беллмана (см., напр.: [12, 13]) будем иметь

$$\begin{aligned} \|\Delta x(t)\| \leq L_2 & \left[ \sum_{\tau=t_0}^t \left\| f_1(\tau, x^0(\tau), \bar{u}(\tau)) - f_1(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau)) \right\| + \right. \\ & \left. + \sum_{s=\tau}^t \left\| g_1(s, \tau, x^0(\tau), \bar{u}(\tau)) - g_1(s, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau)) \right\| \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь  $L_2 = \text{const} > 0$  – некоторая постоянная.

Для оценки  $\|\Delta y(t)\|$  рассмотрим два возможных варианта.

Первый вариант:  $\Delta v(t) \neq 0, \Delta u(t) = 0$ . Тогда, используя задачу

$$\begin{aligned} \Delta y(t+1) = & \left[ f_2(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t)) - f_2(t, y^0(t), v^0(t)) \right] + \\ & + \sum_{\tau=t_1}^t \left[ g_2(t, \tau, \bar{y}(\tau), \bar{v}(\tau)) - g_2(t, \tau, y^0(\tau), v^0(\tau)) \right], \quad y(t_1) = 0, \end{aligned}$$

по аналогии с доказательством оценки (29) доказывается, что при  $\Delta u(t) = 0$

$$\begin{aligned} \|\Delta y(t)\| = L_3 & \sum_{\tau=t_1}^t \left\| f_2(t, y^0(\tau), \bar{v}(\tau)) - f_2(t, y^0(\tau), v^0(\tau)) \right\| + \\ & + \sum_{s=\tau}^t \left\| g_2(s, \tau, y^0(\tau), \bar{v}(\tau)) - g_2(s, \tau, y^0(\tau), v^0(\tau)) \right\|, \end{aligned} \quad (30)$$

где  $L_3 = \text{const} > 0$  – некоторая постоянная.

Второй вариант. Пусть  $\Delta u(t) \neq 0, \Delta v(t) = 0$ . Тогда из задачи (10)–(11) получаем, что в этом случае  $\Delta y(t)$  является решением задачи

$$\begin{aligned} \Delta y(t+1) = & \left[ f_2(t, \bar{y}(t), v^0(t)) - f_2(t, y^0(t), v^0(t)) \right] + \\ & + \sum_{\tau=t_1}^t \left[ g_2(t, \tau, \bar{y}(\tau), v^0(\tau)) - g_2(t, \tau, y^0(\tau), v^0(\tau)) - \Delta y(\tau) \right], \end{aligned} \quad (31)$$

$$\Delta y(t_1) = G(\bar{x}(t_1)) - G(x^0(t_1)). \quad (32)$$

С учетом начального условия (32) уравнение (31) может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} \Delta y(t+1) = & \sum_{\tau=t_1}^t \left[ f_2(\tau, \bar{y}(\tau), v^0(\tau)) - f_2(\tau, y^0(\tau), v^0(\tau)) \right] + \\ & + \sum_{t=t_1}^t \left[ \sum_{s=\tau}^t \left[ g_2(s, \tau, \bar{y}(\tau), \bar{v}(\tau)) - g_2(s, \tau, y^0(\tau), v^0(\tau)) \right] \right] + G(\bar{x}(t_1)) - G(x^0(t_1)). \end{aligned} \quad (33)$$

В (33), переходя к норме и используя условие Липшица, получим, что

$$\|\Delta y(t+1)\| \leq L_4 \sum_{\tau=t_1}^t \left[ \|\Delta y(\tau)\| + \|\Delta x(t_1)\| \right], \quad (34)$$

где  $L_4 = \text{const} > 0$  – некоторая постоянная.

Применяя к неравенству (34) дискретный аналог леммы Гронуолла–Беллмана, будем иметь

$$\|\Delta y(t)\| \leq L_5 \|\Delta x(t_1)\|, \quad (35)$$

где  $L_5 = \text{const} > 0$  – некоторая постоянная.

Из неравенства (35) учитывая оценку (29) будем иметь следующую оценку:

$$\begin{aligned} \Delta y(t) = L_6 \left[ \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \left[ \left\| f_1(\tau, x^0(\tau), \bar{u}(\tau)) - f_1(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau)) \right\| + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{s=\tau}^{t_1-1} \left\| g_1(s, \tau, x^0(\tau), \bar{u}(\tau)) - g_1(s, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau)) \right\| \right] \right], \end{aligned} \quad (36)$$

где  $L_6 = const > 0$  – некоторая постоянная.

#### 4. Необходимое условие оптимальности

Введем в рассмотрение следующие множества:

$$f_1(t, x^0(t), U) = \{ \alpha_1 : \alpha_1 = f_1(t, x^0(t), u(t)), u(t) \in U, t \in T_1 \}, \quad (37)$$

$$g_1(t, \tau, x^0(\tau), U) = \{ \alpha_2 : \alpha_2 = g_1(t, \tau, x^0(\tau), u(\tau)), u(\tau) \in U, \tau \in T_1 \}, \quad (38)$$

$$F_1(t, \tau, x^0(\tau), U) = \{ \alpha_3 : \alpha_3 = F_1(t, \tau, x^0(\tau), u(\tau)), u(\tau) \in U, \tau \in T_1 \}, \quad (39)$$

$$f_2(t, y^0(t), V) = \{ \beta_1 : \beta_1 = f_2(t, y^0(t), v(t)), v(t) \in V, t \in T_2 \}, \quad (40)$$

$$g_2(t, \tau, y^0(\tau), V) = \{ \beta_2 : \beta_2 = g_2(t, \tau, y^0(\tau), v(\tau)), v(\tau) \in V, \tau \in T_2 \}, \quad (41)$$

$$F_2(t, \tau, y^0(\tau), V) = \{ \beta_3 : \beta_3 = F_2(t, \tau, y^0(\tau), v(\tau)), v(\tau) \in V, \tau \in T_2 \}. \quad (42)$$

Предположим, что эти множества при всех  $(t, \tau, x^0(\tau))$  ( $(t, \tau, y^0(\tau))$ ) выпуклы.

В силу предположения о выпуклости множеств (37)–(42) специальное приращение допустимого управления  $u^0(t)$  можно определить по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t) = u(t; \varepsilon) - u^0(t), \quad t \in T_1. \quad (43)$$

Здесь  $\varepsilon \in [0, 1]$  – произвольное число, а  $u(t; \varepsilon)$  – такое произвольное допустимое управление, что для соответствующего произвольного допустимого управления  $u(t)$

$$f_1(t, x^0(t), u(t; \varepsilon)) - f_1(t, x^0(t), u^0(t)) = \varepsilon [f_1(t, x^0(t), u(t)) - f_1(t, x^0(t), u^0(t))], \quad (44)$$

$$g_1(t, \tau, x^0(\tau), u(\tau; \varepsilon)) - g_1(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau)) = \varepsilon [g_1(t, \tau, x^0(\tau), u(\tau)) - g_1(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau))], \quad (45)$$

$$F_1(t, \tau, x^0(\tau), u(\tau; \varepsilon)) - F_1(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau)) = \varepsilon [F_1(t, \tau, x^0(\tau), u(\tau)) - F_1(t, \tau, x^0(\tau), u^0(\tau))]. \quad (46)$$

Далее специальное приращение допустимого управления  $v^0(t)$  определим по формуле

$$\Delta v_\mu(t) = v(t; \mu) - v^0(t), \quad t \in T_2. \quad (47)$$

Здесь  $\mu \in [0, 1]$  – произвольное число, а  $v(t; \mu)$  – такое произвольное допустимое управление, что для соответствующего ему произвольного допустимого управления  $v(t)$

$$f_2(t, y^0(t), v(t; \mu)) - f_2(t, y^0(t), v^0(t)) = \mu [f_2(t, y^0(t), v(t)) - f_2(t, y^0(t), v^0(t))], \quad (48)$$

$$g_2(t, \tau, y^0(\tau), v(\tau; \mu)) - g_2(t, \tau, y^0(\tau), v^0(\tau)) = \mu [g_2(t, \tau, y^0(\tau), v(\tau)) - g_2(t, \tau, y^0(\tau), v^0(\tau))], \quad (49)$$

$$F_2(t, \tau, y^0(\tau), v(\tau; \mu)) - F_2(t, \tau, y^0(\tau), v^0(\tau)) = \mu [F_2(t, \tau, y^0(\tau), v(\tau)) - F_2(t, \tau, y^0(\tau), v^0(\tau))]. \quad (50)$$

Через  $(\Delta x_\varepsilon(t), \Delta y_\varepsilon(t))$  обозначим специальное приращение траектории  $(x^0(t), y^0(t))$ , отвечающее специальному приращению (43) управляющей функции  $u^0(t)$ .

Из оценки (29), учитывая формулы (44)–(46), получаем

$$\|\Delta x_\varepsilon(t)\| \leq L_7 \varepsilon, \quad t \in T_1 \cup t_1, \quad (51)$$

а из оценки (36) следует, что

$$\|\Delta y_\varepsilon(t)\| \leq L_8 \varepsilon, \quad t \in T_2 \cup t_2. \quad (52)$$

Тогда из формулы приращения (28) получаем справедливость разложения

$$\begin{aligned} & J(u(t) + \Delta u_\varepsilon(t), v^0(t)) - J(u^0(t), v^0(t)) = \\ & = -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left( H_1(t, x^0(t), u(t), \psi_1^0(t)) - H_1(t, x^0(t), u^0(t), \psi_1^0(t)) \right) + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (53)$$

Теперь через  $(\Delta x_\mu(t), \Delta y_\mu(t))$  обозначим специальное приращение траектории  $(x^0(t), y^0(t))$ , отвечающее специальному приращению (47) управляющей функции  $v^0(t)$ .

При этом ясно, что

$$\Delta x(t) = 0, \quad t \in T_1 \cup t_1, \quad (54)$$

а из оценки (30) получаем

$$\|\Delta y_\mu(t)\| \leq L_9 \mu, \quad t \in T_2 \cup t_2. \quad (55)$$

Принимая во внимания формулу (47) и оценку (55), из формулы приращения (28) получаем, что

$$\begin{aligned} & J(u(t), v^0(t) + \Delta v_\mu(t)) - J(u^0(t), v^0(t)) = \\ & = -\mu \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \left( H_2(t, y^0(t), v(t), \psi_2^0(t)) - H_2(t, y^0(t), v^0(t), \psi_2^0(t)) \right) + o(\mu). \end{aligned} \quad (56)$$

Из установленных разложений (53) и (56) следует

**Теорема 1.** Если множества (37)–(42) выпуклы, то для оптимальности допустимого управления  $(u^0(t), v^0(t))$  необходимо, чтобы неравенства

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left( H_1(t, x^0(t), u(t), \psi_1^0(t)) - H_1(t, x^0(t), u^0(t), \psi_1^0(t)) \right) \leq 0, \quad (57)$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1} \left( H_2(t, y^0(t), v(t), \psi_2^0(t)) - H_2(t, y^0(t), v^0(t), \psi_2^0(t)) \right) \leq 0 \quad (58)$$

выполнялись для всех допустимых управляющих функций  $u(t)$  и  $v(t)$  соответственно.

Доказанная теорема является аналогом дискретного принципа максимума для рассматриваемой задачи.

Предположение о выпуклости множеств (37)–(42) позволяет получить аналог дискретного принципа максимума, носящий глобальный характер. А без предположения о выпуклости множеств (37)–(42) в различных дискретных задачах управления можно получить результаты, носящие только локальный характер (см., напр.: [11, 13, 14]).

Заметим, что при использовании произвольности допустимых управлений  $u(t)$  и  $v(t)$  получается следствие теоремы 1, носящее точечный характер.

**Теорема 2.** Для оптимальности допустимого управления  $(u^0(t), v^0(t))$  необходимо, чтобы неравенство

$$H_1(\theta, x^0(\theta), u, \psi_1^0(\theta)) - H_1(\theta, x^0(\theta), u^0(\theta), \psi_1^0(\theta)) \leq 0$$

выполнялось для всех  $u \in U$  и  $\theta \in T_1$ , а неравенство

$$H_2(\theta, y^0(\theta), v, \psi_2^0(\theta)) - H_2(\theta, y^0(\theta), v^0(\theta), \psi_2^0(\theta)) \leq 0$$

выполнялось для всех  $v \in V$  и  $\theta \in T_2$ .

## Заключение

В работе исследуется одна ступенчатая дискретная задача оптимального управления, описываемая дискретными аналогами двух интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.

С применением модифицированного варианта метода приращений получена формула для приращения критерия качества, носящего конструктивный характер.

Налагая определенные условия гладкости на данные задачи и предполагая выпуклость множеств типа допустимых скоростей рассматриваемых уравнений, с помощью специальных вариаций управляющих воздействий из установленной формулы приращения функционала качества получено необходимое условие оптимальности типа дискретного принципа максимума Понтрягина.

## Список источников

1. Мансимов К.Б., Чырахова М.У. Необходимые условия оптимальности в одной дискретной ступенчатой задаче управления // Вестник Воронежского университета. Сер. Физика. Математика. 2021. № 3. С. 106–113.
2. Кадырова С.Ш., Мансимов К.Б. Об оптимальности квазиособых управлений в одной граничной задаче управления дискретными системами типа Россера // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2019. № 49. С. 4–13.
3. Мамедова Т.Ф., Мансимов К.Б. Об оптимальности особых управлений в задаче управления ступенчатыми дискретными двухпараметрическими системами // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2018. № 42. С. 12–22.
4. Гараева Э.А., Мансимов К.Б. Необходимое условие оптимальности в задаче управления с дискретным временем при недифференцируемом критерии качества // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 38. С. 4–10.
5. Розова В.Н. Оптимальное управление ступенчатыми системами // Автоматика и телемеханика. 1972. № 3. С. 15–23.
6. Батурин В.А., Дыхта В.А., Москаленко А.И. и др. Методы решения задач теории управления на основе принципа расширения. Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1990. 190 с.
7. Габелко К.Н. Последовательное улучшение многоэтапных процессов // Автоматика и телемеханика. 1974. № 11. С. 72–80.
8. Розова В.Н. Оптимальное управление ступенчатыми системами с неинтегральным функционалом // Вестник Российского университета дружбы народов. Сер. Прикладная математика и компьютерная математика. 2002. № 1 (1). С. 131–136.
9. Никольский М.С. Об одной вариационной задаче с переменной структурой // Вестник Московского университета. Сер. Вычислительная математика и кибернетика. 1987. №2. С. 36–41.
10. Исмаилов Р.Р., Мансимов К.Б. Об условиях оптимальности в одной ступенчатой задаче управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. № 10. С. 1758–1770.
11. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Альсевич В.В. Методы оптимизации. Минск : Четыре четверти, 2011. 472 с.
12. Souyoufain M., Leela S. Stability results for difference equations of Volterra type // Appl. Math. Comput. 1990. V. 36 (1). P. 51–61.
13. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М. : Наука, 1981. 400 с.
14. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку : Изд-во БГУ, 2013. 151 с.

## References

1. Mansimov, K.B. & Chyrakhova, M.U. (2021) Necessary optimality conditions in one discrete stepwise control problem. *Vestnik Voronezhskogo universiteta. Ser. Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics.* 3. pp. 106–113.
2. Gadirova, S.Sh. & Mansimov, K.B. (2019) About optimality quasi-singular controls in one boundary control problem of Rosser type discrete system. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 49. pp. 4–13. DOI: 10.17223/19988605/49/1
3. Mamedova, T.F. & Mansimov, K.B. (2018) On optimality of singular controls in control problem of the step discrete two-parametric systems. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 42. pp. 12–22. DOI: 10.17223/19988605/42/2
4. Garayeva, E.A. & Mansimov, K.B. (2017) Necessary optimality condition in one discrete control problem from nondifferentiable control cost. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 38. pp. 4–10. DOI: 10.17223/19988605/38/1
5. Rozova, V.N. (1972) Optimal control of step systems. *Avtomatika i telemekhanika.* 3. pp. 15–23.
6. Baturin, V.A., Dykhta, V.A., Moskalenko, A.I. et al. (1990) *Metody resheniya zadach teorii upravleniya na osnove printsipa rasshireniya* [Methods for solving problems of control theory based on the principle of expansion]. Novosibirsk: Nauka.
7. Gabelko, K.N. (1974) Consistent improvement of multi-stage processes. *Avtomatika i telemekhanika.* 11. pp. 72–80.

8. Rozova, V.N. (2002) Optimal control of step systems with non-integral functional. *Vestnik Rossiyskogo universiteta druzhby narodov. Ser. Prikladnaya matematika i komp'yuternaya matematika*. 1(1). pp. 131–136.
9. Nikolsky, M.S. (1987) On a variational problem with a variable structure. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. Vychislitel'naya matematika i kibernetika*. 2. pp. 36–41.
10. Ismailov, R.R. & Mansimov, K.B. (2006) On optimality conditions in a step control problem. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 10. pp. 1758–1770.
11. Gabasov, R., Kirillova, F.M. & Alsevich, V.V. (2011) *Metody optimizatsii* [Optimization Methods]. Minsk: Chetyre chetverti.
12. Souyousefain, M. & Leela, S. (1990) Stability results for difference equations of Volterra type. *Appl. Math. Comput.* 36(1). pp. 51–61. DOI: 10.1016/0096-3003(90)90074-D
13. Vasiliev, F.P. (1981) *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach* [Methods for Solving Extreme Problems]. Moscow: Nauka.
14. Mansimov, K.B. (2013) *Diskretnye sistemy* [Discrete Systems]. Baku: BSU.

**Информация об авторах:**

**Каримова Айтгадж Вагиф кызы** – диссертант кафедры «Математическая кибернетика» Бакинского государственного университета (Баку, Азербайджан). E-mail: aytac.mansimli@mail.ru

**Мансимов Камиль Байрамали оглы** – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией «Методы управления в сложных динамических системах» Института систем управления Министерства науки и образования Азербайджана (Баку, Азербайджан); заведующий кафедрой «Математическая кибернетика» Бакинского государственного университета (Баку, Азербайджан). E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

**Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**

**Information about the authors:**

**Karimova Aitaj V.** (Post-graduate Student, Department of Mathematical Cybernetics, Baku State University, Baku, Azerbaijan). E-mail: aytac.mansimli@mail.ru

**Mansimov Kamil B.** (Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Laboratory “Control Methods in Complex Dynamic Systems” of the Institute of Control Systems of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan); Head Department of Mathematical Cybernetics, Baku State University, Baku, Azerbaijan). E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

**Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.**

*Поступила в редакцию 30.05.2023; принята к публикации 08.12.2023*

*Received 30.05.2023; accepted for publication 08.12.2023*

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

## MATHEMATICAL MODELING

Научная статья

УДК 519.6:004.032.26

doi: 10.17223/19988605/65/2

**Использование методов нейросетевого моделирования  
для прогнозирования качества атмосферного воздуха****Ирина Васильевна Дель<sup>1</sup>, Александр Васильевич Старченко<sup>2</sup>**

<sup>1,2</sup> Томский государственный университет, Томск, Россия

<sup>1</sup> Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН, Томск, Россия

<sup>1</sup> [irina.del@mail.tsu.ru](mailto:irina.del@mail.tsu.ru)

<sup>2</sup> [starch@math.tsu.ru](mailto:starch@math.tsu.ru)

**Аннотация.** Разработана модель рекуррентной нейронной сети типа Long short-term memory (LSTM) для прогнозирования загрязнения атмосферного воздуха частицами PM<sub>2.5</sub>. На основании известного из наблюдений распределения метеорологических значений и концентраций основных загрязнителей атмосферы за предыдущие часы решается задача краткосрочного прогнозирования концентрации PM<sub>2.5</sub>. Общее значение средней абсолютной ошибки по всему прогнозу составила 2,34 мкг/м<sup>3</sup>.

**Ключевые слова:** прогноз качества воздуха; аэрозоли; нейронные сети; метеонаблюдения.

**Для цитирования:** Дель И.В., Старченко А.В. Использование методов нейросетевого моделирования для прогнозирования качества атмосферного воздуха // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 65. С. 15–24. doi: 10.17223/19988605/65/2

Original article

doi: 10.17223/19988605/65/2

**Using neural network modeling for air quality prediction****Irina V. Del<sup>1</sup>, Alexander V. Starchenko<sup>2</sup>**

<sup>1,2</sup> National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia

<sup>1</sup> V.E. Zuev Institute of Atmospheric Optics SB RAS, Tomsk, Russia

<sup>1</sup> [irina.del@mail.tsu.ru](mailto:irina.del@mail.tsu.ru)

<sup>2</sup> [starch@math.tsu.ru](mailto:starch@math.tsu.ru)

**Abstract.** A recurrent neural network model of the Long short-term memory (LSTM) type has been developed to predict atmospheric air pollution by PM<sub>2.5</sub> particles. Based on the distribution of meteorological values and concentrations of the main atmospheric pollutants known from observations for the previous hours, the task of predicting the concentration of PM<sub>2.5</sub> was set. The total mean absolute error for the entire forecast was 2,34 µg/m<sup>3</sup>.

**Keywords:** air quality forecast; aerosols; artificial neuron networks; meteorological observations.

**For citation:** Del, I.V., Starchenko, A.V. (2023) Using neural network modeling for air quality prediction. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 65. pp. 15–24. doi: 10.17223/19988605/65/2

## Введение

Одна из главных проблем экологии – проблема загрязненности атмосферного воздуха в городах, которая представляет собой значительную опасность для здоровья человека в повседневной жизни [1]. Твердые частицы диаметром 2,5 мкм и менее (particulate matter;  $PM_{2,5}$ ) являются загрязнителем атмосферного воздуха, который может оказывать негативное воздействие на здоровье человека, когда его концентрация превышает допустимый нормативный верхний уровень. Источниками  $PM_{2,5}$  могут быть химические реакции с участием, например, диоксида серы, оксида азота, аммиака и черного углерода. Из-за своих сверхмалых размеров частицы, постоянно находящиеся в воздухе, при вдыхании попадают в легкие и далее способны проникнуть в кровеносную систему. Краткосрочными симптомами воздействия высоких уровней концентраций твердых частиц могут быть кашель и затрудненное дыхание. Долгосрочные осложнения могут включать сердечно-сосудистые и легочные заболевания.

Происхождение частиц  $PM_{2,5}$  различное – как природное, так и антропогенное. Природные источники могут включать, например, пыль, сажу, грязь, споры растений, пыльцу. Наиболее распространенные антропогенные источники  $PM_{2,5}$  – транспорт, двигатели внутреннего сгорания и промышленные процессы со сжиганием твердых видов топлива (уголь, нефть), строительство, добыча полезных ископаемых, многие виды производства (например, производство цемента и кирпича).

Неблагоприятные метеорологические условия способствуют накоплению выбросов предприятий и автотранспорта в приземном слое атмосферы. Необходимо прогнозировать содержание загрязняющих веществ в воздухе с учетом неблагоприятных метеорологических условий, дабы избежать повышения уровня загрязнения атмосферного воздуха.

В работе [2] указывается, что подходы к прогнозированию, основанные на методах искусственного интеллекта, оказались более эффективными в системах прогнозирования загрязнения воздуха в режиме реального времени, чем детерминированные, которые применяются в настоящее время. Предлагаемые в статье модели используют четыре почасовых концентрации  $PM_{2,5}$  в качестве входных данных (значения концентраций от текущего часа до трех назад) и прогнозируют концентрацию  $PM_{2,5}$  на следующий час. Было использовано два типа искусственных нейронных сетей (ИНС): нейронная сеть прямого распространения (FFNN) и рекуррентная нейронная сеть (RNN). Лучшая конфигурация ИНС с одним скрытым слоем – RNN с четырьмя нейронами в скрытом слое и адаптивным алгоритмом оптимизации – методом градиентного спуска. Наилучшая архитектура ИНС с двумя скрытыми слоями представляет собой FFNN с пятью нейронами в первом скрытом слое, девятью нейронами во втором скрытом слое, подбором весов градиентным спуском и использованием смещения как адаптивной функции обучения. В этом случае средняя абсолютная ошибка  $MAE = 1,9181$  мкг/м<sup>3</sup> и среднеквадратичная ошибка  $RMSE = 3,1678$  мкг/м<sup>3</sup> имеют наименьшие значения, а индекс согласия  $IOA = 0,9807$  и коэффициент корреляции  $R = 0,9626$  – самые большие значения.

В работе [3] была разработана глубокая рекуррентная нейронная сеть типа Long Short-Term Memory (LSTM) (3–5 скрытых LSTM слоя) для ежедневного прогнозирования  $PM_{10}$  и  $PM_{2,5}$  в Южной Корее. Независимые переменные были получены из наземных наблюдений за 2,3 года. Нейронная сеть прогнозирует среднесуточную концентрацию  $PM_{2,5}$  на следующий день на основе 11–12 параметров (температура воздуха, направление ветра, скорость ветра, суточное количество осадков, почасовое количество осадков, относительная влажность,  $SO_2$ ,  $O_3$ ,  $NO_2$ ,  $CO$ ,  $PM_{10}$  и  $PM_{2,5}$ ) за предыдущие 24 часа (т.е. форма одной единицы входных данных –  $24 \times 11$  или  $24 \times 12$ ). Эффективность LSTM для прогнозирования твердых частиц (PM) оценивалась путем сравнения с наземными наблюдениями PM и с концентрациями PM, предсказанными на основе трехмерной химической транспортной модели (Chemistry-Transport Model; CTM). Сравнения показали, лучшую производительность дает LSTM по сравнению с трехмерным моделированием CTM. Например, с точки зрения индекса согласия:  $IOA$  при трехмерном моделировании CTM составляет диапазон от 0,36 до 0,78 (для различных станций), а при использовании модели на основе LSTM – от 0,62 до 0,79. Авторы подмечают, что для повышения точности прогноза нужно больше исторических данных о качестве воздуха. Кроме того, ограни-

ченное количество входных переменных является еще одним препятствием для оптимальной работы модели. Если будут доступны такие дополнительные параметры, как высота слоя смешения и атмосферное давление, производительность модели на основе LSTM-сети улучшится еще больше.

ИНС, использованная в исследовании [4], содержит входной слой с 11 нейронами, скрытый слой с шестью нейронами и выходной слой с одним нейроном. Нейронная сеть прогнозирует среднемесячную концентрацию  $PM_{2.5}$  на следующий месяц на основе данных о среднемесячных концентрациях  $PM_{2.5}$  за предыдущие 11 месяцев. Обучающая и тестовая выборки относятся к периоду с января 2014 по июль 2021 г. Период прогнозирования – с августа 2021 по май 2022 г. Значения коэффициента корреляции ( $R$ ) для данных обучения и проверки составляют 0,9472 и 0,9834 соответственно. В период прогнозирования показано, что модель ИНС с алгоритмом байесовской регуляризации (BR) дает наилучшие результаты прогнозирования с точки зрения  $R$  (0,9570), средней абсолютной ошибки ( $MAE = 4,6 \text{ мкг/м}^3$ ) и среднеквадратичной ошибки ( $RMSE = 6,6 \text{ мкг/м}^3$ ) соответственно.

В статье [5] применяется специальная рекуррентная нейронная сеть, которая называется сетью с долгой кратковременной памятью (LSTM), для прогнозирования  $PM_{2.5}$  в Нанкине (Китай). На этапе предварительной обработки данных выбираются основные факторы среди загрязнителей воздуха ( $O_3$ ,  $NO_2$ ,  $SO_2$ ,  $CO$  и др.), а также метеорологические параметры (давление, направление ветра, температура и др.), влияющие на  $PM_{2.5}$ , и эти факторы предыдущих наблюдений являются входными данными для прогнозирования концентрации  $PM_{2.5}$  в следующие часы (1 ч, 4 ч, 8 ч и 12 ч). Чтобы определить количество узлов в скрытом слое, используется метод самоорганизации для автоматической настройки скрытых узлов на этапе обучения. Согласно экспериментальным результатам, с ростом временного интервала прогнозирования точность прогноза снижается.

В статье [6] для прогнозирования почасовой концентрации  $PM_{2.5}$  предлагается модель автоэнкодера с сезонным суммированием, сочетающая сезонный анализ и глубокое обучение признаков, названная моделью глубокого обучения с сезонным стековым автоэнкодером (DL-SSAE). Исходные данные сначала декомпозируются на четыре сезонных подсерии в соответствии с китайским календарем, а затем используется метод коэффициента корреляции Кендалла для поиска внутренних взаимосвязей между концентрацией  $PM_{2.5}$  и метеорологическими параметрами в пределах 1-часовой перспективы для каждого сезонного временного ряда. Присущие каждой сезонной подсерии взаимосвязи в конечном итоге извлекаются, изучаются и моделируются различными глубокими нейронными сетями (стековые автоэнкодеры для регрессии), и получаются почасовые прогнозы  $PM_{2.5}$ . Результаты демонстрируют, что предложенная модель превосходит все другие рассмотренные модели с учетом / без учета сезонности в данной работе: средние значения  $MAE$  DL-SSAE ниже на 1,23  $\text{мкг/м}^3$  (весна), 1,88  $\text{мкг/м}^3$  (лето), 1,26  $\text{мкг/м}^3$  (осень) и 2,53  $\text{мкг/м}^3$  (зима) соответственно, чем у неглубокой нейронной сети на основе сезонного анализа (SL-SFN) с данными, полученными с трех станций. Средние значения коэффициента детерминации  $R^2$  DL-SSAE выше на 0,031 (весна), 0,147 (лето), 0,020 (осень) и 0,032 (зима) соответственно, чем у модели SL-SFN на трех станциях. Лучшие значения  $MAE$  на одной из станций: 7,33  $\text{мкг/м}^3$  (весна), 4,61  $\text{мкг/м}^3$  (лето), 15,41  $\text{мкг/м}^3$  (осень), 19,68  $\text{мкг/м}^3$  (зима). Лучшие значения  $R^2$  на одной из станций: 0,881 (весна), 0,937 (лето), 0,934 (осень), 0,891 (зима).

В работе [7] исследуется метод прогнозирования почасовой концентрации  $PM_{2.5}$ , основанный на модели ансамбля, управляемого стекингом (т.е. использование нескольких алгоритмов для решения одной задачи машинного обучения), и двух методов выбора входных данных. Во-первых, частичная автокорреляционная функция (Partial autocorrelation function; PACF) используется для выбора характеристик факторов с временным лагом, а коэффициент корреляции Спирмена применяется для извлечения скрытых характеристик экзогенных факторов, совместно определяя входные данные модели прогнозирования. Впоследствии в качестве модели прогнозирования формируется двухслойная ансамблевая модель, управляемая стекингом. В этой ансамблевой модели, BPNN (Back Propagation Neural Network), IBPNN (Improved Back Propagation Neural Network) и ELM (Extreme learning machine) используются в качестве базовой модели, а LSSVR (Least square support vector regression) – в качестве метамодели. Более того, в каждой базовой модели проводится четырехкратная перекрестная валидация для повышения эффективности обобщения модели. Наконец, выход каждой

базовой модели является новым входом для метамодели для получения конечных прогнозных значений. Исследование на примере прогнозирования почасовой концентрации  $PM_{2,5}$  в районе Пекин–Тяньцзинь–Хэбэй в зимний период подтверждает, что эффективность прогнозирования ансамблевой модели, управляемой стекингом, намного лучше, чем любой отдельной модели, входящей в ее состав. *MAE* ансамблевой модели (2,01, 2,33 и 4,35 для трех городов) меньше, чем у любых четырех отдельных моделей, входящих в ее состав. Такая же ситуация имеет место в статистических критериях *MAPE* (2,81, 3,25 и 2,08% для трех городов), а  $R^2$  ансамблевой модели (0,999) больше, чем у всех остальных моделей.

Исследование [8] направлено на прогнозирование почасовой концентрации  $PM_{2,5}$  в городской местности Малайзии с использованием гибридной модели глубокого обучения. Ансамблевое эмпирическое разложение по моде (EEMD) использовалось для разложения исходных данных о последовательности твердых частиц на несколько подсерий. Нейронная сеть с долгой кратковременной памятью (LSTM) использовалась для индивидуального прогнозирования разложенных подсерий с учетом влияния параметров загрязнителей воздуха на прогнозирование на 1 час вперед. Затем результаты каждого прогноза были объединены для получения окончательного прогноза концентрации  $PM_{2,5}$ . В этом исследовании использовалось два набора данных о качестве воздуха с двух станций мониторинга для проверки эффективности предложенной гибридной модели EEMD-LSTM на основе различных распределений данных. Архитектура ИНС состоит из двух слоев LSTM, а метод декомпозиции данных добавляется на этапе предварительной обработки данных для повышения точности прогнозирования. Был проведен сравнительный анализ для сравнения производительности предложенной модели с другими моделями глубокого обучения. Результаты показали, что EEMD-LSTM дала самые высокие результаты точности среди других моделей глубокого обучения: *MAE* – 2,82 мкг/м<sup>3</sup>, *MAPE* – 14,15%,  $R^2$  – 0,978.

В статье [9] предлагается метод, который касается пространственно-временного прогнозирования концентрации  $PM_{2,5}$  в Сантьяго-де-Чили в любых пространственных точках с использованием модели рекуррентной нейронной сети LSTM. В частности, с учетом исторических значений загрязнителей воздуха ( $PM_{2,5}$ ,  $PM_{10}$  и диоксида азота) и метеорологических переменных (температуры, относительной влажности, скорости и направления ветра), измеренных на стационарных станциях мониторинга за предыдущие 24 часа, предлагаемая модель может прогнозировать концентрации  $PM_{2,5}$  в течение следующих 24 часов в новом месте, где измерения недоступны. Предлагаемая многослойная модель LSTM получила значения  $R^2$ , равные 0,74 и 0,38 на семи станциях при рассмотрении прогнозов на 1 и 24 часа соответственно.

Цель данной работы – разработка оптимальной с точки зрения точности и заблаговременности прогноза архитектуры модели рекуррентной нейронной сети типа LSTM и ее применение для краткосрочного прогноза концентрации  $PM_{2,5}$  в г. Томске. По измеренным историческим значениям концентрации  $PM_{2,5}$ , метеопараметрам и содержаниям основных примесей в воздухе за предыдущие часы требуется предсказать значение концентрации  $PM_{2,5}$  на следующие несколько часов.

## 1. Характеристика входных данных

Исходные метеорологические данные для исследования были получены с метеостанций ЦКП «Атмосфера» ИОА СО РАН за период времени с 01.01.2020 по 31.10.2022. Наблюдения за газовым и аэрозольным составом атмосферы проводятся на TOR-станции ИОА СО РАН в рамках выполнения международной экологической программы [10]. Размер набора данных составляет 24 840 ежечасных наблюдений. Исходные данные включают в себя временные ряды температуры ( $T_2$ (C)), атмосферного давления ( $P_{surf}$ (mm)), относительной влажности (Hum(%)), скорости ( $W_{10}$ (m/s)) и направления ветра ( $DIR_{10}$ (deg)), содержания основных примесей в воздухе (аэрозольные частицы  $PM_{2,5}$  (мкг/м<sup>3</sup>), озон  $O_3$  (мкг/м<sup>3</sup>), диоксид серы  $SO_2$  (мкг/м<sup>3</sup>), оксиды азота  $NO_2$  и  $NO$  (мкг/м<sup>3</sup>), диоксид углерода  $CO_2$  (ppm), метан  $CH_4$  (ppb)). Изменение концентрации  $PM_{2,5}$  в районе TOR-станции показано на рис. 1. Максимальная разовая концентрация  $PM_{2,5}$  составляет 183 мкг/м<sup>3</sup>, среднее значение концентрации

PM<sub>2.5</sub> по всему набору данных – 7,3 мкг/м<sup>3</sup>. Среднесуточная предельно допустимая концентрация PM<sub>2.5</sub> составляет 35 мкг/м<sup>3</sup>, среднегодовая – 25 мкг/м<sup>3</sup>.



Рис. 1. Временной ряд концентрации PM<sub>2.5</sub> в атмосферном воздухе в период с 01.01.2020 по 31.10.2022  
 Fig. 1. Time series of PM<sub>2.5</sub> concentration in atmospheric air in the period from 01.01.2020 to 31.10.2022

Для оценки взаимосвязи между метеорологическими параметрами или основными примесями в воздухе  $\{x_i\}$  и концентрацией PM<sub>2.5</sub>  $\{y_i\}$  в рядах с количеством наблюдений  $n$  рассчитывался коэффициент корреляции  $R_{xy}$ :

$$R_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}},$$

где  $\bar{x}, \bar{y}$  – средние значения в рядах  $\{x_i\}$  и  $\{y_i\}$ , и оценивалась его достоверность по критерию Стьюдента  $t_p$  для двух связанных выборок на уровне значимости 0,05 [11]:

$$t_p = \frac{|R_{xy}| \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R_{xy}^2}}.$$

Рассчитывалось  $t_T$  – теоретическое значение критерия, которое зависит от числа наблюдений и уровня значимости. Нулевая гипотеза  $H_0$  заключается в том, что связь отсутствует –  $R_{xy} = 0$ . Если  $t_p > t_T$ , то  $H_0$  отвергается, т.е. речь идет о существовании достоверной статистической связи между рядами  $x$  и  $y$  – концентрацией PM<sub>2.5</sub> и метеопараметром или примесью. Полученные значения корреляции представлены в табл. 1.

Таблица 1

Корреляция концентрации PM<sub>2.5</sub> с различными параметрами

Параметры	Psurf	Hum	T2	W10	DIR10	O <sub>3</sub>	SO <sub>2</sub>	NO <sub>2</sub>	NO	CO <sub>2</sub>	CH <sub>4</sub>
PM <sub>2.5</sub>	0,259	0,088	-0,358	-0,183	-0,1	-0,205	0,06	0,383	0,296	0,314	0,38

По критерию Стьюдента зависимость концентрации PM<sub>2.5</sub> от всех метеорологический параметров и примесей является статистически значимой.

Имеются тенденции увеличения концентрации PM<sub>2.5</sub> с уменьшением температуры, скорости ветра, направления ветра и концентрации озона, а также с увеличением атмосферного давления, концентраций оксидов азота, диоксида углерода и метана.

Связи концентрации PM<sub>2.5</sub> с относительной влажностью и концентрацией диоксида серы выражены слабо, хотя и являются статистически значимыми.

Отсутствующие данные восстанавливались при помощи линейной интерполяции. Затем была проведена нормализация параметров методом минимакс. Далее выбранные данные были разделены

на две выборки: обучающую выборку, соответствующую 80% данных от основной выборки, и тестовую выборку, соответствующую 20%, чтобы можно было проверить способность сети к прогнозированию после фазы обучения.

## 2. Методы нейросетевого моделирования

Результаты проведенного обзора показали перспективность использования рекуррентной нейронной сети типа LSTM для прогнозирования временных рядов. Поэтому разработанная модель искусственной нейронной сети основана на одной из архитектур нейронных сетей, называемой рекуррентной нейронной сетью типа LSTM. Рекуррентные нейронные сети – нейронные сети с обратной связью между различными слоями нейронов. Их характерная особенность – передача сигналов с выходного или скрытого слоя во входной слой.

Long short-term memory (LSTM) – тип рекуррентных нейронных сетей с долгой кратковременной памятью. Все рекуррентные нейронные сети представляют собой цепочки повторяющихся модулей нейронной сети. LSTM специально разработаны для устранения проблемы долгосрочной зависимости. Их специализация – запоминание информации в течение длительных периодов времени, поэтому их практически не нужно обучать [12].

Схематично архитектура LSTM сети представлена на рис. 2.

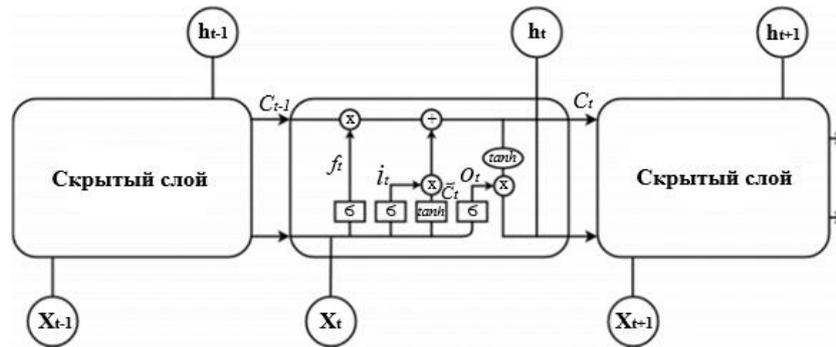


Рис. 2. Архитектура рекуррентной нейронной сети типа LSTM  
Fig. 2. Architecture of a recurrent neural network of the type

Для выбора оптимальной архитектуры нейронной сети, описанной ниже, был проведен вычислительный эксперимент подбора размера входных и выходных данных, размера тестовой выборки и оптимизационного алгоритма (табл. 2). Результаты эксперимента оценивались по таким трем метрикам, как средняя абсолютная ошибка  $MAE$ , коэффициент согласия  $IOA$  и коэффициент детерминации  $R^2$ :

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |d_i - y_i|, IOA = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (d_i - y_i)^2}{\sum_{i=1}^n (|y_i - \bar{d}| + |d_i - \bar{d}|)^2}, R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (d_i - y_i)^2}{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2},$$

где  $y_i$  – предсказанное выходное значение,  $d_i$  – реальное выходное значение, а  $\bar{d}$  – среднее значение.

Сравнительный анализ средней абсолютной ошибки, коэффициентов согласия и детерминации при различном размере входных и выходных данных (3, 6, 12 и 24 почасовых наблюдений) показал, что при прогнозировании концентрации  $PM_{2.5}$  на 3 ч и при использовании для прогноза трех предыдущих почасовых наблюдений всех параметров получают минимальная ошибка прогноза и максимальные коэффициенты детерминации и согласия. Сравнивая значения средней абсолютной ошибки, коэффициентов согласия и детерминации при различном размере обучающей выборки (60, 70, 80 и 90%), можно сделать вывод, что при размере обучающей выборки 90% можно получить оптимальный по производительности результат (см. табл. 2).

Были применены следующие градиентные методы оптимизации: метод скользящего среднего (Root Mean Square Propagation; RMSProp), метод адаптивной оценки моментов (Adaptive Moment Es-

timation; Adam), модификация метода Adam (Adamax), ускоренный по Нестерову метод адаптивной оценки моментов (Nesterov-accelerated Adaptive Moment Estimation; Nadam) [13].

Сравнивая значения метрик при различных методах оптимизации, можно сделать вывод, что минимальное значение ошибки дает метод оптимизации Nadam. Метод оптимизации Adam дает схожий результат, но средняя абсолютная ошибка чуть выше, чем у ускоренного по Нестерову методу адаптивной оценки моментов инерции Nadam (см. табл. 2).

Из таблицы 2 также видно, что при увеличении размера выходного слоя растет средняя абсолютная ошибка, а коэффициенты согласия и детерминации снижаются.

Таблица 2

Вычислительные эксперименты по настройке нейросетевой модели

Структура ИНС				MAE (мкг/м <sup>3</sup> )	IOA	R <sup>2</sup>
Размер входного слоя	Размер выходного слоя	Размер обучающей выборки	Алгоритм оптимизации			
3 × 12	3	60%	Adam	2,736	0,849	0,604
		70%		3,126	0,836	0,581
		80%		2,685	0,842	0,599
		90%		2,344	0,881	0,648
6 × 12	3	90%	Adam	2,345	0,881	0,647
	6			2,863	0,802	0,488
12 × 12	3	90%	Adam	2,369	0,876	0,637
	6			2,856	0,802	0,490
	12			3,419	0,696	0,316
24 × 12	3	90%	Adam	2,359	0,878	0,643
	6			2,890	0,797	0,481
	12			3,503	0,689	0,297
	24			4,069	0,562	0,115
3 × 12	3	90%	Adam	2,344	0,881	0,648
			RMSprop	2,401	0,871	0,638
			<b>Nadam</b>	<b>2,342</b>	<b>0,882</b>	<b>0,652</b>
			Adamax	2,726	0,839	0,558

В данном случае сеть состоит из последовательных четырех слоев: входного, двух скрытых LSTM-слоев и выходного полносвязного слоя. Увеличение количества скрытых слоев (полносвязных и LSTM) не привело к улучшению производительности ИНС.

Форма ввода – три временных шага с 12 параметрами. Первый скрытый слой содержит 20 нейронов, второй – 10 нейронов. Выходной слой содержит 3 нейрона (прогнозируемая концентрация PM<sub>2,5</sub> на следующие 3 часа). Оптимальное количество скрытых нейронов было получено экспериментально, путем изменения архитектуры сети и запуска процесса обучения до получения хорошей производительности.

В этой нейронной сети осуществляется оптимизация целевой функции с подбором весовых коэффициентов ускоренным по Нестерову методом адаптивной оценки моментов инерции Nadam (вариант стохастического градиентного спуска) [13].

Функция потерь вычисляет, насколько хорошо работает наша модель, сравнивая прогнозируемые значения с историческими. За функцию потерь принята средняя абсолютная ошибка MAE. Цель – минимизировать эту ошибку.

Метрикой в данной работе будет также MAE. Дополнительно рассмотрим значение коэффициента детерминации R<sup>2</sup>, индекс согласия IOA и среднеквадратичную ошибку RMSE между предсказанными значениями и наблюдениями концентрации PM<sub>2,5</sub>:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - y_i)^2}{n}},$$

где y<sub>i</sub> – предсказанное выходное значение, а d<sub>i</sub> – реальное выходное значение. Коэффициент детерминации R<sup>2</sup> показывает, какую часть изменчивости наблюдаемой переменной можно объяснить с помо-

стью построенной модели (мера адекватности модели). Чем ближе значение коэффициента к 1, тем сильнее зависимость.

Сеть обучалась за фиксированное количество эпох (100). Количество эпох выбиралось экспериментальным путем.

### 3. Результаты

Общее значение  $MAE$  по всему прогнозу составила  $2,34 \text{ мкг/м}^3$ , общее значение  $RMSE$  –  $3,95 \text{ мкг/м}^3$ . Коэффициент детерминации  $R^2$  –  $0,65$ , индекс согласия  $IOA$  –  $0,88$ . Результаты говорят об удовлетворительной аппроксимации данных из тестовой выборки.

Также приведем значение коэффициента корреляции между прогнозируемой концентрацией и историческими наблюдениями  $PM_{2,5}$ :  $R = 0,82$ , – достаточно высокая корреляция между прогнозируемыми и историческими наблюдениями.



Рис. 3. Фактическая и прогнозируемая концентрация  $PM_{2,5}$  для среза из набора тестовых данных  
 Fig. 3. Actual and predicted  $PM_{2,5}$  concentration for a slice from the test data set

На рис. 3 представлено сравнение графиков фактических значений и прогнозируемых значений концентрации  $PM_{2,5}$ . По оси абсцисс указаны даты из тестового набора, а по оси ординат – значения концентрации  $PM_{2,5}$ . Из графика видно, что нейронная сеть довольно хорошо справляется с предсказанием. Сеть улавливает как малые значения концентрации, так и пиковые, характеризующие повышенное содержание частиц  $PM_{2,5}$  в приземном слое атмосферы.

### Заключение

Рассмотрена корреляционная связь между концентрацией твердых частиц диаметром  $2,5 \text{ мкм}$  и менее, значениями метеорологических параметров, а также концентрацией основных примесей в воздухе ( $O_3$ ,  $SO_2$ ,  $NO_2$ ,  $NO$ ,  $CO_2$ ,  $CH_4$ ). Рассчитанные корреляции указывают на важное значение метеорологических условий и газовых примесей в прогнозировании концентрации  $PM_{2,5}$ .

Разработана и реализована рекуррентная нейронная сеть типа LSTM для прогноза концентрации  $PM_{2,5}$  на 3 часа. Оптимальная архитектура ИНС: форма ввода – 3 временных шага с 12 параметрами, первый скрытый слой – 20 нейронов, второй – 10 нейронов, выходной слой – 3 нейрона (прогнозируемая концентрация  $PM_{2,5}$  на следующие 3 часа), оптимизационный алгоритм – ускоренный по Нестерову метод адаптивной оценки моментов инерции Nadam.

Средняя абсолютная ошибка модели составила  $2,34 \text{ мкг/м}^3$ , среднеквадратичная ошибка –  $3,95 \text{ мкг/м}^3$ , а индекс согласия *IOA* и коэффициент детерминации  $R^2$  0,88 и 0,65 соответственно. Сравнительный анализ реальных данных и результатов, полученных при помощи ИНС, свидетельствует об удовлетворительной настройке сети.

Методы машинного обучения и нейросетевого прогнозирования имеют большой потенциал в трудоемких, плохо формализованных задачах.

#### Список источников

1. Anderson J.O., Thundiyil J.G., Stolbach A. Clearing the air: a review of the effects of particulate matter air pollution on human health // *Journal of Medical Toxicology*. 2012. V. 8. P. 166–175.
2. Oprea M., Mihalache S.F., Popescu M. Computational Intelligence-based PM2.5 Air Pollution Forecasting // *International Journal of Computers Communications and Control*. 2017. V. 12 (3). P. 365–380.
3. Kim H.S., Park I., Song C.H., Lee K., Yun J.W., Kim H.K., Jeon M., Lee J., Han K.M. Development of a daily PM10 and PM2.5 prediction system using a deep long short-term memory neural network model // *Atmos. Chem. Phys.* 2019. V. 19. P. 12935–12951. doi: 10.5194/acp-19-12935-2019
4. He Z., Guo Q., Wang Z., Li X. Prediction of Monthly PM2.5 Concentration in Liaocheng in China Employing Artificial Neural Network // *Atmosphere*. 2022. V. 13 (8). Art. 1221. doi: 10.3390/atmos13081221
5. Liu X., Liu Q., Zou Y., Wang G. A Self-organizing LSTM-Based Approach to PM2.5 Forecast // *ICCCS 2018: Cloud Computing and Security*. 2018. V. 11066. P. 683–693. doi: 10.1007/978-3-030-00015-8\_59
6. Yun Bai, Yong Li, Bo Zeng, Chuan Li, Jin Zhang. Hourly PM2.5 concentration forecast using stacked autoencoder model with emphasis on seasonality // *Journal of Cleaner Production*. 2019. V. 224. P. 739–750.
7. Wei Sun, Zhaoqi Li. Hourly PM2.5 concentration forecasting based on feature extraction and stacking-driven ensemble model for the winter of the Beijing-Tianjin-Hebei area // *Atmospheric Pollution Research*. 2020. V. 11 (6). P. 110–121. doi: 10.1016/j.apr.2020.02.022
8. Zaini N., Ean L.W., Ahmed A.N. et al. PM2.5 forecasting for an urban area based on deep learning and decomposition method // *Sci. Rep.* 2022. V. 12 (1). Art. 17565. doi: 10.1038/s41598-022-21769-1
9. Peralta B., Sepúlveda T., Nicolis O., Caro L. Space-Time Prediction of PM2.5 Concentrations in Santiago de Chile Using LSTM Networks // *Appl. Sci.* 2022. V. 12. Art. 11317. doi: 10.3390/app122211317
10. Давыдов Д.К., Белан Б.Д., Антохин П.Н. и др. Мониторинг атмосферных параметров: 25 лет TOR-станции ИОА СО РАН // *Оптика атмосферы и океана*. 2018. Т. 31, № 10. С. 845–853.
11. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. М. : ЛИБРОКОМ, 2014. 352 с.
12. Hochreiter S., Schmidhuber J. Long Short-Term Memory // *Neural Computation*. 1997. V. 9 (8). P. 1735–1780.
13. Пантелеев А.В., Лобанов А.В. Градиентные методы оптимизации в машинном обучении идентификации параметров динамических систем // *Моделирование и анализ данных*. 2019. Т. 9, № 4. С. 88–99.

#### References

1. Anderson, J.O., Thundiyil, J.G. & Stolbach, A. (2012) Clearing the air: a review of the effects of particulate matter air pollution on human health. *Journal of Medical Toxicology*. 8. pp. 166–175. DOI: 10.1007/s13181-011-0203-1
2. Oprea, M., Mihalache, S.F. & Popescu, M. (2017) Computational Intelligence-based PM2.5 Air Pollution Forecasting. *International Journal of Computers Communications and Control*. 12(3). pp. 365–380. DOI: 10.15837/ijccc.2017.3.2907
3. Kim, H.S., Park, I., Song, C.H., Lee, K., Yun, J.W., Kim, H.K., Jeon, M., Lee, J. & Han, K.M. (2019) Development of a daily PM10 and PM2.5 prediction system using a deep long short-term memory neural network model. *Atmospheric Chemistry and Physics*. 19. pp. 12935–12951. DOI: 10.5194/acp-19-12935-2019
4. He, Z., Guo, Q., Wang, Z. & Li, X. (2022) Prediction of Monthly PM2.5 Concentration in Liaocheng in China Employing Artificial Neural Network. *Atmosphere*. 13(8). DOI: 10.3390/atmos13081221
5. Liu, X., Liu, Q., Zou, Y. & Wang, G. (2018) A Self-organizing LSTM-Based Approach to PM2.5 Forecast. *ICCCS 2018: Cloud Computing and Security*. 11066. pp. 683–693. DOI: 10.1007/978-3-030-00015-8\_59
6. Yun Bai, Yong Li, Bo Zeng, Chuan Li & Jin Zhang. (2019) Hourly PM2.5 concentration forecast using stacked autoencoder model with emphasis on seasonality. *Journal of Cleaner Production*. 224. pp. 739–750. DOI: 10.1016/j.jclepro.2019.03.253
7. Wei Sun & Zhaoqi Li. (2020) Hourly PM2.5 concentration forecasting based on feature extraction and stacking-driven ensemble model for the winter of the Beijing-Tianjin-Hebei area. *Atmospheric Pollution Research*. 11(6). pp. 110–121. DOI: 10.1016/j.apr.2020.02.022
8. Zaini, N., Ean, L.W., Ahmed, A.N. et al. (2022) PM2.5 forecasting for an urban area based on deep learning and decomposition method. *Scientific Reports*. 12. DOI: 10.1038/s41598-022-21769-1
9. Peralta, B., Sepúlveda, T., Nicolis, O. & Caro, L. (2022) Space-Time Prediction of PM2.5 Concentrations in Santiago de Chile Using LSTM Networks. *Applied Sciences*. 12. DOI: 10.3390/app122211317
10. Davydov, D.K., Belan, B.D., Antokhin, P.N. et al. (2018) Monitoring of atmospheric parameters: 25 years of the IOA SB RAS TOR station. *Optics of the Atmosphere and Ocean*. 31(10). pp. 845–8510.

11. Ivchenko, G.I. & Medvedev Y.I. (2014) *Matematicheskaya statistika* [Mathematical Statistics]. Moscow: LIBROCOM.
12. Hochreiter, S. & Schmidhuber, J. (1997) Long Short-Term Memory. *Neural Computation*. 9(8). pp. 1735–1780.
13. Panteleev, A.V. & Lobanov, A.V. (2019) Gradient optimization methods in machine learning identification of parameters of dynamic systems. *Modelirovanie i analiz dannykh – Modeling and Data Analysis*. 9(4). pp. 88–99. DOI: 10.17759/mda.2019090407

**Информация об авторах:**

**Дель Ирина Васильевна** – аспирант кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия); Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН (Томск, Россия). E-mail: irina.del@mail.tsu.ru

**Старченко Александр Васильевич** – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой вычислительно математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета, ведущий научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: starch@math.tsu.ru

**Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**

**Information about the authors:**

**Del Irina V.** (Post-graduate Student, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation; V.E. Zuev Institute of Atmospheric Optics SB RAS, Tomsk, Russian Federation). E-mail: Irina.del@mail.tsu.ru

**Starchenko Alexander V.** (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: starch@math.tsu.ru

**Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.**

*Поступила в редакцию 03.07.2023; принята к публикации 08.12.2023*

*Received 03.07.2023; accepted for publication 08.12.2023*

Научная статья

УДК 004.942

doi: 10.17223/19988605/65/3

**Сетевые модели распространения инноваций****Игорь Борисович Жуков<sup>1</sup>, Вера Анатольевна Кипяткова<sup>2</sup>, Юрий Русланович Темираев<sup>3</sup>**<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия, i.zhukov@spbu.ru<sup>2</sup> Институт проблем региональной экономики РАН, Санкт-Петербург, Россия, verakip@mail.ru<sup>3</sup> Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия, yuritemiraev@gmail.com

**Аннотация.** Статья посвящена горизонтальным аспектам механизмов культурной трансмиссии, которые исследуются с помощью современных методов сетевого анализа. Моделирование осуществляется с помощью марковского процесса с дискретным временем на графах разной топологии с вероятностью перехода вершины в другое состояние, линейно и нелинейно зависящей от состояний вершин в ее локальном окружении. Осуществлены симуляции и исследованы основные характеристики процессов. По результатам симуляций оказывается, что в случае линейной функции вероятностей перехода вероятность того или иного исхода слабо зависит от топологии графа, однако темпы, динамика и характер эволюции весьма чувствительны к структуре связей внутри графа. В случае кусочно-линейной функции вероятностей перехода исход существенно зависит от топологии графа.

**Ключевые слова:** сетевые модели; марковские процессы; социальные сети; динамика мнений; эпидемиология.

*Для цитирования:* Жуков И.Б., Кипяткова В.А., Темираев Ю.Р. Сетевые модели распространения инноваций // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 65. С. 25–35. doi: 10.17223/19988605/65/3

Original article

doi: 10.17223/19988605/65/3

**Network models of innovation diffusion****Igor B. Zhukov<sup>1</sup>, Vera A. Kipyatkova<sup>2</sup>, Yuri R. Temiraev<sup>3</sup>**<sup>1</sup> Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia, i.zhukov@spbu.ru<sup>2</sup> Institute for Regional Economic Studies RAS, Saint Petersburg, Russia, verakip@mail.ru<sup>3</sup> Ioffe Institute RAS, Saint Petersburg, Russia, yuritemiraev@gmail.com

**Abstract.** The paper is devoted to horizontal aspects of the mechanisms of cultural transmission; it is based on the use of modern methods of network analysis. Modeling uses a discrete-time Markov process on graphs of different topologies where the probability of a vertex's transition to another state depends on the states of vertices in its local environment in a linear or non-linear manner. Using simulations, we investigate some of the key characteristics of the processes. According to the results of simulations, it turns out that in the case of a linear function of transition probabilities, the probability of one or another outcome weakly depends on the topology of the graph; however, the pace, dynamics, and general pattern of evolution are very sensitive to the structure of connections within the graph. On the contrary, in the case of a piecewise linear transition probability function, the outcome essentially depends on the topology of the graph.

**Keywords:** network models; Markov processes; social networks; opinion dynamics; epidemiology.

*For citation:* Zhukov, I.B., Kipyatkova, V.A., Temiraev, Yu.R. (2023) Network models of innovation diffusion. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnik i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science. 65. pp. 25–35. doi: 10.17223/19988605/65/3

## Введение

В связи с активным использованием в обществе социальных сетей появилось большое число моделей, описывающих и изучающих это явление. Использование сетевых методов позволяет ответить на вопрос о том, насколько особенности социальной структуры могут влиять на скорость распространения инноваций, поведение акторов в сети и возникновение информационных каскадов. Эти вопросы стали предметом исследования многих авторов, и подробные обзоры современного состояния исследований можно найти в работе М. Ньюмана [1], обзоре М. Джэксона и Л. Ярива [2], статье Д. Уаттса и С. Строгаца [3] и работе А. Альберта и Р. Барабаши [4].

В данной работе исследуются механизм социального взаимодействия в некотором сообществе и зависимость свойств эволюции состояния этого сообщества от топологии связей между его членами. Один из вариантов интерпретации: пусть в сообществе имеется два варианта мнения по какому-либо вопросу. В той или иной степени членам этого сообщества свойствен конформизм: под влиянием окружения мнение человека с некоторой вероятностью меняются в сторону преобладающих в этом окружении. Не исключено также, что произойдет (менее вероятное) спонтанное изменение мнения, даже если в окружении человека нет людей, мыслящих иначе.

Такая система может быть описана с помощью графа, а ее эволюция – с помощью определенного на этом графе случайного процесса. Каждая вершина графа может находиться в одном из двух состояний, что соответствует наличию у члена сообщества одного из двух мнений по определенному вопросу, которые могут меняться во времени под влиянием состояний непосредственных соседей этой вершины (ближайшего окружения человека). Возможны и другие интерпретации: например, этот инструментарий также применим для моделирования эпидемий (SIS-модели), распространения инноваций и других видов диффузии на сетях. Для эпидемиологических моделей исследование топологии сети позволяет делать выводы о возможности целевой иммунизации.

В работе динамика мнений моделируется с помощью марковского процесса с дискретным временем на связном неориентированном графе. Предполагается, что вероятности перехода вершины из одного состояния в другое монотонно зависят от доли соседних вершин с целевым состоянием. Предлагаемый к рассмотрению класс моделей включает в себя как частные случаи модели динамики мнений, близкие к таким активно изучаемым моделям, как *voter model* (см., напр.: [5–7]) и *noisy voter model* ([8–12]) в версии с дискретным временем.

Мы рассматриваем три типа графов: регулярное кольцо, кольцо клик и случайный граф Эрдёша–Реньи. Следует объяснить, почему для исследования были выбраны именно эти виды графов. Регулярное кольцо представляет концепцию «малого мира», т.е. свойство сети, в которой количество вершин  $N$  велико, каждая из вершин соединена с достаточно малым количеством соседей, сеть децентрализована. Кольцо клик подходит для описания систем с высоким уровнем кластеризации. Кроме того, для вершин-посредников, связывающих два или более кластеров, характерны высокие значения одной из мер центральности (*betweenness centrality*). Граф Эрдёша–Реньи является случайным графом и, в отличие от двух предыдущих примеров, позволяет моделировать процессы на сетях с неоднородным распределением степеней вершин (биномиальным).

Для выбранных типов графов мы сравниваем различные величины, характеризующие динамику мнений, в частности ожидаемое время, которое должно пройти до достижения одного из стационарных состояний системы: «чистого 0», когда все вершины находятся в состоянии 0, и «чистой 1». Рассматривается также вариант модели «со статической инициализацией», в котором определенная доля вершин неизменно находится в состоянии 1, и тем самым возможно лишь одно стационарное состояние («чистая 1»).

Исследование динамики процессов осуществлялось программными средствами на *Python3* с использованием библиотеки *networkx* для работы с графами. Мы программно симулируем динамику мнений на данных графах и представляем качественное и количественное описание этих процессов. Один из основных полученных результатов заключается в том, что для линейной функции, задающей вероятность смены состояния вершины, статистически значимая разница между характеристиками

эволюции для разных графов отсутствует, но она возникает при переходе от линейной функции к кусочно-линейной. Также установлено, что вероятность перехода всех вершин в состояние, которое не было изначально преобладающим, значимо выше для графов с большим диаметром и большими коэффициентами кластеризации.

## 1. Описание модели

### 1.1. Общий случай

Рассмотрим неориентированный граф  $G = (V, E)$  на  $N$  вершинах, где  $V$  – множество вершин (узлов), а  $E$  – множество ребер,  $N = |V|$ . Предполагается, что каждая вершина графа находится в одном из двух состояний:

$$s(v) \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V.$$

Пусть  $f(v)$  – доля смежных с  $v$  вершин, находящихся в состоянии 1 ( $0 \leq f(v) \leq 1$ ). Будем говорить, что вершина  $v$  имеет полностью однородное окружение, если:  $f(v) = s(v)$ , или же полностью чужеродное (alien) окружение, если  $f(v) = 1 - s(v)$ .

Рассмотрим марковский процесс с дискретным временем  $\{t_i\}_{i=0 \dots \infty}$  на графе  $G$ . Зададим начальное состояние системы

$$s(v) = s(v, t_0) \quad \forall v \in V.$$

Вероятность переходов  $0 \rightarrow 1$  и  $1 \rightarrow 0$  зададим с помощью пары монотонных кусочно-линейных функций  $F_0(f)$ ,  $F_1(f)$ , соответственно:

$$F_s(f) = \begin{cases} \alpha_s, & f \leq x_{s0}; \\ \alpha_s + \frac{\beta_s - \alpha_s}{x_{s1} - x_{s0}}(f - x_{s0}), & x_{s0} \leq f \leq x_{s1}; \\ \beta_s, & f > x_{s1}. \end{cases}$$

Здесь  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  – вероятности перехода за один период времени в полностью однородном окружении:

$$\alpha_0 = P(0 \rightarrow 1 | s(v) = 0, f(v) = 0);$$

$$\alpha_1 = P(1 \rightarrow 0 | s(v) = 1, f(v) = 1).$$

$\beta_0$ ,  $\beta_1$  – вероятности перехода за один период времени в полностью чужеродном окружении:

$$\beta_0 = P(0 \rightarrow 1 | s(v) = 0, f(v) = 1);$$

$$\beta_1 = P(1 \rightarrow 0 | s(v) = 1, f(v) = 0).$$

$X$  –  $2 \times 2$  матрица абсцисс точек «перелома». В частном случае

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

модель сводится к линейной.

Схематический график таких функций изображен на рис. 1.

Процесс, описывающий динамику развития системы, выглядит следующим образом:

$$P(s(v, t_{i+1})) = F_{s(v, t_i)}(f(v, t_i)).$$

Таким образом, модель задается выбором:

1) начального состояния

$$(s(v) = s(v, t_0) | v \in V);$$

2) параметров  $(\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, X)$ ;

3) графа  $G$ .

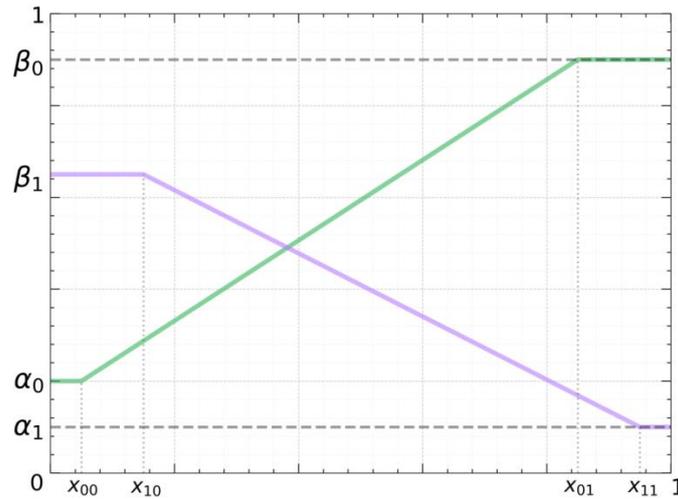


Рис. 1. Функции вероятностей перехода  $F_0(f)$  (зеленый),  $F_1(f)$  (фиолетовый) в общем случае  
 Fig. 1. Transition probability functions  $F_0(f)$  (green),  $F_1(f)$  (magenta) in the general case

### 1.2. Частный случай: отсутствие «шума»

В данной работе рассматривается частный случай модели:

1. Начальное состояние каждой вершины инициализируется единицей с вероятностью  $\varepsilon$ :

$$P(s(v, t_0) = 1) = \varepsilon;$$

$$P(s(v, t_0) = 0) = 1 - \varepsilon.$$

В работе также рассматривается вариант модели, когда инициализированные единицей вершины  $v^*$  становятся статическими (неспособными изменить свой состояние):

$$s(v^*, t_0) = 1 \Leftrightarrow s(v^*, t) = 1 \quad \forall t.$$

2. Параметры:  $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ . Тогда стационарное состояние достигается за конечное время:

$$\exists t_{i_\infty} < \infty : s(v, t_{i_\infty}) = s(v, t_i) \quad \forall v \in V, \quad \forall i \geq i_\infty.$$

3. Граф  $G$  связан, что обеспечивает гомогенность конечного состояния системы. Тогда есть всего два конечных (т.е. стабильных) состояния: «чистая 1» (все вершины в состоянии 1) и «чистый 0» (все вершины в состоянии 0).

В данной работе рассматриваются следующие графы (рис. 2):

#### I. $k$ -регулярное кольцо

Граф, в котором вершины расположены в форме кольца, и каждая вершина соединена с  $k$  ближайшими к ней.  $k$  – четное число,  $2 \leq k < N$ . В англоязычной литературе  $k$ -регулярное кольцо именуется *k-regular ring lattice*.

#### II. Кольцо клик (Ring of Cliques, RoC)

Граф, состоящий из  $k$  клик по 1 вершине, соединенных между собой в кольцо через выделенные вершины, по две в каждой клике. Такой граф моделирует множество сообществ, плотно контактирующих внутри, но между собой – исключительно через «мастеров», имеющих связи вовне.

#### III. Граф Эрдёша–Реньи (ER)

Случайный граф на  $N$  вершинах. Существует две устоявшиеся версии для модели графов Эрдёша–Реньи:  $G(n, p)$  и  $G(n, m)$ . В данной работе мы рассматриваем вариант  $G(n, p)$ . В этом случае каждое из возможных  $N(N - 1)/2$  ребер добавляется в граф с вероятностью  $p$ . Таким образом, математическое ожидание числа ребер

Используя эту модель, мы не можем гарантировать конкретное число ртбер в графе. Хорошо известно, что при  $np$  больше 1 граф  $G(n, p)$  с большой вероятностью связан.

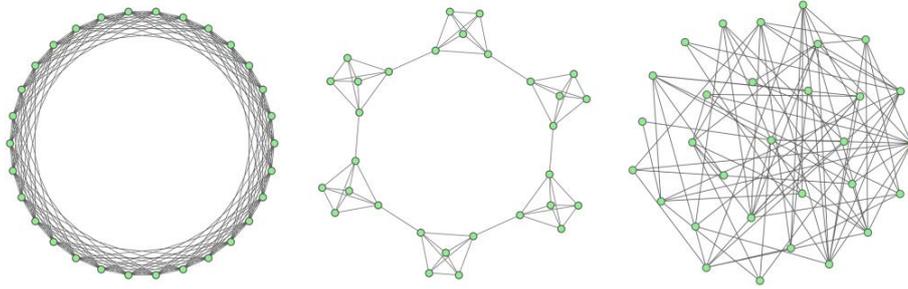


Рис. 2. Примеры модельных графов (на  $N = 30$  вершинах). Слева направо: 12-регулярное кольцо, кольцо клик с параметрами  $k = 6, l = 5$ , граф Эрдёша–Реньи с  $p = 0.2$

Fig. 2. Examples of model graphs (on 30 nodes). From left to right: 12-regular ring lattice, ring of cliques with  $k = 6, l = 5$ , Erdős-Rényi graph with  $p = 0.2$

## 2. Основные характеристики процесса

Определим событие  $A$  при некотором  $i_\infty$ :

$$A = \{s(v, t_{i_\infty}) = 1, \forall v \in V\}.$$

Наступление события  $A$  означает, что все вершины графа в какой-то момент пришли к состоянию 1.

Для анализа эволюции системы используются следующие характеристики:

**1. Вероятность  $P(A)$ .** Вероятность для системы оказаться в итоге в состоянии «чистой 1» (все вершины графа находятся в состоянии 1), или вероятность наступления события  $A$ .

На практике у нас есть доступ только к доле  $\nu$  симуляций, в результате которых произошло событие  $A$ , или экспериментальной частоте события  $A$ . Нетрудно видеть, что (см. п. 4):

$$\nu \equiv \bar{\sigma}_{i_\infty}.$$

Мы проводим  $M \times K$  симуляции с одним набором параметров, чтобы получить  $K$  частот  $\nu$ , вычисленных по результатам  $M$  симуляций. Так мы можем построить *распределение*  $p(\nu)$ .

**2. Критическое значение  $\varepsilon = \varepsilon^*$ .** Для заданного графа и фиксированных значений параметров  $\beta_0$  и  $\beta_1$  определим критическое значение  $\varepsilon = \varepsilon^*$ :  $P(A \mid \varepsilon = \varepsilon^*) = 1/2$ . Это такое значение  $\varepsilon$ , при котором приход системы в гомогенные состояния 0 и 1 оказывается равновероятным.

**3. Момент времени  $t_{i_\infty}$ .** Система приходит к равновесию (гомогенности) на шаге  $i_\infty$ , что служит одной из характеристик скорости эволюции в данной системе.

Также рассматривается среднее время достижения равновесия среди  $M$  реализаций эволюции:

$$\bar{t}_{i_\infty} = \frac{\sum_{j=1}^M t_{i_\infty}^j}{M}.$$

Как и в случае с вероятностью  $P(A)$ , проводится  $M \times K$  запусков симуляции, чтобы получить выборку средних времён  $\bar{t}_{i_\infty}$  размера  $K$ , где каждое среднее считается по итогу  $M$  симуляций. Это позволяет построить распределения  $p(\bar{t}_{i_\infty} \mid A)$  и  $p(\bar{t}_{i_\infty} \mid \bar{A})$  и сравнить скорость сходимости эволюции для разных графов к гомогенному состоянию на основе статистических гипотез.

**4. Кривая эволюции  $\{\sigma_i\}_{i=0 \dots i_\infty}$ .** Обозначим долю вершин в состоянии 1 в момент  $t_i$  как  $\sigma_i$ :

$$\sigma_i = \frac{1}{N} \sum_{v \in V} s(v, t_i).$$

Тогда  $\{\sigma_i\}_{i=0 \dots i_\infty}$  будем называть кривой эволюцией системы; она содержит информацию о соотношении количества вершин в состояниях 0 и 1 в каждый момент времени.

Также кривая эволюции может быть усреднена по  $M$  реализациям:

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sigma_i^j.$$

Эта характеристика меньше подвержена шуму и лучше отражает общую динамику системы.

### 3. Результаты

Симуляция выполнена для случая кусочно-линейной и вырожденной линейной функций вероятностей переходов в окрестности  $\varepsilon = \varepsilon^*$ :  $\beta_0, \beta_1, \varepsilon$ :  $P(A) \approx 0.5$  для разных графов.

#### 3.1. Нестатическая инициализация

##### 3.1.1. Вырожденная линейная функция вероятностей переходов

Параметры:

$$\beta_0 = 0,055, \quad \beta_1 = 0,050, \quad \varepsilon = 0,1, \quad M \times K = 5\,000, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = 100.$$

Результаты анализа представлены в табл. 1 и на рис. 3. В частности, для графов со 100 вершинами и  $\sim 1\,200$  ребрами эволюция до состояния «чистая 1» (т.е. до наступления события  $A$ ) на кольце клик происходит в 6,94 раза медленнее, чем на графе Эрдёша–Реньи, тогда как для состояния «чистый 0» (события  $\bar{A}$ ) это отношение составляет только 2,31.

Таблица 1

Характеристики процесса для вырожденной линейной функции вероятностей перехода в случае нестатической инициализации

Граф (число ребер)	$E[\bar{t}_\infty   \bar{A}]$	$E[\bar{t}_\infty   A]$	$v \approx P(A)$
Полный граф	220	977	0,6068
24-регулярное кольцо ( $\sim 1\,200$ )	240	1\,138	0,6002
10-регулярное кольцо ( $\sim 460$ )	319	1\,957	0,6072
4-регулярное кольцо ( $\sim 220$ )	628	5\,749	0,6062
Кольцо клик $4 \times 25$ ( $\sim 1\,200$ )	544	6\,842	0,6076
Кольцо клик $10 \times 10$ ( $\sim 460$ )	884	8\,005	0,5996
Кольцо клик $20 \times 5$ ( $\sim 220$ )	1\,002	8\,960	0,5914
Граф Эрдёша–Реньи ( $\sim 1\,200$ )	236	986	0,6006
Граф Эрдёша–Реньи ( $\sim 460$ )	244	1\,027	0,5732
Граф Эрдёша–Реньи ( $\sim 220$ )	289	1\,224	0,5292

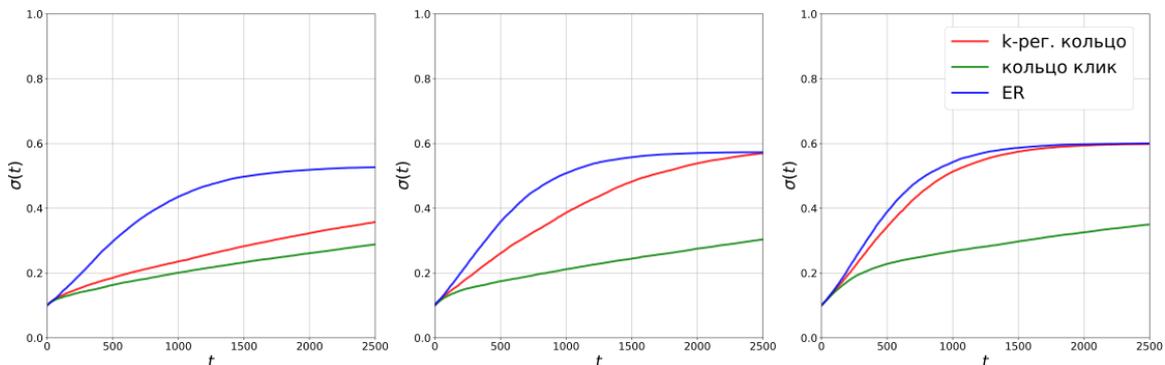


Рис. 3. Кривые эволюции графов до момента времени  $t = 2\,500$  для вырожденной линейной функции вероятностей переходов в случае нестатической инициализации. Слева направо растет число ребер. Красным обозначено

$k$ -регулярное кольцо, синим – граф Эрдёша–Реньи, зеленым – кольцо клик

Fig. 3. Graphs' evolution curves up to  $t = 2\,500$  for linear transition probability function in the non-static initialization case. Number of edges is increasing from left to right. Red:  $k$ -regular ring lattice, blue: Erdős-Rényi graph, green: ring of cliques

С уменьшением числа ребер графы достигают гомогенного состояния медленнее, однако итоговая эмпирическая вероятность  $P(A)$  оказалась статистически одинакова для всех видов графов: мы провели попарные двусторонние статистические тесты равенства средних для  $p(v)$ , и на уровне значимости  $\alpha = 0.05$  нулевая гипотеза  $H_0: \bar{x} = \bar{y}$  никогда не была отвергнута.

### 3.2.2. Кусочно-линейная функция вероятностей переходов

Параметры:

$$\beta_0 = 0,055, \quad \beta_1 = 0,050, \quad \varepsilon = 0,1, \quad M \times K = 5\,000, \quad X = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,95 \\ 0,05 & 0,95 \end{pmatrix}, \quad N = 100.$$

Чтобы избежать возникновения «дополнительного» стационарного состояния с  $0 < f < 1$ , в случае кольца клик на 1 204 ребрах взято

$$X = \begin{pmatrix} 0,02 & 0,98 \\ 0,02 & 0,98 \end{pmatrix}.$$

Результаты анализа представлены в табл. 2 и на рис. 4. Здесь эволюция до состояния «чистая 1» на кольце клик происходит в 79,6 раза медленнее, чем на графе Эрдёша–Реньи, а до состояния «чистый 0» – в 12,6 раза. Граф Эрдёша–Реньи с высокой вероятностью достигает гомогенного состояния 0, а между регулярным кольцом и кольцом клик наблюдается значимая разница значений  $P(A)$ .

Таблица 2

**Характеристики процесса для кусочно-линейной функции вероятностей перехода в случае нестатической инициализации**

Граф (число ребер)	$E[\bar{t}_\infty   \bar{A}]$	$E[\bar{t}_\infty   A]$	$v \approx P(A)$
Полный граф	70	366	0,0056
24-регулярное кольцо (~ 1 200)	108	844	0,0194
10-регулярное кольцо (~ 460)	218	2 560	0,2294
4-регулярное кольцо (~ 220)	643	6 620	0,5252
Кольцо клик $4 \times 25$ (~ 1 200)	1 033	35 562	0,3782
Кольцо клик $10 \times 10$ (~ 460)	1 318	23 618	0,4140
Кольцо клик $20 \times 5$ (~ 220)	1 039	11 354	0,5254
Граф Эрдёша–Реньи (~ 1 200)	82	447	0,0058
Граф Эрдёша–Реньи (~ 460)	146	530	0,0168
Граф Эрдёша–Реньи (~ 220)	274	927	0,1160

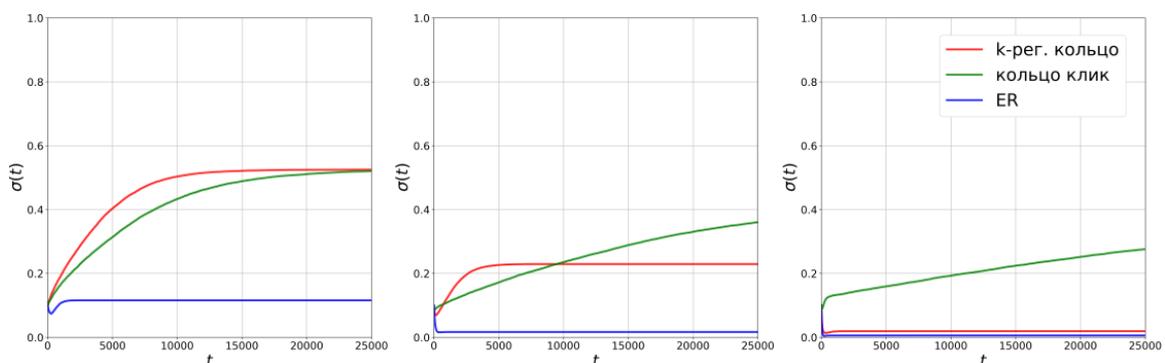


Рис. 4. Кривые эволюции графов до момента времени  $t = 25\,000$  для кусочно-линейной функции вероятностей переходов в случае нестатической инициализации. Слева направо растет число ребер. Красным обозначено  $k$ -регулярное кольцо, синим – граф Эрдёша–Реньи, зеленым – кольцо клик

Fig. 4. Graphs' evolution curves up to  $t = 25\,000$  for piecewise linear transition probability function in the non-static initialization case. Number of edges is increasing from left to right. Red:  $k$ -regular ring lattice, blue: Erdős-Rényi graph, green: ring of cliques

### 3.2. Статическая инициализация

С такими же параметрами мы провели симуляции в случае, когда вершины, инициализированные единицей, не меняют своего состояния в ходе эволюции. В этом случае система всегда достигает гомогенного состояния 1, и интерес представляет только динамика процесса.

#### 3.2.1. Вырожденная линейная функция вероятностей переходов

Результаты анализа представлены в табл. 3 и на рис. 5. В частности, отметим, что при рассмотрении графов со 100 вершинами и ~ 1 200 ребрами эволюция на кольце клик происходит в 2,89 раза медленнее, чем на графе Эрдёша–Реньи, а на регулярном кольце – лишь в 1,09 раза медленнее.

Таблица 3

Характеристики процесса для вырожденной линейной функции вероятностей перехода в случае статической инициализации

Граф (число ребер)	$E[\bar{t}_\infty   A]$
Полный граф	422
24-регулярное кольцо (~1 200)	468
10-регулярное кольцо (~460)	663
4-регулярное кольцо (~220)	1 551
Кольцо клик $4 \times 25$ (~1 200)	1 244
Кольцо клик $10 \times 10$ (~460)	2 213
Кольцо клик $20 \times 5$ (~220)	2 334
Граф Эрдёша–Реньи (~1 200)	431
Граф Эрдёша–Реньи (~460)	460
Граф Эрдёша–Реньи (~220)	554

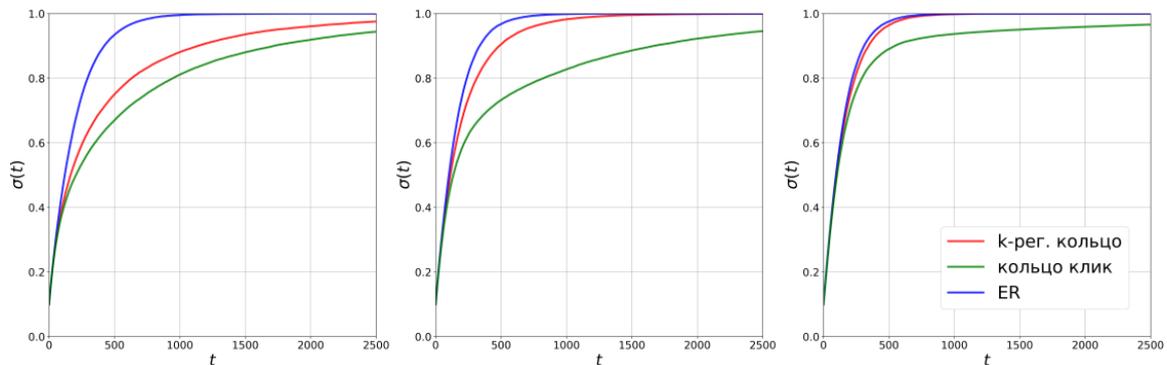


Рис. 5. Кривые эволюции графов до момента времени  $t = 2\,500$  для вырожденной линейной функции вероятностей переходов в случае статической инициализации. Слева направо растет число ребер. Красным обозначено  $k$ -регулярное кольцо, синим – граф Эрдёша–Реньи, зеленым – кольцо клик.

Fig. 5. Graphs' evolution curves up to  $t = 2500$  for linear transition probability function in the static initialization case. Number of edges is increasing from left to right. Red:  $k$ -regular ring lattice, blue: Erdős-Rényi graph, green: ring of cliques

#### 3.2.2. Кусочно-линейная функция вероятностей переходов

Результаты анализа представлены в табл.4 и на рис. 6. В данном случае для графов со 100 вершинами и ~1 200 ребрами эволюция на кольце клик происходит в 8,88 раза медленнее, чем на графе Эрдёша–Реньи.

**Характеристики процесса для кусочно-линейной функции вероятностей перехода в случае статической инициализации**

Граф (число ребер)	$E[\bar{t}_\infty   A]$
Полный граф	389
24-регулярное кольцо (~1 200)	416
10-регулярное кольцо (~460)	704
4-регулярное кольцо (~220)	1 638
Кольцо клик $4 \times 25$ (~1 200)	3 888
Кольцо клик $10 \times 10$ (~460)	5 348
Кольцо клик $20 \times 5$ (~220)	2 816
Граф Эрдёша–Реньи (~1 200)	438
Граф Эрдёша–Реньи (~460)	396
Граф Эрдёша–Реньи (~220)	500

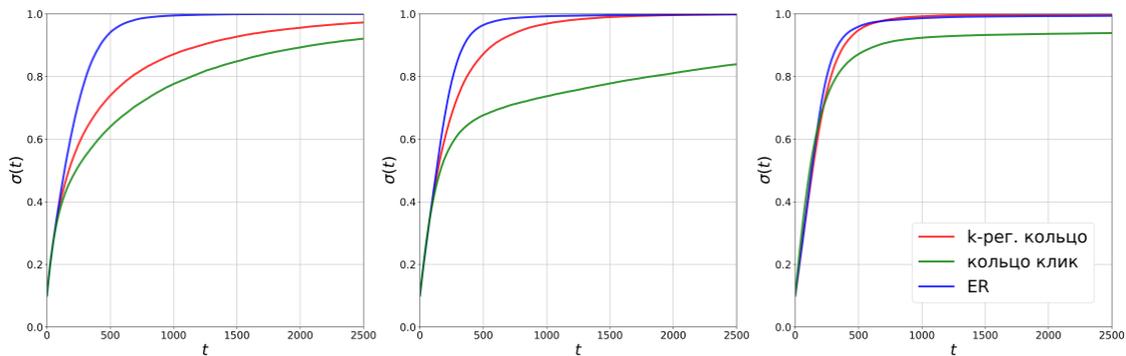


Рис. 6. Кривые эволюции графов до момента времени  $t = 2\,500$  для кусочно-линейной функции вероятностей переходов в случае нестатической инициализации. Слева направо растёт число ребер. Красным обозначено  $k$ -регулярное кольцо, синим – граф Эрдёша–Реньи, зелёным – кольцо клик

Fig. 6. Graphs' evolution curves up to  $t = 2\,500$  for piecewise linear transition probability function in the non-static initialization case. Number of edges is increasing from left to right. Red:  $k$ -regular ring lattice, blue: Erdős-Rényi graph, green: ring of cliques

### Заключение

Была рассмотрена модель марковского процесса с дискретным временем на графах разной топологии с вероятностью перехода вершины в другое состояние, зависящей от состояний соседних вершин в ее локальном окружении. Эволюция на  $k$ -регулярном кольце значительно медленнее эволюции на полном графе, что можно объяснить бóльшим диаметром графа и меньшим количеством ребер. Дольше всего эволюция происходит на кольцах клик.

Общая тенденция изменения характеристик эволюции при уменьшении числа ребер в графе – это увеличение среднего значения и дисперсии времени до достижения стационарного состояния: приход всей системы как в состояние 0, так и в состояние 1 замедляется. Это объясняется снижением количества связей в системе, что естественным образом затрудняет диффузию того или иного состояния.

По результатам симуляций оказалось, что в случае линейной функции вероятностей перехода вероятность того или иного исхода слабо зависит от топологии графа, однако темпы, динамика и характер эволюции весьма чувствительны к структуре связей внутри графа. В то же время в случае кусочно-линейной функции вероятностей перехода исход зависит от топологии графа. Отметим, что при этом вероятность достижения «чистой 1», т.е. перехода всех вершин в состояние, которое не было изначально преобладающим, особенно высока для  $k$ -регулярных колец с малым  $k$  и для колец клик с большим числом клик, – иначе говоря, для графов с большим диаметром и большими коэффициентами кластеризации. Таким образом, подтверждается гипотеза о том, что инновации успешнее закрепляются в более структурированном сообществе, включающем группы с высокой плотностью связей.

Как одно из направлений дальнейших исследований мы видим дальнейшее уточнение и проверку этой гипотезы, что включает выявление зависимости характеристик эволюции от диаметра графа и коэффициентов кластеризации для различных типов случайных графов и различных функций, задающих вероятности перехода.

#### Список источников

1. Newmann M.E.J. The structure and function of networks // *Computer Physics Communications*. 2002. V. 147. P. 40–45.
2. Jackson M.O., Yariv L. Diffusion, Strategic Interaction, and Social Structure // *Handbook of Social Economics*, 2011. V. 1A. P. 646–678.
3. Watts D.J., Strogatz S.H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks // *Nature*. 1998. V. 393. P. 440–442.
4. Barabási A.-L., Albert R. Emergence of scaling in random networks // *Science*. 1999. V. 286. P. 509–512.
5. Liggett Th.M. *Interacting Particle Systems*. Berlin ; Heidelberg : Springer, 2005. 496 p.
6. Holley R.A., Liggett T.M. Ergodic Theorems for Weakly Interacting Infinite Systems and the Voter Model // *Ann. Probab.* 1975. V. 3. P. 643–663.
7. Sood V., Redner S. Voter model on heterogeneous graphs // *Phys Rev Lett*. 2005. V. 94 (17). Art. 178701.
8. Granovsky B.L., Madras N. The Noisy Voter Model // *Stochastic Processes and their Applications*. 1995. V. 55 (1). P. 23–43.
9. Ramadas H. Mixing of the noisy voter model // *Electron. Commun. Probab.* 2014. V. 19. P. 1–17.
10. Cox J.Th., Peres Yu., Steif J.E. Cutoff for the noisy voter model // *The Annals of Applied Probability*. 2016. V. 26 (2). P. 917–932.
11. Carro A., Toral R., San Miguel M. The noisy voter model on complex networks. // *Sci Rep*. 2016. V. 6. Art. 24775.
12. Benjamini I., Helman Tov H., Zhukovskii M. Global information from local observations of the noisy voter model on a graph // *The Annals of Probability*. 2023. V. 51 (5). P. 1963–1992.

#### References

1. Newmann, M.E.J. (2002) The structure and function of networks. *Computer Physics Communications*. 147. pp. 4–45.
2. Jackson, M.O. & Yariv, L. (2011) Diffusion, Strategic Interaction, and Social Structure. *Handbook of Social Economics*. 1A. pp. 646–678. DOI: 10.1016/B978-0-444-53187-2.00014-0
3. Watts, D.J. & Strogatz, S.H. (1998) Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*. 393. pp.440–442. DOI: 10.1038/30918
4. Barabási, A.-L. & Albert, R. (1999) Emergence of scaling in random networks. *Science*. 286. pp. 509–512.
5. Liggett, Th.M. (2005) *Interacting Particle Systems*. Berlin, Heidelberg: Springer.
6. Holley, R.A. & Liggett, T.M. (1975) Ergodic Theorems for Weakly Interacting Infinite Systems and the Voter Model. *Ann. Probab.* 3. pp. 643–663. DOI: 10.1214/aop/1176996306
7. Sood, V. & Redner, S. (2005) Voter model on heterogeneous graphs. *Physical Review Letters*. 94(17). 178701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.178701
8. Granovsky, B.L. & Madras, N. (1995) The Noisy Voter Model. *Stochastic Processes and their Applications*. 55(1). pp. 23–43.
9. Ramadas, H. (2014) Mixing of the noisy voter model. *Electronic Communications in Probability*. 19. pp. 1–17.
10. Cox, J.Th., Peres, Yu. & Steif, J.E. (2016) Cutoff for the noisy voter model. *The Annals of Applied Probability*. 26(2). pp. 917–932.
11. Carro, A., Toral, R. & San Miguel, M. (2016) The noisy voter model on complex networks. *Scientific Reports*. 6. 24775.
12. Benjamini, I., Helman Tov, H. & Zhukovskii, M. (2023) Global information from local observations of the noisy voter model on a graph. *The Annals of Probability*. 51(5). pp. 1963–1992. DOI: 10.48550/arXiv.2207.01224

#### Информация об авторах:

**Жуков Игорь Борисович** – доцент, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского государственного университета (Санкт-Петербург, Россия). E-mail: i.zhukov@spbu.ru

**Кипяткова Вера Анатольевна** – кандидат экономических наук, старший научный сотрудник лаборатории анализа и моделирования социально-демографических процессов Института проблем региональной экономики РАН (Санкт-Петербург, Россия). E-mail: verakip@mail.ru

**Темираев Юрий Русланович** – инженер-исследователь лаборатории экспериментальной астрофизики Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН (Санкт-Петербург, Россия). E-mail: yuritemiraev@gmail.com

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

#### Information about the authors:

**Zhukov Igor B.** (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Algebra and Number Theory, Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia). E-mail: i.zhukov@spbu.ru

**Kipiatkova Vera A.** (Candidate of Economic Sciences, Senior Researcher, Institute for regional economic studies RAS, Saint Petersburg, Russia). E-mail: verakip@mail.ru

**Temiraev Yuri R.** (Engineer Researcher, Laboratory for Experimental Astrophysics, Ioffe Institute RAS, Saint Petersburg, Russia). E-mail: yuritemiraev@gmail.com

*Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.*

*Поступила в редакцию 12.08.2023; принята к публикации 08.12.2023*

*Received 12.08.2023; accepted for publication 08.12.2023*

Научная статья

УДК 519.872

doi: 10.17223/19988605/65/4

## СМО с прерыванием обслуживания для моделирования нарезки радиоресурсов в беспроводных сетях 5G

Дарья Вадимовна Иванова<sup>1</sup>, Елена Александровна Жбанкова<sup>2</sup>,  
Екатерина Викторовна Маркова<sup>3</sup>, Юлия Васильевна Гайдамака<sup>4</sup>

<sup>1, 2, 3, 4</sup> Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

<sup>4</sup> Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия

<sup>1</sup> ivanova-dv@rudn.ru

<sup>2</sup> zhbankova-ea@rudn.ru

<sup>3</sup> markova-ev@rudn.ru

<sup>4</sup> gaydamaka-yuv@rudn.ru

**Аннотация.** Для исследования механизма нарезки радиоресурсов в беспроводных сетях 5G с динамическим распределением ресурса построена модель мультисервисной системы массового обслуживания сложной структуры с потоковым и эластичным трафиком, резервированием и приоритизацией. Свойство мультисервисности отражает гетерогенность услуг, технологий и оборудования сетей 5G, эластичный трафик моделирует обеспечение наилучшего из возможного качества предоставления услуги, являющееся одной из особенностей механизма нарезки радиоресурсов, а механизмы резервирования ресурса и прерывания обслуживания неприоритетных заявок учитывают неоднородность требований к качеству предоставления услуг при нарезке радиоресурсов сети. Модель предполагает параметризацию с учетом специфики беспроводного канала связи; для иллюстрации в статье ограничения на объем ресурса для каждого класса заявок определяются для значимых параметров модели при технологии радиодоступа 5G Новое Радио. В качестве показателей качества обслуживания рассматриваются вероятность блокировки доступа в систему и вероятность прерывания обслуживания заявки каждого класса, а также коэффициент использования ресурса системы. Полученные численные результаты показывают, что наиболее эффективной из пяти рассмотренных в работе схем доступа к радиоресурсам является схема, основанная на приоритетном обслуживании с прерыванием и без резервирования. Эта схема позволяет добиться пятидесятипроцентного выигрыша по количеству требуемого ресурса по сравнению со схемами доступа без прерывания или с полным резервированием.

**Ключевые слова:** 5G; сетевой слайсинг; ТМО; резервирование ресурсов; приоритетное обслуживание.

**Благодарности:** Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 22-79-10053 (<https://rscf.ru/project/22-79-10053/>).

**Для цитирования:** Иванова Д.В., Жбанкова Е.А., Маркова Е.В., Гайдамака Ю.В. СМО с прерыванием обслуживания для моделирования нарезки радиоресурсов в беспроводных сетях 5G // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 65. С. 36–46. doi: 10.17223/19988605/65/4

Original article

doi: 10.17223/19988605/65/4

## Queueing system with preemptions for modeling network slicing in 5G

Daria V. Ivanova<sup>1</sup>, Elena A. Zhbankova<sup>2</sup>, Ekaterina V. Markova<sup>3</sup>, Yuliya V. Gaidamaka<sup>4</sup>

<sup>1, 2, 3, 4</sup> RUDN University, Moscow, Russian Federation

<sup>4</sup> Federal Research Center "Computer Science and Control" of the RAS, Moscow, Russian Federation

<sup>1</sup> ivanova-dv@rudn.ru

<sup>2</sup> zhbankova-ea@rudn.ru

<sup>3</sup> markova-ev@rudn.ru

<sup>4</sup> gaydamaka-yuv@rudn.ru

**Abstract.** In this paper, a complex model of multiservice queueing system with streaming and elastic traffic, reservation and prioritization is built to investigate the mechanism of network slicing in 5G with dynamic resource allocation. The multiservice property reflects the heterogeneity of services, technologies and equipment of 5G networks, elastic traffic models the best QoS provision, which is one of the features of slicing mechanism, and the resource reservation and preemption mechanisms for non-priority sessions take into account the heterogeneity of the QoS requirements in network slicing. The model assumes parameterization by accounting for the specifics of wireless channel. For illustration, in the article, the restrictions on the amount of resources for each class of sessions are determined for the 5G New Radio. As QoS metrics, we consider the drop probability and the pre-emption probability for each class of sessions, as well as the system resource utilization. The obtained numerical results show that the most efficient of the considered schemes is the preemptive priority scheme without resource reservation. This scheme allows to achieve 50% gain in terms of the resource requirement as compared to the schemes without preemption or with complete reservations.

**Keywords:** 5G; network slicing; queueing theory; resource reservation; priorities.

**Acknowledgments:** The research was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation, project no. 22-79-10053.

**For citation:** Ivanova, D.V., Zhbankova, E.A., Markova, E.V., Gaidamaka, Y.V. (2023) Queueing system with preemptions for modeling network slicing in 5G. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 65. pp. 36–46. doi: 10.17223/19988605/65/4

## Введение

Нарезка радиоресурсов, или сетевой слайсинг (Network Slicing; NS), – концепция параллельного развертывания нескольких автономных логических сетей на единой инфраструктурной платформе, которая будет активно применяться в беспроводных системах пятого поколения (5G) [1]. Слайсинг позволяет выделять ресурсы для определенного клиента, например оператора мобильной виртуальной сети (Mobile Virtual Network Operator; MVNO), или класса обслуживания [2], используя одну и ту же физическую инфраструктуру [2]. При этом MVNO или классы обслуживания могут иметь разные требования к качеству обслуживания (Quality of Service; QoS) с точки зрения пропускной способности, задержки и вероятности потери запроса пользователя на предоставление услуги, а предоставление требуемого уровня QoS различным классам обслуживания должно обеспечиваться сквозным образом из-конца-в-конец. Важнейшим участком маршрута является сеть радиодоступа (Radio Access Network; RAN), где изменяющиеся во времени условия радиоканала могут влиять на предоставляемый уровень QoS.

Согласно единому мнению стандартизирующих организаций (3GPP, ITU-R и GSMA) [3], метод выделения ресурсов, используемый для сетевого слайсинга, должен удовлетворять двум вступающим в противоречие требованиям: (а) строгая изоляция трафика; (б) эффективное использование радиоресурсов. Как показано в [4, 5] первое требование можно реализовать с помощью статических или динамических политик резервирования ресурсов [6, 7], тогда как второе – с помощью механизмов приоритетного обслуживания [8, 9]. Реализация схем, учитывающих оба типа требований, достаточно сложна, поэтому требуется привлечение методов теории массового обслуживания (ТМО) [10, 11] для разработки математических моделей, показывающих эффективные варианты комбинации различных политик и механизмов доступа к радиоресурсам сети.

На основе методов ТМО в статье сформулирована и решена задача сетевого слайсинга для нескольких классов обслуживания. Схема доступа к радиоресурсам исследуется с помощью совместного использования политик резервирования ресурсов и механизмов приоритетного обслуживания. В рассматриваемой системе массового обслуживания (СМО) с дискретным ресурсом [12] в имеющемся пуле ресурсов для заявок каждого класса выделена индивидуальная зона, кроме того, есть общедоступная зона, выделение ресурсов в которой регулируется процедурой приоритетного обслуживания.

В качестве показателей эффективности модели рассматриваются вероятность блокировки доступа в систему поступающего запроса некоторого класса, вероятность прерывания обслуживания запроса некоторого класса, а также коэффициент использования ресурса системы. Предлагаемая в работе система позволяет удовлетворить противоречивые по своей сути требования высокой степени изоляции между классами обслуживания и высокой эффективности использования радиоресурсов сети 5G. В качестве примера функционирования модели рассмотрен случай реализации сетевого слайсинга в сетях 5G [13] для предоставления услуг двух классов обслуживания: сверхнадежной доставки с малой задержкой (Ultra Reliable Low Latency Service; URLLC) и расширенного мобильного широкополосного доступа (Enhanced Mobile Broadband Access; eMBB) [6, 9, 14].

### 1. Системная модель

Рассмотрим развертывание базовой станции (Base Station; BS) с круговой зоной покрытия радиуса  $r$  (рис. 1, *a*). Предположим, что функция сетевого слайсинга используется для разделения конечного радиоресурса базовой станции при предоставлении  $K$  услуг с различными требованиями к уровню QoS. Далее для краткости под «заявкой класса  $k$ » будем подразумевать запрос пользователя на предоставление услуги  $k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , с заданным диапазоном  $[c_k^{\min}, c_k^{\max}]$  изменения скорости передачи данных и соответствующим ему диапазоном  $[b_k^{\min}, b_k^{\max}]$  требований к радиоресурсу сети, выраженным в первичных ресурсных блоках технологии 5G NR (Primary Resource Blocks; PRB). Величины  $b_k^{\min}$ ,  $b_k^{\max}$  и  $C$  могут быть определены, исходя из свойств радиоканала, как показано в [15].

Предположим, что генерирующие запросы на предоставление услуг пользовательское оборудование (User Equipment; UE) равномерно распределено в зоне покрытия соты. Высоты BS и UE равны  $h_{BS}$  и  $h_{UE}$  соответственно.

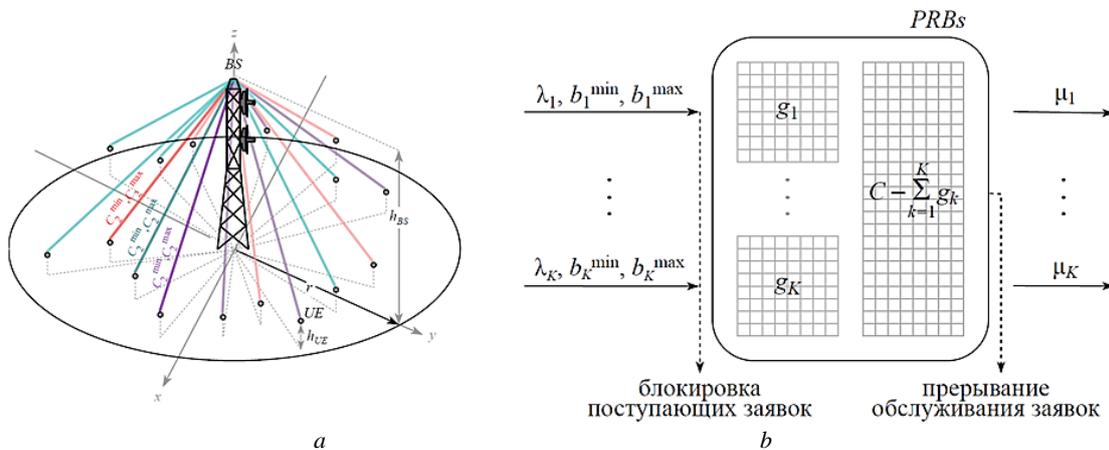


Рис. 1. Рассматриваемая модель и формализация в терминах ТМО: *a* – системная модель, *b* – СМО  
 Fig. 1. The model and its formalization in terms of a queueing system: *a* – system model, *b* – queueing model

Рассмотрим СМО с дискретным ресурсом объема  $C$ , на которую поступают  $K$  потоков заявок с эластичными требованиями к ресурсам системы, меняющимися в пределах  $[b_k^{\min}, b_k^{\max}]$ ,  $k = 1, \dots, K$ , (рис. 1, *b*). Потоки заявок класса  $k$  представляют собой пуассоновские потоки с интенсивностями  $\lambda_k$ . Длительности обслуживания заявок распределены по экспоненциальному закону со средним  $\mu_k^{-1}$ . Положим, что для каждого класса заявок выделен индивидуальный пул, содержащий  $g_k$  единиц ресурса из  $C$  доступных,  $k = 1, \dots, K$ , причем  $\sum_{k=1}^K g_k < C$ . Тогда  $c = C - \sum_{k=1}^K g_k$  единиц ресурса входят в общедоступный пул, который могут использовать заявки любого класса.

Для рассматриваемой системы интерес представляют два типа метрик: клиенто-ориентированные (вероятность блокировки доступа в СМО и вероятность прерывания обслуживания заявки некоторого класса) и системо-ориентированные (коэффициент использования ресурса).

## 2. Математическая модель

Функционирование рассматриваемой СМО описывает  $K$ -мерный марковский случайный процесс (СП)  $\{(N_1(t), \dots, N_K(t)), t \geq 0\}$ , где  $N_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, K$  – случайное число обслуживаемых системой заявок класса  $k$  в момент  $t$ . Обозначим  $N_k = \lfloor (C - \sum_{i \neq k} g_i) / b_k^{\min} \rfloor$  максимальное число заявок класса  $k$ , которое может находиться в системе,  $k = 1, \dots, K$ . Определим также  $N_k^g = \lfloor g_k / b_k^{\min} \rfloor$  – максимальное гарантированное число заявок класса  $k$ , которое может быть обслужено в системе благодаря резервированию в рамках индивидуального пула,  $k = 1, \dots, K$ .

Состояние системы описывает  $K$ -мерный вектор  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_K)$  над пространством состояний

$$\mathbf{X} = \left\{ \mathbf{n} : 0 \leq n_k \leq N_k, k = 1, \dots, K, \sum_{i=1}^K \max \{ n_i b_i^{\min}, g_i \} < C \right\}.$$

Отметим, что ресурс, выделенный системой для обслуживания всех заявок класса  $k$ , делится между ними поровну в соответствии с дисциплиной Processor Sharing [16], причем число единиц ресурса  $b_k(\mathbf{n})$ ,  $b_k^{\min} \leq b_k(\mathbf{n}) \leq b_k^{\max}$ , выделяемого для обслуживания каждой заявки класса  $k$ , зависит от состояния системы  $\mathbf{n}$ :

$$b_k(\mathbf{n}) = \min \left\{ \frac{C - \max \left\{ \sum_{i \neq k} g_i, \sum_{i=1}^{k-1} \max \{ n_i b_i(\mathbf{n}), g_i \} + \sum_{i=k+1}^K \max \{ n_i b_i^{\min}, g_i \} \right\}}{n_k}, b_k^{\max} \right\}. \quad (1)$$

Пусть заявки разных классов имеют разные приоритеты в обслуживании, упорядоченные следующим образом: высший приоритет имеют заявки первого класса, низший – заявки класса  $K$ . Приоритетное обслуживание реализовано в соответствии с абсолютным приоритетом [17]: в случае недостаточности в системе ресурсов для обслуживания поступившей заявки класса  $j$  с минимальным требованием  $b_j^{\min}$  обслуживание одной или нескольких менее приоритетных заявок должно быть прервано. Прерванная заявка навсегда покидает систему, а выбор заявки для прерывания должен быть определен некоторым правилом.

На рис. 2 представлен алгоритм определения  $K$ -мерного вектора  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_K)$  числа заявок, обслуживание которых необходимо прервать при поступлении более приоритетной заявки класса  $j$ ,  $j = 1, \dots, K - 1$ , когда система находится в состоянии  $\mathbf{n}$ .

Обозначим  $\mathbf{S}_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , множество состояний системы, в которых поступающие в систему заявки класса  $k$  будут приниматься на обслуживание, не прерывая обслуживание менее приоритетных заявок:

$$\mathbf{S}_k = \left\{ \mathbf{n} \in \mathbf{X} : n_k < N_k, \sum_{i=1}^{k-1} \max \{ n_i b_i(\mathbf{n} + \mathbf{e}_k), g_i \} + \sum_{i=k+1}^K \max \{ n_i b_i^{\min}, g_i \} + (n_k + 1) b_k^{\min} \leq C \right\}, k = 1, \dots, K.$$

Множество блокировок заявок  $\mathbf{B}_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , представляет собой множество состояний системы, в которых доступ поступающих в систему заявок класса  $k$  будет блокироваться из-за отсутствия свободных ресурсов:

$$\mathbf{B}_k = \left\{ \mathbf{n} \in \mathbf{X} : n_k = N_k \vee \sum_{i=1}^{k-1} \max \{ n_i b_i(\mathbf{n} + \mathbf{e}_k), g_i \} + \sum_{i=k+1}^K \max \{ n_i b_i^{\min}, g_i \} + (n_k + 1) b_k^{\min} - \sum_{i=k+1}^K b_i^{\min} (n_i - N_i^g) \cdot I(n_i > N_i^g) > C \right\}, k = 1, \dots, K.$$

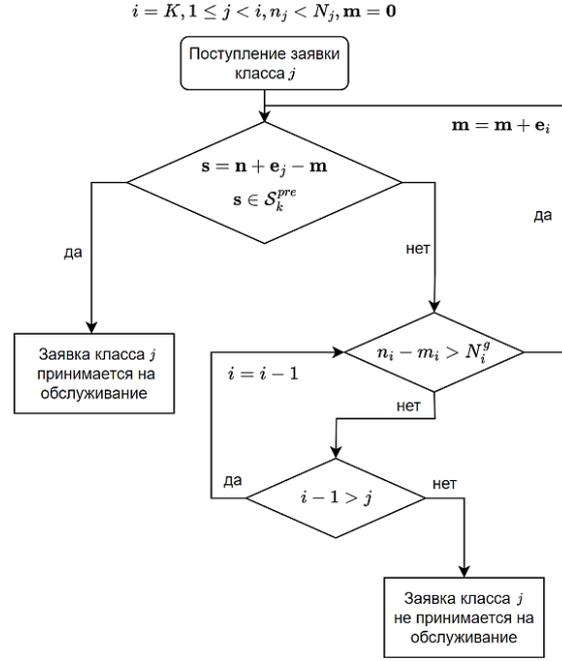


Рис. 2. Алгоритм выбора заявок, обслуживание которых должно быть прервано  
Fig. 2. Algorithm for selecting sessions that could be preempted

Множество прерывания заявок  $\Pi_k$ ,  $k = 1, \dots, K - 1$ , представляет собой множество состояний системы, в которых при поступлении в систему заявки класса  $k$  будет прервано обслуживание одной или нескольких менее приоритетных заявок из обслуживаемых в системе:

$$\begin{aligned} \Pi_k = & \left\{ \mathbf{n} \in \mathbf{X} : n_k < N_k, \sum_{i=1}^{k-1} \max \{n_i b_i(\mathbf{n} + \mathbf{e}_k), g_i\} + \sum_{i=k+1}^K \max \{n_i b_i^{\min}, g_i\} + \right. \\ & + (n_k + 1) b_k^{\min} > C, \sum_{i=1}^{k-1} \max \{n_i b_i(\mathbf{n} + \mathbf{e}_k), g_i\} + \sum_{i=k+1}^K \max \{n_i b_i^{\min}, g_i\} + \\ & \left. + (n_k + 1) b_k^{\min} - \sum_{i=k+1}^K b_i^{\min} (n_i - N_i^g) \cdot I(n_i > N_i^g) \leq C \right\}, k = 1, \dots, K - 1. \end{aligned}$$

Множество приема заявок  $\mathbf{S}_k^{\text{pre}} = \mathbf{S}_k \cup \Pi_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , представляет собой множество состояний системы, в которых поступающие в систему заявки класса  $k$  будут приниматься на обслуживание:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_k^{\text{pre}} = & \left\{ \mathbf{n} \in \mathbf{X} : n_k < N_k, \left( \sum_{i=1}^{k-1} \max \{n_i b_i(\mathbf{n} + \mathbf{e}_k), g_i\} + \sum_{i=k+1}^K \max \{n_i b_i^{\min}, g_i\} + \right. \right. \\ & + (n_k + 1) b_k^{\min} \leq C \vee \left( k < K, \sum_{i=1}^{k-1} \max \{n_i b_i(\mathbf{n} + \mathbf{e}_k), g_i\} + \sum_{i=k+1}^K \max \{n_i b_i^{\min}, g_i\} + \right. \\ & \left. \left. + (n_k + 1) b_k^{\min} - \sum_{i=k+1}^K b_i^{\min} (n_i - N_i^g) \cdot I(n_i > N_i^g) \leq C \right) \right\}, k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

Пространство состояний системы  $\mathbf{X}$  для каждого класса заявок является объединением множества приема заявок  $\mathbf{S}_k^{\text{pre}}$  и множества блокировок заявок  $\mathbf{B}_k$ ,  $\mathbf{S}_k^{\text{pre}} \cup \mathbf{B}_k = \mathbf{X}$ ,  $\mathbf{S}_k^{\text{pre}} \cap \mathbf{B}_k = \emptyset$  [11]. Для заявок класса  $K$  – заявок с низшим приоритетом –  $\mathbf{S}_K^{\text{pre}} = \mathbf{S}_K$ .

В множестве приема заявок  $\mathbf{S}_k^{\text{pre}}$  выделим подмножество  $\mathbf{S}_k^{\text{max}}$  состояний, в которых поступающие в систему заявки класса  $k$  будут приниматься на обслуживание с выделением каждой максимального ресурса:

$$\mathbf{S}_k^{\text{max}} = \left\{ \mathbf{n} \in \mathbf{X} : n_k < \left\lfloor \frac{C - \sum_{i \neq k} g_i}{b_k^{\text{max}}} \right\rfloor, \sum_{i=1}^{k-1} \max \{n_i b_i(\mathbf{n} + \mathbf{e}_k), g_i\} + \right.$$

$$+(n_k + 1)b_k^{\max} + \sum_{i=k+1}^K \max\{n_i b_i^{\min}, g_i\} \leq C, \quad k, i = 1, \dots, K.$$

На основе описанных выше множеств сформулируем правила приема и обслуживания заявок класса  $k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , в состоянии  $\mathbf{n}$ :

– если число обслуживаемых системой заявок класса  $k$  меньше максимально возможного числа заявок данного класса  $N_k$  и объем свободного ресурса, доступного для заявок класса  $k$ , не меньше  $b_k^{\min}$ , то поступающая в систему заявка класса  $k$  будет принята на обслуживание, при этом ресурс, выделенный для обслуживания каждой заявки класса  $k$ , определяется формулой (1) для состояния  $(\mathbf{n} + \mathbf{e}_k)$ ;

– если число обслуживаемых системой заявок класса  $k$  меньше максимально возможного числа заявок данного класса  $N_k$ , число свободных ресурсов, доступных для заявок класса  $k$ , меньше  $b_k^{\min}$ , а число ресурсов из общедоступного пула  $s$ , занятых обслуживанием менее приоритетных заявок, не меньше  $b_k^{\min}$ , то поступающая заявка класса  $k$ ,  $k < K$ , будет принята на обслуживание за счет прерывания обслуживания  $\sum_{i=2}^K m_i$  заявок менее приоритетных классов из общего пула, при этом ресурс, выделенный для обслуживания каждой заявки класса  $k$ , определяется формулой (1) для состояния  $(\mathbf{n} - \mathbf{m} + \mathbf{e}_k)$ ;

– в противном случае доступ поступающей в систему заявки класса  $k$  будет заблокирован.

Фрагмент диаграммы интенсивностей переходов СП  $\{(N_1(t), \dots, N_K(t)), t \geq 0\}$  показан на рис. 3.

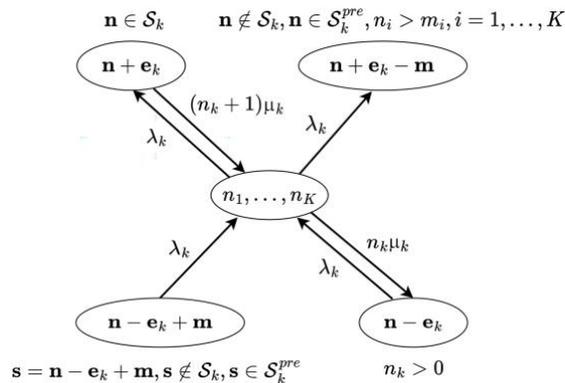


Рис. 3. Диаграмма интенсивностей переходов для центрального состояния пространства  $\mathbf{X}$   
 Fig. 3. Transition probabilities of the central state of the space  $\mathbf{X}$

Отсутствие встречных переходов между некоторыми парами состояний на рис. 3 показывает, что СП  $\{(N_1(t), \dots, N_K(t)), t \geq 0\}$ , описывающий поведение системы, является необратимым, и система не имеет аналитического решения в компактной форме. Стационарное распределение вероятностей состояний системы  $p(\mathbf{n}), \mathbf{n} \in \mathbf{X}$ , может быть получено путем численного решения системы уравнений равновесия,  $\mathbf{p}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}^T$ ,  $\mathbf{p}^T \mathbf{1} = 1$ , где  $\mathbf{A}$  – инфинитезимальная матрица, элементы которой определяются следующим образом:

$$a(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \begin{cases} \lambda_k, & \text{если } \mathbf{n}' = \mathbf{n} + \mathbf{e}_k, \mathbf{n} \in S_k, k = 1, \dots, K, \\ & \text{или } \mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{m} + \mathbf{e}_k, \mathbf{n} \notin S_k, \mathbf{n} \in S_k^{pre}, n_i > m_i, k, i = 1, \dots, K; \\ n_k \mu_k, & \text{если } \mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{e}_k, n_k > 0, k = 1, \dots, K; \\ \varphi, & \text{если } \mathbf{n}' = \mathbf{n}, k = 1, \dots, K; \\ 0, & \text{в ином случае,} \end{cases}$$

где  $\varphi = - \left[ \sum_{k=1}^K \lambda_k \cdot I\{\mathbf{n} \in S_k\} + \lambda_k \cdot I\{\mathbf{n} \notin S_k, \mathbf{n} \in S_k^{pre}, n_i > m_i, i = 1, \dots, K\} + n_k \mu_k \right]$ .

Рассчитав распределение вероятностей  $p(\mathbf{n}), \mathbf{n} \in \mathbf{X}$ , можно вычислить основные вероятностно-временные характеристики модели: вероятность блокировки доступа заявок класса  $k$   $B_k = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{B}_k} p(\mathbf{n}), k = 1, \dots, K$ ; вероятность прерывания обслуживания заявок при поступлении заявки класса  $k$   $\Pi_k = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{I}_k} p(\mathbf{n}), k = 1, \dots, K-1$ ; среднее число единиц ресурса, занятых заявками класса  $i$ ,  $\bar{k}_i = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{X}} n_i b_i(\mathbf{n}) p(\mathbf{n}), i = 1, \dots, K$ ; коэффициент использования ресурса  $U = \frac{1}{C} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{X}} n_i b_i(\mathbf{n}) p(\mathbf{n})$ .

### 3. Численные результаты

Для наглядного представления о работе модели рассмотрим процесс обслуживания базовой станцией емкости  $C = 100$  единиц ресурса запросов пользователей на предоставление 2 классов услуг ( $K = 2$ ): услуга, генерирующая потоковый URLLC трафик – заявки класса 1, и услуга, генерирующая эластичный eMBB трафик – заявки класса 2 (рис. 4). В соответствии с определением потокового и эластичного трафика положим  $b_1^{\min} = b_1^{\max}, b_2^{\min} \leq b_2^{\max}$ .

На основе предложенной модели СМО выполним сравнение пяти стратегий разделения ресурсов [18, 19]: (i) DYN – отсутствие резервирования и приоритетов, (ii) DYN + PRE – приоритетное обслуживание URLLC заявок с прерыванием, но без резервирования, (iii) RES – полное резервирование ресурсов,  $g_1 + g_2 = C$ , (iv) DYN + RES – частичное резервирование,  $g_1 + g_2 < C$ , без прерываний и (v) DYN + RES + PRE – частичное резервирование с прерываниями.

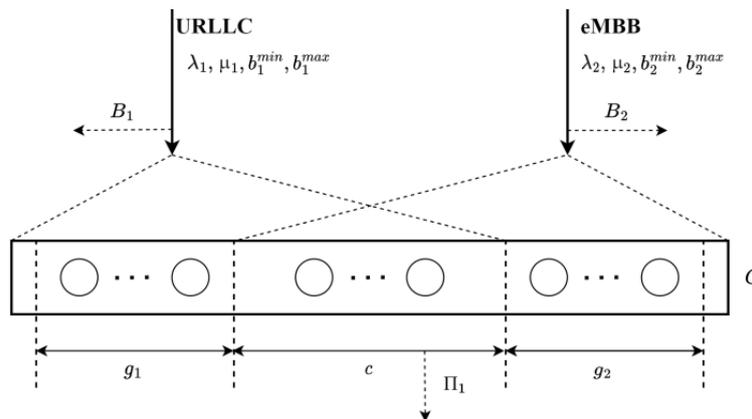


Рис. 4. Схема модели с резервированием и прерыванием обслуживания для трафика URLLC и eMBB  
 Fig. 4. Service model for URLLC and eMBB traffic with reservation and preemption

Чтобы гарантировать производительность URLLC и eMBB трафика с точки зрения вероятности блокировки доступа в систему, для схем RES, DYN + RES и DYN + RES + PRE необходимо выполнить численную оптимизацию параметров  $g_1$  и  $g_2$ . Проведем анализ минимального количества ресурса, необходимого для удовлетворения требований к качеству обслуживания трафика URLLC и eMBB. В качестве ограничений установим вероятности блокировки запросов услуг URLLC и eMBB равными  $10^{-5}$  и  $10^{-1}$  соответственно [20]. Параметры системы представлены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры рассматриваемой системы

Параметр	Значение
Интенсивность поступления запросов на услуги URLLC	5 000 заявок/с
Интенсивность поступления запросов на услуги eMBB	1 заявка/с
Среднее время обслуживания запросов на услуги URLLC	1 мс
Среднее время обслуживания запросов на услуги eMBB	10 с

В табл. 2 для иллюстрации приведен фрагмент полученных результатов – размеры индивидуальных пулов зарезервированного ресурса  $g_1$  и  $g_2$  для трех схем при избранных значениях коэффициентов  $\sigma_1 = \rho_1/\rho_2$  и  $\sigma_2 = \rho_2/\rho_1$ , где  $\rho_1 = \lambda_1 b_1^{\min}/\mu_1$  и  $\rho_2 = \lambda_2 b_2^{\min}/\mu_2$  – интенсивности предложенной нагрузки, создаваемой запросами на передачу трафика URLLC и eMBB соответственно. Согласно полученным данным для схемы DYN + RES + PRE, конкурирующей по производительности со схемой DYN + PRE, нет необходимости резервировать ресурсы для трафика URLLC, поскольку значения  $g_1$  никогда не превышают 1 PRB.

Таблица 2

Минимальные требования к ресурсам для рассматриваемых схем

Коэффициент	Схема	$g_1$ , ед. ресурса	$g_2$ , ед. ресурса	$C$
$\sigma_1 = 0,4$	RES	23	26	49
	DYN + RES	20	1	47
	DYN + RES + PRE	1	1	24
$\sigma_1 = 1,2$	RES	48	26	74
	DYN + RES	43	1	70
	DYN + RES + PRE	1	1	49
$\sigma_1 = 2,0$	RES	69	26	95
	DYN + RES	65	1	92
	DYN + RES + PRE	1	1	70
$\sigma_2 = 0,4$	RES	42	14	56
	DYN + RES	38	1	53
	DYN + RES + PRE	1	1	43
$\sigma_2 = 1,2$	RES	42	30	72
	DYN + RES	38	1	69
	DYN + RES + PRE	1	1	43
$\sigma_2 = 2,0$	RES	42	46	88
	DYN + RES	38	1	85
	DYN + RES + PRE	1	1	43

На рис. 5 минимальные требования к емкости базовой станции  $C$  представлены в виде функции аргумента  $\sigma_2$ , при этом интенсивность поступления запросов  $\lambda_2$  на передачу трафика eMBB увеличивается, в то время как интенсивность поступления запросов  $\lambda_1$  на передачу трафика URLLC остается постоянной. Согласно полученным результатам больше всего ресурса требует схема DYN, где для обоих классов трафика не предусмотрены специальные дисциплины обслуживания. Второй по количеству используемого ресурса является схема полного резервирования RES. Прерывание без резервирования, DYN + PRE, является одной из двух лучших схем с точки зрения занятого ресурса и сравнима с наиболее сложной схемой, сочетающей в себе как резервирование, так и прерывание, DYN + RES + PRE. Напомним, что схема DYN + PRE обеспечивает абсолютный приоритет в обслуживании трафика URLLC, оставляя при этом трафик eMBB уязвимым для прерывания.

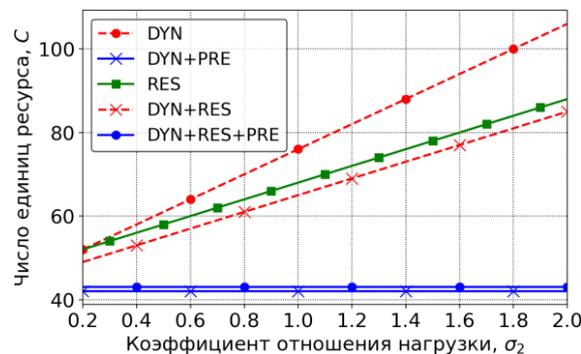


Рис. 5. Зависимость минимального числа единиц ресурса  $C$  от  $\sigma_2$   
 Fig. 5. The minimum resource requirements  $C$  varying  $\sigma_2$

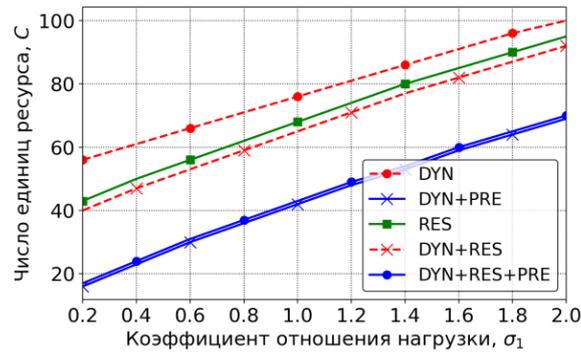


Рис. 6. Зависимость минимального числа единиц ресурса  $C$  от  $\sigma_1$   
 Fig. 6. The minimum resource requirements  $C$  varying  $\sigma_1$

Представленные на рис. 5 результаты подтверждаются рис. 6, где варьирует интенсивность поступления заявок  $\lambda_1$  на передачу трафика URLLC, влияющая на аргумент функции  $\sigma_1$ . Линии, соответствующие DYN + RES + PRE и DYN + PRE, остаются близкими друг к другу и лежат значительно ниже по сравнению с другими рассмотренными схемами. Численно преимущество при изменении  $\lambda_2$  остается постоянным и достигает 50%, а при изменении  $\lambda_1$  существенно зависит от относительных нагрузок трафика и уменьшается при увеличении  $\lambda_1$ .

### Заключение

В статье исследована математическая модель для класса алгоритмов сетевого слайсинга сети радиодоступа 5G Новое Радио. Рассматриваемые алгоритмы включают в себя одновременное использование политик резервирования ресурсов и механизмов обслуживания на основе приоритетов. Модель построена в виде мультисервисной системы массового обслуживания для анализа вероятности блокировки доступа в систему и вероятности прерывания обслуживания заявки некоторого класса, а также коэффициента использования радиоресурса и допускает параметризацию с учетом специфики беспроводного канала связи.

Проведенное численное исследование показывает, что использование приоритетного обслуживания является критически важным для минимизации количества ресурса, необходимого для достижения гарантий производительности как для трафика eMBB, так и для трафика URLLC. Наилучшей является схема с прерыванием, но без резервирования ресурсов, которая позволяет достичь 50%-ного выигрыша в количестве необходимого ресурса по сравнению с системами без прерываний или с полным резервированием.

### Список источников

1. ITU-T. Requirements of the IMT-2020 Network : Recommendation Y. 3101. 2018.
2. Li Y. et al. Understanding the ecosystem and addressing the fundamental concerns of commercial MVNO // IEEE / ACM Transactions on Networking. 2020. V. 28. P. 1364–1377.
3. ITU-T. Framework for the Support of Network Slicing in the IMT-2020 Network : Recommendation Y. 3112. 2018.
4. Ivanova D. et al. Performance of priority-based traffic coexistence strategies in 5G mmWave industrial deployments // IEEE Access. 2022. V. 10. P. 9241–9256.
5. Markova E. et al. Prioritized service of URLLC traffic in industrial deployments of 5G NR systems // Distributed Computer and Communication Networks : 23rd International Conference. 2020. P. 497–509.
6. Степанов С.Н., Степанов М.С. Планирование ресурса передачи при совместном обслуживании мультисервисного трафика реального времени и эластичного трафика данных // Автоматика и телемеханика. 2017. № 11. С. 79–93.
7. Begishev V. et al. Joint Use of Guard Capacity and Multiconnectivity for Improved Session Continuity in Millimeter-Wave 5G NR Systems // IEEE Transactions on Vehicular Technology. 2021. V. 70 (3). P. 2657–2672.
8. Yang W., Li C.P., Fakoorian A., Hosseini K., Chen W. Dynamic URLLC and eMBB Multiplexing Design in 5G New Radio // Proc. of the 2020 IEEE 17th Annual Consumer Communications Networking Conference. 2020. P. 1–5.
9. Кочеткова И.А., Власкина А.С., Ву Н.Н., Шоргин В.С. Система массового обслуживания с управляемым по сигналам перераспределением приборов для анализа нарезки ресурсов сети 5G // Информатика и ее применения. 2021. Т. 15 (3). С. 91–97.

10. Горцев А.М., Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Управление и адаптация в системах массового обслуживания. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1978. 208 с.
11. Башарин Г.П., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е. Математическая теория телетрафика и ее приложения к анализу мульти-сервисных сетей связи следующих поколений // Автоматика и вычислительная техника. 2013. № 2. С. 11–21.
12. Горбунова А.В., Наумов В.А., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е. Ресурсные системы массового обслуживания как модели беспроводных систем связи // Информатика и ее применения. 2018. Т. 12 (3). С. 48–55.
13. Haque M.E., Tariq F., Khandaker M.R.A., Wong K.-K., Zhang Y. A Survey of Scheduling in 5G URLLC and Outlook for Emerging 6G Systems // IEEE Access. 2023. V. 11. P. 34372–34396.
14. Begishev V., Moltchanov D., Sopin E., Samuylov A., Andreev S., Koucheryavy Y. et al. Quantifying the impact of guard capacity on session continuity in 3GPP new radio systems // IEEE Trans. Veh. Tech. 2019. V. 68 (12). P. 12345–12359.
15. Moltchanov D. et al. A tutorial on mathematical modeling of 5G/6G millimeter wave and terahertz cellular systems // IEEE Communications Surveys & Tutorials. 2022. V. 24 (2). P. 1072–1116. doi: 10.1109/COMST.2022.3156207
16. Yashkov S., Yashkova A. Processor sharing: A survey of the mathematical theory // Automation and Remote Control. 2007. V. 68. P. 1662–1731.
17. Макеева Е.Д., Поляков Н.А., Харин П.А., Гудкова И.А. Вероятностная модель для анализа характеристик совместной передачи трафика URLLC и eMBB в беспроводных сетях // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2020. № 52. С. 33–42.
18. Бегишев В.О., Самуйлов А.К., Молчанов Д.А., Самуйлов К.Е. Стратегии распределения радиоресурсов в гетерогенных сетях с трафиком Narrow-Band IoT // Системы и средства информатики. 2017. Т. 27, № 4. С. 64–79.
19. Begishev V., Petrov V., Samuylov A., Moltchanov D., Andreev S., Koucheryavy Y., Samouylov K. Resource allocation and sharing for heterogeneous data collection over conventional 3GPP LTE and emerging NB-IoT technologies // Computer Communications. 2018. V. 120. P. 93–101.
20. ITU-R. Minimum Requirements Related to Technical Performance for IMT-2020 Radio Interface(s) : Report M.2410-0. 2017.

#### References

1. ITU-T. (2018) *Requirements of the IMT-2020 Network*. ITU-T Rec. Y.3101.
2. Li, Y. et al. (2020) Understanding the ecosystem and addressing the fundamental concerns of commercial MVNO. *IEEE/ACM Tr. Networking*. 28(3). pp. 1364–1377.
3. ITU-T. (2018) *Framework for the Support of Network Slicing in the IMT-2020 Network*. ITU-T Rec. Y.3112.
4. Ivanova, D. et al. (2022) Performance of priority-based traffic coexistence strategies in 5G mmWave industrial deployments. *IEEE Access*. 10. pp. 9241–9256.
5. Markova, E. et al. (2020) Prioritized service of URLLC traffic in industrial deployments of 5G NR systems. *Distributed Computer and Communication Networks*. 23rd Int. Conf. pp. 497–509.
6. Stepanov, S.N. & Stepanov, M.S. (2017) Planning transmission resource at joint servicing of the multiservice real time and elastic data traffics. *Automation and Remote Control*. 78. pp. 2004–2015.
7. Begishev, V. et al. (2021) Joint Use of Guard Capacity and Multiconnectivity for Improved Session Continuity in Millimeter-Wave 5G NR Systems. *IEEE Tr. on Veh. Techn.* 70(3). pp. 2657–2672.
8. Yang, W., Li, C.P., Fakoorian, A., Hosseini, K. & Chen, W. (2020) Dynamic URLLC and eMBB Multiplexing Design in 5G New Radio. *Proc. of 2020 IEEE 17th Annual Consumer Communications Networking Conf.* pp. 1–5.
9. Kochetkova, I.A., Vlaskina, A.S., Vu, N.N. & Shorgin, V.S. (2021) Queuing system with signals for dynamic resource allocation for analyzing network slicing in 5G networks. *Informatika i ee primeneniya*. 15(3). pp. 91–97.
10. Gortsev, A.M., Nazarov, A.A. & Terpugov, A.F. (1978) *Upravlenie i adaptatsiya v sistemakh massovogo obsluzhivaniya* [Control and adaptation in queuing systems]. Tomsk: Tomsk State University.
11. Basharin, G.P., Gaidamaka, Yu.V. & Samouylov, K.E. (2013) Mathematical theory of teletraffic and its application to the analysis of multiservice communication of next generation networks. *Automatic Control and Computer Sciences*. 47. pp. 62–69. DOI: 10.3103/S0146411613020028.
12. Gorbunova, A.V., Naumov, V.A., Gaidamaka, Y.V. & Samouylov, K.E. (2018) Resource queuing systems as models of wireless communication systems. *Informatika i ee primeneniya*. 12(3). pp. 48–55.
13. Haque, M.E., Tariq, F., Khandaker, M.R.A., Wong, K.-K. & Zhang, Y. (2023) A Survey of Scheduling in 5G URLLC and Outlook for Emerging 6G Systems. *IEEE Access*. 11. pp. 34372–34396.
14. Begishev, V., Moltchanov, D., Sopin, E., Samuylov, A., Andreev, S., Koucheryavy, Y., et al. (2019) Quantifying the impact of guard capacity on session continuity in 3GPP new radio systems. *IEEE Trans. Veh. Tech.* 68(12). pp. 12345–12359.
15. Moltchanov, D. et al. (2022) A tutorial on mathematical modeling of 5G/6G millimeter wave and terahertz cellular systems. *IEEE Comm. Surveys & Tutorials*. 24(2). pp. 1072–1116. DOI: 10.1109/COMST.2022.3156207
16. Yashkov, S. & Yashkova, A. (2007) Processor sharing: A survey of the mathematical theory. *Automation and Remote Control*. 68. pp. 1662–1731.
17. Makeeva, E.D., Polyakov, N.A., Kharin, P.A. & Gudkova, I.A. (2020) Probability model for performance analysis of joint URLLC and eMBB transmission in 5G networks. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 52. pp. 33–42. DOI: 10.17223/19988605/52/4

18. Begishev, V.O., Samuylov A.K., Molchanov, D.A. & Samouylov, K.E. (2017) Radio resource distribution strategies in heterogeneous networks with NB-IoT traffic. *Sistemy i sredstva informatiki – Systems and Means of Informatics*. 27(4). pp. 64–79.
19. Begishev, V., Petrov, V., Samuylov, A., Moltchanov, D., Andreev, S., Koucheryavy, Y. & Samouylov, K. (2018) Resource allocation and sharing for heterogeneous data collection over conventional 3GPP LTE and emerging NB-IoT technologies. *Computer Communications*. 120. pp. 93–101.
20. ITU-R. (2017) *Minimum Requirements Related to Technical Performance for IMT-2020 Radio Interface(s)*. ITU-R M.2410-0.

**Информация об авторах:**

**Иванова Дарья Вадимовна** – аспирант кафедры прикладной информатики и теории вероятностей факультета физико-математических и естественных наук Российского университета дружбы народов (Москва, Россия). E-mail: ivanova-dv@rudn.ru

**Жбанкова Елена Александровна** – аспирант кафедры прикладной информатики и теории вероятностей факультета физико-математических и естественных наук Российского университета дружбы народов (Москва, Россия). E-mail: zhbankova-ea@rudn.ru

**Маркова Екатерина Викторовна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей факультета физико-математических и естественных наук Российского университета дружбы народов (Москва, Россия). E-mail: markova-ev@rudn.ru

**Гайдамака Юлия Васильевна** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной информатики и теории вероятностей факультета физико-математических и естественных наук Российского университета дружбы народов (Москва, Россия); Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН (Москва, Россия). E-mail: gaydamaka-yuv@rudn.ru

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Information about the authors:**

**Ivanova Daria V.** (Post-graduate Student, RUDN University, Moscow, Russian Federation). E-mail: ivanova-dv@rudn.ru

**Zhbankova Elena A.** (Post-graduate Student, RUDN University, Moscow, Russian Federation). E-mail: zhbankova-ea@rudn.ru

**Markova Ekaterina V.** (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, RUDN University, Moscow, Russian Federation). E-mail: markova-ev@rudn.ru

**Gaidamaka Yuliya V.** (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, RUDN University, Moscow, Russian Federation; Federal Research Center “Computer Science and Control” of the RAS, Moscow, Russian Federation). E-mail: gaydamaka-yuv@rudn.ru

**Contribution of the authors:** the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

*Поступила в редакцию 03.07.2023; принята к публикации 08.12.2023*

*Received 03.07.2023; accepted for publication 08.12.2023*

Научная статья

УДК 621.928.37

doi: 10.17223/19988605/65/5

## Математическая модель и анализ влияния конструкции корпуса гидроциклона на эффективность разделения вязкопластических сред напорной флотацией

Владимир Олегович Яблонский

*Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия, everest58@mail.ru*

**Аннотация.** Математическая модель разделения неоднородных жидких систем в поле центробежных сил адаптирована к процессу очистки вязкопластических сред напорной флотацией в гидроциклонах различных конструкций. Модель учитывает действие сил инерции, Кориолиса и присоединенную массу жидкости. Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая процесс флотации, сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и решена численным методом с учетом геометрии рабочего пространства гидроциклонов. На основе математической модели проанализировано влияние фактора разделения и пластических свойств среды на остаточную концентрацию частиц твердой фазы для гидроциклонов различных конструкций. Даны рекомендации по выбору конструкции и режимов работы аппаратов. Приведено физическое обоснование установленных зависимостей. Полученные результаты могут использоваться при моделировании разделения вязкопластических сред напорной флотацией в гидроциклонах и являются основой для управления процессами эксплуатации гидроциклонов-флотаторов.

**Ключевые слова:** математическая модель; жесткая система уравнений; метод характеристик; вязкопластическая среда; напорная флотация; гидроциклон-флотатор.

**Для цитирования:** Яблонский В.О. Математическая модель и анализ влияния конструкции корпуса гидроциклона на эффективность разделения вязкопластических сред напорной флотацией // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 65. С. 47–57. doi: 10.17223/19988605/65/5

Original article

doi: 10.17223/19988605/65/5

## Mathematical model and analysis of the effect of the hydrocyclone body design on the efficiency of separation of viscoplastic media by pressure flotation

Vladimir O. Yablonskii

*Volgograd State Technical University, Volgograd, Russia, everest58@mail.ru*

**Abstract.** The mathematical model of separation of inhomogeneous liquid systems in the field of centrifugal forces is adapted to the process of purification of viscoplastic media by pressure flotation in hydrocyclones of various designs. The model takes into account the action of inertia forces, Coriolis and the attached mass of liquid. The system of partial differential equations describing the flotation process is reduced to a system of ordinary differential equations and solved by a numerical method taking into account the geometry of the working space of hydrocyclones. On the basis of a mathematical model, the influence of the separation factor and the plastic properties of the medium on the residual concentration of solid phase particles for hydrocyclones of various designs is analyzed. Recommendations on the choice of design and modes of operation of the devices are given. The physical justification of the established dependencies is given. The obtained results can be used in modeling the separation of viscoplastic media by pressure flotation in hydrocyclones and are the basis for controlling the operation of hydrocyclone-flotator.

**Keywords:** mathematical model; rigid system of equations; method of characteristics; viscoplastic medium; pressure flotation; hydrocyclone-flotator.

**For citation:** Yablonsky, V.O. (2023) Mathematical model and analysis of the effect of the hydrocyclone body design on the efficiency of separation of viscoplastic media by pressure flotation. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 65. pp. 47–57. doi: 10.17223/19988605/65/5

## Введение

Гидроциклоны, применяемые в химической и других отраслях промышленности – это аппараты, обеспечивающие высокие показатели процессов разделения, которые могут быть улучшены путем проведения высокоэффективных разделительных процессов в центробежном поле.

В ряде работ показано, что для уменьшения граничного зерна разделения перспективным является применение процесса напорной флотации, реализация которого в поле центробежных сил в гидроциклоне приводит к повышению качества разделения в случае обеспечения условий для пленочного режима течения. Процесс флотации широко применяется для очистки сточных вод, содержащих нефть, нефтепродукты, масла, волокнистые материалы, а также является основным процессом в обогащении полезных ископаемых.

Наибольшую интенсивность центробежного поля обеспечивает цилиндроконический гидроциклон за счет возрастания центробежного ускорения в нижней конической части корпуса. Цилиндрический гидроциклон, работающий в пленочном режиме течения, обеспечивает минимальные значения толщины пленки жидкости, что важно для осуществления процесса напорной флотации, поэтому выбор конструктивного оформления аппарата для осуществления процесса напорной флотации является актуальной теоретической и прикладной задачей для многих технологических процессов.

В работе [1] подчеркивается, что гидроциклоны традиционно довольно широко применяются на горнообогатительных предприятиях, а для водоподготовки – неоправданно мало ввиду того, что частицы малого размера, выделяемые в процессах водоподготовки, не полностью сепарируются в гидроциклонах. Процесс флотации в поле центробежных сил, позволяющий существенно уменьшить граничное зерно разделения, в данном случае существенно расширит область применения гидроциклонов.

В работе [2] установлено, что при турбулентном течении вязкой жидкости в поле центробежных сил газовые пузырьки являются неустойчивыми образованиями и могут разрушаться. Поэтому аппараты, работающие в пленочном ламинарном режиме течения, обеспечивают наиболее благоприятные условия для осуществления процесса напорной флотации в поле центробежных сил.

Опыты по разделению водомасляной эмульсии и трехкомпонентной системы вода–моторное масло–кварцевый песок в гидроциклоне-флотаторе показали, что во всем исследованном интервале концентраций и входных давлений гидроциклон-флотатор обеспечивает более высокую эффективность улавливания твердой фазы, чем обычный гидроциклон [3].

В работе [4] показано, что извлечение взвешенных частиц из сточных вод напорной флотацией, осуществленной в поле центробежных сил в гидроциклоне, способствует значительной интенсификации процесса и достижению практически полного удаления частиц твердой фазы за счет отделения из сточных вод частиц наиболее мелких фракций. Для достижения более эффективной очистки предлагается методика расчета сепарационных процессов в гидроциклонах-флотаторах на основе уравнения радиального движения частицы, связанной с пузырьком воздуха.

В работе [5] отмечается, что наиболее перспективным путем интенсификации процессов разделения неоднородных жидких систем является соединение двух известных факторов – реализации процесса в тонкой пленке и наложения центробежного поля. Разработка методики моделирования и расчета аппаратов для осуществления таких процессов представляет значительный теоретический и прикладной интерес, что позволит расширить сферу их внедрения в промышленность.

В работах [6, 7] указывается на зависимость числа вероятных столкновений частиц твердой фазы и пузырьков газа от центробежного ускорения, показано, что центробежное поле является фактором, увеличивающим число столкновений частиц и пузырьков. Установлено, что в условиях напор-

ной флотации превалирующий механизм образования флотокомплексов – столкновение частиц твердой фазы с пузырьками газа. Эффективность процесса напорной флотации, зависящая от числа столкновений, определяется расстоянием, проходимым частицей твердой фазы в жидкой дисперсионной среде.

Авторами работы [8] предложено вводить диспергированный газ непосредственно во входной патрубок гидроциклона без учета того, что частицы твердой фазы служат центрами образования газовых пузырьков при напорной флотации, что существенно повышает интенсивность образования флотокомплексов.

В [9, 10] на основании результатов численного решения полной системы уравнений реодинамики выполнен анализ влияния конструктивных параметров гидроциклона на гидродинамику вязкопластической жидкости. Установлено влияние угла конусности конической части корпуса гидроциклона и фактора разделения на затухание окружной составляющей скорости в направлении оси гидроциклона и толщину пленки жидкости.

Описание разделительных процессов в гидроциклонах различной конструкции со свободно образующейся поверхностью вязкопластической жидкой фазы на основе решения полных уравнений реодинамики до сих пор не проведено и представляет значительный теоретический и прикладной интерес.

В настоящей работе математическая модель разделения неоднородных жидких систем в поле центробежных сил [11] адаптирована к процессу флотации в гидроциклоне, в работе также выполнен анализ влияния конструкции корпуса гидроциклона на эффективность разделения вязкопластических сред напорной флотацией.

### 1. Математическая модель процесса разделения вязкопластических сред в гидроциклоне напорной флотацией

Схема разделения вязкопластической среды напорной флотацией в гидроциклоне приведена на рис. 1. Гидроциклон состоит из цилиндрической камеры 1 и конической части 2 с углом конусности  $\alpha$ . При  $\alpha = 0$  имеем цилиндрический гидроциклон, содержащий цилиндрический корпус.

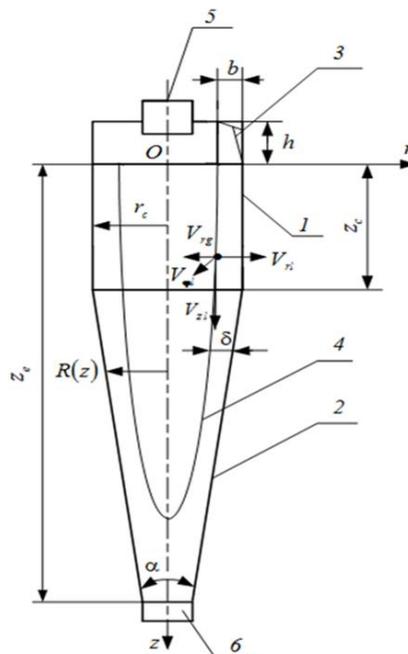


Рис. 1. Схема разделения вязкопластической среды напорной флотацией в гидроциклоне: 1 – цилиндрическая камера; 2 – коническая часть корпуса; 3 – входной патрубок; 4 – вращающаяся пленка жидкости со свободной поверхностью; 5 – верхний отводящий патрубок; 6 – нижний сливной патрубок

Fig. 1. Scheme of separation of a viscoplastic medium by pressure flotation in a hydrocyclone: 1 – cylindrical chamber; 2 – conical part of the case; 3 – inlet pipe; 4 – rotating liquid film with a free surface; 5 – upper discharge pipe; 6 – lower drain pipe

В цилиндрическую камеру 1 через входной патрубок 3, установленный в ее верхней части, тангенциально подается при повышенном давлении (до 0,8 МПа) вязкопластическая суспензия, предварительно насыщенная газом (воздухом). Поступившая в гидроциклон суспензия стекает по стенкам корпуса аппарата вниз, обладая окружной  $V_\phi$ , осевой  $V_z$  и радиальной  $V_r$  составляющими скорости, образуя вращающуюся пленку со свободной поверхностью 4. При снижении давления до атмосферного создается перенасыщение растворенного газа, и суспензия «вскипает». Частицы твердой фазы под действием центробежной силы движутся к стенке корпуса гидроциклона, а пузырьки газа под действием выталкивающей центростремительной силы Архимеда – навстречу им к поверхности пленки. При столкновении частиц твердой фазы с пузырьками газа происходит образование флотокомплексов, выносящих частицы твердой фазы на поверхность пленки в пенный слой, который удаляется через верхний отводящий патрубок 5. Кроме того, частицы твердой фазы служат непосредственными центрами образования пузырьков газа, выделяющихся при снижении давления, что приводит к существенному повышению кинетического коэффициента напорной флотации. Осветленная суспензия удаляется из аппарата через нижний сливной патрубок 6.

Моделирование осуществлялось на основе результатов численного решения полной системы уравнений реодинамики для течения вязкопластической среды в гидроциклонах различной конструкции [9, 10].

Течение вязкопластической среды в гидроциклоне осуществляется в пленочном режиме ввиду высокой эффективной вязкости вязкопластических сред, что обеспечивает устойчивую связь комплекса частица–пузырек ввиду отсутствия резкого возрастания окружной составляющей скорости вблизи оси гидроциклона.

Эффективность разделения в гидроциклоне определяется гидродинамическими параметрами предварительно закрученной пленки вязкопластической среды, стекающей по стенкам корпуса под действием силы тяжести и давления, создаваемого центробежной силой.

Многие из разделяемых в промышленности неоднородных жидких систем являются неньютоновскими вязкопластическими средами, имеющими предел текучести, что оказывает влияние на гидродинамику аппаратов. К ним относятся буровые растворы, смазочные масла с присадками, суспензии глазури, биомассы и белково-витаминных концентратов (паприн, гаприн, меприн), а также карбида кремния, сточные воды, содержащие нефть, жир и другие вещества.

В работе [12] сделано заключение, что к многофазным гетерогенным системам применимо реологическое уравнение состояния неньютоновской жидкости, которое для процессов очистки вязкопластических жидкостей записывают в виде закона Гершеля–Балкли. Выраженное через компоненты тензора скоростей деформаций для трехмерного течения с учетом условия пластичности фон Мизеса, уравнение Гершеля–Балкли имеет вид [13]:

$$\tau_{ij} = \left( \frac{\tau_0}{A} + kA^{n-1} \right) \gamma_{ij}, \quad (1)$$

$$A = \sqrt{2 \left( \frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left( \frac{V_r}{r} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{V_\phi}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_\phi}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right)^2},$$

где  $\tau_{ij}$  – компоненты тензора напряжений (Па),  $\tau_0$  – предельное напряжение сдвига (Па),  $\gamma_{ij}$  – компоненты тензора скоростей деформаций ( $c^{-1}$ ),  $A$  – интенсивность скоростей деформаций ( $c^{-1}$ ),  $V_r$  – радиальная составляющая скорости среды (м/с),  $V_\phi$  – окружная составляющая скорости среды (рад/с),  $n$  – показатель нелинейности кривой течения,  $k$  – индекс консистентности ( $Па \cdot c^n$ ),  $r$ ,  $z$  – радиальная и осевая координаты (м),  $\phi$  – окружная координата (рад).

Математическая постановка задачи производится при следующих допущениях: при поступлении в гидроциклон вязкопластической среды, предварительно насыщенной газом, давление в суспензии падает и происходит выделение монодисперсных газовых пузырьков диаметром  $d_g$ , равномерно распределенных по всему объему, концентрация которых на входе в гидроциклон равна  $c_{g0}$ ; коалесценция газовых пузырьков отсутствует; для пленочного течения суспензии с вязкопластической дис-

персионной средой, обладающей высокой эффективной вязкостью, режим течения ламинарный и режим осаждения частиц твердой фазы и всплытия пузырьков газа ламинарный [14].

Для математического моделирования поля концентраций при разделении суспензии с вязкопластической дисперсионной средой напорной флотацией в гидроциклоне используем дифференциальное уравнение конвективной диффузии в цилиндрических координатах, которое с учетом стока частиц твердой фазы за счет связывания в комплексы и флотации пузырьками газа при равенстве нулю коэффициента молекулярной диффузии может быть записано для частиц твердой фазы и пузырьков газа следующим образом:

$$\operatorname{div}(\bar{V}_h c_h) = -J_h, \quad \operatorname{div}(\bar{V}_g c_g) = -J_g, \quad (2)$$

где  $\bar{V}_h$  – вектор скорости частиц твердой фазы,  $\bar{V}_g$  – вектор скорости пузырьков газа,  $c_h$  – концентрация частиц твердой фазы (кг/м<sup>3</sup>),  $c_g$  – концентрация пузырьков газа (кг/м<sup>3</sup>),  $J_h, J_g$  – сток частиц твердой фазы и пузырьков газа за счет флотации.

Наиболее распространенным в практике гидроциклонной флотации является случай, когда одна частица извлекается несколькими пузырьками в поле центробежных сил. При этом концентрация пузырьков газа значительно превышает концентрацию частиц твердой фазы  $c_g > c_h$ , и можно полагать  $c_g = \text{const}$  во всем объеме пленки суспензии в гидроциклоне. Для этого случая второе уравнение системы (2) можно исключить, и система сводится к одному уравнению, сток частиц твердой фазы  $J_h$  за счет флотации в котором согласно [15] имеет вид, аналогичный кинетическому уравнению химической реакции первого порядка:

$$\operatorname{div}(\bar{V}_h c_h) = -K c_g c_h, \quad (3)$$

где  $K$  – кинетическая константа флотации (с<sup>-1</sup>).

После преобразований уравнение (3) принимает вид:

$$V_{rh} \frac{\partial c_h}{\partial r} + V_{zh} \frac{\partial c_h}{\partial z} = -c_h \left\{ K c_g + \frac{1}{r} \frac{\partial [r(V_{rh} - V_{rl})]}{\partial r} \right\}, \quad (4)$$

где  $z$  – осевая координата (м),  $V_{rh}(r, z)$  – радиальная составляющая скорости частиц твердой фазы (м/с),  $V_{zh}(r, z)$  – осевая составляющая скорости частиц твердой фазы (м/с). Уравнение (3) решалось совместно с уравнением движения частицы твердой фазы.

При  $c_g = 0$  сток частиц за счет флотации отсутствует, и уравнение (4) описывает процесс разделения суспензии сепарацией в поле центробежных сил.

Полагаем, что все происходящие столкновения эффективны (заканчиваются образованием комплекса), образовавшиеся комплексы не разрушаются при подъеме в пену и не осыпаются из нее. В этих условиях константа скорости флотации  $K$  может быть определена по формуле, полученной в работе [16] на основании того, что вероятность столкновения частиц и пузырьков аналогична вероятности столкновения молекул в молекулярно-кинетической теории газов.

При разработке модели разделения суспензии напорной флотацией в гидроциклоне учитывались действующие на частицу твердой фазы в радиальном направлении силы инерции, которые являются существенными при флотации крупных частиц и значительной разности плотностей частиц твердой фазы и дисперсионной среды. При условии действия на частицу твердой фазы центробежной силы Архимеда, силы сопротивления и Кориолисовой силы уравнение движения частицы твердой фазы в проекциях на оси  $r, \varphi$  имеет вид:

$$\begin{aligned} V_{rh} \frac{\partial V_{rh}}{\partial r} + V_{zh} \frac{\partial V_{rh}}{\partial z} &= \frac{V_{\varphi h}^2}{r} \left( 1 - \frac{\rho_l}{\rho_h} \right) - \frac{3}{4} \frac{K_{fr} \rho_l (V_{rh} - V_{rl}) |V_{rh} - V_{rl}|}{\rho_h d_h \Phi}, \\ V_{rh} \frac{\partial V_{\varphi h}}{\partial r} + V_{zh} \frac{\partial V_{\varphi h}}{\partial z} &= \frac{V_{\varphi h} V_{rh}}{r} - \frac{3}{4} \frac{K_{f\varphi} \rho_l (V_{\varphi h} - V_{\varphi l}) |V_{\varphi h} - V_{\varphi l}|}{\rho_h d_h \Phi}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $K_{fr}, K_{f\phi}$  – коэффициенты сопротивления движению частицы в радиальном и окружном направлениях;  $V_{\phi h}(r, z)$  – окружная составляющая скорости частиц твердой фазы, м/с;  $V_{rl}(r, z)$  – радиальная составляющая скорости дисперсионной среды (м/с),  $V_{\phi l}(r, z)$  – окружная составляющая скорости дисперсионной среды (м/с),  $d_h$  – диаметр частиц твердой фазы (м),  $\phi$  – окружная координата (град),  $\Phi$  – поправочный коэффициент, учитывающий стесненность осаждения частиц твердой фазы.

Коэффициенты сопротивления при радиальном и окружном движении частицы  $K_{fr}$  и  $K_{f\phi}$  определялись согласно [17]. При этом индекс консистентности  $k$  рассчитывался как эффективная вязкость псевдопластической жидкости согласно реологическому уравнению (1) с учетом наличия у разделяемой среды предельного напряжения сдвига  $\tau_0$ . Коэффициент  $\Phi$ , учитывающий стесненность осаждения частиц, вычислялся по формуле В.И. Соколова [18].

## 2. Численное моделирование

Уравнение (3) решалось совместно с уравнением движения частицы твердой фазы (4). В соответствии с методом характеристик система дифференциальных уравнений в частных производных, задаваемая уравнением (3) и уравнением движения частицы твердой фазы (4), сводится к эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, одно из которых задает траекторию частицы твердой фазы, а остальные – концентрацию частиц на траекториях с учетом стока за счет флотации пузырьками газа.

Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений с граничным условием, задающим концентрацию частиц твердой фазы  $c_{h0}$  на входе в гидроциклон, решалась по методу Рунге–Кутты четвертого порядка с фиксированным шагом. Ввиду того что скорость изменения осевой координаты при приближении траектории к стенке во много раз превышает скорость изменения радиальной координаты, данная система уравнений относится к классу жестких систем и требует для своего решения очень большого количества шагов. Интервал интегрирования от нижней границы входного патрубка гидроциклона до выходного отверстия в нижней части корпуса разбивался на  $M = 3 \cdot 10^5$  шагов по оси  $z$ , и полученная система дифференциальных уравнений численно интегрировалась с использованием программы, составленной на языке Compaq Visual Fortran. Погрешность решения системы оценивалась удвоением числа шагов и не превышала  $1 \cdot 10^{-5}$ .

Расчет на каждой траектории проводился до значения радиальной координаты, равного безразмерному радиусу корпуса гидроциклона  $R_c(Z)$ , являющемуся в случае цилиндрического гидроциклона кусочно-линейной функцией  $Z$ , определяемой из соотношения

$$R_c = \begin{cases} 1, & \text{если } Z \leq Z_c, \\ 1 - (Z - Z_c) \operatorname{tg}(\alpha/2), & \text{если } Z > Z_c, \end{cases} \quad (5)$$

где  $R_c(Z) = r_c(z)/r_c$  – безразмерный радиус корпуса гидроциклона;  $Z = z/r_c$  – безразмерная осевая координата;  $Z_c$  – безразмерная осевая координата нижней границы цилиндрической камеры гидроциклона;  $r_c$  – радиус цилиндрической камеры гидроциклона (м). В случае цилиндрического гидроциклона  $R_c(Z) = 1$  для всех значений  $Z$ , переменная  $r_c$  является радиусом корпуса гидроциклона.

Течение вязкопластической среды в гидроциклоне характеризуется числом пластичности  $Pl$ , равным отношению предельного напряжения сдвига  $\tau_0$  к силе инерции, центробежным числом Фруда  $Fr$  (фактором разделения), модифицированным числом Рейнольдса  $Re_n$ , показателем нелинейности кривой течения  $n$ , а также параметром конструкции гидроциклона  $Q$ , характеризующим отношение площади сечения входного патрубка гидроциклона к площади горизонтального сечения корпуса аппарата [9, 10].

Для оценки влияния конструкции корпуса гидроциклона на эффективность разделения в гидроциклоне-флотаторе необходимо использование интегральных показателей работы аппарата, наиболее важным из которых является остаточная концентрация  $S$ , характеризующая долю частиц твердой фазы, не извлеченных из суспензии в данном сечении пленки, определяемая по формуле

$$S = \frac{2\pi \int_0^1 C_h H_h(R, Z) R dR}{B \int_0^1 C_{h0} \Theta_{h0}(R, Z) dR}, \quad (6)$$

где  $C_h = \frac{c_h}{c_{h0}}$  – безразмерная концентрация частиц твердой фазы,  $C_{h0} = \frac{c_{h0}}{c_{h0}} = 1$  – безразмерная концентрация частиц твердой фазы во входном патрубке гидроциклона,  $H_h(R, Z) = \frac{V_{zh}(r, z)}{U_0}$  – безразмерная осевая составляющая скорости частиц твердой фазы,  $B = \frac{b}{r_c}$  – безразмерная ширина входного патрубка гидроциклона,  $\Delta(Z) = \frac{\delta(z)}{r_c}$  – безразмерная толщина пленки суспензии,  $\Theta_{h0}(R, Z) = \frac{V_{\phi h0}}{U_0}$  – безразмерная окружная составляющая скорости частиц твердой фазы во входном патрубке гидроциклона,  $R = \frac{r}{r_c}$  – безразмерная радиальная координата,  $V_{\phi h0}(r, z)$  – окружная составляющая скорости частиц твердой фазы во входном патрубке гидроциклона (м/с),  $U_0$  – средняя скорость суспензии во входном патрубке гидроциклона (м/с),  $\delta(z)$  – толщина пленки суспензии (м),  $b$  – ширина входного патрубка гидроциклона (м).

### 3. Обсуждение результатов

Результаты моделирования распределения остаточной концентрации частиц твердой фазы  $S$  по оси гидроциклона приведены на рис. 2, 3.

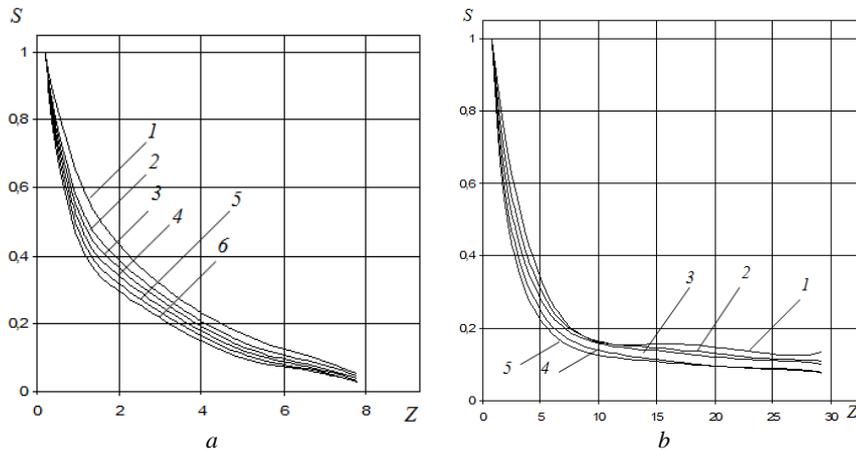


Рис. 2. Распределение остаточной концентрации частиц твердой фазы  $S$  по оси гидроциклона при  $Pl = 0,0085$ ,  $Re_n = 4 \cdot 10^3$ ,  $Q = 0,02$ ;  $n = 0,7$ ;  $d_h = 2 \cdot 10^{-5}$  м;  $d_g = 3 \cdot 10^{-5}$  м:

$a - \alpha = 15^\circ$  (цилиндроконический гидроциклон); 1 –  $Fr = 40$ ; 2 –  $Fr = 60$ ; 3 –  $Fr = 70$ ; 4 –  $Fr = 80$ ; 5 –  $Fr = 90$ ; 6 –  $Fr = 95$ ;  
 $b - \alpha = 0^\circ$  (цилиндрический гидроциклон); 1 –  $Fr = 40$ ; 2 –  $Fr = 60$ ; 3 –  $Fr = 70$ ; 4 –  $Fr = 80$ ; 5 –  $Fr = 90$

Fig. 2. Distribution of the residual concentration of solid phase particles  $S$  along the axis of the hydrocyclone at  $Pl = 0,0085$ ,  $Re_n = 4 \cdot 10^3$ ,  $Q = 0,02$ ;  $n = 0,7$ ;  $d_h = 2 \cdot 10^{-5}$  м;  $d_g = 3 \cdot 10^{-5}$  м:

$a) \alpha = 15^\circ$  (cylindrical-conical hydrocyclone); 1 –  $Fr = 40$ ; 2 –  $Fr = 60$ ; 3 –  $Fr = 70$ ; 4 –  $Fr = 80$ ; 5 –  $Fr = 90$ ; 6 –  $Fr = 95$   
 $b) \alpha = 0^\circ$  (cylindrical hydrocyclone); 1 –  $Fr = 40$ ; 2 –  $Fr = 60$ ; 3 –  $Fr = 70$ ; 4 –  $Fr = 80$ ; 5 –  $Fr = 90$

На рис. 2,  $a$  приведены зависимости распределения остаточной концентрации частиц твердой фазы  $S$  по оси цилиндриконического гидроциклона при значениях  $Pl = 0,0085$ ,  $Re_n = 4 \cdot 10^3$ ,  $Q = 0,02$ ,  $n = 0,7$ ,  $d_h = 2 \cdot 10^{-5}$  м,  $d_g = 3 \cdot 10^{-5}$  м. На кривых можно выделить участок быстрого снижения остаточной

концентрации  $S$  (до  $Z = 2,0-2,5$ ), соответствующий участку наиболее интенсивного затухания окружающей составляющей скорости потока [9, 10]. Из анализа данных, приведенных на рис. 2, *a*, следует, что остаточная концентрация  $S$  в выходном сечении гидроциклона снижается с увеличением числа  $Fr$  (фактора разделения), что объясняется снижением затухания окружающей составляющей скорости жидкости [9, 10] и приводит к увеличению радиальных составляющих скорости частиц твердой фазы  $V_h$  и пузырьков газа  $V_g$ , росту кинетического коэффициента флотации  $K$  и снижению остаточной концентрации частиц твердой фазы  $S$ .

На рис. 2, *b* приведены зависимости распределения остаточной концентрации частиц твердой фазы  $S$  по оси цилиндрического гидроциклона при  $\alpha = 0^\circ$  и тех же значениях параметров, что указаны на рис. 2, *a*. Из сравнения данных, приведенных на рис. 2, *a* и рис. 2, *b*, следует, что остаточная концентрация частиц твердой фазы  $S$  ниже в выходном сечении цилиндрического гидроциклона вследствие увеличения толщины пленки жидкости, особенно в нижней конической части корпуса [9, 10], возрастания вследствие этого пути, проходимого частицами твердой фазы в жидкости, числа их столкновений с пузырьками газа и соответствующего снижения остаточной концентрации частиц твердой фазы  $S$ . Цилиндрический гидроциклон имеет также меньшие габаритные размеры и может применяться в условиях ограниченных размеров производственных помещений.

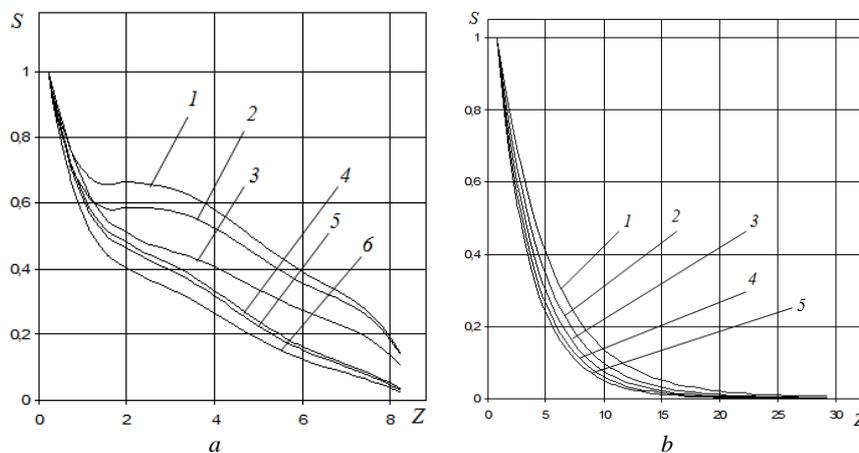


Рис. 3. Распределение остаточной концентрации частиц твердой фазы  $S$  по оси гидроциклона при  $Pl = 0,085$ ,  $Re_n = 4 \cdot 10^3$ ,  $Q = 0,02$ ;  $n = 0,7$ ;  $d_h = 2 \cdot 10^{-5}$  м;  $d_g = 3 \cdot 10^{-5}$  м:

*a* –  $\alpha = 15^\circ$  (цилиндроконический гидроциклон); 1 –  $Fr = 30$ ; 2 –  $Fr = 40$ ; 3 –  $Fr = 50$ ; 4 –  $Fr = 60$ ; 5 –  $Fr = 70$ ; 6 –  $Fr = 80$ ;

*b* –  $\alpha = 0^\circ$  (цилиндрический гидроциклон); 1 –  $Fr = 30$ ; 2 –  $Fr = 40$ ; 3 –  $Fr = 50$ ; 4 –  $Fr = 60$ ; 5 –  $Fr = 70$

Fig. 3. Distribution of the residual concentration of solid phase particles  $S$  along the axis of the hydrocyclone at  $Pl = 0.085$ ,  $Re_n = 4 \cdot 10^3$ ,  $Q = 0.02$ ;  $n = 0.7$ ;  $d_h = 2 \cdot 10^{-5}$  m;  $d_g = 3 \cdot 10^{-5}$  m:

*a*  $\alpha = 15^\circ$  (cylindrical-conical hydrocyclone); 1 –  $Fr = 30$ ; 2 –  $Fr = 40$ ; 3 –  $Fr = 50$ ; 4 –  $Fr = 60$ ; 5 –  $Fr = 70$ ; 6 –  $Fr = 80$ ;

*b*  $\alpha = 0^\circ$  (cylindrical hydrocyclone); 1 –  $Fr = 30$ ; 2 –  $Fr = 40$ ; 3 –  $Fr = 50$ ; 4 –  $Fr = 60$ ; 5 –  $Fr = 70$

На рис. 3, *a*, *b* приведены те же зависимости, что на рис. 2, для значения числа пластичности  $Pl = 0,085$ . Из сравнения данных, приведенных на рис. 3, *a* и рис. 3, *b*, следует, что остаточная концентрация частиц твердой фазы  $S$  при  $Pl = 0,085$  ниже в выходном сечении цилиндрического гидроциклона вследствие снижения затухания окружающей составляющей скорости жидкости в осевом направлении при увеличении аномалии неньютоновских свойств (росте числа  $Pl$ ) [9, 10], что приводит к увеличению радиальных составляющих скорости частиц твердой фазы  $V_h$  и пузырьков газа  $V_g$ , росту кинетического коэффициента флотации  $K$  и снижению остаточной концентрации частиц твердой фазы  $S$ .

Из анализа данных, представленных на рис. 3, *a*, *b*, следует, что влияние числа  $Fr$  (фактора разделения) на остаточную концентрацию частиц твердой фазы  $S$  является более значительным для цилиндрического гидроциклона, что объясняется более существенным возрастанием окружающей составляющей скорости дисперсионной среды  $\Theta_l$  в нижней конической части корпуса гидроциклона.

Из сравнения данных, приведенных на рис. 2, *a* и рис. 3, *a*, следует, что низкая остаточная концентрация частиц твердой фазы  $S$  в цилиндрическом гидроциклоне при высоких значениях числа пластичности  $Pl$  и предельного напряжения сдвига  $\tau_0$  наблюдается только при больших значениях

числа  $Fr$  (фактора разделения), так как возрастание числа  $Fr$  приводит к увеличению толщины пленки жидкости, особенно в нижней конической части корпуса [9, 10] (при высоких значениях числа пластичности  $Pl$  толщина пленки меньше), возрастанию вследствие этого пути, проходимого частицами твердой фазы в жидкости, числа их столкновений с пузырьками газа и соответствующего снижения остаточной концентрации частиц твердой фазы  $S$ . Следовательно, при разделении в цилиндрико-коническом гидроциклоне сред, имеющих большое предельное напряжение сдвига  $\tau_0$ , для достижения минимальной остаточной концентрации частиц твердой фазы  $S$  необходимо проведение процесса при высоких значениях числа  $Fr$  ( $Fr = 70 \dots 90$ ).

При разделении в цилиндрическом гидроциклоне (рис. 2, *b*, рис. 3, *b*) меньшая остаточная концентрация частиц твердой фазы  $S$  наблюдается при высоких значениях числа пластичности  $Pl$  и предельного напряжения сдвига  $\tau_0$  (см. рис. 2, *b*) вследствие снижения затухания окружной составляющей скорости жидкости в осевом направлении при увеличении аномалии неньютоновских свойств (росте числа  $Pl$ ) [9, 10], что приводит к увеличению радиальных составляющих скорости частиц твердой фазы  $V_h$  и пузырьков газа  $V_g$ , росту кинетического коэффициента флотации  $K$  и снижению остаточной концентрации частиц твердой фазы  $S$ . Следовательно, при разделении сред, имеющих большое предельное напряжение сдвига  $\tau_0$ , для достижения минимальной остаточной концентрации частиц твердой фазы  $S$  необходимо проводить процесс в цилиндрическом гидроциклоне.

### Заключение

1. Математическая модель разделения неоднородных жидких систем в поле центробежных сил адаптирована к процессу очистки вязкопластических сред напорной флотацией в гидроциклонах различных конструкций.

2. С использованием математической модели разделения суспензий с вязкопластической дисперсионной средой напорной флотацией в гидроциклоне установлено влияние фактора разделения при различных значениях числа пластичности на остаточную концентрацию частиц твердой фазы на выходе из гидроциклона для аппаратов различной конструкции.

3. Исходя из необходимости достижения минимальной остаточной концентрации частиц твердой фазы на выходе из гидроциклона, установлено, что для сред с высокими значениями числа пластичности и предельного напряжения сдвига целесообразно проведение процесса разделения напорной флотацией в цилиндрических гидроциклонах или в цилиндрикоконических гидроциклонах только при высоких значениях фактора разделения ( $Fr = 70 \dots 90$ ). Для сред с низкими значениями числа пластичности и предельного напряжения сдвига целесообразно использование цилиндрикоконических гидроциклонов.

4. Полученные результаты могут использоваться при моделировании разделения вязкопластических сред напорной флотацией в гидроциклонах и являются основой для управления процессами эксплуатации гидроциклонов-флотаторов.

### Список источников

1. Башаров М.М. Сергеева О.А. Устройство и расчет гидроциклонов : учеб. пособие / под ред. А.Г. Лаптева. Казань : Вестфалика, 2012. 92 с.
2. Лагуткин М.Г., Климов А.П. Поведение газовых пузырей в гидроциклоне // Теоретические основы химической технологии. 1993. Т. 27, № 5. С. 468–472.
3. Диков В.А., Суханов Д.Е. Исследование возможности применения гидроциклонов для центробежно-флотационного обогащения калийсодержащих руд // Инженерный вестник Дона. 2013. Т. 2, № 4 (27). С. 23–26.
4. Каратаев О.Р., Шамсутдинова З.Р. Моделирование сепарационных процессов в гидроциклонах-флотаторах // Вестник технологического университета. 2015. Т. 18, № 16. С. 117–119.
5. Щукина А.Г. Математическое моделирование процессов разделения неоднородных систем с неньютоновской дисперсионной средой : автореф. дис. ... канд. техн. наук. Волгоград, 1996. 16 с.
6. Орлов С.Л. О столкновении частиц и пузырьков при пневматической флотации в центробежном поле // Развитие методов механической и биологической очистки сточных вод : сб. науч. тр. / под ред. В. Н. Швецова. М. : Изд-во ВНИИ ВОДГЕО, 1982. С. 131–136.

7. Сотскова Т.З., Баженов Ю.Ф., Голик Г.А. Взаимодействие мелких частиц с газовыми пузырьками при напорной флотации // Химия и технология воды. 1984. Т. 6, № 1. С. 17–22.
8. Кутепов А.М., Лагуткин М.Г., Павловский Г.В., Муштаев В.И. Разделение дисперсных систем в гидроциклонах с дополнительным вводом диспергированного газа // Теоретические основы химической технологии. 1999. Т. 33, № 5. С. 571–577.
9. Яблонский В.О. Влияние конструктивных параметров гидроциклона на гидродинамику нелинейно-вязкопластической жидкости // Химическое и нефтегазовое машиностроение. 2015. № 8. С. 6–10.
10. Яблонский В.О. Гидродинамика нелинейно-вязкопластической жидкости в цилиндрическом гидроциклоне // Журнал прикладной химии. 2013. Т. 86, вып. 8. С. 1236–1243.
11. Яблонский В.О. Моделирование извлечения газа из реологически сложных сред в поле центробежных сил в гидроциклоне // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2021. № 57. С. 53–61.
12. Вайнштейн И.А. Об уравнениях кинетики разделения суспензий // Инженерно-физический журнал. 1983. Т. 45, № 4. С. 602–608.
13. Acary-Robert C., Fernández-Nieto E.D., Narbona-Reina G., Vigneaux P. Viscoplastic Free-Surface Flows: The Herschel-Bulkley Case // Proc. 7th International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD7), Big Island, Hawaii, July 9–13, 2012. P. 1–15.
14. Dyakowski T., Hornung G., Williams R.A. Simulation of non-newtonian flow in a hydrocyclone // Chem. Eng. Res. Des. A. 1994. V. 72 (4). P. 520–523.
15. Дерягин Б.В., Духин С.С., Рулев Н.Н. Микрофлотация: водоочистка, обогащение. М. : Химия, 1986. 112 с.
16. Тябин Н.В., Дахина Г.Л., Голованчиков А.Б., Мамаков А.А. Расчет аппаратов идеального вытеснения для разделения тонких суспензий электролитическими газами // Теоретические основы химической технологии. 1979. Т. 13, № 6. С. 880–884.
17. Acharya A.R., Mashelkar A.J. Ulbrecht J. Flow of inelastic and viscoelastic fluids past a sphere // RheologicaActa. 1976. V. 15 (9). P. 454–463.
18. Соколов В.И. Центрифугирование. М. : Химия, 1976. 408 с.

#### References

1. Basharov, M.M. & Sergeeva, O.A. (2012) *Ustroystvo i raschet gidrotsiklonov* [Device and Calculation of Hydrocyclones]. Kazan: Vestfalika.
2. Lagutkin, M.G. & Klimov, A.P. (1993) Behavior of gas bubbles in a hydrocyclone. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii – Theoretical Foundations of Chemical Technology*. 27(5). pp. 468–472.
3. Dikov, V.A. & Sukhanov, D.E. (2013) Investigation of the possibility of using hydrocyclones for centrifugal flotation enrichment of potassium-containing ores. *Inzhenernyy vestnik Dona – Engineering Journal of Don*. 2-4(27). pp. 23–26.
4. Karataev, O.R. & Shamsutdinova, Z.R. (2015) Modeling of separation processes in hydrocyclones-flotators. *Vestnik tekhnologicheskogo universiteta – Herald of Technological University*. 18(16). pp. 117–119.
5. Shchukina, A.G. (1996) *Matematicheskoe modelirovanie protsessov razdeleniya neodnorodnykh sistem s nen'yutonovskoy disperсионной средой* [Mathematical modeling of the separation processes of inhomogeneous systems with a non-Newtonian dispersion medium]. Abstract Engineering Cand. Diss. Volgograd.
6. Orlov, S.L. (1982) O stolknovenii chastits i puzyr'kov pri pnevmaticheskoy flotatsii v tsentrobezhnom pole [On the collision of particles and bubbles during pneumatic flotation in a centrifugal field]. In: Shvetsov, V.N. (ed.) *Razvitiye metodov mekhanicheskoy i biologicheskoy ochistki stochnykh vod* [Development of methods of mechanical and biological wastewater treatment]. Moscow: VNI VODGEO. pp. 131–136.
7. Sotskova, T.Z., Bazhenov, Yu.F. & Golik, G.A. (1984) Interaction of small particles with gas bubbles during pressure flotation. *Khimiya i tekhnologiya vody – Chemistry and Technology of Water*. 6(1). pp. 17–22.
8. Kutepov, A.M., Lagutkin, M.G., Pavlovsky, G.V. & Mushtaev, V.I. (1999) Separation of dispersed systems in hydrocyclones with additional input of dispersed gas. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii – Theoretical Foundations of Chemical Technology*. 33(5). pp. 571–577.
9. Yablonskii, V.O. (2015) Influence of design parameters of a hydrocyclone on the hydrodynamics of a nonlinear viscoplastic fluid. *Khimicheskoe i neftegazovoe mashinostroenie – Chemical and Oil and Gas Engineering*. 8. pp. 6–10.
10. Yablonskii, V.O. (2013) Hydrodynamics of a nonlinear viscoplastic fluid in a cylindrical hydrocyclone. *Zhurnal prikladnoy khimii – Russian Journal of Applied Chemistry*. 86(8). pp. 1236–1243.
11. Yablonskii, V.O. (2021) Modeling of gas extraction from rheologically complex media in the field of centrifugal forces in a hydrocyclone. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 57. pp. 53–61. DOI: 10.17223/19988605/57/6
12. Weinstein, I.A. (1983) On the equations of the kinetics of suspension separation. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal – Engineering and Physics Journal*. 45(4). pp. 602–608.
13. Acary-Robert, C., Fernández-Nieto, E.D., Narbona-Reina, G. & Vigneaux, P. (2012) Viscoplastic Free-Surface Flows: The Herschel-Bulkley Case. *Proceedings 7th International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD7)*. Big Island, Hawaii. July 9-13. pp. 1–15.

14. Dyakowski, T., Hornung, G. & Williams, R.A. (1994) Simulation of non-newtonian flow in a hydrocyclone. *Chemical Engineering Research and Design*. A. 72(4). pp. 520–523.
15. Deryagin, B.V., Dukhin, S.S. & Rulev, N.N. (1986) *Mikroflotatsiya: vodoочистка, obogashchenie* [Microflotation: Water treatment, enrichment]. Moscow: Chemistry.
16. Tyabin, N.V., Dakhina, G.L., Golovanchikov, A.B. & Mamakov, A.A. (1979) Calculation of ideal displacement devices for separation of thin suspensions by electrolytic gases. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii – Theoretical Foundations of Chemical Technology*. 13(6). pp. 880–884.
17. Acharya, A.R., Mashelkar, A.J. & Ulbrecht, J. (1976) Flow of inelastic and viscoelastic fluids past a sphere. *Rheologica Acta*. 15(9). pp. 454–463.
18. Sokolov, V.I. (1976) *Tsentrifugirovanie* [Centrifugation]. Moscow: Khimiya.

***Информация об авторе:***

**Яблонский Владимир Олегович** – кандидат технических наук, доцент кафедры «Процессы и аппараты химических и пищевых производств» Волгоградского государственного технического университета (Волгоград, Россия). E-mail: everest58@mail.ru

***Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.***

***Information about the author:***

**Yablonskii Vladimir O.** (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department “Processes and Devices of Chemical and Food Production” of Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation). E-mail: everest58@mail.ru

***The author declares no conflicts of interests.***

*Поступила в редакцию 21.07.2023; принята к публикации 08.12.2023*

*Received 21.07.2023; accepted for publication 08.12.2023*

## ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

## DATA PROCESSING

Научная статья

УДК 519.718:004.722

doi: 10.17223/19988605/65/6

**Анализ надежности телекоммуникационных сетей, поддерживающих механизмы защитного переключения и восстановления для одного основного маршрута**

Кирилл Александрович Батенков<sup>1</sup>, Александр Борисович Фокин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, Россия, [pustur@yandex.ru](mailto:pustur@yandex.ru)

<sup>2</sup> Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации, Орел, Россия, [tatarin57ru@mail.ru](mailto:tatarin57ru@mail.ru)

**Аннотация.** Представлен подход к анализу надежности телекоммуникационных сетей, поддерживающих механизмы обеспечения отказоустойчивости. Для схем защитного переключения  $1:n$  и  $1+1$  показан вариант формирования маршрутов, используемых для дальнейших расчетов показателя надежности. Указывается, что для механизма восстановления целесообразно рассматривать весь спектр маршрутов исходного графа в качестве резервирующих, причем условие их независимости не оказывается критическим. На примере магистральной сети показано, что использование механизмов обеспечения отказоустойчивости для случая одного требуемого маршрута передачи демонстрирует существенный рост надежности.

**Ключевые слова:** сеть связи; граф; вероятность связности; механизмы обеспечения отказоустойчивости; защитное переключение; восстановление

**Для цитирования:** Батенков К.А., Фокин А.Б. Анализ надежности телекоммуникационных сетей, поддерживающих механизмы защитного переключения и восстановления для одного основного маршрута // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 65. С. 58–68. doi: 10.17223/19988605/65/6

Original article

doi: 10.17223/19988605/65/6

**Reliability analysis of telecommunication networks supporting protective switching and recovery mechanisms for one main route**

Kirill A. Batenkov<sup>1</sup>, Aleksandr B. Fokin<sup>2</sup>

<sup>1</sup> MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia, [pustur@yandex.ru](mailto:pustur@yandex.ru)

<sup>2</sup> Academy of the Federal Guard Service of Russian Federation, Orel, Russia, [tatarin57ru@mail.ru](mailto:tatarin57ru@mail.ru)

**Abstract.** The paper presents an approach to analyzing the reliability of telecommunication networks that support fault tolerance mechanisms. For protective switching schemes  $1:n$  and  $1+1$ , a variant of forming routes used for further calculations of the reliability indicator is shown. It is indicated that for the recovery mechanism, it is advisable to consider the entire range of routes of the original graph as redundant, and the condition of their independence does not turn out to be critical. Using the example of a backbone network, it is shown that the use of fault tolerance mechanisms for the case of one required transmission route demonstrates a significant increase in reliability.

**Keywords:** communication network; graph; connectivity probability; fault tolerance mechanisms; protective switching; recovery.

**For citation:** Batenkov, K.A., Fokin, A.B. (2023) Reliability analysis of telecommunication networks supporting protective switching and recovery mechanisms for one main route. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnik i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 65. pp. 58–68. doi: 10.17223/19988605/65/6

## Введение

Хорошо известно, что соглашение об уровне обслуживания (Service Level Agreement; SLA) является важным инструментом выстраивания разумных отношений между абонентами и операторами телекоммуникационных сетей [1–3]. В соответствии с данным соглашением обе стороны достигают определенного понимания о предоставляемой услуге, ее качестве, ответственности, приоритетности и других факторах.

В базовую структуру соглашения об уровне обслуживания для любой услуги связи входит девять разделов, включающих раздел об уровне обслуживания, в котором обязательно приводится информация о показателях качества услуги и гарантируемых значениях абоненту оператором [3]. При этом наиболее значимыми оказываются показатели, характеризующие готовность услуги. Допускается включение как прямых показателей, например времени простоя или наработки на отказ, так и косвенных – коэффициента готовности, являющегося наиболее часто используемым показателем надежности [1, 2, 4].

В зависимости от необходимости резервирования ресурсов для устранения последствий аварий механизмы обеспечения отказоустойчивости (резервирования) в телекоммуникационных сетях принято делить на два класса: защитное переключение и восстановление [5]. В сравнении с защитным переключением восстановление имеет больший коэффициент использования ресурсов и низкую вероятность блокировки, поскольку не требует резервирования пропускной способности до момента появления сбоя. Защитное восстановление, в свою очередь, подразделяют на реактивное и превентивное, первое из них подразумевает расчет резервного пути после возникновения аварийной ситуации, а последнее – перед ней.

С точки зрения описания аналитических моделей телекоммуникационных сетей, поддерживающих механизмы обеспечения обслуживания, большинство из них основывается на различных вариациях обобщенных моделей случайных графов [6, 7]. В качестве показателей качества анализируемых механизмов обеспечения отказоустойчивости используются различные параметры, в большинстве случаев надежности, начиная с времен восстановления [9], наработки на отказ, восстановления [10, 11], вероятностей отказа [12, 13], восстановления [8, 7, 14] и заканчивая операционными затратами [6]. В настоящей работе используется коэффициент готовности, который с юридической точки зрения обоснован рекомендацией отечественного ГОСТа [15], а с математической является оценкой вероятности связности случайного графа между заданной парой вершин [16].

Принципиальным моментом аналитического моделирования подобных сетей оказывается наличие [8] или отсутствие [7] допущения о независимости резервируемых и резервирующих участков сети. Следует заметить, что в реальных телекоммуникационных сетях данное допущение выполняется достаточно редко [8], поскольку резервирующие участки чаще всего коррелированы вследствие наличия общих элементов (узлов или линий). В результате модели с ограничением на независимость приводят к значительным ошибкам при оценке показателей качества. В то же время рассмотрение всех возможных взаимосвязей у резервирующих участков требует создания алгоритмов с существенной вычислительной сложностью. В настоящей работе сделана попытка аналитического моделирования телекоммуникационных сетей, поддерживающих механизмы обеспечения обслуживания, учитывающего корреляции резервирующих участков на основе их перечисления [17] и расчета событий связности методом многопеременной инверсии [18].

## 1. Надежность сети и ее элементов

Наиболее подходящей моделью для оценки надежности предоставляемой услуги оказывается случайная графовая модель [18–20], строящаяся на основе контура обслуживания – совокупности технических средств, участвующих в оказании данной услуги [1, 21]. Понятно, что в данной постановке оценка надежности услуги отталкивается от надежности составляющих телекоммуникационную сеть (граф) элементов – узлов (вершин) и линий связи (ребер).

Коэффициенты готовности узлов и линий определяются конструктивными особенностями среды распространения и их организующих технических средств [22, 23]. Однако обычно детального описания подобных особенностей у оператора просто нет, и используют упрощенные модели.

Используемое сетевое оборудование, такое как оптические кросс-коннекторы и мультиплексоры ввода-вывода, состоит из значительного числа различных элементов, каждый из которых характеризуется собственными средними наработкой на отказ и временем восстановления [23, 24]. Средняя наработка на отказ  $T_0$  сетевого оборудования имеет размерность времени или количества отказов в единицу времени и обычно принимается равной  $10^9$  часов, или примерно 114–155 лет. Среднее же время восстановления  $T_r$  выражается в часах. При этом коэффициент готовности соответствует вероятности связности соответствующего узла или линии  $p = 1 - \frac{T_r}{T_0}$ .

## 2. Механизмы обеспечения отказоустойчивости

Коэффициент готовности отдельной линии связи рассчитывается достаточно просто на основе модели последовательного соединения элементов. Однако в реальных телекоммуникационных сетях, для которых характерно наличие альтернативных маршрутов, ситуация существенно усложняется. При этом немаловажную роль в итоговой надежности соединений играют механизмы обеспечения отказоустойчивости, или избыточные схемы.

Отметим, что в настоящей работе рассматривается влияние характеристик телекоммуникационной сети на ее итоговую надежность с позиции наиболее часто используемого показателя – коэффициента готовности. Вопросы, связанные с оперативностью переключения на резервные каналы требуют дальнейшего уточнения. В связи с этим целесообразно механизмы обеспечения отказоустойчивости подразделять на два самостоятельных класса: защитное переключение (protection) и восстановление (restoration) [25, 26]. При этом выделяют четыре архитектуры защитного переключения: 1:1, 1:n, (1:1)<sup>n</sup>, m:n, а также шесть разновидностей защищаемых участков элементов сети: линия, узел, маршрут, сегмент, кольцо,  $p$ -цикл [24].

Защита линии и узла выполняется интуитивно понятным образом путем создания резервирующего участка, начало и конец которого совпадают с граничными с ними элементами, узлами и ребрами соответственно. Резервирование маршрута осуществляется от источника до стока. Защита сегмента, включающего участок из нескольких элементов (ребер и узлов), может выполняться как с наложением, так и без. Случай кольцевого резервирования подразумевает создание циклов при построении топологии сети, позволяющих формировать альтернативные маршруты, имеющие противоположную по кольцу направленность передачи трафика. Суть механизма переключения на основе  $p$ -циклов заключается в выделении цикла на высокосвязной структуре сети с дополнительной пропускной способностью, требуемой для устранения отказа. Сочетание преимуществ оперативности восстановления кольцевой сети и высокой пропускной способности разветвленной сети приводит к широкой востребованности механизмов восстановления на основе  $p$ -циклов. При этом ключевым отличием подобных схем оказывается способность  $p$ -цикла защищать соединения, элементы которых не включены непосредственно в сам  $p$ -цикл.

Одним из ключевых отличий схемы, основанной на кольце, от схемы  $p$ -цикла является способность  $p$ -цикла защищать соединения, которые не находятся на кольце  $p$ -цикла. Возможность защиты двух каналов для каждого резервного канала, назначенного  $p$ -циклу, позволяет достичь эффективности пропускной способности, подобной сетке. Эта особенность придает  $p$ -циклу дополнительную эффективность по сравнению со схемами, основанными на кольцах [4]. Еще одна недооцененная особенность  $p$ -цикла заключается в том, что рабочие пути могут свободно маршрутизироваться по сетевому графу и не ограничены маршрутами с кольцевыми ограничениями.

Каждая из разновидностей обладает своими особенностями с позиции технической реализации, однако с точки зрения анализа надежности на основе случайных графов достаточно рассматривать защищаемый участок как некоторый набор вершин и ребер графа, использование которых допустимо

лишь на основном маршруте. При этом использование колец или  $p$ -циклов также сводится к подобным типам резервирования путем несложных преобразований.

### 3. Архитектура маршрутов передачи информации

Элементы маршрута, как основные, так и резервирующие, целесообразно разбить на три группы (рис. 1). Первая указывает на постоянные неизменяемые части путей и задается как вектор  $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=1, \dots, l+v}$  элементов исходного графа, где  $s_i = 1$  – если  $i$ -й элемент графа (ребро или вершина) содержится в данном пути, и  $s_i = 0$  – если нет,  $l$  – число ребер в графе,  $v$  – число вершин в графе. Вторая группа идентифицирует резервируемые участки и представляется в форме матрицы  $\mathbf{S} = \{s_{i,j}\}_{i=1, \dots, l+v, j=1, \dots, n}$ , каждый столбец которой эквивалентен одному из  $n$  резервируемых участков, где аналогично  $s_{i,j} = 1$  – если  $i$ -й элемент содержится в  $j$ -м пути, и  $s_{i,j} = 0$  – если нет. Третья группа указывает на резервирующие участки и представляется в форме матрицы  $\mathbf{T} = \{t_{i,j}\}_{i=1, \dots, l+v, j=1, \dots, m}$ , каждый столбец которой эквивалентен одному из  $m$  резервирующих участков, где также  $t_{i,j} = 1$  – если  $i$ -й элемент содержится в  $j$ -м пути, и  $t_{i,j} = 0$  – если нет. Каждый из резервируемых и резервирующих участков формируется на основе заданных предпочтений и обычно направлен на увеличение результирующей надежности, хотя возможно использование и других правил.

Так, в общем случае для архитектур защитного переключения целесообразно в качестве основы рассматривать в общем случае  $n$  основных маршрутов передачи информации, которые обычно задаются в форме простых цепей с независимыми защищаемыми участками, обладающими максимальными коэффициентами готовности. Тогда матрица резервируемых участков выбирается исходя из максимальной величины коэффициента готовности между заданными элементами исходного графа с учетом их независимости и невключенными в фиксированную часть маршрута:

$$\mathbf{s}^{(1)} = \left\{ \mathbf{W}^{(j)}; \max[\mathbf{s} + \mathbf{W}^{(j)}] = 1, \max_{j=1, \dots, n} \prod_{i=1}^{l+v} p_i w_{i,j} \right\},$$

$$\mathbf{s}^{(i)} = \left\{ \mathbf{W}^{(j)}; \max[\mathbf{s} + \text{sign}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{1}_{i-1}) + \mathbf{W}^{(j)}] = 1, \max_{j=1, \dots, n} \prod_{i=1}^{l+v} p_i w_{i,j} \right\}, i = 2, \dots, n,$$

где  $\mathbf{W}^{(j)}$  –  $j$ -й столбец матрицы  $\mathbf{W}$ ;  $\mathbf{W} = \{w_{i,j}\}_{i=1, \dots, l+v, j=1, \dots, n}$  – матрица путей между истоком и стоком резервируемых участков;  $w_{i,j} = 1$  – если  $i$ -й элемент содержится в  $j$ -м пути, и  $w_{i,j} = 0$  – если нет;  $s$  – общее число путей;  $\mathbf{p} = \{p_i\}_{i=1, \dots, l+v}$  – вектор вероятностей связности (работоспособности) ребер и вершин;  $p_i$  – вероятность связности (коэффициент готовности)  $i$ -го элемента;  $\mathbf{1}_i = \{1\}_{j=1, \dots, i}$  – единичный вектор длины  $i$ .

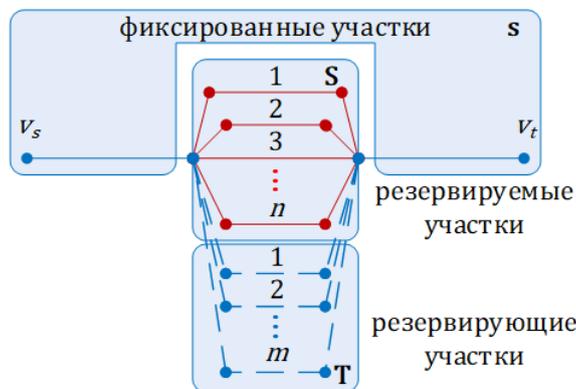


Рис. 1. Архитектура маршрутов передачи информации с механизмами обеспечения отказоустойчивости  
 Fig. 1. Architecture of information transmission routes with fault tolerance mechanisms

Непосредственно же основные маршруты представляются в виде матрицы путей  $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{1}_n^T + \mathbf{S},$$

где  $\mathbf{T}$  – оператор транспонирования.

Здесь каждый столбец  $\mathbf{S}^{(i)}$  матрицы резервируемых участков формируется из такого столбца  $\mathbf{W}^{(j)}$  матрицы путей, который одновременно не имеет повторных элементов в уже использованных предыдущих основных путях, что проверяется общим условием  $\max[\mathbf{s} + \text{sign}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{1}_{i-1}) + \mathbf{W}^{(j)}]$ , и имеет максимальную вероятность связности (коэффициент готовности) из возможных альтернативных путей, задаваемую выражением  $\max_{j=1, \dots, S} \prod_{i=1}^{l+v} p_i w_{i,j}$ .

Аналогично в общем случае  $m$  маршрутов, содержащих резервируемые участки, также задаются в форме простых цепей с независимыми резервируемыми и резервирующими участками, обладающими максимальными коэффициентами готовности. Тогда матрица резервирующих участков выбирается исходя из максимальной величины коэффициента готовности между заданными элементами исходного графа с учетом их независимости и невключенными в фиксированную часть маршрута и резервируемые участки

$$\mathbf{T}^{(1)} = \left\{ \mathbf{W}^{(j)} : \max[\text{sign}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{1}_n) + \mathbf{W}^{(j)}] = 1, \max_{j=1, \dots, S} \prod_{i=1}^{l+v} p_i w_{i,j} \right\},$$

$$\mathbf{T}^{(i)} = \left\{ \mathbf{W}^{(j)} : \max[\text{sign}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{1}_n) + \text{sign}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{1}_{i-1}) + \mathbf{W}^{(j)}] = 1, \max_{j=1, \dots, S} \prod_{i=1}^{l+v} p_i w_{i,j} \right\}, i = 2, \dots, m.$$

Здесь каждый столбец  $\mathbf{T}^{(i)}$  матрицы резервирующих участков формируется из такого столбца  $\mathbf{W}^{(j)}$  матрицы путей, который одновременно не имеет повторных элементов в уже использованных предыдущих основных и резервных путях, что проверяется общим условием  $\max[\mathbf{s} + \text{sign}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{1}_{i-1}) + \mathbf{W}^{(j)}]$ , и имеет максимальную вероятность связности (коэффициент готовности) из возможных альтернативных путей, задаваемую выражением  $\max_{j=1, \dots, S} \prod_{i=1}^{l+v} p_i w_{i,j}$ .

Непосредственно же резервные маршруты представляются также в виде матрицы путей  $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R} = \mathbf{s} \mathbf{1}_m^T + \mathbf{T}.$$

#### 4. Архитектура защитного переключения 1 + 1

Для схемы 1 + 1 (рис. 2) исходный основной путь дополняется резервным с теми же самыми истоком  $v_s$  и стоком  $v_t$ , не имеющим в своем составе элементов защищаемого участка основного пути и обладающим максимальным коэффициентом готовности из всех возможных альтернатив. Таким образом, матрицы резервируемых  $\mathbf{S}$  и резервирующих  $\mathbf{T}$  участков редуцируются в векторы, а матрица простых цепей  $\mathbf{R}$  содержит два столбца, первый  $\mathbf{R}^{(1)}$  из которых указывает на основной маршрут, а второй  $\mathbf{R}^{(2)}$  – на резервирующий путь ( $\mathbf{R}^{(1)} = \mathbf{s} + \mathbf{S}$ ,  $\mathbf{R}^{(2)} = \mathbf{s} + \mathbf{T}$ ).

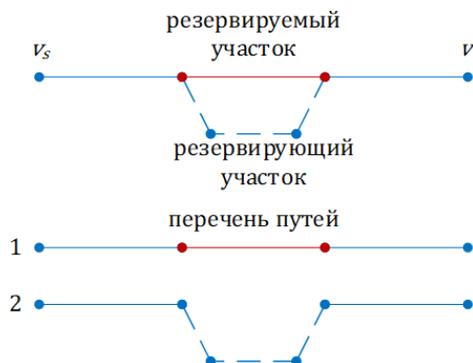


Рис. 2. Архитектура защитного переключения 1 + 1 и перечень путей  
Fig. 2. 1 + 1 protective switching architecture and a list of paths

### 5. Архитектура защитного переключения 1:n

Для схемы 1:n (рис. 3)  $n$  исходных основных путей дополняются одним резервным с теми же самыми истоком  $v_s$  и стоком  $v_t$ , не имеющим в своем составе элементов основных путей и обладающим максимальным коэффициентом готовности из всех возможных альтернатив.

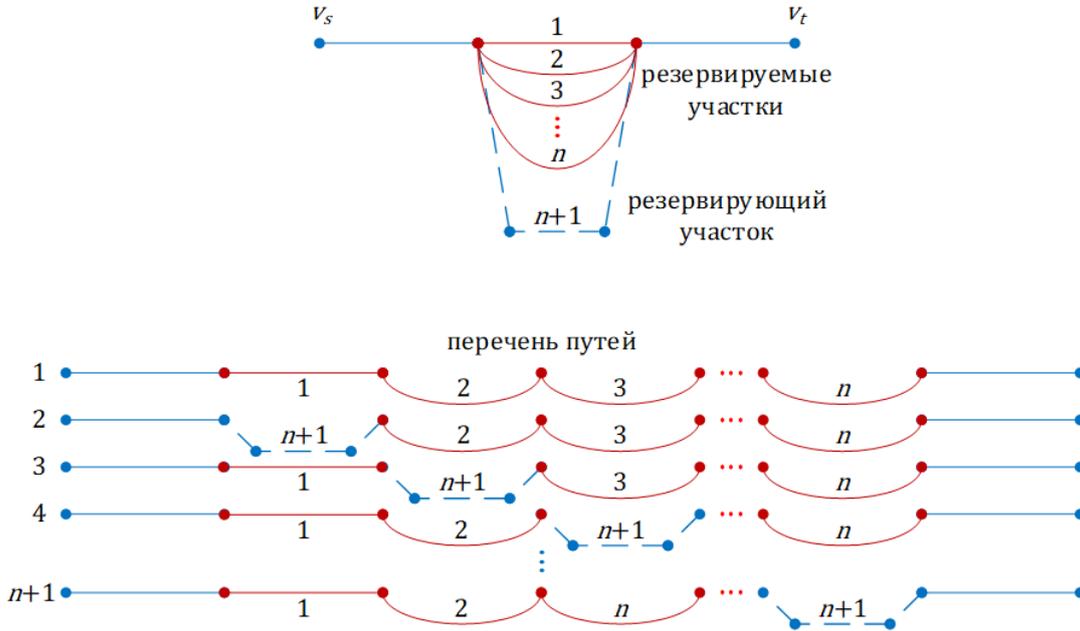


Рис. 3. Архитектура защитного переключения 1:n и перечень путей  
 Fig. 3. 1:n protective switching architecture and a list of paths

Таким образом, матрица  $\mathbf{S}$  резервируемых участков содержит  $n$  столбцов, матрица  $\mathbf{T}$  резервирующих участков редуцируется в вектор, а матрица простых цепей  $\mathbf{R}$ , содержит  $n + 1$  столбец. Первый столбец  $\mathbf{R}^{(1)}$  эквивалентен последовательному соединению фиксированного и всех резервируемых участков, а  $n$  остальных  $\mathbf{R}^{(i)}, i = 2, \dots, n + 1$ , – такому же соединению, за исключением замены одного из резервируемых участков на резервирующий:

$$\mathbf{R}^{(1)} = \mathbf{s} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{1}_n,$$

$$\mathbf{R}^{(i)} = \mathbf{R}^{(1)} - \mathbf{S}^{(i-1)} + \mathbf{T}, i = 2, \dots, n + 1.$$

### 6. Архитектура восстановления

Механизмы восстановления (restoration) в отличие от защитного переключения (protection) не используют предварительно настроенных резервирующих маршрутов, а следовательно, подразумевают необходимость отработки протоколов сигнализации после возникшего повреждения. Однако, несмотря на данный недостаток, механизмы восстановления оказываются более гибкими вследствие их менее регламентированной с точки зрения планирования маршрутов природой. В результате на реальной сети любой допустимый путь является потенциальным вариантом для организации резервирующего участка. Таким образом, в соответствии с требованиями к минимальному количеству альтернативных маршрутов, по сути, эквивалентному числу  $n$  резервируемых путей в механизме защитного переключения, целесообразно рассматривать весь спектр маршрутов исходного графа в качестве резервирующих, причем условие их независимости не оказывается критическим.

Основываясь на архитектуре маршрутов передачи информации (см. рис. 1), целесообразно из всех допустимых путей выделять те, которые, с одной стороны, включают фиксированные участки, а с другой – содержат  $n$  независимых друг от друга и от фиксированных участков путей, в данном случае неважно, резервируемых или резервирующих. Следует подчеркнуть, что здесь выбор альтерна-

тивных маршрутов произволен с точки зрения надежности. В результате первоначально необходимо проредить весь набор исходных путей, оставив только независимые от фиксированных участков путей

$$\mathbf{S}^{(1)} = \left\{ \mathbf{W}^{(j)} : \min_{j=1, \dots, S} j, \max[\mathbf{s} + \mathbf{W}^{(j)}] = 1 \right\},$$

$$\mathbf{S}^{(i)} = \left\{ \mathbf{W}^{(j)} : \min_{j=1, \dots, S} j, \max[\mathbf{s} + \mathbf{W}^{(j)}] = 1, \mathbf{W}^{(j)} \neq \mathbf{S}^{(k)}, k = 1, \dots, i - 1 \right\}, i = 2, \dots$$

На основе матрицы  $\mathbf{S}$  независимых альтернативных участков формируется матрица путей, содержащая набор столбцов, каждый из которых эквивалентен подграфу, включающему фиксированные участки и  $n$  альтернативных независимых маршрутов

$$\mathbf{R} = \mathbf{s} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{C}_{n, \text{cols}(\mathbf{S})} \cdot \mathbf{C}_0,$$

где  $\mathbf{C}_0$  – матрица редукции размером  $C_{\text{cols}(\mathbf{S})}^n \times k$ , элементы которой равны нулю, за исключением единичных элементов на строках с номерами, равными номерам ненулевых столбцов матрицы  $\mathbf{S} \mathbf{C}_{n, \text{cols}(\mathbf{S})}$  и последовательно упорядоченных номеров столбцов, начиная с первого ( $k$  – количество ненулевых столбцов матрицы  $\mathbf{S} \mathbf{C}_{n, \text{cols}(\mathbf{S})}$ ).

### 7. Пример анализа надежности магистральной сети

Кабельная структура магистральной сети юга России (рис. 4) доступна на официальном сайте Международного союза электросвязи [27]. На рис. 4 также представлен пронумерованный эквивалентный граф  $G(12, 21)$ , вероятность связности которого согласно ГОСТ [15] трактуется как коэффициент готовности и характеризует надежность.

Предполагается, что на узле находится по крайней мере один кросс-коннектор или мультиплексор ввода-вывода, работающий сразу на все допустимые направления связи, а значит, коэффициент готовности любого узла  $p_v = 0,99994$ . Коэффициент готовности  $p_l$  отдельных линий связи вычисляется для волоконно-оптических систем передачи на основе протяженности, рассчитываемой по географическим координатам городов, между которыми развернута данная линия связи.

Рассчитанные параметры линий связи приведены в табл. 1.

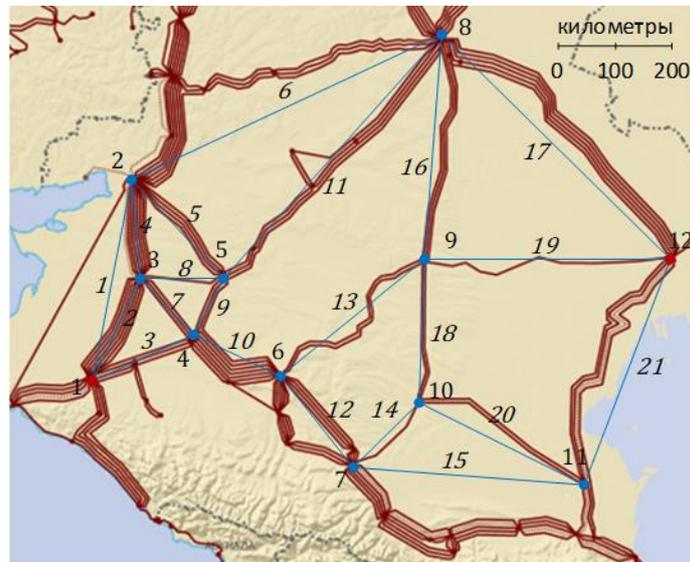


Рис. 4. Кабельная структура магистральной сети юга России  
Fig. 4. Cable structure of the backbone network of the South of Russia

В качестве механизмов обеспечения отказоустойчивости использованы все архитектуры с одним резервируемым и одним резервирующим маршрутом. Кроме того, рассмотрены все типы защищаемых участков. Результаты расчетов для направления связи от узла 1 до узла 12 в соответствии с методом многопеременной инверсии [18, 19, 20] приведены в табл. 2.

Таблица 1

## Параметры надежности линий связи

Номер линии $l$	Протяженность $d_l$ , км	Коэффициент готовности $p_l$	Номер линии $l$	Протяженность $d_l$ , км	Коэффициент готовности $p_l$	Номер линии $l$	Протяженность $d_l$ , км	Коэффициент готовности $p_l$
1	375	0,99755	8	150	0,99901	15	410	0,99729
2	200	0,99866	9	115	0,99923	16	400	0,99735
3	200	0,99866	10	110	0,99926	17	565	0,9963
4	175	0,99886	11	575	0,99624	18	265	0,99827
5	250	0,99836	12	225	0,99851	19	430	0,99717
6	600	0,99604	13	325	0,99785	20	325	0,99785
7	140	0,99908	14	165	0,99892	21	440	0,99711

Таблица 2

## Параметры надежности сети без резервирования, с защитным переключением и восстановлением

Участок	Коэффициент готовности
линия	0,99966
узел	0,99984
сегмент	0,99284
маршрут	0,99981
кольцо	0,99985
$p$ -цикл	0,99986
без резервирования	0,99266
с восстановлением	0,99889

Использование механизмов обеспечения отказоустойчивости для случая одного требуемого маршрута передачи (см. табл. 2) демонстрирует существенный рост надежности, за исключением применения защитного переключения на сегментах. Это связано, прежде всего, с особенностями топологии рассматриваемой сети. Так, наиболее надежный маршрут 1–4–6–9–12 содержит три резервируемых участка 1–4–6, 4–6–9 и 6–9–12, каждый из которых имеет резервирующие пути, пересекающиеся с резервирующими путями соседних участков, что значительно снижает защитные свойства. Например, резервный маршрут 1–2–8–12 полностью независим от основного пути, и они вместе образуют два параллельных пути от источника до стока. В случае же сегментов для участка 1–4–6 возможно использование альтернативного сегмента 1–2–8–9–6, для 4–6–9 – сегмента 4–5–8–9, а для 6–9–12 – сегмента 6–7–11–12. Поскольку первый сегмент включает линию основного маршрута, его применение неприемлемо. В результате резервирование сегментами оставляет безызбыточную линию 1–4, оказывающуюся «узким местом» анализируемой структуры. Таким образом, рассматриваемая топология сети не подразумевает наличия независимых резервирующих сегментов для отдельных участков, включающих два ребра и узел, что приводит к более низким показателям надежности даже по сравнению с резервированием маршрута из конца в конец, поскольку последнее позволяет сформировать полностью независимую альтернативу. Реализация механизмов восстановления оказывается несколько нецелесообразной вследствие незначительного прироста коэффициента готовности по сравнению даже с резервированием линий.

## Заключение

В целом можно констатировать, что механизмы повышения отказоустойчивости являются мощным средством повышения надежности сети [5, 9, 28, 29], но конкретные их реализации требуют учета как топологии телекоммуникационной сети, так и показателей надежности ее отдельных элементов, что свидетельствует о необходимости детального анализа каждого варианта организации сетевого взаимодействия. Приведенный способ анализа надежности телекоммуникационных сетей, основанный на перечислении простых цепей и расчете коэффициента готовности методом многопеременной инверсии, демонстрирует широкие возможности как с точки зрения учета конкретных ме-

ханизмов обеспечения отказоустойчивости, числа элементов в рассматриваемой сети, так и с позиции учета взаимосвязи резервирующих участков.

В работе на примере показан вариант формирования резервирующих маршрутов (участков) для различных схем защитного переключения –  $1:n$  и  $1 + 1$ . Для механизма восстановления указано, что требуется анализ всего спектра допустимых резервирующих маршрутов. На примере магистральной сети показано, что использование механизмов защитного переключения для случая одного требуемого маршрута передачи демонстрирует существенный рост надежности, сопоставимый с вариантом использования защитного восстановления.

#### Список источников

1. Нетес В.А. Соглашение об уровне обслуживания и надежность // Надежность. 2017. Т. 17, № 4. С. 27–30.
2. Rec. E. 860. Framework of a service level agreement. 2002–06. Geneva : ITU-T, 2003. 30 p.
3. ГОСТ Р 55389–2012. Система национальных стандартов в области качества услуг связи. Соглашение об уровне обслуживания (SLA) : введ. 2014–01–01. М. : Стандартинформ, 2019. 12 с.
4. Батенков К.А., Батенков А.А. Анализ и синтез структур сетей связи по детерминированным показателям устойчивости // Труды СПИИРАН. 2018. № 3 (58). С. 128–159. doi: 10.15622/sp.58.6
5. Xiong Yu, Li Yu., Zhou B., Wang R., Rouskas G.N. SDN Enabled Restoration With Triggered Precomputation in Elastic Optical Inter-Datacenter Networks // J. Opt. Commun. Netw. 2018. V. 10 (1). P. 24–34.
6. Astaneh S. Heydari Sh. Multi-Failure Restoration with Minimal Flow Operations in Software Defined Networks // 11th International Conference on the Design of Reliable Communication Networks (DRCN). 2015. P. 263–266.
7. Azim M.M.A., Jiang X., Ho P.-H., Horiguchi S., Guo M. Restoration Probability Modeling for Active Restoration-Based Optical Networks with Correlation among Backup Routes // IEEE Transactions On Parallel And Distributed Systems. 2007. V. 18 (11). P. 1592–1606. doi: 10.1109/TPDS.2007.1084
8. Azim M.M.A., Jiang X., Ho P.-H., Horiguchi S. Models of Restoration Probability in WDM Networks Employing Active Restoration // J. Photonic Network Comm. 2005. V. 10 (2). P. 141–153.
9. Егунов М.М., Шувалов В.П. Резервирование и восстановление в телекоммуникационных сетях // Вестник СибГУТИ. 2012. № 2. С. 3–10.
10. Meza J., Xu T., Veeraraghavan K., Mutlu O. A Large Scale Study of Data Center Network Reliability // IMC '18. 2018, Boston, MA, USA. P. 1–15.
11. Викторова В.С., Лубков Н.В., Степанянц А.С. Надежностные модели и анализ систем с защитой // Автоматика и телемеханика. 2018. № 7. С. 117–137.
12. Birman A. Computing Approximate Blocking Probabilities for a Class of All-Optical Networks // IEEE J. Selected Areas in Comm. 1996. V. 14 (5). P. 853–857.
13. Barry R.A., Humblet P.A. Models of Blocking Probability in All-Optical Networks with and without Wavelength Changers // IEEE J. Selected Areas in Comm. 1996. V. 14 (5). P. 858–867.
14. Isyaku B., Bakar K.B.A., Nagmeldin W., Abdelmaboud A., Saeed F., Ghaleb F.A. Reliable Failure Restoration with Bayesian Congestion Aware for Software Defined Networks // CSSE. 2023. V. 46 (3). P. 3729–3748.
15. ГОСТ Р 53111–2008. Устойчивость функционирования сети связи общего пользования. Требования и методы проверки : введ. 2008–12–18. М. : Стандартинформ, 2009. 16 с.
16. Батенков К.А. Вероятность связности телекоммуникационной сети на основе приведения нескольких событий несвязности к объединению независимых событий // Информационно-управляющие системы. 2021. № 6 (115). С. 53–63. doi: 10.31799/1684-8853-2021-6-53-63
17. Udoh G., Alenoghena C., Salihu B.A. Computer Network Reliability Analysis of a Dual Ring Network: Federal University of Technology, Minna (Gidan Kwanu Campus) As a Case Study // International Conference on Information and Communication Technology and Its Applications (ICTA 2016). 2016. P. 220–226.
18. Батенков А.А., Батенков К.А., Фокин А.Б. Анализ вероятности связности телекоммуникационной сети на основе инверсий ее состояний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 59. С. 91–98. doi: 10.17223/19988605/59/10
19. Батенков К.А. Точные и граничные оценки вероятностей связности сетей связи на основе метода полного перебора типовых состояний // Труды СПИИРАН. 2019. Т. 18, № 5. С. 1093–1118.
20. Батенков К.А. Формирование сечений телекоммуникационных сетей для анализа их устойчивости с различными мерами связности // Информатика и автоматизация. 2021. Т. 20, № 2. С. 371–406.
21. Нетес В.А. Виртуализация, облачные услуги и надежность // Вестник связи. 2016. № 8. С. 7–9.
22. Wosinska L., Chen J., Larsen C.P. Fiber Access Networks: Reliability Analysis and Swedish Broadband Market // IEICE Trans. Commun. 2009. V. E92-B (10). P. 3006–3014.
23. Rec. G.911. Parameters and calculation methodologies for reliability and availability of fibre optic systems (Previously CCITT Recommendation). 1997–04. Geneva : ITU-T, 1997. 39 p.

24. Vasseur J.-P., Pickavet M., Demeester P. Network Recovery. Protection and Restoration of Optical, SONET-SDH, IP, and MPLS. San Francisco, CA : Elsevier, 2004. 542 p.
25. Сергеева Т.П., Тетёкин Н.Н. Методы повышения надежности в сетях SDN // T-Comm. 2014. V. 6. P. 53–55.
26. Rec. G.808. Terms and definitions for network protection and restoration. Amendment 1. 2018–03. Geneva : ITU-T, 2018. 20 p.
27. Infrastructure Connectivity Map / Карта инфраструктурных подключений. URL: itu.int/itu-d/tnd-map-public/ (дата обращения 10.06.2023).
28. Батенков К.А. Анализ и синтез структур сетей связи методом перебора состояний // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18, № 3. С. 300–315. doi: 10.21638/11701/spbu10.2022.301
29. Гельфман Т.Э., Пирхавка А.П. Коэффициент оперативной готовности спутниковых сетей связи // Russ. Technol. J. 2022. V. 10 (1). P. 35–40. doi: 10.32362/2500-316X-2022-10-1-35-40

## References

1. Netes, V.A. (2017) Service level agreement and reliability. *Nadezhnost' – Reliability*. 17(4). pp. 27–30. DOI: 10.21683/1729-2646-2017-17-4-27-30
2. Rec. E.860. (2003) *Framework of a service level agreement*. 2002–06. Geneva: ITU-T.
3. GOST R 55389-2012. (2019) *Sistema natsional'nykh standartov v oblasti kachestva uslug svyazi. Soglasenie ob urovne obsluzhivaniya (SLA) : vved. 2014–01–01* [The system of national standards in the field of quality of communication services. Service Level Agreement (SLA). Introduction. 2014-01-01]. Moscow: Standartinform.
4. Batenkov, K.A. & Batenkov, A.A. (2018) Analysis and synthesis of communication network structures by deterministic stability indicators. *Trudy SPIIRAN – Proceedings of SPIIRAN*. 3(58). pp. 128–159. DOI: 10.15622/sp.58.6
5. Xiong, Yu., Li Yu., Zhou, B., Wang, R. & Rouskas, G.N. (2018) SDN Enabled Restoration With Triggered Precomputation in Elastic Optical Inter-Datacenter Networks. *Journal of Optical Communications and Networking*. 10(1). pp. 24–34. DOI: 10.1364/JOCN.10.000024
6. Astaneh, S. & Heydari, Sh. (2015) Multi-Failure Restoration with Minimal Flow Operations in Software Defined Networks. *11th International Conference on the Design of Reliable Communication Networks (DRCN)*. pp. 263–266.
7. Azim, M.M.A., Jiang, X., Ho, P.-H., Horiguchi, S. & Guo, M. (2007) Restoration Probability Modeling for Active Restoration-Based Optical Networks with Correlation among Backup Routes. *IEEE Transactions On Parallel And Distributed Systems*. 18(11). pp. 1592–1606. DOI: 10.1109/TPDS.2007.1084
8. Azim, M.M.A., Jiang, X., Ho, P.-H. & Horiguchi, S. (2005) Models of Restoration Probability in WDM Networks Employing Active Restoration. *Journal of Photonic Network Communication*. 10(2). pp. 141–153.
9. Egunov, M.M. & Shuvalov, V.P. (2012) Redundancy and restoration in telecommunication networks. *Vestnik SibGUTI*. 2. pp. 3–10.
10. Meza, J., Xu T., Veeraraghavan, K. & Mutlu, O. (2018) A Large Scale Study of Data Center Network Reliability. *IMC '18*. Boston, MA, USA. pp. 1–15.
11. Viktorova, V.S., Lubkov, N.V. & Stepanyants, A.S. (2018) Reliability models and analysis of systems with protection. *Avtomatika i telemekhanika*. 7. pp. 117–137.
12. Birman, A. (1996) Computing Approximate Blocking Probabilities for a Class of All-Optical Networks. *IEEE J. Selected Areas in Comm*. 14(5). pp. 853–857.
13. Barry, R.A. & Humblet, P.A. (1996) Models of Blocking Probability in All-Optical Networks with and without Wavelength Changers. *IEEE J. Selected Areas in Comm*. 14(5). pp. 858–867.
14. Isyaku, B., Bakar, K.B.A., Nagmeldin, W., Abdelmaboud, A., Saeed F. & Ghaleb, F.A. (2023) Reliable Failure Restoration with Bayesian Congestion Aware for Software Defined Networks. *CSSE*. 46(3). pp. 3729–3748.
15. GOST R 53111-2008. (2009) *Ustoychivost' funktsionirovaniya seti svyazi obshchego pol'zovaniya. Trebovaniya i metody proverki : vved. 2008–12–18* [Stability of the functioning of the public communication network. Requirements and verification methods. Introduction. 2008-12-18]. Moscow : Standartinform.
16. Batenkov, K.A. (2021) The probability of connectivity of a telecommunication network based on the reduction of several incoherent events to the unification of independent events. *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy – Information and Control Systems*. 6(115). pp. 53–63. DOI: 10.31799/1684-8853-2021-6-53-63
17. Udoh, G., Alenoghena, C. & Salihu, B.A. (2016) Computer Network Reliability Analysis of a Dual Ring Network: Federal University of Technology, Minna (Gidan Kwanu Campus) As a Case Study. *International Conference on Information and Communication Technology and Its Applications (ICTA 2016)*. pp. 220–226.
18. Batenkov, A.A., Batenkov, K.A. & Fokin, A.B. (2022) Analysis of the probability of connectivity of a telecommunication network based on inversions of its states. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 59. pp. 91–98. DOI: 10.17223/19988605/59/10
19. Batenkov, K.A. (2019) Exact and boundary estimates of the connectivity probabilities of communication networks based on the method of complete enumeration of typical states. *Trudy SPIIRAN – Proceedings of SPIIRAN*. 18(5). pp. 1093–1118. DOI: 10.15622/sp.2019.18.5.1093-1118
20. Batenkov, K.A. (2021) Formation of sections of telecommunication networks for the analysis of their stability with various connectivity measures. *Informatika i avtomatizatsiya – Informatics and automation*. 20(2). pp. 371–406.

21. Netes, V.A. (2016) Virtualization, cloud services and reliability. *Vestnik svyazi*. 8. pp. 7–9.
22. Wosinska, L., Chen, J. & Larsen, C.P. (2009) Fiber Access Networks: Reliability Analysis and Swedish Broadband Market. *Ieice Trans. Commun.* E92–B(10). pp. 3006–3014.
23. Rec. G.911. (1997) *Parameters and calculation methodologies for reliability and availability of fibre optic systems (Previously CCITT Recommendation)*. 1997–04. ITU-T.
24. Vasseur, J.-P., Pickavet, M. & Demeester, P. (2004) *Network Recovery. Protection and Restoration of Optical. SONET-SDH, IP, and MPLS*. San Francisco, CA: Elsevier.
25. Sergeeva, T.P. & Tetekin, N.N. (2014) Methods of increasing reliability in SDH networks. *T-Comm*. 6. pp. 53–55.
26. Rec. G.808. (2018) *Terms and definitions for network protection and restoration*. Amendment 1. 2018–03. Geneva : ITU-T. 20 p.
27. ITU. (n.d.) *Karta infrastrukturykh podklyucheniy [Infrastructure Connectivity Map]*. [Online] Available from: [itu.int/itu-d/tnd-map-public/](http://itu.int/itu-d/tnd-map-public/) (Accessed: 10th June 2023).
28. Batenkov, K.A. (2022) Analysis and synthesis of communication network structures by the method of state enumeration. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya*. 18(3). pp. 300–315. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2022.301.
29. Gelfman, T.E. & Pirkhavka, A.P. (2022) The operational readiness factor of satellite communication networks. *Russian Technological Journal*. 10(1). pp. 35–40. DOI: 10.32362/2500316X-2022-10-1-35-40

**Информация об авторах:**

**Батенков Кирилл Александрович** – доцент, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики Института информационных технологий МИРЭА – Российского технологического университета (Москва, Россия). E-mail: [pustur@yandex.ru](mailto:pustur@yandex.ru)

**Фокин Александр Борисович** – сотрудник Академии Федеральной службы охраны Российской Федерации (Орел, Россия). E-mail: [tatarin57ru@mail.ru](mailto:tatarin57ru@mail.ru)

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Information about the authors:**

**Batenkov Kirill A.** (Associate Professor, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics of the Institute of Information Technologies of MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russian Federation). E-mail: [pustur@yandex.ru](mailto:pustur@yandex.ru)

**Fokin Alexander B.** (Employee of the Academy of the Federal Security Service of the Russian Federation, Orel, Russian Federation). E-mail: [tatarin57ru@mail.ru](mailto:tatarin57ru@mail.ru)

**Contribution of the authors:** the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

*Поступила в редакцию 02.07.2023; принята к публикации 08.12.2023*

*Received 02.07.2023; accepted for publication 08.12.2023*

Научная статья

УДК 519.95

doi: 10.17223/19988605/65/7

## Оценка близости структур отношений объектов обучающей выборки на многообразиях наборов латентных признаков

Николай Александрович Игнатев<sup>1</sup>, Бахриддин Хусниддин угли Акбаров<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> *Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан*

<sup>1</sup> *n\_ignatev@rambler.ru*

<sup>2</sup> *bahriddin.akbarov@gmail.com*

**Аннотация.** Рассматриваются оценки близости структур отношений объектов обучающей выборки в разных признаковых пространствах. Считается, что эти пространства представлены наборами латентных признаков. Многообразия наборов латентных признаков являются результатом применения разных способов формирования непересекающихся групп из исходных признаков для их синтеза. Значения латентных признаков вычисляются как обобщенные оценки объектов по группам. Разработан метод вычисления плотности распределения по множеству граничных объектов классов. Предложена мера расстояния между плотностями распределения в разных признаковых пространствах.

**Ключевые слова:** латентные признаки; плотность распределения; обобщенные оценки объектов; мера расстояния.

**Для цитирования:** Игнатев Н.А., Акбаров Б.Х. Оценка близости структур отношений объектов обучающей выборки на многообразиях наборов латентных признаков // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 65. С. 69–78. doi: 10.17223/19988605/65/7

Original article

doi: 10.17223/19988605/65/7

## Estimation of the proximity of structures of relations of objects of the training sample on manifolds of sets of latent features

Nikolai A. Ignatev<sup>1</sup>, Bahriddin Kh. Akbarov<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> *National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*

<sup>1</sup> *n\_ignatev@rambler.ru*

<sup>2</sup> *bahriddin.akbarov@gmail.com*

**Abstract.** The evaluation of the proximity of the structures of relations between the objects of the training sample in different feature spaces is considered. It is believed that these spaces are represented by sets of latent features. Varieties of sets of latent features are the result of applying different methods of forming non-overlapping groups from initial features for their synthesis. The values of latent features are calculated as generalized estimates of objects by groups. A method for calculating the distribution density over a set of boundary objects of classes has been developed. A measure of the distance between distribution densities in different feature spaces is proposed.

**Keywords:** latent features; distribution density; generalized estimates of objects; measure of distance.

**For citation:** Ignatev, N.A., Akbarov, B.Kh. (2023) Estimation of the proximity of structures of relations of objects of the training sample on manifolds of sets of latent features. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 65. pp. 69–78. doi: 10.17223/19988605/65/7

## Введение

Формирование наборов латентных признаков рассматривается как один из способов решения проблемы проклятия размерности в задачах интеллектуального анализа данных. Для реализации линейных и нелинейных методов снижения размерности существует ряд условий, ограничивающих их применение. К таким условиям относятся:

- ориентация лишь на количественные признаки;
- чувствительность к проклятию размерности при вычислении меры расстояния между объектами;
- нелинейный рост сложности вычислений.

Одной из альтернатив получить решение проблемы, частично лишенное указанных выше недостатков, является использование линейных и нелинейных методов вычисления обобщенных оценок объектов классов [1, 2]. Относительно анализируемых данных эти методы:

- инвариантны к масштабам измерений признаков;
- адаптированы на использование значений исходных признаков в номинальной и интервальных шкалах измерений;
- применяются для формирования наборов латентных признаков.

Источником многообразия наборов латентных признаков является множество способов группировки исходных признаков, на основе которых происходит их формирование. При исследовании этих наборов использовался анализ изменения структуры отношений близости объектов выборки на разных метриках [3]. Для вычисления меры компактности выборки применялось отношение связанности объектов по системе гипершаров, в пересечении которых имеются граничные объекты классов.

На важность понятия сходства и различия анализируемых объектов в теоретических и практических задачах принятия решений, искусственного интеллекта, распознавания образов, обработки разнородной информации указывалось в [4]. Рассмотрены новые классы метрических пространств конечных, ограниченных, измеримых множеств и мультимножеств. Предложены новые виды метрик для оценивания сходства или различия многопризнаковых объектов, которые присутствуют в нескольких экземплярах с отличающимися значениями признаков.

Разработана мультиметодная технология последовательного агрегирования классифицируемых ситуаций [5], которая обеспечивает агрегирование исходных признаков, снижение размерности признакового пространства, построение иерархических систем составных критериев и интегрального показателя качества, используя разные комбинации нескольких методов принятия решений.

Есть предложение по использованию граничных объектов классов при сравнении плотности распределения объектов в различных признаковых пространствах. Искать различие между двумя пространствами через визуальное представление объектов из них не имеет смысла. Стохастический метод визуализации [6], использующий минимизацию различий по метрике Кульбака–Лейблера между плотностями распределений в исходном пространстве и  $R^2$ , не дает полной картины отношений между объектами классов по следующим причинам:

- структура отношений объектов изменяется при понижении размерности признакового пространства;
- меняется статус объектов (граничный, шумовой, эталонный, внутренний).

Одним из количественных показателей обучающей выборки является устойчивость признаков. Через равенство множества допустимых значений устойчивости в [1] показана общность между нелинейным преобразованием признаков в номинальной и интервальных шкалах измерений. Со свойством устойчивости связана предобработка данных с целями:

- удаления неинформативных признаков;
- разбиения на группы исходных признаков;
- формирования баз прецедентов из уникальных объектов [7].

Обобщенные оценки объектов рассматриваются как результат линейного или нелинейного отображения значений признаков из определяемых наборов на числовую ось. В линейном случае оценка – это сумма произведений весов признаков на вклады градаций объекта в номинальной шкале

измерений. С целью унификации шкал измерений применяются отображения значений количественных признаков в градации номинальных. Оптимальное число градаций для каждого признака определяется по критерию при разбиении его значений на непересекающиеся интервалы.

В нелинейном случае вычисление обобщенных оценок реализуется через произведение значений признаков объектов. Используется предобработка данных путем преобразования градаций номинальных признаков в значения функции принадлежности к классам. Формирование значения обобщенной оценки (латентного признака) объекта производится по правилам иерархической агломеративной группировки.

Предлагается оценивать плотность распределения обучающей выборки относительно множества граничных объектов классов. Основанием для использования множества граничных объектов при заданной метрике служит единственность:

- состава и мощности множества;
- значений радиусов гипершаров с центрами в граничных объектах, определяемых через расстояния до ближайших объектов из противоположных классов.

Представление обучающей выборки в разных признаковых пространствах меняет статус объектов с граничных на внутренние и наоборот. Отслеживать такие изменения предлагается через меру расстояния между плотностями распределений. Расстояние вычисляется относительно подмножества объектов, имеющих статус граничных на одном из наборов латентных признаков. Результаты анализа плотностей распределения востребованы при оценке качества эвристических метрик в задачах анализа данных [8], для формирования ансамблей алгоритмов распознавания [9] и объяснения процесса принятия решений на данных с большой размерностью.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается задача распознавания в стандартной постановке. Считается, что задано множество объектов  $E_0 = \{S_1, \dots, S_m\}$ , разделенное на два непересекающихся класса  $K_1, K_2$ . Описание объектов производится с помощью  $n$  разнотипных признаков  $X(n) = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\xi$  из которых измеряется в интервальных шкалах,  $n - \xi$  – в номинальной.

Считается, что на  $X(n)$  определено два множества алгоритмов, отличающихся принципами формирования непересекающихся групп признаков:  $\Omega_1$  – аддитивных;  $\Omega_2$  – мультипликативных.

Алгоритмы  $A, B \in \Omega_1 \cup \Omega_2$  используются для формирования непересекающихся групп признаков  $\Delta(t(A)) = \{G_1, \dots, G_{t(A)}\}$ ,  $\Delta(t(B)) = \{G_1, \dots, G_{t(B)}\}$  при выборе описания объектов  $E_0$  по наборам латентных признаков  $Y(t(A)) = (y_1, \dots, y_{t(A)})$ ,  $Y(t(B)) = (y_1, \dots, y_{t(B)})$ . По каждой группе  $G_i \in \Delta(t(A))$  ( $G_i \in \Delta(t(B))$ ) производится синтез латентного признака  $y_i \in Y(t(A))$  ( $y_i \in Y(t(B))$ ).

Заданы условия выбора подмножеств граничных по метрике  $\rho(x, y)$  объектов классов  $\Theta(A, \rho)$  и  $\Theta(B, \rho)$  соответственно на наборах  $Y(t(A))$  и  $Y(t(B))$ . Требуется:

- вычислить плотности распределения объектов  $\Theta(A, \rho)$  и  $\Theta(B, \rho)$  на наборах  $Y(t(A))$  и  $Y(t(B))$ ;
- сравнить близость плотностей распределения  $\Theta(A, \rho)$  на  $Y(t(B))$  и  $\Theta(B, \rho)$  на  $Y(t(A))$ .

## 2. Аддитивный принцип вычисления обобщенных оценок объектов

Для вычисления обобщенных оценок используются нелинейные преобразования признаков, которые сводятся к замене исходных значений признаков на значения функции принадлежности объектов к классам.

Пусть для значений количественного признака  $x_c \in X(n)$  в описании объектов  $E_0$  построена упорядоченная по неубыванию последовательность

$$r_1, \dots, r_j, \dots, r_m. \quad (1)$$

Разбиение (1) на непересекающиеся интервалы основано на проверке утверждения, что существуют интервалы, в границах которых частота встречаемости значений признака у объектов из класса  $K_t$  будет больше, чем частота встречаемости у объектов из класса  $K_{3-t}$ ,  $t = 1, 2$ .

Для разбиения (1) на множество из  $p_c$  ( $p_c \geq 2$ ) непересекающихся интервалов  $\{[r_u; r_v]^i\}$ ,  $1 \leq u, u \leq v \leq m, i = 1, \dots, p_c$ , предлагается использовать критерий из [1]:

$$\left| \frac{d_{ic}(u, v)}{|K_t|} - \frac{d_{3-t,c}(u, v)}{|K_{3-t}|} \right| \rightarrow \max, \quad (2)$$

где  $d_{ic}(u, v)$ ,  $d_{3-t,c}(u, v)$  – количество представителей классов  $K_t, K_{3-t}$  в интервале  $[r_u; r_v]^i, i \in \{1, \dots, p_c\}$ .

Оптимальное значение, определяемое по критерию (2), в целом не является фиксированным на выборках из генеральной совокупности. Значения в границах интервала  $[r_u; r_v]^i$  при анализе данных рассматриваются как градация номинального признака. Считается, что множество чисел, идентифицирующих  $p_c$  градаций номинального признака, всегда можно взаимно-однозначно отобразить в множество  $\{1, \dots, p_c\}$ .

В целях унификации обозначений вместо  $d_{ic}(u, v)$ ,  $t = 1, 2$ , для интервала  $[r_u; r_v]^u$  по  $x_c \in X(n)$  будем использовать  $d_{ic}(\mu)$ . При вычислении функции принадлежности  $f_c(\mu)$  к классу  $K_1$  по градации  $\mu \in \{1, 2, \dots, p_c\}$  в качестве  $d_{1c}(\mu)$  ( $d_{2c}(\mu)$ ) используется число объектов класса  $K_1$  ( $K_2$ ) со значением  $\mu$ . Значение функции принадлежности  $f_c(\mu)$  к классу  $K_1$  по интервалу  $[r_u; r_v]^u$  (градации  $\mu \in \{1, \dots, p_c\}$ ) определяется как

$$f_c(\mu) = \frac{d_{1c}(\mu)/|K_1|}{d_{1c}(\mu)/|K_1| + d_{2c}(\mu)/|K_2|}. \quad (3)$$

Исключим из  $X(n)$  множество признаков  $F$ , нелинейные преобразования для которых по (3) не существуют. Если частоты встречаемости значений количественного признака  $x_c \in X(n)$  при разбиении их на интервалы по (2) равны или существует градация  $\mu \in \{1, \dots, p_c\}$  с  $f_c(\mu) = 0,5$  для номинального признака, то  $x_c \in F$ .

Обозначим через  $D = \{i \mid x_i \in X(n) \setminus F\}$  – множество индексов признаков, которые используются для нелинейных преобразований. Замена градаций признака на значения функции принадлежности объектов к классу  $K_1$  по (3) при  $p_c > 2$  рассматривается как нелинейное преобразование. При такой замене порядка следования исходных и преобразованных значений количественного признака не совпадают. Граница между объектами классов по значениям функции принадлежности (3) для  $x_c \in X(n) \setminus F$  определяется как

$$G_c = (q_1 + q_2)/2, \quad (4)$$

где  $q_1 = \min\{f_c(\mu) \mid 1 - f_c(\mu) < 0,5, \mu = 1, \dots, p_c\}$ ,  $q_2 = \max\{f_c(\mu) \mid 0,5 - f_c(\mu) > 0, \mu = 1, \dots, p_c\}$ .

При вычислении значения градации  $a_{ic} \in \{1, 2\}$ ,  $c \in D$  для объекта  $S_i = \{x_{iu}\}_{u \in D}$  по (4) используется проверка условия  $x_{ic} \in [r_u; r_v]^u$  для количественного признака и  $x_{ic} = \mu$  для номинального. Одно из двух значений градации определяется так:

$$a_{ic} = \begin{cases} 1, & f_c(\mu) < G_c, \\ 2, & f_c(\mu) > G_c. \end{cases}$$

Для сравнения разнотипных признаков безотносительно их шкал измерений предлагается использовать значения устойчивости. С учетом (2) формула вычисления устойчивости для количественного признака  $x_c \in X(n) \setminus F$  имеет вид:

$$\varphi(c) = \frac{1}{m} \sum_{[r_u; r_v]^i} \begin{cases} f_c(i)t_i, & f_c(i) > 0,5; \\ (1 - f_c(i))t_i, & f_c(i) < 0,5, \end{cases} \quad (5)$$

где  $t_i$  – число объектов в интервале  $[r_u; r_v]^i$ .

Так как число градаций  $p_c, p_c \geq 2$ , номинального признака  $x_c \in X(n) \setminus F$  не меняется на выборках из генеральной совокупности и  $\sum_i t_i = m$ , то значение устойчивости определяется как

$$\varphi(c) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{p_c} \begin{cases} f_c(i)t_i, & f_c(i) > 0,5; \\ (1 - f_c(i))t_i, & f_c(i) < 0,5. \end{cases} \quad (6)$$

Число непересекающихся интервалов по (2) на выборках из генеральной совокупности не является постоянной величиной. Существование зависимости значений устойчивости (5) от числа интервалов доказывается в теореме

**Теорема 1.** Значение устойчивости (5) при неограниченном росте числа объектов выборки  $E_0$ , разделенных на два непересекающихся класса, стремится к постоянной величине  $\Phi$ ,  $\Phi \in (0,5; 1]$ .

**Доказательство.** Число объектов в непересекающихся интервалах  $\{[r_u; r_v]^i\}$ , полученных по (2) на (1),  $\sum_i t_i = m$ . Согласно закону больших чисел оценка сходимости по вероятности при  $0 < \varepsilon < 1$  будет иметь вид:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P \left( \left| \frac{\sum_{f_c(i) > 0.5} t_i f_c(i) + \sum_{f_c(i) < 0.5} t_i (1 - f_c(i))}{m} - \Phi \right| > \varepsilon \right) \rightarrow 0.$$

Вес признака  $x_c \in X(n) \setminus F$  в описании объектов выборки вычисляется через градации из  $\{1, 2\}$  в номинальной шкале. Обозначим через  $g_{1c}^j, g_{2c}^j$  – количество значений градации  $j \in \{1, 2\}$  признака  $x_c \in X(n) \setminus F$  в описании объектов соответственно класса  $K_1$  и  $K_2$ . Межклассовое различие по признаку  $x_c$  определяется как величина

$$\lambda_c = 1 - \frac{\sum_{j=1}^2 g_{1c}^j g_{2c}^j}{|K_1| |K_2|}. \quad (7)$$

Степень однородности (мера внутриклассового сходства)  $\beta_c$  значений градаций признака по классам  $K_1, K_2$  вычисляется по формуле

$$\beta_c = \frac{\sum_{j=1}^2 g_{1c}^j (g_{1c}^j - 1) + g_{2c}^j (g_{2c}^j - 1)}{|K_1| (|K_1| - 1) + |K_2| (|K_2| - 1)}. \quad (8)$$

С помощью (7), (8) вес признака  $x_c \in X(n) \setminus F$  в номинальной шкале определяется как произведение внутриклассового сходства и межклассового различия:

$$w_c = \beta_c \lambda_c. \quad (9)$$

Множество допустимых значений весов признаков, вычисляемых по (9), принадлежит интервалу  $(0; 1]$ .

Для вычисления обобщенных оценок объектов на  $E_0$  используются вклады градаций признаков. Вклад градации  $j \in \{1, 2\}$  признака  $x_c \in X(n) \setminus F$  определяется как

$$\eta_c(j) = w_c \left( \frac{\alpha_{cj}^1}{|K_1|} - \frac{\alpha_{cj}^2}{|K_2|} \right), \quad (10)$$

где  $\alpha_{cj}^1, \alpha_{cj}^2$  – количество значений градации  $j$  признака  $x_c$  соответственно в классах  $K_1$  и  $K_2$ ,  $w_c$  – вес признака  $x_c$  по (9). Обобщенная оценка объекта  $S_r \in E_0$  по описанию в номинальной шкале измерений  $S_r = \{a_{ri}\}_{i \in D}$  на наборе  $TUPLAM \subset D$  и вкладам (10) вычисляется как

$$R(S_r) = \sum_{i \in TUPLAM} \eta_i(a_{ri}). \quad (11)$$

При разбиении признаков из  $X(n) \setminus F$  на непересекающиеся группы и синтезе наборов латентных признаков из них по аддитивному принципу используются:

- выбор подмножеств исходных признаков по правилам иерархической агломеративной группировки;
- формирование последовательности из упорядоченных по значениям устойчивости (5), (6) исходных признаков и разбиение этой последовательности на заданное число непересекающихся подмножеств;
- определение числа и состава групп по датчикам случайных чисел.

## 2.1. Алгоритм иерархической агломеративной группировки признаков по аддитивному принципу

Алгоритм иерархической агломеративной группировки [10] реализует жадную стратегию формирования наборов латентных признаков. Количество групп и их состав определяются алгоритмическим путем из  $X(n) \setminus F$  на основе принципа динамического программирования.

Пусть  $T (F \subset T)$  – множество признаков, принадлежность которых к непересекающимся группам установлена. При  $|T| < n$  формирование очередной группы  $G$  по правилам иерархической агломеративной группировки будет следующим:

– выбор  $x_c \in X(n) \setminus T$  с максимальным значения веса (9) в качестве первого представителя группы  $G$ ,  $T = TU\{x_c\}$ ;

– включение признака  $x_p \in X(n) \setminus T$  в группу  $G = GU\{x_p\}$  при условии

$$\frac{\gamma_i}{\theta_i} > \frac{\gamma_{i+1}}{\theta_{i+1}} \text{ и } \frac{\gamma_i}{\theta_i} - \frac{\gamma_{i+1}}{\theta_{i+1}} = \max_{x_p \in X(n) \setminus T},$$

где  $\gamma_i(\theta_i)$  – внутриклассовое сходство (межклассовое различие) по значениям обобщенных оценок (11) на  $G$ ,  $i = |G|$ ,  $|GU\{x_p\}| = i + 1$ .

## 3. Мультипликативный принцип вычисления обобщенных оценок объектов

При вычислении обобщенных оценок объектов по мультипликативному принципу используются значения весов признаков и их попарных комбинаций. Веса количественных и номинальных признаков определяются разными методами. Для данных (латентных и исходных) в интервальных шкалах измерений рекомендуется использовать интервальный метод [2], как это сделано при реализации правил иерархического агломеративного алгоритма группировки признаков.

В качестве границ двух непересекающихся интервалов  $[\pi_1; \pi_2]$ ,  $(\pi_2; \pi_3]$ , определяемых по (1), используются  $\pi_1 = r_1$ ,  $\pi_2 = r_j$ ,  $1 < j < m$ ,  $\pi_3 = r_m$ . Интервалы  $[\pi_1; \pi_2]$  и  $(\pi_2; \pi_3]$  идентифицируются, соответственно, как первый и второй. Вес признака объектов классов по (1) вычисляется как максимум произведения внутриклассового сходства и межклассового различия по критерию

$$\left( \frac{\sum_{d=1}^2 \sum_{i=1}^2 (u_i^d - 1) u_i^d}{\sum_{i=1}^2 |K_i| (|K_i| - 1)} \right) \left( \frac{\sum_{d=1}^2 \sum_{i=1}^2 u_i^d (|K_{3-i}| - u_{3-i}^d)}{2|K_1||K_2|} \right) \rightarrow \max_{\pi_1 < \pi_2 < \pi_3}, \quad (12)$$

где  $u_i^d (u_{3-i}^d)$  – количество значений признака  $x_c \in X(n)$  у объектов из класса  $K_i (K_{3-i})$  в  $d$ -м интервале.

Множество допустимых значений критерия (12) принадлежит  $(0; 1]$  и используется для оценки компактности объектов классов на числовой оси. Если в каждом интервале содержатся все значения признака объектов из одного класса, то его вес равен 1. Граница (порог) между классами  $K_1$  и  $K_2$  для количественного признака  $x_a \in X(n)$  определяется как

$$\Gamma_a = \frac{\pi_2 + b}{2}, \quad (13)$$

где  $b$  – ближайшее к  $\pi_2$  значение из интервала  $(\pi_2; \pi_3]$ , вычисляемого по (12).

Замену градаций номинальных признаков на значения функции принадлежности объектов к классам по (3) предлагается использовать при синтезе латентных признаков по правилам иерархической агломеративной группировки. Алгоритм и правила группировки количественных признаков описаны в [2]. Реализация процесса попарного объединения признаков для формирования множества из непересекающихся групп  $\mathcal{B} = \{G_1, \dots, G_t\}$ ,  $t \geq 1$ , основана на использовании экстремальных значений критерия (12) и соответствующих ему границ двух непересекающихся интервалов.

Обозначим через  $Y(n - q)$  набор из латентных и исходных признаков на  $q$ -м шаге иерархической группировки,  $Y(n) = X(n)$  при  $q = 0$ . Проверке условия включения признака  $y_p \in Y(n - q)$  в группу  $G \in \mathcal{B}$

предшествует нормирование его значений с использованием границ интервала  $[\pi_{1p}; \pi_{2p}](\pi_{2p}; \pi_{3p})$  по формуле

$$a_p = (y_p - \pi_{2p})/(\pi_{3p} - \pi_{1p}). \quad (14)$$

Для количественного признака значения границ интервалов  $[\pi_{1p}; \pi_{2p}](\pi_{2p}; \pi_{3p})$  определяются по критерию (12). После замены градаций номинального признака на значения функции принадлежности (3) выбор границ  $\pi_{1p}, \pi_{3p}$  аналогичен (12), а в качестве значения  $\pi_{2p}$  используется (4).

Синтез значений латентного признака  $y \in Y(n-q-1)$  с нормированием по (14) для пары  $(y_i, y_j) \subset Y(n-q)$  производится по формуле

$$y = \eta_{ij} (t_i w_i a_i + t_j w_j a_j) + (1 - \eta_{ij}) t_{ij} w_{ij} (a_i a_j - \pi_{2ij})/(\pi_{3ij} - \pi_{1ij}), \quad t_i, t_j, t_{ij} \in \{-1, 1\}, \eta_{ij} \in [0; 1], \quad (15)$$

где  $w_i, w_j, w_{ij}$  – веса признаков и значения границ  $[\pi_{1ij}; \pi_{2ij}](\pi_{2ij}; \pi_{3ij})$ , определяемые по (12).

При реализации правил иерархической агломеративной группировки используется принцип динамического программирования. Группа  $G$  и латентный признак  $y$ , полученный на ее основе по (15), считаются сформированными, если не существует пары  $(y, y_i), y_i \in Y(n-q)$ , при объединении которой в  $y^* \in Y(n-q-1)$  веса признаков по (12)  $w(y^*) \geq w(y)$ .

#### 4. О плотности распределения по множеству граничных объектов классов

Рассматриваются вычисление и анализ плотности распределения в окрестностях граничных по заданной метрике объектов классов. Смена признакового пространства влечет за собой изменение конфигурации граничных объектов выборки. Оценку таких изменений предлагается проводить по парам наборов латентных признаков.

Множество граничных объектов классов по метрике  $\rho(x, y)$  на наборе латентных признаков  $L$  определим как

$$B(L) = \left\{ S \in E_0 \mid \rho(S_i, S) = \min_{S_i \in K_j, S_d \in K_{3-j}} \rho(S_i, S_d) \right\}.$$

Обозначим через  $B(L_1), B(L_2)$  множество граничных объектов  $E_0$ , полученное на наборах латентных признаков  $L_1$  и  $L_2$ . Определим множество пар граничных объектов  $Q_u, u = 1, 2$ , как

$$Q_u = \left\{ S_i, S_j \in B(L_u), S_i \in K_t \mid \rho(S_i, S_j) = \min_{S_d \in K_{3-t}} \rho(S_i, S_d), t = 1, 2 \right\}.$$

При сравнении плотностей распределения на  $L_1$  и  $L_2$  используются множества граничных пар объектов  $Q_1$  и  $Q_2$ .

Определим плотность объектов в  $L_2$  по гипершару с центром в  $S_i \in Q_1 \cap K_t$  и радиусу  $\rho(S_i, S_j)$ , где  $S_j \in Q_1 \cap K_{3-t}$  и  $\rho(S_i, S_j) = \min_{S_d \in Q_1 \cap K_{3-t}} \rho(S_i, S_d)$ . Обозначим через  $r_2(i) = \rho(S_i, S_j)$  расстояние между объектами  $S_i \in K_t$  и  $S_j \in K_{3-t}$  в  $L_2$ ,  $G(i) = \{S_a \in K_t \mid \rho(S_i, S_a) < r_2(i)\}$ ,  $NG(i) = \{S_a \in K_{3-t} \mid \rho(S_i, S_a) < r_2(i)\}$ . Плотность распределения по гипершару с центром в  $S_i \in Q_1$  на наборе  $L_2$  будет вычисляться как

$$Zch_{21}(S_i) = \left( \frac{1 + \sum_{S_a \in G(i)} \left( 1 - \frac{\rho(S_a, S_i)}{r_2(i)} \right) / |G(i)| - \left\{ \sum_{S_a \in NG(i)} \left( 1 - \frac{\rho(S_a, S_i)}{r_2(i)} \right) / |NG(i)|, |NG(i)| > 0; \right.}{2} \right) \times \left. \frac{|G(i)|}{|K_t|} - \frac{|NG(i)|}{|K_{3-t}|} \right) \quad (16)$$

Аналогично (16) вычисляется  $Zch_{12}(S_i)$  относительно  $S_i \in Q_2$ . Плотность  $Zch_{uu}(S_i)$  в  $L_u, u = 1, 2$ , по  $S_i \in Q_u \cap K_t$  определяется как

$$Zch_{uu}(S_i) = \left( \frac{1 + \sum_{\rho(S_a, S_i) < \rho(S_j, S_i)} \left( 1 - \frac{\rho(S_a, S_i)}{\rho(S_j, S_i)} \right) / son(i)}{2} \right) \cdot \left( \frac{son(i)}{|K_i|} \right),$$

где  $son(i) = |\{S_a | \rho(S_a, S_i) < \rho(S_j, S_i)\}|$ .

Расстояние между плотностями распределений объектов  $E_0$  на наборах  $L_1, L_2$  вычисляется следующим образом:

$$AS(L_1, L_2) = \sum_{S \in Q_1} |Zch_{11}(S) - Zch_{21}(S)| / |Q_1|. \quad (17)$$

Аналогично (17) определяется расстояние между плотностями распределений на наборах  $L_2, L_1$ :

$$AS(L_2, L_1) = \sum_{S \in Q_2} |Zch_{22}(S) - Zch_{12}(S)| / |Q_2|. \quad (18)$$

Отметим, что расстояние по  $AS(L_u, L_{3-u})$  неотрицательно и равно нулю при  $L_1 = L_2$ ,  $AS(L_1, L_2) \neq AS(L_2, L_1)$  при  $L_1 \neq L_2$ .

## 5. Вычислительный эксперимент

Анализируются данные по 3-й хромосоме для 2 504 объектов [11], которые содержат информацию по одиночным мутациям в некоторых кодирующих гены участках молекулы ДНК. Возможные значения: 0 (нет мутации); 1 (мутация в одной аллели); 2 (мутация в обеих аллелях). При классификации ДНК по генотипу ELP6-201 в качестве целевого признака использовались данные из молекулы-посредника РНК. В эксперименте рассматривается вариант разбиения объектов на два класса: с одной и двумя мутациями. При формировании выборки для машинного обучения использовались лишь уникальные объекты. Из 52 объектов 27 были с одной мутацией, 25 – с двумя.

Синтез двух наборов латентных признаков  $L_1$  и  $L_2$  из 38 исходных для ELP6-201 проводился по правилам иерархических агломеративных алгоритмов группировки соответственно по аддитивному и мультипликативному принципам. Мощность набора, сформированного по аддитивному принципу,  $|L_1|=9$ , по мультипликативному –  $|L_2|=5$ . Результаты вычисления меры компактности (12) и точности распознавания по границе (13) для каждого латентного признака приводятся в табл. 1, 2. Номера латентных признаков соответствуют порядку их формирования по правилам иерархических агломеративных алгоритмов.

Выводы о возможности применения отдельных латентных признаков для классификации объектов таковы. Использование признака № 1 из табл. 2 с точностью 96,15% явно предпочтительнее выбора признака № 2 из табл. 1 с точностью 71,15%. Между значениями меры компактности (12) и точности распознавания по (13) нет линейной зависимости. Точность распознавания 50,00% получена при компактности 0,1419 (см. табл. 1) и 0,2286 (см. табл. 2).

Таблица 1

Значения меры компактности и точности распознавания по набору  $L_1$

№ латентного признака	Значение	
	компактности (12)	точности в % по (13)
1	0,3197	69,23
2	0,3216	71,15
3	0,2848	65,38
4	0,0743	3,85
5	0,0743	3,85
6	0,0743	3,85
7	0,0743	3,85
8	0,1419	50,00
9	0,1419	50,00

Значения меры компактности и точности распознавания по набору  $L_2$ 

№ латентного признака	Значение	
	компактности (12)	точности в % по (13)
1	0,8550	96,15
2	0,3200	69,23
3	0,2286	50,00
4	0,0744	3,85
5	0,0744	3,85

Проверка свойства симметрии при вычислении расстояния между плотностями распределений на наборах  $L_1$  и  $L_2$  демонстрируется в табл. 3.

Расстояния между плотностями распределения на наборах  $L_1$  и  $L_2$ 

Базовая метрика	Расстояние	
	$AS(L_1, L_2)$	$AS(L_2, L_1)$
Евклида	0,0816	0,0634
Чебышева	0,1079	0,0779
Хэмминга	0,0935	0,0734

Результаты из табл. 3 подтверждают несимметричность расстояний по (17) и (18).

### Заключение

Разработан метод вычисления плотности распределения в граничных объектах классов на многообразиях латентных признаков. Предложена мера расстояния по значениям плотностей распределений для оценки различий между структурами отношений объектов в разных признаковых пространствах. Мера расстояния рекомендуется для анализа различных способов редукции данных при машинном обучении.

### Список источников

1. Ignatiev N.A. On Nonlinear Transformations of Features Based on the Functions of Objects Belonging to Classes // Pattern Recognition and Image Analysis. 2021. V. 31 (2). P. 197–204.
2. Saidov D.Y. Data visualization and its proof by compactness criterion of objects of classes // International Journal of Intelligent Systems and Applications (IJISA). 2017. V. 9 (8). P. 51–58.
3. Ignatyev N.A. Structure Choice for Relations between Objects in Metric Classification Algorithms // Pattern Recognition and Image Analysis. 2018. V. 28 (4). P. 590–597.
4. Петровский А.Б. Показатели сходства и различия многопризнаковых объектов в метрических пространствах множеств и мультимножеств // Искусственный интеллект и принятие решений. 2017. № 4. С. 78–94.
5. Петровский А.Б., Лобанов В.Н. Многокритериальный выбор в пространстве признаков большой размерности: мультимедийная технология ПАКС-М // Искусственный интеллект и принятие решений. 2014. № 3. С. 92–104.
6. Sklearn.manifold.TSNE. URL: <https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.manifold.TSNE.html> (accessed: 20.01.2023).
7. Наврузов Э.Р. О формировании баз прецедентов для решения задач информационной безопасности // Вестник РГГУ. Сер. Информатика. Информационная безопасность. Математика. 2022. № 3. С. 66–84. doi: 10.28995/2686-679X-2022-3-66-84.
8. Рудаков К.В. О некоторых факторизациях полуметрических конусов и оценках качества эвристических метрик в задачах анализа данных // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 492. С. 101–103.
9. Mbali K. Ensemble learning methods: Bagging, boosting and stacking. URL: <https://www.analyticsvidhya.com/blog/2023/01/ensemble-learning-methods-bagging-boosting-and-stacking/> (accessed: 20.01.2023).
10. Ignatev N.A., Rahimova M.A. Formation and Analysis of Sets of Informative Features of Objects by Pairs of Classes // Scientific and Technical Information Processing. 2022. V. 49 (6). P. 439–445.
11. Sudmant P.H. et al. An integrated map of structural variation in 2,504 human genomes // Nature. 2015. V. 526. P. 75–81. doi: 10.1038/nature15394

References

1. Ignatiev, N.A. (2021) On nonlinear transformations of features based on the functions of objects belonging to classes. *Pattern Recognition and Image Analysis*. 31(2). pp. 197–204.
2. Saidov, D.Y. (2017) Data visualization and its proof by compactness criterion of objects of classes. *International Journal of Intelligent Systems and Applications*. 9(8). pp. 51–58.
3. Ignatyev, N.A. (2018) Structure Choice for Relations between Objects in Metric Classification Algorithms. *Pattern Recognition and Image Analysis*. 28(4). pp. 590–597.
4. Petrovsky, A.B. (2017) Indicators of similarity and dissimilarity of multi-attribute objects in metric spaces of sets and multisets. *Iskusstvennyy intellekt i prinyatie resheniy – Artificial Intelligence and Decision-Making*. 4. pp. 78–94.
5. Petrovsky, A.B. & Lobanov, V.N. (2014) Multi-criteria choice in the feature space of high dimension: PAKS-M multi-method technology. *Iskusstvennyy intellekt i prinyatie resheniy – Artificial Intelligence and Decision-Making*. 3. pp. 92–104.
6. Scikit. (n.d.) *Sklearn.manifold.TSNE*. [Online] Available from: <https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.manifold.TSNE.html> (Accessed: 20th January 2023).
7. Navruzov, E.R. (2022) On forming the precedent bases for solving problems of the information security. *Vestnik RGGU. Ser. Informatika. Informatsionnaya bezopasnost'. Matematika*. 3. pp. 66–84.
8. Rudakov, K.V. (2020) On some factorizations of semi-metric cones and quality estimates of heuristic metrics in data analysis problems. *Doklady Rossiyskoy akademii nauk. Matematika, informatika, protsessy upravleniya – The Russian Academy of Sciences. Mathematics, Informatics, Control Processes*. 492. pp. 101–103.
9. Mbali, K. (n.d.) *Ensemble learning methods: Bagging, boosting and stacking*. [Online] Available from: <https://www.analyticsvidhya.com/blog/2023/01/ensemble-learning-methods-bagging-boosting-and-stacking/> (Accessed: 20th January 2023).
10. Ignatev, N.A. & Rahimova, M.A. (2022) Formation and analysis of sets of informative features of objects by pairs of classes. *Scientific and Technical Information Processing*. 49(6). pp. 439–445.
11. Sudmant, P.H. et al. (2015) An integrated map of structural variation in 2,504 human genomes. *Nature*. 526. pp. 75–81. DOI: 10.1038/nature15394.

**Информация об авторах:**

**Игнатъев Николай Александрович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Искусственный интеллект» Национального университета Узбекистана (Ташкент, Узбекистан). E-mail: n\_ignatev@rambler.ru

**Акбаров Бахриддин Хусниддин угли** – докторант кафедры «Искусственный интеллект» Национального университета Узбекистана (Ташкент, Узбекистан). E-mail: bahriddin.akbarov@gmail.com

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Information about the authors:**

**Ignatev Nikolay A.** (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: n\_ignatev@rambler.ru

**Akbarov Bahriddin Kh.** (Post-graduate Student, National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: bahriddin.akbarov@gmail.com

**Contribution of the authors:** the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 05.05.2023; принята к публикации 08.12.2023

Received 05.05.2023; accepted for publication 08.12.2023

Научная статья

УДК 519.2

doi: 10.17223/19988605/65/8

## Улучшенное непараметрическое оценивание для диффузионной эпидемиологической SIR модели по неполным данным

Святослав Сергеевич Перелевский<sup>1</sup>, Евгений Анатольевич Пчелинцев<sup>2</sup><sup>1,2</sup> Томский государственный университет, Томск, Россия<sup>1</sup> slavaperelevskiy@mail.ru<sup>2</sup> evgen-pch@yandex.ru

**Аннотация.** Рассматривается задача статистического оценивания по дискретным данным функции распространения эпидемии в стохастической SIR модели типа Кермака–Маккендрика, в которой динамика инфицирования определяется эргодическим диффузионным процессом с неизвестным коэффициентом диффузии. Для оценивания функции сноса диффузионного процесса предлагается улучшенная процедура, обладающая более высокой скоростью сходимости, чем обычные оценки МНК. Приводятся результаты численного моделирования Монте-Карло.

**Ключевые слова:** эргодический диффузионный процесс; SIR модель; гетероскедастичная регрессия; неполные данные; улучшенное оценивание; среднеквадратический риск; взвешенные оценки.

**Благодарности:** Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФ в рамках научного проекта № 22-21-00302.

**Для цитирования:** Перелевский С.С., Пчелинцев Е.А. Улучшенное непараметрическое оценивание для диффузионной эпидемиологической SIR модели по неполным данным // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 65. С. 79–88. doi: 10.17223/19988605/65/8

Original article

doi: 10.17223/19988605/65/8

## Improved nonparametric estimation for diffusion epidemiological SIR model from incomplete data

Svyatoslav S. Perelevskiy<sup>1</sup>, Evgeny A. Pchelitsev<sup>2</sup><sup>1,2</sup> Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation<sup>1</sup> slavaperelevskiy@mail.ru<sup>2</sup> evgen-pch@yandex.ru

**Abstract.** The paper considers the problem of statistical estimation of the epidemic spread function from discrete data in a stochastic SIR model of the Kermack-Mackendrick type, in which the infection dynamics is determined by an ergodic diffusion process with an unknown diffusion coefficient. To estimate the drift function of the diffusion process, an improved procedure is proposed that has a higher convergence rate than least squares estimates. The results of Monte Carlo numerical simulation are given.

**Keywords:** ergodic diffusion process; SIR model; heteroscedastic regression; incomplete data; improved estimation; mean square risk; weighted estimates.

**Acknowledgments:** The research was carried out with the financial support of the RSF as part of a scientific project № 22-21-00302.

**For citation:** Perelevskiy, S.S., Pchelintsev, E.A. (2023) Improved nonparametric estimation for diffusion epidemiological SIR model from incomplete data. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 65. pp. 79–88. doi: 10.17223/19988605/65/8

## Введение

Одной из основных моделей, описывающих эволюцию вспышки эпидемии во времени, является SIR модель Кермака–Маккендрика [1, 2]

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta SI, \\ \dot{I} = \beta SI - \gamma I, \\ \dot{R} = \gamma I, \end{cases}$$

где динамика передачи зависит от частоты и интенсивности взаимодействий между (здоровыми) восприимчивыми  $S$  и инфицированными индивидами  $I$  и дает выздоровевших индивидов  $R$ . Параметры  $\beta$  и  $\gamma$  – частота заражения и скорость выздоровления соответственно. Модель сохраняет  $N = S + I + R$  – общее число особей популяции. Отметим, что  $R$ , по существу, является интегралом от  $I$  и поэтому не играет никакой роли в динамике. В [3] автор предложил модифицировать эту модель следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\frac{\beta r}{N} I, \\ \dot{I} = \mu I, \quad \mu = \frac{\beta r}{N} - \gamma, \\ \dot{R} = \gamma I, \end{cases} \quad (1)$$

с начальными значениями  $S(0) = N$ ,  $I(0) = R(0) = 1$ . В данной статье предлагается заменить коэффициент  $\mu$  на неизвестный функциональный параметр  $\mu(t)$  и перейти к стохастической модели (1) на  $[0, T]$ , заменяя функцию  $I$  на стохастический процесс  $(I_t)_{0 \leq t \leq T}$ , определяемый как  $I_t = e^{y_t}$ , где процесс  $(y_t)_{0 \leq t \leq T}$  удовлетворяет на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  стохастическому дифференциальному уравнению

$$dy_t = \mu(y_t)dt + v(y_t)dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

где  $(W_t)_{t \geq 0}$  – стандартный скалярный винеровский процесс, начальное значение  $y_0 = 0$ ,  $\mu(\cdot)$  – неизвестный коэффициент сноса,  $v(\cdot)$  – неизвестный стохастический коэффициент диффузии. Применение диффузионных процессов (2) обусловлено тем, что они определяют скорость многих физико-химических, экономических и биологических процессов [4–7].

Задача заключается в том, чтобы оценить неизвестную функцию  $\mu(\cdot)$  в (2) по наблюдениям  $(y_{t_j})_{0 \leq j \leq N}$ ,  $t_j = j\delta_T$ ,  $y_{t_j} = \ln I_{t_j}$ , где  $N = [T/\delta_T]$  – размер выборки, параметр  $\delta_T \in (0, 1)$  – некоторая функция от  $T$ , величина  $[x]$  обозначает целую часть числа  $x$ . Предлагается развить улучшенные непараметрические статистические методы оценивания для стохастической версии эпидемиологической SIR модели, т.е. построить оценку функции сноса, которая имеет более высокую точность по сравнению с обычными оценками наименьших квадратов (МНК) для любого конечного объема наблюдений. В отличие от работ [8, 9], в которых улучшенные оценки построены в случае полных наблюдений (по всей траектории), в данной статье предполагается, что процесс доступен наблюдению только в фиксированные моменты времени  $(t_j)_{0 \leq j \leq N}$ .

Качество оценки  $\hat{\mu}$  (любой измеримой функции от наблюдений) для неизвестной функции  $\mu$  на некотором отрезке  $[a, b]$ ,  $a < b$ , будем измерять среднеквадратическим риском

$$\mathfrak{R}_\vartheta(\hat{\mu}, \mu) := \mathbf{E}_\vartheta \|\hat{\mu} - \mu\|^2 \text{ и } \|\mu\|^2 = \int_a^b \mu^2(u) du. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{E}_\vartheta$  – математическое ожидание относительно распределения наблюдений  $(y_{t_j})_{0 \leq j \leq N}$  при фиксированных функциях  $\vartheta = (\mu, \nu) \in \Theta := M_{m,r} \times V = \{(\mu, \nu) : \mu \in M_{m,r}, \nu \in V\}$ , где

$$M_{m,r} = \left\{ \mu \in C^1(\mathbf{R}) : \sup_{|x| \leq x_*} (|\mu(x)| + |\dot{\mu}(x)|) \leq r, -m \leq \inf_{|x| \geq x_*} \dot{\mu}(x) \leq \sup_{|x| \geq x_*} \dot{\mu}(x) \leq -1/m \right\},$$

$$V = \left\{ \nu \in C^2(\mathbf{R}) : \nu_{\min} \leq \inf_{x \in \mathbf{R}} |\nu(x)| \leq \sup_{x \in \mathbf{R}} \max \{ |\nu(x)|, |\dot{\nu}(x)|, |\ddot{\nu}(x)| \} \leq \nu_{\max} \right\},$$

$\nu_{\min}, \nu_{\max}, r$  – некоторые положительные числа,  $m \geq 1, x_* > |a| + |b|$ . Выбор коэффициентов  $\vartheta = (\mu, \nu)$  в уравнении (2) из такого функционального класса  $\Theta$  обеспечивает существование единственного сильного решения этого уравнения и эргодичность наблюдаемого процесса  $(y_t)_{0 \leq t \leq T}$  с эргодической

плотностью  $q_\vartheta(x) = \left( \int_{\mathbf{R}} \nu^{-2}(z) \exp \left\{ 2 \int_0^z \nu^{-2}(u) \mu(u) du \right\} dz \right)^{-1} \nu^{-2}(x) \exp \left\{ 2 \int_0^x \nu^{-2}(u) \mu(u) du \right\}$  (см.: [10]). Тогда

процесс  $I_t = e^{y_t}$  сходится к функции  $I$  из (1). Ясно, что плотность  $q_\vartheta(\cdot)$  неизвестна, поскольку зависит от неизвестных  $(\mu, \nu)$ . Поэтому, чтобы получить приемлемое качество оценивания, нужно сначала оценить  $q_\vartheta(\cdot)$  на основе первых  $N_0$  наблюдений, где

$$N_0 = [N^\gamma(T)], \quad 0 < \gamma < 1,$$

затем по оставшимся наблюдениям  $(y_{t_j})_{N_0 < j \leq N}$  построить оценку для функции  $\mu(\cdot)$  в (2). Для решения указанных задач, применяя последовательный подход из [11] и подход улучшенного оценивания из [12, 13], разрабатывается двухшаговая процедура улучшенного оценивания.

В разделе 1 предлагаются оценка плотности и последовательный план, позволяющие свести исходную задачу оценивания функции сноса в модели (2) по неполным наблюдениям к задаче оценивания той же функции в регрессионной модели. В разделе 2 развивается метод улучшенного оценивания для непараметрической гетероскедастичной регрессии с аддитивным шумом при наличии мешающих параметров. В разделе 3 приводятся результаты численного моделирования.

### 1. Усеченное последовательное оценивание

Используя метод усеченного последовательного оценивания из [11], перейдем от модели (2) к ее аппроксимации дискретной регрессионной моделью. Пусть частота наблюдений  $\delta_T = ((T+1)(\ln T)^{1+\alpha})^{-1}$  для некоторого  $\alpha > 0$ .

Чтобы оценить плотность  $q_\vartheta(\cdot)$ , используем усеченную ядерную оценку из [11]:

$$\tilde{q}(z) = \begin{cases} (\varepsilon_T)^{1/2}, & \hat{q}(z) < (\varepsilon_T)^{1/2}, \\ \hat{q}(z), & (\varepsilon_T)^{1/2} < \hat{q}(z) < (\varepsilon_T)^{-1/2}, \\ (\varepsilon_T)^{-1/2}, & \hat{q}(z) > (\varepsilon_T)^{-1/2}, \end{cases} \quad \hat{q}(z) = \frac{1}{2N_0 h_0} \sum_{j=1}^{N_0} \chi_j(z, h_0), \quad (4)$$

где  $\varepsilon_T = \ln^{-\alpha}(T+1)$ ,  $\alpha > 0$ ,  $h_0(T) = T_0^{-1/2}$ ,  $T_0 = \delta_T N_0$  и  $\chi_j(z, h) = \mathbf{1}_{[-1,1]}((y_{t_{j-1}} - z)/h)$ ,  $\mathbf{1}_A(\cdot)$  – индикатор множества  $A$ . Используя оценку (4), определим порог

$$H(z) = h(N - N_0)(2\tilde{q}(z) - \varepsilon_T) \text{ и } h = T^{-1/2}.$$

В каждой точке  $z_k = a + k(b-a)/n$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,  $n = [\sqrt{T}(b-a)/4] - 1$ , на отрезке  $[a, b]$  определим последовательный план  $(\tau_k, \tilde{\mu}_k)$  с

$$\tau_k = \inf \left\{ l \geq N_0 + 1: \sum_{j=N_0+1}^l \tilde{\chi}_j(z_k, h) \geq H(z_k) \right\} \text{ и } \tilde{\mu}_k = \frac{1}{\delta_T H(z_k)} \sum_{j=N_0+1}^{\tau_k} \kappa_j(z_k) \tilde{\chi}_j(z_k, h) (y_{t_j} - y_{t_{j-1}}), \quad (5)$$

где  $\tilde{\chi}_j(z, h) = \chi_j(z, h) \mathbf{1}_{\{j < N\}} + H(z) \mathbf{1}_{\{j \geq N\}}$  и  $\kappa_j(z)$  – поправочный коэффициент, определенный в [11]. Введение этого коэффициента обеспечивает гарантированную точность последовательной оценки (5) и, как установлено ниже в предложении 2, гауссовость стохастической компоненты шума. Заметим, что момент остановки  $\tau_k \leq N$  п.н. Подставляя в последовательную оценку  $\tilde{\mu}_k$  из уравнения (2) выражение для  $y_{t_j} - y_{t_{j-1}}$ , приходим к модели непараметрической неоднородной регрессии

$$Y_k = \mu(z_k) + \eta_k + \sigma_k \xi_k, \quad Y_k = \tilde{\mu}(z_k), \quad \sigma_k = \frac{v(z_k)}{\sqrt{\delta_T H(z_k)}}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (6)$$

где компоненты шума определяются равенствами

$$\eta_k = \frac{1}{\delta_T H(z_k)} \sum_{j=N_0+1}^{\tau_k} \kappa_j(z_k) \tilde{\chi}_j(z_k, h) \left( \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mu(y_u) du - \mu(z_k) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} (v(y_s) - v(z_k)) dW_s \right),$$

$$\xi_k = \frac{1}{\sqrt{\delta_T H(z_k)}} \sum_{j=N_0+1}^{\tau_k} \kappa_j(z_k) \tilde{\chi}_j(z_k, h) (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}).$$

**Предложение 1.** Для случайных величин  $(\eta_k)_{1 \leq k \leq n}$  справедливо неравенство  $\max_{1 \leq k \leq n} \sup_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}_\theta \eta_k^2 \leq \eta_T^*$ ,

где  $\eta_T^* = 4 \left[ \max(r, m) \delta_T + \frac{v_{\max}^2}{h(N - N_0) \sqrt{\varepsilon_T}} \right] \left( v_{\max}^2 + 2\delta_T (r^2 + m^3 r/2 + m^2 x_*) \right)$  и  $\lim_{T \rightarrow \infty} T^{1-\alpha} \eta_T^* = 0$  для любого  $\alpha > 0$ .

**Предложение 2.** Случайные величины  $(\xi_k)_{1 \leq k \leq n}$  являются независимыми одинаково распределенными условно-гауссовскими с нулевым средним и единичной дисперсией относительно  $\sigma$ -алгебры наблюдений  $F_{t_{N_0}}$ , где  $F_t = \sigma\{y_s, 0 \leq s \leq t\}$ .

Свойства оценки (4), оценка для неизвестного коэффициента диффузии и доказательства предложений 1 и 2 приведены в [11, 14]. В работе неизвестный коэффициент диффузии является мешающим параметром. Заметим, что в условиях решаемой задачи коэффициенты  $(\sigma_k)_{1 \leq k \leq n}$  – ограниченные случайные величины, т.е. почти наверное

$$\sigma_* \leq \min_{1 \leq k \leq n} \sigma_k^2 \leq \max_{1 \leq k \leq n} \sigma_k^2 \leq \sigma^*,$$

где

$$\sigma_* = \frac{\varepsilon_T v_{\min}}{\delta_T N h}, \quad \sigma^* = \frac{v_{\max}}{\varepsilon_T \delta_T (N - N_0) h}.$$

## 2. Улучшенные взвешенные оценки

В данном разделе строится процедура оценивания для функции  $\mu(\cdot)$  в (6) на основе наблюдений  $(Y_k)_{1 \leq k \leq n}$ . Свойства компонент шума, сформулированные в предложениях 1 и 2, позволяют для этой задачи развить метод улучшенного оценивания, разработанный в [12, 13, 15].

Пусть  $(\phi_j)_{j \geq 1}$  – система функций в пространстве  $L_2[a, b]$ , ортонормированных относительно эмпирического скалярного произведения: для всех  $1 \leq i, j \leq n$

$$(\phi_i, \phi_j)_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \phi_i(z_k) \phi_j(z_k) = \mathbf{1}_{\{i=j\}}.$$

Например, можно рассмотреть систему сплайнов, введенную в [16], или при нечетных  $n$  систему тригонометрических функций вида:

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{b-a}}, \quad \phi_j(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \begin{cases} \cos(2\pi[j/2]l(x)), & \text{для четных } j, \\ \sin(2\pi[j/2]l(x)), & \text{для нечетных } j, \end{cases} \quad l(x) = \frac{x-a}{b-a}.$$

Запишем дискретное разложение Фурье функции  $\mu$ :

$$\mu(z_k) = \sum_{j=1}^n \theta_{j,n} \phi_j(z_k), \quad (7)$$

где  $\theta_{j,n} = (\mu, \phi_j)_n$  – коэффициенты Фурье. Тогда для оценивания функции  $\mu$  необходимо оценить неизвестные параметры  $\theta_{j,n}$ . В работе [11] оценки МНК для коэффициентов Фурье определяются как

$$\hat{\theta}_{j,n} = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=1}^n Y_k \phi_j(z_k), \quad 1 \leq j \leq n. \quad (8)$$

Подставляя теперь оценки (8) вместо коэффициентов  $\theta_{j,n}$  в разложении Фурье (7), получим оценку для функции  $\mu$ . Однако полученная такой подстановкой проекционная оценка, как установлено в [17, 18], не является эффективной (минимаксной). Поэтому в [11] предлагаются взвешенные оценки МНК ступенчатого вида: для всех  $a \leq z \leq b$

$$\hat{\mu}_\lambda(z) = \sum_{k=1}^n \hat{\mu}_\lambda(z_k) \mathbf{1}_{\{z_{k-1} < z \leq z_k\}} \quad \text{и} \quad \hat{\mu}_\lambda(z_k) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{\theta}_{j,n} \phi_j(z_k), \quad (9)$$

где  $\lambda = (1, \dots, 1, \lambda_{d+1}, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$  – вектор весовых коэффициентов, первые  $d$  ( $2 \leq d \leq n$ ) компонент которого равны 1, остальные убывают от 1 до 0. Например, можно взять следующие веса: для любых  $1 \leq \alpha \leq \alpha_0 + \sqrt{\ln T}$  и  $0 < \rho \leq r$

$$\lambda_j = \mathbf{1}_{\{1 \leq j \leq d\}} + (1 - (j/\omega_T)^\alpha) \mathbf{1}_{\{d+1 \leq j \leq \omega_T\}}, \quad (10)$$

где  $d = d(T) = 2[\sqrt{T}/\ln T]$ ,  $\omega_T = \omega_0 + \left( \frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)}{\pi^{2\alpha}\alpha} \rho \sqrt{T} \right)^{1/(2\alpha+1)}$ ,  $T \geq 2$ ,  $\alpha_0, \omega_0 > 0$  – некоторые постоянные. Другие примеры весов можно найти в [11, 18].

С целью повышения неасимптотического качества оценивания вместо оценок МНК (8) для коэффициентов Фурье определим следующие сжимающие оценки для  $1 \leq j \leq n$ :

$$\theta_{j,n}^* = (1 - g_n(j)) \hat{\theta}_{j,n}, \quad (11)$$

$$g_n(j) = c_n \left| \hat{\theta}_n \right|_d^{-1} \mathbf{1}_{\{1 \leq j \leq d\}}, \quad c_n = \frac{(d-1)(b-a)\sigma_*}{n \left( r + \sqrt{(b-a)d} \left( \sqrt{\eta_T^*} + \sqrt{\sigma^*} \right) \right)},$$

$\hat{\theta}_n = (\hat{\theta}_{1,n}, \dots, \hat{\theta}_{d,n})$  – вектор первых  $d$  оценок МНК,  $\left| \hat{\theta}_n \right|_d^2 = \sum_{j=1}^d \hat{\theta}_{j,n}^2$  – его евклидова норма в  $\mathbf{R}^d$ . Теперь введем взвешенные сжимающие оценки ступенчатого вида для неизвестной функции  $\mu$ : для всех  $a \leq z \leq b$

$$\mu_\lambda^*(z) = \sum_{k=1}^n \mu_\lambda^*(z_k) \mathbf{1}_{\{z_{k-1} < z \leq z_k\}} \quad \text{и} \quad \mu_\lambda^*(z_k) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \theta_{j,n}^* \phi_j(z_k), \quad (12)$$

Чтобы изучить свойства оценки (12), определим эмпирический среднеквадратический риск оценки  $\tilde{\mu}$  равенством

$$\mathfrak{R}_n(\tilde{\mu}, \mu) = \mathbf{E}_\mathfrak{g} \|\tilde{\mu} - \mu\|_n^2 := \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}_\mathfrak{g} (\tilde{\mu}(z_k) - \mu(z_k))^2. \quad (13)$$

Обозначим разность эмпирических рисков взвешенной оценки (12) и взвешенной оценки МНК (9) как

$$\Delta_n := \mathfrak{R}_n(\mu_\lambda^*, \mu) - \mathfrak{R}_n(\hat{\mu}_\lambda, \mu).$$

**Теорема.** Пусть наблюдения описываются уравнением (6). Тогда для всех  $T$ , таких что  $d \geq 2$ , и вектора  $\lambda = (1, \dots, 1, \lambda_{d+1}, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$  эмпирический риск оценки (12) удовлетворяет неравенству

$$\Delta_n \leq -c_n^2 + \sqrt{(b-a)d\eta_T^*} \cdot c_n.$$

**Доказательство.** Подставим в определение оценки МНК  $\hat{\theta}_{j,n}$  в (8) выражение для  $Y_k$  из (6), получим

$$\hat{\theta}_{j,n} = \bar{\theta}_{j,n} + \sqrt{\frac{b-a}{n}} \xi_{j,n}, \quad (14)$$

где

$$\bar{\theta}_{j,n} = \theta_{j,n} + \eta_{j,n}, \quad \xi_{j,n} = \sqrt{\frac{b-a}{n}} \sum_{k=1}^n \sigma_k \xi_k \phi_j(z_k), \quad \eta_{j,n} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \eta_k \phi_j(z_k).$$

Используя разложение (7) и определение оценки (11)–(12), имеем

$$\mathfrak{R}_n(\mu_\lambda^*, \mu) = \mathfrak{R}_n(\hat{\mu}_\lambda, \mu) + c_n^2 - 2c_n \mathbf{E}_\vartheta \left| \hat{\theta}_n \right|_d^{-1} \sum_{j=1}^d \hat{\theta}_{j,n} (\hat{\theta}_{j,n} - \theta_{j,n}).$$

Тогда разность эмпирических рисков

$$\Delta_n = c_n^2 - 2c_n \mathbf{E}_\vartheta \left| \hat{\theta}_n \right|_d^{-1} \sum_{j=1}^d \hat{\theta}_{j,n} (\hat{\theta}_{j,n} - \theta_{j,n}) = c_n^2 - 2c_n \mathbf{E}_\vartheta \left| \hat{\theta}_n \right|_d^{-1} \sum_{j=1}^d \hat{\theta}_{j,n} (\hat{\theta}_{j,n} - \bar{\theta}_{j,n} + \eta_{j,n}).$$

Из (14) и предложения 2 имеем, что  $\hat{\theta}_{j,n}$  имеют условно-гауссовское относительно  $\sigma$ -алгебры  $F_{t_{n_0}}$  распределение со средним  $\bar{\theta}_{j,n}$  и дисперсией  $\sigma_{j,n}^2 = \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \phi_j^2(z_k)$ . Тогда, следуя доказательству теоремы 4.1 из [19], находим

$$\mathbf{E}_\vartheta \left| \hat{\theta}_n \right|_d^{-1} \sum_{j=1}^d \hat{\theta}_{j,n} (\hat{\theta}_{j,n} - \bar{\theta}_{j,n}) \geq \frac{(d-1)(b-a)\sigma_*}{n} \mathbf{E}_\vartheta \left| \hat{\theta}_n \right|_d^{-1}.$$

Используя неравенство Йенсена, оценим снизу последнее математическое ожидание

$$\mathbf{E}_\vartheta \left| \hat{\theta}_n \right|_d^{-1} = \mathbf{E}_\vartheta \left| \theta_n + \eta_n + \sqrt{\frac{b-a}{n}} \xi_n \right|_d^{-1} \geq \left( \left| \theta_n \right|_d + \mathbf{E}_\vartheta \left| \eta_n \right|_d + \sqrt{\frac{b-a}{n}} \mathbf{E}_\vartheta \left| \xi_n \right|_d \right)^{-1}.$$

Заметим, что  $\left| \theta_n \right|_d \leq r$ . Применяя неравенство Коши–Буняковского и предложения 1 и 2, получим

$$\mathbf{E}_\vartheta \left| \eta_n \right|_d \leq \sqrt{(b-a)d\eta_T^*} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{b-a}{n}} \mathbf{E}_\vartheta \left| \xi_n \right|_d \leq \sqrt{(b-a)\sigma^* d}.$$

Поэтому

$$\mathbf{E}_\vartheta \left| \hat{\theta}_n \right|_d^{-1} \geq \left( r + \sqrt{(b-a)d} \left( \sqrt{\eta_T^*} + \sqrt{\sigma^*} \right) \right)^{-1}.$$

Значит

$$\mathbf{E}_\vartheta \left| \theta_n^* - \bar{\theta}_n \right|_d^2 \leq \mathbf{E}_\vartheta \left| \hat{\theta}_n - \bar{\theta}_n \right|_d^2 + c_n^2 - 2c_n \frac{(d-1)(b-a)\sigma_*}{n \left( r + \sqrt{(b-a)d} \left( \sqrt{\eta_T^*} + \sqrt{\sigma^*} \right) \right)} = \mathbf{E}_\vartheta \left| \hat{\theta}_n - \bar{\theta}_n \right|_d^2 - c_n^2.$$

Таким образом, для разности рисков имеем

$$\Delta_n \leq -c_n^2 + 2\mathbf{E}_\vartheta \sum_{j=1}^d \left( \theta_{j,n}^* - \hat{\theta}_{j,n} \right) \eta_{j,n}.$$

Далее, применяя элементарное неравенство  $2|ab| \leq \tilde{\varepsilon} a^2 + \tilde{\varepsilon}^{-1} b^2$  для любого  $\tilde{\varepsilon} > 0$ , имеем

$$2\mathbf{E}_\vartheta \sum_{j=1}^d \left( \theta_{j,n}^* - \hat{\theta}_{j,n} \right) \eta_{j,n} \leq \tilde{\varepsilon} c_n^2 + \tilde{\varepsilon}^{-1} \mathbf{E}_\vartheta \left| \eta_n \right|_d^2 \leq \tilde{\varepsilon} c_n^2 + \tilde{\varepsilon}^{-1} d(b-a)\eta_T^*.$$

Следовательно,

$$\Delta_n \leq -(1 - \tilde{\varepsilon})c_n^2 + \tilde{\varepsilon}^{-1}d(b - a)\eta_T^*.$$

Минимизируя правую часть по  $\tilde{\varepsilon}$ , находим  $\tilde{\varepsilon} = \sqrt{(b - a)d\eta_T^*}/c_n$  и приходим к утверждению теоремы. Теорема доказана.

**Замечание.** Поскольку рассматривается задача непараметрического оценивания, то размерность  $d \geq 2$  не фиксирована, а является неубывающей функцией от  $T$  [19]. В неравенстве из теоремы второе слагаемое справа  $\sqrt{(b - a)d\eta_T^*} \cdot c_n$  – некий штраф, который платим из-за аппроксимации диффузионной модели (2) регрессионной моделью (6) и из-за того, что наблюдается не вся траектория процесса на отрезке  $[0, T]$ , а лишь в конечном числе точек  $(t_j)_{0 \leq j \leq N}$ . Однако из предложения 1 следует, что при увеличении длительности (и частоты) наблюдений это слагаемое стремится к нулю с большей скоростью, чем  $-c_n^2$ , что обеспечивает улучшение точности, начиная с некоторого  $T$ , т.е.  $\Delta_n < 0$ .

**Следствие.** В условиях теоремы:

1) для любого  $\tilde{\varepsilon} > 0$  и любого  $\Theta \in \Theta$  справедливо следующее неравенство для среднеквадратического риска (3) оценки (9):

$$\mathfrak{R}_g(\mu_\lambda^*, \mu) \leq (1 + \tilde{\varepsilon})^2 \mathfrak{R}_g(\hat{\mu}_\lambda, \mu) - (1 + \tilde{\varepsilon})c_n^2 + (1 + \tilde{\varepsilon})\sqrt{(b - a)d\eta_T^*}c_n + 2(1 + \tilde{\varepsilon}^{-1})\frac{\|\dot{\mu}\|^2}{n^2};$$

2) при достаточно больших  $T$  для разности рисков  $\Delta_g(\mu) = \mathfrak{R}_g(\mu_\lambda^*, \mu) - \mathfrak{R}_g(\hat{\mu}_\lambda, \mu)$  выполнено

$$\sup_{\Theta \in \Theta} \Delta_g(\mu) \leq -c_n^2.$$

**Доказательство.** Первое утверждение следует из доказанной теоремы и леммы А.2 из [20] о связи эмпирической нормы и нормы пространства  $L_2[a, b]$ . Второе – из теоремы, утверждения 1 и предложения 1.

### 3. Численное моделирование

В этом разделе приведены результаты численного сравнения эмпирических квадратичных рисков предложенной улучшенной процедуры (12) и МНК (9).

Предположим, что в модели (1) функция  $\mu$  определена на  $[0, 1]$  ( $a = 0, b = 1$ ) как

$$\mu(z) = z \sin(2\pi z).$$

Вне отрезка может быть доопределена произвольным способом с учетом определения класса  $M_{m,r}$  с  $m = 2$  и  $r = 10$ . Для вычисления весовых коэффициентов в (10) положим  $\alpha = 1, \omega_0 = 100$  и  $\rho = 1$ , т.е. для  $1 \leq j \leq n$ :

$$\lambda_j = \mathbf{1}_{\{1 \leq j \leq d\}} + (1 - (j / \omega_T))\mathbf{1}_{\{d+1 \leq j \leq \omega_T\}},$$

где  $d = d(T) = 2[\sqrt{T} / \ln T]$ ,  $\omega_T = 100 + (6\sqrt{T} / \pi^2)^{1/3}$ ,  $T \geq 100$ .

Эмпирические среднеквадратические риски (13) рассчитываются по приближенной формуле

$$\tilde{\mathfrak{R}}_n(\mu^*, \mu) \approx \frac{1}{1000} \sum_{l=1}^{1000} \|\mu_l^* - \mu\|_n^2$$

где  $\mu_l^*$  – оценка, полученная по  $l$ -й реализации выборки. В таблице приведены результаты поведения эмпирических среднеквадратических рисков при увеличении  $T$ .

Из таблицы видно, что эмпирический риск предлагаемой процедуры меньше, чем для процедуры, основанной на оценках МНК для заданных  $T$ . Отметим, что риски обеих оценок уменьшаются с ростом  $T$  и их пределы при  $T \rightarrow \infty$  неразличимы (поскольку  $\theta_{j,n}^* \rightarrow \hat{\theta}_{j,n}$ ). Улучшенное оценивание полезно на практике, когда количество наблюдений ограничено. Далее для иллюстрации на рис. 1

представлены графики функции  $\mu$  (сплошная красная линия) и ее оценок МНК (ступенчатая синяя линия) и улучшенной (ступенчатая черная линия) при  $T = 10^4$  (слева) и  $10^5$  (справа).

#### Эмпирические среднеквадратические риски

$T$	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
$\tilde{\mathfrak{R}}_n(\mu^*, \mu)$	2,1885	0,7303	0,4641	0,0832	0,0077
$\tilde{\mathfrak{R}}_n(\hat{\mu}, \mu)$	8,6656	2,0972	1,0834	0,4762	0,1589
$\tilde{\mathfrak{R}}_n(\hat{\mu}, \mu) / \tilde{\mathfrak{R}}_n(\mu^*, \mu)$	3,96	2,87	2,33	5,72	20,64

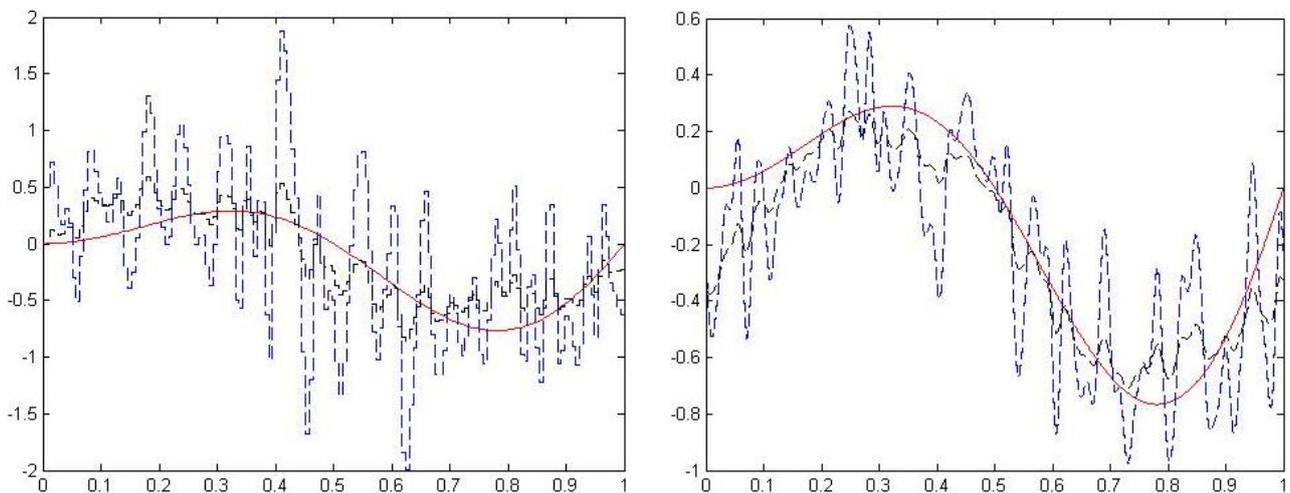


Рис. 1. Графики истинной функции и ее оценок  
Fig.1. Graphs of the true function and its estimates

Из рис. 1 видно, как предлагаемая оценка «сжимает» оценку МНК и тем самым лучше приближает истинную функцию.

### Заключение

В работе впервые рассматривается стохастическая модификация SIR модели типа Кермака–Маккендрика для описания процесса распространения эпидемии, в которой динамика инфицирования определяется эргодическим диффузионным процессом с неизвестным коэффициентом диффузии. Предлагается улучшенная процедура оценивания функции сноса диффузионного процесса, которая позволяет повысить неасимптотическое качество обработки данных. Построение процедуры основано на особом алгоритме сжатия классических оценок МНК. В этом случае дополнительная априорная информация и увеличение объема наблюдения по сравнению с другими методами не требуются. Представленные теоретические результаты подтверждаются соответствующими экспериментальными данными, полученными в ходе моделирования. Видно, что выигрыш в среднеквадратической точности значителен.

#### Список источников

1. Kermack W.O., McKendrick A.G. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics // Proc. of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. 1927. V. 115, № 772. P. 700–721.
2. Bustamante-Castaneda F., Caputo J.-G., Cruz-Pacheco G., Knippel A., Mouatamide F. Epidemic model on a network: Analysis and applications to COVID-19 // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2021. V. 564. Art. 125520. doi: 10.1016/j.physa.2020.125520
3. Baron M. Statistics and COVID-19: Estimation of Under-Reported Epidemic Counts. Washington DC : American University, 2021.
4. Cohen D.S., Murray J.D. A generalized diffusion model for growth and dispersal in a population // J. Math. Biology. 1981. V. 12. P. 237–249.

5. Kutoyants Yu.A. Statistical Inferences for Ergodic Diffusion Processes. Berlin : Springer, 2003.
6. Karatzas I., Shreve S.E. Methods of Mathematical Finance. New York : Springer, 1998.
7. Ratcliff R. Diffusion and Random Walk Processes // International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences / J.D. Wright (ed.). 2nd ed. Amsterdam ; New York : Elsevier, 2001. V. 6: DEV–EDU. P. 3668–3673.
8. Pchelintsev E.A., Perelevskiy S.S., Makarova I.A. Improved nonparametric estimation of the drift in diffusion processes // Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки. 2018. Т. 160, № 2. С. 364–372.
9. Pchelintsev E.A., Perelevskiy S.S. Asymptotically efficient estimation of a drift coefficient in diffusion processes // Applied Methods of Statistical Analysis. Statistical Computation and Simulation. AMSA 2019, Novosibirsk, 18–20 September 2019 : Proc. of the International Workshop. Novosibirsk : NSTU publisher, 2019. P. 235–242.
10. Galtchouk L.I., Pergamenschchikov S.M. Asymptotically efficient sequential kernel estimates of the drift coefficient in ergodic diffusion processes // Statistical Inference for Stochastic Processes. 2006. V. 9. P. 1–16.
11. Galtchouk L., Pergamenschchikov S.M. Adaptive efficient analysis for big data ergodic diffusion models // Statistical Inference for Stochastic Processes. 2022. V. 25 (1). P. 127–158.
12. Пчелинцев Е.А., Перелевский С.С. Адаптивное оценивание в гетероскедастичной непараметрической регрессии // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 57. С. 38–52.
13. Пчелинцев Е.А., Перелевский С.С. Адаптивное эффективное оценивание функции в гетероскедастичной регрессии // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2019. № 49. С. 73–81.
14. Galtchouk L.I., Pergamenschchikov S.M. Efficient pointwise estimation based on discrete data in ergodic nonparametric diffusions // Bernoulli. 2015. V. 21 (4). P. 2569–2594.
15. Pchelintsev E. Improved estimation in a non-Gaussian parametric regression // Statistical Inference for Stochastic Processes. 2013. V. 16 (1). P. 15–28.
16. Demmler A., Reinsch C. Oscillation matrices with spline smoothing // Numer. Math. 1975. V. 24. P. 375–382.
17. Pinsker M.S. Optimal filtration of square integrable signals in Gaussian white noise // Problems Transmiss. Information. 1981. № 17. P. 120–133.
18. Pchelintsev E., Pergamenschchikov S.M., Povzun M. Efficient estimation methods for non-Gaussian regression models in continuous time // Annals of the Institute of Statistical Mathematics. 2022. V. 74 (1). P. 113–142.
19. Pchelintsev E.A., Pergamenschchikov S.M., Leshchinskaya M. Improved estimation method for high dimension semimartingale regression models based on discrete data // Statistical Inference for Stochastic Processes. 2022. V. 25 (1). P. 537–576.
20. Konev V.V., Pergamenschchikov S.M. Robust model selection for a semimartingale continuous time regression from discrete data // Stochastic Processes and their Applications. 2015. № 125. P. 294–326.

#### References

1. Kermack, W.O. & McKendrick, A.G. (1927) A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*. 115(772). pp. 700–721.
2. Bustamante-Castaneda, F., Caputo, J.-G., Cruz-Pacheco, G., Knippel, A. & Mouatamide, F. (2021) Epidemic model on a network: Analysis and applications to COVID-19. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 564. Art. 125520. DOI: 10.1016/j.physa.2020.125520
3. Baron, M. (2021) *Statistics and COVID-19: Estimation of Under-Reported Epidemic Counts*. Washington DC: American University.
4. Cohen, D.S. & Murray, J.D. (1981) A generalized diffusion model for growth and dispersal in a population. *Journal of Mathematical Biology*. 12. pp. 237–249. DOI: 10.1007/BF00276132
5. Kutoyants, Yu.A. (2003) *Statistical Inferences for Ergodic Diffusion Processes*. Berlin: Springer.
6. Karatzas, I. & Shreve, S.E. (1998) *Methods of Mathematical Finance*. New York: Springer.
7. Ratcliff, R. (2001) Diffusion and Random Walk Processes. In: Wright, J.D. (ed.) *International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences*. 2nd ed. Vol. 6. Amsterdam; New York: Elsevier. pp. 3668–3673.
8. Pchelintsev, E.A., Perelevskiy, S.S. & Makarova, I.A. (2018) Improved nonparametric estimation of the drift in diffusion processes. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Ser. Fiziko-matematicheskie nauki*. 160(2). pp. 364–372.
9. Pchelintsev, E.A. & Perelevskiy, S.S. (2019) Asymptotically efficient estimation of a drift coefficient in diffusion processes. *Applied Methods of Statistical Analysis. Statistical Computation and Simulation*. AMSA 2019. Novosibirsk, September 18–20, 2019. Novosibirsk: NSTU. pp. 235–242.
10. Galtchouk, L.I. & Pergamenschchikov, S.M. (2006) Asymptotically efficient sequential kernel estimates of the drift coefficient in ergodic diffusion processes. *Statistical Inference for Stochastic Processes*. 9. pp. 1–16. DOI: 10.1007/s11203-005-3248-4
11. Galtchouk, L. & Pergamenschchikov, S.M. (2022) Adaptive efficient analysis for big data ergodic diffusion models. *Statistical Inference for Stochastic Processes*. 25(1). pp. 127–158. DOI: 10.1007/s11203-021-09241-9
12. Pchelintsev, E.A. & Perelevskiy, S.S. (2019) Adaptive estimation in heteroscedastic nonparametric regression. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 57. pp. 38–52. DOI: 10.17223/19988621/57/3
13. Pchelintsev, E.A. & Perelevskiy, S.S. (2019) Adaptive efficient estimation of a function in heteroscedastic regression. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 49. pp. 73–81. DOI: 10.17223/19988605/49/9

14. Galtchouk, L.I. & Pergamenshchikov, S.M. (2015) Efficient pointwise estimation based on discrete data in ergodic nonparametric diffusions. *Bernoulli*. 21(4). pp. 2569–2594. DOI: 10.3150/14-BEJ655
15. Pchelintsev, E. (2013) Improved estimation in a non-Gaussian parametric regression. *Statistical Inference for Stochastic Processes*. 16(1). pp. 15–28. DOI: 10.1007/s11203-013-9075-0
16. Demmler, A. & Reinsch, C. (1975) Oscillation matrices with spline smoothing. *Numerische Mathematik*. 24. pp. 375–382.
17. Pinsker, M.S. (1981) Optimal filtration of square integrable signals in Gaussian white noise. *Problems Transimis. Information*. 17. pp. 120–133.
18. Pchelintsev, E., Pergamenshchikov, S.M. & Povzun, M. (2022) Efficient estimation methods for non-Gaussian regression models in continuous time. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. 74(1). pp. 113–142.
19. Pchelintsev, E.A., Pergamenshchikov, S.M. & Leshchinskaya, M. (2022) Improved estimation method for high dimension semimartingale regression models based on discrete data. *Statistical Inference for Stochastic Processes*. 25(1). pp. 537–576.
20. Konev, V.V. & Pergamenshchikov, S.M. (2015) Robust model selection for a semimartingale continuous time regression from discrete data. *Stochastic Processes and their Applications*. 125. pp. 294–326.

**Информация об авторах:**

**Перелевский Святослав Сергеевич** – младший научный сотрудник международной лаборатории статистики случайных процессов и количественного финансового анализа научного управления Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: slavaperelevskiy@mail.ru

**Пчелинцев Евгений Анатольевич** – доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: evgen-pch@yandex.ru

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Information about the authors:**

**Perelevskiy Svyatoslav S.** (Researcher, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: slavaperelevskiy@mail.ru

**Pchelintsev Evgeny A.** (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: evgen-pch@yandex.ru

**The author declares no conflicts of interests.**

*Поступила в редакцию 22.08.2023; принята к публикации 08.12.2023*

*Received 22.08.2023; accepted for publication 08.12.2023*

Научная статья

УДК 519.246.5

doi: 10.17223/19988605/65/9

## Две естественно-научные задачи статистической оценки при наличии мешающего параметра

Гурами Шалвович Цициашвили<sup>1</sup>, Владимир Николаевич Бочарников<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия, guram@iam.dvo.ru*

<sup>2</sup> *Тихоокеанский институт географии ДВО РАН, Владивосток, Россия, vbocharnikov@mail.ru*

**Аннотация.** Рассматриваются две задачи статистической оценки при наличии мешающего параметра. Первая задача состоит в оценке общего числа осколков метеорита по числу осколков, извлеченных в первом, втором и последующих годах. Мешающими параметрами являются вероятности нахождения осколков в разные годы. Качество оценки определяется отношением оценки числа осколков к точному значению и стремится к единице по вероятности при устремлении к бесконечности общего числа осколков. Вторая задача состоит в определении числа посещений животными солонца по наблюдениям с фотоловушки. Основная трудность задачи в том, что один и тот же зверь может регистрироваться и учитываться несколько раз как разные звери. Общее число животных, пришедших к солонцу, определяется формулой для стационарного распределения числа заявок в системе массового обслуживания с бесконечным числом приборов. Мешающим параметром берется интенсивность обслуживания. Задача решается с помощью эргодичности процесса обслуживания. В системах с различной интенсивностью потока зверей отношение интенсивностей определяется отношением числа наблюдений с фотоловушки.

**Ключевые слова:** мешающий параметр; эргодичность; система массового обслуживания.

**Для цитирования:** Цициашвили Г.Ш., Бочарников В.Н. Две естественно-научные задачи статистической оценки при наличии мешающего параметра // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 65. С. 89–94. doi: 10.17223/19988605/65/9

Original article

doi: 10.17223/19988605/65/9

## Two natural science problems of statistical evaluation in the presence of an interfering parameter

Gurami Sh. Tsitsiashvili<sup>1</sup>, Vladimir N. Bocharnikov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Institute for Applied Mathematics, FEB of RAS, Vladivostok, Russian Federation, guram@iam.dvo.ru*

<sup>2</sup> *Institute of Pacific Ocean Geography, FEB of RAS, Vladivostok, Russian Federation, vbocharnikov@mail.ru*

**Abstract.** The paper considers two tasks of statistical evaluation in the presence of an interfering parameter. The first task is to estimate the total number of meteorite fragments by the number of fragments recovered in the first, second, etc. years. The interfering parameters are the probabilities of finding fragments in different years. The quality of the estimate is determined by the ratio of the estimate of the number of fragments to the exact value and tends to unity in probability with an aspiration to infinity of the total number of fragments. The second task is to determine the number of visits to the animals of the salt lake from observations from a camera trap. The main difficulty of the task is that the same animal can be registered and counted several times as different animals. The total number of animals that came to solonets is determined by the formula for the stationary distribution of the number of applications in a queuing system with an infinite number of devices. The interfering parameter is the intensity of service. The problem is solved using the ergodicity of the service process. In systems with different intensity of the flow of animals, the intensity ratio is determined by the ratio of the number of observations from the camera trap.

**Keywords:** interfering parameter; ergodicity; queuing system.

**For citation:** Tsitsiashvili, G.Sh., Bocharnikov, V.N. (2013) Two natural science problems of statistical evaluation in the presence of an interfering parameter. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 65. pp. 89–94. doi: 10.17223/19988605/65/9

## Введение

Оценивание параметров статистической выборки при наличии мешающего параметра является важной статистической задачей [1, 2]. Эта задача нашла свое применение в квантовой физике, где обычно мешающие параметры называются скрытыми параметрами [3–5]. Она решалась и при создании квантовых компьютеров [6]. Методы решения задачи о мешающих параметрах применялись при анализе следов тигра в Приморье в 2005 г. [7]. В работе в качестве мешающего параметра выбрана вероятность обнаружения следа. Такой выбор мешающего параметра позволяет воспользоваться теоремой о раскраске точек пуассоновского потока [8] для оценки параметра пуассоновского распределения относительного числа точек потока в заданной области.

Однако в науках о Земле возникают и другие задачи, требующие включения мешающих параметров в вероятностные модели наблюдений. В настоящей работе рассматриваются две такие задачи. Первая задача – оценка числа осколков метеорита по многократным наблюдениям за числом извлекаемых осколков. Вторая задача – оценка интенсивности посещений животных, регистрируемых фотоловушками, установленными на подкормочных площадках или зверовых солонцах. Обе эти задачи требуют использования аппарата комбинаторной теории вероятностей и теории массового обслуживания. В первой задаче мешающим параметром является вероятность обнаружения осколка метеорита.

Во второй задаче мешающий параметр характеризует среднее время пребывания животного в системе, связанной с солончаком. Подсчет общего числа животных не может быть сделан без серьезных ошибок, если выполнять его по частоте регистраций фотоловушкой. Причина в том, что невозможно доказать различие копытных животных, следовательно, один и тот же зверь может регистрироваться несколько раз и учитываться как разные животные. Если предположить, что животное может подходить к солонцу раз в день и его последовательные подходы будут ежедневными до состояния насыщения, то тогда время пребывания животного у солонца можно интерпретировать как время обслуживания, а число каналов можно считать бесконечным, поскольку конкуренцией животных за подобный ресурс можно пренебречь. Наконец, время пребывания животного в системе, связанной с солончаком, с достаточной долей погрешности можно считать одинаковым для различных отрезков времени (месяцев). Это позволяет оценивать отношение числа животных, приходящих в разные периоды времени (разные месяцы) в систему, связанную с солончаком, через отношение числа животных, фиксированных фотоловушкой в разные периоды времени.

### 1. Задача об оценке числа осколков метеорита

В 1947 г. на территорию Приморья упал Сихоте-Алинский метеорит. С этого момента начались наблюдения за осколками этого метеорита. В 1997 г. членом-корреспондентом РАН В.П. Коробейниковым во Владивостоке была организована научная конференция, посвященная этому событию, с выездом участников на место падения метеорита. Во время конференции обсуждалась задача оценки числа осколков метеорита по информации о числе осколков, найденных и извлеченных из земли в ходе нескольких экспедиций. Для решения этой задачи в данной работе предложена специальная вероятностная модель оценки общего числа осколков метеорита с анализом погрешностей предлагаемой оценки.

Пусть имеется выборка из  $N$  объектов (в нашем случае осколков метеорита). На первом шаге извлечено из выборки  $N_1$  объектов с вероятностью  $p_1$  каждый. На втором шаге из неизвлеченных объектов извлечено  $N_2$  объектов с вероятностью  $p_2$  каждый и т.д. Пусть на  $(m - 1)$ -м шаге извлечено  $N_{m-1}$  объектов, а на  $m$ -м шаге  $N_m$  объектов с вероятностью  $p_m = p_{m-1}$ ,  $m > 1$ , каждый. Требуется по известным

значениям  $N_1, \dots, N_m$  построить оценку  $N$  общего числа объектов выборки  $N$ . Здесь вероятности  $p_1, \dots, p_{m-2}, p_{m-1}$  извлечения объектов на шагах  $1, 2, \dots, m$  неизвестны и могут быть различны. Тогда эти вероятности можно назвать мешающими параметрами.

Задачу решим методом моментов. Обозначим  $n_1, \dots, n_k$  математические ожидания случайных величин  $N_1, \dots, N_k$  соответственно и  $q_i = 1 - p_i, i = 1, \dots, m$ . Тогда имеют место равенства

$$n_1 = N \cdot p_1, \quad n_2 = q_1 \cdot p_2, \quad n_3 = q_1 \cdot q_2 \cdot p_3, \dots, \quad n_{m-1} = q_1 \cdot \dots \cdot q_{m-2} \cdot p_{m-1}, \quad n_m = q_1 \cdot \dots \cdot q_{m-1} \cdot p_{m-1}.$$

Докажем, что выполняется равенство

$$N = \sum_{i=1}^{m-2} n_i + \frac{n_{m-1}^2}{n_{m-1} - n_m},$$

эквивалентное при  $p_{m-1} = p_m$  равенству

$$A_m = \sum_{i=1}^{m-2} p_i \prod_{j=1}^{i-1} q_j + \frac{p_{m-1}^2 \prod_{j=1}^{m-2} q_j^2}{p_{m-1} \prod_{j=1}^{m-2} q_j - p_{m-1} \prod_{j=1}^{m-1} q_j} = 1.$$

Действительно,

$$A_m = \sum_{i=1}^{m-3} p_i \prod_{j=1}^{i-1} q_j + \frac{p_{m-1}^2 \prod_{j=1}^{m-2} q_j^2}{p_{m-1}^2 \prod_{j=1}^{m-2} q_j} = \sum_{i=1}^{m-3} p_i \prod_{j=1}^{i-1} q_j + \prod_{j=1}^{m-2} q_j = A_{m-1} = \dots = A_1 = p_1 + q_1 = 1.$$

Отсюда получаем формулу, которая позволяет построить оценку  $N(m)$  параметра  $N$  по набору наблюдений  $N_1, \dots, N_m$  при выполнении равенства  $p_m = p_{m-1}$  методом моментов:

$$N(m) = \sum_{i=1}^{m-2} N_i + \frac{N_{m-1}^2}{N_{m-1} - N_m}. \quad (1)$$

Из формулы (1) следует равенство

$$\frac{N(m)}{N} = \sum_{i=1}^{m-2} \frac{N_i}{N} + \frac{(N_{m-1}/N)^2}{N_{m-1}/N - N_m/N}. \quad (2)$$

В свою очередь, из закона больших чисел в форме Чебышева получаем сходимости по вероятности

$$\frac{N_i}{N} \xrightarrow{P} p_i \prod_{j=1}^{i-1} q_j, \quad N \rightarrow \infty, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3)$$

Соединяя формулы (2), (3) приходим к сходимости по вероятности

$$\frac{N(m)}{N} \xrightarrow{P} A_m = 1, \quad N \rightarrow \infty.$$

## 2. Задача об оценке числа животных по наблюдениям с фотоловушки

Задача обработки данных по времени пребывания и частоте посещения животными фотоловушек в последнее время становится все более актуальной. Фото и видео автоматической регистрации животных (данные фотоловушек) позволяют хорошо идентифицировать некоторые редкие виды, например крупных кошек (тигр, леопард), по их индивидуальной окраске (сочетание полос и пятен на шкуре зверя). Для фото и видео наиболее ценных копытных животных (изюбрь, косуля, лось) персональная идентификация зверей не является возможной. Исключением может быть краткий период (полтора–два месяца в году), когда взрослых самцов (быков) можно отличать по конфигурации рогов. Поэтому фотоловушки фиксируют подход таких животных, но без их индивидуализации. Это затрудняет учет числа животных, зафиксированных фотоловушкой в течение некоторого интервала

времени. Чтобы преодолеть эту трудность, необходимо воспользоваться элементами теории массового обслуживания применительно к системе с бесконечным числом приборов. В частности, такая система возникает при подсчете подходе животных к солонцам. Если предположить, что животное может подходить к солонцу раз в день и ее последовательные подходы будут ежедневными до состояния насыщения, то тогда время пребывания животного у солонца можно интерпретировать как время обслуживания, а число каналов можно считать бесконечным, поскольку конкуренцией животных за подобный ресурс можно пренебречь. Наконец, время пребывания животного у солонца с достаточной долей погрешности можно считать одинаковым для различных отрезков времени (месяцев).

Это позволяет получить информацию о степени общего использования солонца зверями для удовлетворения их потребностей, что сопоставимо с числом заявок в системе массового обслуживания с бесконечным числом приборов. Для такой системы в ряде случаев нетрудно рассчитать предельное распределение и установить эргодичность этой системы в смысле равенства среднего (числа животных) по ансамблю и среднего по траектории большой длины. Первую характеристику можно рассчитать по стационарному распределению процесса числа заявок в системе обслуживания (у солончика), а вторую характеристику можно рассчитать по наблюдениям с фотоловушки.

Подсчет общего числа животных не может быть сделан без серьезных ошибок, если выполнять его по частоте регистраций фотоловушкой. Причина в том, что невозможно доказать различие копытных животных, следовательно, один и тот же зверь может регистрироваться несколько раз и учитываться как разные животные. Не помогают в этих расчетах и фиксированные сведения о дате и времени пребывания, что также фиксируется фотоловушкой. Необходимо убирать мешающий параметр и строить данные по встречам животных как относительное число, фактически совпадающее с общим числом регистраций всех животных по месяцам. Эти параметры выражают средние значения суточных и сезонных посещений животными солонцов [9–11].

Рассмотрим систему массового обслуживания  $M | M | \infty$  с бесконечным числом приборов, интенсивностью пуассоновского входного потока  $\lambda$  и интенсивностью обслуживания на отдельном приборе  $\mu$ . Обозначим  $x(t)$  число заявок в этой системе в момент времени  $t$ . Известно, что случайный процесс  $x(t)$  является процессом гибели и рождения, а его предельное распределение является пуассоновским [12. Гл. III, 3] с параметром  $\rho = \lambda / \mu$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(x(t) = k) = \frac{e^{-\rho} \rho^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Случайный процесс  $x(t)$  является эргодическим. На физическом уровне строгости это означает: среднее по ансамблю равно среднему по траектории. Математически строго такая эргодичность выражается соотношением: при  $T \rightarrow \infty$  среднее значение процесса  $x(t)$  по реализации длины  $T$  сходится по вероятности к среднему значению его стационарного распределения. В нашем случае, пользуясь, например, [13. Гл. V, 2], это соотношение можно представить следующим образом:

$$A(T) = \frac{\int_0^T x(t) dt}{T} \xrightarrow{P} \rho, \quad T \rightarrow \infty.$$

Предположим, что имеется две системы массового обслуживания  $M | M | \infty$ , которые описываются процессами гибели и рождения  $x_1(t), x_2(t)$  с интенсивностями входных потоков  $\lambda_1, \lambda_2$  и одинаковой интенсивностью обслуживания  $\mu$ . Тогда отношение средних по времени на отрезке  $[0, T]$  процессов  $x_1(t), x_2(t)$  сходится при  $T \rightarrow \infty$  по вероятности к отношению интенсивностей входных потоков:

$$\frac{A_1(T)}{A_2(T)} \xrightarrow{P} \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad T \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Обозначим  $B(T) = TA(T)$ , тогда из формулы (4) получаем

$$\frac{B_1(T)}{B_2(T)} \xrightarrow{P} \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad T \rightarrow \infty.$$

Остается оценить  $B_1(T), B_2(T)$  суммарным числом  $C_1, C_2$  наблюдений за животными, подошедшими к фотоловушке в течение отрезка времени  $T$  (месяц). Можно построить приближенную оценку отношения

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_1 T}{\lambda_2 T} \approx \frac{C_1}{C_2}.$$

Здесь  $\lambda_1 T, \lambda_2 T$  – параметры пуассоновского распределения числа точек потоков интенсивности  $\lambda_1, \lambda_2$  соответственно. Эти параметры выражают средние значения числа приходов животных в систему, связанную с солончаком.

### Заключение

В настоящей статье решаются две естественно-научные статистические задачи, в которые включены мешающие параметры. Первая задача посвящена оценке числа  $N$  осколков метеорита по наблюдениям за числом обнаруженных и извлеченных осколков в последовательные моменты времени. В предположении, что вероятности обнаружения осколков в моменты  $1, \dots, m$  равны  $p_1, p_2, \dots, p_{m-1}, p_m$ , причем  $p_{m-1} = p_m$ , построена оценка  $N(m)$  параметра  $N$ . Вероятности  $p_1, p_2, \dots, p_{m-1}, p_m$  полагаются мешающими параметрами, значения которых не оцениваются. Доказано, что отношение  $\frac{N(m)}{N}$  при  $N \rightarrow \infty$  сходится по вероятности к единице и, значит, относительная ошибка предложенной оценки стремится к нулю (по вероятности).

Решена задача об оценке числа приходов животных к солончаку по наблюдениям с фотоловушки, установленной у солончака. Для решения этой задачи построена математическая модель системы массового обслуживания с бесконечным числом каналов, описывающая число приходов животных к солончаку. Предполагается, что животные непрерывно посещают солончак, находясь в его окрестности, в течение показательно распределенного случайного времени. Параметр этого распределения  $\mu$  полагается мешающим параметром. Для оценки интенсивности потока животных, поступающих в систему, связанную с солончаком, используется пуассоновское распределение числа заявок в системе массового обслуживания с бесконечным числом каналов. Параметром этого распределения является отношение  $\rho$  интенсивности входного потока  $\lambda$  к мешающему параметру  $\mu$ . Используя эргодичность процесса, характеризующего число заявок в описанной системе обслуживания, можно по наблюдению с фотоловушки в течение достаточно длительного интервала времени  $T$  (порядка месяца), оценить параметр  $\rho$ , а затем по этим оценкам в разные интервалы времени (месяцы) оценить отношение интенсивностей прихода заявок (животных) в систему солончака в разные месяцы. Учитывая, что отношение интенсивностей потоков в разные месяцы совпадает с отношением числа заявок, приходящих в систему, можно оценить отношение числа животных, пришедших в систему солончака в разные месяцы.

### Список источников

1. Кокс Д., Хинкли Д. Теоретическая статистика. М.: Мир, 1978. 560 с.
2. Young G.A., Smith R.L. Essentials of Statistical Inference. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. x, 225 p.
3. Jie Z., Hai-Lin F. Consistent estimation of ordinary differential equation when transformation parameter is unknown // Statistics and Probability Letters. 2016. V. 115. P. 60–69.
4. Lixin M., Jiwei Z., Xue Z., Guozhong F. Bayesian estimation of time-varying parameters in ordinary differential equation models with noisy time-varying covariates // Communications in Statistics – Simulation and Computation. 2021. V. 50 (3). P. 708–723.
5. Холево А.С. Статистические структуры квантовой механики и скрытые параметры. М.: Знание, 1985. 32 с.
6. Холево А.С. Квантовые системы, каналы, информация. М.: МЦНМО, 2010. 327 с.
7. Цициашвили Г.Ш., Бочарников В.Н., Краснопеов С.М. Метод устранения мешающего параметра в статистике пуассоновского потока точек // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. Т. 62, № 1. С. 101–106.

8. Кингман Дж. Пуассоновские процессы. М. : МЦНМО, 2007. 136 с.
9. Лукаревский В.С., Лукаревский С.В. Оценка численности дальневосточного леопарда (*Panthera pardus*) в России // Зоологический журнал. 2019. Т. 98, № 5. С. 567–577.
10. Огурцов С.С. Обзор программного обеспечения для обработки данных с фотоловушек: последние новинки, работа с видео и ГИС. *Nature Conservation Research // Заповедная наука*. 2019. Т. 4, № 2. С. 95–124.
11. Калинин Ю.Н. Суточная активность копытных на солонцах Алтайского заповедника. Полевые исследования в Алтайском биосферном заповеднике // *Зоология*. 2023. № 5. С. 6–14.
12. Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания : учеб. пособие для вузов. М. : Высшая школа, 1982. 256 с.
13. Калашников В.В. Качественный анализ поведения сложных систем. М. : Наука, 1978. 247 с.

#### References

1. Cox, D. & Hinckley, D. (1978) *Teoreticheskaya statistika* [Theoretical Statistics]. Translated from English. Moscow: Mir.
2. Young, G.A. & Smith, R.L. (2005) *Essentials of Statistical Inference*. Cambridge: University Press, UK.
3. Jie, Z. & Hai-Lin, F. (2016) Consistent estimation of ordinary differential equation when transformation parameter is unknown. *Statistics and Probability Letters*. 115. pp. 60–69.
4. Lixin, M., Jiwei, Z., Xue, Z. & Guozhong, F. (2021) Bayesian estimation of time-varying parameters in ordinary differential equation models with noisy time-varying covariates. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*. 50(3). pp. 708–723.
5. Holevo, A.S. (1985) *Statisticheskie struktury kvantovoy mekhaniki i skrytye parametry* [Statistical Structures of Quantum Mechanics and Hidden Parameters]. Moscow: Znanie.
6. Holevo, A.S. (2010) *Kvantovye sistemy, kanaly, informatsiya* [Quantum Systems, Channels, Information]. Moscow: ICNMO.
7. Tsitsiashvili, G.Sh., Bocharnikov, V.N. & Krasnopeev, S.M. (2023) The method of eliminating the interfering parameter in the statistics of the Poisson flow of points. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 62(1). pp. 101–106.
8. Kingman, J. (2007) *Puassonovskie protsessy* [Poisson Processes]. Translated from English. Moscow: ICNMO.
9. Lukarevsky, V.S. & Lukarevsky, S.V. (2019) Estimation of the number of the Far Eastern leopard (*PANTHERA PARDUS*) in Russia. *Zoologicheskii zhurnal – Zoological Journal*. 98(5). pp. 567–577.
10. Ogurtsov, S.S. (2019) Review of software for processing data from camera traps: The latest novelties, working with video and GIS. *Nature Conservation Research. Zapovednaya nauka*. 4(2). pp. 95–124.
11. Kalinkin, Yu.N. (2023) Daily activity of ungulates on the salt flats of the Altai Reserve. Field research in the Altai Biosphere Reserve. *Zoologiya – Zoology*. 5. pp. 6–14.
12. Ivchenko, G.I., Kashtanov, V.A. & Kovalenko, I.N. (1982) *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [The Theory of Queuing]. Moscow: HSE.
13. Kalashnikov, V.V. (1978) *Kachestvennyy analiz povedeniya slozhnykh sistem* [The Qualitative Analysis of the Behavior of Complex Systems]. Moscow: Nauka.

#### Информация об авторах:

**Цициашвили Гурами Шалвович** – профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института прикладной математики ДВО РАН (Владивосток, Россия). E-mail: guram@iam.dvo.ru

**Бочарников Владимир Николаевич** – доктор биологических наук, ведущий научный сотрудник Тихоокеанского института географии ДВО РАН (Владивосток, Россия). E-mail: vbocharnikov@mail.ru

**Вклад авторов:** Цициашвили Г.Ш. построил вероятностные модели и оценки их параметров. Бочарников В.Н. дал детальное описание работы фотоловушек при наблюдениях за животными, неразличимыми по снимкам, и сформулировал содержательную задачу обработки этих данных. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

#### Information about the authors:

**Tsitsiashvili Gurami Sh.** (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Main Researcher of Institute for Applied Mathematics, FEB RAS, Vladivostok, Russian Federation) E-mail: guram@iam.dvo.ru

**Bocharnikov Vladimir N.** (Doctor of Biological Sciences, Leading Researcher of Institute of Pacific Ocean Geography FEB RAS, Vladivostok, Russian Federation). E-mail: vbocharnikov@mail.ru

**Contribution of the authors:** Tsitsiashvili G.Sh. built probabilistic models and estimates of their parameters. Bocharnikov V.N. gave a detailed description of the work of camera traps when observing animals indistinguishable from images and formulated a meaningful task of processing these data. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 22.08.2023; принята к публикации 08.12.2023

Received 22.08.2023; accepted for publication 08.12.2023

## ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

## INFORMATICS AND PROGRAMMING

Original article

UDK 004.056.5

doi: 10.17223/19988605/65/10

## Method of hidden transmission of information based on fractals and its software

Vagif A. Gasimov<sup>1</sup>, Jabir I. Mammadov<sup>2</sup>, Nargiz F. Mammadzade<sup>3</sup><sup>1, 2, 3</sup> Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan<sup>1</sup> vaqif.qasimov@aztu.edu.az<sup>2</sup> cabir.memmedov@aztu.edu.az<sup>3</sup> mammadzada.nargizw@gmail.com

**Abstract.** In this article is considered hiding process of bits on least significant bits that make up the binary codes of confidential information with using fractal based stego-key. In order to increase resistance against steganalysis, it is proposed to use only a part of graphic images not all the pixels of the containers, but only a part determined by the appropriate rule. As a key-image file displaying a Mandelbrot and Julian fractal is used to determine positions of pixels for hiding secret information on least significant pixels of container. So after creation of fractal image as key file, border point of it is changed with according represented rule, then position of pixels is determined with obtained new positions to hiding information in least significant bits.

The effectiveness of proposed method is studied with visual and statistical analysis, is verified by implementing it in the C# environment on examples of multiple containers and data files to be hidden.

**Keywords:** hiding information; fractal; container; stego-key; steganalysis.

**For citation:** Gasimov, V.A., Mammadov, J.I., Mammadzade, N.F. (2023) Method of hidden transmission of information based on fractals and its software. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 65. pp. 95–104. doi: 10.17223/19988605/65/10

Научная статья

doi: 10.17223/19988605/65/10

Способ скрытой передачи информации на основе фракталов  
и его программное обеспечениеВагиф А. Касумов<sup>1</sup>, Джабир И. Мамедов<sup>2</sup>, Наргиз Ф. Мамедзаде<sup>3</sup><sup>1, 2, 3</sup> Азербайджанский технический университет, Баку, Азербайджан<sup>1</sup> vaqif.qasimov@aztu.edu.az<sup>2</sup> cabir.memmedov@aztu.edu.az<sup>3</sup> mammadzada.nargizw@gmail.com

**Аннотация.** Рассматривается задача о сокрытии битов, составляющих двоичные коды конфиденциальной информации, в наименее значимых битах графических файлов (контейнеров) с помощью фрактального стегоключа. С целью повышения устойчивости к стегоанализу предлагается использовать не все пиксели графических изображений-контейнеров, а только часть, определяемую соответствующим правилом. Для определения положений пикселей, в которых будет скрыта информация в наименее значимых битах контейнера, используется дополнительный ключевой файл – файл изображения, в котором отображается фрактал Мандельброта или Юлиана. Таким образом, после построения фрактала, описанного в ключевом файле, расположение его

граничных точек изменяется в соответствующем порядке, и на основе полученных новых позиций определяются позиции пикселей контейнера, в которых будет скрыта информация в наименее значимых битах. Эффективность предложенного метода исследуется визуальным и статистическим анализом. Проверка работоспособности и эффективности метода осуществляется путем реализации в среде C# на примерах нескольких контейнеров и скрываемых информационных файлов.

**Ключевые слова:** сокрытие информации; фрактал; контейнер; стегоключ; стегоанализ.

**Для цитирования:** Касумов В.А., Мамедов Дж.И., Мамедзаде Н.Ф. Способ скрытой передачи информации на основе фракталов и его программное обеспечение // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 65. С. 95–104. doi: 10.17223/19988605/65/10

## Introduction

Recently, to protect the information with standard cryptographic and along with steganographic algorithms, also many methods based on non-traditional and chaotic processes are used [1–3]. One of these methods is information protection based on applying fractal transformations, which at first glance create the impression of chaotic transformations. The analysis of the researches shows that the research works carried out in this sphere cover both the fields of information encryption and protection with steganographic hiding [4–9]. Using Mandelbrot and Julian fractals is more common in steganographic systems [10–16]. In one of the researches, where it is suggested to hide confidential information (image, text, sound, etc.) in Julian fractal, which is an algebraic fractal, the shape and beautiful colours of that fractal, and also its exact dependence on the initial data (this is the parameter  $C$  and it is impossible to repeat the fractal without knowing its exact values) are used [13]. In [14], it is suggested to use fractal images, which are easily generated as containers and whose parameters can be easily changed. Here, while building the Julian fractal for the hiding process, it is intended to determine the values of its pixels depending on the content of the hidden information bits. In order to increase the confidentiality level, the information required to be hidden in that research work is encrypted beforehand based on the RSA algorithm.

In [15–16], any image in BMP format is used as a container, and another image - the Mandelbrot fractal - is used in order to determine the position of pixels to hide the information in this image. Here, with the help of the Mandelbrot fractal, the part defined in the container-image is divided into four parts. The bits of the binary codes of the information that is going to be hidden are placed in pairs, passing through each of the four parts in a certain turn in a counter clockwise direction. Writing successive bits of hidden information into separate parts of the container-image makes its detection difficult in the process of stegoanalysis.

One of the possible options to prevent the detection of the information hiding event is using not all the pixels of the container-image, but only a part of them through certain selection ways. During the placement in the BMP format images, the method of using the positions of the border points of the fractals that are described in the graphic files based according to the Mandelbrot and Julian fractals as keys to determine the positions of the pixels where the information is going to be hidden attracts attention in terms of resistance to stegoanalysis. So, the border of the fractal figure with the areas that are not included in this figure is built on the basis of a very complex mechanism, and a slight change in the starting conditions for building the fractal results in a significant change of the set that forms the border. This factor significantly makes the detection of hidden information by means of stegoanalysis complicated.

The purpose of proposed method are creation of new method for hiding data on graphic files and developing software of the method and as well as to study efficiency of the method. The novelty of the work is that the positions of the border points of the fractals, mixed with appropriate methods, described in the graphic files based on the Mandelbrot and Julian sets, were used as keys to determine the positions of the pixels where the information will be hidden.

## 1. Formulation of the problem

One of the possible options to prevent the detection of information hiding in BMP format files by the LSB method is to use not all the pixels of the container-image, but only a part of them by selecting them

in a certain way. By using different methods and algorithms, the positions of the appropriate pixels can be defined, during the replacement of the least significant bits of the pixels of the image files with the bits of the binary code of the hidden information. One of these methods is to use another graphic image file as a key. The fact that the creation algorithms of Mandelbrot and Julian sets have a simple structure, their non-linearity, as well as the fact that fractal figures with complex borders can be easily generated, makes it possible to use these figures as keys. Here, to increase the resistance against stegoanalysis, not all pixels of container-images are used to hide information, but the points appropriate to the new positions received by changing the places of the border points of the mentioned fractals with a certain rule is intended.

## 2. Mandelbrot and Julian fractals

In 1979, B. Mandelbrot, who studied the sets discovered by the French mathematicians Gaston Julian and Pierre Fatou, discovered such a description on the complex plane, which later became the basis of a whole class of forms called Julian sets [17–18]. A Julian set  $x_n \rightarrow x_{n-1}^2 + C$  is a set obtained by iterating a quadratic transform sequence. Here, each subsequent value of  $x$  is derived from its current value, and  $C$  is the control parameter. The values of the numbers that determine the sequence depend on the parameter  $C$  and the starting point  $x_0$ . In the plane of complex numbers, when we keep  $C$  fixed and change  $x_0$ , we get the Julian set, and when we change  $C$  at a fixed value of  $x_0 = 0$ , we get the Mandelbrot set (M). Each complex number  $C$  may or may not belong to the Mandelbrot set (it is shown in black in fig. 1, a). The point  $C$  belongs to M only when the result of the iteration starting with  $x_0=0$  does not approach infinity. The set M consists of all  $C$  points that are associated with the related Julian set (fig. 1, b), and if the point  $C$  is not included in a set M, then the Julian set associated with it is not related (fig. 1, c). When the parameter  $C$  leaves M, the Julian set seems to explode and turn to dust. A strong quality change happening at the border of M also affects areas close to the border. The Mandelbrot set reflects in itself the process of transition from regularity to chaos. It is possible to increase the efficiency of the information bit hiding process, based on this chaos, only when determining the positions of pixels in container-images.

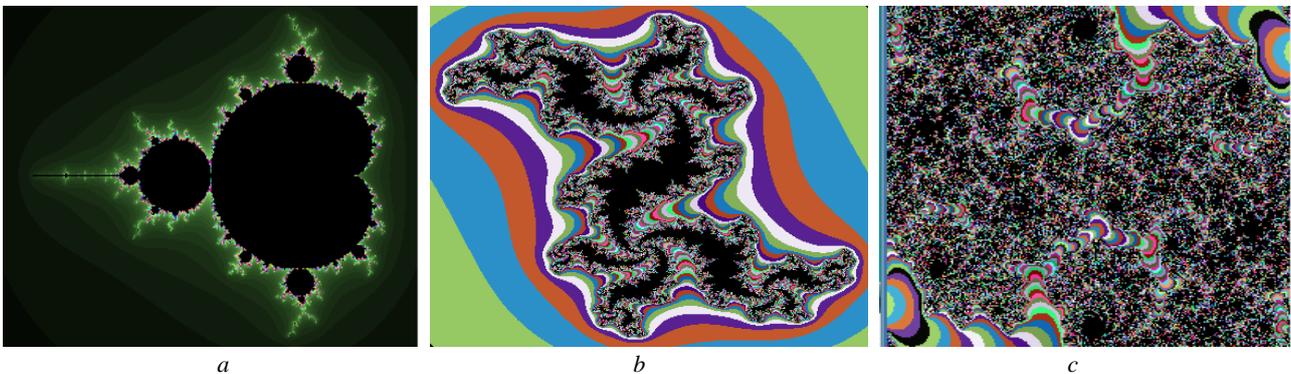


Fig. 1. Julian sets: a) Mandelbrot fractal, b) related Julian fractal, c) unrelated Julian fractal

## 3. A suggested steganographic hiding method

As mentioned above, the border points of fractal figures have a very complicated structure, and a slight change in the starting conditions causes the positions of the border points to change in a chaotic way. Here, when we say the border point of a fractal, such a point  $z_{ij}$  belonging to a fractal is intended that at least one of the adjacent points  $z_{i-1,j-1}, z_{i-1,j}, z_{i-1,j+1}, z_{i,j-1}, z_{i,j+1}, z_{i+1,j-1}, z_{i+1,j}, z_{i+1,j+1}$  does not belong to that fractal.

Let's look at the construction of the steganographic method for hiding of information by fractal image obtained with the initial conditions as the initial key (K1) and using the border points of the generated fractals to determine the positions of the pixels to be hidden in another graphic file. It should be noted that Mandelbrot's and Julian's fractals are characterized by the fact that a slight change in the initial conditions causes

the positions of the boundary points to change chaotically. Let's use both Mandelbrot and Julian fractals in the proposed method, considering that the construction sequences are also similar.

According to the proposed method, the hidden information is placed instead of the least significant bits of the specified pixels of the BMP format container.

Determining the positions of the pixels of the container where secret information will be placed is based on another image in BMP format - an image with a fractal figure. So, first the points forming the border of the fractal image are defined, and then the positions of these points are changed. According to the new positions of the border points of the fractal figure, the positions of the pixels of the container where the information will be hidden are determined.

Here, changing the places of border points is based on dividing the BMP format image containing the fractal figure into 4 equal rectangular parts (fig. 2) and placing these parts in different combinations. The number of possible combinations is calculated by the expression  $N=p!$  ( $p$  is the number of parts into which the image is divided). At  $p=4$ , the edge points of the fractal image can be located in  $N=4!=24$  different variants.

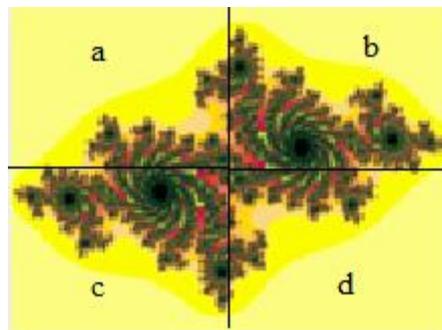


Fig. 2. An example for dividing a fractal image into 4 equal parts

A reflection of the parts of the fractal image by options is given in table. According to the table, in option 1 (abcd) it is intended that there is no displacement in the image parts. This means that the positions of the pixels where the information is hidden in the container overlap with the starting position of the fractal border points. In other options, 2 or more parts are replaced.

**Table of displacements of border points in fractal images**

Option №	A combination of image parts	Option №	A combination of image parts
1	abcd	13	cbad
2	abdc	14	cbda
3	acbd	15	cabd
4	acdb	16	cadb
5	adbc	17	cdba
6	adcb	18	cdab
7	bacd	19	dbca
8	badc	20	dbac
9	bcad	21	dcba
10	bcda	22	dcab
11	bdac	23	dabc
12	bdca	24	dacb

When the places of the parts are changed from the original version in the image with the size  $m \times n$  ( $m$  is the number of rows and  $n$  is the number of columns), the new positions of the border points for all variants are calculated as follows:

- in displacement to the left:  $i' = i - \frac{n}{2}; j' = j;$
- in displacement to the right:  $i' = i + \frac{n}{2}; j' = j;$
- in downward displacement:  $i' = i; j' = j + \frac{m}{2};$
- in upward displacement:  $i' = i; j' = j - \frac{m}{2};$
- in displacement to the left and down:  $i' = i - \frac{n}{2}; j' = j + \frac{m}{2};$
- in displacement to the right and down:  $i' = i + \frac{n}{2}; j' = j + \frac{m}{2};$
- in displacement to the left and upward:  $i' = i - \frac{n}{2}; j' = j - \frac{m}{2};$
- in displacement to the right and upward:  $i' = i + \frac{n}{2}; j' = j - \frac{m}{2}.$

It should be noted that table is kept by the parts that transmit and receive confidential information, and the choice of which option from this table is determined by the secret key ( $K_y$ ) agreed between the parts beforehand. As one of the possible options, it is suggested to calculate the following expression according to the date on which the information exchange session of that key was implemented:

$$K_y = [\text{date}] \bmod 24.$$

Here, an eight-digit number derived from the concatenation of numbers representing the day, month and year is intended as a numerical expression of the date. For example, the displacement key for May 28, 2023 would be:

$$K_y = 28052023 \bmod 24 = 7.$$

This means that option 7 in table is going to be used to displace the parts of the image that represents the fractal figure, as well as the border points of the fractal together with them.

So, using the covert key  $K_1$ , agreed between the parts beforehand, the algorithm for steganographic hiding of information in the suggested method will be as follows:

- 1)  $m \times n$  sized BMP format container is selected;
- 2) based on the  $K_1$  key, a  $m \times n$  sized BMP format fractal image is created;
- 3) the hidden information is converted into a binary format and its size is determined by bits (the number of bits is denoted by the sign  $Q$ );
- 4)  $i=1, j=1, q=1$  are accepted;
- 5) it is checked that if the positional point  $(i,j)$  of the fractal image belongs to the fractal: for this it is checked that if the  $(i-1, j-1); (i-1, j); (i-1, j+1); (i, j-1); (i, j+1); (i+1, j); (i+1, j-1); (i+1, j+1)$  position points adjacent to it in the horizontal, vertical and diagonal directions belong to the fractal.
- 6) if at least one of these adjacent points does not belong to the fractal, then the point at position  $(i, j)$  is considered a border point, the new position of the border point  $(i',j')$  is calculated according to the option selected from table, otherwise, it will go to the 9th paragraph;
- 7) the least significant bit of the pixel in the position  $(i,j)$  of the container (corresponding to the position of the border element of the fractal image) is replaced by the  $q$ -th bit of the hidden information;
- 8) if  $q < Q$ , then  $q=q+1$ , otherwise go to paragraph 11 (the information was completely hidden in the container and the process ended);
- 9) if  $q < m$ , then  $j=j+1$  is accepted and it goes to paragraph 5;
- 10) if  $i < n$ , then  $i=i+1, j=1$  is accepted and goes to paragraph 5, otherwise go to paragraph 11 (the information was not placed in the container and the process was interrupted);
- 11) THE END.

The process of extracting hidden information at the receiving side is performed in a similar way, and during this process, the quantity  $K1$  is also used as an entry parameter.

Of course, using only as many container pixels as the number of border points of the fractal figure restricts the amount of hidden information. For example, if we use all the pixels of a 24-bit container in BMP format of size  $256 \times 256$ , then theoretically, it is possible to place  $\approx 24.5$  kB of information there. During the research, through the appropriate program a Mandelbrot fractal sized  $256 \times 256$  was established, and it was defined that the practical number of border points there is up to 5-6 thousand, which means that there is an opportunity of hiding information in the amount of 1.9-2.25 kB. In this sense, practical calculations show that the Julian fractal is superior. Thus, the Julian fractal of that size allows hiding information of 6-8 kB. Of course, the amount of hidden information can be increased by increasing the size of the images. For example, it is possible to define the addresses of pixels for placing information in the amount of 18-20 kB, with a Julian fractal sized  $512 \times 512$ .

With the suggested method, the disadvantage of hiding a relatively small amount of information is compensated by a considerable increase in the privacy level of the hidden information.

#### 4. Software realization of the method

To realize the suggested method, the software has been realized using the "Windows Form Application" module intended for designing the C# programming language in the Visual Studio 2019 environment. In the program, according to a certain sequence, a fractal image is first generated according to the starting  $C_x$ ,  $C_y$  values (for this purpose, the "fractal generator" button is provided in the program) and a container is selected (fig. 3), and then the bits of the binary code of the hidden information are consistently hidden in the pixels of the container whose places are defined according to the fractal image.

It should be noted that in the considered example, the image file is taken as the hidden information. In the program window, the container and the image files that are going to be hidden are selected respectively, with the help of the "select container" and "select secret" buttons. Hiding Information in the container is performed by "hide with fractal" button, and saving the result (stegocontainer) is performed by "save data" buttons. When the hiding process is successfully completed, the user is given a "hiding is successful" message.

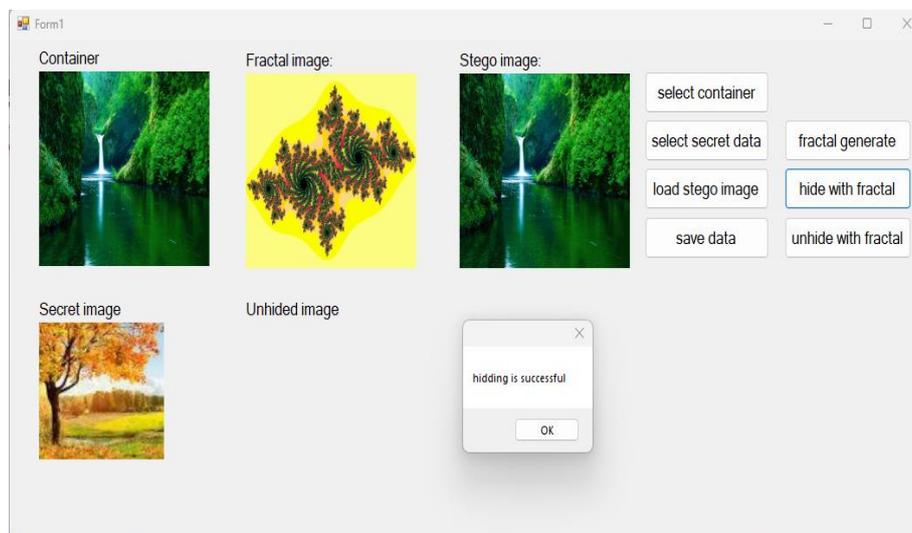


Fig. 3. Fractal-based hiding process software window

The process of extracting confidential information from the stegocontainer on the receiving side is carried out in a similar way. For this purpose, the  $K1$  key ( $C_x$  and  $C_y$  parameters) is included and the "load stego image", "fractal generator", "unhide with fractal" buttons are pressed successively (fig. 4). The appearance of the image file in the "Unhidden image" area informs that the process of extracting information from the stegocontainer is fulfilled successfully.

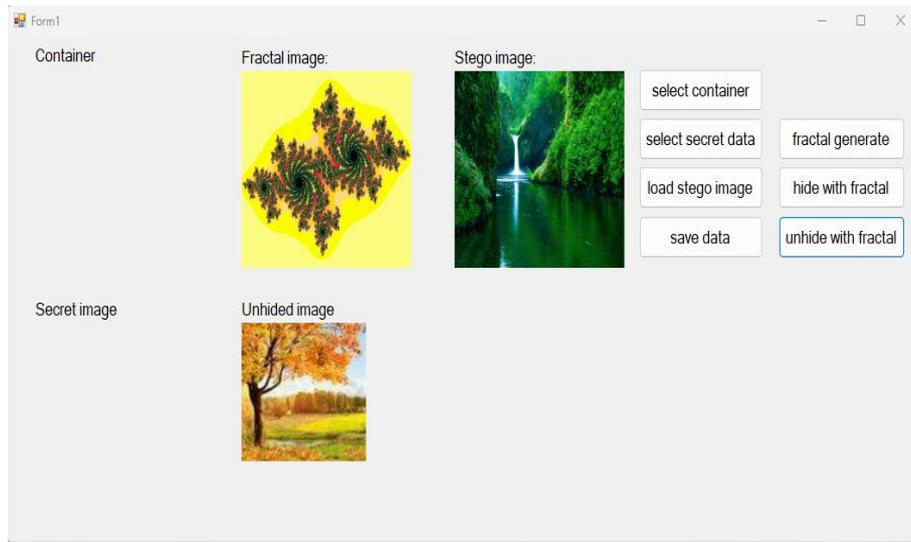


Fig. 4. Extraction of confidential information out of the stegocontainer

## 5. Efficiency analysis

Visual and statistical methods were used to analyze the effectiveness of the suggested method. Here, it is assumed that the knowledge about the algorithm, key, container, information volume is not known beforehand, it means that, analysis methods useful for any steganographic algorithms have been applied.

### 5.1. Realizing analysis by visual method

Visual methods, considered the easiest way to analyze graphic files, are based on the ability of the human visual system to detect differences between comparable images. The visual analysis method is realized by simply visual reviewing the captured image.

During the study, more than 30 different stegoimages realized by replacing the least significant bit for each colour category in pixels were visually analyzed. Regardless of the amount of included information, no visual difference was detected between the container and the stegoimages.

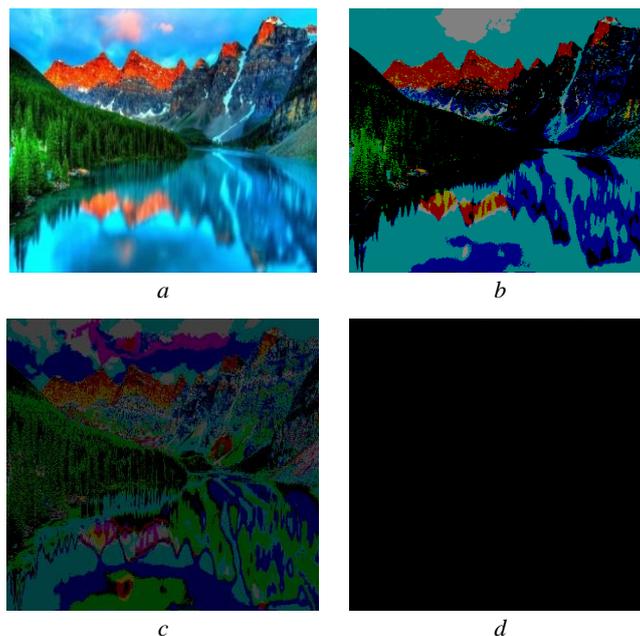


Fig. 5. Stegoimage and its bit cuts: *a* is stegoimage, *b*, *c*, *d* is respectively cuts on bits 7, 6 and 1

It should be noted that, for the analysis of stegoimages, the method of visual analysis of bit cuts is also widely used in practice [19–20]. The essence of this method is that the images are compared with the images got from its bit cuts. Here, the image is considered by means of the program layer by layer, that is, by bits cuts. Since each colour intensity is defined by one byte, a total of 8 cuts must be checked. An image consisting of the least significant layers of all colours gives the first cut, an image consisting of 2 layers gives the second cut, and so on. Images gained with bit cuts are visually compared with the whole image itself.

In the study performed by the considered method, a 256 x 256 sized BMP format stegoimage with 3.6 kB of information hidden inside by replacing the least significant bit was studied by the method of visual analysis of bit cuts (fig. 5). By software realization, cuts were obtained on all bits, including the 1st bit from the right (fig. 5, d), where the information is hidden. In figure 5 the stegoimage and the images formed by cuts consisting of its bits 7, 6 and 1 are given. Images consisting of received cuts and their options gained with different illuminations and screen enlargements were compared with the starting stegoimage, but it was not possible to find out the fact of hiding information there.

### 5.2. Realization of analysis statistically

Statistical methods are based on checking the "naturalness" of the studied image. Thus, the probability of hiding information during the realization of statistical methods is determined by evaluating the difference of the studied image from that of the "natural" image.

In this research considered, as a statistical method, the method of evaluating transitions between small significant bits in adjacent elements of the image was used. This method is based on the information that there is a correlation contact between the small bits of adjacent elements. As the elements of the studied sequence, the least significant bits of the colour components of the adjacent pixels of the stegoimage are used.

It is known that the dependence between the bits in the appropriate layers of the container elements has a Markov peculiarity [21]. Here, the dependency parameter is defined by layer number. Since the elements of the researched sequence consist of symbols of the binary number system, a histogram is established by analyzing transitions in 4 options (0→0, 0→1, 1→0 and 1→1). For analysis, getting different results in the histograms constructed for the spare container and the stegocontainer is taken as the main issue. Thus, the distribution of the least significant bits in the stegocontainer, as a rule, has the feature of randomness, and therefore the number of transitions is approximately the same, while in the spare container, it differs considerably from each other.

In this research work, the information hiding process is carried out on numerous image samples with the algorithm suggested in Section 3. All received stegoimages were statistically analyzed using the "method of evaluation of transitions between less significant bits in adjacent elements of the image". By no means, the equal distribution even approximately of transitions between the smallest bits in the stegoimages has been observed (fig. 6). In the images, column 1 reflects – 0→0; column 2 – 0→1; column 3 – 1→0; column 4 – reflects – 1→1 transitions.

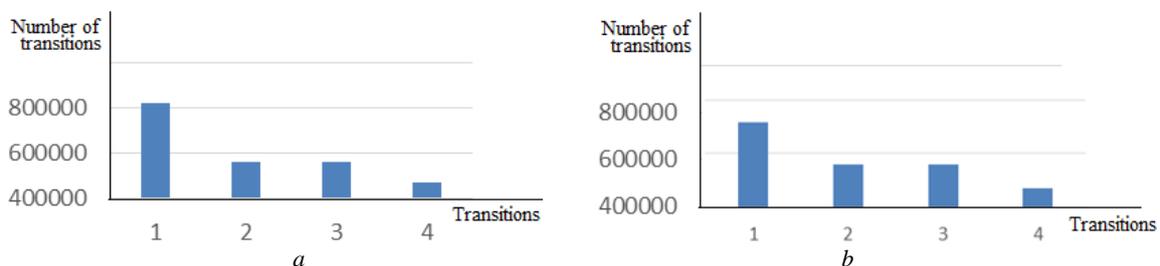


Fig. 6. Histograms of the number of transitions in the succession of least significant bits in the container (a) and in the stegocontainer (b) in the sample of information hiding according to the suggested algorithm

### Conclusion

It has been developed a new fractal-based algorithm for hiding confidential information in the image files. For information hiding, it was suggested to use not all of pixels of container-images, but only pixels

selected by a certain rule. Thus, for selecting the pixels in the container, the determination of their positions is based on changing the parts of the fractal figures in the graphic images, which are used as keys, and together with them the places of the border points in a certain manner.

In order to increase the resistance against stegoanalysis, an image file containing a Mandelbrot or Julian fractal was used to determine the positions of the pixels of the containers where the information would be hidden.

It was determined that using the Julian fractal as a key in order to determine the positions of pixels in containers is more appropriate. It has been practically approved that the Julian fractal allows hiding 4-5 times more information than the Mandelbrot fractal.

The suggested algorithm is realized in the C# programming environment. According to the image samples selected to be used as containers, the algorithm was approved to be functional. The effectiveness of the algorithm was tested on numerous samples of containers and information files that are going to be hidden by the methods of "visual analysis" and "evaluation of transitions between less significant bits in adjacent elements of the image" and positive results were gained in all cases.

### References

1. Gasimov, V.A. & Mammadov, J.I. (2019) DNA-based image encryption algorithm. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. Art. 734 012162. DOI: 10.1088/1757-899X/734/1/012162
2. Gasimov, V.A., Mammadov, J.I. & Mammadzada, N.F. (2022) Stream encryption method based on the chaotic brownian motion model of molecules. *Procedia Computer Science*. 215. pp. 577–588.
3. Gribunin, V.G., Okov, I.N. & Turintsev I.V. (2002) *Tsifrovaya steganografiya* [Digital Steganography]. Moscow: SOLON-Press.
4. Kasapbashi, M.C. (2019) New Chaotic Image Steganography Technique Based on Huffman Compression. *IEEE Access*. 7. pp. 148495–148510. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2946807
5. Milani, M. & Ceyhan, S. (2022) An Efficient Method for Digital Image Encryption Based on Improved Chaotic Map. *Electronic Letters on Science and Engineering*. 18(2). pp. 87–96.
6. Bubere, A., & Ravindra, M. (2021) Steganography Based on Fractal Set. *International Journal of Scientific & Engineering Research*. 12(3). pp. 243–246.
7. Tabbia, B. (n.d.) *Fractal Encryption Algorithm*. [Online] Available from: <http://www.codeproject.com/Articles/406389/Fractal-encryption-algorithm>
8. Shelukhin, O.I. & Kanaev, S.D. (2017) *Steganografiya. Algoritmy i programnaya realizatsiya* [Steganography. Algorithms and software implementation]. Moscow: Hotline – Telecom.
9. Abazina, E.S. & Erunov, A.A. (2016) Digital steganography: current state and prospects. *Sistemy upravleniya, svyazi i bezopasnosti – Systems of Control, Communication and Security*. 2. pp. 182–201.
10. Gasimov, V.A., Mammadov, J.I. & Mustafayeva, E.A. (2022) *Steganography: Channels and Technologies of Hidden Transmission of Information*. BakuL Nauka. (In Azerbaijani).
11. Shaw, J., Saha, O. & Chaudhuri, A. (2012) An Approach for Secured Transmission of Data using Fractal based Chaos. *National Conference on Communication Technologies & Its Impact on Next Generation Computing (CTNGC)*. pp. 13–17.
12. Negi, D., Negi, A. & Agarwal, S. (2016) The Complex Key Cryptosystem. *International Journal of Applied Engineering Research*. 11(1). pp. 681–684.
13. Ahmad Sami Nori & Asmaa M. Al-Qassab. (2014) Steganographic technique using fractal image. *International Journal of Information Technology and Business Management*. 23(1). pp. 52–59.
14. Suryakala, E.G., Leelavathy, N. & Sandhya, R.U. (2014) Fractal Image Steganography Using Non Linear Model. *International Journal of Innovative Research in Computer and Communication Engineering*. 2(1). pp. 2644–2649.
15. Desai, H.V. & Desai, A.A. (2014) Image Steganography Using Mandelbrot Fractal. *International Journal of Computer Science Engineering and Information Technology Research (IJCEITR)*. 4(2). pp.71–80.
16. Desai, H.V. & Desai, A.A. (2016) Steganography of Messages using Mandelbrot Fractal. *VNSGU Journal of Science and Technology*. 5(1). pp.73–85.
17. Mandelbrot, B.B. (1977) *The Fractal Geometry of Nature*. New York: Freeman.
18. Chernova, E.V. (2015) Chaos and order: a fractal world. *Nature (Mathematics)*. 5. pp. 34–44.
19. Aliev, A.T. (2004) On the application of the LSB steganographic method to graphic files with large areas of monotone fill. *Bulletin of the DSTU*. 4(22). pp. 454–460.
20. Shvidchenko, I.V. (2010) Steganalysis methods for graphic files. *Artificial Intelligence*. 4. pp. 697–705.
21. Barsukov, V.S. & Romantsov, A.P. (2000) Evaluation of the level of secrecy of multimedia steganographic channels for storing and transmitting information. *Special Technique*. 1. pp. 52–59.

***Information about the authors:***

**Gasimov Vagif A.** (Professor, Doctor of Technical Sciences, Head of Department of “Computer technologies” of Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan). E-mail: vaqif.qasimov@aztu.edu.az

**Mammadov Jabir I.** (Associate Professor, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Department of “Computer technologies” of Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan). E-mail: cabir.memmedov@aztu.edu.az

**Mammadzade Nargiz F.** (Lecturer of Department of “Computer technologies” of Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan). E-mail: mammadzada.nargizw@gmail.com

***Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.***

***Информация об авторах:***

**Касумов Вагиф Алиджавад оглы** – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой «Компьютерные технологии» Азербайджанского технического университета (Баку, Азербайджан). E-mail: vaqif.qasimov@aztu.edu.az

**Мамедов Джабир Исмаил оглы** – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры «Компьютерные технологии» Азербайджанского технического университета (Баку, Азербайджан). E-mail: cabir.memmedov@aztu.edu.az

**Мамедзаде Наргиз Фируз кызы** – преподаватель кафедры «Компьютерные технологии» Азербайджанского технического университета (Баку, Азербайджан). E-mail: mammadzada.nargizw@gmail.com

***Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.***

*Received 21.07.2023; accepted for publication 08.12.2023*

*Поступила в редакцию 21.07.2023; принята к публикации 08.12.2023*

Научная статья

УДК 004.932

doi: 10.17223/19988605/65/11

## Программный комплекс системы сегментации и мультифрактальной диагностики цифровых изображений компьютерной томографии легких

Владислав Олегович Салмиянов<sup>1</sup>, Анна Геннадьевна Масловская<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> *Амурский государственный университет, Благовещенск, Россия*

<sup>1</sup> *svsalmiyanov@mail.ru*

<sup>2</sup> *maslovskayaag@mail.ru*

**Аннотация.** Предложена система мультифрактального интеллектуального анализа цифровых изображений в приложении к исследованию данных компьютерной томографии легких человека. Реализованный функционал системы представлен алгоритмом предпроцессинговой сегментирующей обработки растрового изображения, который позволяет выделить зону морфологического интереса. Алгоритмы выявления структурных особенностей изображений основаны на расчете скейлинговых характеристик методами фрактальной, лакунарной и мультифрактальной параметризации. Программная реализация системы анализа проведена на платформе пакета Matlab. Представлены данные мультифрактального интеллектуального анализа на примере данных тестовой диагностики КТ-снимков легких человека для случаев нормы и выявленной патологии пневмонии.

**Ключевые слова:** система анализа изображений; алгоритм сегментации; фрактальный анализ; мультифрактальный анализ; фрактальная размерность, спектр; КТ-снимки легких.

**Благодарности:** Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект № 122082400001-8. Авторы также благодарят Дальневосточный научный центр физиологии и патологии дыхания за предоставленные для исследования материалы.

**Для цитирования:** Салмиянов В.О., Масловская А.Г. Программный комплекс системы сегментации и мультифрактальной диагностики цифровых изображений компьютерной томографии легких // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 65. С. 105–115. doi: 10.17223/19988605/65/11

Original article

doi: 10.17223/19988605/65/11

## Software package for segmentation and multifractal diagnostics system of lung computed tomography digital images

Vladislav O. Salmiyanov<sup>1</sup>, Anna G. Maslovskaya<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> *Amur State University, Blagoveshchensk, Russian Federation*

<sup>1</sup> *svsalmiyanov@mail.ru*

<sup>2</sup> *maslovskayaag@mail.ru*

**Abstract.** The paper proposes a system of multifractal data mining of digital images applied to the study of computed tomography data of human lungs. The implemented functionality of the system is represented by an algorithm for pre-processing segmentation processing of a digital image, which allows one to highlight a zone of morphological interest. Algorithms for identifying structural features of images are based on calculating scaling characteristics using fractal, lacunar and multifractal parameterization methods. The software implementation of the system was performed using the Matlab platform. The data of multifractal intelligent analysis are presented using the example of test diagnostics of CT images of human lungs for cases of normal and identified pathology of pneumonia.

**Keywords:** image analysis system, segmentation algorithm, fractal analysis, multifractal analysis, fractal dimension, spectrum, CT-scans of the lungs.

**Acknowledgments:** The study was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, project No. 122082400001-8. The authors also thank the Far Eastern Scientific Center for Physiology and Pathology of Respiration for providing materials for the study.

**For citation:** Salmiyarov, V.O., Maslovskaya, A.G. (2023) Software package for segmentation and multifractal diagnostics system of lung computed tomography digital images. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 65. pp. 105–115. doi: 10.17223/19988605/65/11

## Введение

Стремительное развитие информационных систем и современных технологий, базирующихся на концепции применения интеллектуальных методов анализа данных, приводит к расширению спектра использования функционала таких разработок в различных областях биологии и медицины. Современные автоматизированные интеллектуальные системы ситуационного анализа биомедицинских данных направлены на решение задач клинической практики, которые связаны с обнаружением неясных факторов, выявлением скрытых особенностей, оперативным распознаванием невыраженных изменений и ранней диагностикой заболеваний. В данных технологиях используют инструментарий интеллектуального анализа, решающий задачи распознавания, классификации, кластеризации, визуализации, ассоциации и прогнозирования для сложноорганизованных дискретных данных, динамических сигналов и растровых изображений. Набор методов интеллектуального анализа данных в достаточной степени диверсифицирован, и на практике применяют прикладную математическую статистику, спектральный анализ, нейронные сети, нейро-нечеткий подход, методы фрактального анализа или комбинации указанных подходов.

Концепции фрактального формализма [1] широко используют для решения задач анализа морфологии нерегулярных структур в биологии и медицине по данным цифровых изображений [2–4]. Существенным расширением теории фракталов является методология мультифрактального анализа, которая позволяет перейти от оценки масштабно-инвариантных свойств объекта к описанию структурно-статистических характеристик на основе построения спектра масштабных компонент. В прикладных исследованиях, как правило, устанавливают специфику связи между свойствами неоднородного объекта по измеренным данным и его скейлинговыми характеристиками.

Большинство живых систем демонстрирует сложную самоорганизацию, приобретенную в процессе эволюции. Например, легкие, которые составляют основу дыхательной системы человека, имеют ветвистую структуру с различным уровнем масштабирования сегментарных и подсегментарных частей. В научной литературе известен ряд примеров использования алгоритмов фрактального и мультифрактального анализа для выявления особенностей структуры легких по данным медицинских снимков, полученных на основе различных методик. В исследовании [5] предложено использовать методы фрактального и лакунарного анализа в качестве диагностирующих биомаркеров мелкоклеточного рака легких в связи с изменением значений соответствующих размерностей кластерной структуры по данным компьютерной томографии при различных видах терапии. Изменение фрактальных [6, 7] и мультифрактальных характеристик [8] отмечалось для диагностированных случаев патологии легких (хроническая обструктивная болезнь легких, астма, туберкулез или карцинома легких) на основе анализа рентгеновских цифровых снимков. Расчет размерности Минковского по данным КТ-визуализации трахеобронхиальных деревьев позволяет выполнить преддиагностику хронической обструктивной болезни легких, в частности выявить признаки эмфиземы в [9], а в [10] чувствительность к диагностике особенностей снимков при этом заболевании показал спектр методов, в том числе метод Хигучи. Также фрактальный анализ позволил выявить особенности текстур цифровых изображений по данным вентиляционно-перфузионной сцинтиграфии легких [11]. В [3] показано, что мультифрактальные спектры цифровых изображений различных биотканей на различном увеличении демонстрируют подобные формы, что может быть использовано для их идентификации. Система оценки фрактальных характеристик рентгеновских снимков легких, реализованная на платформе

Matlab, представлена в [12]. Также можно отметить работу отечественного автора [13], который разработал диагностическое программное приложение для постановки предварительного диагноза заболевания по данным рентгеновских снимков на основе мультифрактального анализа выделенных изображений в градациях серого. Кроме того, перспективными направлениями интеллектуального анализа медицинских данных являются методики, основанные на обучении нейронных сетей. Так, в работе [14] представлен алгоритм исследования рентгеновских снимков с использованием глубоких сверточных нейронных сетей для диагностики патологии COVID-19. Тем не менее следует отметить, что на сегодняшний день отсутствует полномасштабное и законченное представление об использовании фрактального формализма для характеристики биомедицинских объектов, в частности легких. Это обусловлено большой вариативностью применяемых методов фрактального анализа, а также необходимостью проведения достаточно субъективной процедуры предпроцессинговой обработки оцифрованного изображения (выделение участков интереса, настройка контраста, выделение уровней градаций серого, использование фильтров и вейвлет-преобразований и др.).

В настоящей работе в качестве объектов исследования мы обратимся к цифровым медицинским изображениям – снимкам компьютерной томографии (КТ) легких, соответствующим норме и выявленным патологиям. КТ – это информативный неинвазивный метод диагностики, который позволяет получить детальный, послойный снимок легкого. Несмотря на интенсификацию информатизации сферы медицинских исследований, по большей части эти процессы касаются получения данных, а не анализа с целью преддиагностики заболеваний. Разработка автоматизированных средств анализа цифровых изображений призвана уменьшить вероятность субъективных факторов при постановке диагноза. В части методологической базы исследований для выявления морфологических особенностей строения человеческих легких использованы методы фрактального, лакунарного и мультифрактального анализа.

Основная концепция настоящей работы ориентирована на разработку программного комплекса для системы интеллектуального анализа растровых изображений, нацеленной на выявление скейлинговых характеристик визуализируемых кластерных структур. Функционал системы анализа базируется на программной реализации адаптированных алгоритмов сегментации, фрактальной, лакунарной и мультифрактальной параметризации. Работа программного комплекса продемонстрирована на примере установления морфологических особенностей структур на цифровых изображениях по данным компьютерной томографии легких человека.

Структура статьи соответствует полному циклу проектирования и реализации системы анализа данных и включает краткое описание алгоритмов сегментации и анализа, спецификацию структуры, описание функционала программного приложения и данные проведенного тестового анализа на примере КТ-снимков легких человека для случаев нормы и выявленных патологий (пневмонии и COVID-19).

## 1. Сегментация КТ-изображений снимков легких

Во многих прикладных областях для работы методов интеллектуального анализа данных необходимо иметь в качестве исходных данных цифровые изображения, отвечающие целому ряду требований. Это приводит к важнейшей подзадаче разработки новых и адаптации известных алгоритмов предпроцессорной обработки изображений. Данная проблема особенно актуальна в биомедицинской практике при анализе композиционных изображений, которые требуют привлечения алгоритмов сегментации для выделения зон морфологического интереса. Известно множество подходов, применяемых для сегментации медицинских снимков [15–17], в основе которых лежат алгоритмы локализации фрагментов изображений по яркости пикселей, по цветовому или спектральному пространству, по текстурными характеристикам и по пространству геометрических характеристик. Во многих случаях существуют существенные ограничения, связанные со спецификой анализа определенных классов изображений определенными методами. Например, алгоритмы морфологической сегментации отлично подходят для полутоновых рентгеновских и КТ-снимков, так как для них можно выделить четкие границы, но применение этого подхода для ультразвуковых снимков вызывает затруднения, и данный анализ может быть использован только в качестве вспомогательного или контрольного метода.

Для построения и реализации алгоритма сегментации мы адаптировали подход, предложенный в работе [17] для процедуры автоматизированной сегментации снимков компьютерной томографии. Входными данными являются полутоновые снимки срезов компьютерной томографии легких. Алгоритм обработки снимков разделен на два основных этапа: сегментации и бинаризации. Основная задача алгоритма – выделение объектов интереса и преобразование изображения в формат, воспринимаемый используемыми методами анализа. Этап сегментации включает две подпрограммы. В первой подпрограмме по усредненному фону изображения создается матрица яркости, подбираются глобальные пороги сегментации в автоматическом режиме, и на выходе возвращается маска изображения, которая на снимке удаляет все элементы, не относящиеся к объекту анализа. Вторая подпрограмма реализует процесс, который предполагает усреднение фона по преобразованному снимку и выделение с помощью маски биообъекта (в частности, человеческих легких). В результате работы двух подпрограмм возвращается изображение с сегментированным объектом морфологического интереса. Этап бинаризации изображения реализует процедуру усреднения фона и применяет для сегментированных изображений преобразование «дно шляпы», которое выполняет морфологическое замыкание изображения и вычитает оригинальное изображение из преобразованного, тем самым повышая контрастность изображения. Затем производится преобразование по заполнению областей снимка с целью удаления объектов, которые не участвуют в анализе, и преобразование в бинаризованный формат. Сегментированные цифровые изображения являются входными данными для проведения интеллектуального анализа с использованием алгоритмов оценки фрактальных, лакунарных и мультифрактальных характеристик. Таким образом, в рамках первого этапа формализуется адаптированный алгоритм сегментации растровых изображений с выделением фрагментов, представляющих интерес для морфологического анализа структуры.

## 2. Математический аппарат: алгоритмы фрактального, лакунарного и мультифрактального анализа растровых изображений

Важнейшим понятием теории фрактального анализа является понятие фрактальной размерности объекта [1]. Фрактальная размерность позволяет численно оценить степень неоднородности, шероховатости и изрезанности границ сложных объектов. Идея семейства методов покрытий базируется на соотношении «число частиц – мера» и предоставляет несложный способ оценки фрактальной размерности  $D$  растрового изображения всей структуры или границы фрактального кластера. В концепции метода покрытий (box-counting) исходное бинаризованное изображение разбивается на  $2^{2m}$  частей-кластеров, после чего для каждого разбиения (при линейном размере кластера  $l$ ) подсчитывается число кластеров  $N$ , содержащих хотя бы один элемент изображения. Построенная в двойном логарифмическом масштабе зависимость  $\ln(N) \propto -D \ln(l)$  позволяет установить фрактальную размерность объекта  $D$ . Данную методику применяют также для анализа полутоновых снимков по выделенным уровням градаций серого [2].

Кроме того, для описания свойств фрактальных структур в дополнение к фрактальному анализу используют алгоритм лакунарного анализа [18]. Лакунарность описывается как мера заполненности изображения [19, 20], и *gliding box* является наиболее распространенным методом ее оценки. Алгоритм достаточно схож с методом *box-counting*, но в нем «сканируются» не соседние кластеры, а сам кластер, который передвигается на несколько пикселей от предыдущего места сканирования. Затем создается матрица элементов  $N(s, r)$ , которая хранит количество точек для каждого кластера  $s$  и каждого размера разбиения  $r$ . Далее создается частотное распределение вероятностей  $Q(s, r)$  путем деления каждого элемента матрицы  $N(s, r)$  на общее количество кластеров  $N(r)$  для каждого разбиения. Следующий шаг заключается в определении первого и второго моментов распределения  $Z_1 = \sum s Q(s, r)$ ,  $Z_2 = \sum s^2 Q(s, r)$  для расчета лакунарности  $\Lambda(r) = Z_2 / [Z_1]^2$ . Данный алгоритм повторяется для определенного количества шагов. В завершение алгоритма в логарифмическом масштабе строится график зависимости лакунарности от размера сканирующего кластера.

Во многих случаях сложная организация объекта приводит к тому, что для информативной картины исследования объектов помимо определения геометрических характеристик, которые лежат в определении фрактальной размерности, следует определить статистические характеристики – спектр фрактальных размерностей. Распространенными подходами являются метод мультифрактальной параметризации [1] и метод максимумов модулей коэффициентов вейвлет-преобразований, которые хорошо зарекомендовали себя в различных предметных областях [21–24]. В рамках настоящего исследования мы воспользуемся концепцией метода мультифрактальной параметризации, алгоритм которого включает следующую последовательность шагов.

Шаг 1. Изображение покрывается кластерной сеткой с линейным размером кластера  $l$ .

Шаг 2. Создается матрица элементов  $C$ , где в каждом элементе  $C_{i,j}$  записываются значения общего количества закрасенных пикселей кластера. Количество строк и столбцов матрицы соответствует  $i, j = \overline{1, k}$ , где  $k$  определяется путем деления максимального количества пикселей изображения  $N$  на линейный размер кластера  $l$ .

Шаг 3. Вычисляется удельный вес каждого кластера  $P_{i,j} = C_{i,j} / \sum_{i,j} C_{i,j}$ .

Шаг 4. Мера рассчитывается согласно соотношению

$$M_d(q, l) \propto \sum_{i,j=1}^k P_{i,j}^q \cdot l^d = N(q, l) \cdot l^d \xrightarrow{l \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & d > \tau(q), \\ \infty, & d < \tau(q), \end{cases} \quad (1)$$

где  $q$  – порядок момента.

Шаг 5. Удельный вес  $P_{i,j}$  изменяется по степенному закону, который зависит от размера кластера  $l$  и определяется показателями  $\tau(q)$ . Значение числа клеток  $N(q, l)$  определяется как

$$N(q, l) = \sum_{i,j=1}^k P_{i,j}^q \propto l^{-\tau(q)}, \quad (2)$$

где показатель массы  $\tau(q) = -\lim_{l \rightarrow 0} \left( \frac{\ln N(q, l)}{\ln l} \right)$ .

Шаг 6. Изменение параметра деформации  $q$  определяет взвешенное число клеток  $N(q, l)$  и скейлинговую экспоненту  $\tau(q)$ . Спектр фрактальных размерностей Реньи  $D(q)$  определяется выражением

$$D(q) = \frac{\tau(q)}{q-1}.$$

Особенностью всех трех алгоритмов является общий концептуальный базис – расчет скейлинговых характеристик на основе процедуры покрытий изображений кластерами. При этом каждая методика позволяет исследовать отдельный аспект масштабной характеристики. Итогом данного этапа можно считать интеграцию функционала трех алгоритмов в единую вычислительную методику исследования характеристик сложноструктурированных объектов.

### 3. Структура и функционал системы компьютерного анализа изображений

Система интеллектуального анализа растровых изображений компьютерной томографии легких реализована в виде программного приложения в ППП Matlab. Представленные выше алгоритмы предпроцессинговой обработки (сегментации) и анализа изображений лежат в основе программных модулей. Работа отдельных модулей верифицирована с помощью сгенерированных тест-объектов с априорно известными скейлинговыми характеристиками. Общая структура комплекса представлена на рис. 1.

Функционал системы снабжен графическим интерфейсом пользователя, который позволяет загрузить исследуемое изображение в рабочую область, зафиксировать «окно» диагностического интереса для анализа, выбрать метод исследования, активизировать расчет характеристик и при переходе в подчиненные формы выбрать настройки для визуализации и вывода этих характеристик. Кроме того,

интерфейс приложения предусматривает возможность пакетной обработки – сегментации и бинаризации файлов, размещенных в одном каталоге, с записью результата в другой каталог.

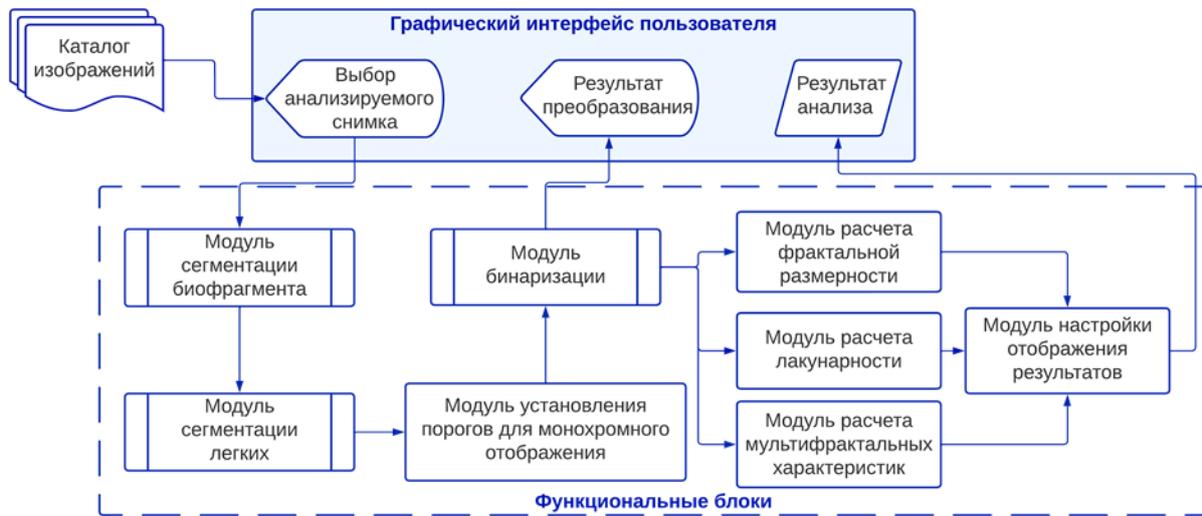


Рис. 1. Структурная схема программного приложения

Fig. 1. Block diagram of the software application

Модуль предобработки транслирует монохромное изображение в матрицу яркости и далее обращается к модулю сегментации, который позволяет выделить биофрагмент. Далее происходит обращение к программным модулям, позволяющим сегментировать структуру легкого и бинаризовать это изображение соответственно. Три основных модуля приложения отвечают за программные исполнения алгоритмов метода фрактального анализа, метода лакуарного анализа и метода мультифрактальной параметризации. С каждым модулем связана соответствующая подпрограмма, которая позволяет визуализировать результаты анализа в виде графического и численного представления характеристик. Результат работы подпрограммы, реализующей метод покрытий, представлен численным значением фрактальных размерностей  $D$  для изображения и для границ, а также построением зависимости  $N(l)$  в двойном логарифмическом масштабе. Модуль, ориентированный на лакуарный анализ, дает численное значение лакуарности  $\Lambda$ . Модуль расчета мультифрактальных характеристик изображения визуализирует скейлинговую экспоненту  $\tau(q)$  и спектр фрактальных размерностей Реньи  $D(q)$ . Программный комплекс позволяет сохранять данные в библиотеку файлов. Результат данного этапа представлен программной реализацией алгоритмов сегментации, лакуарного, фрактального, мультифрактального анализа и объединением этих модулей в комплекс, дополненный интерфейсом пользователя.

#### 4. Демопримеры и диагностический потенциал системы мультифрактального анализа КТ-изображений легких

Для демонстрации результатов работы системы анализа и оценки диагностического потенциала методов фрактальной параметризации для исследования морфологических характеристик цифровых КТ-снимков легких были выбраны объекты: два дистрибутива с КТ-срезами изображений легких человека (301 снимок, соответствующий норме, и 306 снимков, соответствующих диагностированной пневмонии) и КТ-снимки строения легких в прямой проекции, из которых 6 снимков соответствовали норме, 3 снимка – обнаруженной патологии COVID-19, 12 снимков – диагностированной пневмонии.

Для анализа скейлинговых характеристик, как было отмечено выше, требуется проведение процедуры выделения зоны интереса. На рис. 2 представлен пример результата предпроцессинговой обработки КТ-среза изображения легкого на основе адаптированного алгоритма сегментации, установления порогов яркости и процесса бинаризации.



Рис. 2. Результат предпроцессинговой обработки КТ-среза изображения на примере легкого с патологией:  
*a* – исходное изображение, *b* – результат сегментации  
 Fig. 2. The result of CT image preprocessing on the example of a lung with pathology  
 (*a* is the original image, *b* is the segmentation result)

Первый используемый аналитический инструмент основан на оценке фрактальной размерности изображений и границ кластеров. На рис. 3 показаны результаты оценки фрактальной размерности для всех КТ-снимков из директорий изображений, соответствующих норме и патологии пневмонии.

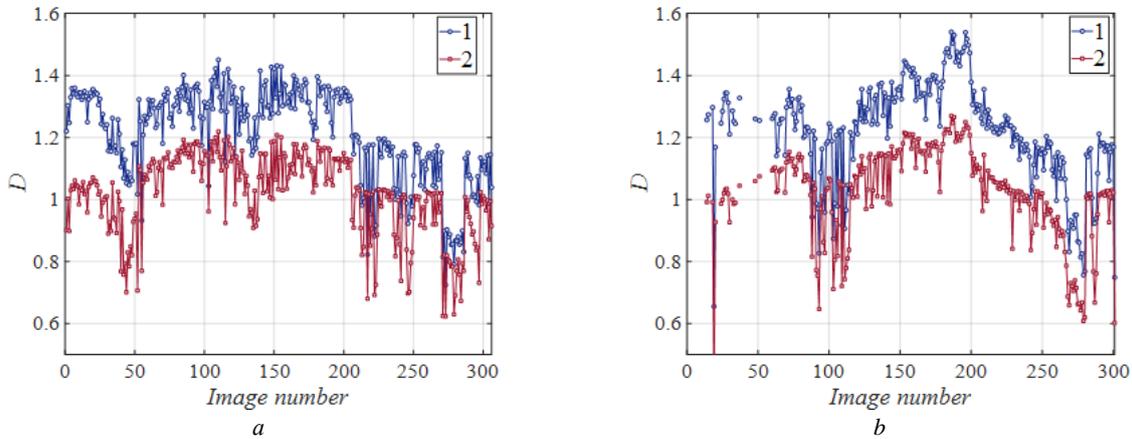


Рис. 3. Оценка значения фрактальной размерности для двух каталогов КТ-срезов, соответствующих норме (*a*), патологии (*b*), рассчитанные для всего изображения (1) и для границ структуры (2)  
 Fig. 3. Estimation of the fractal dimension for two folders of CT slices corresponding to normal – *a*, pathology – *b*, calculated for the entire image (1) and for the boundaries of the structure (2)

Можно отметить, что фрактальная размерность границ (для изображений, соответствующих норме и патологии) лежит примерно в одном диапазоне –  $[0,6; 1,4]$ , что свидетельствует о достаточно схожей геометрии очертаний визуализируемых структур. В то же время фрактальная размерность всей структуры демонстрирует чувствительность по отношению к исследованию снимков с патологией, и в определенном диапазоне КТ-срезов отмечается увеличение размерности до  $D \approx 1,5$ . Последнее дает основание для апробирования методики мультифрактального анализа.

Для мультифрактального анализа выбран КТ-срез изображения легкого, на котором результаты фрактального анализа показали увеличенную размерность; для сравнения выбрано сегментированное изображение легких без патологий в соответствующей проекции. Далее были визуализированы графики спектра Реньи  $D(q)$  (рис. 4) и скейлинговой экспоненты  $\tau(q)$ . Отметим, что поведение скейлинговой экспоненты отлично от прямолинейной зависимости, что свидетельствует о мультифрактальной организации исследуемых структур, для описания скейлинговых характеристик которых недостаточно только одной фрактальной размерности. Можно диагностировать, что для случая патологии спектры Реньи (для всех изображений в серии) демонстрируют сдвиг и расширение границ диапазона: значения  $D(q) \in [0,9; 1,6]$  для нормы и  $D(q) \in [1; 1,9]$  для патологии.

Далее представим результаты фрактального анализа КТ-снимков легких в прямой проекции (расчет проводился по границам фрактальных кластеров и для всей структуры изображения). В табл. 1 показаны диапазоны фрактальных размерностей для каждой группы снимков, соответствующих нор-

ме, патологии пневмонии и патологии COVID-19. Проведенные измерения показали, что границы дендритных паттернов легких имеют достаточно схожие фрактальные характеристики – фрактальная размерность принадлежит достаточно узкому диапазону [1,30; 1,45]. Можно отметить, что расчет фрактальной размерности для всей структуры демонстрирует диагностическую чувствительность для случая COVID-19 – структура существенно усложняется и характеризуется увеличением значения фрактальной размерности по сравнению с нормой.

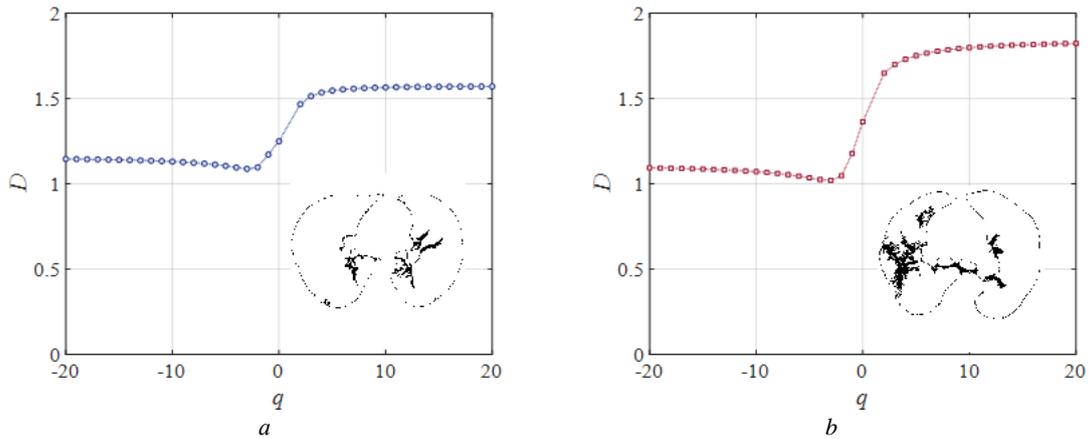


Рис. 4. Спектры Реньи для изображений КТ-срезов, соответствующих норме (a) и патологии (b)  
 Fig. 4. The Renyi spectra for images of CT slices corresponding to a is normal and b is pathology

Таблица 1

**Результаты фрактального анализа для трех групп снимков**

Группа снимков	Диапазон фрактальной размерности границ фрактальных кластеров	Диапазон фрактальной размерности всей структуры
Норма	1,3175–1,4062	1,5630–1,6503
COVID-19	1,387–1,3965	1,7200–1,7709
Пневмония	1,3640–1,4345	1,5913–1,7426

В дополнение к фрактальному анализу приведем результаты лакунарного анализа исследуемой серии снимков. Как можно видеть из табл. 2, лакунарность для трех случаев коррелирует с результатами расчета фрактальной размерности структур и имеет особенности по отношению к снимкам с диагностированной патологией COVID-19.

Таблица 2

**Результаты лакунарного анализа для трех групп снимков**

Группа снимков	Диапазон лакунарного анализа
Норма	1,4847–1,5647
COVID-19	1,6157–1,6566
Пневмония	1,5287–1,6527

На рис. 5 продемонстрированы результаты расчета мультифрактальных спектров Реньи для КТ-снимков в прямой проекции. Расширенный спектр Реньи указывает на мультифрактальную организацию изображений, что подтверждает также вид скейлинговой экспоненты, которая характеризуется отличным от прямолинейной зависимостью поведением. Характерным признаком изображений, соответствующих диагностированной патологии COVID-19, является существенное расширение спектра Реньи (значения  $D(q) \in [1,41; 1,73]$  для нормы и  $D(q) \in [1,00; 1,90]$  для патологии.). При этом отметим, что вопрос мультифрактальной диагностики особенностей изображений, соответствующих COVID-19, по сравнению с изображениями, соответствующими пневмонии, остается открытым. Наши данные свидетельствуют только о выявлении изменений в спектрах, соответствующих изображениям с диагностированными патологиями в общем случае.

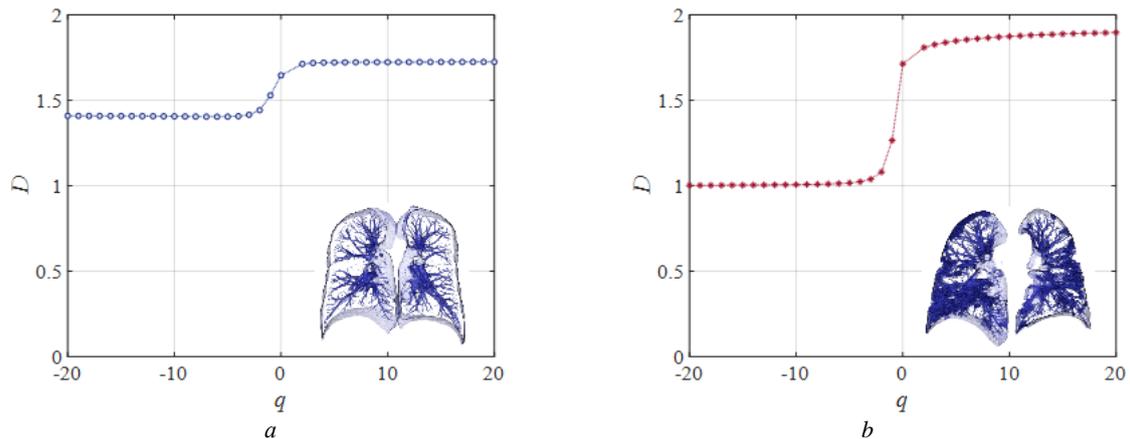


Рис. 5. Спектры размерностей Реньи для изображений, соответствующих норме (а) и патологии COVID-19 (б)  
Fig. 5. Spectra of Renyi dimensions for images corresponding to the norm (a) and COVID-19 pathology (b)

Реализованная система сегментации и мультифрактального анализа цифровых изображений компьютерной томографии легких позволила исследовать диагностические возможности используемых методов для выявления морфологических особенностей снимков, соответствующих норме и патологиям. Установлено, что фрактальный анализ границ дендритоподобной структуры свидетельствует об одинаковой степени сложности границ визуализируемых структур. Предварительный анализ снимков может быть проведен на основе установления диапазонов лакунарности и фрактальной размерности всего изображения и далее уточнен с использованием более чувствительной методики мультифрактального анализа.

### Заключение

Таким образом, в работе представлен результат разработки программного комплекса для системы интеллектуального анализа растровых изображений, адаптированной к установлению морфологических особенностей цифровых КТ-снимков легких человека. Формализован и программно реализован алгоритм сегментации изображения для выделения зон морфологического интереса. Проведена интеграция функционала трех алгоритмов – фрактальной, лакунарной и мультифрактальной параметризации – в единый вычислительный комплекс исследования характеристик сложноструктурированных объектов. Разработан интегрированный комплекс программ с интерфейсом пользователя, который объединил функционал отдельных модулей по численной оценке скейлинговых характеристик кластерных структур на растровых изображениях. Проведенный в результате серии экспериментов анализ на примере цифровых КТ-снимков легких человека позволил выявить, что для снимков с выраженными патологиями обобщенные спектры Реньи демонстрируют расширение. Полученные данные могут быть использованы в качестве вспомогательной неинвазивной методики при диагностике заболеваний органов дыхания. Развитие темы предполагает проведение статистического анализа результатов, исследование снимков с различными патологиями и расширение аналитического аппарата системы анализа на основе реализации альтернативных методов интеллектуального анализа растровых изображений.

### Список источников

1. Falconer K.J. Fractal geometry: mathematical foundations and applications. Chichester : John Wiley and Sons, 2014. 338 p.
2. Sztójnov I., Crisan D.A., Mina C.P., Voinea V. Image processing in biology based on the fractal analysis // Image Processing / ed. by Yung-Sheng Chen. 2009. P. 321–344. URL: <https://www.intechopen.com/chapters/6684> (sccessed: 05.09.2023).
3. Reljin I.S., Reljin B.D. Fractal geometry and multifractals in analyzing and processing medical data and images // Archive of Oncology. 2002. V. 10 (4). P. 283–293.
4. Lopes R., Betrouni N. Fractal and multifractal analysis: a review // Medical Image Analysis. 2009. V. 13. P. 634–649.
5. Mamdetsariev I., Mirzapoiiazova T., Lennon F., Jolly M.K., Li H., Nasser M.W., Vora L., Kulkarni P., Batra S.K., Salgia R. Small cell lung cancer therapeutic responses through fractal measurements: from radiology to mitochondrial biology // Clinical Medicine. 2019. V. 8 (7). Art. 1038.

6. Szigeti K., Szabó T., Korom C., Czibak I., Horváth I., Veres D.S., Gyöngyi Z., Karlinger K., Bergmann R., Pócsik M., Budán F., Máthé D. Radiomics-based differentiation of lung disease models generated by polluted air based on X-ray computed tomography data // *BMC Medical Imaging*. 2016. V. 16 (1). Art. 14.
7. Sato A., Hirai T., Imura A., Kita N., Iwano A., Muro S., Nabeshima Y., Suki B., Mishima M. Morphological mechanism of the development of pulmonary emphysema in klotho mice // *PNAS*. 2007. V. 104 (7). Art. 2361.
8. Troshin P.I. Multifractal parametrization in diagnosis of lungs diseases // *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2015. V. 105 (2). P. 173–185.
9. Bodduluri S., Puliyakote A.S.K., Gerard S.E. et al. Airway fractal dimension predicts respiratory morbidity and mortality in COPD // *The Journal of Clinical Investigation*. 2018. V. 128 (12). P. 5374–5382.
10. Ibrahim M. New Approach for Emphysema Pattern Detection in Computed Tomography Images // *Nigerian Online Journal of Educational Sciences and Technology (NOJEST)*. 2021. V. 3 (1). P. 9–17.
11. Tourassi G.D., Frederick E.D., Vittitoe N.F., Coleman R.E. Fractal texture analysis of perfusion lung scans. // *Computers and Biomedical Research*. 2000. V. 33. P. 161–171.
12. Nichita M.V., Paun V.P. Fractal analysis in complex arterial network of pulmonary X-Rays images // *UPB Scientific Bulletin. Series A: Applied Mathematics and Physics*. 2002. V. 80. P. 325–339.
13. Степанов В.А., Мурынов А.И., Суфьянов В.Г., Мальчиков А.Я., Сопранов Б.Н., Белых В.В. Результаты диагностики заболеваний легких на основе деревьев решений и мультифрактального анализа цифровых флюорограмм. URL: [http://www.rusnauka.com/18\\_ADEN\\_2012/Medecine/16\\_113388.doc.htm](http://www.rusnauka.com/18_ADEN_2012/Medecine/16_113388.doc.htm) (дата обращения: 05.09.2023).
14. Щетинин Е.Ю., Севастьянов Л.А. Компьютерная система обнаружения COVID-19 по рентгеновским снимкам легких методами глубокого обучения // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2022. № 58. С. 97–105. doi: 10.17223/19988605/58/9
15. Недзведзь А.М., Абламейко С.В. Анализ изображений для решения задач медицинской диагностики. Минск : ОИПИ НАН Беларуси, 2012. 240 с.
16. Chen H., Li W., Zhu Y. Improved window adaptive gray level co-occurrence matrix for extraction and analysis of texture characteristics of pulmonary nodules // *Computer Methods and Program in Biomedicine*. 2021. V. 208. Art. 106263.
17. Halder A., Chatterjee S., Dey D., Kole S., Munshi S. An adaptive morphology based segmentation technique for lung nodule detection in thoracic CT image // *Computer Method and Programs in Biomedicine*. 2020. V. 197. Art. 105720.
18. Plotnick R.E., Gardner R.H., Hargrove W.W. Lacunarity analysis: A general technique for the analysis of spatial patterns // *Physical Review E*. 1996. V. 53 (5). P. 5461–5468.
19. Scott R., Kadum H., Salmaso G., Calaf M., Cal R.B. A lacunarity-based index for spatial heterogeneity // *Earth and Space Science*. 2021. V. 9 (8). e2021EA002180.
20. Xia Y., Cai J., Perfect E., Wei W., Zhang Q., Meng Q. Fractal dimension, lacunarity and succolarity analyses on CT images of reservoir rocks for permeability prediction // *Journal of Hydrology*. 2019. V. 579 (6). Art. 124198.
21. Хмелевская В.С. Компьютерный анализ процессов самоорганизации в металлических материалах // *Математическое моделирование*. 2006. Т. 18, № 1. С. 88–98.
22. Barabash T., Maslovskaya A. Fractal parameterization analysis of ferroelectric domain structure evolution induced by electron beam irradiation // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2017. V. 168. Art. 012028.
23. Павлов А.Н., Анищенко В.С. Мультифрактальный анализ сложных сигналов // *УФН*. 2007. Т. 177, № 8. С. 859–872.
24. Масловская А.Г., Афанасов Л.С. Алгоритмы мультифрактального вейвлет-анализа в задачах спецификации растровых изображений самоподобных структур // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2020. Т. 53. С. 61–70.

#### References

1. Falconer, K.J. (2014) *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Chichester: John Wiley and Sons.
2. Sztojonov, I., Crisan, D.A., Mina, C.P. & Voinea, V. (2009) Image processing in biology based on the fractal analysis. In: Yung-Sheng Chen. (ed.) *Image Processing*. pp. 321–344. [Online] Available from: <https://www.intechopen.com/chapters/6684> (Accessed: 5th September 2023).
3. Reljin, I.S. & Reljin, B.D. (2002) Fractal geometry and multifractals in analyzing and processing medical data and images. *Archive of Oncology*. 10(4). pp. 283–293.
4. Lopes, R. & Betrouni, N. (2009) Fractal and multifractal analysis: a review. *Medical Image Analysis*. 13. pp. 634–649.
5. Mamdetsariev, I., Mirzapioazova, T., Lennon, F., Jolly, M.K., Li, H., Nasser, M.W., Vora, L., Kulkarni, P., Batra, S.K. & Salgia, R. (2019) Small cell lung cancer therapeutic responses through fractal measurements: from radiology to mitochondrial biology. *Clinical Medicine*. 8(7). Art. 1038.
6. Szigeti, K., Szabó, T., Korom, C., Czibak, I., Horváth, I., Veres, D.S., Gyöngyi, Z., Karlinger, K., Bergmann, R., Pócsik, M., Budán, F. & Máthé, D. (2016) Radiomics-based differentiation of lung disease models generated by polluted air based on X-ray computed tomography data. *BMC Medical Imaging*. 16. Art. 14.
7. Sato, A., Hirai, T., Imura, A., Kita, N., Iwano, A., Muro, S., Nabeshima, Y., Suki, B. & Mishima, M. (2007) Morphological mechanism of the development of pulmonary emphysema in klotho mice. *PNAS*. 104(7). Art. 2361.
8. Troshin, P.I. (2015) Multifractal parametrization in diagnosis of lungs diseases. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 105(2). pp. 173–185.

9. Bodduluri, S., Puliyakote, A.S.K., Gerard, S.E. et al. (2018) Airway fractal dimension predicts respiratory morbidity and mortality in COPD. *The Journal of Clinical Investigation*. 128(12). pp. 5374–5382.
10. Ibrahim, M. (2021) New Approach for Emphysema Pattern Detection in Computed Tomography Images. *Nigerian Online Journal of Educational Sciences and Technology (NOJEST)*. 3(1). pp. 9–17.
11. Tourassi, G.D., Frederick, E.D., Vittitoe, N.F. & Coleman, R.E. (2000) Fractal texture analysis of perfusion lung scans. *Computers and Biomedical Research*. 33. pp. 161–171.
12. Nichita, M.V. & Paun, V.P. (2002) Fractal analysis in complex arterial network of pulmonary X-Rays image. *UPB Scientific Bulletin. Series A: Applied Mathematics and Physics*. 80. pp. 325–339.
13. Stepanov, V.A., Murynov, A.I., Sufyanov, V.G., Malchikov, A.Ya., Sopranov, B.N. & Belykh, V.V. (2012) *Rezultaty diagnostiki zbolevaniy legkikh na osnove derev'ev resheniy i mul'tifraktal'nogo analiza tsifrovyykh flyuorogramm* [Results of diagnosis of lung diseases based on decision trees and multifractal analysis of digital fluorograms]. [Online] Available from: [http://www.rusnauka.com/18\\_ADEN\\_2012/Medicine/16\\_113388.doc.htm](http://www.rusnauka.com/18_ADEN_2012/Medicine/16_113388.doc.htm) (Accessed: 5th September 2023).
14. Shchetinin, E.Yu. & Sevastyanov, L.A. (2022) Automated detection of COVID-19 coronavirus infection based on analysis of chest X-ray images by deep learning methods. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 58. pp. 97–105. DOI: 10.17223/19988605/58/9
15. Nedzved, A.M. & Ablameyko, S.V. (2012) *Analiz izobrazheniy dlya resheniya zadach meditsinskoj diagnostiki* [Image analysis for tasks of medical diagnostics]. Minsk: IPI of the National Academy of Sciences of Belarus.
16. Chen, H., Li, W. & Zhu, Y. (2021) Improved window adaptive gray level co-occurrence matrix for extraction and analysis of texture characteristics of pulmonary nodules. *Computer Methods and Program in Biomedicine*. 208. Art. 106263(6).
17. Halder, A., Chatterjee, S., Dey, D., Kole, S. & Munshi, S. (2020) An adaptive morphology based segmentation technique for lung nodule detection in thoracic CT image. *Computer Method and Programs in Biomedicine*. 197. Art. 105720.
18. Plotnick, R.E., Gardner, R.H. & Hargrove, W.W. (1996) Lacunarity analysis: A general technique for the analysis of spatial patterns. *Physical Review E*. 53(5). pp. 5461–5468.
19. Scott, R., Kadum, H., Salmaso, G., Calaf, M. & Cal, R.B. (2022) A lacunarity-based index for spatial heterogeneity. *Earth and Space Science*. 9(8). e2021EA002180.
20. Xia, Y., Cai, J., Perfect, E., Wei, W., Zhang, Q. & Meng, Q. (2019) Fractal dimension, lacunarity and succolarity analyses on CT images of reservoir rocks for permeability prediction. *Journal of Hydrology*. 579(6). Art. 124198.
21. Khmelevskaya, V.S. (2006) *Komp'yuternyy analiz protsessov samoorganizatsii v metallicheskih materialakh* [Computer analysis of self-organization processes in metallic materials]. *Matematicheskoe modelirovanie*. 18(1). pp. 88–98.
22. Barabash, T. & Maslovskaya, A. (2017) Fractal parameterization analysis of ferroelectric domain structure evolution induced by electron beam irradiation. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 168. Art. 012028 (6). DOI: 10.1088/1757-899X/168/1/012028
23. Pavlov, A.N. & Anishchenko, V.S. (2007) *Mul'tifraktal'nyy analiz slozhnykh signalov* [Multifractal analysis of complex signals]. *UFN*. 50(8). pp. 819–834.
24. Maslovskaya, A. & Afanasov, L. (2020) Algorithms of multifractal wavelet analysis in problems of specifying raster images of self-similar structures. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 53. pp. 61–67. DOI: 10.17223/19988605/53/6

#### **Информация об авторах:**

**Салмиянов Владислав Олегович** – аспирант кафедры математического анализа и моделирования, младший научный сотрудник лаборатории математического моделирования сложных физических и биологических систем Амурского государственного университета (Благовещенск, Россия). E-mail: svsalmiyanov@mail.ru@mail.ru

**Масловская Анна Геннадьевна** – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и моделирования Амурского государственного университета (Благовещенск, Россия). E-mail: maslovskayaag@mail.ru

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

#### **Information about the authors:**

**Salmiyanov Vladislav O.** (Post-graduate Student, Department of Mathematical Analysis and Modeling, Researcher of Laboratory of Mathematical Modeling of Complex Physical and Biological Systems, Amur State University, Blagoveshchensk, Russian Federation). E-mail: svsalmiyanov@mail.ru@mail.ru

**Maslovskaya Anna G.** (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Mathematical Analysis and Modeling, Amur State University, Blagoveshchensk, Russian Federation). E-mail: maslovskayaag@mail.ru

**Contribution of the authors:** the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 21.08.2023; принята к публикации 08.12.2023

Received 21.08.2023; accepted for publication 08.12.2023

Научная статья

УДК 004.032.26, 004.272

doi: 10.17223/19988605/65/12

## Алгоритм вычисления координат связных компонент бинарного изображения с помощью перестраиваемой вычислительной среды

Дмитрий Вадимович Шашев<sup>1</sup>, Антон Сергеевич Бондарчук<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Томский государственный университет, Томск, Россия

<sup>1</sup> dshashev@mail.ru

<sup>2</sup> bondarchuk.a.c@gmail.com

**Аннотация.** Разработан и представлен алгоритм вычисления координат связных компонент бинарного изображения, предназначенный для реализации на перестраиваемой вычислительной среде (ПВС). Особенности построения архитектуры ПВС и используемая концепция процесса обработки изображений позволяют в перспективе значительно повысить скорость работы представленного алгоритма за счет параллельной обработки каждого пикселя изображения.

**Ключевые слова:** бинарное изображение; цифровая обработка изображений; перестраиваемая вычислительная среда; ПЛИС.

**Благодарности:** Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-29-06078.

**Для цитирования:** Шашев Д.В., Бондарчук А.С. Алгоритм вычисления координат связных компонент бинарного изображения с помощью перестраиваемой вычислительной среды // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 65. С. 116–125. doi: 10.17223/19988605/65/12

Original article

doi: 10.17223/19988605/65/12

## Algorithm for calculating the coordinates of connected components of a binary image using a tunable computing environment

Dmitriy V. Shashev<sup>1</sup>, Anton S. Bondarchuk<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

<sup>1</sup> dshashev@mail.ru

<sup>2</sup> bondarchuk.a.c@gmail.com

**Abstract.** An algorithm for calculating the coordinates of connected components of a binary image designed for implementation on a reconfigurable computing environment (RCE) is developed and presented. The features of building the RCE architecture and the concept of the image processing process used make it possible in the future to significantly increase the speed of the presented algorithm due to parallel processing of each pixel of the image.

**Keywords:** binary image; digital image processing; reconfigurable computing environment; FPGA.

**Acknowledgments:** The reported study was funded by RFBR, project number 19-29-06078.

**For citation:** Shashev, D.V., Bondarchuk, A.S. (2023) Algorithm for calculating the coordinates of connected components of a binary image using a tunable computing environment. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnik i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 65. pp. 116–125. doi: 10.17223/19988605/65/12

### Введение

Необходимость обнаружения объектов на изображениях возникает во многих прикладных и научных областях. Аппаратно-программные комплексы (АПК), реализующие эту функцию, используются для решения различных задач, включая автоматизацию технологических процессов на производстве, распознавание объектов дорожной сцены беспилотными автомобилями и дронами, мониторинг в агрессивных средах и т.д. При решении подобных задач необходимы эффективные АПК, способные обеспечить максимально возможную скорость обработки видеок кадров, так как от нее зависит время реакции системы управления, например того же беспилотного автомобиля. Для решения проблемы сокращения времени анализа видеoinформации необходимо улучшать существующие и развивать новые алгоритмы обработки изображений.

Объекты интереса на изображениях могут находиться в широком диапазоне размеров и форматных соотношений. Поиск потенциальных объектов на изображении и определение регионов интереса можно реализовать на вычислительных архитектурах параллельно-конвейерного типа, таких как Field-Programmable Gate Arrays (FPGA; ПЛИС), которые де-факто показывают высокую эффективность в области обработки цифровых сигналов, в том числе обеспечивают высокую скорость выполнения алгоритмов [1, 2].

В настоящей работе представлен альтернативный способ решения задачи поиска на бинарном изображении областей связных компонент, которые являются потенциальными объектами интереса. В основу данного способа положена концепция обработки изображения на перестраиваемой вычислительной среде, отличающейся возможностью обрабатывать каждый пиксель исходного изображения параллельно. За счет идеи массового попиксельного параллелизма в обработке изображений можно достичь высокого быстродействия выполнения алгоритмов.

Перестраиваемые вычислительные среды (ПВС) – математическая модель широкого класса вычислительных устройств, основанных на идее организованного совместного функционирования большого количества однотипных, относительно простых вычислительных элементов (ВЭ), расположенных в виде регулярной решетки и попарно соединенных с соседними вычислительными элементами [3–6]. Каждый ВЭ может быть независимо настроен при помощи внешнего управляющего сигнала на одну операцию из некоторого predetermined базиса. Организованное функционирование большого количества вычислителей позволяет реализовать на среде сложные алгоритмы обработки. Таким образом, вычислительные возможности перестраиваемой среды ограничиваются количеством элементов и заданным базисом операций.

В общем случае ПВС может иметь ВЭ произвольной формы и быть одно-, двух- и трехмерной. В данной работе будут рассматриваться двумерные среды с квадратными ВЭ. Таким образом, каждый неграничный ВЭ будет соединен с четырьмя соседними элементами (рис. 1).

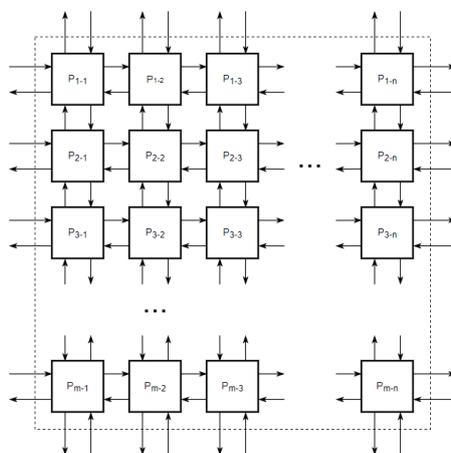


Рис. 1. Перестраиваемая вычислительная среда  
 Fig. 1. Reconfigurable computing environment

В работах [7–9] описывается реализация алгоритмов цифровой обработки изображений на ПВС. Для таких алгоритмов является актуальной проблема определения интересующей области изображения для ее последующего анализа. В данной работе рассматривается алгоритм поиска регионов интереса на бинарном изображении.

### 1. Способ и алгоритм определения местоположения регионов интереса на бинарном изображении

Для идентификации объектов на бинарном изображении необходимо определить группы пикселей со значением 1, которые «связаны» друг с другом. То есть объектами на бинарном изображении в данном случае будут считаться связные компоненты этого изображения. В общем случае связная компонента – это множество пикселей  $P$  со значением 1, в котором для каждой пары пикселей  $p_n$  и  $p_m$  в  $P$  существует последовательность пикселей  $p_n, \dots, p_m$  такая, что:

- все пиксели в последовательности находятся в множестве  $P$ , т.е. имеют значение 1;
- каждые 2 пикселя, находящиеся в последовательности рядом, являются «соседями».

У элемента изображения  $p$  с координатами  $(i, j)$  имеется два соседа по вертикали и два по горизонтали. Координаты таких соседей отражаются в виде следующих выражений:  $(i + 1, j)$ ,  $(i - 1, j)$ ,  $(i, j + 1)$ ,  $(i, j - 1)$ .

Это множество пикселей называется четверкой соседей  $p$ . Каждый его элемент находится на единичном расстоянии от  $(i, j)$ . Таким образом, некоторые соседние пиксели могут отсутствовать, например в случае, когда пиксель  $p(i, j)$  находится на краю изображения. Для того чтобы объекты не примыкали к краям, изображения расширяют фоном из нулевых элементов.

Четыре соседа  $p$  по диагонали имеют координаты  $(i + 1, j + 1)$ ,  $(i + 1, j - 1)$ ,  $(i - 1, j + 1)$ ,  $(i - 1, j - 1)$ . Совокупность четверки соседей и пикселей, расположенных на представленных координатах, называют восьмеркой соседей. Так возникает два вида связности, а именно: четырехсвязность и восьмисвязность [10]. Далее в рассматриваемом алгоритме будет использоваться восьмисвязность, при которой считается, что каждый пиксель бинарного изображения имеет восемь соседей.

Принцип работы разработанного алгоритма вычисления координат связных компонент бинарного изображения заключается в следующем: для каждого пикселя бинарного изображения со значением 1 рассчитываются координаты границ области, к которой он принадлежит; за необходимое количество тактов работы ВЭ ПВС информация о координате  $i$  самого верхнего и нижнего связного пикселя области передается всем ВЭ, обрабатывающим данную область; также передается информация о координате  $j$  самого левого и правого связного пикселя. Таким образом, на выходе алгоритма каждый ВЭ, обрабатывающий связный пиксель, выдает координаты верхнего левого и правого нижнего угла рамки, окружающей соответствующую группу связных пикселей.

Для реализации на ПВС алгоритма вычисления координат связных компонент бинарного изображения необходимо использовать ПВС, состоящую из двух слоев. При этом ВЭ имеют шесть связей между слоями ПВС, через которые на ВЭ второго слоя передаются значения обрабатываемых пикселей, координаты ВЭ и результаты обработки первого слоя. На рис. 2, *a* представлена структура связи ВЭ ПВС с каждым из своих восьми соседей, на рис. 2, *b* показана связь ВЭ между слоями ПВС.

Работу ВЭ первого слоя ПВС опишем следующим образом. Координаты элементарного вычислителя  $(i_9, j_9)$ , обрабатываемого рассматриваемый пиксель со значением  $x$ , а также значения координат соседних ВЭ используются для вычисления минимальных значений координат области связных компонент. Координаты строки, полученные от соседних ВЭ, объединены с  $i_9$  и представлены в виде множества  $I = \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7, i_8, i_9\}$ , координаты столбца, полученные от соседних ВЭ, вместе с  $j_9$  представлены в виде множества  $J = \{j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6, j_7, j_8, j_9\}$ . При этом значения координат в множествах  $I$  и  $J$  могут изменяться на каждом такте работы  $t$  ВЭ. В таком случае  $t = 1, \dots, n$ , где  $n$  – это количество тактов работы ВЭ. Тогда обозначим множества  $I$  и  $J$  для каждого такта как множества  $I_t$  и  $J_t$ .

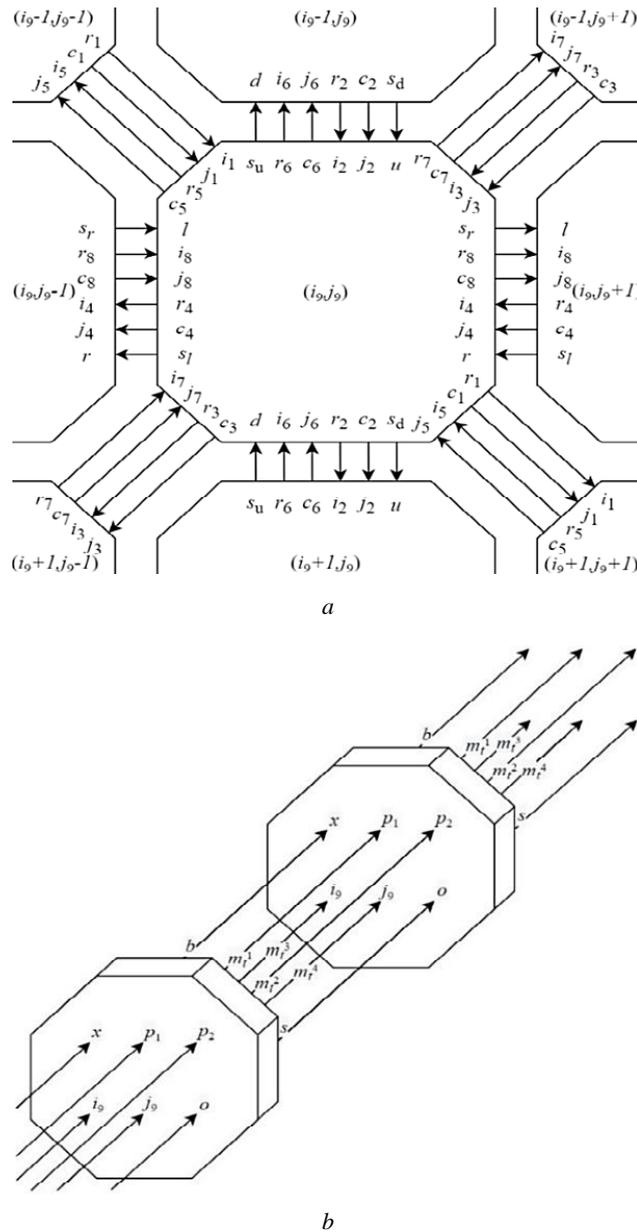


Рис. 2. Структура связи элементарных вычислителей: *a* – в одном слое ПВС, *b* – между слоями ПВС  
 Fig. 2. The structure of communication of elementary calculators: *a*) in one layer of RCE, *b*) between layers of RCE

При определении минимальных значений координат нулевые значения не учитываются. По этой причине далее будут рассматриваться множества, в которых отсутствуют нулевые значения:

$$V_t = \{i \in I_t \mid i \neq 0\},$$

$$W_t = \{j \in J_t \mid j \neq 0\}.$$

Минимумом числового множества  $V_t$  является элемент  $q_t$ , удовлетворяющий следующим условиям  $q_t \in V_t, \forall v \in V_t: q_t \leq v$ . Если  $V_t = \emptyset$ , то  $q_t$  принимает нулевое значение. Аналогично элемент  $h_t$  является минимумом множества  $W_t$ , если  $h_t \in W_t, \forall w \in W_t: h_t \leq w$ , и равен нулю при  $W_t = \emptyset$ . Минимальные значения координат ( $q_t$  и  $h_t$ ) умножаются на значение  $x$  обрабатываемого пикселя, это сделано для того, чтобы учитывать только пиксели бинарного изображения со значением 1:

$$a_t = x \cdot q_t,$$

$$k_t = x \cdot h_t.$$

Полученные результаты вычисления  $a_t$  и  $k_t$  сравниваются с результатами, полученными на предыдущем такте работы. Также результаты предыдущего такта передаются соседним ВЭ с помощью

межячеечных связей перестраиваемой вычислительной среды (наборы  $r_i^1, \dots, r_i^8$  и  $c_i^1, \dots, c_i^8$ ). На каждом такте работы ВЭ обрабатывает координаты, которые были получены от соседних ВЭ. Такая обработка данных продолжается, пока значения  $a_i$  и  $k_i$ , полученные на текущем такте работы ВЭ, не будут равны соответствующим значениям предыдущего такта, и так для всех ВЭ. Обозначим результаты сравнения символами  $f_1$  и  $f_2$ , тогда

$$f_1 = \begin{cases} 1, & a_i = a_{i-1}, \\ 0, & a_i \neq a_{i-1}, \end{cases}$$

$$f_2 = \begin{cases} 1, & k_i = k_{i-1}, \\ 0, & k_i \neq k_{i-1}. \end{cases}$$

Каждый ВЭ принимает на входы  $l$  и  $u$  сигналы от соседних левого и верхнего ВЭ соответственно. Для ВЭ, находящихся на границе ПВС и не имеющих соседей слева и сверху, эти сигналы равны 1. Результат конъюнкции значений  $l$ ,  $u$ ,  $f_1$  и  $f_2$  передается соседним ВЭ справа и снизу через выходы  $s_r$  и  $s_d$ . В результате в ВЭ, находящемся в правом нижнем углу первого слоя ПВС, формируется сигнал  $s$ , который равен 1, если  $f_1$  и  $f_2$  равны 1 в каждом ВЭ этого слоя ПВС. Данный сигнал  $s$  подается на вход  $o$  ВЭ второго слоя перестраиваемой вычислительной среды. С помощью этого сигнала передается информация о том, что вычисления на первом слое ПВС завершены. Через выходы  $m_i^1$  и  $m_i^2$  ВЭ первого слоя ПВС на входы  $p_1$  и  $p_2$  ВЭ второго слоя поступают значения  $a_i$  и  $k_i$ .

Работа элементарных вычислителей второго слоя ПВС схожа по принципу с ВЭ первого слоя с отличием лишь в том, что в данных ВЭ определяются максимальные значения координат области связных компонент.

Максимумом числового множества  $I_i$  является элемент  $Q_i$ , удовлетворяющий следующим условиям:  $Q_i \in I_i, \forall i \in I_i: Q_i \geq i$ . Аналогично элемент  $H_i$  является максимумом множества  $J_i$ , если  $H_i \in J_i, \forall j \in J_i: H_i \geq j$ .

Обозначим результаты сравнения значений, полученных на текущем и предыдущем тактах, символами  $f_3$  и  $f_4$ , тогда

$$f_3 = \begin{cases} 1, & A_i = A_{i-1}, \\ 0, & A_i \neq A_{i-1}, \end{cases}$$

$$f_4 = \begin{cases} 1, & K_i = K_{i-1}, \\ 0, & K_i \neq K_{i-1}, \end{cases}$$

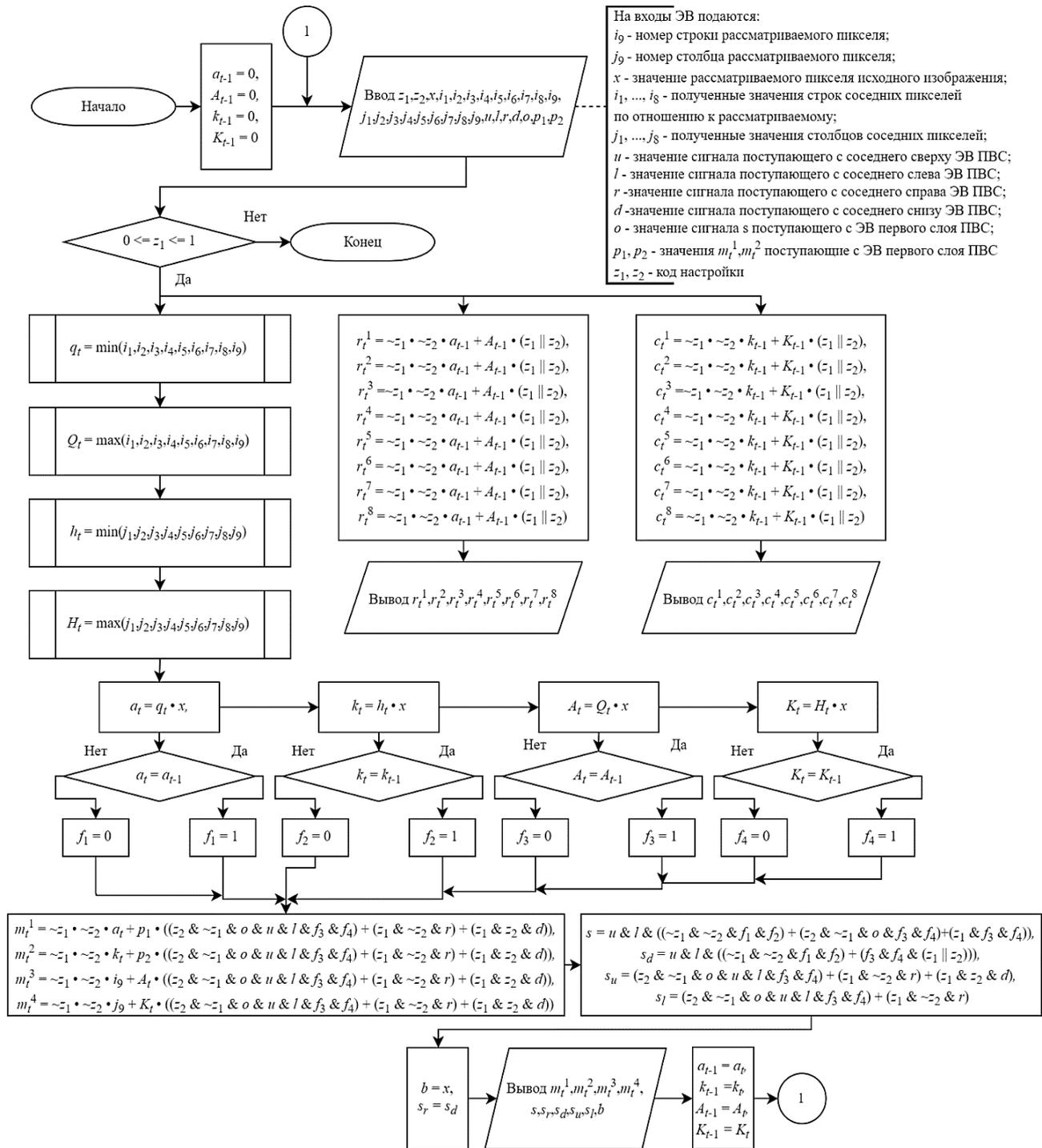
$$A_i = x \cdot Q_i,$$

$$K_i = x \cdot H_i.$$

Так же, как и в первом слое ПВС, каждый ВЭ второго слоя ПВС формирует и передает сигнал, используя входы  $l$ ,  $u$  и выходы  $s_r$ ,  $s_d$ . В ВЭ, находящемся в правом нижнем углу второго слоя ПВС, формируется сигнал, который равен 1, если  $f_3$  и  $f_4$  равны 1 в каждом ВЭ этого слоя ПВС. Данный сигнал с помощью логической операции конъюнкции объединяется с сигналом от первого слоя ПВС, поступающим на вход  $o$  ВЭ. Результат конъюнкции от ВЭ, находящегося в правом нижнем углу второго слоя ПВС, распространяется по всем остальным ВЭ этого слоя с помощью входов  $r$ ,  $d$  и выходов  $s_u$ ,  $s_l$ . В каждом ВЭ второго слоя ПВС результат конъюнкции умножается на  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $A_i$  и  $K_i$  для того, чтобы на выходах ВЭ учитывались только те значения, которые удовлетворяют поставленным условиям. Также результат конъюнкции в ВЭ в правом нижнем углу второго слоя ПВС поступает на выход  $s$ . Этот сигнал необходим для получения информации о том, что вычисления на первом и втором слоях ПВС завершены. Блок-схема работы алгоритма для ВЭ ПВС представлена на рис. 3. В ней описан алгоритм, реализуемый каждым ВЭ ПВС.

На выходах  $m_i^1, m_i^2, m_i^3, m_i^4$  элементарных вычислителей второго слоя перестраиваемой вычислительной среды формируются значения, представляющие собой координаты регионов интереса. Под регионом интереса в нашем случае будем понимать рамку прямоугольной формы, окружающую

группу связанных пикселей, которым принадлежит рассматриваемый пиксель. Здесь  $(m_t^1, m_t^2)$  – это координаты верхнего левого угла прямоугольной рамки, а  $(m_t^3, m_t^4)$  – координаты правого нижнего угла. Пример работы алгоритма представлен на рис. 4.



На рис. 4 слева представлена координатная плоскость исходного бинарного изображения, пиксели которого принимают значения 0 или 1, а по координатным осям указывают на порядковый номер каждого пикселя в строке и столбце. Предполагаемый объект интереса на бинарном изображении определяется пикселями, значение которых равно 1. Соответственно, необходимо выделить все обла-

сти интереса путем определения соответствующих связанных компонент, т.е. группы пикселей, расположенных близко друг к другу и имеющих значения 1. Для выделения этих групп необходимо определить координаты описывающего каждую группу прямоугольника, т.е. определить координаты левого верхнего угла и правого нижнего.

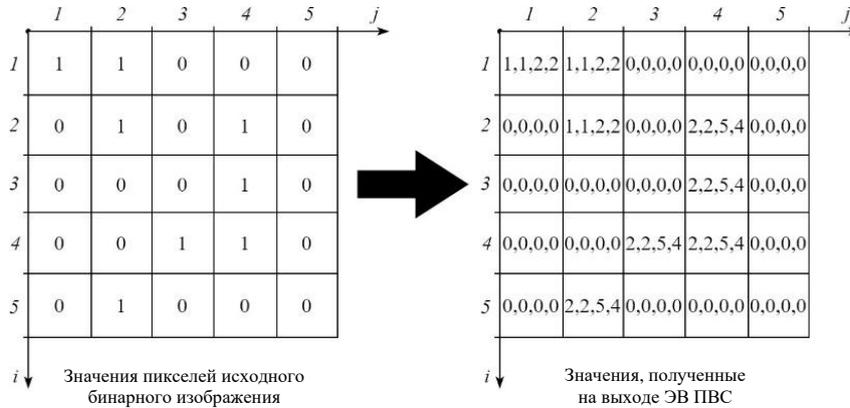


Рис. 4. Принцип работы алгоритма нахождения координат связанных компонент бинарного изображения  
 Fig. 4. The principle of operation of the algorithm for finding the coordinates of connected components of a binary image

На рис. 4 справа представлен результат работы алгоритма. Как видно, каждому связанному пикселю в группе присвоено значение координат описывающего эту группу прямоугольника.

## 2. Синтез ВЭ ПВС

Для осуществления синтеза ВЭ ПВС операциям на первом и втором слоях ПВС был присвоен код настройки  $(z_2, z_1)$ , с помощью которого осуществляется перестраиваемость автомата на выполнение необходимой операции, а также системы выходных формул:

1) при  $z_2 = 0, z_1 = 0$ :

$$\begin{cases} r_i^1 = r_i^2 = r_i^3 = r_i^4 = r_i^5 = r_i^6 = r_i^7 = r_i^8 = a_{t-1}, \\ c_i^1 = c_i^2 = c_i^3 = c_i^4 = c_i^5 = c_i^6 = c_i^7 = c_i^8 = k_{t-1}, \\ b = x, \\ m_i^1 = a_t, \\ m_i^2 = k_t, \\ m_i^3 = i_9, \\ m_i^4 = j_9, \\ s = s_r = s_d = ulf_1 f_2, \\ s_u = s_l = 0; \end{cases}$$

2) при  $z_2 = 1, z_1 = 0$ :

$$\begin{cases} r_i^1 = r_i^2 = r_i^3 = r_i^4 = r_i^5 = r_i^6 = r_i^7 = r_i^8 = A_{t-1}, \\ c_i^1 = c_i^2 = c_i^3 = c_i^4 = c_i^5 = c_i^6 = c_i^7 = c_i^8 = K_{t-1}, \\ b = x, \\ m_i^1 = oulf_3 f_4 p_1, \\ m_i^2 = oulf_3 f_4 p_2, \\ m_i^3 = oulf_3 f_4 A_t, \\ m_i^4 = oulf_3 f_4 K_t, \\ s_r = s_d = ulf_3 f_4, \\ s = s_u = s_l = oulf_3 f_4; \end{cases}$$

3) при  $z_2 = 0, z_1 = 1$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_i^1 = r_i^2 = r_i^3 = r_i^4 = r_i^5 = r_i^6 = r_i^7 = r_i^8 = A_{t-1}, \\ c_i^1 = c_i^2 = c_i^3 = c_i^4 = c_i^5 = c_i^6 = c_i^7 = c_i^8 = K_{t-1}, \\ b = x, \\ m_i^1 = rp_1, \\ m_i^2 = rp_2, \\ m_i^3 = rA_t, \\ m_i^4 = rK_t, \\ s = s_r = s_d = ulf_3 f_4, \\ s_u = s_l = r; \end{array} \right.$$

4) при  $z_2 = 1, z_1 = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_i^1 = r_i^2 = r_i^3 = r_i^4 = r_i^5 = r_i^6 = r_i^7 = r_i^8 = A_{t-1}, \\ c_i^1 = c_i^2 = c_i^3 = c_i^4 = c_i^5 = c_i^6 = c_i^7 = c_i^8 = K_{t-1}, \\ b = x, \\ m_i^1 = dp_1, \\ m_i^2 = dp_2, \\ m_i^3 = dA_t, \\ m_i^4 = dK_t, \\ s = s_r = s_d = ulf_3 f_4, \\ s_u = d, \\ s_l = 0. \end{array} \right.$$

На базе структурно-автоматного метода [2] была получена следующая система уравнений, отражающая работу ВЭ ПВС:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_i^1 = r_i^2 = r_i^3 = r_i^4 = r_i^5 = r_i^6 = r_i^7 = r_i^8 = \bar{z}_1 \bar{z}_2 a_{t-1} + A_{t-1} (z_1 \vee z_2), \\ c_i^1 = c_i^2 = c_i^3 = c_i^4 = c_i^5 = c_i^6 = c_i^7 = c_i^8 = \bar{z}_1 \bar{z}_2 k_{t-1} + K_{t-1} (z_1 \vee z_2), \\ b = x, \\ m_i^1 = \bar{z}_1 \bar{z}_2 a_t + p_1 (z_2 \bar{z}_1 oulf_3 f_4 + z_1 \bar{z}_2 r + z_1 z_2 d), \\ m_i^2 = \bar{z}_1 \bar{z}_2 k_t + p_2 (z_2 \bar{z}_1 oulf_3 f_4 + z_1 \bar{z}_2 r + z_1 z_2 d), \\ m_i^3 = \bar{z}_1 \bar{z}_2 i_9 + A_t (z_2 \bar{z}_1 oulf_3 f_4 + z_1 \bar{z}_2 r + z_1 z_2 d), \\ m_i^4 = \bar{z}_1 \bar{z}_2 j_9 + K_t (z_2 \bar{z}_1 oulf_3 f_4 + z_1 \bar{z}_2 r + z_1 z_2 d), \\ s = ul(\bar{z}_1 \bar{z}_2 f_1 f_2 + z_2 \bar{z}_1 of_3 f_4 + z_1 f_3 f_4), \\ s_r = s_d = ul(\bar{z}_1 \bar{z}_2 f_1 f_2 + f_3 f_4 (z_1 \vee z_2)), \\ s_u = z_2 \bar{z}_1 oulf_3 f_4 + z_1 \bar{z}_2 r + z_1 z_2 d, \\ s_l = z_2 \bar{z}_1 oulf_3 f_4 + z_1 \bar{z}_2 r. \end{array} \right.$$

Таким образом, имея систему уравнений ВЭ ПВС, можно конфигурировать соответствующую вычислительную структуру в FPGA. ПВС будет строиться на FPGA таким же образом, конфигурируя необходимое количество ВЭ и организовывая соединительные каналы обмена данными между ними.

### 3. Симуляция разработанных моделей

Синтезированная ПВС для реализации алгоритма вычисления регионов интереса была протестирована с помощью ПЛИС Cyclone V SX SoC 5CSXFC6D6F31C6, а именно использовалась отла-

дочная плата DE10-Standard. При этом для ускорения эксперимента использовалось тестовое изображение размерностью  $5 \times 5$  пикселей для оценки времени обработки.

Результаты тестирования алгоритма показали, что максимальная скорость обработки изображения размерностью  $5 \times 5$  пикселей составляет 0,15 мс. Такой результат по скорости обработки изображения позволяет с большим запасом обеспечивать работу алгоритма в режиме реального времени.

### Заключение

Использование концепции процесса цифровой обработки изображений на ПВС является весьма перспективным. Данная концепция позволяет реализовать на специализированных вычислителях новые алгоритмы, которые ранее не имели практической значимости ввиду крайне низкой производительности использования стандартных вычислительных средств. Концепция процесса обработки изображений на ПВС позволяет совместить алгоритм определения местоположения регионов интереса с любым другим уже существующим алгоритмом. Представленный алгоритм может быть использован в системах технического зрения для поиска и подсчета областей связанных пикселей в бинарном изображении с последующим их анализом. Реализация разработанного алгоритма, использующего преимущества параллельно-конвейерной архитектуры вычислительных систем, позволит повысить быстродействие процессов обработки изображений за счет осуществления одновременной параллельной обработки всех пикселей бинарного изображения.

### Список источников

1. Li T., He B., Zheng Y. Research and Implementation of High Computational Power for Training and Inference of Convolutional Neural Networks // *Applied Sciences*. 2023. V. 13. Art. 1003. doi: 10.3390/app13021003
2. Guo L., Wu S. FPGA Implementation of a Real-Time Edge Detection System Based on an Improved Canny Algorithm // *Applied Sciences*. 2023. V. 13. Art. 870. doi: 10.3390/app13020870
3. Шашев Д.В., Шидловский С.В. Морфологическая обработка бинарных изображений с использованием перестраиваемых вычислительных сред // *Автометрия*. 2015. Т. 51, № 3. С. 19–26.
4. Шидловский С.В. Автоматическое управление. Перестраиваемые структуры. Томск : Том. гос. ун-т, 2006. 288 с.
5. Шашев Д.В., Шатравин В.В. Реализация сигмоидной функции активации с помощью концепции перестраиваемых вычислительных сред // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2022. № 61. С. 117–127.
6. Chen Y., Li T., Chen X., Cai Z., Su T. High-Frequency Systolic Array-Based Transformer Accelerator on Field Programmable Gate Arrays // *Electronics*. 2023. V. 12. Art. 822. doi: 10.3390/electronics12040822
7. Шашев Д.В., Шидловский С.В., Окунский М.В. Бинарный градиент и его вычисление с помощью концепции перестраиваемых вычислительных сред // *Телекоммуникации*. 2021. № 2. С. 35–48.
8. Бондарчук А.С., Шашев Д.В., Шидловский С.В. Синтез модели перестраиваемой вычислительной среды для определения характеристик градиента изображения // *Автометрия*. 2021. Т. 57, № 2. С. 22–31.
9. Shashev D.V., Taganov A.A., Mondal M., Okunsky M.V. Designing LBP-descriptor for reconfigurable computing environments // *JPCS*. 2020. V. 1611. Art. 012070.
10. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. М. : Техносфера, 2005. 1072 с.

### References

1. Li, T., He, B. & Zheng, Y. (2023) Research and Implementation of High Computational Power for Training and Inference of Convolutional Neural Networks. *Applied Sciences*. 13. Art. 1003. DOI: 10.3390/app13021003
2. Guo, L. & Wu, S. (2023) FPGA Implementation of a Real-Time Edge Detection System Based on an Improved Canny Algorithm. *Applied Sciences*. 13. Art. 870. DOI: 10.3390/app13020870
3. Shashev, D.V. & Shidlovskiy, S.V. (2015) Morphological processing of binary images using reconfigurable computing environments. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 51. pp. 227–233. DOI: <https://doi.org/10.3103/S8756699015030036>
4. Shidlovskiy, S.V. (2006) *Avtomaticheskoe upravlenie. Perestraivaemye struktury* [Automatic Control. Reconfigurable Structures]. Tomsk: Tomsk State University.
5. Shashev, D.V. & Shatravina, V.V. (2022) Implementation of the sigmoid activation function using the concept of tunable computing environments. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 61. pp. 117–127. DOI: 10.17223/19988605/61/12

6. Chen, Y., Li, T., Chen, X., Cai, Z. & Su, T. (2023) High-Frequency Systolic Array-Based Transformer Accelerator on Field Programmable Gate Arrays. *Electronics*. 12. Art. 822. DOI: 10.3390/electronics12040822
7. Shashev, D.V., Shidlovskiy, S.V. & Okunsky, M.V. (2021) Binary gradient and its calculation using the concept of reconfigurable computing environments. *Telekommunikatsii – Telecommunications*. 2. pp. 35–48.
8. Bondarchuk, A.S., Shashev, D.V. & Shidlovskiy, S.V. (2021) Design of a Model of a Reconfigurable Computing Environment for Determining Image Gradient Characteristics. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 57. pp. 132–140. DOI: 10.3103/S8756699021020047
9. Shashev, D.V., Taganov, A.A., Mondal, M. & Okunsky, M.V. (2020) Designing LBP-descriptor for reconfigurable computing environments. *JPCS*. 1611. Art. 012070.
10. Gonzalez, R. & Woods, R. (2005) *Tsifrovaya obrabotka izobrazheniy* [Digital Image Processing]. Moscow: Tekhnosfera.

***Информация об авторах:***

**Шашев Дмитрий Вадимович** – кандидат технических наук, доцент кафедры управления качеством факультета инновационных технологий Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: dshashev@mail.ru

**Бондарчук Антон Сергеевич** – ассистент кафедры информационного обеспечения инновационной деятельности факультета инновационных технологий Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: bondarchuk.a.c@gmail.com

***Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.***

***Information about the authors:***

**Shashev Dmitriy V.** (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: dshashev@mail.ru

**Bondarchuk Anton S.** (Assistant Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bondarchuk.a.c@gmail.com

***Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.***

*Received 02.05.2023; accepted for publication 08.12.2023*

*Поступила в редакцию 02.05.2023; принята к публикации 08.12.2023*

## ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

### DESIGNING AND DIAGNOSTICS OF COMPUTER SYSTEMS

Научная статья

УДК 681.518.5+004.052.32

doi: 10.17223/19988605/65/13

#### Особенности реализации самопроверяемых структур на основе метода инвертирования данных и линейных кодов

Дмитрий Викторович Ефанов

*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия,*

*Российский университет транспорта (МИИТ), Москва, Россия,*

*Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан, TrES-4b@yandex.ru*

**Аннотация.** Рассматриваются особенности реализации самопроверяемых цифровых устройств на основе метода инвертирования данных и линейных кодов. Установлены особенности применения линейных кодов, которые следует учитывать при разработке самопроверяемых цифровых устройств. Предложена модифицированная структура организации схем встроенного контроля, подразумевающая контроль вычислений по признакам самодвойственности и самоантидвойственности вычисляемых функций и по признаку принадлежности формируемых кодовых векторов заранее выбранным линейным кодам.

**Ключевые слова:** самопроверяемые цифровые устройства; метод инвертирования данных; линейный код; самодвойственная булева функция; самоантидвойственная булева функция; контроль вычислений на выходах цифровых устройств.

**Для цитирования:** Ефанов Д.В. Особенности реализации самопроверяемых структур на основе метода инвертирования данных и линейных кодов // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 65. С. 126–138. doi: 10.17223/19988605/65/13

Original article

doi: 10.17223/19988605/65/13

#### The self-checking structures implementation features based on the inverting data and linear block code method

Dmitry V. Efanov

*Peter the Great Saint Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russian Federation,*

*Russian University of Transport, Moscow, Russian Federation,*

*Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan, TrES-4b@yandex.ru*

**Abstract.** The self-checking digital device implementation features based on the data inversion and linear block codes method are considered. The features of the linear block codes using, which should be considered in case of developing self-checking digital devices, are established. The concurrent error-detection circuit modified structure is proposed, implying the calculation control based on self-duality and self-anti-duality of the calculated functions and based on belonging the generated code vectors to pre-selected linear block codes.

**Keywords:** self-checking digital devices; data inversion method; linear code; self-dual Boolean function; self-anti-dual Boolean function; calculations testing at the outputs of digital devices.

**For citation:** Efanov, D.V. (2023) The self-checking structures implementation features based on the inverting data and linear block code method. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 65. pp. 126–138. doi: 10.17223/19988605/65/13

## **Введение**

Одним из подходов к синтезу самопроверяемых цифровых устройств является применение *метода инвертирования данных*, подразумевающего использование временной избыточности и импульсного режима работы [1, 2]. В этом случае вычисления контролируются по признаку принадлежности формируемых функций классу самодвойственных булевых функций [3].

Подход к построению самопроверяемых цифровых устройств, предполагающий контроль самодвойственности вычисляемых функций, изучался в большом количестве работ отечественных и зарубежных ученых. Одной из первых работ, в которой обсуждались вопросы реализации устройств с обнаружением неисправностей на основе использования свойств самодвойственных функций (alternating logic design), является статья [1]. В ней установлены необходимые и достаточные условия построения комбинационных логических структур с обнаружением всех одиночных неисправностей на основе свойств самодвойственных функций. В статье [2] обращается внимание на особенности построения логических схем с памятью, в которых вычисления контролируются с использованием свойств самодвойственных функций; предложены самодвойственные модификации простейших устройств с памятью – триггеров. Отдельного внимания заслуживают работы в части использования свойств самодвойственных булевых функций, проводившиеся в 90-е гг. прошлого столетия под руководством профессоров Сапожниковых. Ими развита теория синтеза самопроверяемых самодвойственных цифровых комбинационных устройств и устройств с памятью. При этом предложены оригинальные методы синтеза схем встроенного контроля по признаку самодвойственности вычисляемых функций – самодвойственная модификация структуры контроля вычислений по паритету [4, 5], самодвойственная модификация структуры контроля вычислений путем дублирования [6, 7] и др. Основные результаты в теории синтеза самодвойственных структур цифровых устройств опубликованы в монографиях [8–10].

Дальнейший виток исследований в теории синтеза самопроверяемых устройств с использованием временной избыточности и импульсного режима работы связан с нынешним периодом и охватывает вопросы моделирования самодвойственных структур, совершенствования методов диагностирования за счет использования при контроле вычислений нескольких диагностических признаков, совместного применения гибридных структур синтеза схем встроенного контроля на основе метода логической коррекции сигналов, исследования особенностей обнаружения ошибок на выходах устройств и др. [11–15].

Последние исследования особенностей синтеза самопроверяемых устройств с использованием временной избыточности и импульсного режима работы показывают, что для контроля вычислений могут использоваться не только самодвойственные функции, но и «близкие» к ним, так называемые самоантидвойственные булевы функции [16, 17]. Для этого требуется только некоторая модификация известной структуры [1] тестера самодвойственных сигналов. Кроме того, целый класс устройств обладает таким свойством: выходы описываются либо самодвойственными, либо самоантидвойственными функциями. Читателю предлагаются некоторые результаты, полученные автором в части использования свойств самодвойственных и самоантидвойственных функций при синтезе самопроверяемых цифровых устройств.

### **1. Структура организации контроля вычислений для построения самопроверяемых цифровых устройств**

Рассмотрим структуру организации контроля вычислений, изображенную на рис. 1. Данная структура предложена в статье [14. Рис. 5]. В ней исходное самодвойственное устройство  $F(x)$ , реализующее функции  $f_1, f_2, \dots, f_m$ , снабжается специализированной схемой встроенного контроля по двум

диагностическим признакам – принадлежности вычисляемых функций классу самодвойственных и принадлежности формируемых кодовых векторов заранее выбранному блоковому разделимому коду  $(n, m)$ , где  $n$  – число символов в кодовом слове, а  $m$  – число информационных символов.

В схеме встроенного контроля для получения проверочных символов  $(n, m)$  кода используется кодер  $G(f)$ , определяющий значения проверочных символов  $g_1, g_2, \dots, g_k$  по значениям информационных символов  $f_1, f_2, \dots, f_m$ . Функции  $g_1, g_2, \dots, g_k$  должны обладать свойством самодвойственности. Это обеспечивается только тем, что сам кодер  $G(f)$  является самодвойственным устройством. Для контроля самодвойственности функций  $g_1, g_2, \dots, g_k$  устанавливается каскад тестеров самодвойственного сигнала  $kSDC1$ , позволяющий  $k$  самодвойственных сигналов сжать в один. Устройство  $kSDC1$  реализуется на основе  $k$  тестеров самодвойственности  $SDC$  (self-dual checker) и  $k - 1$  модуля сжатия парафазных сигналов  $TRC$  (two-rail checker) [18]. На выходах  $z_1^0$  и  $z_1^1$   $kSDC1$  осуществляется контроль вычислений по признаку самодвойственности функций. Для контроля принадлежности вычисляемых кодовых векторов заданному  $(n, m)$  коду используется кодер  $G(x)$ , определяющий значения проверочных символов  $g'_1, g'_2, \dots, g'_k$  по значениям входных воздействий на систему диагностирования, а также компаратор  $kTRC1$ . Компаратор сравнивает одноименные сигналы с выходов блоков  $G(f)$  и  $G(x)$ . Он строится на основе  $k - 1$  модуля  $TRC$ . Так как последний функционирует в парафазной логике, требуется предварительное инвертирование сигналов от блока  $G(x)$  или от блока  $G(f)$ , либо же сам блок  $G(x)$  должен вычислять инверсные сигналы для  $g_1, g_2, \dots, g_k$ . Выходы  $z_2^0$  и  $z_2^1$   $kTRC1$  являются контрольными выходами по признаку принадлежности формируемых кодовых векторов выбранному  $(n, m)$  коду. Для получения одного наблюдаемого выхода выходы  $z_1^0$  и  $z_1^1$   $kSDC1$  и  $z_2^0$  и  $z_2^1$   $kTRC1$  подключаются к одному модулю  $TRC$ .

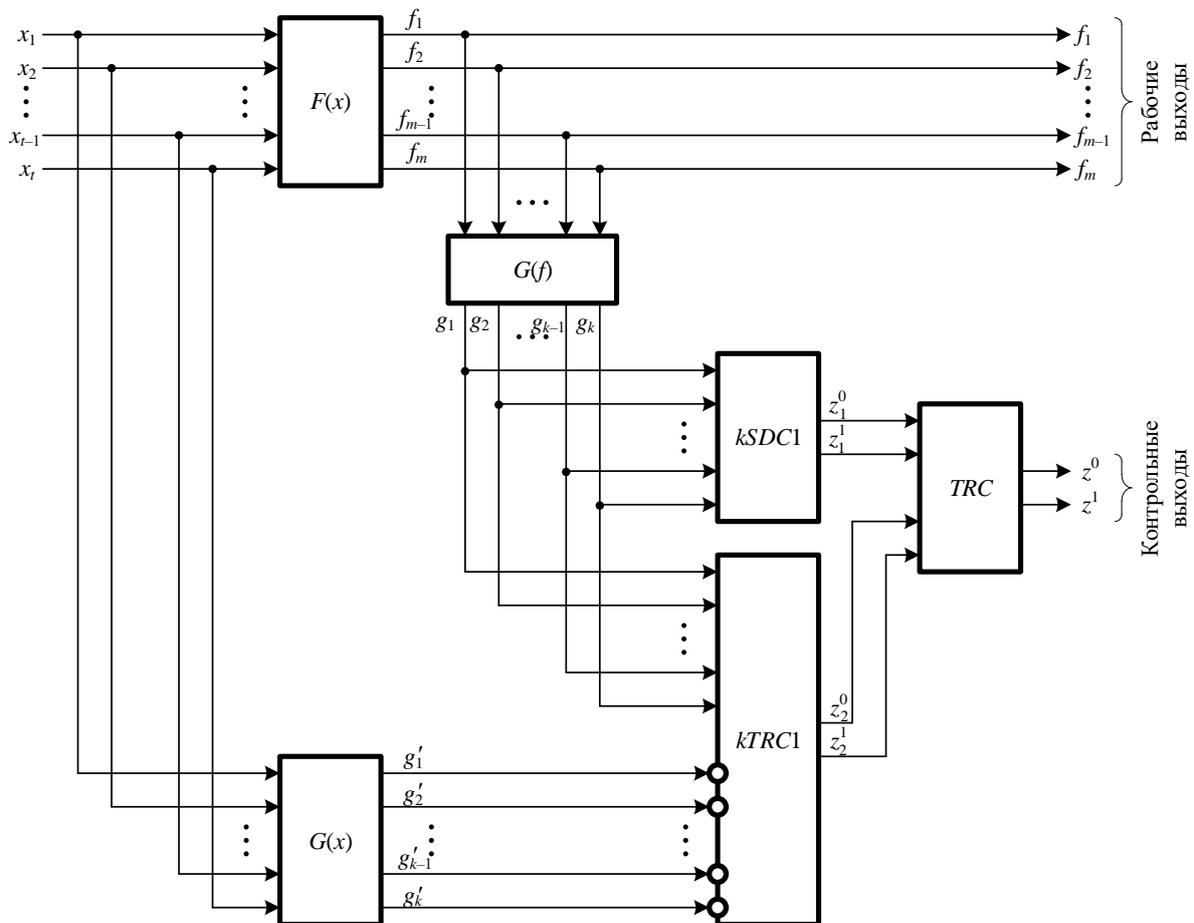


Рис. 1. Структура организации контроля вычислений  
 Fig. 1. Structure of the concurrent checking

Особое значение в представленной структуре имеет блок  $G(f)$ . Данное устройство должно обладать свойством самодвойственности. Например, в статье [14. Теорема 3] доказано, что известные коды Хэмминга [19] с числом символов  $n = 3 + 4l$  ( $l \in \mathbb{N}_0$ ) обладают свойством самодвойственности всех функций, описывающих проверочные символы, а кодеры таких кодов будут самодвойственными устройствами. Это позволяет применять коды Хэмминга при синтезе структуры, представленной на рис. 1.

Известны и другие блочные разделимые коды, обладающие свойством самодвойственности всех функций, описывающих проверочные символы [14, 15].

## 2. Особенности линейных кодов, используемые в самодвойственных цифровых устройствах

Выходы кодеров кодов Хэмминга, как и любых других линейных кодов, описываются линейными булевыми функциями.

**Определение 1** [1]. Функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_t)$  называется линейной, если она может быть представлена в виде полинома Жегалкина первой степени:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_t) = C_0 \oplus C_1 x_1 \oplus C_2 x_2 \oplus \dots \oplus C_t x_t, \quad (1)$$

где  $C_i = 0$  или 1.

В [20] доказано следующее положение.

**Теорема 1.** *Линейная булева функция будет самодвойственной только в том случае, если имеет нечетное количество аргументов, от которых она зависит существенно.*

**Определение 2** [1]. Функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_t)$  называется самодвойственной, если

$$f(x_1, x_2, \dots, x_t) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_t})}. \quad (2)$$

Самодвойственная функция принимает противоположные значения при инвертировании всех аргументов (при подстановке в качестве входных комбинаций «противоположных» кодовых комбинаций). Самодвойственная функция равна своей двойственной функции.

Отметим, что также известно понятие самоантидвойственной функции [16, 17], которая принимает одинаковые значения при инвертировании всех аргументов, т.е. равна инверсии двойственной к ней функции.

**Определение 3.** Функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_t)$  называется самоантидвойственной, если

$$f(x_1, x_2, \dots, x_t) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_t})}. \quad (3)$$

Самоантидвойственные функции «близки» к самодвойственным. Единственное отличие – противоположные значения на противоположных комбинациях.

К примеру, для функции  $x_1 \& x_2$  двойственной является функция  $x_1 \vee x_2$ , а антидвойственной –  $x_1 \downarrow x_2$ .

**Теорема 2.** *Линейная булева функция будет самоантидвойственной только в том случае, если имеет четное количество аргументов, от которых она зависит существенно.*

**Доказательство.** Функция является самоантидвойственной, если выполняется равенство (3).

Рассмотрим произвольную линейную функцию  $f = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_{q-1} \oplus x_q$ ,  $q \in \{1, 2, \dots, t\}$ .

Пусть  $q = q_0 + q_1$ , где  $q_0$  – число нулевых аргументов, а  $q_1$  – число единичных аргументов.

Рассмотрим все четыре случая сочетания чисел  $q$ ,  $q_0$  и  $q_1$  с позиции четности и нечетности их значений.

Предположим, что число  $q$  является нечетным. В этом случае либо  $q_0$  четно и  $q_1$  нечетно, либо  $q_0$  нечетно и  $q_1$  четно. Возьмем входную комбинацию, соответствующую случаю, когда  $q_0$  четно и  $q_1$  нечетно. Значение функции  $f$  на такой входной комбинации будет равно 1, так как нечетно  $q_1$ . Инвертируем все переменные в выбранной входной комбинации и получим случай, когда  $q_0$  нечетно

и  $q_1$  четно. Значение функции  $f$  на такой входной комбинации уже будет равно 0, так как число  $q_1$  четно. Рассматриваемый вариант характерен как раз самодвойственным функциям.

Положим теперь, что  $q$  является четным числом. В этом случае либо  $q_0$  четно и  $q_1$  четно, либо  $q_0$  нечетно и  $q_1$  нечетно. Аналогично проделанному выше возьмем входную комбинацию, соответствующую случаю, когда  $q_0$  четно и  $q_1$  четно. Значение функции  $f$  на такой входной комбинации будет равно 0, так как четно  $q_1$ . Инверсия всех переменных для выбранной комбинации даст комбинацию, для которой  $q_0$  и  $q_1$  также будут четными. Значение  $f = 0$ . Это как раз есть признак самоантидвойственной функции. Возьмем случай, когда  $q_0$  нечетно и  $q_1$  нечетно. Значение функции  $f$  на такой входной комбинации равно 1, так как число  $q_1$  нечетно. Инверсия всех переменных в выбранной входной комбинации нечетности чисел  $q_0$  и  $q_1$  не нарушит, а значит, и значение функции останется равным 1. Это также признак самоантидвойственной функции.

Из теорем 1 и 2 следует

**Утверждение 1.** Любая функция, описывающая проверочные символы линейного кода, является либо самодвойственной, либо самоантидвойственной, а кодер любого линейного кода будет либо самодвойственным устройством (SD-устройством), либо самоантидвойственным устройством (SAD-устройством), либо самодвойственно-самоантидвойственным устройством (SD/SAD-устройством).

Для контроля вычислений в SD-, SAD- и SD/SAD-устройствах используются специализированные устройства, которые рассмотрим далее.

### 3. Тестеры самодвойственных и самоантидвойственных сигналов

В структуре рис. 1 для контроля самодвойственности сигналов используется тестер *SDC* (self-dual checker), структура которого приведена на рис. 2. Аналогично может быть разработан тестер самоантидвойственных сигналов *SADC* (self-anti-dual checker).

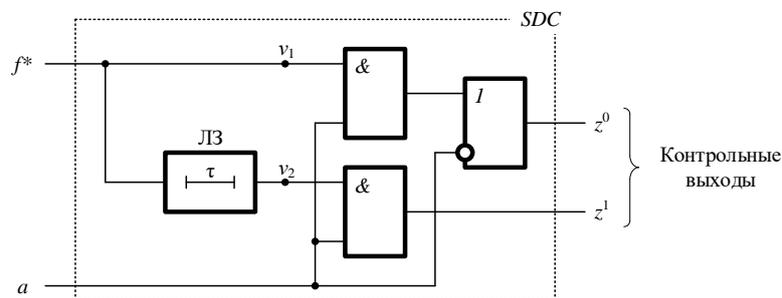


Рис. 2. Тестер самодвойственного сигнала

Fig. 2. Self-dual checker

*SDC* позволяет контролировать принадлежность формируемой функции  $f^*$  классу самодвойственных булевых функций. При помощи линии задержки (ЛЗ на рис. 2), равной одному такту импульсной последовательности  $a$ , сигнал  $f^*$  преобразуется в двухфазный сигнал  $\langle v_1 v_2 \rangle$ . При отсутствии ошибок в импульсной последовательности в контрольных тактах в точках  $v_1$  и  $v_2$  формируются сигналы с противоположными значениями. В информационных тактах могут формироваться сигналы как с одинаковыми, так и с противоположными значениями. При наличии ошибки в сигнале в некотором периоде в контрольном такте этого периода в точках  $v_1$  и  $v_2$  всегда формируются сигналы с одинаковыми значениями. Отсюда следует, что контроль самодвойственного сигнала можно осуществлять только в контрольном такте. Схема *SDC* преобразует самодвойственный сигнал  $f^*$  в пространственный парафазный сигнал  $\langle z^0 z^1 \rangle$ . При этом во время информационного такта, когда  $a = 0$ , значения сигналов на выходах  $z^0$  и  $z^1$  не зависят от сигналов в точках  $v_1$  и  $v_2$ , а на них всегда формируется парафазный сигнал  $\langle 10 \rangle$ . Во время контрольного такта, когда  $a = 1$ , устанавливаются равенства  $z^0 = v_1$  и  $z^1 = v_2$ , а следовательно, осуществляется контроль самодвойственного сигнала в текущем периоде.

На рис. 3 изображен *SADC*, который получен путем модификации *SDC*. Структура *SADC* отличается от структуры *SDC* тем, что на входах второго элемента AND установлен инвертор. *SADC* работает аналогично тестеру самодвойственного сигнала.

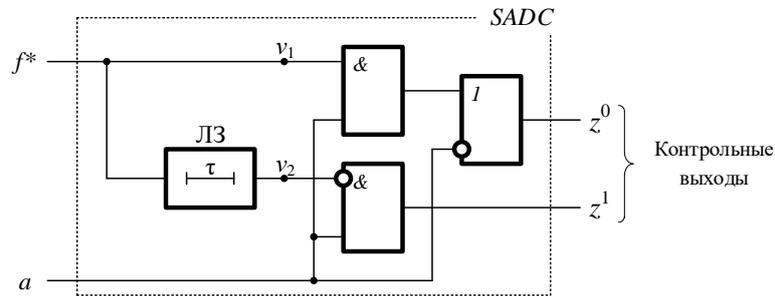


Рис. 3. Тестер самоантидвойственного сигнала  
Fig. 3. Self-anti-dual checker

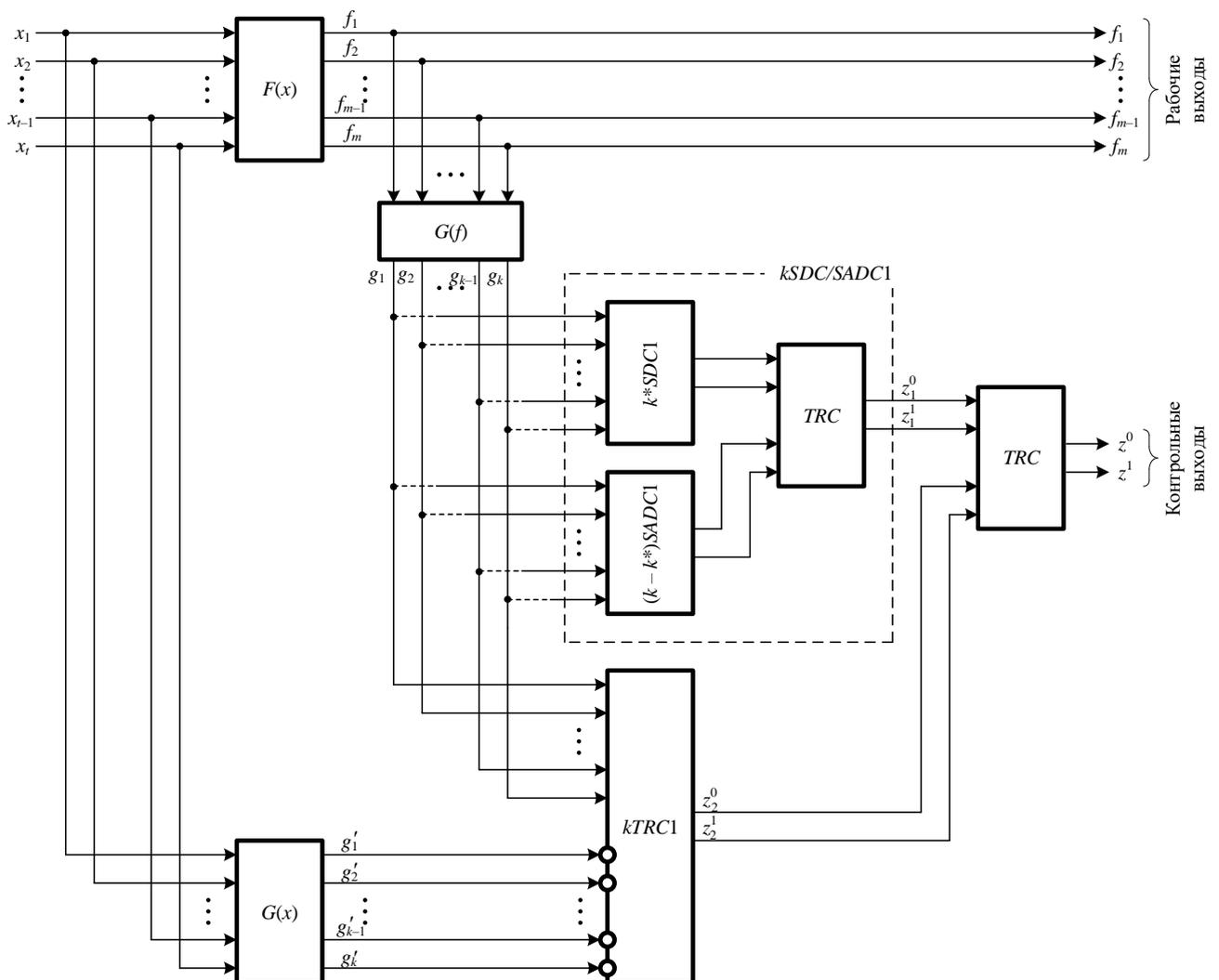


Рис. 4. Модифицированная структура организации контроля вычислений  
Fig. 4. Modified structure of the concurrent checking

При использовании для контроля вычислений свойств самодвойственных и самоантидвойственных функций несколько модифицируется и структура, изображенная на рис. 1. Модифицированная структура организации контроля вычислений приведена на рис. 4. В ней блок *kSDC1* заменен

блоком  $kSDC / SADC1$ , в котором  $k^* \leq k$  выходов кодера  $G(f)$ , описываемых самодвойственными функциями, контролируются с использованием  $SDC$ , и  $k - k^*$  выходов кодера  $G(f)$ , описываемых самоантидвойственными функциями, контролируются с использованием  $SADC$ . Можно сказать, что образуются две подсистемы контроля –  $k^*SDC1$  и  $(k - k^*)SADC1$ . В каждом из этих устройств  $k^*$  и  $k - k^*$  выходов тестеров самодвойственности и самоантидвойственности подключены к схемам сжатия, реализованным на основе  $k^* - 1$  и  $k - k^* - 1$  модуля  $TRC$  соответственно, а выходы последних каскадов подключены к входам одного  $TRC$ , на выходах  $z_1^0$  и  $z_1^1$  которого осуществляется контроль вычислений по признаку самодвойственности или самоантидвойственности функций.

#### 4. Особенности обнаружения ошибок в реализациях линейных функций

Рассмотрим в качестве примера две линейные функции:  $f_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$  и  $f_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$ . На основании теорем 1 и 2 функция  $f_1$  является самодвойственной, а  $f_2$  – самоантидвойственной. Их технические реализации представлены на рис. 5.

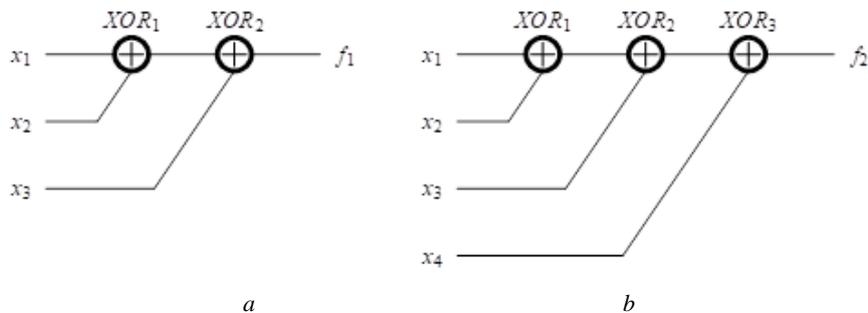


Рис. 5. Технические реализации функций:  $a - f_1$ ;  $b - f_2$   
 Fig. 5. Technical implementations of functions:  $a - f_1$ ;  $b - f_2$

Рассмотрим возникновение одиночных константных неисправностей на выходах внутренних элементов в технических реализациях обеих функций и особенности их обнаружения при контроле самодвойственности вычисляемых функций.

Обратимся к рис. 5,  $a$ , где изображено SD-устройство. Рассмотрим неисправности элемента  $XOR_1$  видов «константа 0» и «константа 1» и их проявления на выходе  $f_1$ . На рис. 6,  $a$  показаны проявление ошибки вида «константа 0» на выходе рассматриваемого элемента, активация неисправности и ее трансляция на выход  $f_1$  при подаче на входы комбинации  $\langle 011 \rangle$ . Хорошо известно, что в схемах, реализующих линейные функции, константные неисправности при их проявлении всегда транслируются на выходы [3]. Однако при подаче второй комбинации  $\langle 100 \rangle$  из пары подаваемых на входы при импульсном режиме работы ошибка также транслируется на выход  $f_1$  (рис. 6,  $b$ ). Так как переменная  $x_3 = 0$  при подаче первой комбинации из пары и  $x_3 = 1$  при подаче второй комбинации из пары, происходят противоположные виды искажений при трансляции ошибки: в первом случае –  $0 \rightarrow 1$ , а во втором –  $1 \rightarrow 0$ . Такая ошибка не будет обнаружена  $SDC$ . Аналогичное обстоятельство имеет место при рассмотрении неисправности вида «константа 1» (рис. 6,  $c$  и  $d$ ). При подаче на входы комбинации  $\langle 001 \rangle$  ошибка вида «константа 1» транслируется на выход схемы в виде неисправности  $1 \rightarrow 0$ , а при подаче комбинации  $\langle 100 \rangle$  – в виде неисправности  $0 \rightarrow 1$ . Такая неисправность не будет обнаружена  $SDC$ .

В табл. 1 приведены значения функции  $f_1$  на всех входных комбинациях, а также значения функции с ошибками вида «константа 0» и «константа 1» – графы  $f_1^{1 \rightarrow 0}$  и  $f_1^{0 \rightarrow 1}$ . Как следует из таблицы, все три функции являются самодвойственными, а значит, при контроле по признаку самодвойственности рассматриваемые неисправности обнаружены не будут.

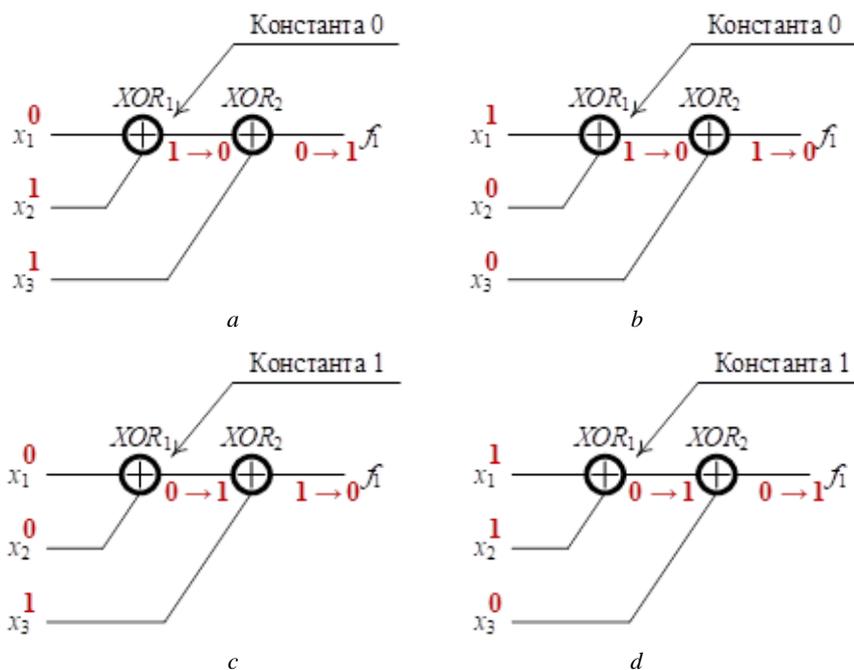


Рис. 6. Трансляция ошибок на выходы схемы реализации функции  $f_1$ :  $a$  – трансляция ошибки «константа 0» на выходе элемента  $XOR_1$  при подаче первой комбинации из пары;  $b$  – трансляция ошибки «константа 0» на выходе элемента  $XOR_1$  при подаче второй комбинации из пары;  $c$  – трансляция ошибки «константа 1» на выходе элемента  $XOR_1$  при подаче первой комбинации из пары;  $d$  – трансляция ошибки «константа 1» на выходе элемента  $XOR_1$  при подаче второй комбинации из пары  
 Fig. 6. Translation of errors to the outputs of the implementation circuit of the function  $f_1$ :  $a$ ) translation of the stuck-at-0 at the output of the  $XOR_1$  when the 1st combination of the pair is applied;  $b$ ) translation of the stuck-at-0 at the output of the  $XOR_1$  when the 2nd combination of the pair is applied;  $c$ ) translation of the stuck-at-1 at the output of the  $XOR_1$  when the 1st combination of the pair is applied;  $d$ ) translation of the stuck-at-1 at the output of the  $XOR_1$  when the 2nd combination of the pair is applied

Таблица 1

Влияние ошибок элемента  $XOR_1$  на выходы схемы реализации функции  $f_1$

№	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f_1$	$f_1^{1 \rightarrow 0}$	$f_1^{0 \rightarrow 1}$
0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0
2	0	1	0	1	0	1
3	0	1	1	0	1	0
4	1	0	0	1	0	1
5	1	0	1	0	1	0
6	1	1	0	0	0	1
7	1	1	1	1	1	0

Аналогично рассмотрим и схему, приведенную на рис. 5,  $b$ , где изображено SAD-устройство. Рассмотрим неисправности элемента  $XOR_1$  видов «константа 0» и «константа 1» и их проявления на выходе  $f_2$ . На рис. 7,  $a$  показана трансляция ошибки вида «константа 0» на выход схемы при подаче на входы комбинации  $\langle 0110 \rangle$ . На выходе схемы возникает искажение  $0 \rightarrow 1$ . При подаче на входы инвертированной во всех разрядах комбинации  $\langle 1001 \rangle$  (рис. 7,  $b$ ) ошибка также транслируется на выход в виде искажения  $0 \rightarrow 1$ . Это происходит потому, что при подаче первой комбинации из пары  $x_3 = 1$  и  $x_4 = 0$ , а при подаче второй комбинации –  $x_3 = 0$  и  $x_4 = 1$ . При подаче первой комбинации из пары при трансляции ошибки на выход схемы вид ошибки сначала поменялся на выходе элемента  $XOR_2$ , а затем остался неизменным после трансляции через элемент  $XOR_3$ . При подаче второй комбинации из пары при трансляции ошибки ее вид сначала не поменялся на выходе элемента  $XOR_2$ , а затем изменился после трансляции через элемент  $XOR_3$ . Такая ошибка не будет обнаружена SADС.

Аналогичное обстоятельство имеет место и при трансляции ошибки вида «константа 1» на выход схемы (см. рис. 7, с и d). Данная ошибка также не будет обнаружена SADC.

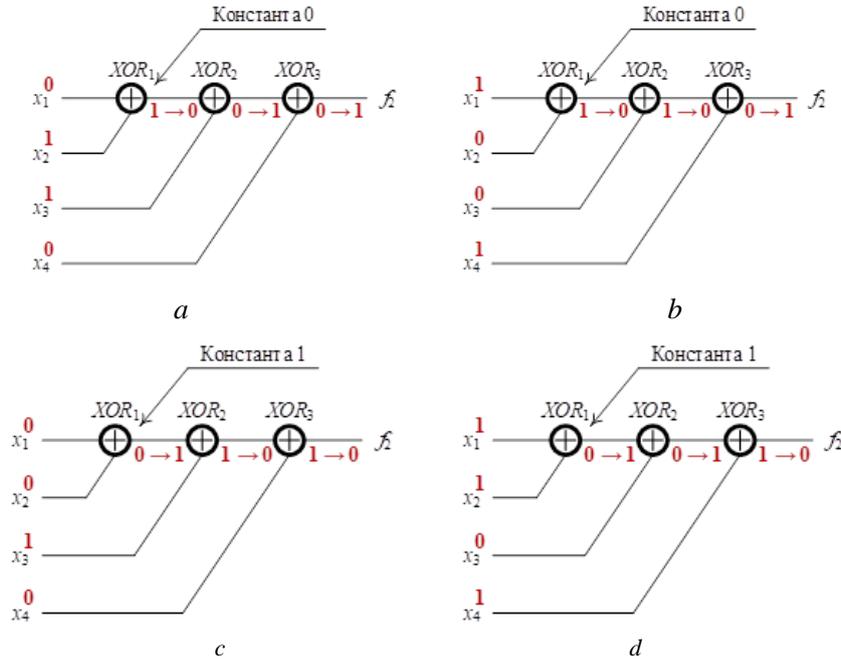


Рис. 7. Трансляция ошибок на выходы схемы реализации функции  $f_2$ : а – трансляция ошибки «константа 0» на выходе элемента  $XOR_1$  при подаче первой комбинации из пары; б – трансляция ошибки «константа 0» на выходе элемента  $XOR_1$  при подаче второй комбинации из пары; в – трансляция ошибки «константа 1» на выходе элемента  $XOR_1$  при подаче первой комбинации из пары; г – трансляция ошибки «константа 1» на выходе элемента  $XOR_1$  при подаче второй комбинации из пары  
 Fig. 7. Translation of errors to the outputs of the implementation circuit of the function  $f_2$ : а) translation of the stuck-at-0 at the output of the  $XOR_1$  when the 1st combination of the pair is applied; б) translation of the stuck-at-0 at the output of the  $XOR_1$  when the 2nd combination of the pair is applied; в) translation of the stuck-at-1 at the output of the  $XOR_1$  when the 1st combination of the pair is applied; г) translation of the stuck-at-1 at the output of the  $XOR_1$  when the 2nd combination of the pair is applied

В табл. 2 приведены значения функции  $f_2$  на всех входных комбинациях, а также значения функции с ошибками вида «константа 0» и «константа 1» – графы  $f_2^{1 \rightarrow 0}$  и  $f_2^{0 \rightarrow 1}$ .

Как следует из табл. 2, все три функции являются самоантидвойственными, а значит, при контроле по признаку самоантидвойственности рассматриваемые неисправности обнаружены не будут.

**Теорема 3.** В схемной реализации линейной булевой функции от нечетного числа аргументов, от которых она зависит существенно, при контроле вычислений по признаку самодвойственности не тестируются неисправности логических элементов, которые связаны путями с четным числом входов.

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную линейную самодвойственную функцию  $f = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_{m-1} \oplus x_m$ . Согласно теореме 1 число  $m$  является нечетным.

Пусть ошибка происходит на выходе элемента, связанного с  $q$  входами. Тогда рассматриваемую функцию можно переписать в виде:  $f = (x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_{q-1} \oplus x_q) \oplus x_{q+1} \oplus \dots \oplus x_{m-1} \oplus x_m$ .

Возможно два случая. Первый – число  $q$  является нечетным. Так как число  $m$  также является нечетным, то число  $m - q$  будет четным. При неисправности вида «константа 0» выражение  $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_{q-1} \oplus x_q = 0$  и  $f = 0 \oplus x_{q+1} \oplus \dots \oplus x_{m-1} \oplus x_m = x_{q+1} \oplus \dots \oplus x_{m-1} \oplus x_m$ ; при неисправности вида «константа 1» выражение  $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_{q-1} \oplus x_q = 1$  и  $f = 1 \oplus x_{q+1} \oplus \dots \oplus x_{m-1} \oplus x_m = \overline{x_{q+1} \oplus \dots \oplus x_{m-1} \oplus x_m}$ . Таким образом, при вычислении функции  $f$  по модулю  $M = 2$  складывается четное число аргументов. Из теоремы 2 следует, что такая функция будет самоантидвойственной. Следовательно, при контроле вычислений по признаку самодвойственности неисправность будет обнаружена.

Второй случай – число  $q$  является четным. Тогда число  $t - q$  будет нечетным, а значит, при возникновении неисправности на выходе элемента, который связан путями с  $q$  входами, в функции  $f$  складывается по модулю  $M = 2$  нечетное число аргументов. Из теоремы 1 следует, что такая функция будет самодвойственной. Следовательно, при контроле вычислений по признаку самодвойственности неисправность обнаружена не будет.

Таблица 2

Влияние ошибок элемента  $XOR_1$  на выходы схемы реализации функции  $f_2$

№	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$f_2$	$f_2^{1 \rightarrow 0}$	$f_2^{0 \rightarrow 1}$
0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0
2	0	0	1	0	1	1	0
3	0	0	1	1	0	0	1
4	0	1	0	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0	1	0
7	0	1	1	1	1	0	1
8	1	0	0	0	1	0	1
9	1	0	0	1	0	1	0
10	1	0	1	0	0	1	0
11	1	0	1	1	1	0	1
12	1	1	0	0	0	0	1
13	1	1	0	1	1	1	0
14	1	1	1	0	1	1	0
15	1	1	1	1	0	0	1

**Теорема 4.** В схемной реализации линейной булевой функции от четного числа аргументов, от которых она зависит существенно, при контроле вычислений по признаку самоантидвойственности не тестируются неисправности логических элементов, которые связаны путями с четным числом входов.

**Доказательство.** Как и при доказательстве теоремы 3, рассмотрим произвольную линейную, но самоантидвойственную функцию  $f = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_{m-1} \oplus x_m$ . Согласно теореме 2 число  $t$  является четным.

Пусть ошибка происходит на выходе элемента, связанного с  $q$  входами. Тогда рассматриваемую функцию можно переписать в виде:  $f = (x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_{q-1} \oplus x_q) \oplus x_{q+1} \oplus \dots \oplus x_{m-1} \oplus x_m$ .

Возможно два случая. Первый – число  $q$  является нечетным. Поскольку число  $t$  является четным, то число  $t - q$  будет нечетным. При вычислении функции  $f$  по модулю  $M = 2$ , таким образом, складывается нечетное число аргументов, от которых функция зависит существенно. Из теоремы 1 следует, что такая функция будет самодвойственной. Следовательно, при контроле вычислений по признаку самоантидвойственности неисправность будет обнаружена.

Второй случай – число  $q$  является четным. Тогда число  $t - q$  будет четным, а значит, при возникновении неисправности на выходе элемента, который связан путями с  $q$  входами, в функции  $f$  складывается по модулю  $M = 2$  четное число аргументов. Из теоремы 2 следует, что такая функция будет самоантидвойственной. Следовательно, при контроле вычислений по признаку самоантидвойственности неисправность обнаружена не будет.

Из утверждения 1, теорем 3 и 4 непосредственно следует.

**Утверждение 2.** Кодеры и декодеры линейных кодов не будут самопроверяемыми при контроле вычислений по признакам самодвойственности и самоантидвойственности.

Из утверждения 2 следует, что для построения полностью самопроверяемых цифровых устройств со схемами встроенного контроля на основе линейных кодов потребуются дополнительный контроль кодеров и декодеров. Как раз этот дополнительный контроль и реализуется в структурах рис. 1 и 4 – контроль принадлежности вычисляемых кодовых векторов заранее выбранному ( $n, m$ ) коду.

### Заключение

Линейные коды обладают важным свойством, которое может быть эффективно использовано при построении самопроверяемых цифровых устройств, – функции, описывающие проверочные символы, принадлежат к виду либо самодвойственных, либо самоантидвойственных булевых функций. Используя признаки принадлежности вычисляемых устройством функций виду самодвойственных и самоантидвойственных булевых функций, можно синтезировать самопроверяемые цифровые устройства. В статье доказано, что только при контроле по двум обозначенным признакам в схеме встроенного контроля не удастся обеспечить полную самопроверяемость кодера линейного кода. Самопроверяемость кодера обеспечивается при организации дополнительной подсхемы контроля вычислений по признаку принадлежности кодовых векторов выбранному линейному коду. Кроме того, использование нескольких диагностических признаков при организации схемы встроенного контроля позволяет повысить показатели контролепригодности цифрового устройства в части наблюдаемости за счет повышения числа тестовых комбинаций среди рабочих [14]. Такой подход к построению самопроверяемых цифровых устройств эффективен при редко меняющихся данных на их входах, что актуально при построении устройств и систем критического применения [21, 22].

Дальнейшие исследования могут быть связаны с анализом возможностей применения различных линейных кодов с учетом их обнаруживающих способностей при синтезе самопроверяемых цифровых устройств, использующих временную избыточность и импульсный режим работы.

Развитие теории синтеза самопроверяемых цифровых устройств на основе использования свойств особых классов булевых функций способствует совершенствованию технологий реализации самодиагностируемых и контролепригодных управляющих систем.

### Список источников

1. Reynolds D.A., Meize G. Fault Detection Capabilities of Alternating Logic // IEEE Transactions on Computers. 1978. V. C-27, is. 12. P. 1093–1098. doi: 10.1109/TC.1978.1675011
2. Аксёнова Г.П. Восстановление в дублированных устройствах методом инвертирования данных // Автоматика и телемеханика. 1987. № 10. С. 144–153.
3. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В. Основы теории надежности и технической диагностики. СПб. : Лань, 2019. 588 с.
4. Saposhnikov V.I., Dmitriev A., Goessel M., Saposhnikov V.V. Self-Dual Parity Checking a New Method for on Line Testing // Proc. of 14th IEEE VLSI Test Symposium. Princeton, 1996. P. 162–168. doi: 10.1109/VTEST.1996.510852
5. Гессель М., Дмитриев А.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В. Самотестируемая структура для функционального обнаружения отказов в комбинационных схемах // Автоматика и телемеханика. 1999. № 11. С. 162–174.
6. Saposhnikov V.I., Moshanin V., Saposhnikov V.V., Goessel M. Experimental Results for Self-Dual Multi-Output Combinational Circuits // Journal of Electronic Testing: Theory and Applications. 1999. V. 14, is. 3. P. 295–300. doi: 10.1023/A:1008370405607
7. Гессель М., Дмитриев А.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В. Обнаружение неисправностей в комбинационных схемах с помощью самодвойственного контроля // Автоматика и телемеханика. 2000. № 7. С. 140–149.
8. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Гессель М. Самодвойственные дискретные устройства. СПб. : Энергоатомиздат, С.-Петербург. отд-ние, 2001. 331 с.
9. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Валиев Р.Ш. Синтез самодвойственных дискретных систем. СПб. : Элмор, 2006. 220 с.
10. Göessel M., Ocheretny V., Sogomonyan E., Marienfeld D. New Methods of Concurrent Checking. Ed. 1. Dordrecht : Springer Science + Business Media B.V., 2008. 184 p.
11. Efanov D., Sapozhnikov V., Sapozhnikov V.I., Osadchy G., Pivovarov D. Self-Dual Complement Method up to Constant-Weight Codes for Arrangement of Combinational Logical Circuits Concurrent Error-Detection Systems // Proc. of 17th IEEE

- East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2019), Batumi, Georgia, September 13–16, 2019, P. 136–143. doi: 10.1109/EWDTS.2019.8884398
12. Efanov D.V., Pivovarov D.V. The Hybrid Structure of a Self-Dual Built-In Control Circuit for Combinational Devices with Pre-Compression of Signals and Checking of Calculations by Two Diagnostic Parameters // Proc. of 19th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2021). Batumi, Georgia, September 10–13. 2021. P. 200–206. doi: 10.1109/EWDTS.2021.9581019
  13. Ефанов Д.В., Пивоваров Д.В. Синтез самопроверяемых комбинационных устройств с контролем вычислений по двум диагностическим параметрам // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2022. Т. 65, № 7. С. 461–477. doi: 10.17586/0021-3454-2022-65-7-461-477
  14. Ефанов Д.В., Погодина Т.С. Исследование свойств самодвойственных комбинационных устройств с контролем вычислений на основе кодов Хэмминга // Информатика и автоматизация. 2023. Т. 22, №2. С. 349–392. doi: 10.15622/ia.22.2.5
  15. Ефанов Д.В., Погодина Т.С. Самодвойственные цифровые устройства с контролем вычислений по кодам Сюо // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 63. С. 118–136. doi: 10.17223/19988605/63/14
  16. Шальто А.А. Логическое управление. Методы аппаратной и программной реализации. СПб. : Наука, 2000. 780 с.
  17. Шальто А.А. Модули, универсальные в классе самодвойственных функций и в «близких» к ним классах // Известия Академии наук. Теория и системы управления. 2001. № 5. С. 110–120.
  18. Lala P.K. Self-Checking and Fault-Tolerant Digital Design. San Francisco : Morgan Kaufmann Publishers, 2001. 216 p.
  19. Hamming R.W. Error Detecting and Correcting Codes // Bell System Technical Journal. 1950. V. 29 (2). P. 147–160. doi: 10.1002/j.1538-7305.1950.tb00463.x
  20. Ефанов Д.В., Погодина Т.С. Самодвойственный контроль комбинационных схем с применением кодов Хэмминга // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем (МЭС). 2022. № 3. С. 113–122. doi: 10.31114/2078-7707-2022-3-113-122
  21. Drozd A., Kharchenko V., Antoshchuk S., Sulima J., Drozd M. Checkability of the Digital Components in Safety-Critical Systems: Problems and Solutions // Proc. of 9th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2011). Sevastopol, Ukraine, 2011. P. 411–416. doi: 10.1109/EWDTS.2011.6116606
  22. Drozd O., Perebeinos I., Martynyuk O., Zashchokin K., Ivanova O., Drozd M. Hidden Fault Analysis of FPGA Projects for Critical Applications // Proc. of the IEEE International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET). 25–29 February 2020, Lviv–Slavsko, Ukraine. Art. 142. doi: 10.1109/TCSET49122.2020.235591

## References

1. Reynolds, D.A. & Meize, G. (1978) Fault Detection Capabilities of Alternating Logic. *IEEE Transactions on Computers*. C-27(12). pp. 1093–1098. DOI: 10.1109/TC.1978.1675011
2. Aksenova, G.P.(1987) Restoration in Duplicated Units by the Method of Data Inversion. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 10. pp. 144–153.
3. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, V.I. & Efanov, D.V. (2019) *Osnovy teorii nadezhnosti i tekhnicheskoy diagnostiki* [Fundamentals of the Theory of Reliability and Technical Diagnostics]. St. Petersburg: Lan.
4. Saposhnikov, V.I., Dmitriev, A., Goessel, M. & Saposhnikov, V.V. (1996) Self-Dual Parity Checking a New Method for on Line Testing. *Proceedings of 14th IEEE VLSI Test Symposium*. USA, Princeton. pp. 162–168. DOI: 10.1109/VTEST.1996.510852
5. Göessel, M., Dmitriev, A.V., Sapozhnikov, V.V. & Sapozhnikov, V.I. (1999) A Functional Fault-Detection Self-Test for Combinational Circuits. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 11. pp. 162–174.
6. Saposhnikov, V.I., Moshanin, V., Saposhnikov, V.V. & Goessel, M. (1999) Experimental Results for Self-Dual Multi-Output Combinational Circuits. *Journal of Electronic Testing: Theory and Applications*. 14(3). pp. 295–300. DOI: 10.1023/A:1008370405607
7. Göessel, M., Dmitriev, A.V., Sapozhnikov, V.V. & Sapozhnikov, V.I. (2000) Detection of Faults in Combinational Circuits by a Self-Dual Test. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 7. pp. 140–149.
8. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, V.I. & Göessel, M. (2001) *Samodvoystvennyye diskretnye ustroystva* [Self-dual Digital Devices]. St. Petersburg: Energoatomizdat.
9. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, V.I. & Valiev, R.Sh. (2006) *Sintez samodvoystvennykh diskretnykh sistem* [Synthesis of Self-Dual Digital Systems]. St. Petersburg: Elmor.
10. Göessel, M., Ocheretny, V., Sogomonyan, E. & Marienfeld, D. (2008) *New Methods of Concurrent Checking*. Dordrecht: Springer Science+Business Media B.V.
11. Efanov, D., Sapozhnikov, V., Sapozhnikov, V.I., Osadchy, G. & Pivovarov, D. (2019) Self-Dual Complement Method up to Constant-Weight Codes for Arrangement of Combinational Logical Circuits Concurrent Error-Detection Systems. *Proceedings of 17th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2019)*. Batumi, Georgia. September 13-16. pp. 136–143. DOI: 10.1109/EWDTS.2019.8884398
12. Efanov, D.V. & Pivovarov, D.V. (2021) The Hybrid Structure of a Self-Dual Built-In Control Circuit for Combinational Devices with Pre-Compression of Signals and Checking of Calculations by Two Diagnostic Parameters. *Proceedings of*

- 19th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2021). Batumi, Georgia, September 10-13. pp. 200–206. DOI: 10.1109/EWDTS52692.2021.9581019
13. Efanov, D.V. & Pivovarov, D.V. (2022) Synthesis of Self-Testable Combinational Devices with Control of Calculations by Two Diagnostic Parameters. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Priborostroenie – Journal of Instrument Engineering*. 65(7). pp. 461–477. DOI: 10.17586/0021-3454-2022-65-7-461-477
14. Efanov, D.V. & Pogodina, T.S. (2023) Properties Investigation of Self-Dual Combinational Devices with Calculation Control Based on Hamming Codes. *Informatika i avtomatizatsiya – Informatics and Automation*. 22(2). pp. 349–392. DOI: 10.15622/ia.22.2.5
15. Efanov, D.V. & Pogodina, T.S. (2023) Self-Dual Digital Devices with Calculations Testing by Hsiao Codes. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika*. 63. pp. 118–136. DOI: 10.17223/19988605/63/14
16. Shalyto, A.A. (2000) *Logicheskoe upravlenie. Metody apparatnoy i programmnoy realizatsii* [Logic Control. Methods of Hardware and Software Implementation]. St. Petersburg: Nauka.
17. Shalyto, A.A. (2001) Modules which Are Universal in the Class of Self-Dual Functions and in Close Classes. *Izvestiya Akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya*. 5. pp. 110–120.
18. Lala, P.K. (2001) *Self-Checking and Fault-Tolerant Digital Design*. San Francisco: Morgan Kaufmann.
19. Hamming, R.W. (1950) Error Detecting and Correcting Codes. *Bell System Technical Journal*. 29(2). pp. 147–160. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1950.tb00463.x
20. Efanov, D.V. & Pogodina, T.S. (2022) Self-Dual Control of Combinational Circuits with Using Hamming Codes. *Problemy razrabotki perspektivnykh mikro- i nanoelektronnykh sistem (MES) – Problems of Advanced Micro- and Nanoelectronic Systems Development (MES)*. 3. pp. 113–122. DOI: 10.31114/2078-7707-2022-3-113-122
21. Drozd, A., Kharchenko, V., Antoshchuk, S., Sulima, J. & Drozd, M. (2011) Checkability of the Digital Components in Safety-Critical Systems: Problems and Solutions. *Proceedings of 9th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2011)*. Sevastopol, Ukraine. pp. 411–416. DOI: 10.1109/EWDTS.2011.6116606
22. Drozd, O., Perebeinos, I., Martynyuk, O., Zashcholkin, K., Ivanova, O. & Drozd, M. (2020) Hidden Fault Analysis of FPGA Projects for Critical Applications. *Proceedings of the IEEE International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET)*. February 25-29. Lviv-Slavsko, Ukraine. Art. 142. DOI: 10.1109/TCSET49122.2020.235591

**Информация об авторе:**

**Ефанов Дмитрий Викторович** – доктор технических наук, профессор, действительный член Международной Академии транспорта, член Института инженеров электротехники и электроники (IEEE); профессор Высшей школы транспорта Института машиностроения, материалов и транспорта Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (СПбПУ Петра Великого) (Санкт-Петербург, Россия); профессор кафедры «Автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте» Российского университета транспорта (МИИТ) (Москва, Россия); кафедра «Автоматика и телемеханика» Ташкентского государственного транспортного университета (Ташкент, Узбекистан). E-mail: TrES-4b@yandex.ru

*Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.*

**Information about the author:**

**Efanov Dmitry V.** (Doctor of Technical Sciences, Professor, Full-member of the International Transport Academy, IEEE member, Professor of Transport Higher School of Mechanical Engineering, Material and Transport Institute at Saint Petersburg Peter the Great Saint Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation; Professor of Automation, Remote Control and Communication on Railway Transport Department, Russian University of Transport Moscow, Russian Federation; Professor of Automation and Remote Control Department of Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: TrES-4b@yandex.ru

*The author declares no conflicts of interests.*

*Поступила в редакцию 18.08.2023; принята к публикации 08.12.2023*

*Received 18.08.2023; accepted for publication 08.12.2023*

**Научный журнал**

**ВЕСТНИК  
ТОМСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА  
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY  
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

**2023. № 65**

Редактор Е.Г. Шумская  
Оригинал-макет Е.Г. Шумской  
Редакторы-переводчики: Г.М. Кошкин; В.Н. Горенинцева  
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 25.12.2023 г. Формат 60x84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>.  
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 16,3.  
Тираж 250 экз. Заказ № 5721. Цена свободная.

Дата выхода в свет 28.12.2023 г.

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании  
Издательства Томского государственного университета  
634050, г. Томск, Ленина, 36  
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75  
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: [rio.tsu@mail.ru](mailto:rio.tsu@mail.ru)