

**В Е С Т Н И К  
ТОМСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА  
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

TOMSK STATE UNIVERSITY  
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

---

***Научный журнал***

---

**2023**

**№ 86**

Свидетельство о регистрации  
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.  
выдано Федеральной службой по надзору  
в сфере массовых коммуникаций, связи  
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Учредитель:**

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Национальный исследовательский  
Томский государственный университет»

**РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА  
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.  
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА**

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), И.А. Колесников (отв. секретарь по разделу «Математика»), А.Д. Сидоров (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, В.Г. Бутов, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, Е.Л. Лобода, Г.О. Рябова, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Е. А. Тимошенко, М.А. Шеремет, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

**EDITORIAL COUNCIL**

**Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics**

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

**EDITORIAL BOARD**

**Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics**

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Ivan A. Kolesnikov (Executive Editor of the Mathematics Section), Aleksey D. Sidorov (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenchikov, Vladimir G. Butov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Egor L. Loboda, Galina O. Ryabova, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Egor A. Timoshenko, Mikhail A. Sheremet, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

**Адрес редакции:** 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36, корп. 2, к. 417

**Электронный адрес:** <http://journals.tsu.ru/mathematics>

**Контактный тел./факс:** (3822) 529-740

**E-mail:** [vestnik\\_tgu\\_mm@math.tsu.ru](mailto:vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru)

## СОДЕРЖАНИЕ

### МЕХАНИКА

|                                                                                                                                                                                                      |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Александрова А.Г., Попандопуло Н.А., Кучерявченко Н.А., Авдюшев В.А.,<br/>Бордовицына Т.В.</b> Численная модель движения искусственных спутников Земли .....                                      | 5   |
| <b>Архипов В.А., Басалаев С.А., Перфильева К.Г., Романдин В.И., Усанина А.С.</b><br>Анализ режимов гравитационного осаждения капли .....                                                             | 21  |
| <b>Бошенятов Б.В., Глазунов А.А., Ищенко А.Н., Карнет Ю.Н.</b> Аналитические<br>модели теплопроводности в двухфазных дисперсных средах. 1. Теоретические<br>исследования .....                       | 35  |
| <b>Еремин И.В., Костюшин К.В., Рашковский С.А., Жильцов К.Н.</b> Численное<br>моделирование обтекания конгломератов высокотемпературным потоком газа .....                                           | 55  |
| <b>Ищенко А.Н., Бирюков И.М., Буркин В.В., Дьячковский А.С., Саммель А.Ю.,<br/>Шестопалова А.С., Чупашев А.В.</b> О влиянии жесткой границы на профиль<br>суперкаверны .....                         | 70  |
| <b>Клюкин Д.А., Русяк И.Г., Суфиянов В.Г.</b> Верификация одномерной<br>компьютерной модели продольно-поперечных колебаний ствола<br>артиллерийского орудия при выстреле .....                       | 79  |
| <b>Прокофьев В.Г.</b> Математическая модель синтеза трехслойного соединения<br>(медь–силицид титана–сталь) в режиме горения .....                                                                    | 94  |
| <b>Рашковский С.А.</b> Модель нестационарного горения твердых топлив<br>с накоплением конденсированных продуктов на поверхности горения .....                                                        | 104 |
| <b>Скрипник В.А., Чирков М.О., Скрипник В.В.</b> Механическое поведение<br>алюминиевого сплава 1520 при растяжении в диапазоне скоростей<br>деформации от $10^{-1}$ до $10^3$ с $^{-1}$ .....        | 120 |
| <b>Феокистов С.И., Андрианов И.К.</b> Оценка верхнего и нижнего уровней<br>допустимых деформаций при изготовлении листовых и тонкостенных<br>деталей на основе диаграммы предельных деформаций ..... | 136 |

### МАТЕМАТИКА

|                                                                                                                                             |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Бубенчиков М.А., Бубенчиков А.М., Мамонтов Д.В.</b> Высокоточные<br>представления инерционных вращений и неустойчивость Луи Пуансо ..... | 149 |
| <b>Lazarev V.R.</b> On a class of homeomorphisms of function spaces preserving<br>the Lindelöf number of domains .....                      | 159 |
| <b>Тимошенко Е.А., Третьяков И.В.</b> Инволюции группы автоморфизмов<br>вполне разложимой абелевой группы конечного ранга .....             | 167 |
| <b>Цыденов Б.О.</b> Математическая модель транспорта растворенного кислорода<br>при развитии термобара .....                                | 176 |

## CONTENTS

### MECHANICS

|                                                                                                                                                                                                   |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Aleksandrova A.G., Popandopulo N.A., Kucheryavchenko N.A., Avdyushev V.A., Bordovitsyna T.V.</b> Numerical model of the motion of artificial Earth satellites .....                            | 5   |
| <b>Arkhipov V.A., Basalaev S.A., Perfilieva K.G., Romandin V.I., Usanina A.S.</b> Analysis of gravitational settling regimes for a drop .....                                                     | 21  |
| <b>Boshenyatov B.V., Glazunov A.A., Ishchenko A.N., Karnet Yu.N.</b> Analytical models of thermal conductivity in two-phase dispersive media. 1. Theoretical study .....                          | 35  |
| <b>Eremin I.V., Kostyushin K.V., Rashkovskiy S.A., Zhiltsov K.N.</b> Numerical modelling of conglomerates flowing by high-temperature gas flow .....                                              | 55  |
| <b>Ishchenko A.N., Biryukov I.M., Burkin V.V., D'yachkovskiy A.S., Sammel A.Yu., Shestopalova A.S., Chupashev A.V.</b> On the effect of a rigid boundary on the supercavity profile .....         | 70  |
| <b>Kljukin D.A., Rusyak I.G., Sufiyarov V.G.</b> Verification of a one-dimensional computer model of longitudinal-transverse vibrations of an artillery gun barrel on firing .....                | 79  |
| <b>Prokof'ev V.G.</b> A mathematical model of synthesis of a three-layer (copper–titanium silicide–steel) compound in a combustion mode .....                                                     | 94  |
| <b>Rashkovskiy S.A.</b> Model of non-stationary combustion of solid energetic materials with accumulation of condensed products on the burning surface .....                                      | 104 |
| <b>Skipnyak V.A., Chirkov M.O., Skipnyak V.V.</b> Mechanical behavior of aluminum alloy 1520 under tension in the range of strain rates from $10^{-1}$ to $10^3$ s $^{-1}$ .....                  | 120 |
| <b>Feoktistov S.I., Andrianov I.K.</b> Assessment of the upper and lower levels of permissible strains in the manufacture of sheet and thin-walled parts based on the forming limit diagram ..... | 136 |

### MATHEMATICS

|                                                                                                                                                    |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Mamontov D.V.</b> High-precision representations of inertial rotations and Louis Poincaré instability ..... | 149 |
| <b>Lazarev V.R.</b> On a class of homeomorphisms of function spaces preserving the Lindelöf number of domains .....                                | 159 |
| <b>Timoshenko E.A., Tretyakov I.V.</b> Involutions of the automorphism group of a completely decomposable finite-rank Abelian group .....          | 167 |
| <b>Tsydenov B.O.</b> A mathematical model of dissolved oxygen transport during the thermal bar evolution .....                                     | 176 |

## МЕХАНИКА

## MECHANICS

Научная статья

УДК 531.39, 52-17, 521.1

doi: 10.17223/19988621/86/1

### Численная модель движения искусственных спутников Земли

**Анна Геннадьевна Александрова<sup>1</sup>, Никита Андреевич Попандопуло<sup>2</sup>,  
Никита Александрович Кучерявченко<sup>3</sup>,  
Виктор Анатольевич Авдюшев<sup>4</sup>,  
Татьяна Валентиновна Бордовицына<sup>5</sup>**

*<sup>1, 2, 3, 4, 5</sup> Томский государственный университет, Томск, Россия*

*<sup>1</sup> aleksandrovaannag@mail.ru*

*<sup>2</sup> nikas.popandopulos@gmail.com*

*<sup>3</sup> wallquet@gmail.com*

*<sup>4</sup> scharmn@mail.ru*

*<sup>5</sup> bordovitsyna@mail.ru*

**Аннотация.** Представлена последняя версия программного комплекса «Численная модель движения искусственных спутников Земли», разработанного в НИИ прикладной математики и механики Томского госуниверситета. Описывается его математический инструментарий, а также новый пользовательский интерфейс. Программное обеспечение реализовано как для персонального компьютера, так и для среды с распараллеливанием вычислительных задач «Скиф Cyberia» ТГУ.

**Ключевые слова:** численные методы, искусственные спутники Земли (ИСЗ), орбитальная эволюция, хаотичность и устойчивость орбит, MEGNO

**Благодарности:** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-72-10022, <https://rscf.ru/project/19-72-10022/>

**Для цитирования:** Александрова А.Г., Попандопуло Н.А., Кучерявченко Н.А., Авдюшев В.А., Бордовицына Т.В. Численная модель движения искусственных спутников Земли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 5–20. doi: 10.17223/19988621/86/1

## Numerical model of the motion of artificial Earth satellites

Anna G. Aleksandrova<sup>1</sup>, Nikita A. Popandopulo<sup>2</sup>,  
Nikita A. Kucheryavchenko<sup>3</sup>, Viktor A. Avdyushev<sup>4</sup>,  
Tat'yana V. Bordovitsyna<sup>5</sup>

<sup>1, 2, 3, 4, 5</sup> Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

<sup>1</sup> aleksandrovaannag@mail.ru

<sup>2</sup> nikas.popandopulos@gmail.com

<sup>3</sup> wallguet@gmail.com

<sup>4</sup> scharmn@mail.ru

<sup>5</sup> bordovitsyna@mail.ru

**Abstract.** This paper presents the latest version of the software package "Numerical model of the motion of artificial Earth satellites". Two versions of the program have been developed: one for a personal computer and another for the "SKIF Cyberia" supercomputer complex with parallelization of computational tasks at Tomsk State University.

The software can take into account the following perturbing factors: geopotential non-sphericity effect, secular variations in the first zonal harmonics and tidal deformations within the Earth, gravitational influence of the Sun and Moon, radiation forces, atmospheric drag acceleration, influence of major planets, selenopotential harmonics, and relativistic effects.

To study the chaotic nature of the orbital motion of near-Earth satellites, the developed software package is improved with the possibility of calculating the MEGNO parameter. The numerical model allows the user to additionally calculate resonant parameters using analytical and numerical techniques when studying the features of the orbital evolution of near-Earth objects.

In the presented version of the software package for a personal computer, the interaction with the user is carried out by means of the software interface. The interface additionally allows one to create an input text file based on the completed data for further use in the version for the "SKIF Cyberia" supercomputer.

**Keywords:** numerical methods, artificial Earth satellites (AES), orbital evolution, chaotic and stable orbits, MEGNO

**Acknowledgments:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 19-72-10022), <https://rscf.ru/en/project/19-72-10022/>

**For citation:** Aleksandrova, A.G., Popandopulo, N.A., Kucheryavchenko, N.A., Avdyushev, V.A., Bordovitsyna, T.V. (2023) Numerical model of the motion of artificial Earth satellites. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 5–20. doi: 10.17223/19988621/86/1

## Введение

Первая версия «Численной модели движения искусственных спутников Земли (ИСЗ)» НИИ ПММ ТГУ была разработана еще в 80-х гг. прошлого века. Данная модель претерпевала различные доработки, связанные с выходом новых стандар-

тов Международного астрономического союза, появлением более современных вычислительных машин, в том числе кластера «Скиф Cyberia» Томского государственного университета [1, 2], с расширением круга задач, которые решаются с помощью данного программного обеспечения (ПО), например вычисление параметра хаотичности [3] или расчет вековых частот для исследования резонансной динамики ИСЗ [4]. Кроме того, применяемые интеграторы неоднократно заменялись более современными и эффективными (Эверхарта, Гаусса–Эверхарта, Lobbie) [1, 2, 5–7].

Цель данной работы – демонстрация последней важной модификации «Численной модели движения ИСЗ» – интерфейса, а также математических алгоритмов, которые легли в основу модели.

Ранее во всех версиях данной модели взаимодействие с пользователем осуществлялось посредством входного файла, что нередко служило причиной ошибок при его заполнении новыми пользователями. Такой формат работы с программой в настоящее время не представляется удобным, поэтому был разработан интерфейс для облегчения взаимодействия пользователя с программой.

С 2009 г. «Численная модель движения ИСЗ» существует в двух основных версиях: для персонального компьютера и для работы в среде с распараллеливанием вычислительных задач «Скиф Cyberia» ТГУ [1, 2]. В модели для кластера, помимо модификаций, перечисленных выше, способ распараллеливания был изменен на более эффективный в решении наших задач [1]. Интерфейс был разработан главным образом для версии ПО, предназначенной для персональных компьютеров, поскольку работа на кластере осуществляется через специализированные программы доступа. Однако разработанный интерфейс позволяет сгенерировать входной файл для кластерной модели, что также дает возможность избежать его некорректного формирования.

### **Описание программного комплекса в части прогноза движения ИСЗ**

Основной интерфейс представлен на рис. 1. При высокоточном прогнозе движения ПО позволяет учитывать следующие факторы, оказывающие влияние на движение ИСЗ: гармоника геопотенциала и селенопотенциала; дополнительные возмущения геопотенциала, рекомендованные в [8], такие как вековые изменения первых зональных гармоник (входят в учет влияния геопотенциала) и различные приливы; гравитационные влияния Солнца, Луны и больших планет; сопротивление атмосферы; световое давление (СД) и эффект Пойнтинга–Робертсона (на стартовом окне носит сокращение П-Р); а также релятивистские эффекты.

Пользователь сам определяет, какие возмущения необходимо учитывать при решении поставленной задачи, как это показано на рис. 1. Стоит отметить, что при учете влияния атмосферы необходимо задать «высоту сгорания», по умолчанию данный параметр равен 100 км (см. рис. 1). Если в результате прогноза движения объект достигает данной высотной отметки, расчеты для него прекращаются и спутник считается сгоревшим в атмосфере.

Пользователь задает начальный и конечный моменты прогноза, и при этом возможно выбрать выдачу в файл с любого момента внутри интервала прогноза. По умолчанию начальный момент для выдачи соответствует началу прогноза. Шаг выдачи данных можно задать двумя способами: либо в секун-

дах, либо в числе оборотов (период вычисляется программой для каждого околоземного спутника).

**ЧМ ИСЗ**  
Настройки    Помощь

**Начальный момент прогноза:**  
01.02.2018 0:00:00 (UTC)

**Начальный момент выдачи:**  
01.02.2018 0:00:00 (UTC)

**Конечный момент прогноза:**  
10.02.2018 0:00:00 (UTC)

☒ Шаг выдачи (сек) 864 (сек)  
☐ Число оборотов 0

**Возмущающие факторы**

Гармоники геопотенциала: 20 20  
Гармоники селенопотенциала: 0 0

☒ Луна  
☒ Солнце  
☒ Планеты  
☒ Световое давление и П-Р  
☒ Приливы  
☒ Атмосфера  
☒ ☒ Релятивистские эффекты

Высота сгорания: 100.0 км

☐ Учёт MEGNO

**Вековые частоты (для вековых резонансов)**

☐ Точная методика  
☐ Аналитическая методика

**Начальные параметры объектов**

```
1217.50
16.0
-5246.410252658446 -36367.72650986236 -20735.916374474706
2.867006894231411 -0.8306824716778586 0.7290445140182338
1217.50
16.0
41292.10176378819 8302.322340035149 -2140.0727303119
-0.6029026875222986 3.013946556922367 0.07046525981697369
1217.50
16.0
-33224.67701094821 25825.412278761753 2281.259678780705
-1.8843386039293748 -2.4301026696303505 0.07429837070776568
```

Количество объектов: 3

**Файл** **Старт**

**Рис. 1.** Интерфейс «Численной модели движения ИСЗ»

**Fig. 1.** Interface of the "Numerical model of the artificial Earth satellite motion"

**Пример описания параметров объекта**

|                                                           |                                       |
|-----------------------------------------------------------|---------------------------------------|
| 1217.50                                                   | m (Масса, кг)                         |
| 16.0                                                      | A (Миделево сечение, м <sup>2</sup> ) |
| -5246.410252658446 -36367.72650986236 -20735.916374474706 | x, y, z (Координаты, км)              |
| 2.867006894231411 -0.8306824716778586 0.7290445140182338  | vx, vy, vz (Скорости, км/с)           |

**Ок**

**Рис. 2.** Пояснение к заполнению поля «Начальные параметры»

**Fig. 2.** Explanation for the "Initial parameters" fill-in field

Начальные параметры ИСЗ, такие как масса, площадь миделева сечения, стартовые координаты и скорости, задаются в соответствующем окне (рис. 1, 2). При нажатии на знак вопроса рядом с данным окном выдаются пояснение и пример заполнения поля (см. рис. 2). После введения параметров объектов, если все задано верно, под окном ввода появится число, отражающее количество объектов.

После задания всех необходимых параметров, перечисленных выше, пользователь может либо запустить расчеты, нажав «Старт», либо сгенерировать файл для запуска модели на кластере «Скиф Cyberia», если необходимо спрогнозировать динамическую эволюцию большого числа объектов и использование кластера в таком случае более целесообразно.

Приведем далее основные формулы, лежащие в основе прогноза движения ИСЗ в данной численной модели.

### Уравнения движения

Движение искусственного спутника Земли представим в виде:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{P} = \mathbf{M}^T \mathbf{P}_E + \mathbf{P}_{MSP} + \mathbf{P}_{SL} + \mathbf{P}_{ATM} + \mathbf{P}_R \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0), \quad \dot{\mathbf{x}}_0 = \dot{\mathbf{x}}(t_0), \quad (2)$$

где  $\mathbf{P}$  – ускорение спутника;  $\mathbf{P}_E$  – центральное притяжение Земли и возмущающее ускорение, обусловленное влиянием несферичности геопотенциала и приливами в системе координат, жестко связанной с Землей и вращающейся вместе с ней (ВСК);  $\mathbf{M}^T$  – матрица перехода из вращающейся в инерциальную систему координат;  $\mathbf{P}_{MSP}$  – возмущающее ускорение от притяжения третьего тела: Луны (М), Солнца (S) и больших планет (P) соответственно;  $\mathbf{P}_{SL}$  – ускорение спутника, вызванное СД и эффектом Пойнтинга–Робертсона;  $\mathbf{P}_{ATM}$  – ускорение от сопротивления атмосферы;  $\mathbf{P}_R$  – релятивистские эффекты.

### Возмущения от геопотенциала и селенопотенциала

Влияние геопотенциала на движение ИСЗ задается следующей формулой, вычисляемой, как уже отмечалось ранее, в ВСК:

$$\mathbf{P}_E = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}, \quad U = \frac{\mu_E}{R_E} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{R_E}{|\mathbf{x}|} \right)^{n+1} \bar{P}_{n,m}(\sin \varphi) \left[ \bar{C}_{n,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{n,m} \sin m\lambda \right] \right\}, \quad (3)$$

где  $\mu_E$  и  $R_E$  – постоянные, связанные с Землей, гравитационный параметр и экваториальный радиус соответственно;  $|\mathbf{x}|$ ,  $\varphi$ ,  $\lambda$  – сферические координаты спутника в ВСК;  $\bar{C}_{n,m}$ ,  $\bar{S}_{n,m}$  – числовые коэффициенты, характеризующие структуру гравитационного поля Земли, причем  $\bar{S}_{n0} = 0$ ;  $\bar{P}_{n,m}(\sin \varphi)$  – полностью нормированные присоединенные функции Лежандра.

Вычисление  $U$  и его производных выполняется через рекуррентный алгоритм Л. Каннингема [9], для этого соотношение (3) было представлено через шаровую функцию  $\bar{V}_{n,m}$ :

$$U = \text{Real} \mu_E \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n R_E^n (\bar{C}_{n,m} - i \bar{S}_{n,m}) \bar{V}_{n,m}, \quad (4)$$

$$\bar{V}_{n,m} \equiv \frac{\bar{P}_{n,m} (\sin \varphi) (\cos m\lambda + i \sin m\lambda)}{|\mathbf{x}|^{n+1}}. \quad (5)$$

Поскольку

$$x_1 = |\mathbf{x}| \cos \varphi \cos \lambda, \quad x_2 = |\mathbf{x}| \cos \varphi \sin \lambda, \quad x_3 = |\mathbf{x}| \sin \varphi, \quad (6)$$

функции  $\bar{V}_{n,m}$  и их частные производные по  $x_1, x_2, x_3$  определяются в модели посредством соотношений:

$$\begin{aligned} V_{0,0} &= \frac{1}{|\mathbf{x}|}, \\ \bar{V}_{n,m} &= \frac{\bar{P}_{n,m} (\sin \varphi) (x_1 + ix_2)^m}{\cos^m \varphi}, \\ \bar{V}_{n,m} &= \sqrt{\frac{E_m (2n+1)}{E_{m-1} 2m}} \frac{x_1 + ix_2}{|\mathbf{x}|^2} \bar{V}_{n-1, m-1}, \quad (m = n), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_{n,m} &= \sqrt{\frac{4n^2 - 1}{n^2 - m^2}} \frac{x_3}{|\mathbf{x}|^2} \bar{V}_{n-1, m} - \sqrt{\frac{(2n+1)[(n-1)^2 - m^2]}{(2n-3)(n^2 - m^2)}} \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \bar{V}_{n-2, m}, \\ \frac{\partial \bar{V}_{n,m}}{\partial x_1} &= -\sqrt{\frac{(2n+1)(n+m+2)(n+m+1)}{2n+3}} \frac{\bar{V}_{n+1, m+1}}{2} + \\ &+ \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-m+2)(n-m+1)}{E_{m-1}(2n+3)}} \frac{\bar{V}_{n+1, m-1}}{2}, \quad (m > 0), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}_{n,m}}{\partial x_1} &= \sqrt{\frac{(2n+1)(n+2)(n+1)}{2(2n+3)}} \text{Real} \bar{V}_{n+1,1}, \quad (m = 0), \\ \frac{\partial \bar{V}_{n,m}}{\partial x_2} &= \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m+2)(n+m+1)}{2n+3}} i \frac{\bar{V}_{n+1, m+1}}{2} + \\ &+ \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-m+2)(n-m+1)}{E_{m-1}(2n+3)}} i \frac{\bar{V}_{n+1, m-1}}{2}, \quad (m > 0), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}_{n,m}}{\partial x_2} &= \sqrt{\frac{(2n+1)(n+2)(n+1)}{2(2n+3)}} \text{Imag} \bar{V}_{n+1,1}, \quad (m = 0), \\ \frac{\partial \bar{V}_{n,m}}{\partial x_3} &= \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m+1)(n-m+1)}{2n+3}} \bar{V}_{n+1, m}. \quad (m \geq 0). \end{aligned} \quad (10)$$

Описание вычислений дополнительных возмущений геопотенциала, рекомендованных IERS Conventions 2010, а именно: вековых изменений первых зональных гармоник и возмущений от разного вида приливов, изложены в [8], и здесь мы не будем на них останавливаться.

Что касается возмущений от селенопотенциала, то они вычисляются с помощью модели LP150Q [10].

### Возмущения от третьего тела

Влияние притяжения от третьего тела в (1) задается силой, определяемой формулой [11]

$$\mathbf{P}_{M,S,P} = \mu_{M,S,P} \left( \frac{\mathbf{x}_{M,S,P} - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_{M,S,P} - \mathbf{x}|^3} - \frac{\mathbf{x}_{M,S,P}}{|\mathbf{x}_{M,S,P}|^3} \right). \quad (11)$$

Здесь  $\mu_{M,S,P}$  и  $\mathbf{x}_{M,S,P}$  – гравитационные параметры и геоцентрические векторы положения Луны, Солнца и больших планет соответственно. Гравитационный параметр Земли задан в IERS соглашениях 2003 и 2010 гг. [8, 12]. Остальные гравитационные параметры, отношения массы Солнца к массам больших планет, а также координаты больших планет и Луны берутся из фонда DE438/LE438 [13].

При одновременном учете возмущений от Луны, Солнца и больших планет в правой части уравнений (1) будут три слагаемых типа (11):

$$\mathbf{P}_{MSP} = \mathbf{P}_M + \mathbf{P}_S + \mathbf{P}_P.$$

### Возмущения от СД и эффекта Пойнтинга–Робертсона

Ускорение спутника, вызванное влиянием СД и эффекта Пойнтинга–Робертсона, задается выражением [14–15]

$$\mathbf{P}_{SL} = \Phi L \frac{\tilde{\mathbf{x}}}{\Delta_S} - \Phi L \left( \frac{\dot{\tilde{\mathbf{x}}} \cdot \tilde{\mathbf{x}}}{c \Delta_S} \frac{\tilde{\mathbf{x}}}{\Delta_S} + \frac{\dot{\tilde{\mathbf{x}}}}{c} \right), \quad L = k \theta \frac{a_E^2}{\Delta_S^2} \frac{\sigma}{m}, \quad (12)$$

где  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_S$ ;  $\Delta_S$  – расстояние между спутником и Солнцем;  $c$ ,  $k$ ,  $a_E$ ,  $\theta$  – константы: скорость света, солнечная постоянная, астрономическая единица и постоянная, характеризующая отражающие свойства объекта соответственно;  $\Phi$  – функция тени, определяемая ниже;  $\sigma/m$  – отношение площади миделевого сечения к массе ИСЗ.

В численной модели заданы формулы, обусловленные конической формой тени, и  $\Phi$  вычисляется по следующему алгоритму. Пусть  $r_E$  и  $r_M$  – угловые расстояния относительно исследуемого объекта между центрами Солнца и заслоняющего его тела (Земли или Луны). Радиусы дисков Солнца  $b_S$ , Земли  $b_E$ , Луны  $b_M$  и  $r_E$ ,  $r_M$  определяются как

$$b_E = \arcsin \frac{R_E}{|\mathbf{x}|}, \quad b_{S,M} = \arcsin \frac{R_{S,M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{S,M}|},$$

$$r_E = \arccos \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_S}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S|}, \quad r_M = \arccos \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_M}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_M|} \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_S}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S|},$$

где  $R_S$ ,  $R_E$ ,  $R_M$  – соответствующие радиусы объектов в пространстве.

В таком случае теневая функция планеты (Земли или Луны) рассчитывается по формулам

$$\Phi_{E,M} = \begin{cases} 1, & r_{E,M} > b_{E,M} + b_S, \\ 0, & b_{E,M} > r_{E,M} + b_S, \\ \frac{b_S^2 - b_{E,M}^2}{b_S^2}, & b_S > r_{E,M} + b_{E,M}, \\ 1 - \frac{b_S^2 (g - \sin g) + b_{E,M}^2 (G - \sin G)}{2\pi b_S^2}, & \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{где } g = 2 \arccos(z), \quad G = 2 \arccos\left(\frac{r_{E,M} - b_S}{b_{E,M}} z\right), \quad z = \frac{b_S^2 + r_{E,M}^2 - b_{E,M}^2}{2r_{E,M}b_S}.$$

Общая теневая функция определяется как произведение теневых функций Земли и Луны:

$$\Phi = \Phi_E \cdot \Phi_M. \quad (14)$$

Теневая функция рассматривает четыре случая: отсутствие затенения; полная тень; затеняющая планета меньшего размера, находящаяся полностью на фоне Солнца; частичное перекрытие дисков Солнца и планеты.

Более тонкие эффекты: учет искажения диска Солнца и сжатия Земли в атмосфере, учет солнечного затмения с эффектом потемнения диска Солнца к краям, а также переотраженное и тепловое излучение от Земли, – подробно изложены в работах [16, 17].

### ***Возмущения от сопротивления атмосферы***

Возмущение от сопротивления атмосферы учитывается при прогнозе движения спутников на высотах до 1 500 км. Сила  $\mathbf{P}_{\text{АТМ}}$ , действующая на ИСЗ, имеет направление, противоположное скорости спутника относительно воздуха, а ее величина определена формулой

$$P_{\text{АТМ}} = \frac{1}{2} \sigma c_d \rho v_{\text{отн}}^2, \quad (15)$$

где  $c_d$  – безразмерный коэффициент аэродинамического сопротивления воздуха;  $v_{\text{отн}}$  – скорость спутника относительно атмосферы;  $\rho$  – плотность воздуха, для вычисления которой используется модель NRLMSISE-00 [18].

Уравнения для учета релятивистских эффектов подробно изложены в работах [19–20], и, поскольку они редко учитываются при прогнозе движения, здесь мы их приводить не будем.

### **Описание программного комплекса в части вычисления параметра MEGNO**

Как уже было сказано выше, ПО позволяет проводить исследования хаотичности движения ИСЗ. Для этого необходимо включить опцию «учет MEGNO» (рис. 3), поскольку MEGNO и его осредненное значение были выбраны в качестве параметров хаотичности [5, 21, 22].

Для исследования хаотичности в динамике спутников нет необходимости в учете тонких эффектов, которые следует учитывать при высокоточном моделировании, список возмущающих сил при расчете MEGNO уменьшен. В связи с этим

при выборе опции «учет MEGNO» на стартовом окне блокируется возможность выбора возмущений, которые не учитываются при расчете параметра хаотичности (см. рис. 3), поскольку должно быть полное соответствие между учетом возмущений в уравнениях движения и уравнениях для MEGNO.

Рис. 3. Фрагмент интерфейса «Численной модели движения ИСЗ».

Учет параметра MEGNO

Fig. 3. Fragment of the "Numerical model of the artificial Earth satellite motion" interface for calculating the MEGNO parameter

### Алгоритм определения параметра хаотичности

Вычисления строятся таким образом, что в соответствии с методикой, предложенной в [23], уравнения (1) интегрируются совместно с уравнениями

$$\dot{\delta}_{\phi} = \frac{d}{dt} \delta_{\phi}(t) = \mathbf{J}(\mathbf{f}(\phi(t))) \delta_{\phi}(t), \quad \mathbf{J}(\mathbf{f}(\phi(t))) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\phi(t)), \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt} y = \frac{\dot{\delta} \cdot \delta}{\delta \cdot \delta} t, \quad \frac{d}{dt} w = 2 \frac{y}{t}. \quad (17)$$

В таком случае параметр MEGNO  $Y(t)$  и его усредненный вариант  $\bar{Y}(t)$  определяются по формуле

$$Y(t) = 2y(t)/t, \quad \bar{Y}(t) = w(t)/t. \quad (18)$$

Здесь  $\mathbf{f}(\phi(t))$  – правые части уравнений движения,  $(\phi(t))$  – решение системы (1),  $\delta_{\phi}(t)$  – вектор, который измеряет эволюцию начального бесконечно малого отклонения между решением  $\phi(t)$  и очень близкой орбитой. В численной модели  $\delta_0(t)$  задается малой вариацией начальных условий, а  $\delta_{\phi}(t)$  отражает расхождение текущих параметров в момент времени  $t$ . Матрица Якоби нашей системы уравнений (1)  $\mathbf{J}(\mathbf{f}(\phi(t)))$  имеет вид:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{OA} \\ \mathbf{BO} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где  $\mathbf{O}$  и  $\mathbf{A}$  – нулевая и единичная матрицы, а  $\mathbf{B}$  определяется, исходя из учитываемых возмущающих факторов, следующим выражением:

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}^T \mathbf{J} \left( \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}'} \right) + \mathbf{J}(\mathbf{P}_M) + \mathbf{J}(\mathbf{P}_S) + \mathbf{J}(\mathbf{P}_{SL}). \quad (20)$$

В формуле (20) матрица частных производных второго порядка от геопотенциала обозначена через  $\mathbf{J}(\partial U/\partial \mathbf{x}')$ , от возмущающих функций Луны и Солнца – через  $\mathbf{J}(\mathbf{P}_{M,S})$ , от радиационных сил – через  $\mathbf{J}(\mathbf{P}_{SL})$ .

### Производные второго порядка от геопотенциала

Вторые частные производные от  $\bar{V}_{n,m}$  могут быть выражены через первые производные от (8)–(10) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{V}_{nm}}{\partial x_1^2} &= -\frac{1}{2} \sqrt{X_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m+1}}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \sqrt{Y_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m-1}}{\partial x_1}, (m > 0), \\ \frac{\partial^2 \bar{V}_{n0}}{\partial x_1^2} &= -\sqrt{X_{n0}} \text{Real} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,1}}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial^2 \bar{V}_{nm}}{\partial x_1 \partial x_2} &= -\frac{1}{2} \sqrt{X_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m+1}}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \sqrt{Y_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m-1}}{\partial x_2}, (m > 0), \\ \frac{\partial^2 \bar{V}_{n0}}{\partial x_1 \partial x_2} &= -\sqrt{X_{n0}} \text{Real} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,1}}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial^2 \bar{V}_{nm}}{\partial x_2^2} &= \frac{i}{2} \sqrt{X_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m+1}}{\partial x_2} + \frac{i}{2} \sqrt{Y_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m-1}}{\partial x_2}, (m > 0), \\ \frac{\partial^2 \bar{V}_{n0}}{\partial x_2^2} &= -\sqrt{X_{n0}} \text{Imag} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,1}}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial^2 \bar{V}_{nm}}{\partial x_1 \partial x_3} &= -\frac{1}{2} \sqrt{X_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m+1}}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \sqrt{Y_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m-1}}{\partial x_3}, (m > 0), \\ \frac{\partial^2 \bar{V}_{n0}}{\partial x_1 \partial x_3} &= -\sqrt{X_{n0}} \text{Real} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,1}}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial^2 \bar{V}_{nm}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{i}{2} \sqrt{X_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m+1}}{\partial x_3} + \frac{i}{2} \sqrt{Y_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m-1}}{\partial x_3}, (m > 0), \\ \frac{\partial^2 \bar{V}_{n0}}{\partial x_2 \partial x_3} &= -\sqrt{X_{n0}} \text{Imag} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,1}}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial^2 \bar{V}_{n0}}{\partial x_3^2} &= -\sqrt{Z_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m}}{\partial x_3}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Здесь

$$X_{nm} = \left( \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m+1}} \right) \frac{(2n+1)(n+m+1)(n+m+2)}{2n+3},$$

$$Y_{nm} = \left( \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m-1}} \right) \frac{(2n+1)(n-m+1)(n-m+2)}{2n+3},$$

$$Z_{nm} = \frac{(2n+1)(n+m+1)(n-m+1)}{2n+3},$$

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 2, & m \neq 0. \end{cases} \quad \left( \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m+1}} \right) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & m = 0 \\ 1, & m > 0 \end{cases}; \quad \left( \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m-1}} \right) = \begin{cases} 1, & m > 1 \\ 2, & m = 1 \end{cases}.$$

### Вычисление вторых частных производных для притяжения третьего тела

Используя выражения (11) для возмущающих тел, получаем следующие соотношения вторых частных производных для притяжения третьего тела  $\partial \mathbf{P}_{M,S,P} / \partial \mathbf{x}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{P}_{M,S,P}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\mu_{M,S,P}}{|\mathbf{x}_{M,S,P} - \mathbf{x}|^3} \left( 3 \frac{(\mathbf{x}_{M,S,P} - \mathbf{x})(\mathbf{x}_{M,S,P} - \mathbf{x})^T}{|\mathbf{x}_{M,S,P} - \mathbf{x}|^2} - \mathbf{E} \right), \quad (22)$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица.

### Производные от радиационных сил

Производные от радиационных сил (12) имеют вид:

$$\frac{\partial P_m}{\partial \dot{x}_n} = L \Phi \left( \varepsilon_{nm} - \frac{3\ddot{x}_n \ddot{x}_m}{\Delta_s^2} \right) - \frac{L}{c \Delta_s^2} \Phi \left( (\dot{x}_k \cdot \ddot{x}_m) \varepsilon_{nm} + \dot{x}_n \ddot{x}_m - 2\dot{x}_m \ddot{x}_n - \frac{4\ddot{x}_m \ddot{x}_n (\dot{x}_n \cdot \ddot{x}_m)}{\Delta_s^2} \right), \quad (23)$$

$$\varepsilon_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}.$$

Здесь обозначения соответствуют (12). Основным отличием модели СД при высокоточном прогнозе и MEGNO-анализе является то, что при расчете параметра хаотичности мы ограничиваемся простой конической моделью тени без учета более тонких эффектов, упомянутых выше при описании возмущающих ускорений от СД. В нашей модели слагаемое, содержащее производную от теневой функции, упрощено, поскольку оно имеет ненулевое значение только в области полутени и дает незначительный вклад при значительной громоздкости вычислений. Если использовать полную запись, то в (23) появляется слагаемое вида (12), где вместо  $\Phi$  будет ее производная.

### Вековые частоты

В последнюю версию численной модели была добавлена возможность вычисления вековых частот объекта в процессе численного интегрирования. Для этого до начала прогноза в стартовом окне интерфейса (см. рис. 1) необходимо выбрать нужные опции расчета: точная (численная) методика или аналитическая, либо обе в зависимости от задачи. Как показали наши последние исследования [4, 24], наиболее оптимальным для анализа резонансной динамики является рассмотрение сразу обеих методик, поскольку каждая из них имеет свои недостатки, которые устраняются при совместном использовании численного и аналитического методов. Получаемые таким образом величины позволяют проводить исследова-

ния влияния вековых резонансов на спутниковую динамику. Подробно методика исследования и используемый для этого математический аппарат изложены в наших работах [4, 24].

### «Настройки» и «Помощь»

В верхнем левом углу стартового окна расположены две кнопки: «Настройки» и «Помощь» (рис. 1, 4). При нажатии на первую из них программа предложит задать параметры интегрирования (см. рис. 4): порядок интегратора, параметр интегратора (если выбран переменный шаг интегрирования) или размер шага в секундах (если выбран постоянный). В версиях численной модели без интерфейса выбор шага осуществлялся по условию: если параметр интегратора (порядок задаваемой точности) вводился равным отрицательному значению или нулю во входном файле, то использовалась величина постоянного шага интегрирования.

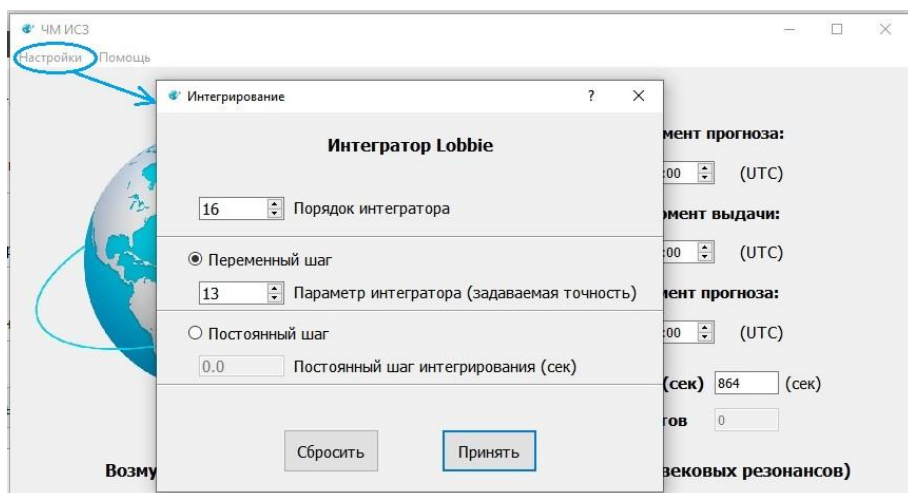


Рис. 4. Настройки интегратора численной модели

Fig. 4. Settings of a numerical model integrator

В текущую версию программного комплекса встроен новый коллокационный интегратор Lobbie [7], который обладает преимуществами при сравнении с другими интеграторами [1], используемыми в предыдущих версиях численной модели НИИ ПММ ТГУ. Схема интегрирования конструируется посредством прямого интегрирования полиномиальных интерполянтов правых частей дифференциальных уравнений [25–28]. Главные достоинства нового интегратора заключаются в том, что он позволяет решать смешанные системы дифференциальных уравнений первого и второго порядков, которые необходимы для определения MEGNO, а также имеет более высокую эффективность для работы с сильно вытянутыми эллиптическими орбитами.

При нажатии кнопки «Помощь» (см. рис. 1, 4) программа выдает окно с подробной инструкцией заполнения различных полей стартового окна и пояснением, какие расчеты возможно получить посредством выбора тех или иных опций, т.е. описанием полного функционала ПО.

## Заключение

Таким образом, в данной работе представлено описание «Численной модели движения ИСЗ», а именно математический аппарат, лежащий в ее основе, и разработанный интерфейс, предназначенный для упрощения работы пользователя с программой. Данная версия программного комплекса позволяет осуществлять высокоточный прогноз движения околоземных объектов, вычислять параметр MEGNO для исследования хаотичности движения ИСЗ, вычислять вековые частоты, используя численную (точную) и аналитическую методики, для проведения исследований резонансной динамики околоземных космических объектов. Показаны преимущества модели с интерфейсом для пользователя.

## Список источников

1. Александрова А.Г., Авдюшев В.А., Попандопуло Н.А., Бордовицына Т.В. Численное моделирование движения околоземных объектов в среде параллельных вычислений // Известия вузов. Физика. 2021. Т. 64, № 8. С. 168–175. doi: 10.17223/00213411/64/8/168
2. Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А., Чувашиов И.Н., Александрова А.Г., Томилова И.В. Численное моделирование движения систем ИСЗ в среде параллельных вычислений // Известия вузов. Физика. 2009. Т. 52, № 10/2. С. 5–11.
3. Бордовицына Т.В., Александрова А.Г., Чувашиов И.Н. Комплекс алгоритмов и программ для исследования хаотичности в динамике искусственных спутников Земли // Известия вузов. Физика. 2010. Т. 53, № 8/2. С. 14–21.
4. Попандопуло Н.А., Александрова А.Г., Бордовицына Т.В. Анализ динамической структуры вековых резонансов в окололунном орбитальном пространстве // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 77. С. 110–124. doi: 10.17223/19988621/77/9
5. Everhart E. Implicit Single-Sequence Methods for Integrating Orbits // Celestial Mechanics. 1974. V. 10 (1). P. 35–55. doi: 10.1007/BF01261877
6. Everhart E. An efficient integrator that uses Gauss–Radau spacings // An efficient integrator that uses Gauss–Radau spacings. Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution. Astrophysics and Space Science Library. 1985. V. 115 (4). P. 185–202. doi: 10.1007/978-94-009-5400-7\_17
7. Авдюшев В.А. Новый коллокационный интегратор для решения задач динамики. I. Теоретические основы // Известия вузов. Физика. 2020. Т. 63, № 11 (755). С. 131–140. doi: 10.17223/00213411/63/11/131
8. Petit G., Luzum B. IERS Technical note 36. Frankfurt am Main : Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 2010.
9. Cunningham L.E. On the Computation of the Spherical Harmonic Terms Needed During the Numerical Integration of the Orbital Motion of an Artificial Satellite // Celestial Mechanics. 1970. V. 2. P. 207–216. doi: 10.1007/BF01229495
10. Lunar Prospector Spherical Harmonics and Gravity Models. 2006. URL: [https://pds-geosciences.wustl.edu/dataserv/gravity\\_models.htm](https://pds-geosciences.wustl.edu/dataserv/gravity_models.htm) (accessed: 03.05.2023).
11. Дубошин Н.Г. Небесная механика. Основные задачи и методы. М. : Наука, 1968.
12. IERS Conventions 2003. URL: <http://tai.bipm.org/iers/conv2003/conv2003.html> (accessed: 03.05.2023).
13. Folkner W.M., Park R.S. Planetary ephemeris DE438 for Juno. Technical Report IOM392R-18-004. Pasadena, CA : Jet Propulsion Laboratory, 2018.
14. Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А. Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2007.
15. Robertson H.P. Dynamical Effects of Radiation in the Solar System // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1937. V. 97. P. 423–438. doi: 10.1093/mnras/97.6.423

16. *Vokrouhlicky D., Farinella P., Mignard F.* Solar radiation pressure perturbations for Earth's satellites, III globalatmospheric phenomena and albedo effect. // *Astronomy & Astrophysics*. 1993. V. 290. P. 324–334.
17. *Vokrouhlicky D., Farinella P., Mignard F.* Solar radiation pressure perturbations for Earth satellites. IV. Effects of the Earth's polar flattening on the shadow structure and the penumbra transitions // *Astronomy & Astrophysics*. 1996. V. 307. P. 635–644.
18. *Picone M., Hedin A.E., Drob D.* Naval Research Laboratory. URL: <http://modelweb.gsfc.nasa.gov/atmos/nrlmsise00.html> (access: 30.11.2015).
19. *Brumberg V.A.* On Relativistic Equations of Motion of an Earth Satellite // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2004. V. 88. P. 209–225. doi: 10.1023/B:CELE.0000016821.33627.77
20. *Brumberg V.A., Ivanova T.V.* Precession/Nutation Solution Consistent with the General Planetary Theory // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2007. V. 97 (3). P. 189–210. doi: 10.1007/s10569-006-9060-7
21. *Cincotta P.M., Simó C.* Simple tools to study global dynamics in non-axisymmetric galactic potentials – I // *Astronomy and Astrophysics Supplement*. 2000. V. 147. P. 205–228. doi: 10.1051/aas:2000108
22. *Cincotta P.M., Girdano C.M., Simo C.* Phase space structure of multi-dimensional systems by means of the mean exponential growth factor of nearby orbits // *Physica D*. 2003. V. 182. P. 151–178. doi: 10.1016/S0167-2789(03)00103-9
23. *Valk S., Delsate N., Lemaître A., Carletti T.* Global dynamics of high area-to-mass ratios GEO space debris by means of the MEGNO indicator // *Advances in Space Research*. 2009. V. 43 (7). P. 1509–1526. doi: 10.1016/j.asr.2009.02.014
24. *Попандопуло Н.А., Александрова А.Г., Бордовицына Т.В.* К обоснованию численно-аналитической методики выявления вековых резонансов // *Известия вузов. Физика*. 2022. Т. 65, № 6 (775). С. 47–52. doi: 10.17223/00213411/65/6/47
25. *Guillou A., Soule J.L.* La Resolution Numerique des Problèmes Differentielles aux Conditions Initiales par des Méthodes de Collocation // *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*. 1969. V. 3 (R3). P. 17–44.
26. *Wright K.* Some relationships between implicit Runge-Kutta, collocation and Lanczos methods, and their stability properties // *BIT Numerical Mathematics*. 1970. V. 10. P. 217–227.
27. *Hairer E., Norsett S. P., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems. Springer, 2008.
28. *Hairer E., Lubich C., Wanner G.* Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations. Springer, 2006.

## References

1. *Aleksandrova A.G., Avdyushev V.A., Popandopulo N.A., Bordovitsyna T.V.* (2021) Numerical modeling of motion of near-Earth objects in a parallel computing environment. *Russian Physics Journal*. 64(8). pp. 1566–1575. doi: 10.1007/s11182-021-02491-3
2. *Bordovitsyna T.V., Avdyushev V.A., Chuvashov I.N., Aleksandrova A.G., Tomilova I.V.* (2009) Chislennoe modelirovanie dvizheniya sistem ISZ v srede parallel'nykh vychisleniy [Numerical simulation of the motion of satellite systems in a parallel computing environment]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 52(10/2). pp. 5–11.
3. *Bordovitsyna T.V., Aleksandrova A.G., Chuvashov I.N.* (2010) Kompleks algoritmov i programm dlya issledovaniya khaotichnosti v dinamike iskusstvennykh sputnikov Zemli [A set of algorithms and programs for the study of randomness in the dynamics of artificial Earth satellites]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 53(8/2). pp. 14–21.
4. *Popandopulo N.A., Aleksandrova A.G., Bordovitsyna T.V.* (2022) Analiz dinamicheskoy struktury vekovykh rezonansov v okololunnom orbital'nom prostranstve [Analysis of a dy-

- dynamic structure of secular resonances in circumlunar orbital space]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 110–124. doi: 10.17223/19988621/77/9
5. Everhart E. (1974) Implicit single-sequence methods for integrating orbits. *Celestial Mechanics*. 10(1). pp. 35–55. doi: 10.1007/BF01261877
  6. Everhart E. (1985) An efficient integrator that uses Gauss–Radau spacings. *Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution. Astrophysics and Space Science Library*. 115(4). pp. 185–202. doi: 10.1007/978-94-009-5400-7\_17
  7. Avdyushev V.A. (2021) New collocation integrator for solving dynamic problems. I. Theoretical background. *Russian Physics Journal*. 63(11). pp. 1977–1988. doi: 10.1007/s11182-021-02260-2
  8. Petit G., Luzum B. (2010) *IERS Technical Note 36*. Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie.
  9. Cunningham L.E. (1970) On the computation of the spherical harmonic terms needed during the numerical integration of the orbital motion of an artificial satellite. *Celestial Mechanics*. 2. pp. 207–216. doi: 10.1007/BF01229495
  10. *Lunar Prospector Spherical Harmonics and Gravity Models* (2006) URL: [https://pds-geosciences.wustl.edu/dataserv/gravity\\_models.htm](https://pds-geosciences.wustl.edu/dataserv/gravity_models.htm) (03.05.2023).
  11. Duboshin G.N. (1968) *Nebesnaya mekhanika. Osnovnye zadachi i metody* [Celestial mechanics. Fundamental problems and methods]. Moscow: Nauka.
  12. *IERS Conventions* (2003) URL: <http://tai.bipm.org/iers/conv2003/conv2003.html>
  13. Folkner W.M., Park R.S. (2018) *Planetary Ephemeris DE438 for Juno. Technical Report IOM392R-18-004*. Pasadena: Jet Propulsion Laboratory.
  14. Bordovitsyna T.V., Avdyushev V.A. (2007) *Teoriya dvizheniya iskusstvennykh sputnikov Zemli. Analiticheskie i chislennyye metody* [Theory of motion of artificial Earth satellites. Analytical and numerical methods]. Tomsk: Izdatel'stvo Tomskogo universiteta.
  15. Robertson H.P. (1937) Dynamical effects of radiation in the solar system. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 97. pp. 423–438. doi: 10.1093/mnras/97.6.423
  16. Vokrouhlicky D., Farinella P., Mignard F. (1993) Solar radiation pressure perturbations for Earth's satellites, III globalatmospheric phenomena and albedo effect. *Astronomy & Astrophysics*. 290. pp. 324–334.
  17. Vokrouhlicky D., Farinella P., Mignard F. (1996) Solar radiation pressure perturbations for Earth satellites. IV. Effects of the Earth's polar flattening on the shadow structure and the penumbra transitions. *Astronomy & Astrophysics*. 307. pp. 635–644.
  18. Picone M., Hedin A.E., Drob D.: *Naval Research Laboratory*. URL: <http://modelweb.gsfc.nasa.gov/atmos/nrlmsise00.html> (30.11.2015).
  19. Brumberg V.A. (2004) On relativistic equations of motion of an Earth satellite. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 88. pp. 209–225. doi: 10.1023/B:CELE.0000016821.33627.77
  20. Brumberg V.A., Ivanova T.V. (2007) Precession/nutation solution consistent with the general planetary theory. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 97(3). pp. 189–210. doi: 10.1007/s10569-006-9060-7
  21. Cincotta P.M., Simó C. (2000) Simple tools to study global dynamics in non-axisymmetric galactic potentials – I. *Astronomy and Astrophysics Supplement*. 147. pp. 205–228. doi: 10.1051/aas:2000108
  22. Cincotta P.M., Girdano C.M., Simo C. (2003) Phase space structure of multi-dimensional systems by means of the mean exponential growth factor of nearby orbits. *Physica D*. 182. pp. 151–178. doi: 10.1016/S0167-2789(03)00103-9
  23. Valk S., Delsate N., Lemaître A., Carletti T. (2009) Global dynamics of high area-to-mass ratios GEO space debris by means of the MEGNO indicator. *Advances in Space Research*. 43(7). pp. 1509–1526. doi: 10.1016/j.asr.2009.02.014
  24. Popandopulo N.A., Aleksandrova A.G., Bordovitsyna T.V. (2022) To the substantiation of a numerical-analytical method for revealing secular resonances. *Russian Physics Journal*. 65(6). pp. 959–965. doi: 10.1007/s11182-022-02719-w

25. Guillou A., Soule J.L. (1969) La resolution numerique des problèmes differentielles aux conditions initiales par des méthodes de collocation. *Modélisation Mathématique et Analyse Numérique – ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. 3(R3). pp. 17–44.
26. Wright K. (1970) Some relationships between implicit Runge-Kutta, collocation and Lanczos methods, and their stability propertie. *BIT Numerical Mathematics*. 10. pp. 217–227.
27. Hairer E., Norsett S. P., Wanner G. (2008) *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems*. Springer.
28. Hairer E., Lubich C., Wanner G. (2006) *Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*. Springer.

**Сведения об авторах:**

**Александрова Анна Геннадьевна** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник 50-го отдела Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: aleksandrovaannag@mail.ru

**Попандопуло Никита Андреевич** – младший научный сотрудник лаборатории 57 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: nikas.popandopulos@gmail.com

**Кучерявченко Никита Александрович** – младший научный сотрудник лаборатории 57 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: wallguet@gmail.com

**Авдюшев Виктор Анатольевич** – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории 57 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: scharmn@mail.ru

**Бордовицына Татьяна Валентиновна** – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории 57 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: bordovitsyna@mail.ru

**Information about the authors:**

**Aleksandrova Anna G.** (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: aleksandrovaannag@mail.ru

**Popandopulo Nikita A.** (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nikas.popandopulos@gmail.com

**Kucheryavchenko Nikita A.** (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: wallguet@gmail.com

**Avdyushev Viktor A.** (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: scharmn@mail.ru

**Bordovitsyna Tat'yana V.** (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bordovitsyna@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 11.05.2023; принята к публикации 04.12.2023*

*The article was submitted 11.05.2023; accepted for publication 04.12.2023*

Научная статья

УДК 532.522

doi: 10.17223/19988621/86/2

## Анализ режимов гравитационного осаждения капли

Владимир Афанасьевич Архипов<sup>1</sup>, Сергей Александрович Басалаев<sup>2</sup>,  
Ксения Григорьевна Перфильева<sup>3</sup>, Владимир Иванович Романдин<sup>4</sup>,  
Анна Сергеевна Усанина<sup>5</sup>

<sup>1, 2, 3, 4, 5</sup> Томский государственный университет, Томск, Россия

<sup>1</sup> leva@niipmm.tsu.ru

<sup>2</sup> tarm@niipmm.tsu.ru

<sup>3</sup> k.g.perfiljeva@yandex.ru

<sup>4</sup> romandin@niipmm.tsu.ru

<sup>5</sup> usaninaanna@mail.ru

**Аннотация.** Проведено численное исследование зависимости скорости осаждения капли воды в воздухе. Показано, что длина нестационарного участка траектории возрастает от 1 до 15 м при увеличении диаметра капель от 0.5 до 5.0 мм. Получена аппроксимационная зависимость для определения расстояния установления стационарного режима. Проведено экспериментальное исследование осаждения капель воды диаметром от 1.92 до 3.66 мм. Показано, что формула Клячко–Мазина для коэффициента сопротивления обеспечивает наиболее близкое соответствие расчетных и экспериментальных данных по скорости осаждения.

**Ключевые слова:** капля, твердая сферическая частица, гравитационное осаждение, режим осаждения, число Рейнольдса, коэффициент сопротивления, расстояние установления стационарного режима осаждения, экспериментальное исследование, численное исследование

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № FSWM-2020-0036.

**Для цитирования:** Архипов В.А., Басалаев С.А., Перфильева К.Г., Романдин В.И., Усанина А.С. Анализ режимов гравитационного осаждения капли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 21–34. doi: 10.17223/19988621/86/2

Original article

## Analysis of gravitational settling regimes for a drop

Vladimir A. Arkhipov<sup>1</sup>, Sergey A. Basalaev<sup>2</sup>, Kseniya G. Perfiljeva<sup>3</sup>,  
Vladimir I. Romandin<sup>4</sup>, Anna S. Usanina<sup>5</sup>

<sup>1, 2, 3, 4, 5</sup> Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

<sup>1</sup> leva@niipmm.tsu.ru

<sup>2</sup> [tarm@niipmm.tsu.ru](mailto:tarm@niipmm.tsu.ru)<sup>3</sup> [k.g.perfiljeva@yandex.ru](mailto:k.g.perfiljeva@yandex.ru)<sup>4</sup> [romandin@niipmm.tsu.ru](mailto:romandin@niipmm.tsu.ru)<sup>5</sup> [usaninaanna@mail.ru](mailto:usaninaanna@mail.ru)

**Abstract.** The results of a study on the gravitational settling of water drops with a diameter of 0.5 – 5 mm in air are presented. A new setup for studying the characteristics of drop setting is tested. To obtain reproducible drops and to measure their sizes, the Mariotte bottle and gravimetric method are presented as the most appropriate. For Weber numbers  $We < 1.6$ , the patterns of drop setting correspond to a solid spherical particle. It is shown that the length of the non-stationary section of the drop trajectory increases linearly from 1 to 15 m with increasing the drop diameter. The approximation dependence for the distance traveled to reach a stationary settling regime is obtained. It is shown that Klyachko–Mazin formula is the most adequate for determining the drag coefficient in the range of Reynolds numbers  $Re = 0.3 \div 700$ . The numerical calculation results are in quantitative and qualitative agreement with the experimental data.

**Keywords:** drop, solid spherical particle, gravitational settling, settling regime, Reynolds number, drag coefficient, distance travelled to attain a stationary settling regime, experimental study, numerical study

**Acknowledgments:** This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of state assignment (No. FSWM-2020-0036).

**For citation:** Arkhipov, V.A., Basalaev, S.A., Perfilieva, K.G., Romandin, V.I., Usanina, A.S. (2023) Analysis of gravitational settling regimes for a drop. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 21–34. doi: 10.17223/19988621/86/2

## Введение

В целом ряде природных и техногенных процессов важную роль играют закономерности гравитационного осаждения жидко-капельного аэрозольного облака. В качестве примеров можно привести образование атмосферных осадков [1], распространение токсичных компонентов при отделении отработанных ступеней жидкостных ракет-носителей [2], аварийный сброс авиационного топлива [3], авиационные технологии тушения пожаров [4, 5], капельно-дождевую эрозию почвы [6] и т.д.

При исследовании гравитационного осаждения совокупности частиц дисперсной фазы (капель, пузырьков, твердых частиц) необходимо различать режимы «продуваемого облака», «частично продуваемого облака» и «непродуваемого облака» [7]. При движении облака частиц в режиме «непродуваемого облака» внешняя дисперсионная среда полностью обтекает его. В этом случае частицы располагаются достаточно близко относительно друг друга (толщина пограничного слоя дисперсионной среды превышает расстояние между частицами). При осаждении системы частиц увлекается вся среда внутри этой системы и облако частиц движется как единое целое. При этом закономерности движения облака частиц подобны движению равнообъемного шара или тела другой формы. Наряду с поступательным движением облака в нем возникает циркуляция, сохраняющая его форму и размер. Наиболее сложным для исследования является режим «частично

продуваемого облака». В этом случае поток дисперсионной среды частично обтекает систему частиц и частично проходит сквозь нее. При этом возмущения потока за счет взаимодействия с соседними частицами могут вызывать различные вихревые течения, которые будут ускорять или замедлять движение системы частиц. Данный режим аналитически описать сложно. Для его анализа необходимо проводить либо численное моделирование, либо экспериментальное исследование. В режиме «продуваемого облака» расстояние между частицами велико (гидродинамическим взаимодействием между частицами можно пренебречь) и центр масс облака частиц движется со скоростью одиночной частицы из этого облака.

При моделировании режимов гравитационного осаждения жидко-капельного аэрозоля необходима информация о режимах осаждения отдельных одиночных капель, входящих в его состав. Из сравнения скоростей осаждения облака и отдельной капли можно судить о режиме осаждения облака капель.

Скорость осаждения одиночной капли определяется зависимостью коэффициента ее сопротивления от числа Рейнольдса. Обзор применяемых зависимостей для коэффициента сопротивления частиц, в том числе и капель, приведен в [8]. В технологиях авиационного тушения пожаров необходимо учитывать влияние вдува потока массы с поверхности испаряющейся капли и разность температур капли и среды. Эти эффекты рассмотрены в [9].

Цель настоящей статьи – анализ режимов гравитационного осаждения одиночной капли воды в воздухе в зависимости от ее размера и пройденного расстояния. Анализ режимов осаждения проводился путем сравнения результатов численного решения задачи и экспериментальных данных. Проведение данного анализа необходимо для выбора рабочих параметров модельных экспериментальных установок при исследовании динамики осаждения и испарения кластера капель применительно к технологии авиационного тушения пожаров.

### Оценка характеристик осаждения капли

Для расчетной оценки характеристик режимов гравитационного осаждения капли использовалось уравнение движения сферической частицы, в частности капли диаметром  $D$ , в среде с плотностью  $\rho$  под действием силы тяжести [10]

$$m \frac{du}{dt} = \frac{\pi D^3}{6} (\rho_p - \rho) g - C_D S_m \frac{\rho u^2}{2}, \quad (1)$$

где  $m = \rho_p \pi D^3 / 6$  – масса капли;  $\rho_p$  – плотность материала капли;  $u$  – скорость осаждения;  $t$  – время;  $g$  – ускорение свободного падения;  $C_D$  – коэффициент сопротивления;  $S_m = \pi D_m^2 / 4$  – площадь миделева сечения капли;  $D_m$  – диаметр миделева сечения деформированной капли.

Для определения диаметра миделева сечения капли, деформированной за счет взаимодействия со средой, использовалась зависимость, полученная численным решением задачи обтекания капли вязким потоком [11]:

$$D_m = kD = (1 + 0.027We) D. \quad (2)$$

Число Вебера рассчитывалось по формуле

$$We = \frac{\rho u^2 D}{\sigma},$$

где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Для твердой сферы  $D = D_m$ , при этом в зависимости (2) коэффициент  $k = 1$ .

Пренебрегая силой Архимеда, поскольку при осаждении капли в воздухе  $\rho \ll \rho_p$ , уравнение (1) можно представить в виде:

$$\frac{du}{dt} = g - Au^2, \quad (3)$$

где

$$A = Bk^2 C_D, \quad B = \frac{3}{4} \cdot \frac{\rho}{\rho_p D} = \text{const}.$$

Стационарная скорость осаждения капли (сила тяжести уравновешивается силой сопротивления) следует из уравнения (3) при  $du/dt = 0$ :

$$u_0 = \sqrt{g/A}. \quad (4)$$

С учетом (4) уравнение (3) примет вид:

$$\frac{du}{dt} = A(u_0^2 - u^2). \quad (5)$$

Основным параметром, определяющим режим осаждения капли, является коэффициент сопротивления  $C_D$ , который зависит от числа Рейнольдса  $Re = \rho u D / \mu$  ( $\mu = 1.81 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$  – коэффициент динамической вязкости воздуха). При обтекании капли потоком различают Стоксовский ( $Re < 0.3$ ), промежуточный ( $0.3 \leq Re \leq 700$ ) и автомодельный ( $Re > 700$ ) режимы. При проведении расчетов использовались следующие зависимости для коэффициента сопротивления [12]:

$$C_D = \begin{cases} \frac{24}{Re}, & Re < 0.3, \\ \frac{24}{Re} (1 + 0.167 Re^{2/3}), & 0.3 \leq Re \leq 700, \\ 0.44, & Re > 700. \end{cases} \quad (6)$$

$$(7)$$

$$(8)$$

Для зависимости  $C_D(Re)$  в промежуточном режиме используется целый ряд теоретических и эмпирических формул [8, 13, 14]. В настоящей работе использовалась формула Клячко–Мазина (7).

Численным решением уравнения (5) с начальным условием  $u = 0$  при  $t = 0$  и с учетом зависимостей (2), (6)–(8) получены закономерности скорости осаждения капель воды диаметром от 0.5 до 5.0 мм в воздухе ( $\rho = 1.205 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_p = 1000 \text{ кг/м}^3$ ).

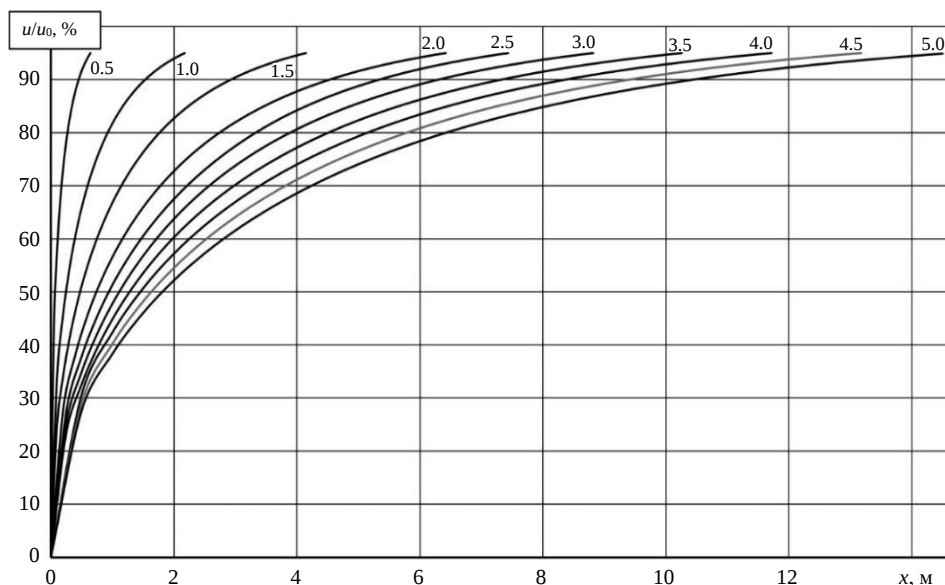
Результаты расчетов зависимостей относительных скоростей осаждения  $u/u_0$ , графики которых приведены на рис. 1, показывают, что скорость осаждения монотонно увеличивается от нуля и асимптотически приближается к стационарному режиму  $u_0$ . Цифрами на графиках, приведенных на рис. 1, указаны диаметры капель (мм).

Рассчитанные значения стационарной скорости осаждения капель для исследуемого диапазона их размеров аппроксимировались зависимостью

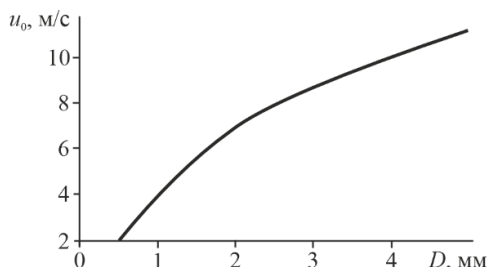
$$u_0 = 0.51 + 3.73D - 0.33D^2, \quad (9)$$

где  $[u] = \text{м/с}$ ,  $[D] = \text{мм}$ .

График зависимости (9) приведен на рис. 2.



**Рис. 1.** Зависимости относительной скорости  $u/u_0$  от пройденного каплей расстояния  $x$   
**Fig. 1.** Relative velocity  $u/u_0$  as a function of distance  $x$  traveled by a drop



**Рис. 2.** Зависимость стационарной скорости  $u_0$  от диаметра капли  
**Fig. 2.** Stationary velocity  $u_0$  as a function of the drop diameter

Для оценки параметров экспериментальных установок, обеспечивающих исследование осаждения капель в стационарном режиме, по результатам численных расчетов уравнения движения капли была получена аппроксимационная зависимость пройденного каплей расстояния  $x$  от ее диаметра до момента достижения значения скорости, равного  $u = 0.95 u_0$ :

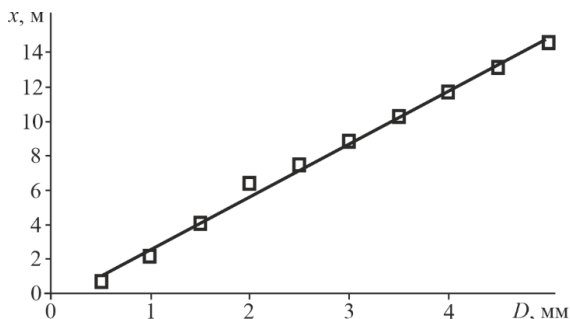
$$x = 3.07D - 0.51, \quad (10)$$

где  $[x] = \text{м}$ ,  $[D] = \text{мм}$ .

График зависимости (10) приведен на рис. 3.

Достаточно крупные капли при осаждении быстро переходят в автомоделный режим, для которого  $C_D = 0.44 = \text{const}$ . При этом уравнение (5) имеет аналитическое решение, которое при  $k = 1$  имеет вид:

$$\frac{1}{2u_0} \ln \left| \frac{u_0 + u}{u_0 - u} \right| = At. \quad (11)$$



**Рис. 3.** Зависимость пройденного каплей расстояния от ее диаметра до момента достижения скорости  $u = 0.95u_0$

**Fig. 3.** Dependence of the distance traveled by the drop on its diameter until the velocity  $u = 0.95u_0$  is reached

Из (11) следует зависимость скорости капли от времени:

$$u = u_0 \frac{\exp(2u_0 At) - 1}{\exp(2u_0 At) + 1} = u_0 \cdot \text{th}(u_0 At). \quad (12)$$

Время  $t_*$  достижения скорости  $u = 0.95u_0$ , равно

$$t_* = \frac{1}{2Au_0} \ln \left| \frac{u_0 + u}{u_0 - u} \right| = \frac{\ln(1.95/0.05)}{2Au_0} = \frac{\ln 39}{2g} u_0. \quad (13)$$

Расстояние, пройденное каплей до достижения скорости  $u = 0.95 u_0$ , равно

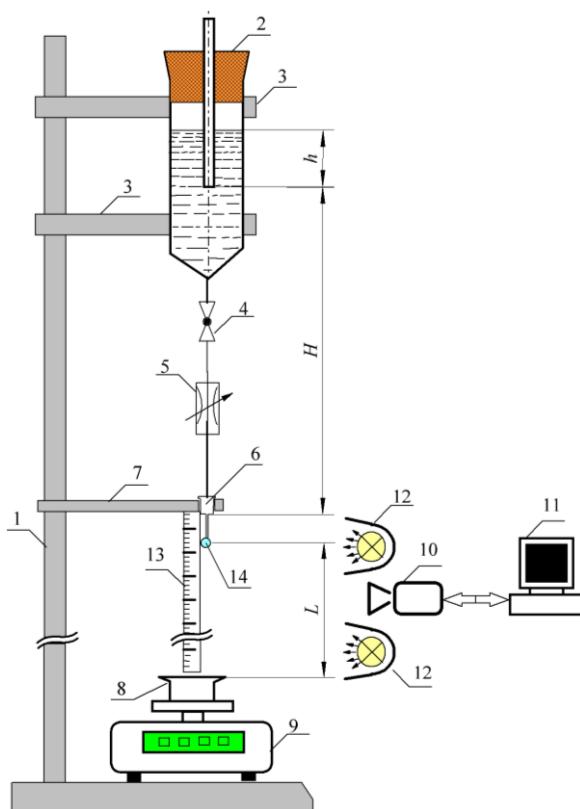
$$x = \int_0^{t_*} u dt = u_0 \int_0^{t_*} \text{th}(u_0 At) dt = u_0 \ln \left( \frac{\exp(u_0 At_*) + \exp(-u_0 At_*)}{2} \right) t_*. \quad (14)$$

Расчеты по аналитическим зависимостям (12)–(14) хорошо согласуются с результатами численного решения задачи.

### Экспериментальное исследование

Для определения размера и скорости осаждения капли разработана экспериментальная установка, схема которой представлена на рис. 4.

Установка включает систему подачи жидкости и систему визуализации процесса. Система подачи воды состоит из сосуда Мариотта 2 с исследуемой жидкостью, жестко закрепленного с помощью крепежных кронштейнов 3 на штативе 1. Сосуд Мариотта 2 выполнен в виде герметично закрытой емкости, в верхней части которой установлена полая, открытая с обоих концов трубка. Один конец трубки погружен в жидкость на определенную глубину  $h$ , а другой находится вне емкости и сообщается с атмосферой. Данное устройство позволяет добиться равномерного истечения жидкости благодаря постоянному давлению [15]. Внутренняя полость сосуда Мариотта 2 соединена через запорный вентиль 4 и регулировочный дроссель 5 с инъекционной иглой 6, зафиксированной с помощью крепежа 7 на штативе 1. В нижней части установки размещена приемная емкость 8, установленная на аналитических лабораторных весах 9 марки ВК-150.1 с погрешностью  $\pm 10$  мг. Для определения пройденного каплей расстояния в плоскости осаждения расположена масштабная линейка 13 с ценой деления 1 мм.



**Рис. 4.** Схема экспериментальной установки:

1 – штатив; 2 – сосуд Мариотта; 3 – крепежные кронштейны; 4 – запорный вентиль; 5 – регулировочный дроссель; 6 – игла инъекционная; 7 – крепеж; 8 – приемная емкость; 9 – весы; 10 – высокоскоростная видеокамера; 11 – компьютер; 12 – система подсветки; 13 – масштабная линейка; 14 – капля

**Fig. 4.** Experimental setup design:

(1) support stand; (2) Mariotte bottle; (3) mounting brackets; (4) shut-off valve; (5) adjusting throttle; (6) injection needle; (7) fasteners; (8) receiving container; (9) scales; (10) high-speed video camera; (11) computer; (12) lighting system; (13) scale bar; and (14) drop

Визуализация процесса осаждения капли проводилась скоростной видеокамерой 10 марки MER2-502-79U3C с темпом съемки 450 кадров в секунду, подключенной к компьютеру 11. Система подсветки 12 состояла из стальной пластины с десятью равномерно установленными по длине светодиодными матрицами с напряжением 12 В и мощностью 10 Вт, подключенными к блоку питания.

Особое внимание при проведении эксперимента было уделено снижению погрешности расчетных и экспериментальных данных. В частности, при расчете плотности воздуха, входящей в уравнение движения капли, использовалась формула

$$\rho = 1.205 \cdot \frac{p}{760} \cdot \frac{293}{T},$$

где  $p$  – давление воздуха, мм рт. ст.;  $T$  – температура окружающей среды, К. Давление и температура воздуха измерялись непосредственно до и после эксперимента с помощью барометра-анероида МД-49-2 с погрешностью  $\pm 0.8$  мм рт. ст. и термометра ртутного стеклянного лабораторного с погрешностью  $\pm 0.1^\circ\text{C}$  соответственно.

Значение ускорения свободного падения рассчитывалось для реальной географической широты г. Томска ( $\varphi \approx 56.5$  град) и составляло  $g = 9.78034 + 0.0516403 \cdot \sin^2(\varphi) \approx 9.816$  м/с<sup>2</sup>.

Для уточнения и выбора оптимальной методики нахождения диаметра образующихся капель в кластере проведены работы по определению исходного диаметра  $D$  одиночной капли дистиллированной воды. Определение исходного диаметра капли проведено тремя способами. Первый способ основан на законе Тейта [16]. В соответствии с законом Тейта критическим условием отрыва капли от иглы является равенство сил тяжести и поверхностного натяжения, действующих на каплю:

$$mg = z\pi\sigma d_n, \quad (15)$$

где  $z$  – корректирующий коэффициент, который зависит от соотношения  $d_n/D$ ;  $\sigma = 72.5$  мН/м.

Подставляя в (15) формулу для массы сферической капли  $m$ , получим формулу для расчета диаметра капли

$$D = \sqrt[3]{\frac{6d_n\sigma z}{\rho_p g}}. \quad (16)$$

Второй способ заключается в определении массы  $m$  набора из  $N = 100$  капель и расчете диаметра капли по формуле

$$D = \sqrt[3]{\frac{6m}{\pi N \rho_p}}. \quad (17)$$

Третий способ заключается в видеосъемке процесса образования, отрыва капли от иглы и определении диаметра капли по полученным видеокадрам на экспериментальной установке (см. рис. 4). Видеосъемка проведена с помощью скоростной видеокамеры 10 для четырех значений диаметра игл. В качестве примера на рис. 5 приведена фотография капли воды после ее отрыва от иглы с наружным диаметром 0.6 мм.

В таблице представлены результаты определения диаметра одиночной капли дистиллированной воды методом Тейта, взвешиванием и с помощью видеосъемки. Методом Тейта диаметр капли определялся по формуле (16), методом взвешивания по формуле (17). Средние значения диаметра капли при обработке видеок кадров, получены по трем дублирующим опытам.



Рис. 5. Фотография капли дистиллированной воды

Fig. 5. Photograph of a distilled water drop

### Результаты определения диаметра одиночной капли

| Инъектор | $d_{\text{вн}}, \text{ мм}$ | $d_{\text{н}}, \text{ мм}$ | $D, \text{ мм}$ |               |       |
|----------|-----------------------------|----------------------------|-----------------|---------------|-------|
|          |                             |                            | весовой         | видео         | Тейта |
| 30 G     | 0.16                        | 0.31                       | $1.92 \pm 0.01$ | $2.2 \pm 0.2$ | 2.04  |
| 23 G     | 0.34                        | 0.64                       | $2.61 \pm 0.01$ | $2.6 \pm 0.3$ | 2.60  |
| 21 G     | 0.51                        | 0.82                       | $2.88 \pm 0.01$ | $2.9 \pm 0.3$ | 2.82  |
| 16 G     | 1.19                        | 1.65                       | $3.66 \pm 0.04$ | $3.7 \pm 0.4$ | 3.57  |

Сравнительный анализ полученных результатов по определению диаметра одиночной капли тремя способами показал, что наиболее точное определение диаметра капль обеспечивает весовой метод (погрешность не более 1%). Существенный разброс результатов измерений диаметра капли методом видеосъемки связан с незначительными колебаниями формы капли в процессе ее гравитационного осаждения. Для повышения точности этого метода необходимо проведение многоракурсной видеосъемки. Метод Тейта может быть рекомендован для оценки размеров капль (расхождение с экспериментом не более 5%).

Проведены экспериментальные исследования по уточнению скорости осаждения одиночной капли на экспериментальной установке (см. рис. 4). Скорость осаждения одиночной капли дистиллированной воды определялась по полученным видеокдрам ее гравитационного осаждения в воздухе на разных расстояниях от места отрыва капли. Данные с видеокамеры 10 обрабатывались в программе CorelDRAW с целью определения расстояния  $x$ , пройденного каплей за время  $t$ . Полученные данные представлены в виде зависимости  $x(t)$  и аппроксимировали степенной функцией (с коэффициентом детерминации  $R^2 = 0.99$ )

$$x(t) = a \cdot t^b.$$

После дифференцирования  $x(t)$  получены значения скорости осаждения капли

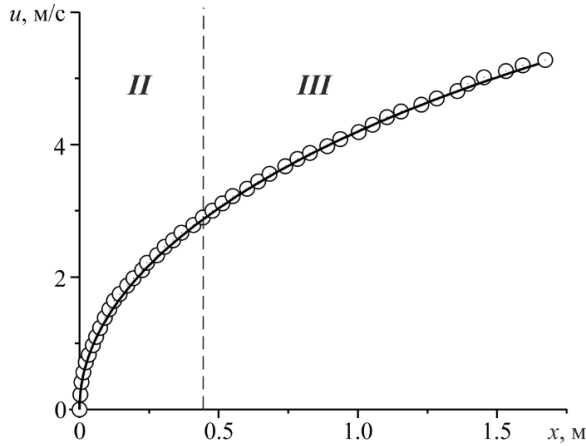
$$u = \frac{dx}{dt}.$$

Погрешность определения скорости осаждения капли определялась разрешающей способностью видеокамеры и не превышала  $\sim (2 \div 2.5)\%$ .

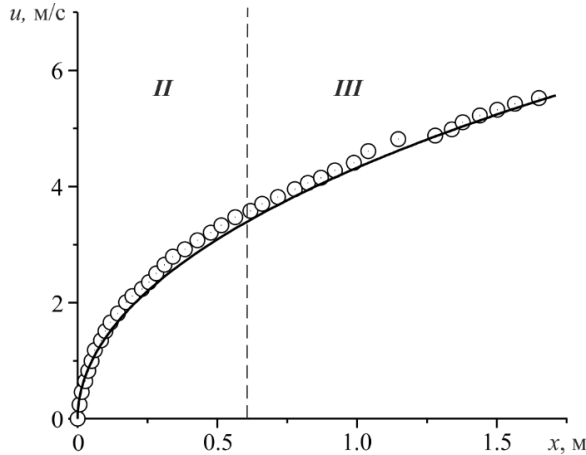
В результате исследования получены экспериментальные и расчетно-теоретические зависимости скорости осаждения от пройденного расстояния для капль дистиллированной воды диаметром 1.92, 2.61, 2.88, 3.66 мм. В качестве типичной зависимости на рис. 6 приведен график  $u(x)$  для капли диаметром 3.66 мм. Расчеты проводились для условий проведенных экспериментов (измеренные значения давления и температуры окружающего воздуха). Дополнительно представлены результаты по скорости осаждения одиночного алюминиевого шарика ( $D = 3.13 \text{ мм}$ ,  $m = 0.044 \text{ г}$ ,  $\rho_p = 2740 \text{ кг/м}^3$ ) в зависимости от пройденного расстояния (рис. 7). На рис. 6, 7 цифрами обозначены области режимов осаждения – промежуточного II ( $Re \leq 700$ ) и автомодельного III ( $Re > 700$ ). Из приведенных экспериментальных данных (см. рис. 6, 7) следует, что на исследованном участке осаждения ( $x = 1.5 \text{ м}$ ) капля и алюминиевый шарик движутся в нестационарном режиме (с переменной скоростью осаждения).

Сравнение результатов по скорости осаждения капль показало, что отклонение расчетных и экспериментальных данных для капль диаметром 1.92 и 3.66 мм не превышает погрешности измерений. Из этого следует, что выбранные зависи-

висимости для коэффициента сопротивления (6)–(8) адекватно описывают процесс осаждения каплей в исследованном диапазоне чисел Рейнольдса.



**Рис. 6.** Численная и экспериментальная (точки) зависимости скорости осаждения капли  $D = 3.66$  мм в воздухе  
**Fig. 6.** Numerical and experimental (circles) dependences of the settling velocity of the drop with a diameter of  $D = 3.66$  mm in air

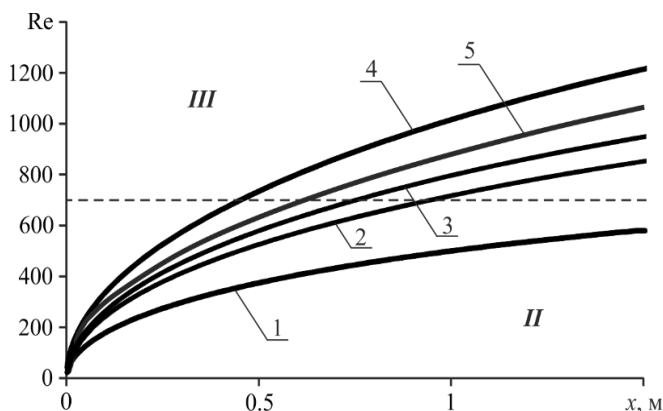


**Рис. 7.** Численная и экспериментальная (точки) зависимости скорости осаждения алюминиевого шарика в воздухе  
**Fig. 7.** Numerical and experimental (circles) dependences of the settling velocity of an aluminum ball in air

На рис. 8 представлены зависимости числа Рейнольдса от расстояния, пройденного каплями дистиллированной воды и алюминиевым шариком. Цифрами обозначены области режимов осаждения – промежуточного II ( $Re \leq 700$ ) и авто-модельного III ( $Re > 700$ ).

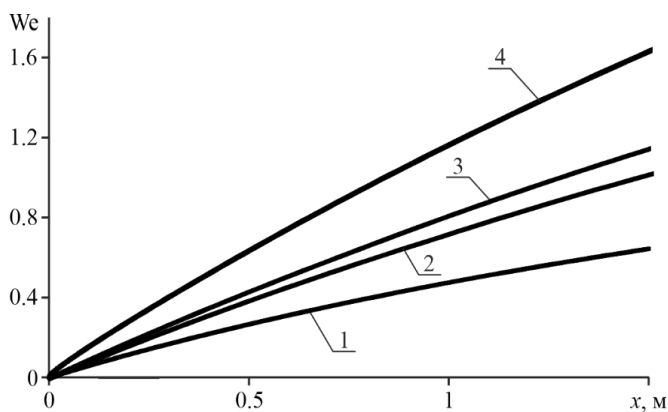
Сравнение зависимостей  $u(x)$  для капель и алюминиевого шарика показало, что использованный для расчетов коэффициент сопротивления сферической ча-

стицы полностью отражает динамику осаждения как твердой сферы (шарика), так и капель в диапазоне размеров от 1.92 до 3.66 мм.



**Рис. 8.** Зависимости числа Рейнольдса от расстояния, пройденного каплями дистиллированной воды и алюминиевым шариком: 1 –  $D = 1.92$  мм, 2 –  $D = 2.61$  мм, 3 –  $D = 2.88$  мм, 4 –  $D = 3.66$  мм, 5 – алюминиевый шарик  $D = 3.13$  мм

**Fig. 8.** The Reynolds number as a function of the distance traveled by distilled water drops and aluminum ball:  $D = (1)1.92$ , (2) 2.61, (3) 2.88, (4) 3.66, and (5) 3.13 mm (aluminum ball)



**Рис. 9.** Зависимости числа Вебера от расстояния, пройденного каплями дистиллированной воды: 1 –  $D = 1.92$  мм, 2 –  $D = 2.61$  мм, 3 –  $D = 2.88$  мм, 4 –  $D = 3.66$  мм

**Fig. 9.** The Weber number as a function of the distance traveled by the distilled water drop:  $D = (1)1.92$ , (2) 2.61, (3) 2.88, and (4) 3.66 mm

Для оценки влияния возможной деформации капель проведены расчеты зависимости числа Вебера от расстояния, пройденного каплями дистиллированной воды (рис. 9). Из полученных результатов следует, что на расстоянии  $x \leq 1.5$  м значение числа Вебера не превышает  $We = 1.6$ . С учетом формулы (2) максимальное отклонение диаметра миделева сечения капли от ее начального диаметра не превышало 4%.

### Заключение

На основе полученных экспериментальных данных и результатов численных расчетов по гравитационному осаждению одиночной капли можно сделать следующие выводы.

1. По результатам численного исследования динамики осаждения одиночной капли воды в воздухе получена аппроксимационная зависимость для расстояния установления стационарного режима осаждения, величина которого линейно возрастает от 1 до 15 м при увеличении диаметра капель от 0.5 до 5 мм.

2. Экспериментально показано, что для получения воспроизводимых капель с контролируемым диаметром наиболее точным является использование сосуда Мариотта для формирования капель и весовой метод для определения их диаметра с погрешностью не более 1%.

3. Показано, что расчетные данные по скорости осаждения капли наиболее близко соответствуют экспериментальным при использовании в расчетах формулы Клячко–Мазина для формулы сопротивления в промежуточном режиме движения капли в диапазоне чисел Рейнольдса от 0.3 до 700.

4. В диапазоне чисел Вебера до 1.6 динамика осаждения капли соответствует динамике осаждения твердой сферы, что объясняется отсутствием значительной деформации капли в исследуемых режимах осаждения.

5. Полученные результаты исследований могут быть использованы при выборе параметров экспериментальных установок для исследования физических процессов в жидко-капельных средах, в частности в процессах испарения капель.

### Список источников

1. Карлин Л.Н., Матвеев Л.Т. Об основных факторах образования атмосферных осадков // Ученые записки Российского государственного гидрометеорологического университета. 2006. № 2. С. 65–69.
2. Архипов В.А., Жарова И.К., Козлов Е.А., Ткаченко А.С. Прогнозирование экологических последствий распространения облака токсичных аэрозолей в районах падения отработанных ступеней ракет-носителей // Оптика атмосферы и океана. 2015. Т. 28, № 1. С. 89–93.
3. Ткаченко А.С., Жарова И.К., Козлов Е.А. Эволюция облака капель при аварийном сбросе авиационного топлива // Известия вузов. Физика. 2013. Т. 56, № 9/3. С. 210–212.
4. Подрезов Ю.В. Особенности применения и разработки современных авиационных средств борьбы с лесными пожарами // Проблемы безопасности и чрезвычайных ситуаций. 2019. № 2. С. 46–50.
5. Хасанов И.Р., Орлов О.И. Эффективность экранирующей способности распыленной воды при пожаре // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 60. С. 132–140. doi: 10.17223/19988621/60/10
6. Зверьков М.С. Совершенствование способов мониторинга капельно-дождевой эрозии почв в условиях Нечерноземной зоны Российской Федерации : дис. ... канд. техн. наук. М., 2015.
7. Фукс Н.А. Механика аэрозолей. М. : Изд-во АН СССР, 1955.
8. Келбашев Г.И. Коэффициенты сопротивления твердых частиц, капель и пузырей различной формы // Теоретические основы химической технологии. 2011. Т. 45, № 3. С. 264–283.
9. Архипов В.А., Антонникова А.А., Басалаев С.А., Перфильева К.Г. Методы измерения коэффициента сопротивления сферической частицы в нестандартных условиях // Оптика атмосферы и океана. 2019. Т. 32, № 6. С. 495–499. doi: 10.15372/AOO20190613
10. Архипов В.А., Васенин И.М., Шрагер Г.Р., Усанина А.С. Динамическое взаимодействие частиц дисперсной фазы в гетерогенных потоках. Томск : Изд. Дом Том. гос. ун-та, 2019. 330 с.

11. Бутов В.Г., Васенин И.М., Шрагер Г.Р. Деформация капли в вязком потоке и условия существования ее равновесной формы // Прикладная математика и механика. 1982. Т. 46, № 6. С. 1045-1049.
12. Нугматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М. : Наука, 1987. Ч. 1.
13. Шилиев М.И., Шилиев А.М. Аэродинамика и теплообмен газодисперсных потоков. Томск : Изд-во Том. гос. арх.-строит. ун-та, 2013. 272 с.
14. Терехов В.И., Пахомов М.А. Тепломассообмен и гидродинамика в газодисперсных потоках. Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2008. 284 с.
15. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Механика сплошных сред. М. : Изд-во ФФ МГУ, 1998.
16. Адамсон А. Физическая химия поверхностей. М. : Мир, 1979.

## References

1. Karlin L.N., Matveev L.T. (2006) Ob osnovnykh faktorakh obrazovaniya atmosferykh osadkov [On the major factors of atmospheric precipitation formation]. *Uchenye zapiski Rossiyskogo gosudarstvennogo gidrometeorologicheskogo universiteta*. 2. pp. 65–69.
2. Arkhipov V.A., Zharova I.K., Kozlov E.A., Tkachenko A.S. (2015) Prognozirovaniye ekologicheskikh posledstviy rasprostraneniya oblaka toksichnykh aerorozley v rayonakh padeniya otrabotannykh stupeney raket-nositeley [Prediction of ecological consequences of toxic aerosol clouds spreading in the fall areas of waste booster stages]. *Optika atmosfery i okeana – Atmospheric and Oceanic Optics*. 28(1). pp. 89–93.
3. Tkachenko A.S., Zharova I.K., Kozlov E.A. (2013) Evolyutsiya oblaka kapel' pri aviatsionnom sbroze aviatsionnogo topliva [Evolution of a droplet cloud during an emergency jet fuel release]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 56(9/3). pp. 210–212.
4. Podrezov Yu.V. (2019) Osobennosti primeneniya i razrabotki sovremennykh aviatsionnykh sredstv bor'by s lesnymi pozharemi [Features of the application and development of advanced aircrafts fighting forest fires]. *Problemy bezopasnosti i chrezvychaynykh situatsiy – Safety and Emergencies Problems*. 2. pp. 46–50.
5. Khasanov I.R., Orlov O.I. (2019) Effektivnost' ekraniruyushchey sposobnosti raspylennoy vody pri pozhare [Efficiency of the screening capacity of sprayed water during a fire]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 60. pp. 132–140. doi: 10.17223/19988621/60/10
6. Zverkov M.S. (2015) Sovershenstvovanie sposobov monitoringa kapel'no-dozhdevoy erozii pochv v usloviyakh nechernozemnoy zony Rossiyskoy Federatsii [Improving methods for monitoring rain-drop soil erosion within a non-chernozem belt of the Russian Federation]. Dissertation.
7. Fuks N.A. (1955) *Mekhanika aerorozley* [Mechanics of aerosols]. Moscow: Izdatel'stvo AN SSSR.
8. Kelbaliev G.I. (2011) Koeffitsienty soprotivleniya tverdykh chastits, kapel' i puzыrey razlichnoy formy [Drag coefficients of solid particles, droplets, and bubbles of various shapes]. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii – Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 45(3). pp. 264–283.
9. Arkhipov V.A., Antonnikova A.A., Basalaev S.A., Perfilieva K.G. (2019) Metody izmereniya koeffitsienta soprotivleniya sfericheskoy chastitsy v nestandartnykh usloviyakh [Technique for measurements of the drag coefficient of a spherical particle in nonstandard conditions]. *Optika atmosfery i okeana – Atmospheric and Oceanic Optics*. 32(6). pp. 495–499. doi: 10.15372/AOO20190613
10. Arkhipov V.A., Vasenin I.M., Shragher G.R., Usanina A.S. (2019) *Dinamicheskoe vzaimodeystvie chastits dispersnoy fazy v geterogennykh potokakh* [Dynamic interaction between particles of the dispersed phase in heterogeneous flows]. Tomsk: Izdatel'skiy dom Tomskogo gosudarstvennogo universiteta.

11. Butov V.G., Vasenin I.M., Shrager G.R. (1982) Deformatsiya kapli v vyazkom potoke i usloviya sushchestvovaniya eyo ravновесной формы [Deformation of a drop in a viscous flow and conditions for the existence of its equilibrium shape]. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 46(6). pp. 1045–1049.
12. Nigmatulin R.I. (1990) *Dynamics of Multiphase Medium*. Volume 1. New York: Hemisphere Publishing Corporation.
13. Shilyaev M.I., Shilyaev A.M. (2013) *Aerodinamika i teplomassoobmen gazodispersnykh potokov* [Aerodynamics and heat and mass transfer of gas-dispersed flows]. Tomsk: Izdatel'stvo Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta.
14. Terekhov V.I., Pakhomov M.A. (2008) *Teplomassoperenos i gidrodinamika v gazo-kapel'nykh potokakh* [Heat and mass transfer and hydrodynamics in gas-droplet flows]. Novosibirsk: Izdatel'stvo NGTU.
15. Aleshkevich V.A., Dedenko L.G., Karavaev V.A. (1998) *Mekhanika sploshnykh sred* [Continuum mechanics]. Moscow: Izdatel'stvo FF MGU.
16. Adamson A. (1979) *Fizicheskaya khimiya poverkhnostey* [Physical chemistry of surfaces]. Moscow: Mir.

**Сведения об авторах:**

**Архипов Владимир Афанасьевич** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом газовой динамики и физики взрыва Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: leva@niipmm.tsu.ru

**Басалаев Сергей Александрович** – кандидат физико-математических наук, инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: tarm@niipmm.tsu.ru

**Перфильева Ксения Григорьевна** – кандидат физико-математических наук, инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: k.g.perfiljeva@yandex.ru

**Романдин Владимир Иванович** – научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: romandin@niipmm.tsu.ru

**Усанина Анна Сергеевна** – кандидат физико-математических наук, инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: usaninaanna@mail.ru

**Information about the authors:**

**Arkhipov Vladimir A.** (Doctor of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: leva@niipmm.tsu.ru

**Basalaev Sergey A.** (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tarm@niipmm.tsu.ru

**Perfilieva Kseniya G.** (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: k.g.perfiljeva@yandex.ru

**Romandin Vladimir I.** (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: romandin@niipmm.tsu.ru

**Usanina Anna S.** (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: usaninaanna@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 16.11.2023; принята к публикации 04.12.2023*

*The article was submitted 16.11.2023; accepted for publication 04.12.2023*

Научная статья

УДК 536.2; 544.012

doi: 10.17223/19988621/86/3

## Аналитические модели теплопроводности в двухфазных дисперсных средах. 1. Теоретические исследования

Борис Владимирович Бошенятов<sup>1</sup>, Анатолий Алексеевич Глазунов<sup>2</sup>,  
Александр Николаевич Ищенко<sup>3</sup>, Юлия Николаевна Карнет<sup>4</sup>

<sup>1,4</sup> *Институт прикладной механики Российской академии наук, Москва, Россия*

<sup>2,3</sup> *Томский государственный университет, Томск, Россия*

<sup>1</sup> *bosbosh@mail.ru*

<sup>2</sup> *gla@niipmm.tsu.ru*

<sup>3</sup> *ichan@niipmm.tsu.ru*

<sup>4</sup> *iam@iam.ras.ru*

**Аннотация.** В математически строгой постановке, используя классические уравнения гидродинамики, рассмотрен стационарный процесс молекулярного теплопереноса в двухфазных дисперсных средах повышенной концентрации. На основе решения краевой задачи для  $N$ -частичной дисперсной среды с учетом дистанционного взаимодействия частиц установлена область применимости теоретических моделей теплопроводности, которые не учитывают взаимодействие частиц. Получена аналитическая зависимость для эффективного коэффициента теплопроводности в структурно-симметричных дисперсных средах, в которых нельзя четко выделить непрерывную компоненту.

**Ключевые слова:** дисперсные среды, композитные материалы, взаимодействие дисперсных частиц, уравнение Лапласа, эффективный коэффициент теплопроводности

**Благодарности:** Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (госзадание № 121112200122-7, госзадание FSWM-2020-0032).

**Для цитирования:** Бошенятов Б.В., Глазунов А.А., Ищенко А.Н., Карнет Ю.Н. Аналитические модели теплопроводности в двухфазных дисперсных средах. 1. Теоретические исследования // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 35–54. doi: 10.17223/19988621/86/3

Original article

## Analytical models of thermal conductivity in two-phase dispersive media. 1. Theoretical study

Boris V. Boshenyatov<sup>1</sup>, Anatoliy A. Glazunov<sup>2</sup>,  
Aleksandr N. Ishchenko<sup>3</sup>, Yuliya N. Karnet<sup>4</sup>

<sup>1,4</sup> *Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

<sup>2,3</sup> *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

<sup>1</sup> *bosbosh@mail.ru*

<sup>2</sup> gla@niipmm.tsu.ru<sup>3</sup> ichan@niipmm.tsu.ru<sup>4</sup> iam@iam.ras.ru

**Abstract.** It is traditionally believed that various theories and formulas for averaging (homogenization) the properties of inhomogeneous dispersive media, which do not take into account the distance interaction of dispersed particles, are applicable only at low volume concentrations of particles  $0 < f_2 < 0.1$ . The molecular heat transfer in two-phase dispersive media, both with and without allowance for the interaction of identical spherical particles, is considered in a mathematically rigorous formulation using the method of physical analogy and the concept of the Lorentz local field. It is shown that with an increase in the volume concentration of dispersed particles, the main influence on the effective thermal conductivity coefficient of the medium is exerted by a geometric constraint factor of the carrier phase, which is taken into account by the classical Maxwell's (Clausius–Mossotti) formula. The analytical dependences of the error in the Maxwell's formula, due to the neglected interaction of particles, on the concentration  $f_2$  of the particles and the relative thermal conductivity of phases  $\lambda_2/\lambda_1$  are obtained. Two corollaries from the Maxwell's formula are derived. The first corollary determines the exact boundaries enclosing the effective thermal conductivity coefficients of homogeneous and isotropic suspensions. They coincide with the known Hashin–Shtrikman bounds. The second corollary gives an exact solution that is invariant with respect to the phase inversion transformation. This solution is used to calculate the effective thermal conductivity coefficient in three-dimensional disordered structurally symmetric two-phase media.

**Keywords:** dispersive media, composite materials, interaction of dispersed particles, Laplace's equation, effective thermal conductivity coefficient

**Acknowledgments:** This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (state order No. 121112200122-7).

**For citation:** Boshenyatov, B.V., Glazunov, A.A., Ishchenko, A.N., Karnet, Yu.N. (2023) analytical models of thermal conductivity in two-phase dispersive media. 1. Theoretical study. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 35–54. doi: 10.17223/19988621/86/3

## Введение

Дисперсные среды (суспензии, эмульсии, композитные материалы и др.) широко распространены в природе и промышленном производстве [1–3]. Однако математическое описание законов движения [4–6] и определение физических характеристик таких сред, в особенности при повышенных концентрациях дисперсной фазы [7–9], до сих пор являются одними из наиболее сложных проблем физики и механики. Дело в том, что при этом необходимо учитывать дистанционное взаимодействие частиц, так называемое гидродинамическое взаимодействие [10–12].

Гидродинамическое взаимодействие возникает из-за того, что каждая дисперсная частица при движении генерирует в окружающей жидкости соответствующее поле скоростей. При повышенной концентрации дисперсной фазы частицы взаимодействуют друг с другом посредством этих гидродинамических полей возмущений; таким образом, движение каждой частицы зависит не только

от координат, но и от скоростей окружающих ее дисперсных частиц [12–14]. Для определения усредненных, эффективных характеристик (гомогенизации) такой дисперсной среды в строгой постановке необходимо вначале найти ее локальные характеристики, т.е. решить задачу о динамике  $N$  частиц, произвольным образом расположенных в пространстве, с учетом их гидродинамического взаимодействия. Эффективные характеристики дисперсной среды получают последующим усреднением локальных характеристик. Первая задача оказалась чрезвычайно сложной, поскольку является разновидностью известной в науке фундаментальной проблемы многих тел, которая до сих пор не имеет общего решения. Достаточно сказать, что первые работы [15–17], в которых удалось в первом приближении по концентрации учесть гидродинамическое взаимодействие сферических частиц [18], появились лишь приблизительно через 100 лет после создания теории электропроводности и вязкости разреженной суспензии, в которой взаимодействием дисперсных частиц можно пренебречь [19, 20].

Следует отметить, что аналог гидродинамического взаимодействия имеет место и при взаимном влиянии полей возмущений иной физической природы, создаваемых дисперсными частицами в окружающей дисперсионной жидкости (или матрице), например тепловых или электромагнитных полей, в том числе при взаимодействии дисперсных частиц в жестких структурах – кластерах [21], и композитных материалах [22]. Так, в диэлектриках из композитного материала в локальное электрическое поле, действующее на каждую частицу, дополнительный вклад будет давать поляризация дисперсных частиц, находящихся по соседству, которая зависит от их формы, ориентации и пространственной структуры композита.

Как правило, задача о гидродинамическом взаимодействии (или аналогичном взаимодействии других полей) решается прямыми численными расчетами [23] или статистическими методами [3] с последующим вычислением на ЭВМ сложных интегралов, в приближении идеальной ( $Re \gg 1$ ) или вязкой несжимаемой жидкости при числах Рейнольдса  $Re \ll 1$  [24, 25].

Решение задачи о динамике  $N$  взаимодействующих сферических частиц в строгой математической постановке впервые было получено в работах [26, 27] на основе разработанного под руководством академика В.В. Струминского метода самосогласованного поля. Построенный метод позволяет, используя классические уравнения гидродинамики, получать аналитические решения разных классов задач (осаждение свободных частиц, движение тел в дисперсной среде, движение жестких кластерных структур в жидкости и др.) с учетом взаимодействия частиц без использования каких бы то ни было допущений эвристического характера.

В данной работе рассмотрен стационарный процесс молекулярного теплопереноса в двухфазных дисперсных средах в математически строгой постановке, с использованием единого подхода, основанного на концепции локального поля Лоренца и методе физической аналогии, пригодного для решения задач как без учета, так и с учетом взаимодействия сферических дисперсных частиц.

Преимуществом данного метода являются его универсальность и представление конечного результата в виде простых аналитических формул, не требующих сложных вычислительных процедур на ЭВМ для каждого конкретного случая. Универсальность метода обеспечивается тем, что при феноменологическом подходе не рассматриваются конкретные механизмы теплопереноса на молекуляр-

ном уровне (коэффициенты теплопроводности в каждой из двух фаз заданы), поэтому метод пригоден для описания теплопроводности в любых дисперсных средах независимо от агрегатного состояния фаз: суспензиях, эмульсиях, композитах, аэрозолях и др.

Во второй части исследования достоверность полученных в данной работе теоретических результатов подтверждается сравнением с экспериментами.

### Макроскопическая модель теплопроводности в двухфазных дисперсных средах

Вначале рассмотрим в наиболее общем виде двухфазную дисперсную среду ( $i = 1, 2$ ), состоящую из однородных и изотропных фаз с известными коэффициентами молекулярной теплопроводности  $\lambda_i$ , Дж/мс К. Каждая фаза занимает свой неизменный объем и может находиться в любом из трех агрегатных состояний. Пусть внутри каждой фазы теплопроводность описывается линейным законом Фурье

$$\mathbf{q}_i = -\lambda_i \nabla T_i, \quad (1)$$

где  $\mathbf{q}_i$  – поток тепловой энергии, Дж/м<sup>2</sup>с;  $\nabla T_i$  – локальный градиент температуры внутри  $i$ -й компоненты смеси, К/м. Для макроскопического описания процесса теплопереноса в такой двухкомпонентной среде в общем случае используют симметричный тензор второго ранга, называемый эффективным коэффициентом теплопроводности среды  $\lambda^*$ , который также линейно связывает усредненные векторные поля:

$$\langle \mathbf{q}_i \rangle = -\lambda^* \langle \nabla T_i \rangle. \quad (2)$$

Угловые скобки в уравнении (2) и далее означают усреднение по ансамблю реализаций, которое в случае справедливости эргодической гипотезы совпадает с усреднением по представительному объему  $\Omega$ , размер которого должен быть достаточно большим по сравнению с масштабом структурных неоднородностей среды, но достаточно малым по сравнению с масштабом неоднородностей усредненного таким образом поля температур. В макроскопическом масштабе эффективных параметров дисперсной среды объем  $\Omega$ , по существу, является физической точкой. Пусть две фазы среды полностью заполняют объем усреднения  $\Omega$ ,

тогда справедливо соотношение  $f_1 + f_2 = 1$ , где  $f_i = \frac{\Omega_i}{\Omega}$  – объемная доля  $i$ -й фазы.

Проведя соответствующие усреднения в уравнении (2)

$$\langle \mathbf{q}_i \rangle = \frac{1}{\Omega} \int \mathbf{q}_i dx dy dz, \quad \langle \nabla T \rangle = \frac{1}{\Omega} \int \nabla T_i dx dy dz \quad (3)$$

и используя закон Фурье (1), получим два уравнения:

$$\langle \nabla T \rangle = \langle \nabla T_1 \rangle f_1 + \langle \nabla T_2 \rangle f_2, \quad (4)$$

$$\lambda^* \langle \nabla T \rangle = \lambda_1 \langle \nabla T_1 \rangle f_1 + \lambda_2 \langle \nabla T_2 \rangle f_2. \quad (5)$$

В уравнениях (4), (5) параметры  $f_i$ ,  $\lambda_i$  и напряженность внешнего поля  $\langle \nabla T \rangle$  заданы.

Отметим, что поскольку дисперсная среда состоит из однородных и изотропных компонент, то коэффициенты теплопроводности  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются скалярами.

Из уравнений (4) и (5) следует формула для вычисления эффективного коэффициента теплопроводности в безразмерном виде [28]:

$$\frac{\alpha^* - 1}{\alpha - 1} = \frac{\Psi_{21} f_2}{1 - (1 - \Psi_{21}) f_2}. \quad (6)$$

Здесь  $\alpha^* = \frac{\lambda^*}{\lambda_1}$ ,  $\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ ; неизвестный линейный оператор  $\Psi_{21}$  ( $\Psi_2 = \Psi_{21}\Psi_1$ ) находится как результат решения задачи о взаимодействии фаз [10], где  $\Psi_i = \frac{\langle \nabla T_i \rangle \langle \nabla T \rangle}{\langle \nabla T \rangle^2}$ .

В рамках макроскопических уравнений (4), (5) задача о взаимодействии фаз имеет точные решения лишь для простейшей анизотропной среды, состоящей из неограниченных слоистых структур. Если слои параллельны интенсивности внешнего поля  $\mathbf{E} = \langle \nabla T \rangle$ , то  $\langle \nabla T_1 \rangle = \langle \nabla T_2 \rangle$ . Подставляя в формулу (6)  $\Psi_{21} = 1$ , получим  $\lambda_{\perp}^* = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ . Если слои перпендикулярны интенсивности внешнего поля, то  $\lambda_1 \langle \nabla T_1 \rangle = \lambda_2 \langle \nabla T_2 \rangle$  и  $\Psi_{21} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ , соответственно,  $\frac{1}{\lambda_{\perp}^*} = \frac{f_1}{\lambda_1} + \frac{f_2}{\lambda_2}$ . Эти точные решения совпадают с так называемыми границами Винера

$$\lambda_{\perp}^* \leq \lambda^* \leq \lambda_{\parallel}^*, \quad (7)$$

которые были получены вариационным методом в работе [29]. Там же было показано, что неравенства (7) определяют диапазон возможных значений эффективных коэффициентов теплопроводности для любых анизотропных дисперсных сред, когда о них известны лишь сведения о коэффициентах  $\lambda_i$  и концентрациях  $f_i$ .

Во всех других случаях конкретную задачу о взаимодействии фаз необходимо решать на более детальном микроструктурном уровне, решая уравнение Лапласа для дисперсной среды при соответствующих граничных условиях на бесконечности и межфазных границах с использованием дополнительной (к заданным  $\lambda_i$  и  $f_i$ ) информации о форме дисперсных частиц и статистических характеристиках, которые дают полное представление о внутренней структуре среды. Для дисперсных частиц сферической формы задача о взаимодействии фаз может быть решена математически строго как без учета, так и с учетом коллективного взаимодействия дисперсных частиц.

Отметим, что теплопроводность и другие аналогичные физические процессы, такие как электропроводность (коэффициент  $\sigma$ ), диффузия (коэффициент  $D$ ), электро- и магнитостатика (коэффициенты диэлектрической и магнитной проницаемости  $\epsilon$  и  $\mu$  соответственно), описываются одинаковыми уравнениями и граничными условиями [28], т.е. в безразмерном виде все эти задачи математически полностью эквивалентны. Поэтому для сравнения теоретических моделей и экспериментов по теплопроводности могут быть использованы данные для любых других аналогичных коэффициентов, поскольку

$$\alpha^* = \frac{\lambda^*}{\lambda_1} = \frac{\sigma^*}{\sigma_1} = \frac{D^*}{D_1} = \frac{\epsilon^*}{\epsilon_1} = \frac{\mu^*}{\mu_1}$$

и  $\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ .

# Аналитическая модель теплопроводности в дисперсной среде произвольной концентрации без учета коллективного взаимодействия частиц

Рассмотрим точные решения задачи о теплопроводности в двухфазной дисперсной среде сферических частиц, которые диспергированы в непрерывной фазе случайным образом, статистически однородно и изотропно. Для такой среды искомый эффективный коэффициент теплопроводности  $\lambda^*$  в уравнениях (4)–(6) является скаляром.

Для решения задачи о взаимодействии фаз используем «принцип локальности» процесса теплопроводности, который следует из линейности определяющих уравнений и граничных условий. Принцип локальности означает, что градиент локального поля внутри каждой дисперсной частицы  $\nabla T_2$  однозначно (через искомый линейный оператор  $\Psi_{21}$ ) определяется градиентом поля температур в дисперсионной жидкости  $\nabla T_1$  в той же точке. В объеме усреднения  $\Omega$  градиент локального поля для каждой  $k$ -й частицы  $\nabla T_1^{(k)}$  вычисляется в центре сферической полости, если из среды удалить эту частицу. Локальное поле в диэлектриках, пренебрегая коллективным взаимодействием сферических молекул, впервые вычислил Людвиг Лоренц [30], поэтому часто это поле называют «локальное поле Лоренца». В общем случае  $\nabla T_1^{(k)}$  зависит не только от  $\lambda_i$  и  $f_i$ , но и от пространственной конфигурации частиц и их коллективного взаимодействия.

Если коллективное взаимодействие дисперсных частиц не учитывать, то оператор  $\Psi_{21}$  находится из решения краевой задачи уравнения Лапласа для одиночной сферы, находящейся в однородном внешнем поле  $\langle \nabla T \rangle$ . Ясно, что в данном случае внешнее поле является и локальным полем сферы  $\langle \nabla T \rangle = \langle \nabla T_1 \rangle$ . Точное решение этой задачи (при идеальном тепловом контакте фаз:  $T_1 = T_2$  и  $\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}$ , где  $\mathbf{n}$  – нормаль к поверхности раздела фаз) дано в монографии [31] и в наших обозначениях имеет вид:

$$\Psi_{21} = \frac{3}{\alpha + 2}. \quad (8)$$

После подстановки (8) в (6) получим аналитическую формулу, которая в точности совпадает с так называемой эвристической формулой Максвелла [19]:

$$\alpha^* = \frac{(\alpha + 2) + 2(\alpha - 1)f_2}{(\alpha + 2) - (\alpha - 1)f_2}. \quad (9)$$

В обобщенных безразмерных координатах  $\beta = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 2}$  и  $\beta^* = \frac{\alpha^* - 1}{\alpha^* + 2}$  формула (9) имеет более простой и компактный вид:

$$\beta^* = \beta f_2. \quad (10)$$

Максвелл получил формулу (9), исследуя электропроводность суспензии независимым от приведенного выше методом, также не учитывая взаимного влияния (взаимодействия) частиц. Он отметил, что такое предположение законно, если диаметр частиц намного меньше среднего расстояния между центрами соседних частиц,

т.е. параметр  $\delta = \frac{a}{l} \ll 1$ . Ясно, что при достаточно малых концентрациях  $f_2 \sim a^3/l^3$

это условие выполняется, поэтому многие авторы [18, 32, 33] до сих пор ошибочно считают, что формула Максвелла (9) применима только при малых объемных концентрациях дисперсных частиц ( $0 < f_2 < 0.1$ ), т.е. в линейном приближении  $O(f_2^2)$ :

$$\alpha^* = 1 + 3\beta f_2 + O(f_2^2). \quad (11)$$

Формулу (11) часто несправедливо называют формулой Максвелла. Далее будет доказано, что область применимости формулы (9) существенно шире, чем (11). Поэтому, учитывая приведенное выше математически строгое обоснование формулы (9), мы будем ее называть аналитической формулой Максвелла, а формулу (11) – линейным приближением формулы Максвелла.

Если бы дистанционное взаимодействие частиц было единственным (или доминирующим) фактором, который влияет на свойства дисперсной среды с увеличением концентрации частиц, то вывод об ограниченности аналитической формулы Максвелла только линейным приближением (11) был бы правильным. На самом деле, и далее это будет доказано, на величину локального поля Лоренца и, соответственно, на оператор  $\Psi_{21}$  гораздо более сильное влияние, чем взаимодействие частиц, оказывает чисто геометрический фактор стесненности дисперсных частиц.

Ошибочное мнение, что формула (9) справедлива лишь в приближении  $O(f_2^2)$ , послужило причиной многочисленных попыток получить в рамках феноменологических теорий формулу для усреднения свойств среды при повышенных концентрациях дисперсной фазы, опираясь на различные дополнительные к (11) эвристические соображения. Так появились теории эффективной среды, дифференциальный подход, формула Бруггемана и др., которые, как выяснилось позднее [34], дают результат хуже, чем формула Максвелла (9). Такие (неаналитические) теории в данной работе не рассматриваются.

Отметим, что позднее Максвелла при исследовании свойств гомогенных жидких и твердых неполярных диэлектриков были получены формулы (Максвелла–Гарнетта, Клаузиуса–Моссотти, Лоренц–Лоренца и др.), полностью идентичные формуле Максвелла (10), которые подтверждались экспериментами. Полная идентичность этих формул не вызывает удивления, поскольку все перечисленные авторы полагали вещество однородным и изотропным, а молекулы вещества – сферической формы. Теоретические исследования по обоснованию справедливости аналитической формулы Максвелла при повышенных концентрациях дисперсных частиц (используя различные подходы) продолжают до сих пор [35–37]. В частности, в работе [35], исследуя процесс рассеяния монохроматического света в дисперсной среде, авторы не только дают оригинальный вывод аналитической формулы Максвелла (9), но и показывают, что, вопреки распространенному мнению, формула (9) может оставаться очень точной и при высокой концентрации дисперсных частиц.

Выше было показано, что формула (9) выводится математически строго при единственном предположении об отсутствии взаимодействия частиц. Поэтому без решения вопроса о степени влияния взаимодействия частиц на конечный результат теоретически установить границы применимости формулы (9) или (10) при повышенных концентрациях дисперсных частиц не представляется возможным.

### Теоретические модели теплопроводности в дисперсных средах с учетом коллективного взаимодействия частиц

Одновременно с феноменологическими моделями теплопроводности в дисперсных средах развивались статистические, численные и другие методы, в которых учет взаимодействия частиц осуществлялся на более детальном, структурном уровне строения дисперсной среды. Ввиду чрезвычайной сложности задача решалась для статистически однородной и изотропной двухфазной среды, состоящей из непрерывной фазы и идентичных сферических дисперсных частиц.

Лорд Рэлей [38] разработал математическую модель для численного расчета эффективной проводимости, рассматривая простую кубическую решетку сфер (S.C. – simple cubic) и вычислил  $\alpha^*$  с точностью до  $\delta^{13}$  (или  $f_2^{13/3}$ ). Затем в работах [39–41], используя современные ЭВМ, были выполнены более точные вычисления  $\alpha^*$  для объемно центрированных (B.C.C. – body-centered cubic) и гексагональных или центрированных по граням (F.C.C. – face-centered cubic) периодических решеток сфер. В частности, в работе [41] величина  $\alpha^*$  рассчитана с точностью до  $\delta^{27}$  (или  $f_2^9$ ). В результате было показано [34], что все традиционные формулы усреднения (формула Бруггемана и др.), основанные на (11) и различных дополнительных предположениях, предназначенные для оценки  $\alpha^*$  при повышенных концентрациях, имеют точный коэффициент только при первой степени концентрации  $f_2$ , что соответствует дипольному члену (порядка  $\delta^3$ ). В то время как аналитическая формула Максвелла при описании периодических структур из сфер дает точные коэффициенты до величин порядка  $\delta^{12}$ , т.е. предсказывает  $\alpha^*$  с точностью до  $O(f_2^5)$ .

D.J. Jeffrey [18] рассчитал эффективный коэффициент теплопроводности в суспензиях с хаотичным расположением сфер с учетом парных взаимодействий:

$$\alpha^* = 1 + 3\beta f_2 + 3\beta(\beta + \Sigma) f_2^2 + O(f_2^3), \quad (12)$$

где  $\Sigma$  – сумма медленно сходящегося ряда. Из формулы (12) видно, что, в отличие от периодических структур, при хаотичном расположении дисперсных частиц парные взаимодействия вносят поправку в аналитическую формулу Максвелла ( $\Sigma = 0$ ) уже с коэффициента при  $f_2^2$ . В наиболее полной форме статистическая теория случайных дисперсных сред была разработана в работах физика-теоретика Фелдгерхофа [42, 43]. Там же дан краткий обзор и анализ предыдущих теоретических методов и результатов. В работе [43] приведены результаты численных расчетов коэффициентов  $\epsilon^*$  с учетом парных и трех-частичных взаимодействий и мультипольных моментов при  $\beta = 0.1, 0.3, -0.1, -0.3$  и  $0 < f_2 < 0.4$ . Там же дана приближенная формула для расчета диэлектрической проницаемости суспензии для частного случая, когда значения  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  близки друг к другу, т.е.  $(\alpha - 1) \ll 1$ .

В работе [44] в гидродинамической постановке идеальной несжимаемой жидкости в общем виде решена задача о динамике  $N$  частиц, произвольным образом расположенных в пространстве, с учетом  $N$ -частичных взаимодействий и полного набора мультипольных моментов. Затем, усредняя по ансамблю полученное решение для локальных скоростей, впервые в аналитическом виде была решена задача о взаимодействии фаз для произвольных значений параметра  $\gamma$  с учетом парных взаимодействий и мультипольных моментов (с точностью до  $\delta^{14}$ ), что важно, так как при случайном расположении частиц они могут находиться и на близком расстоянии (параметр  $\delta \approx 0.5$ ):

$$\psi_{21}^g = \frac{3}{1+2\gamma} [1 + k(\gamma) f_2], \quad (13)$$

$$k(\gamma) = \frac{7}{72} \frac{\gamma-1}{1+2\gamma} + \frac{1415}{5632} \left( \frac{\gamma-1}{1+2\gamma} \right)^2 + \frac{5}{2112} \left( \frac{\gamma-1}{1+2\gamma} \right)^3,$$

где  $\psi_{21}^g$  – решение задачи о взаимодействии фаз в гидродинамической постановке;  $\gamma = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ ,  $\rho_2$  и  $\rho_1$  – плотность дисперсной частицы и дисперсионной жидкости соответственно.

Используя решение (13) и формулы соответствия физической аналогии [45] динамики идеальной несжимаемой жидкости и процессов теплопередачи (верхний индекс  $t$ ) –  $\psi_{21}^g \rightarrow \psi_{21}^t$ ,  $\gamma \rightarrow \frac{\alpha+1}{2}$ , получим решение задачи о взаимодействии фаз для процессов теплопередачи в дисперсной среде взаимодействующих сферических частиц:

$$\psi_{21}^t = \frac{3}{\alpha+2} [1 + k(\beta)], \quad (14)$$

$$k(\beta) = 0.0486\beta + 0.0628\beta^2 + 0.0003\beta^3. \quad (15)$$

После подстановки (14) в (6) получим искомую аналитическую зависимость для эффективной теплопроводности дисперсной среды в виде:

$$\beta^* = f_2 \beta \frac{1 + k(\beta) f_2}{1 + k(\beta) f_2^2}. \quad (16)$$

Видно, что при малом взаимодействии дисперсных частиц ( $k(\beta) \ll 1$ ) формула (16) совпадает с аналитической формулой Максвелла (10) при любых концентрациях дисперсных частиц. При изменении параметра  $\alpha$  от нуля до бесконечности безразмерный параметр  $\beta$  изменяется в пределах  $-0.5 < \beta < 1$ , а коэффициент  $k(\beta)$  – в пределах  $-0.0086 < k(\beta) < 0.1117$ .

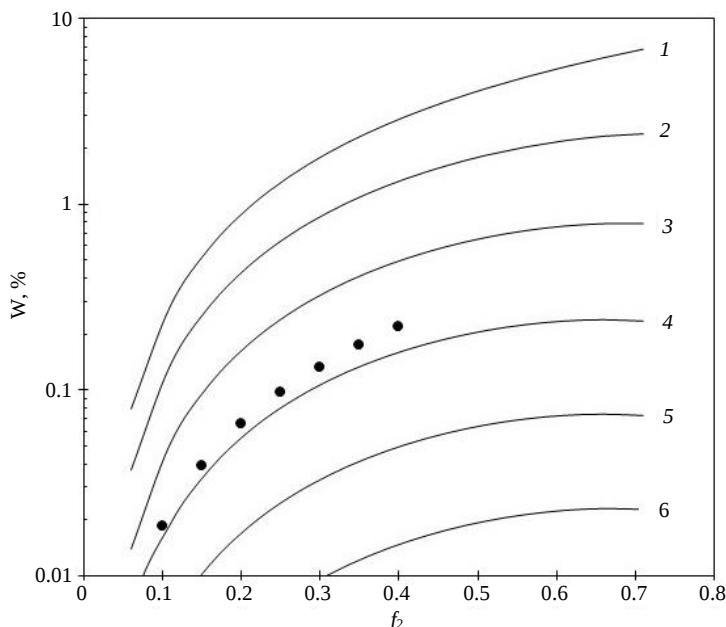
Максимальная погрешность аналитической формулы Максвелла (10) из-за пренебрежения взаимодействием частиц имеет место при значении коэффициента  $k(\beta) = 0.1117$  и для максимальной концентрации идентичных сфер при хаотической укладке  $f_2^{\max} = 0.637$  составляет около 7%. На рис. 1 представлена зависимость

относительной погрешности  $W = \frac{\alpha^* - \alpha_M^*}{\alpha_M^*} 100\%$  от объемной концентрации дис-

персных частиц и параметра  $\beta$ , где  $\alpha_M^*$  – расчет по формуле Максвелла (9). Таким образом, полученные нами математически строгим методом аналитические формулы (15) и (16), которые учитывают коллективное взаимодействие дисперсных частиц, позволяют точно оценить погрешность (и область применимости) аналитической формулы Максвелла во всем диапазоне изменения безразмерных параметров  $\alpha$  и  $f_2$ .

Из рис. 1 видно, что для многих практически важных случаев относительная погрешность аналитической формулы Максвелла, которая не учитывает взаимодействия дисперсных частиц, не превышает 2–3% во всем диапазоне возможных концентраций. Дело в том, что в реальных дисперсных средах, в особенности при

значениях параметра  $\alpha \gg 1$ , с увеличением концентрации дисперсных частиц  $f_2 \geq f_2^{cl}$  может происходить их объединение в кластеры и наблюдаться так называемый эффект перколяции (просачивания) [46]. При этом кластеры дисперсных частиц, объединяясь друг с другом, при некоторой пороговой концентрации  $f_2^p$  образуют перколяционный (стягивающий) кластер. При  $f_2 = f_2^p$  наблюдается резкое изменение теплопроводности среды, поскольку скелет перколяционного кластера является «тепловым мостом». Перколяционный переход аналогичен фазовому переходу второго рода, который связан с появлением (или исчезновением) нового элемента симметрии в системе.



**Рис. 1.** Относительная погрешность аналитической формулы Максвелла (9) из-за предположения, что взаимодействием дисперсных частиц можно пренебречь: 1 –  $\beta = 1$  ( $\alpha \rightarrow \infty$ ), 2 –  $\beta = 0.75$  ( $\alpha = 10$ ), 3 –  $\beta = 0.5$  ( $\alpha = 4$ ), 4 –  $\beta = 0.3$  ( $\alpha = 2.286$ ), 5 –  $\beta = 0.175$  ( $\alpha = 1.636$ ), 6 –  $\beta = 0.1$  ( $\alpha = 1.33$ ); круглые маркеры – статистическая теория и численный расчет Фельдерхофа с учетом парных и тройных взаимодействий идентичных сфер при  $\beta = 0.3$  [43]

**Fig. 1.** The relative error of Maxwell's analytical formula (9) due to the assumption that the interaction of dispersed particles can be neglected: (1)  $\beta = 1$ ,  $\alpha \rightarrow \infty$ ; (2)  $\beta = 0.75$ ,  $\alpha = 10$ ; (3)  $\beta = 0.5$ ,  $\alpha = 4$ ; (4)  $\beta = 0.3$ ,  $\alpha = 2.286$ ; (5)  $\beta = 0.175$ ,  $\alpha = 1.636$ ; and (6)  $\beta = 0.1$ ,  $\alpha = 1.33$ . The circles indicate a statistical theory and a numerical calculation of Felderhof with account for pairwise and triple interactions of identical spheres at  $\beta = 0.3$  [43]

Если принять меры, которые препятствуют контакту дисперсных частиц, то кластеры не образуются и аналитическая формула Максвелла применима при значениях параметра  $0 < \alpha < \infty$  и любых практически достижимых концентрациях дисперсной фазы. Этот теоретический вывод, который подтверждается экспериментами, приведенными во второй части исследования, имеет принципиальное значение, так как, опираясь на него, из аналитической формулы Максвелла математически строго следуют два важных следствия.

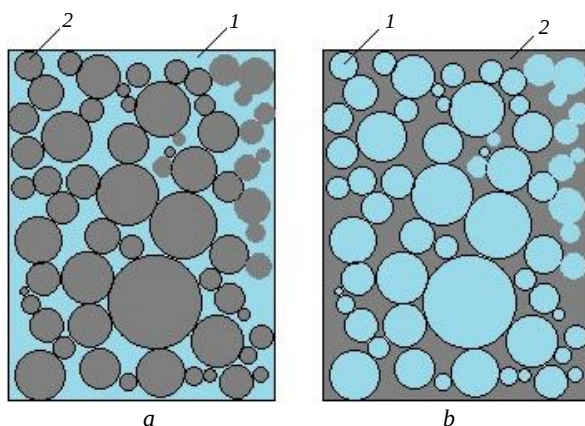
## Два важных следствия из аналитической формулы Максвелла

Известно, что дисперсные среды, которые имеют точные решения для  $\alpha^*$ , представимые простыми аналитическими формулами, как правило, обладают свойствами симметрии [24]. Это объясняется тем, что пространственное распределение неоднородностей в таких средах соответствует некоторым предельным структурам. Так, например, для любых анизотропных сред предельными являются две слоистые структуры, которые описываются точными решениями границ Винера (7).

Дисперсная среда, для которой формула (10) является точным решением уравнения Лапласа, в приближении отсутствия взаимодействия частиц также обладает свойствами симметрии. Действительно, поскольку формула (10) дает достаточно высокую точность во всем диапазоне параметров  $\alpha$  и  $f_2$  (см. рис. 1), мы можем увеличивать объемную концентрацию дисперсной фазы до такой степени, что она образует сплошной континуум. В этом случае, поменяв местами в формуле (10)

нижние индексы ( $1 \leftrightarrow 2$ ):  $\alpha \rightarrow \frac{1}{\alpha}$ ,  $\alpha^* \rightarrow \frac{\alpha^*}{\alpha}$  и  $f_2 \rightarrow f_1 = 1 - f_2$ , т.е. применив преобразование инверсии фаз  $(\lambda_1, f_1) \leftrightarrow (\lambda_2, f_2)$ , мы получим точное решение, которое описывает дисперсную среду с другой (предельной) геометрией матрицы и дисперсной фазы:

$$\frac{\alpha^* - \alpha}{\alpha^* + 2\alpha} = \frac{1 - \alpha}{1 + 2\alpha} f_1. \quad (17)$$



**Рис. 2.** Два типа однородных и изотропных дисперсных сред, образованных идентичными сферическими элементами: *a* – структура дисперсной среды, которую описывает аналитическая формула Максвелла (9) или (10); *b* – структура дисперсной среды, которая описывается формулой (17). В структуре *b* сферы находятся в контакте друг с другом и образуют континуум (матрицу), при этом элементы дисперсной фазы имеют различную (несферическую) форму и размер. 1 – дисперсионная жидкость (матрица); 2 – дисперсная фаза

**Fig. 2.** Two types of homogeneous and isotropic dispersive media formed by identical spherical elements: (a) the structure of the dispersive medium described by Maxwell's analytical formula (9) or (10) and (b) the structure of the dispersive medium described by formula (17). In structure (b), the spheres are in contact with each other, and they form a continuum (matrix), while the elements of the dispersed phase are of different (non-spherical) shapes and sizes. 1, dispersive liquid (matrix) and 2, dispersed phase

На рис. 2 схематично показаны два типа дисперсных структур, образованных идентичными сферическими элементами, которые описываются формулами (10) и (17).

Отметим, что формула (17), по-видимому, впервые была получена в работе [47] и получила в литературе [48] название «формула Максвелла–Эйкена». Однако если формула Максвелла (10) применима при  $0 < f_2 < 0.1$ , как ошибочно считают многие авторы, то формула (17) применима только в диапазоне  $0.9 < f_1 < 1$ , что и утверждается в работе [33]. Следовательно, без решения вопроса об области применимости аналитической формулы Максвелла формулу (17) нельзя использовать в более широком диапазоне концентраций.

Примечательно, что полученные аналитические решения (10) и (17) в точности совпадают с границами изменения эффективных коэффициентов теплопроводности для любых однородных и изотропных двухфазных дисперсных сред, известными как «границы Хашина–Штрикмана (Х-Ш)», которые были получены в работе [29] вариационным методом и для  $\alpha > 1$  имеют вид:

$$1 + \frac{f_2}{\frac{1}{\alpha-1} + \frac{f_1}{3}} \leq \alpha^* \leq \alpha \left( 1 + \frac{f_1}{\frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{f_2}{3}} \right). \quad (18)$$

Отмеченное выше совпадение не очень удивляет, если вспомнить, что сфера имеет предельную геометрию любых выпуклых тел: при заданном объеме тела сфера обладает минимальной площадью поверхности.

**Следствие 1.** Аналитическая формула Максвелла (10) и формула (17), полученная из (10) в результате преобразования инверсии фаз, в точности совпадают с границами (18) Хашина–Штрикмана (Х-Ш), которые определяют диапазон изменения  $\alpha^*$  для любых однородных и изотропных двухфазных сред.

В работе [49] показано, что благодаря полной статистической симметрии [24], характерной для двумерных случайно неоднородных систем, в случае равных концентрации фаз ( $f_1 = f_2$ ) задача об эффективной электропроводности допускает единственное точное решение, инвариантное относительно перестановки фаз:  $\sigma^* = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$ . При этом порог протекания (перколяции) имеет место при  $f_1^P = f_2^P = 0.5$ .

Покажем, что и для трехмерного случая среди бесконечного множества двухфазных сред, ограниченных точными решениями (10) и (17), существуют среды, обладающие полной статистической симметрией, которые инвариантны относительно перестановки фаз. Действительно, в силу линейности определяющих уравнений и граничных условий из решений (10) и (17) легко построить линейную комбинацию, инвариантную относительно преобразования инверсии фаз.

Для этого умножим уравнение (10) на  $f_1(\alpha + 2)$ , а уравнение (17) на  $f_2(2\alpha + 1)$ . После сложения этих уравнений, получим

$$\frac{\alpha^* - 1}{\alpha^* + 2} (\alpha + 2) f_1 + \frac{\alpha^* - \alpha}{\alpha^* + 2\alpha} (2\alpha + 1) f_2 = 0. \quad (19)$$

**Следствие 2.** Существует точное решение (19), инвариантное относительно преобразования инверсии фаз, предназначенное для вычисления эффективного коэффициента теплопроводности в трехмерных неупорядоченных структурно симметричных двухфазных средах.

Таким образом, и в трехмерном случае однородная и изотропная двухфазная среда обладает полной статистической симметрией и для заданных значений параметров  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $f_2$  имеет единственное точное решение.

Полученное точное решение (19) пригодно для оценки эффективного коэффициента теплопроводности (и других подобных макроскопических коэффициентов) в структурно-симметричных двухфазных средах, в которых нельзя четко выделить непрерывную компоненту (матрицу). В частном случае, при равных объемных концентрациях компонент  $f_1 = f_2 = 0.5$ , формула (19) упрощается до уравнения

$$(\alpha^*)^2 + \frac{2\alpha}{\alpha + 1} \alpha^* - 2\alpha = 0, \quad (20)$$

которое имеет единственное положительное решение  $\alpha^* = f(\alpha)$ .

Нетрудно убедиться, что полученное аналитическое решение (19), как и известное уравнение Бруггемана  $\frac{\alpha^* - 1}{2\alpha^* + 1} f_1 + \frac{\alpha^* - \alpha}{2\alpha^* + \alpha} f_2 = 0$  [49], инвариантно относительно преобразования инверсии фаз  $(\lambda_1, f_1) \leftrightarrow (\lambda_2, f_2)$ , т.е. относительно перестановки нижних индексов, которые обозначают номер фазы смеси. Однако в отличие от формулы (19), которая выводится математически строго, обоснованность вывода уравнения Бруггемана и область его применимости остаются источником непрекращающихся споров [35, 50]. В частности, в работе [51] отмечается, что уравнение Бруггемана применимо лишь в случаях, когда коэффициенты теплопроводности фаз близки друг к другу.

Отметим, что формула (6) применима для двухфазных дисперсных сред, составленных из однородных компонент, в самом общем случае. Она содержит неизвестный параметр (оператор)  $\Psi_{21}$ , в котором сосредоточена вся информация о форме и размерах дисперсных частиц, их ориентации и распределении в пространстве. Формула (8) дает решение задачи о взаимодействии фаз (определение  $\Psi_{21}$ ) для сферических частиц произвольного радиуса. Таким образом, из приведенной выше теории следует, что аналитическая формула Максвелла и все следствия из нее справедливы для сред, в которых одна из фаз представлена полидисперсными сферическими частицами. Последнее согласуется с работой [29], где получено точное решение  $\alpha^* \equiv \alpha_M^*$  для полидисперсной изотропной модели двухфазной среды, дисперсные частицы которой состоят из двух концентрических сфер – ядра радиусом  $a_2$  и оболочки радиусом  $a_1$ . При этом для каждой частицы соблюдаются соотношения:  $\frac{a_2^3}{a_1^3} = f_2 = \text{const}$  и  $\frac{\mu_2}{\mu_1} = \alpha = \text{const}$ . Если размер

частиц изменяется в диапазоне  $0 < a_1 < a_1^m < \sqrt[3]{\Omega}$ , то они полностью заполняют трехмерное пространство ( $f_1 = 1 - f_2$ ) и первая фаза ( $i = 1$ ) является непрерывной. Очевидно, что эта модель дисперсной среды полностью эквивалентна максвелловской полидисперсной среде, и, соответственно, мы имеем:  $\alpha^* \equiv \alpha_M^*$ .

В частном случае одинаковых дисперсных сферических частиц их максимальная объемная концентрация зависит от типа пространственной упаковки. Так, например, доказано (Гаусс), что максимально плотная упаковка жестких шаров одинакового размера не может превысить  $f_2^{\text{max}} \leq 0.74$ . В этих случаях ана-

литическая формула Максвелла (при выводе которой предполагается, что  $0 < f_2 < 1$ ) неприменима при концентрациях, близких к  $f_2^{\max}$  и выше.

### Заключение

Математически строго обосновано, что аналитическая формула Максвелла, предназначенная для вычисления эффективного коэффициента теплопроводности в суспензии сферических частиц, которая не учитывает их взаимодействия, дает достаточно высокую точность практически во всем диапазоне объемных концентраций дисперсных частиц  $0 < f_2 < 1$ . Используя это свойство, из аналитической формулы Максвелла получено два важных следствия.

Первое следствие определяет точные границы, внутри которых находятся эффективные коэффициенты теплопроводности однородных и изотропных суспензий сферических частиц, которые совпадают с известными границами Хашина–Штрикмана.

Второе следствие определяет точное решение, инвариантное относительно преобразования инверсии фаз, предназначенное для вычисления эффективного коэффициента теплопроводности в трехмерных неупорядоченных структурно-симметричных двухфазных средах, когда трудно выделить непрерывную фазу.

### Список источников

1. Архипов В.А., Васенин И.М., Усанина А.С., Шрагер Г.Р. Динамическое взаимодействие частиц дисперсной фазы в гетерогенных потоках. Томск : Изд. Дом Том. гос. ун-та, 2019. 328 с.
2. Бошенятов Б.В. О перспективах применения микропузырьковых газожидкостных сред в технологических процессах // Известия вузов. Физика. 2005. Т. 48, № 11. С. 49–54.
3. Torquato S. Random Heterogeneous Materials – Microstructure and Macroscopic Properties. New York : Springer, 2002.
4. Boshenyatov B. Laws of bubble coalescence and their modeling // New Developments in Hydrodynamics Research / M.J. Ibragimov, M.A. Anisimov (eds.). New-York : Nova Science Publishers, 2012. P. 211–239.
5. Boshenyatov B.V., Popov V.V. Acoustic measurement of the gas content (void fraction) of dispersions of very small bubbles in liquids // Fluid Mechanics, Soviet Research. 1990. V. 19, № 2. P. 112–117.
6. Бошенятов Б.В. Микропузырьковые газожидкостные среды и перспективы их использования. Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. 170 p.
7. Boshenyatov B.V., Chernyshev I.V. The effective viscosity of a microbubbly medium // Fluid Mechanics, Soviet Research. 1991. V. 20, № 6. P. 124–129.
8. Бошенятов Б.В., Попов В.В. Затухание низкочастотных звуковых волн в микропузырьковой газожидкостной среде // Фундаментальные исследования. 2009. № 3-5. С. 99–102.
9. Бошенятов Б.В. Исследование нерезонансного эффекта затухания низкочастотных звуковых волн в микропузырьковой газожидкостной среде // Известия вузов. Физика. 2005. Т. 48, № 11. С. 43–48.
10. Гуськов О.Б., Бошенятов Б.В. Взаимодействие фаз и присоединенная масса дисперсных частиц в потенциальных потоках жидкости // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4-3. С. 740–741.
11. Бошенятов Б.В. Роль гидродинамического взаимодействия при коалесценции пузырьков газа в жидкости // Доклады Академии наук. 2009. Т. 427, № 3. С. 321–323.

12. Бошенятов Б.В. Гидродинамическое взаимодействие и присоединенная масса дисперсных частиц // Известия вузов. Физика. 2014. Т. 57, № 8-2. С. 50–60.
13. Струминский В.В., Гуськов О.Б., Кульбицкий Ю.Н. Гидродинамика дисперсных и газожидкостных потоков // Доклады АН СССР. 1984. Т. 278, № 1. С. 65–68.
14. Гуськов О.Б., Струминский В.В. Динамика дисперсных потоков в присутствии границ // Доклады АН СССР. 1985. Т. 285, № 4. С. 832–835.
15. Batchelor G.K. Sedimentation in a dilute dispersion of spheres // Journal of Fluid Mechanics. 1972. V. 52, № 2. P. 245–268. doi: 10.1017/S0022112072001399
16. Batchelor G.K., Green J.T. The hydrodynamic interaction of two small freely moving spheres in a linear flow field // Journal of Fluid Mechanics. 1972. V. 56, № 2. P. 375–400. doi: 10.1017/S0022112072002927
17. Batchelor G.K., Green J.T. The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order  $c^2$  // Journal of Fluid Mechanics. 1972. V. 56 (3). P. 401–427. doi: 10.1017/S0022112072002435
18. Jeffrey D.J. Conduction through a random suspension of spheres // Proceedings of the Royal Society of London. 1973. V. A335. P. 355–367. doi: 10.1098/rspa.1973.0130
19. Maxwell J.C. Electricity and magnetism. 1st ed. Clarendon Press, 1873.
20. Einstein A. Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen // Annals of Physics. 1906. V. 19. P. 289–306.
21. Гуськов О.Б. О движении кластера сферических частиц в идеальной жидкости // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78, вып. 2. С. 186–193.
22. Boshenyatov B.V. The contribution of interactions of spherical inclusions into electrical and thermal conductivity of composite materials // Composites: Mechanics, Computations, Applications. 2016. V. 7, № 2. P. 95–104. doi: 10.1615/CompMechComputApplIntJ.v7.i2.10
23. Buryachenko V.A. General integral equations of micromechanics of heterogeneous materials // International Journal for Multiscale Computational Engineering. 2015. V. 13 № 1. P. 11–53. doi: 10.1615/IntJMultCompEng.2014011234
24. Фокин А.Г. Макроскопическая проводимость случайно-неоднородных сред. Методы расчета // Успехи физических наук. 1996. Т. 166, № 10. С. 1069–1093. doi: 10.1070/PU1996v039n10ABEH000173
25. Felderhof B.U. Virtual mass and drag in two-phase flow // Journal of Fluid Mechanics. 1991. V. 225. P. 177–196. doi: 10.1017/S002211209100201X
26. Струминский В.В., Гуськов О.Б., Корольков Г.А. Гидродинамическое взаимодействие частиц в потенциальных потоках идеальной жидкости // Доклады АН СССР. 1986. Т. 290, № 4. С. 820–824.
27. Гуськов О.Б. Метод самосогласованного поля применительно к динамике вязких суспензий // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77, вып. 4. С. 557–572.
28. Дульнев Г.Н., Новиков В.В. Процессы переноса в неоднородных средах. Л. : Энергоатомиздат, Ленингр. отд-ние, 1991. 248 с.
29. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials // Journal of Applied Physics. 1962. V. 33, № 10. P. 3125–3131. doi: 10.1063/1.1728579
30. Lorenz L. Ueber die refractionconstante // Annalen der Physik. 1880. V. 247, № 9. P. 70–103.
31. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 736 с. (Теоретическая физика; т. 6).
32. Zuzovsky M., Brenner H. Effective Conductivities of Composite Materials Composed of Cubic Arrangements of Spherical Particles Embedded in an Isotropic Matrix // Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP). 1977. V. 28 (6). P. 979–992. doi: 10.1007/BF01601666
33. Samantray P.K., Karthikeyan P., Reddy K.S. Estimating effective thermal conductivity of two-phase materials // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2006. V. 49 (21-22). P. 4209–4219. doi: 10.1016/j.jheatmasstransfer.2006.03.015

34. Kristensson G. Homogenization of spherical inclusions // Progress in Electromagnetics Research (PIER). 2003. V. 42. P. 1–25. doi: 10.1016/j.ijengsci.2019.05.001
35. Pierre M., Guérin C.-A., Sentenac A. Maxwell-Garnett mixing rule in the presence of multiple scattering: Derivation and accuracy // Physical Review B. 2005. V. 72, № 1. Art. 014205. doi: 10.1103/PhysRevB.72.014205
36. Сушко М.Я. О диэлектрической проницаемости суспензий // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2007. Т. 132, № 2. С. 478–484. doi: 10.1134/S1063776107080146
37. Sevostianov I., Mogilevskaya S.G., Kushch V.I. Maxwell's methodology of estimating effective properties: Alive and well // International Journal of Engineering Science. 2019. V. 140. P. 35–88. doi: 10.1016/j.ijengsci.2019.05.001
38. Rayleigh Lord. LVI. On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1892. V. 34, № 211. P. 481–502. doi: 10.1080/14786449208620364
39. McPhedran R.C., McKenzie D.R. The conductivity of lattices of spheres. I. The simple cubic lattice // Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences. 1978. V. 359 (1696). P. 45–63. doi: 10.1098/rspa.1978.0031
40. McKenzie D.R., McPhedran R.C., Derrick G.H. The conductivity of lattices of spheres. II. The body centered and face centered cubic lattices // Proceedings of the Royal Society of London Ser. A. Mathematical and Physical Sciences. 1978. V. 362. P. 211–232. doi: 10.1098/rspa.1978.0129
41. Sangani A.S., Acrivos A. The effective conductivity of a periodic array of spheres // Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences. 1983. V. 386. P. 263–275. doi: 10.1098/rspa.1983.0036
42. Felderhof U. Bounds for the effective dielectric constant of disordered two-phase materials // Journal of Physics C: Solid State Physics. 1982. V. 15. P. 1731–1739. doi: 10.1088/0022-3719/15/8/019
43. Felderhof U. Bounds for the effective dielectric constant of a suspension of uniform spheres // Journal of Physics C: Solid State Physics. 1982. V. 15. P. 3953–3966. doi: 10.1088/0022-3719/15/18/011
44. Гуськов О.Б., Бошнятов Б.В. Гидродинамическое взаимодействие сферических частиц в потоке невязкой жидкости // Доклады Академии наук. 2011. Т. 438, № 5. С. 626–628.
45. Бошнятов Б.В. К теории электро- и теплопроводности пузырьковых газожидкостных сред // Доклады Академии наук. 2014. Т. 459, № 6. С. 693–695. doi: 10.7868/S0869565214360080
46. Boudenne A., Ibos L., Fois M., Majesté J.C., Géhin E. Electrical and thermal behavior of polypropylene filled with copper particles // Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. 2005. V. 36, № 11. P. 1545–1554. doi: 10.1016/j.compositesa.2005.02.005
47. Eucken A. Allgemeine Gesetzmäßigkeiten für das Wärmeleitvermögen verschiedener Stoffarten und Aggregatzustände // Forschung Gabiete Ingenieur. 1940. Bd. 11 (1). S. 6–20.
48. Carson J.K., Lovatt S.J., Tanner D.J., Cleland A.C. Predicting the effective thermal conductivity of unfrozen porous foods // Journal of Food Engineering. 2006. V. 5. P. 297–307.
49. Дыхне А.М. Проводимость двумерной двухфазной системы // ЖЭТФ. 1970. Т. 59, вып. 7. С. 110–115.
50. Сушко М.Я., Крискив С.К. Метод компактных групп в теории диэлектрической проницаемости гетерогенных систем // Журнал технической физики. 2009. Т. 79, вып. 3. С. 79–101.
51. Tjaden B., Cooper S.J., Brett D.J.L., Kramer D., Shearing P.R. On the origin and application of the Bruggeman correlation for analyzing transport phenomena in electrochemical systems // Current Opinion in Chemical Engineering. 2016. V. 12. P. 44–51. doi: 10.1016/j.coche.2016.02.006
52. Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы : в 2 т. М. : Мир, 1990. Т. 1. 415 с.

## References

1. Arhipov V.A., Vasenin V.A., Usanina A.S., Shrager G.R. (2019) *Dinamicheskoe vzaimodeystvie chastits dispersnoy fazy v geterogennykh potokakh* [Dynamic interaction of particles of the dispersed phase in heterogeneous flows]. Tomsk: Izdatel'skiy dom Tomskogo gosudarstvennogo universiteta.
2. Boshenyatov B.V. (2005) O perspektivakh primeneniya mikropuzyr'kovykh gazozhidkostnykh sred v tekhnologicheskikh protsessakh [On the prospects of applying microbubble gas-liquid media in technological processes]. *Izvestiya vuzov. Fizika – Russian Physics Journal*. 48(11 appendix). pp. 49–54.
3. Torquato S. (2002) *Random Heterogeneous Materials - Microstructure and Macroscopic Properties*. New York: Springer.
4. Boshenyatov B. (2012) Laws of bubble coalescence and their modeling. In: *New Developments in Hydrodynamics Research*. New York: Nova Science Publishers. pp. 211–239.
5. Boshenyatov B.V., Popov V.V. (1990) Acoustic measurement of the gas content (void fraction) of dispersions of very small bubbles in liquids. *Fluid Mechanics, Soviet Research*. 19(2). pp. 112–117.
6. Boshenyatov B.V. (2016) *Mikropuzyr'kovye gazozhidkostnye sredy i perspektivy ikh ispol'zovaniya* [Microbubble gas-liquid media and their prospects of applying]. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing.
7. Boshenyatov B.V., Chernyshev I.V. (1991) The effective viscosity of a microbubbly medium. *Fluid Mechanics, Soviet Research*. 20(6). pp. 124–129.
8. Boshenyatov B.V., Popov V.V. (2009) Zatukhanie nizkochastotnykh zvukovykh voln v mikropuzyr'kovoy gazozhidkostnoy srede [Attenuation of low-frequency sound waves in a microbubble gas-liquid medium]. *Fundamental'nye issledovaniya*. 3(appendix). pp. 99–102.
9. Boshenyatov B.V. (2005) Issledovanie nerezonansnogo effekta zatukhaniya nizkochastotnykh zvukovykh voln v mikropuzyr'kovoy gazozhidkostnoy srede [Investigation of the non-resonant effect of attenuation of low-frequency sound waves in a microbubble gas-liquid medium]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 48(11). pp. 43–48.
10. Gus'kov O.B., Boshenyatov B.V. (2011) Vzaimodeystvie faz i prisoedinennaya massa dispersnykh chastits v potentsial'nykh potokakh zhidkosti [Interaction of phases and virtual mass of dispersed particles in potential flows of fluid]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Mekhanika zhidkost i igaza – Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*. 4(3). pp. 740–741.
11. Boshenyatov B.V. (2009) The role of hydrodynamic interaction in the process of bubble coalescence in liquid. *Doklady Physics*. 54. pp. 345–347. doi: 10.1134/S102833580907009X
12. Boshenyatov B.V. (2014) Gidrodinamicheskoe vzaimodeystvie i prisoedinennaya massa dispersnykh chastits [Hydrodynamic interaction and the associated mass of dispersed particles]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 57(8–2). pp. 50–60.
13. Struminskii V.V., Gus'kov O.B., Kul'bitskii Yu.N. (1984) Dynamics of disperse streams in the presence of boundaries. *Soviet Physics. Doklady*. 29(9). pp. 719–721.
14. Guskov O.B., Struminskii V.V. (1985) Dynamics of disperse flows in the presence of boundaries. *Soviet Physics. Doklady*. 30(12). pp. 995–997.
15. Batchelor G.K. (1972) Sedimentation in a dilute dispersion of spheres. *Journal of Fluid Mechanics*. 52(2). pp. 245–268. doi: 10.1017/S0022112072001399
16. Batchelor G.K., Green J.T. (1972) The hydrodynamic interaction of two small freely moving spheres in a linear flow field. *Journal of Fluid Mechanics*. 56(2). pp. 375–400. doi: 10.1017/S0022112072002927
17. Batchelor G.K., Green J.T. (1972) The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order  $c^2$ . *Journal of Fluid Mechanics*. 56(3). pp. 401–427. doi: 10.1017/S0022112072002435

18. Jeffrey D.J. (1973) Conduction through a random suspension of spheres. *Proceedings of the Royal Society of London*. A335. pp. 355–367. doi: 10.1098/rspa.1973.0130
19. Maxwell J.C. (1873) *Electricity and Magnetism*. Oxford: Clarendon Press.
20. Einstein A. (1906) Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen. *Annals of Physics*. 19. pp. 289–306.
21. Gus'kov O.B. (2014) The motion of a cluster of spherical particles in an ideal fluid. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 78(2). pp. 126–131. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2014.07.004
22. Boshenyatov B.V. (2016) The contribution of interactions of spherical inclusions into electrical and thermal conductivity of composite materials. *Composites: Mechanics, Computations, Applications*. 7(2). pp. 95–104. doi: 10.1615/CompMechComputApplIntJ.v7.i2.10
23. Buryachenko V.A. (2015) General integral equations of micromechanics of heterogeneous materials. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*. 13(1). pp. 11–53. doi: 10.1615/IntJMultCompEng.2014011234
24. Fokin A.G. (1996) Macroscopic conductivity of random inhomogeneous media. Calculation methods. *Physics-Uspekhii*. 39(10). pp. 1009–1032. doi: 10.1070/PU1996v039n10ABEH000173
25. Felderhof B.U. (1991) Virtual mass and drag in two-phase flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 225. pp. 177–196. doi: 10.1017/S002211209100201X
26. Struminskii V.V., Gus'kov O.B., Korol'kov G.A. (1986) Hydrodynamic interaction of particles in potential flow of an ideal fluid. *Soviet Physics. Doklady*. 31(10). pp. 787–789.
27. Gus'kov O.B. (2013) A self-consistent field method applied to the dynamics of viscous suspensions. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 77(4). pp. 401–411. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2013.11.009
28. Dul'nev G.N., Novikov V.V. (1991) *Protsessy perenosa v neodnorodnykh sredakh* [Transfer processes in inhomogeneous media]. Leningrad: Energoatomizdat.
29. Hashin Z., Shtrikman S. (1962) A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials. *Journal of Applied Physics*. 33(10). pp. 3125–3131. doi: 10.1063/1.1728579
30. Lorenz L. (1880) Ueber die Refraktionsconstante. *Annals of Physics*. 247(9). pp. 70–103.
31. Landau L.D., Lifshitz E.M. (1987) *Fluid Mechanics*. Oxford: Pergamon Press.
32. Zuzovsky M., Brenner H. (1977) Effective conductivities of composite materials composed of cubic arrangements of spherical particles embedded in an isotropic matrix. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*. 28(6). pp. 979–992. doi: 10.1007/BF01601666
33. Samantray P.K., Karthikeyan P., Reddy K.S. (2006) Estimating effective thermal conductivity of two-phase materials. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 49(21–22). pp. 4209–4219. doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2006.03.015
34. Kristensson G. (2003) Homogenization of spherical inclusions. *Progress in Electromagnetics Research, PIER*. 42. pp. 1–25. doi: 10.1016/j.ijengsci.2019.05.001
35. Pierre M., Guérin C-A, Sentenac A. (2005) Maxwell-Garnett mixing rule in the presence of multiple scattering: Derivation and accuracy. *Physical Review B*. 72(1). Article 014205. doi: 10.1103/PhysRevB.72.014205
36. Sushko M.Y. (2007) Dielectric permittivity of suspensions. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 105. pp. 426–431. doi: 10.1134/S1063776107080146
37. Sevostianov I., Mogilevskaya S.G., Kushch V.I. (2019) Maxwell's methodology of estimating effective properties: Alive and well. *International Journal of Engineering Science*. 140. pp. 35–88. doi: 10.1016/j.ijengsci.2019.05.001
38. Rayleigh Lord LVI. (1892) On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. 34(211). pp. 481–502. doi: 10.1080/14786449208620364
39. McPhedran R.C., McKenzie D.R. (1978) The conductivity of lattices of spheres I. The simple cubic lattice. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*. 359(1696). pp. 45–63. doi: 10.1098/rspa.1978.0031

40. McKenzie D.R., McPhedran R.C., Derrick G.H. (1978) The conductivity of lattices of spheres. II. The body centered and face centered cubic lattices. *Proceedings of the Royal Society of London Ser. A. Mathematical and Physical Sciences*. 362. pp. 211–232. doi: 10.1098/rspa.1978.0129
41. Sangani A.S., Acrivos A. (1983) The effective conductivity of a periodic array of spheres. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*. 386. pp. 263–275. doi: 10.1098/rspa.1983.0036
42. Felderhof U. (1982) Bounds for the effective dielectric constant of disordered two-phase materials. *Journal of Physics C: Solid State Physics*. 15. pp. 1731–1739. doi: 10.1088/0022-3719/15/8/019
43. Felderhof U. (1982) Bounds for the effective dielectric constant of a suspension of uniform spheres. *Journal of Physics C: Solid State Physics*. 15. pp. 3953–3966. doi: 10.1088/0022-3719/15/18/011
44. Guskov O.B., Boshenyatov B.V. (2011) Hydrodynamic interaction of spherical particles in an inviscid-fluid flow. *Doklady Physics*. 56(6). pp. 352–354. doi: 10.1134/S1028335811060073
45. Boshenyatov B.V. (2014) The theory of electric and thermal conductivity in bubble gas–liquid media. *Doklady Physics*. 59(12). pp. 601–603. doi: 10.1134/S1028335814120088
46. Boudenne A., Ibos L., Fois M., Majesté J.C., Géhin E. (2005) Electrical and thermal behavior of polypropylene filled with copper particles. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 36(11). pp. 1545–1554. doi: 10.1016/j.compositesa.2005.02.005
47. Eucken A. (1940) Allgemeine Gesetzmäßigkeiten für das Wärmeleitvermögen verschiedener Stoffarten und Aggregatzustände. *Forschung Gabiete Ingenieur*. 11(1). pp. 6–20. doi: 10.1007/BF02584103
48. Carson J.K., Lovatt S.J., Tanner D.J., Cleland A.C. (2006) Predicting the effective thermal conductivity of unfrozen porous foods. *Journal of Food Engineering*. 5. pp. 297–307. doi: 10.1016/j.jfoodeng.2005.04.021
49. Dykhne A.M. (1971) Conductivity of a two-dimensional two-phase system. *Soviet Physics JETP*. 32(1). pp. 63–65.
50. Sushko M.Y., Kriskiv S.K. (2009) Compact group method in the theory of permittivity of heterogeneous systems. *Technical Physics*. 54. pp. 423–427. doi: 10.1134/S1063784209030165
51. Tjaden B., Cooper S.J., Brett D.J.L., Kramer D., Shearing P.R. (2016) On the origin and application of the Bruggeman correlation for analyzing transport phenomena in electrochemical systems. *Current Opinion in Chemical Engineering*. 12. pp. 44–51. doi: 10.1016/j.coche.2016.02.006
52. Conway J.H., Sloane N.J.A. (1988) *Sphere Packings, Lattices and Groups*. New York: Springer-Verlag.

**Сведения об авторах:**

**Бошнятов Борис Владимирович** – доктор технических наук, главный научный сотрудник Института прикладной механики Российской академии наук (Москва, Россия). E-mail: bosbosh@mail.ru

**Глазунов Анатолий Алексеевич** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: gla@niipmm.tsu.ru

**Ищенко Александр Николаевич** – доктор физико-математических наук, директор Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

**Карнет Юлия Николаевна** – кандидат физико-математических наук, Ученый секретарь Института прикладной механики Российской академии наук (Москва, Россия). E-mail: iam@iam.ras.ru

**Information about the authors:**

**Boshenyatov Boris V.** (Doctor of Technical Sciences, Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation). E-mail: bosbosh@mail.ru

**Glazunov Anatoliy A.** (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gla@niipmm.tsu.ru

**Ishchenko Aleksandr N.** (Doctor of Physics and Mathematics, Director, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

**Karnet Yuliya N.** (Candidate of Physics and Mathematics, Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation). E-mail: iam@iam.ras.ru

*Статья поступила в редакцию 07.08.2022; принята к публикации 04.12.2023*

*The article was submitted 07.08.2022; accepted for publication 04.12.2023*

Научная статья

УДК 533.6.011.5

doi: 10.17223/19988621/86/4

## Численное моделирование обтекания конгломератов высокотемпературным потоком газа

Иван Владимирович Еремин<sup>1</sup>, Кирилл Владимирович Костюшин<sup>2</sup>,  
Сергей Александрович Рашковский<sup>3</sup>,  
Константин Николаевич Жильцов<sup>4</sup>

<sup>1, 2, 3, 4</sup> Томский государственный университет, Томск, Россия

<sup>3</sup> Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук,  
Москва, Россия

<sup>1</sup> iveremin@niipmm.tsu.ru

<sup>2</sup> kostushink@niipmm.tsu.ru

<sup>3</sup> rash@ipmnet.ru

<sup>4</sup> konstantin@niipmm.tsu.ru

**Аннотация.** Моделируется движение конгломерата в равномерном и ускоряющемся потоках газа. Перемещение конгломерата осуществляется под действием сил давления. Эффекты теплопередачи между газом и конгломератом, горение и разрушение конгломерата не учитываются. Проведены численные исследования характеристик движения сферической частицы и трех типов конгломератов различной компоновки, эквивалентных по массе. Показано, что при движении в равномерном потоке асимметричные конгломераты значительно отклоняются от оси симметрии, при движении в ускоряющемся потоке конгломераты стабилизируются в ее окрестности, в том числе в случае отклонения исходного положения конгломерата от оси симметрии.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, сопловой блок, частицы, конгломерат

**Благодарности:** Работа выполнена за счет гранта РНФ (проект № 21-19-00541).

**Для цитирования:** Еремин И.В., Костюшин К.В., Рашковский С.А., Жильцов К.Н. Численное моделирование обтекания конгломератов высокотемпературным потоком газа // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 55–69. doi: 10.17223/19988621/86/4

## Numerical modelling of conglomerates flowing by high-temperature gas flow

Ivan V. Eremin<sup>1</sup>, Kirill V. Kostyushin<sup>2</sup>,  
Sergey A. Rashkovskiy<sup>3</sup>, Konstantin N. Zhil'tsov<sup>4</sup>

<sup>1, 2, 3, 4</sup> Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

<sup>3</sup> Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russian Federation

<sup>1</sup> iveremin@niipmm.tsu.ru

<sup>2</sup> kostushink@niipmm.tsu.ru

<sup>3</sup> rash@ipmnet.ru

<sup>4</sup> konstantin@niipmm.tsu.ru

**Abstract.** In this paper, the modeling of conglomerate motion in a uniform and accelerating gas flow is carried out. The gas is viscous, compressible, and heat-conducting. Conglomerate motion is induced by pressure forces. The gas-to-conglomerate heat transfer and the combustion and destruction of the conglomerate are not taken into account. The mathematical model of the motion of conglomerates in the flow of combustion products is based on three-dimensional Navier–Stokes equations and the  $k-\omega$  SST turbulence model. The system of equations is solved numerically using Godunov-type schemes. The problem solution is obtained by means of technologies and calculation algorithms based on dynamic grids. In the developed methodology, the computational grid is constructed according to the Overset method. Numerical simulation of the motion of non-spherical particles in the nozzle block of a solid-fuel rocket engine is performed using the ANSYS Fluent software package. The conglomerate motion in the computational domain is specified by user-defined functions.

Numerical studies of the motion characteristics of one spherical particle and three types of conglomerates, which are equivalent in mass and number of particles, in a uniform and accelerating gas flow have been performed. It has been found that when moving in a uniform flow, asymmetric conglomerates deviate significantly from the symmetry axis, and when moving in an accelerating flow, the conglomerates are stabilized in the vicinity of the symmetry axis, even if the initial position of the conglomerates deviates from the axis.

**Keywords:** mathematical simulation, nozzle block, particles, conglomerate

**Acknowledgments:** This work was partially supported by the Russian Scientific Foundation (project No. 21-19-00541).

**For citation:** Eremin, I.V., Kostyushin, K.V., Rashkovskiy, S.A., Zhil'tsov, K.N. (2023) Numerical modelling of conglomerates flowing by high-temperature gas flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 55–69. doi: 10.17223/19988621/86/4

### Введение

Задача увеличения энергетических характеристик твердотопливных зарядов применительно к энергоустановкам ракетно-космической техники является одним из приоритетных направлений развития. Путем введения с состав энергетических

добавок на основе магния, алюминия и бора можно добиться увеличения температуры сгорания, теплопроизводительности, степени газообразования и т.д. Содержание алюминия до 15% может обеспечить увеличение температуры сгорания до 3 000 К и плотности смесевых топлив более 2.0 г/см<sup>3</sup> [1]. Перспективным направлением решения задачи повышения эффективности металлизированных горючих в составе высокоэнергетических материалов является полная или частичная замена алюминия на борсодержащие компоненты, обладающие высокой удельной энергией окисления в процессе горения.

В камере сгорания частицы высокоэнергетических добавок проходят ряд физико-химических превращений, что приводит к формированию двухфазного потока продуктов сгорания, смеси газа и одиночных частиц или конгломератов. Движение конгломератов под действием газодинамических сил в зависимости от геометрических характеристик частиц и конгломератов представляет интерес с точки зрения понимания процессов их горения.

Описанию обтекания частиц конденсированной фазы в потоке посвящено множество монографий и научных статей российских и зарубежных исследователей. Так, в работе [2] анализируются результаты численных расчетов обтекания сферы сверхзвуковым потоком газа при значениях числа Маха, превышающих  $M = 1.5$ . Ряд модельных задач о движении мелких сферических частиц в газовом потоке рассмотрен в [3]. В работе [4] авторы предлагают реализовать подход к моделированию обтекания составной частицы капли алюминия и присоединенного к ней оксида с учетом скольжения оксида по поверхности основной частицы. В результате исследований получают сведения о коэффициентах сопротивления и теплоотдачи конгломерата несферической формы. Авторами работы [5] рассмотрено двухфазное течение в до-, транс- и сверхзвуковых частях сопла при больших числах Рейнольдса с учетом взаимного влияния газа и твердых частиц. Движение частиц описывалось с помощью подхода Лагранжа (т.е. рассчитывались параметры каждой частицы или кластера частиц). Изучено влияние формы контура дозвуковой части сопла, коэффициента загрузки частиц и их диаметра на характеристики потока частиц. В работе [6] рассматривается взаимодействие частиц конденсированной фазы с высокоэнтропийным потоком воздуха в прямой камере сгорания с учетом горения конденсированных частиц. Для моделирования двухфазного потока авторы используют комбинированный подход Лагранжа–Эйлера с учетом процесса горения частиц. Рассмотрены случаи подачи частиц как со стенки камеры сгорания, так и по оси потока. Авторами установлено, что при подаче частиц со стенки (в отличие от осевой подачи частиц) распределение их траекторий в камере сгорания сильно зависит от их дисперсности.

Обзор литературы показывает, что в большинстве физико-математических моделей движения частиц конденсированной фазы принимается допущение о том, что частица имеет сферическую форму, а геометрический пересчет несферических частиц к сферическим приводит лишь к получению оценочного результата, который будет являться достаточно грубым приближением.

Задача моделирования движения отдельных частиц и конгломератов сложной несимметричной формы очень часто сводится к построению качественной расчетной сетки, учитывающей и режим течения, и геометрические особенности конгломератов. Базовые методики построения сеток – применение адаптивных сеток, деформируемых сеток или сеток с перекрытиями. При использовании ме-

тодик, основанных на применении адаптивных сеток, в каждый момент времени генерируется новая геометрия, соответствующая положению объекта в текущий момент времени. При этом изменяется как количество ячеек, граней и узлов, так и топология связей [7, 8]. Альтернативой данной методике может служить подход, основанный на применении алгоритмов деформации сетки с сохранением топологии связей [9]. В таком случае число геометрических элементов расчетной модели сохраняется, изменяются только координаты узлов. Методики, основанные на применении деформируемых сеток, значительно экономят вычислительные ресурсы, однако могут использоваться только в тех случаях, когда обтекаемый объект изменяет свое положение незначительно. Альтернативным подходом для решения задач моделирования движения конгломератов в потоке продуктов сгорания является использование методики с применением многообластных сеток с перекрытиями [10]. Данная модель позволяет проводить расчеты с объектами,двигающимися под действием как внешних сил, так и сил, определяемых самой системой газ–частица.

Цель данной работы – изучение характеристик движения совокупности сферических частиц (конгломератов) конденсированной фазы в потоке газа в условиях камеры сгорания и ускоряющегося потока, вплоть до сверхзвуковых скоростей.

### Физико-математическая постановка задачи

Рассматривается задача о моделировании движения конгломерата в равномерном или ускоряющемся газовом потоке. Газ является вязким, сжимаемым, теплопроводным. Не учитываются эффекты теплообмена между газом и частицами, а также горение и разрушение конгломерата частиц. Расчеты проводились для продуктов сгорания модельного топлива. Пространственная постановка нестационарного течения вязкого сжимаемого газа описывается системой уравнений Навье–Стокса, которая дополняется уравнением неразрывности и уравнением энергии [11]. Подробное описание системы уравнений приведено в работе [12]. Система уравнений дополнительно замыкается моделью турбулентности SST  $k-\omega$  (Menter’s Shear Stress Transport), которая является гибридом  $k-\omega$ - и  $k-\varepsilon$ -моделей, позволяя точнее разрешать движение потока на стенке и вдали от нее [13]. При обдуве конгломератов потоком газа он ускоряется под действием приложенных сил давления к их поверхности. Интегралы сил давления и их моменты записываются в виде:

$$\vec{F}_A = \vec{F}_A^{\text{rp}} + \vec{F}_A^p, \quad \vec{M}_C = \oint_S \vec{r} \times \tau_w \vec{n} + p \cdot \vec{n} \, dS = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{A_i}, \quad (1)$$

где

$$\vec{F}_A^p = \oint_S p \cdot \vec{n} \, dS = \sum_i \vec{n}_i \cdot p_i \cdot dS_i = \sum_i \vec{F}_{A_i}^p, \\ \vec{F}_A^{\text{rp}} = \sum_i \tau_w \vec{n}_i \cdot dS_i = \sum_i - \left[ \nabla \vec{U}_i \right] \vec{n}_i \cdot \mu_i \cdot dS_i = \sum_i \vec{F}_{A_i}^{\text{rp}}.$$

Поступательная и угловая скорости конгломерата определяются как

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{a}_i \cdot dt, \quad (2)$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}' + \vec{b}_i \cdot dt, \quad (3)$$

где  $\vec{V}'$  и  $\vec{\omega}'$  – поступательная и угловая скорости на предыдущем шаге по времени,  $\vec{a}_i$  и  $\vec{b}_i$  – ускорение составляющих скорости соответственно. В проекции на оси пространственной системы координат ускорение запишется в виде:

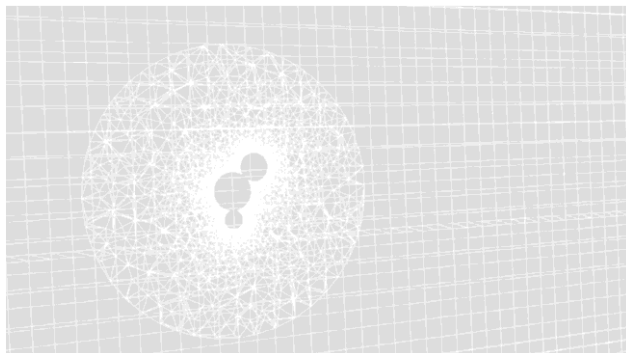
$$a_x = \frac{1}{m} F_x; \quad a_y = \frac{1}{m} F_y; \quad a_z = \frac{1}{m} F_z;$$

$$b_x = \frac{M_x}{I_{xx}}; \quad b_y = \frac{M_y}{I_{yy}}; \quad b_z = \frac{M_z}{I_{zz}}.$$

Начальные условия в расчетной области соответствуют распределению скорости  $V$ , давления  $P$  и температуры  $T$ . В случае ускоряющегося потока начальные распределения соответствуют параметрам установившегося течения в сопле. На входной границе для равномерного потока фиксируются постоянные давление  $P$  и скорость потока  $V$ ; для ускоряющегося потока  $P$  и  $T$ . На твердых стенках соблюдаются условия непротекания и прилипания, на твердых поверхностях частиц, составляющих конгломерат – аналогичные граничные условия. На выходной границе ставятся «мягкие» граничные условия.

### Методика решения задачи

Для численного моделирования использовались программный пакет ANSYS Fluent и технология динамических расчетных сеток типа «Химера» (модуль Overset). На рис. 1 представлены основная расчетная сетка и расчетная сетка для конфигурации конгломерата частиц. Численное решение системы уравнений по пространству проводится со 2-м порядком точности, а по времени с 1-м порядком, поскольку алгоритм модуля Overset не позволяет рассчитывать уравнения схемами высшего порядка.



**Рис. 1.** Пример построения расчетной сетки с перекрытием  
**Fig. 1.** An example of constructing a computational grid with overlap

Пересчет динамики движения частиц реализуется при помощи программного кода, компилируемого в оболочку в виде UDF-функции (User-Defined Functions). Данный код реализует решение методом Гаусса системы линейных алгебраических уравнений Эйлера для поступательной и вращательной скоростей в связанной с частицей (конгломератом) системе координат. Решение этих уравнений позво-

ляет определить поступательную и угловую скорости относительного движения частиц на каждом временном шаге. Скорость движения подсеточной области конгломерата совпадает со скоростью движения центра масс конгломерата.

В качестве входных данных решатель, используемый в представленной методике, принимает геометрию конгломерата, сетку с перекрытием в основной расчетной области, координаты центра масс, собственные моменты и массу конгломерата. Полученное решение системы уравнений Эйлера определяет силы и моменты, действующие на частицы, угловые скорости и ускорение, координаты и углы вращения конгломерата.

Разработанная методика на каждом шаге по времени состоит из следующих этапов решения: сначала рассчитывается газодинамическое поле течения; происходит расчет интеграла сил давления, действующих на конгломерат; рассчитываются моменты сил, действующих на конгломерат; определяются дополнительные динамические характеристики (поступательная / угловая скорость, ускорения и т.д.); происходит пересчет положения центра масс и углов поворота; изменение положения перекрывающихся расчетных сеток; запись файлов с данными и передача данных о новом положении частиц конгломерата в газодинамический решатель. Приведенный алгоритм позволяет рассчитывать характеристики сложного движения конгломератов в потоке газа с собственными моментами инерции менее чем  $10^{-8}$ .

#### Геометрические параметры конгломератов

| Название | Масса,<br>$10^{-12}$ кг | Число<br>частиц | Диаметр<br>частицы, мкм | $I_{xx} \cdot 10^{-23}$ | $I_{yy} \cdot 10^{-23}$ | $I_{zz} \cdot 10^{-23}$ |
|----------|-------------------------|-----------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| Сфера    | 1.06184                 | 1               | 11.75                   | 1.468071                | 1.468071                | 1.468071                |
| Тип 1    |                         | 13              | 5                       | 1.873402                | 1.873404                | 1.897228                |
| Тип 2    |                         |                 |                         | 2.854207                | 2.957781                | 1.879009                |
| Тип 3    |                         |                 |                         | 1.957979                | 2.436632                | 2.013638                |

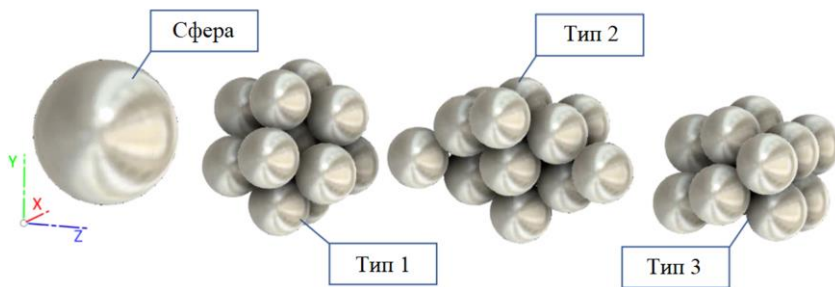
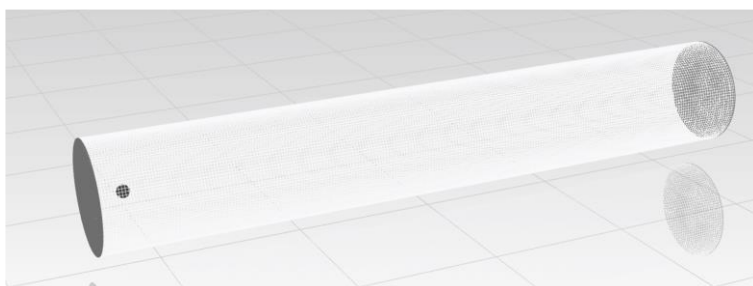


Рис. 2. Геометрия конгломератов  
Fig. 2. Geometry of conglomerates

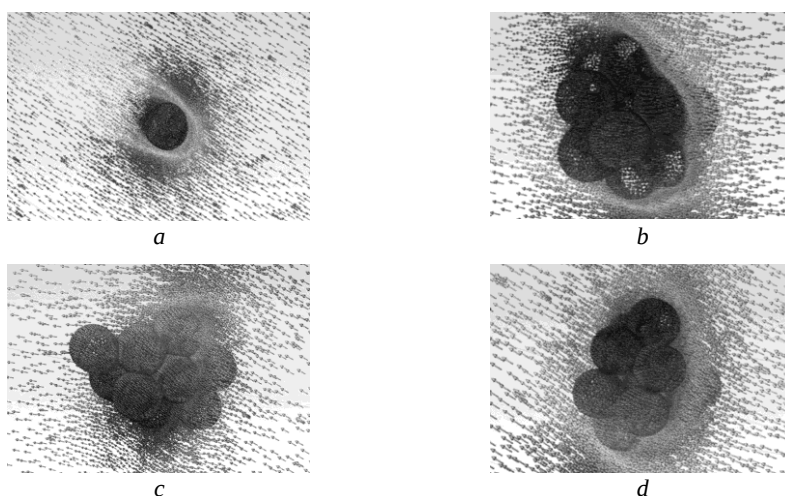
В работе исследованы характеристики движения несферических конгломератов, основные характеристики которых приведены в таблице. Формы конгломератов представлены на рис. 2.

### Исследование характеристик движения конгломератов в равномерном потоке

В случае равномерного газового потока расчетная область представляла собой цилиндр диаметром  $d = 0.55$  мм и длиной  $l = 7.5$  мм. В момент времени  $t = 0$  с конгломерат помещался на оси симметрии на расстоянии 0.3 мм от входа в расчетную область. Геометрия расчетной области показана на рис. 3. Фоновая расчетная сетка является гексаэдральной и состоит из 500 тысяч ячеек. Перекрывающая расчетная сетка является тетраэдральной и состоит из 250 тысяч ячеек. Шаг по времени составляет  $5 \cdot 10^{-9}$  с. В соответствии с физической постановкой задачи в области задаются следующие начальные условия:  $V = 100$  м/с,  $P = 50$  атм и  $T = 2500$  К. Давление и скорость на входной границе  $P = 50$  атм,  $V = 100$  м/с. На рис. 4. показаны векторы скорости в плоскости  $XY$  для момента времени  $t = 2.0 \cdot 10^{-5}$ .



**Рис. 3.** Геометрия расчетной области для расчетов в равномерном потоке  
**Fig. 3.** Geometry of a computational domain for calculations in a uniform flow



**Рис. 4.** Обтекание конгломератов потоком газообразных продуктов сгорания:  
 $a$  – сфера;  $b$  – тип 1;  $c$  – тип 2;  $d$  – тип 3

**Fig. 4.** Flow of combustion gases around conglomerates:  
( $a$ ) sphere, ( $b$ ) type 1, ( $c$ ) type 2, and ( $d$ ) type 3

На рис. 5. показаны траектории исследованных конгломератов в равномерном потоке. Видно, что траектории движения конгломератов «Тип 1» и «Тип 2» имеют существенное отклонение относительно начального расположения конгломерата на оси в плоскости  $XU$ , а конгломерат «Тип 3» – в плоскости  $XU$  и  $YZ$ . Наибольшую угловую скорость достигают конгломераты «Тип 2» и «Тип 3», что связано с существенной несимметричностью их форм.

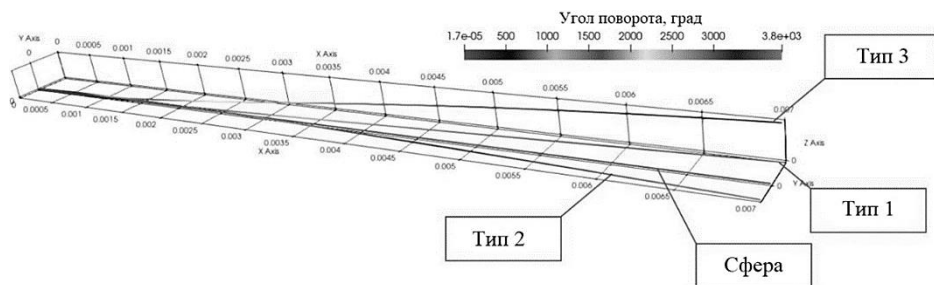


Рис. 5. Траектория движения конгломератов в равномерном потоке

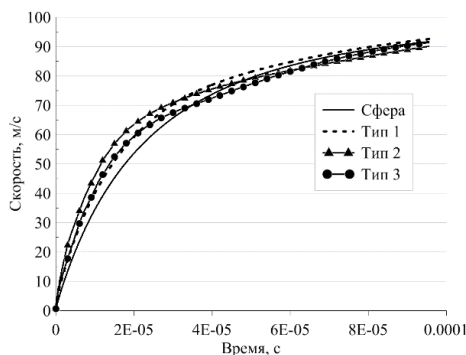
Fig. 5. Trajectory of conglomerates moving in a uniform flow

На рис. 6. показано изменение модуля вектора скорости конгломератов, на рис. 7, 8 – компоненты вектора скорости конгломератов  $V_y$  и  $V_z$ . В момент времени  $t = 2 \cdot 10^{-5}$  с между конфигурациями «Сфера» и «Тип 2» наблюдается максимальная разница по величине скорости – примерно 26%. Такой эффект обусловлен большей площадью поверхности обдува конгломерата «Тип 2». Стоит отметить, что компоненты вектора скорости  $V_z$  для конфигураций, отличных от «Тип 3», имеют малую величину, при этом компоненты скорости  $V_y$  для трех конфигураций конгломератов имеют амплитуду, сильно отличную от нуля. В момент времени, соответствующий покиданию конгломератом расчетной области, максимальное отличие скоростей конгломератов составляет не более 1.75%.

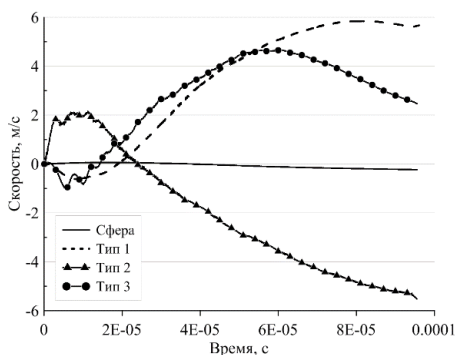
На рис. 9–11 показано изменение углов наклона конгломератов относительно осей  $Z$ ,  $X$  и  $Y$ . Сфера и конгломераты «Тип 1» и «Тип 2» практически не вращаются относительно осей  $Y$  и  $Z$ . Существенная закрутка относительно оси  $Z$  наблюдается только у конгломерата «Тип 3». При этом все конгломераты активно вращаются относительно оси  $X$ . Такое поведение связано со смещением центра масс конгломерата относительно центра давления.

### Исследование характеристик движения конгломератов в ускоряющемся потоке

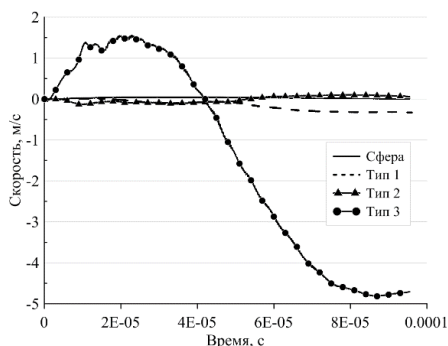
При моделировании движения в ускоряющемся потоке расчетная область представляла собой сопло с радиусом входного сечения  $R_{вх} = 1$  мм; радиусом критического сечения  $R_{кр} = 0.35$  мм и удлиненной дозвуковой частью длиной  $l_{дз} = 7$  мм. Конгломерат помещался на расстоянии 0.3 мм от входа в расчетную область. Геометрия расчетной области показана на рис. 12. Фоновая расчетная сетка является гексаэдральной и состоит из 850 тысяч ячеек. Перекрывающая расчетная сетка является тетраэдральной и состоит из 200–400 тысяч ячеек. Шаг по времени составляет  $10^{-9}$  с.



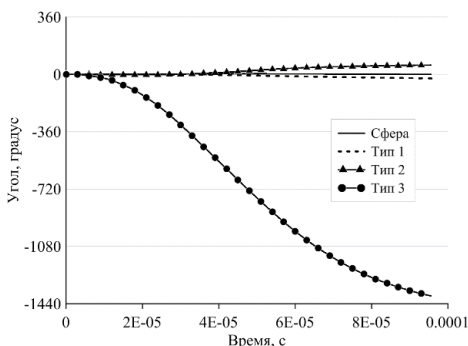
**Рис. 6.** Модуль вектора скорости конгломерата  
**Fig. 6.** The modulus of the conglomerate velocity vector



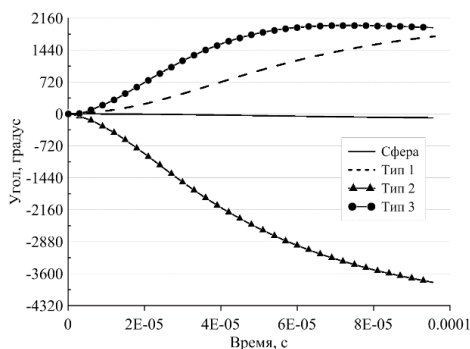
**Рис. 7.** Компонента  $V_y$  вектора скорости конгломерата  
**Fig. 7.** Component  $V_y$  of the conglomerate velocity vector



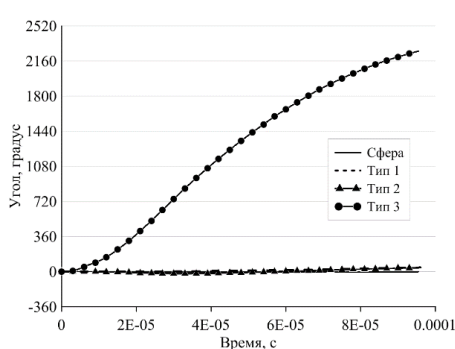
**Рис. 8.** Компонента  $V_z$  вектора скорости конгломерата  
**Fig. 8.** Component  $V_z$  of the conglomerate velocity vector



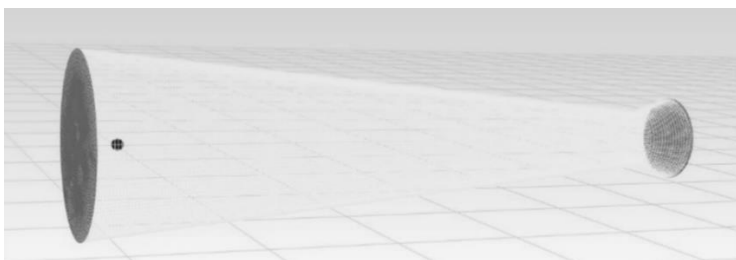
**Рис. 9.** Угол поворота конгломерата относительно оси Z  
**Fig. 9.** The angle of the conglomerate rotation around Z-axis



**Рис. 10.** Угол поворота конгломерата относительно оси X  
**Fig. 10.** The angle of the conglomerate rotation around X-axis



**Рис. 11.** Угол поворота конгломерата относительно оси Y  
**Fig. 11.** The angle of the conglomerate rotation around Y-axis



**Рис. 12.** Геометрия расчетной области для расчетов в ускоряющемся потоке  
**Fig. 12.** Geometry of the computational domain for calculations in an accelerating flow

В качестве начальных условий использовалось установившееся течение в сопле. Граничные и начальные условия аналогичны случаю для описанного выше равномерного потока. Здесь рассмотрено два варианта начального положения конгломератов: на оси сопла и на удалении от оси сопла – вдоль оси  $Y$  на расстоянии 0.35 мм. Для конгломерата «Тип 2» численного эксперимента для ускоряющегося потока не проводилось.

#### *Расположение конгломерата на оси сопла*

Конгломерат помещался на оси симметрии на расстоянии 0.3 мм от входа в расчетную область. На рис. 13 показано изменение модуля вектора скорости конгломератов, на рис. 14, 15 – компоненты вектора скорости  $V_y$  и  $V_z$  конгломератов в ускоряющемся потоке. Скоростные характеристики частицы и конгломератов показывают, что частицы значительно ускоряются по мере приближению к соплу. При этом конгломерат «Тип 3» испытывает сильные колебания в плоскости осей  $Y$  и  $Z$ . На рис. 16–18 показано изменение углов вращения конгломератов относительно осей  $Z$ ,  $X$  и  $Y$ . Видно, что по оси  $X$  вращение всех исследуемых типов частиц небольшое. Для осей  $Z$  и  $Y$  характерно сильное вращение конгломерата «Тип 3». Данный результат объясняется его несимметричной формой и соответствующим расположением центра масс и собственных моментов инерции.

#### *Расположение конгломерата на удалении от оси сопла*

Для исследования характеристик движения конгломератов в сужающемся сопле конгломерат помещался на удалении от оси симметрии – на расстоянии 0.35 мм вдоль оси  $Y$ . На рис. 19 показано изменение модуля вектора скорости конгломератов, на рис. 20, 21 – компоненты вектора скорости  $V_y$  и  $V_z$  конгломератов в ускоряющемся потоке. На рис. 22–24 показано изменение углов наклона конгломератов относительно осей  $Z$ ,  $X$  и  $Y$ . Видно, что в сравнении с положением на оси симметрии максимальная поступательная скорость конгломератов упала. При этом поступательные скорости по другим осям резко возрастают по мере приближения к оси, а для конгломерата «Тип 3» частота колебаний сильно уменьшилась. Углы вращения для рассмотренных конфигураций сильно уменьшились только для конфигурации «Тип 3», для остальных конфигураций остались в тех же диапазонах. На рис. 25 показано изменение  $Y$ -координаты вдоль оси сопла, что говорит о приближении конгломератов к оси сопла в процессе движения.

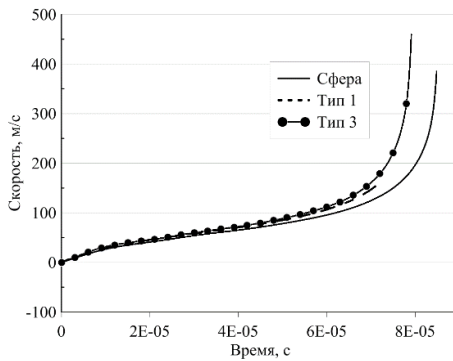


Рис. 13. Модуль вектора скорости конгломерата

Fig. 13. The modulus of the conglomerate velocity vector

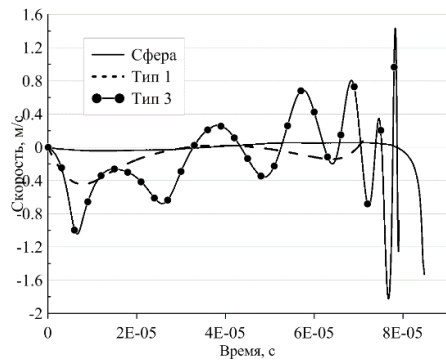


Рис. 14. Компонента  $V_y$  вектора скорости конгломерата

Fig. 14. Component  $V_y$  of the conglomerate velocity vector

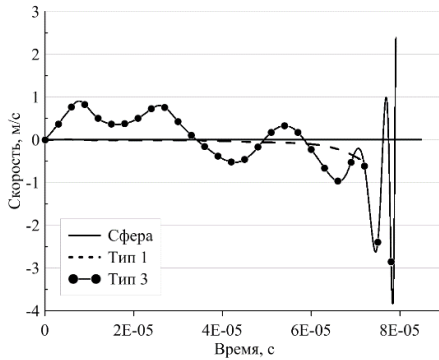


Рис. 15. Компонента  $V_z$  вектора скорости конгломерата

Fig. 15. Component  $V_z$  of the conglomerate velocity vector

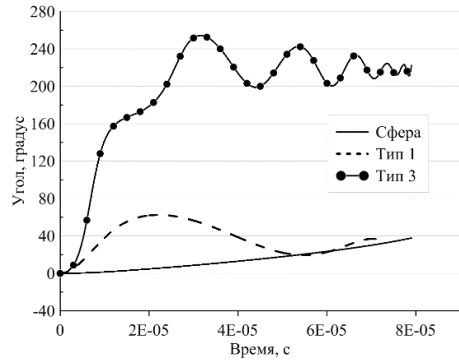


Рис. 16. Угол поворота конгломерата относительно оси Z

Fig. 16. The angle of the conglomerate rotation around Z-axis

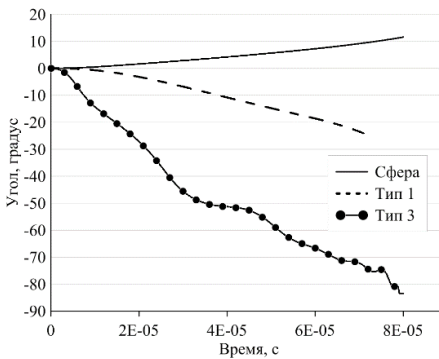


Рис. 17. Угол поворота конгломерата относительно оси X

Fig. 17. The angle of the conglomerate rotation around X-axis

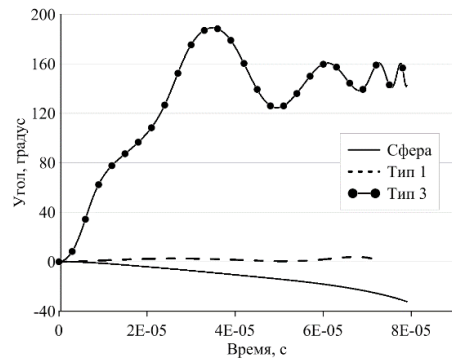
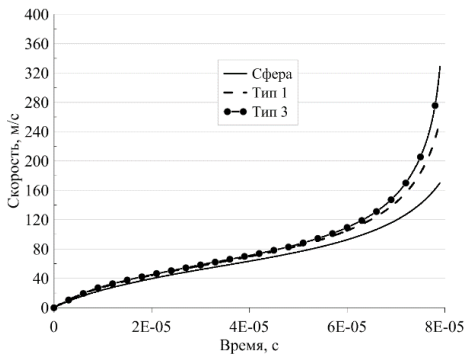
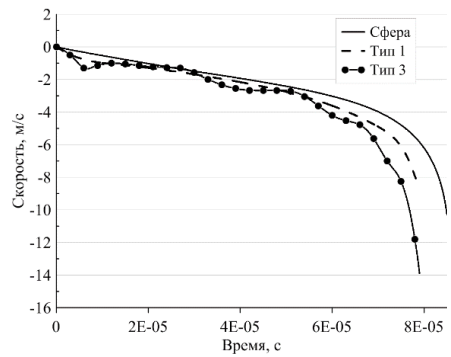


Рис. 18. Угол поворота конгломерата относительно оси Y

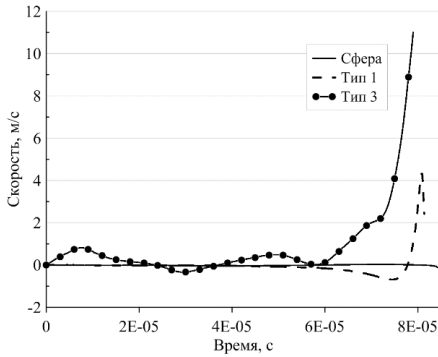
Fig. 18. The angle of the conglomerate rotation around Y-axis



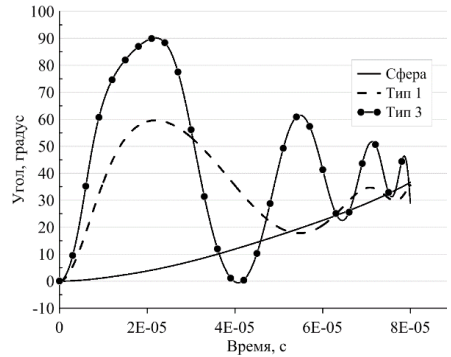
**Рис. 19.** Модуль вектора скорости конгломерата  
**Fig. 19.** The modulus of the conglomerate velocity vector



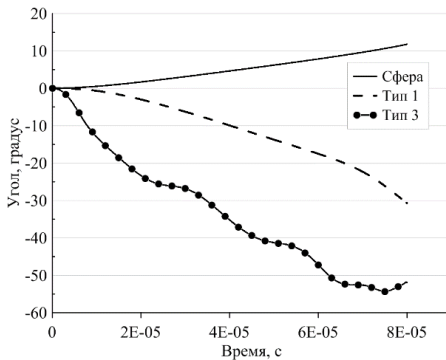
**Рис. 20.** Компонента  $V_y$  вектора скорости конгломерата  
**Fig. 20.** Component  $V_y$  of the conglomerate velocity vector



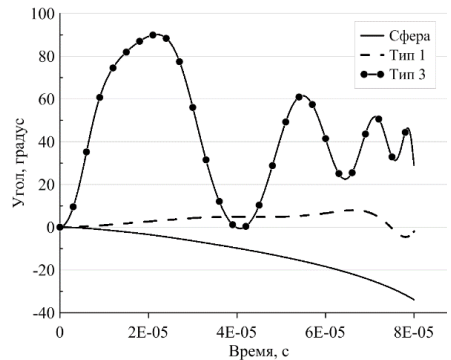
**Рис. 21.** Компонента  $V_z$  вектора скорости конгломерата  
**Fig. 21.** Component  $V_z$  of the conglomerate velocity vector



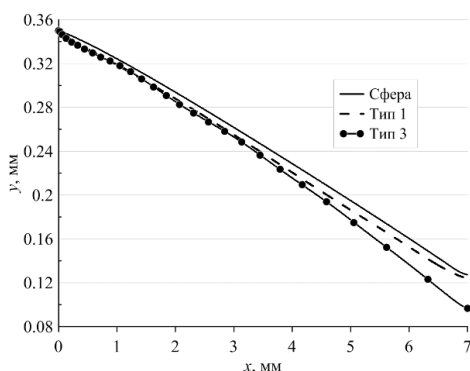
**Рис. 22.** Угол поворота конгломерата относительно оси Z  
**Fig. 22.** The angle of the conglomerate rotation around Z-axis



**Рис. 23.** Угол поворота конгломерата относительно оси X  
**Fig. 23.** The angle of the conglomerate rotation around X-axis



**Рис. 24.** Угол поворота конгломерата относительно оси Y  
**Fig. 24.** The angle of the conglomerate rotation around Y-axis



**Рис. 25.** Изменение Y-координаты вдоль оси сопла  
**Fig. 25.** Variation in Y-coordinate along the nozzle axis

### Закключение

В результате проведенного исследования по изучению характеристик движения совокупности сферических частиц (конгломератов) конденсированной фазы в потоке газа в условиях камеры сгорания и ускоряющегося потока предложена методика расчета движения конгломератов частиц конденсированной фазы произвольной формы. Проведено моделирование движения произвольных конфигураций конгломератов в равномерном потоке и в ускоряющемся потоке при различных начальных положениях конгломератов относительно оси сопла.

Показано, что движение в ускоряющемся потоке смещает конгломераты к оси сопла и частично демпфирует вращение конгломератов. Для конфигураций конгломератов со смещенным центром масс относительно центра давления наблюдаются затухающие колебания угловой скорости конгломерата по мере возрастания скорости потока продуктов сгорания. Несимметричные конгломераты в равномерном потоке существенно отклоняются от оси симметрии, а скорость конгломератов с большей площадью обдува в отдельные моменты времени возрастает.

Представленная методика расчета позволяет решать частную задачу движения конгломератов в потоке газа и построить общую физико-математическую модель с учетом процессов химического, механического и теплового взаимодействия частиц друг с другом и с продуктами сгорания при их движении в камере сгорания и сопловом блоке.

### Список источников

1. Штхер М.С. Топлива и рабочие тела ракетных двигателей. М. : Машиностроение, 1976. 167 с.
2. Базжин А.П., Благосклонов В.И., Минайло А.Н., Пирогова С.В. Обтекание сферы сверхзвуковым потоком совершенного газа // Ученые записки ЦАГИ. 1971. № 3. С. 95–100.
3. Гродзовский Г.Л. О движении мелких частиц в газовом потоке // Ученые записки ЦАГИ. 1974. № 2. С. 80–89.
4. Емельянов В.Н., Тетерина И.В., Волков К.Н. Сопротивление и теплообмен металлоксидных агломератов в потоке продуктов сгорания твердого топлива // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2020. Т. 21 (1). С. 1–23. doi: 10.33257/PhChGD.21.1.893

5. Ветлущий В.Н., Ганимедов В.Л., Мучная М.И. Исследование потока газа с твердыми частицами в сверхзвуковом сопле // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 46, № 6. С. 65–77.
6. Воронетский А.В., Смоляга В.И., Арефьев К.Ю., Гусев А.А., Абрамов М.А. Параметрическое исследование взаимодействия частиц конденсированной фазы с высокоэнтальпийным потоком воздуха в прямоточной камере сгорания // Инженерный журнал: наука и инновации. 2017. № 8 (68). С. 1–18. doi: 10.18698/2308-6033-2017-8-1663
7. Гильманов А.Н. Методы адаптивных сеток в задачах газовой динамики. М. : МАИК Наука / Интерпериодика, 2000. 247с.
8. Лебедев А.С., Лисейкин В.Д., Хакимзянов Г.С. Разработка методов построения адаптивных сеток // Вычислительные технологии. 2002. Т. 7, № 3. С. 29–43.
9. Зайцев Д.К., Щур Н.А. Применение деформируемых сеток для численного моделирования течений в областях с подвижными границами // Научно-технические ведомости СПбГТУ. 2006. № 5-1. С. 15–22.
10. Козелков А.С., Ефремов В.Р., Куркин А.А., Тарасова Н.В., Уткин Д.А., Тятюшкина Е.С. Моделирование движения тел в вязкой несжимаемой жидкости // Сибирский журнал вычислительной математики. 2019. Т. 22, № 3. С. 261–280. doi: 10.15372/SJNM20190302
11. Пирогов В.Б., Северинов Л.И. О расчете внутренних течений вязкого теплопроводного газа // ВИНТИ. 1977. № 3359-77. Деп.
12. Червакова А.В., Костюшин К.В. Исследование характеристик движения несферических частиц конденсированной фазы в потоке продуктов сгорания // Перспективы развития фундаментальных наук : сб. науч. тр. XIX Междунар. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых. Томск, 2022. № 3. С. 36–38.
13. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten years of industrial experience with the SST Turbulence model // Proceedings of the 4th International Symposium on Turbulence. Heat and Mass Transfer. West Redding : Begell House Inc., 2003. P. 625–632.

### References

1. Shtekher M.S. (1976) *Topliva i rabochie tela raketnykh dvigateley* [Rocket engine propellants and working bodies]. Moscow: Mashinostroyeniye.
2. Bazzhin A.P., Blagosklonov V.I., Minaylos A.N., Pirogova S.V. (1971) Obtekanie sfery sverkhzvukovym potokom sovershennogo gaza [Streamline of a sphere by a supersonic flow of a perfect gas]. *Uchenye zapiski TSAGI – TsAGI Science Journal*. 3. pp. 95–100.
3. Grodzovskiy G.L. (1974) O dvizhenii melkikh chastits v gazovom potoke [On the motion of small particles in a gas flow]. *Uchenye zapiski TSAGI – TsAGI Science Journal*. 2. pp. 80–89.
4. Emel'yanov V., Teterina I., Volkov K. (2020) Soprotivlenie i teploobmen metalloksidnykh aglomeratov v potoke produktov sgoraniya tverdogo topliva [Drag and heat transfer of metal and oxide agglomerates in flow of combustion products of solid propellant]. *Fiziko-khimicheskaya kinetika v gazovoy dinamike – Propellant Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*. 21(1). pp. 1–23. doi: 10.33257/PhChGD.21.1.893
5. Vetlutskiy V.N., Ganimedov V.L., Muchnaya M.I. (2005) Investigation of a gas flow with solid particles in a supersonic nozzle. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 46(6). pp. 824–834. doi: 10.1007/s10808-005-0140-3
6. Voronetskiy A.V., Smolyaga V.I., Aref'ev K.Yu., Gusev A.A., Abramov M.A. (2017) Parametricheskoe issledovanie vzaimodeystviya chastits kondensirovannoy fazy s vysokoent'pийnym potokom vozdukhа v pryamotchnoy kamere sgoraniya [Parametric study of condensed phase particles interaction with a high-enthalpy air flow in a co-current combustion chamber]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii – Engineering Journal: Science and Innovation*. 8(68). pp. 1–18. doi: 10.18698/2308-6033-2017-8-1663
7. Gil'manov A.N. (2000) *Metody adaptivnykh setok v zadachakh gazovoy dinamiki* [Methods of adaptive meshes in problems of gas dynamics]. Moscow: MAIK Nauka/Interperiodika.

8. Lebedev A.S., Liseykin V.D., Khakimzyanov G.S. (2002) Razrabotka metodov postroeniya adaptivnykh setok [Development of methods for constructing adaptive meshes]. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 7(3). pp. 29–43.
9. Zaytsev D.K., Shchur N.A. (2006) Primenenie deformiruemykh setok dlya chislennogo modelirovaniya techeniy v oblastiakh s podvizhnymi granitsami [Application of deformable meshes for numerical modeling of flows in regions with moving boundaries]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGTU – Saint Petersburg Polytechnical University Journal*. 5(1). pp. 15–22.
10. Kozelkov A.S., Efremov V.R., Kurkin A.A., Tarasova N.V., Utkin D.A., Tyatyushkina E.S. (2019) Simulation of body motion in viscous incompressible fluid. *Numerical Analysis and Applications*. 12(3). pp. 219–233. doi: 10.15372/SJNM20190302
11. Pirogov V.B., Severinov L.I. (1977) O raschete vnutrennikh techeniy vyazkogo teploprovodnogo gaza [On the calculation of internal flows of viscous heat-conducting gas]. *VINITI*. №3359-77
12. Chervakova A.V., Kostyushin K.V. (2022) Issledovanie kharakteristik dvizheniya nesfericheskikh chastits kondensirovannoy fazy v potoke produktov sgoraniya [Investigation of the characteristics of the motion of non-spherical condensed phase particles in the flow of combustion products]. *Sbornik nauchnykh trudov XIX Mezhdunarodnoy konferentsii studentov, aspirantov i molodykh uchenykh. Perspektivy razvitiya fundamental'nykh nauk*. 3. pp. 36–38.
13. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. (2003) Ten years of industrial experience with the SST Turbulence model. *Proceedings of the 4th International Symposium on Turbulence. Heat and Mass Transfer*. West Redding: Begell House Inc. pp. 625–632.

#### **Сведения об авторах:**

**Еремин Иван Владимирович** – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией 101 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: iveremin@niipmm.tsu.ru

**Костюшин Кирилл Владимирович** – младший научный сотрудник лаборатории 101 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: kostushink@niipmm.tsu.ru

**Рашковский Сергей Александрович** – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории термодинамики и горения Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук (Москва, Россия); ведущий научный сотрудник лаборатории проектирования рабочих элементов ракетно-космической техники Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: rash@ipmnet.ru

**Жильцов Константин Николаевич** – научный сотрудник лаборатории 101 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: konstantin@niipmm.tsu.ru

#### **Information about the authors:**

**Eremin Ivan V.** (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: iveremin@niipmm.tsu.ru

**Kostyushin Kirill V.** (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kostushink@niipmm.tsu.ru

**Rashkovskiy Sergey A.** (Doctor of Physics and Mathematics, Principal Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation; Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: rash@ipmnet.ru

**Zhil'tsov Konstantin N.** (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: konstantin@niipmm.tsu.ru

*Статья поступила в редакцию 09.10.2023; принята к публикации 04.12.2023*

*The article was submitted 09.10.2023; accepted for publication 04.12.2023*

Научная статья

УДК 531.3, 532.1

doi: 10.17223/19988621/86/5

## О влиянии жесткой границы на профиль суперкаверны

Александр Николаевич Ищенко<sup>1</sup>, Илья Михайлович Бирюков<sup>2</sup>,  
Виктор Владимирович Буркин<sup>3</sup>, Алексей Сергеевич Дьячковский<sup>4</sup>,  
Антон Юрьевич Саммель<sup>5</sup>, Алена Сергеевна Шестопалова<sup>6</sup>,  
Андрей Владимирович Чупашев<sup>7</sup>

*1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 Томский государственный университет, Томск, Россия*

*<sup>1</sup> ichan@niipmm.tsu.ru*

*<sup>2</sup> ilya.biryukov.2072@mail.ru*

*<sup>3</sup> v.v.burkin@mail.ru*

*<sup>4</sup> lex\_okha@mail.ru*

*<sup>5</sup> anton\_sammel@mail.ru*

*<sup>6</sup> shestopalova@ftf.tsu.ru*

*<sup>7</sup> chupashevav@gmail.ru*

**Аннотация.** При высокоскоростном движении тела в воде вокруг него образуются свободные границы, замкнутые в удлиненную газопаровую полость, называемую суперкаверной. В работе приводятся качественные и количественные результаты экспериментального исследования явлений, сопутствующих высокоскоростному суперкавитирующему движению твердых тел в воде вблизи жесткой границы в потоке при числе кавитации порядка  $10^{-3}$ . Получены детальные видеоматериалы, показывающие динамику суперкаверны при наличии жесткой стенки в период своего расширения и сужения. Эти результаты могут быть использованы для верификации математических моделей, описывающих движение твердого тела в условиях суперкавитационного обтекания.

**Ключевые слова:** гидробаллистическая трасса, суперкавитация, ударник, кавитатор, суперкаверна, свободная граница, жесткая граница

**Благодарности:** Результаты были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России, проект № 0721-2020-0032.

**Для цитирования:** Ищенко А.Н., Бирюков И.М., Буркин В.В., Дьячковский А.С., Саммель А.Ю., Шестопалова А.С., Чупашев А.В. О влиянии жесткой границы на профиль суперкаверны // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 70–78. doi: 10.17223/19988621/86/5

Original article

## On the effect of a rigid boundary on the supercavity profile

Aleksandr N. Ishchenko<sup>1</sup>, Il'ya M. Biryukov<sup>2</sup>, Viktor V. Burkin<sup>3</sup>,  
Aleksey S. D'yachkovskiy<sup>4</sup>, Anton Yu. Sammel<sup>5</sup>, Alena S. Shestopalova<sup>6</sup>,  
Andrey V. Chupashev<sup>7</sup>

<sup>1, 2, 3, 4, 5, 6, 7</sup> Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

<sup>1</sup> ichan@niipmm.tsu.ru

<sup>2</sup> ilya.biryukov.2072@mail.ru

<sup>3</sup> v.v.burkin@mail.ru

<sup>4</sup> lex\_okha@mail.ru

<sup>5</sup> anton\_sammel@mail.ru

<sup>6</sup> shestopalova@ftf.tsu.ru

<sup>7</sup> chupashevav@gmail.ru

**Abstract.** The features of cavity formation during striker motion near a rigid boundary are considered. Experimental results demonstrating cavity development in the presence of the rigid wall are presented. The time dependences of the supercavity cross-sectional diameters and the vertical displacement of the supercavity cross-sectional centers are plotted. Qualitative and quantitative analysis of the rigid boundary effect on the supercavity profile behind the striker moving in water is performed. It has been shown that the supercavity is repelled from the rigid wall during the expansion phase and it is attracted to the wall during the contraction and collapse phases. Distortion of the supercavity boundary is observed not only when the striker has overpassed the rigid wall but also when it is moving above the wall. In some cases, this may affect the striker trajectory. The obtained results can be used to verify mathematical models describing the motion of a solid body under conditions of supercavitating flow.

**Keywords:** hydroballistic track, supercavitation, striker, cavitator, supercavity, free boundary, rigid boundary

**Acknowledgments:** These results were obtained within the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. 0721-2020-0032).

**For citation:** Ishchenko, A.N., Biryukov, I.M., Burkin, V.V., D'yachkovskiy, A.S., Sammel, A.Yu., Shestopalova, A.S., Chupashev, A.V. (2023) On the effect of a rigid boundary on the supercavity profile. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 70–78. doi: 10.17223/19988621/86/5

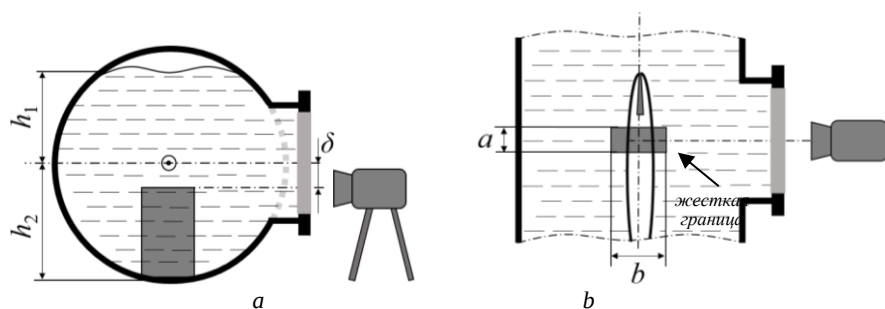
## Введение

На данный момент сохраняют свою актуальность вопросы, связанные с высокоскоростным движением в воде твердых тел [1–8]. Основным критерием, характеризующим такие процессы в жидкости, является число кавитации  $\sigma = 2\Delta p/\rho V^2$ , где  $V$  – скорость ударника,  $\rho$  – плотность воды,  $\Delta p$  – разница между давлением в невозмущенной среде и давлением внутри каверны. При  $\sigma < 1$  в потоке наблюдаются кавитационные явления, причем чем меньше величина числа кавитации, тем эти явления становятся более выраженными, и в потоке могут образовываться

обширные полости – каверны и суперкаверны, способные многократно превосходить размеры движущегося тела. С одной стороны, это позволяет существенно повысить дальность движения, с другой – существенно усложняется картина взаимодействия тела с потоком и распределения сил, действующих на тело в процессе движения [9–11]. Для построения профиля каверны за телом, движущимся в невозмущенном потоке жидкости, существуют различные подходы [9, 12–16]. При появлении в среде неоднородностей, свободных или твердых границ вблизи траектории движения можно ожидать наличия локальных возмущений, способных повлиять на форму каверны и, как следствие, на дальнейшее движение тела. В этом случае представление о форме границ образующейся каверны необходимо для прогнозирования поведения движущегося тела в условиях несплошного обтекания. Цель работы состоит в получении качественных и количественных данных о профиле суперкаверны при движении ударника вдоль жесткой границы.

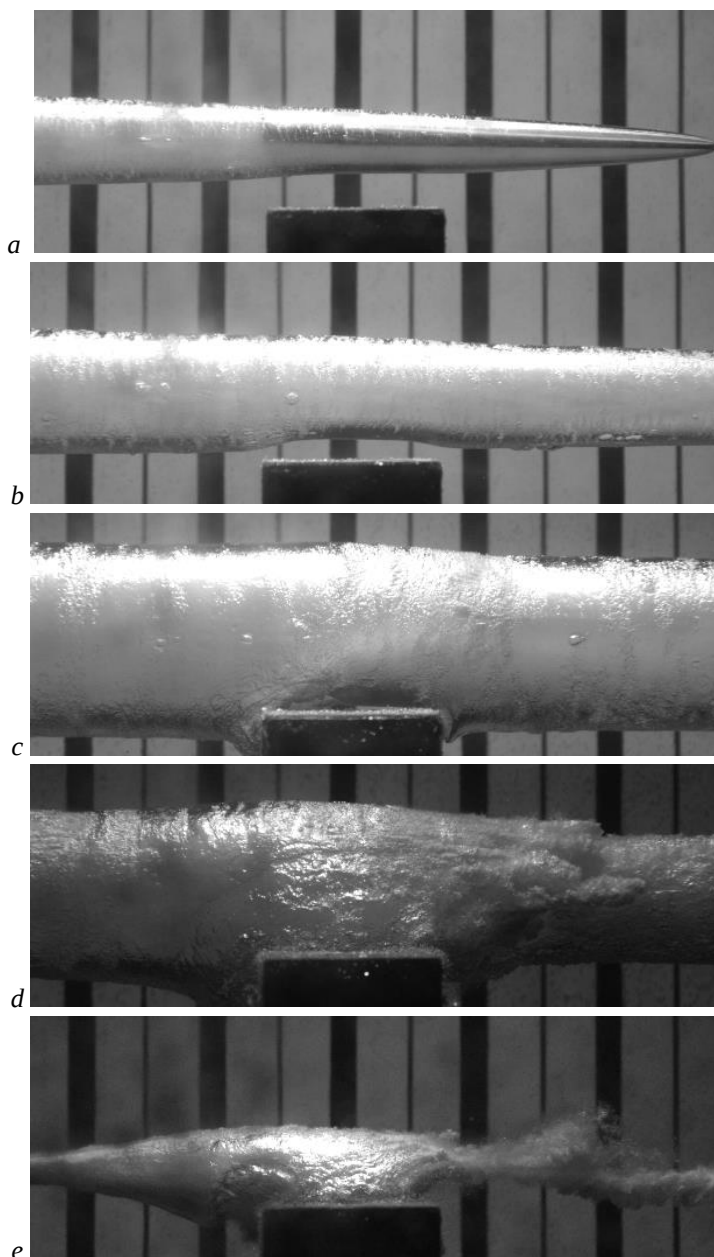
### Постановка и проведение эксперимента

Требовалось произвести моделирование движения ударника в режиме суперкавитации параллельно горизонтальной плоской жесткой границе, для имитации которой использовался стальной прямоугольный брус. Исследуемые процессы протекают внутри гидробаллистической трассы, которую упрощенно можно представить в виде горизонтального цилиндрического тоннеля с иллюминаторами для наблюдения [17]. Ударник длиной  $l_{уд}$  с усеченной конической носовой частью (кавитатором) радиусом  $R_n$  ускоряется в баллистической установке, дульный срез которой погружен в воду и загерметизирован. Процесс выстрела из баллистической установки, а также взаимодействие ударника с пулеуловителем в конце траектории сопровождаются существенным возмущением окружающей среды, поэтому область наблюдаемых процессов находится на расстоянии не менее 1 м от дульного среза, расстояние до пулеуловителя составляет 10 м. На рис. 1 приведена схема постановки эксперимента.



**Рис. 1.** Схема эксперимента: *a* – вид с торца трассы (в разрезе); *b* – вид сверху  
**Fig. 1.** Experimental design with a rigid boundary: (a) cross-sectional view from the end of the track and (b) top view

Ось метания совпадает с продольной осью трассы, проходящей на расстоянии  $h_2 = 0.3$  м от дна тоннеля, сверху присутствует свободная поверхность на расстоянии  $h_1 = 0.25$  м от оси (см. рис. 1, *a*). Ниже оси метания на расстоянии  $\delta$  устанавливается стальной брус со сторонами  $a = 0.05$  м,  $b = 0.1$  м (см. рис. 1, *b*). Камера



**Рис. 2.** Основные фазы развития суперкаверны вблизи жесткой границы ( $\delta = 7.9R_n$ ):  
 а – ударник в суперкаверне; б – расширение суперкаверны, с – максимум,  
 д – сужение, е – схлопывание

**Fig. 2.** The main stages of supercavitation development near the rigid boundary ( $\delta = 7.9R_n$ ):  
 (a) striker in a supercavity; (b) expansion, (c) maximum, (d) contraction,  
 and (e) collapse of the supercavity

смонтирована в один уровень с верхней горизонтальной плоскостью бруса, имитирующей жесткую границу. Темп съемки составляет  $10^4$  кадров в секунду, время экспонирования – 1 мкс.

Измерение скорости ударника и геометрических параметров суперкаверны производится по фотографиям, исходя из известного масштаба в плоскости наблюдаемого явления. Ударник в процессе движения может немного отклоняться от намеченной траектории, поэтому после проведения эксперимента величина  $\delta$  также уточняется по фотографиям.

На рис. 2 показаны характерные кадры из видеозаписи, полученной в эксперименте ( $\delta = 7.9R_n$ ), на которых запечатлен ударник в суперкаверне в момент прохождения над жесткой границей и последующие фазы существования суперкаверны.

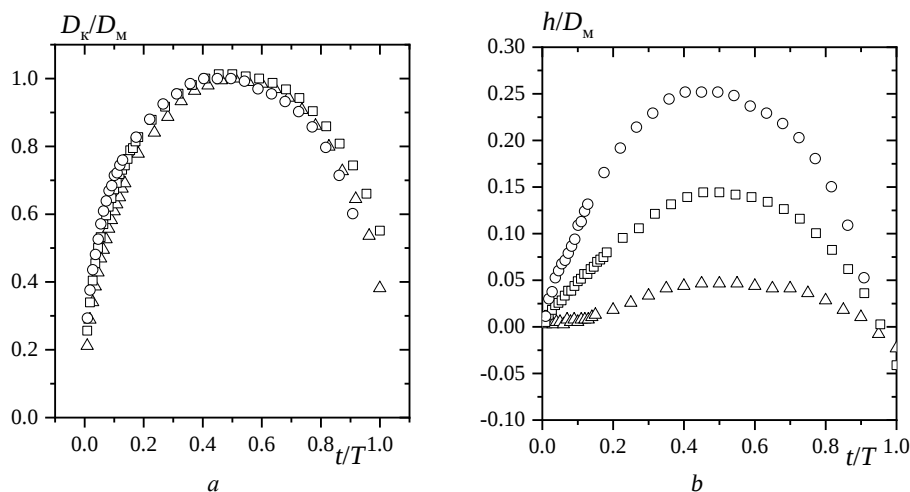
Из данных видеосъемки следует, что над жесткой границей профиль суперкаверны искривлен: нижняя ее граница «отодвигается» от жесткой стенки в фазе расширения (см. рис. 2, *a, b*). Верхняя граница полости также смещена выше, что говорит о смещении всего сечения суперкаверны над жесткой границей. В фазе максимального расширения (см. рис. 2, *c*) радиус суперкаверны над жесткой границей превышает расстояние до нее, однако разрыва контура полости не происходит, и сохраняется некоторый зазор между ее границами и стенками бруска до наступления фазы сужения (см. рис. 2, *d*), в которой происходит обратное: суперкаверна притягивается к бруску, обхватывает его, и часть полости остается на поверхности жесткой границы до схлопывания (см. рис. 2, *e*).

### Обсуждение результатов

Рассмотрим суперкаверну как последовательность бесконечно тонких радиальных сечений, развивающихся по некоторому закону во времени независимо друг от друга от момента прохождения кавитатора в данной точке до схлопывания. Центр каждого сечения в момент его зарождения совпадает с центром кавитатора ударника. В таком случае выберем характерное сечение над жесткой границей и сравним его динамику во времени  $t$  с характерным сечением, расположенным вдали от жесткой границы (на расстоянии  $l_{уд}$  от центра бруска). Обозначим переменной  $T$  полное время существования рассматриваемого сечения суперкаверны: от момента прохождения кавитатора в координате сечения до схлопывания. Через  $D_m$  обозначим диаметр рассматриваемого сечения каверны в фазе его максимального расширения. На рис. 3, *a* в безразмерном виде представлены зависимости диаметров  $D_m$  рассматриваемых сечений суперкаверны от времени в двух экспериментах:  $\sigma = 9.8 \cdot 10^{-4}$ ,  $\delta = 7.9R_n$  и  $\sigma = 8.7 \cdot 10^{-4}$ ,  $\delta = 4.9R_n$ . Данные графики показывают схожий характер развития рассматриваемых сечений во времени. В период  $0 < t/T < 0.5$  каждое сечение находится в фазе расширения, промежутки  $0.5 < t/T < 1$  соответствует фазе сужения. В условиях проведенных экспериментов фаза максимального расширения рассмотренных сечений суперкаверны близко совпадает с серединой временной шкалы ( $t/T = 0.5$ ) процесса их развития. Наличие жесткой границы существенного воздействия на этот фактор не оказало.

Обозначим величиной  $h$  вертикальное смещение центра сечения суперкаверны от его первоначального положения. На рис. 3, *b* приведены зависимости безразмерного вертикального смещения центров рассматриваемых сечений суперка-

верны от своих начальных положений во времени. Наблюдается схожий характер перемещения центров сечений, который говорит о всплытии всей суперкаверны в фазе расширения ( $0 < t/T < 0.5$ ), а после преодоления фазы максимального расширения, наоборот, происходят погружение суперкаверны и схлопывание на оси, расположенной ниже ее первоначального положения.



**Рис. 3.** Зависимость от времени: *a* – диаметров сечений суперкаверны;

*b* – вертикального смещения центров сечений суперкаверны

(□ / ○ – над жесткой границей ( $\delta = 7.9R_n$  /  $\delta = 4.9R_n$ ); △ – вдали от жесткой границы)

**Fig. 3.** Time dependence of the: (a) diameters of supercavity sections

and (b) vertical displacement of supercavity section centers

(□ / ○ – above the rigid boundary ( $\delta = 7.9R_n$  /  $\delta = 4.9R_n$ ); △ – away from the rigid boundary)

Максимальное вертикальное смещение оси сечения суперкаверны над жесткой границей от общей оси суперкаверны составило:  $0.1h/D_M$  при  $\sigma = 9.8 \cdot 10^{-4}$ ,  $\delta = 7.9R_n$  и  $0.2h/D_M$  для случая  $\sigma = 8.7 \cdot 10^{-4}$ ,  $\delta = 4.9R_n$ . Полученные результаты качественно согласуются с теоретическими данными для  $\sigma$  порядка  $10^{-2}$ , приведенными в [12].

### Заключение

В работе получены качественные и количественные данные о профиле суперкаверны при движении ударника вдоль жесткой границы, характеризующие характер влияния жесткой границы на суперкаверну за движущимся в воде ударником:

- на расстоянии  $\delta = 7.9R_n$  от жесткой стенки вертикальное смещение центра сечения от общей оси суперкаверны в пике составило  $0.1h/D_M$ , на расстоянии  $\delta = 4.9R_n$  получено смещение центра сечения  $0.2h/D_M$ ;

- показано, что суперкаверна смещается от жесткой стенки в период своего расширения и приближается к ней в период сужения и при схлопывании;

- зарегистрировано искривление границы суперкаверны не только после прохождения ударника, но и в процессе его движения над жесткой стенкой.

## Список источников

1. Савченко Г.Ю., Савченко Ю.Н. Глиссирование цилиндра в суперкаверне // Прикладна гідромеханіка. 2013. Т. 15, № 3. С. 79–84.
2. Савченко Ю.Н., Власенко Ю.Д., Семененко В.Н. Экспериментальные исследования высокоскоростных кавитационных течений // Гидромеханика. 1998. № 72. С. 103–111.
3. Yang D., Xiong Y., Guo X. Drag reduction of a rapid vehicle in supercavitating flow // International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering. 2017. V. 9, № 1. P. 35–44. doi: 10.1016/j.ijnaoe.2016.07.003
4. Guo Z., Zhang W., Xiao X., Wei G., Ren P. An investigation into horizontal water entry behaviors of projectiles with different nose shapes // International Journal of Impact Engineering. 2012. V. 49. P. 43–60.
5. Vlasenko Y. Experimental investigation of supercavitation flow regimes at subsonic and transonic speeds // Proc. In Fifth Int. Symp. on Cavitation (Osaka, Japan) 2003. Cav03-GS-6-006.
6. Пирсол И. Кавитация / пер. с англ. Ю.Ф. Журавлева. М. : Мир, 1975. 95 с.
7. Иценко А.Н., Буркин В.В., Дьячковский А.С., Майстренко И.В., Погаев К.С., Саммель А.Ю., Чупашев А.В. Одиночное и совместное движение суперкавитирующих ударников в сверхзвуковом режиме в воде // Письма в ЖТФ. 2020. Т. 46, № 23. С. 22–24.
8. DeLei Yu, YingJie Wei, Cong Wang, WeiXue Xia, JiaXing Lu, WenHui Zhang. Experimental investigation on interaction modes and geometric features of two ventilated cavities // Ocean Engineering. 2022. V. 264. Art. 112479. doi: 10.1016/j.oceaneng.2022.112479
9. Логвинович Г.В. Некоторые вопросы глиссирования и кавитации // Труды ЦАГИ. 1980. № 2052. С. 250–270.
10. Ahn S.S. An integrated approach to the design of supercavitating underwater vehicles : Ph.D. Thesis. Georgia Institute of Technology, 2007.
11. Буркин В.В., Акиншин Р.Н., Афанасьева С.А., Борисенков И.Л., Иценко А.Н., Хабибуллин М.В., Чупашев А.В., Югов Н.Т. Особенности высокоскоростного проникания и движения суперкавитирующих кинетических ударников в воде // Инженерно-физический журнал. 2018. Т. 91, № 3. С. 701–708.
12. Буйвол В.Н. Тонкие каверны в течениях с возмущениями. Киев : Наукова думка, 1980. 296 с.
13. Савченко Ю.Н. Моделирование суперкавитационных процессов // Прикладная гидромеханика. 2000. Т. 2, № 3. С. 75–86.
14. Васин А.Д. Задачи гидродинамики и гидроупругости высокоскоростного движения в воде : дис. ... д-ра техн. наук. М. : ЦАГИ, 1999. 282 с.
15. Шахтин А.А. Численный метод расчета суперкаверн // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. Т. 2, № 22. С. 105–109.
16. Ischenko A.N., Burkin V.V., Diachkovskiy A.S., Chupashev A.V. Researching acceleration and deceleration processes of supercavitating strikers under the conditions of hydroballistic track // Journal of Physics: Conference Series. 2020. V. 1709. P. 012014-1–012014-9. doi: 10.1088/1742-6596/1709/1/012014
17. Буркин В.В., Иценко А.Н., Майстренко И.В. и др. Гидробаллистический стенд. Патент на изобретение № 2683148 РФ, G01M 10/00 (2006.01), F41F 3/07 (2006.01). Оpubл. 26.03.2019.

## References

1. Savchenko G.Yu., Savchenko Yu.N. (2013) Glissirovanie tsilindra v superkaverne [Planing a cylinder in a supercavern]. *Prikladna gidromekhanika*. 15(3). pp. 79–84.
2. Savchenko Yu.N., Vlasenko Yu.D., Semenenko V.N. (1998) Eksperimental'nye issledovaniya vysokoskorostnykh kavitatsionnykh techeniy [Experimental studies of high-speed cavitation flows]. *Gidromekhanika*. 72. pp. 103–111.

3. Yang D., Xiong Y., Guo X. (2017) Drag reduction of a rapid vehicle in supercavitating flow. *International Journal Naval Architecture Ocean Engineering*. 9(1) pp. 35–44. doi: 10.1016/j.ijnaoe.2016.07.003
4. Guo Z., Zhang W., Xiao X., Wei G., Ren P. (2012) An investigation into horizontal water entry behaviors of projectiles with different nose shapes. *International Journal Impact Engineering*. 49. pp. 43–60. doi: 10.1016/j.ijimpeng.2012.04.004
5. Vlasenko Y. (2003) Experimental investigation of supercavitation flow regimes at subsonic and transonic speeds. *Proceedings of the Fifth International Symposium on Cavitation, Osaka, Japan*. Cav03-GS-6-006.
6. Pirsol I. (1975) *Kavitatsiya* [Cavitation]. Moscow: Mir.
7. Ishchenko A.N., Burkin, V.V., Diachkovskii A.S., Maystrenko I.V., Rogaev K.S., Sammel A.Yu., Chupashev A.V. (2020) Single and joint movement of supercavitating strikers in the supersonic mode in water. *Technical Physics Letters*. 46. pp. 1177–1179. doi: 10.1134/S1063785020120081
8. Yu D.L., Wei Y.J., Wang C., Xia W.X., Lu J.X., Zhang W.H. (2022) Experimental investigation on interaction modes and geometric features of two ventilated cavities. *Ocean Engineering*. 264. Article 112479. doi: 10.1016/j.oceaneng.2022.112479
9. Logvinovich G.V. (1980) Nekotorye voprosy glissirovaniya i kavitatsii [Some issues of planing and cavitation]. *Trudy TsAGI – TsAGI Science Journal*. 2052. pp. 250–270.
10. Ahn S.S. (2007) *An Integrated Approach to the Design of Supercavitating Underwater Vehicles*. Dissertation. Georgia: Institute of Technology.
11. Burkin V.V., Akinshin R.N., Afanas'eva S.A., Borisenkov I.L., Ishchenko A.N., Khabibulin M.V., Chupashev A.V., Yugov N.T. (2018) Features of high-velocity penetration and motion of supercavitating kinetic strikers in water. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 91(3). pp. 655–662. doi: 10.1007/s10891-018-1787-y
12. Buyvol V.N. (1980) *Tonkie kaverny v techeniyakh s vozmushcheniyami* [Thin cavities in disturbed flows]. Kyiv: Naukova dumka.
13. Savchenko Yu.N. (2000) Modelirovanie superkavitatsionnykh protsessov [Modeling of supercavitation processes]. *Prikladnaya gidromekhanika*. 2(3). pp. 75–86.
14. Vasin A.D. (1999) *Zadachi gidrodinamiki i gidrouprugosti vysokoskorostnogo dvizheniya v vode* [Problems of hydrodynamics and hydroelasticity of high-speed motion in water]. Dissertation. Gosudarstvennyy nauchno-issledovatel'skiy tsentr TsAGI.
15. Shakhtin A.A. (2013) Chislennyy metod rascheta superkavern [Numerical analysis of supercavitation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(22). pp. 105–109.
16. Ischenko A.N., Burkin V.V., Diachkovskiy A.S., Chupashev A.V. (2020) Researching acceleration and deceleration processes of supercavitating strikers under the conditions of hydroballistic track. *Journal of Physics: Conference Series*. 1709. Article 012014. pp. 1–9. doi: 10.1088/1742-6596/1709/1/012014
17. Burkin V.V., Ishchenko A.N., Maystrenko I.V., Fufachev V.M., D'yachkovskiy A.S., Burakov V.A., Korol'kov L.V., Stepanov E.Yu., Chupashev A.V., Rogaev K.S., Sammel A.Yu., Sidorov A.D. (2019) *Gidrobalisticheskiy stend* [Hydroballistic testing facility]. RF Patent № 2683148.

#### **Сведения об авторах:**

**Ищенко Александр Николаевич** – доктор физико-математических наук, директор Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

**Бирюков Илья Михайлович** – лаборант кафедры динамики полета физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ilya.biryukov.2072@mail.ru

**Буркин Виктор Владимирович** – кандидат физико-математических наук, заведующий сектором 71 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: v.v.burkin@mail.ru

**Дьячковский Алексей Сергеевич** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: lex\_okha@mail.ru

**Саммель Антон Юрьевич** – младший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: anton\_sammel@mail.ru

**Шестопалова Алена Сергеева** – техник лаборатории 72 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: shestopalova@ftf.tsu.ru

**Чупашев Андрей Владимирович** – младший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: chupashevav@gmail.ru

**Information about the authors:**

**Ishchenko Aleksandr N.** (Doctor of Physics and Mathematics, Director, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

**Biryukov Il'ya M.** (Laboratory Assistant, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ilya.biryukov.2072@mail.ru

**Burkin Viktor V.** (Candidate of Physics and Mathematics, Head of 71 Department, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: v.v.burkin@mail.ru

**D'yachkovskiy Aleksey S.** (Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lex\_okha@mail.ru

**Sammel Anton Yu.** (Junior Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: anton\_sammel@mail.ru

**Shestopalova Alena S.** (Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: shestopalova@ftf.tsu.ru

**Chupashev Andrey V.** (Junior Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: chupashevav@gmail.ru

*Статья поступила в редакцию 17.11.2023; принята к публикации 04.12.2023*

*The article was submitted 17.11.2023; accepted for publication 04.12.2023*

Научная статья

УДК 004.942:623.526.4

doi: 10.17223/19988621/86/6

## Верификация одномерной компьютерной модели продольно-поперечных колебаний ствола артиллерийского орудия при выстреле

Даниил Анатольевич Клюкин<sup>1</sup>, Иван Григорьевич Русяк<sup>2</sup>,  
Вадим Гарайханович Суфиянов<sup>3</sup>

*<sup>1, 2, 3</sup>Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова,*

*Ижевск, Россия*

*<sup>1</sup>anatoliikljukin@mail.ru*

*<sup>2</sup>primat@istu.ru*

*<sup>3</sup>vsufiy@mail.ru*

**Аннотация.** Представлены результаты верификации компьютерной одномерной математической модели продольно-поперечных колебаний ствола артиллерийского орудия при нагружении внутренним давлением и тепловым воздействием пороховых газов на основе сравнения с решением задачи, полученным в трехмерной постановке. В математической модели учитывались сила тяжести, неравномерное тепловое нагружение и распределение давления по длине ствола в процессе выстрела. Проведено сравнение результатов одномерного и трехмерного моделирования колебаний цилиндрического ствола переменного кольцевого сечения, цилиндрического ствола переменного кольцевого сечения с учетом технологических отклонений изготовления ствола и ствола с ребрами жесткости. Сравнение показало, что одномерная модель позволяет достаточно точно воспроизводить процесс колебаний ствола, отклонения от результатов моделирования в трехмерной постановке составили от 2,9 до 12,5%. При этом время расчета колебаний ствола сокращается существенно, на 4–5 порядков.

**Ключевые слова:** математическая модель, размерность модели, верификация результатов, продольно-поперечные колебания, ствол орудия

**Благодарности:** Исследование выполнено при финансовой поддержке Программы развития научных и научно-педагогических кадров ИЖГТУ имени М.Т. Калашникова.

**Для цитирования:** Клюкин Д.А., Русяк И.Г., Суфиянов В.Г. Верификация одномерной компьютерной модели продольно-поперечных колебаний ствола артиллерийского орудия при выстреле // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 79–93. doi: 10.17223/19988621/86/6

Original article

## Verification of a one-dimensional computer model of longitudinal-transverse vibrations of an artillery gun barrel on firing

Daniil A. Klyukin<sup>1</sup>, Ivan G. Rusyak<sup>2</sup>, Vadim G. Sufiyanov<sup>3</sup>

<sup>1, 2, 3</sup> Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation

<sup>1</sup> anatoliikljukin@mail.ru

<sup>2</sup> primat@istu.ru

<sup>3</sup> vsufiy@mail.ru

**Abstract.** This paper presents the verification results for a one-dimensional computer mathematical model of longitudinal–transverse vibrations of an artillery gun barrel under internal pressure loading and the thermal effect of powder gases based on a comparison with a three-dimensional problem solution. The mathematical model takes into account gravity, non-uniform thermal loading, and pressure distribution along the barrel length on firing. A comparison of one-dimensional and three-dimensional modeling results for vibrations of a cylindrical barrel with variable annular cross-section and a cylindrical barrel of variable annular cross-section with account for manufacturing tolerance of the classical barrel and the barrel with stiffeners is carried out. The comparison shows that the one-dimensional model gives a reasonable approximation for barrel oscillations with a deviation from the three-dimensional model case ranging from 2.9% to 12.5%. Therewith, the time required to calculate the vibrations of the barrel in a one-dimensional formulation is significantly reduced (by 4-5 orders of magnitude) as compared to a three-dimensional formulation.

**Keywords:** mathematical model, model dimension, model verification, longitudinal-transverse vibrations, gun barrel

**Acknowledgments:** This research was financially supported by the Program for the Development of Scientific and Scientific-Pedagogical Personnel at the Kalashnikov Izhevsk State Technical University.

**For citation:** Kljukin, D.A., Rusyak, I.G., Sufiyanov, V.G. (2023) Verification of a one-dimensional computer model of longitudinal-transverse vibrations of an artillery gun barrel on firing. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 79–93. doi: 10.17223/19988621/86/6

### Введение

Верификация и валидация компьютерных моделей являются одними из ключевых задач с точки зрения их практического применения. Как указывается в статье [1], «современная концепция верификации и валидации основывается на работах К. Попера и Р. Карнапа». В области вычислительной механики твердого тела определение этих терминов представлено в стандарте [2], разработанном американским обществом инженеров-математиков. Отличие процесса верификации от валидации кратко описано одним из руководителей разработки данного

стандарта L.E. Schwer [3]: верификация – это правильное решение уравнений, а валидация – решение правильных уравнений. Пример верификации компьютерной одномерной модели колебаний балки, закрепленной с одного конца и свободной на другом, представлен в [4] на основе сравнения с известным точным аналитическим решением.

Стандарт ГОСТ Р 57700.37–2021 [5] относит термин «верификация» только к программному обеспечению компьютерного моделирования и определяет его как «подтверждение того, что программное обеспечение компьютерного моделирования выполняет подготовку исходных данных, расчеты и обработку результатов таких расчетов в соответствии с указанной математической моделью». Термин «валидация» также соотносится только с программным обеспечением компьютерного моделирования и определяется как «подтверждение того, что программное обеспечение компьютерного моделирования в заявленной области применения адекватно с заданной степенью точности выполняет подготовку исходных данных, расчеты и обработку результатов таких расчетов». Таким образом, верификация компьютерной модели (программного обеспечения компьютерного моделирования) рассматривается как ее соответствие математической модели в рамках установленных допущений, а валидация – как соответствие компьютерной модели физическим процессам в соответствующих областях применения.

В данной работе рассматривается вопрос верификации компьютерной одномерной математической модели упругих продольно-поперечных колебаний ствола артиллерийского орудия, которая представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных [6], дополненную возможностью расчета ствола с кольцевым поперечным сечением, а также учетом неравномерного теплового нагружения ствола в процессе выстрела [7]. Различные варианты одномерных математических моделей колебания ствола представлены в работах [8, 9]. В [8] моделируются колебания ствола 70-мм пушки методом конечных элементов (МКЭ) в одномерной постановке, построена имитационная модель поперечных колебаний ствола при многократной нагрузке во время стрельбы и получены кривые колебаний. В [9] построена имитационная модель поперечных колебаний ствола при многократных нагрузках. Исследованиям напряженно-деформированного состояния (НДС) артиллерийских и стрелковых орудий посвящены работы исследователей из Чехии, Китая, Кореи и других стран [10–15]. Однако в этих работах отсутствует сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными или с трехмерной постановкой, что не позволяет оценить качество соответствующих моделей и алгоритмов их реализации.

В существующих работах верификация программного кода математических моделей, как правило, проводится на основе оценки сеточной сходимости или путем сравнения с аналитическими решениями упрощенных вариантов, например при отсутствии внутренних сил, постоянном давлении и т.п. К сожалению, в рассматриваемой постановке точные аналитические решения продольно-поперечных колебаний ствола артиллерийского орудия получить невозможно. В этой связи верификацию компьютерной модели предполагается провести на основе сравнения с результатами трехмерного математического моделирования.

Условно точное решение поставленной задачи, с учетом сложной геометрической формы при различных условиях неравномерного теплового и силового нагружения, можно получить на основе трехмерного моделирования колебаний

ствола с использованием средств инженерного конечно-элементного моделирования, таких как ANSYS, ЛОГОС, Abaqus, MSC Nastran, COMSOL и др. Недостатком пространственного моделирования МКЭ являются значительные временные затраты на вычисления, которые могут достигать 120 часов для одного варианта на ЭВМ с 16 вычислительными ядрами. Поэтому актуальной задачей является снижение пространственной размерности математической модели, позволяющей описать колебания ствола артиллерийского орудия с точностью, сопоставимой с расчетами в программах трехмерного конечно-элементного моделирования.

Цель данной работы – верификация и оценка адекватности компьютерной одномерной математической модели продольно-поперечных колебаний ствола артиллерийского орудия на основе сравнения с решением в трехмерной постановке в ANSYS.

# 1. Математическая модель колебаний ствола в одномерной постановке

Математическую модель колебаний ствола построим на основе работ [6, 7, 16]. Будем полагать, что ствол представляет собой трубу переменного сечения длины  $L$ . Площадь поперечного сечения ствола обозначим  $F = F(x)$ , площадь канала ствола –  $S = S(x)$ . Уравнение баланса сил, действующих в продольном направлении по оси  $Ox$  записывается в виде [6]:

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\rho F g \sin \varphi - q_1 + \frac{\partial}{\partial x} (F \sigma^{xx}) - p_1 \frac{\partial S}{\partial x}, \quad (1)$$

где  $u(x, t)$  – величина продольных колебаний ствола;  $\rho$  – плотность материала ствола;  $g$  – ускорение силы тяжести;  $\varphi$  – угол возвышения ствола;  $q_1 = q_1(x, t)$  – распределенные внешние силы, действующие в продольном направлении;  $p_1 = p_1(x, t)$  – распределение избыточного давления внутри ствола:

$$p_1 = p(x, t) - p_a, \quad (2)$$

$p(x, t)$  – распределение давления пороховых газов внутри канала ствола, которое определяется из решения основной задачи внутренней баллистики;  $p_a$  – атмосферное давление;  $\sigma^{xx} = \sigma^{xx}(x, t)$  – продольные напряжения в сечении ствола:

$$\sigma^{xx} = E \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{F} \int_F (\sigma^{yy} + \sigma^{zz}) df - \frac{\alpha E}{F} \int_F T(x, r, t) df, \quad (3)$$

где  $E$  – Модуль Юнга;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\alpha$  – коэффициент линейного теплового расширения;  $T(x, r, t)$  – температура ствола в точке с координатами  $x$  и  $r$  в момент времени  $t$ , определяемая по квазиодномерной математической модели [17].

Второе слагаемое в соотношении (3) в одномерной модели предлагается, как и в [6], определять на основе решения задачи Ламе [18]. Тогда можно положить

$$\frac{1}{F} \int_F (\sigma^{yy} + \sigma^{zz}) df = 2p_1 \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad (4)$$

где  $r_1$ ,  $r_2$  – переменные внутренний и внешний радиусы ствола соответственно. Для стволов не кольцевого сечения значение  $r_2$  определяется по формуле  $r_2 = \sqrt{(F + S)/\pi}$ .

В качестве начальных условий для уравнения (1) примем условия покоя:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (5)$$

где  $u_0(x)$  – начальное продольное перемещение, определяемое из решения стационарной задачи о прогибе ствола под действием силы тяжести [6].

В качестве граничных условий будем полагать, что у казенного среза ствол закреплен и продольные перемещения отсутствуют:

$$u(0,t) = u_0(0), \quad (6)$$

а на дульном срезе на ствол внешние силы не действуют:

$$FE \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \quad (7)$$

Уравнение поперечных колебаний ствола в вертикальной плоскости  $Oxy$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = & -\rho F g \cos \varphi - q_2 + (F \sigma^{xx} + p_1 S) \frac{\partial^2 (v + v_{00})}{\partial x^2} + \\ & + v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \int_F (\sigma^{yy} + \sigma^{zz}) y df \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \alpha E \int_F T(x, r, t) y df \right), \end{aligned} \quad (8)$$

с начальными условиями

$$v(x,0) = v_0(x), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (9)$$

и граничными условиями

$$v(0,t) = v_0(0), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad EJ_z \left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial x} \left( EJ_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right|_{x=L} = 0, \quad (10)$$

где  $v = v(x,t)$  – величина поперечных колебаний в вертикальной плоскости;  $v_0 = v_0(x)$  – величина начального прогиба в вертикальной плоскости;  $q_2 = q_2(x,t)$  – распределенные внешние силы, действующие по оси  $Oy$ ;  $v_{00} = v_{00}(x)$  – технологическое смещение центра канала ствола относительно оси  $Oy$ ;  $J_z = J_z(x)$  – момент инерции сечения относительно оси  $Oz$ .

Уравнение поперечных колебаний ствола в горизонтальной плоскости  $Oxz$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = & -q_3 + (F \sigma^{xx} + p_1 S) \frac{\partial^2 (w + w_{00})}{\partial x^2} + \\ & + w \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \int_F (\sigma^{yy} + \sigma^{zz}) z df \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \alpha E \int_F T(x, r, t) z df \right), \end{aligned} \quad (11)$$

с начальными условиями

$$w(x,0) = w_0(x), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (12)$$

и граничными условиями

$$w(0,t) = w_0(0), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad EJ_y \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial x} \left( EJ_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right|_{x=L} = 0, \quad (13)$$

где  $w = w(x,t)$  – величина поперечных колебаний в горизонтальной плоскости;  $w_0 = w_0(x)$  – величина начального прогиба в горизонтальной плоскости;  $q_3 = q_3(x,t)$  – распределенные внешние силы, действующие по оси  $Oz$ ;  $w_{00} = w_{00}(x)$  – технологическое смещение центра канала ствола относительно оси  $Oz$ ;  $J_y = J_y(x)$  – момент инерции сечения относительно оси  $Oy$ .

Обозначим моменты сил, действующие по осям  $Oy$  и  $Oz$  как  $M_y$  и  $M_z$  соответственно:

$$M_y = \int_F (\sigma^{yy} + \sigma^{zz}) y df - \alpha E \int_F T(x,r,t) y df, \quad (14)$$

$$M_z = \int_F (\sigma^{yy} + \sigma^{zz}) z df - \alpha E \int_F T(x,r,t) z df.$$

При решении краевых задач колебаний ствола будем учитывать, что перерезывающие силы и изгибающие моменты на дульном срезе равны нулю [18]:

$$\left. \frac{\partial M_y}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (M_y)_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial M_z}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (M_z)_{x=L} = 0. \quad (15)$$

Разностная аппроксимация дифференциальных уравнений в частных производных проводилась интегро-интерполяционным методом [19], который позволяет построить разностную схему для моделей с негладкими и разрывными коэффициентами.

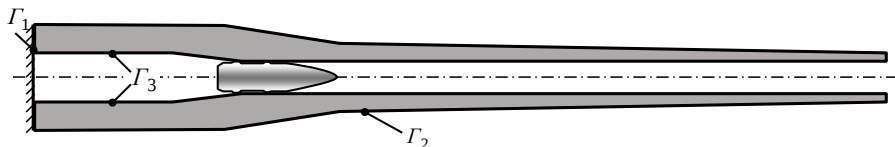
## 2. Математическая модель колебаний ствола в трехмерной постановке

Схема артиллерийского ствола в горизонтальном разрезе представлена на рис. 1. Заштрихованная область  $\Gamma_1$  соответствует границе закрепления ствола. На границе  $\Gamma_2$  задаются нулевые условия на напряжения. На границе  $\Gamma_3$  задается распределение избыточного давления  $p_1(x,t)$ , вычисляемое по формуле (2).

Решение задачи колебаний ствола в пространственной трехмерной постановке осуществлялось в программе ANSYS. Математическая модель напряженно-деформированного состояния ствола с учетом его нагрева в трехмерной постановке имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma^{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma^{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma^{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma^{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma^{yz}}{\partial z} - \rho g = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma^{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma^{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma^{zz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (16)$$

где  $u, v, w$  – перемещения по осям  $Ox, Oy$  и  $Oz$  соответственно;  $\sigma^{\alpha\beta}$  – компоненты тензора напряжений,  $\alpha, \beta \in \{x, y, z\}$ .



**Рис. 1.** К постановке граничных условий для расчета НДС ствола:  $\Gamma_1$  – граница закрепления ствола;  $\Gamma_2$  – внешняя граница ствола;  $\Gamma_3$  – внутренняя граница канала ствола

**Fig. 1.** Representation of boundary conditions for calculating stress-strain state of a barrel:  $\Gamma_1$ , fixation boundary of the barrel;  $\Gamma_2$ , outer boundary of the barrel; and  $\Gamma_3$ , inner boundary of the bore

Связь между напряжениями и деформациями описывается законом Гука в виде:

$$\begin{cases} \varepsilon^{xx} = \left( \sigma^{xx} - \nu(\sigma^{yy} + \sigma^{zz}) - \alpha ET \right) / E, \\ \varepsilon^{yy} = \left( \sigma^{yy} - \nu(\sigma^{xx} + \sigma^{zz}) - \alpha ET \right) / E, \\ \varepsilon^{zz} = \left( \sigma^{zz} - \nu(\sigma^{xx} + \sigma^{yy}) - \alpha ET \right) / E, \\ \varepsilon^{xy} = (1 + \nu) \left( \sigma^{xy} - \alpha ET \right) / E, \\ \varepsilon^{yz} = (1 + \nu) \left( \sigma^{yz} - \alpha ET \right) / E, \\ \varepsilon^{zx} = (1 + \nu) \left( \sigma^{zx} - \alpha ET \right) / E, \end{cases} \quad (17)$$

где  $\varepsilon^{\alpha\beta}$  – компоненты тензора деформаций,  $\alpha, \beta \in \{x, y, z\}$ .

Начальные условия записываются в виде:

$$\begin{cases} u|_{t=0} = u_0, & v|_{t=0} = v_0, & w|_{t=0} = w_0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, & \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = 0, & \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (18)$$

граничные условия записываются в следующем виде:

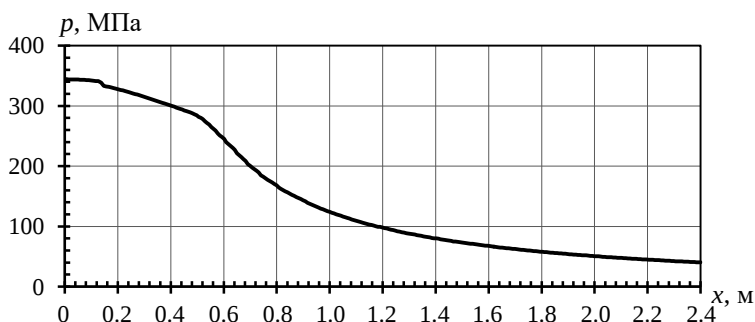
$$\begin{cases} u|_{\Gamma_1} = 0, & v|_{\Gamma_1} = 0, & w|_{\Gamma_1} = 0, \\ \sigma|_{\Gamma_2} = 0, \\ \sigma|_{\Gamma_3} = p_1(x, t), \end{cases} \quad (19)$$

где  $\sigma$  – напряжение, задаваемое по нормали к границе поверхности.

Тепловое нагружение ствола определялось из решения трехмерной задачи теплопроводности [20].

### 3. Результаты верификации одномерной модели колебаний ствола

Расчет внутренней баллистики 30-мм пушки с учетом последействия проводится по модели, учитывающей одномерное распределение параметров газа [7, 21]. Процесс выстрела длится 4 мс, в последующие 6 мс моделируется истечение газа из канала ствола [22]. Максимальное давление в стволе равно 344 МПа. Эпюра максимальных давлений пороховых газов при выстреле представлена на рис. 2.



**Рис. 2.** Эпюра максимальных давлений пороховых газов при выстреле  
**Fig. 2.** Maximum pressure distribution diagram for powder gases on firing

Задача НДС и продольно-поперечных колебаний ствола решалась для материала Structural Steel, характеристики которого представлены в таблице.

#### Характеристики материала ствола

| Характеристика                                      | Размерность       | Значение             |
|-----------------------------------------------------|-------------------|----------------------|
| Плотность $\rho$                                    | кг/м <sup>3</sup> | 7 850                |
| Модуль Юнга $E$                                     | ГПа               | 200                  |
| Коэффициент Пуассона $\nu$                          | –                 | 0,3                  |
| Удельная теплоемкость $c$                           | Дж/(кг·К)         | 567                  |
| Удельная теплопроводность $\lambda$                 | Вт/(м·К)          | 32                   |
| Коэффициент линейного теплового расширения $\alpha$ | 1/К               | $12,5 \cdot 10^{-6}$ |

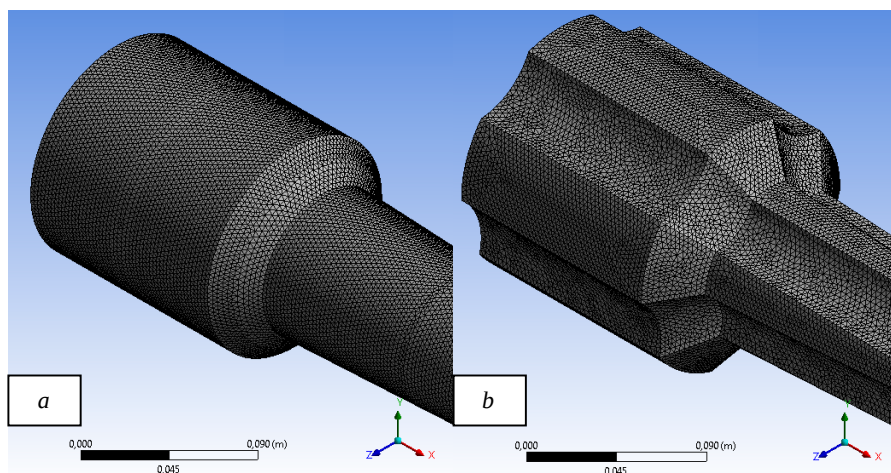
Для одномерного моделирования НДС ствола под действием неравномерного теплового и силового нагружения была разработана программа на языке C#. Трехмерное моделирование осуществлялось в программе ANSYS Transient Structural с начальными значениями, задаваемыми из ANSYS Static Structural, при этом моделирование теплового нагружения осуществлялось в ANSYS Transient Thermal.

Проведено исследование сеточной сходимости методов. Выбор шагов численного интегрирования, обеспечивающих в норме максимум точность расчета 0,1%, осуществлялся в соответствии с принципом Рунге [19]. Количество ячеек сетки в области интегрирования, обеспечивающих заданную точность было равно: для одномерного приближения – 600, для трехмерного – 1,8 млн. Для одномерного приближения был выбран постоянный шаг по времени 1 мкс, для трехмерного – адаптивный шаг от 1 до 10 мкс.

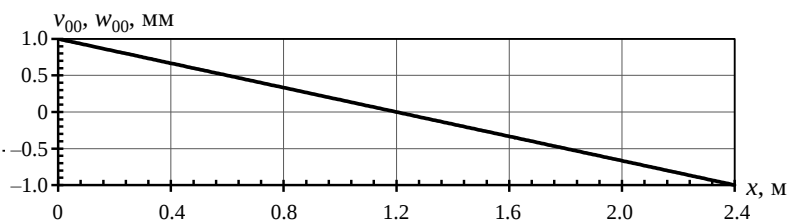
Задача НДС решалась для классического ствола, для ствола при наличии технологических отклонений (рис. 3, а), и ствола с ребрами жесткости (рис. 3, б).

Рассматривался случай, когда технологические отклонения оси канала ствола  $v_{00} = v_{00}(x)$  и  $w_{00} = w_{00}(x)$  задавались линейной функцией координаты  $x$  (рис. 4).

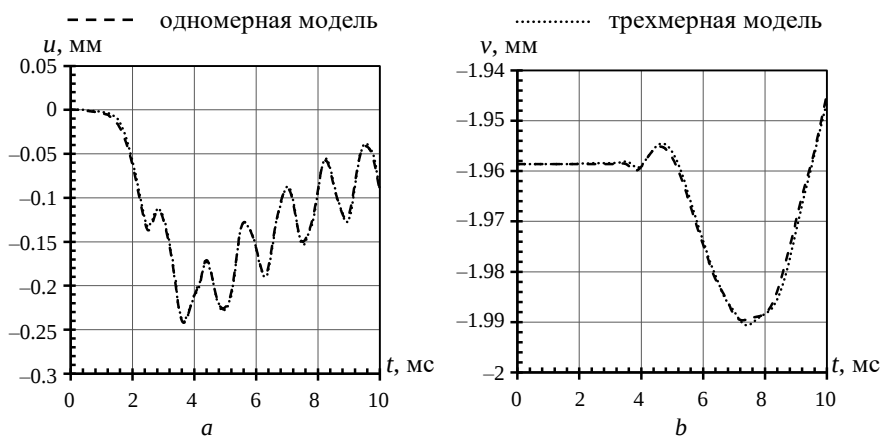
Для стволов без технологических отклонений будем сравнивать только продольные и поперечные колебания в вертикальной плоскости, так как поперечные колебания в горизонтальной плоскости в данном случае отсутствуют. Сравнение продольных и поперечных колебаний классического ствола в одномерной и трехмерной постановках без учета теплового нагружения представлено на рис. 5.



**Рис. 3.** Конечно-элементная сетка: *a* – классический ствол; *б* – ствол с ребрами жесткости  
**Fig. 3.** Finite element mesh for the: (a) classical barrel and (b) barrel with stiffeners



**Рис. 4.** Технологические отклонения линии центров канала ствола  
**Fig. 4.** Manufacturing tolerance of a barrel center line



**Рис. 5.** Сравнение решений задачи колебаний классического ствола по одномерной и трехмерной моделям без учета теплового нагружения: *a* – продольные колебания; *б* – поперечные колебания в вертикальной плоскости  
**Fig. 5.** Comparison of solutions to the classical barrel vibration problem using the one- and three-dimensional models without thermal loading: (a) longitudinal and (b) vertical vibrations

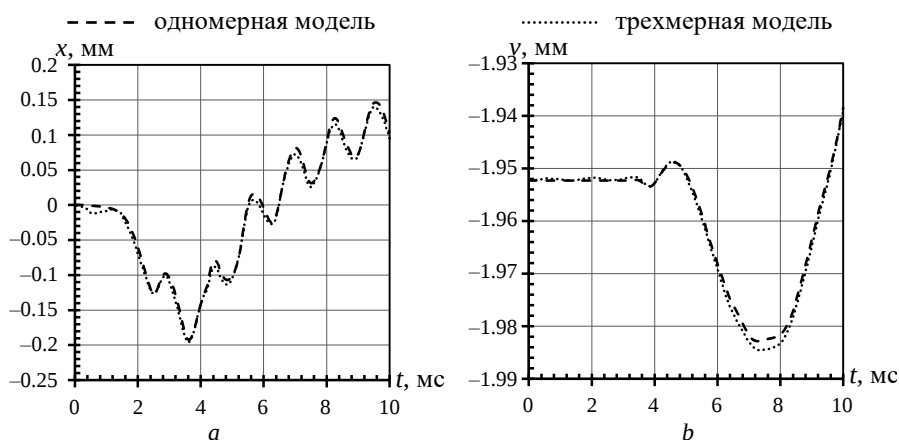
Сравнение решений производилось на основе вычисления максимальных отклонений по формуле

$$\varepsilon = \frac{\max_i |y_O(t_i) - y_A(t_i)|}{\max_i (y_A(t_i)) - \min_i (y_A(t_i))} \cdot 100\%, \quad (20)$$

где  $y_O(t_i)$  – значения перемещений на дульном срезе, вычисленных по одномерной модели в момент времени  $t_i$ ;  $y_A(t_i)$  – значение решения на дульном срезе по трехмерной модели в ANSYS в момент времени  $t_i$ .

Для классического ствола отклонения, определяемые по формуле (20), составили 2,9 и 3,8% для продольных и поперечных колебаний в вертикальной плоскости соответственно.

Сравнение продольных и поперечных колебаний для классического ствола с учетом теплового нагружения представлено на рис. 6.



**Рис. 6.** Сравнение решений задачи колебаний классического ствола по одномерной и трехмерной моделям с учетом теплового нагружения: *a* – продольные колебания; *б* – поперечные колебания в вертикальной плоскости

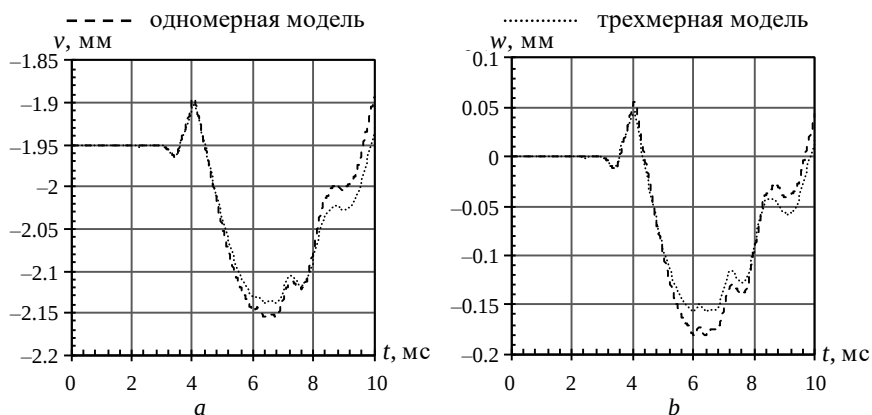
**Fig. 6.** Comparison of solutions to the classical barrel vibration problem using the one- and three-dimensional models with thermal loading: (a) longitudinal and (b) vertical vibrations

Максимальные отклонения решений с учетом теплового нагружения составили 3,3 и 4,3% для продольных и поперечных колебаний в вертикальной плоскости соответственно. Как видим, учет теплового нагружения на расхождение результатов влияет незначительно.

Сравнение поперечных колебаний в вертикальной и горизонтальной плоскостях для ствола с технологическими отклонениями без учета теплового нагружения представлено на рис. 7.

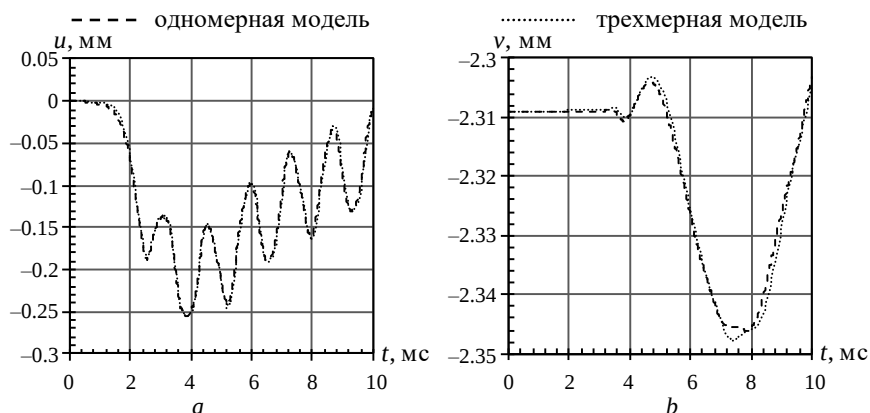
В данном случае максимальные отклонения решений составили 12,5 и 12,1% для поперечных колебаний в вертикальных и горизонтальных плоскостях соответственно.

Сравнение продольных и поперечных колебаний в вертикальной плоскости для ствола с ребрами жесткости представлено на рис. 8.



**Рис. 7.** Сравнение решений задачи поперечных колебаний классического ствола с технологическими отклонениями по одномерной и трехмерной моделям:  $a$  – в вертикальной плоскости;  $b$  – в горизонтальной плоскости

**Fig. 7.** Comparison of solutions to the problem of transverse vibrations of the classical barrel with manufacturing tolerance using the one- and three-dimensional models in: (a) vertical and (b) horizontal planes



**Рис. 8.** Сравнение решения задачи колебаний ствола с ребрами жесткости по одномерной и трехмерной моделям:  $a$  – продольные колебания;  $b$  – поперечные колебания в вертикальной плоскости

**Fig. 8.** Comparison of solutions to the barrel vibration problem with stiffeners using the one- and three-dimensional models: (a) longitudinal and (b) vertical vibrations

Максимальные отклонения решений с учетом ребер жесткости составили 4,5 и 8,6% для продольных и поперечных колебаний в вертикальной плоскости соответственно.

Полученные результаты показывают, что одномерная модель с достаточно высокой точностью описывает колебания ствола в процессе выстрела при сравнении решений с трехмерной моделью. При этом одномерное приближение позволяет получать результаты моделирования в сжатые сроки, что имеет важное значение при моделировании процесса стрельбы очередями, а также при решении оптимизационных задач.

## Заключение

В работе представлены результаты верификации компьютерной одномерной модели продольно-поперечных колебаний ствола при неравномерном тепловом и силовом нагружении пороховых газов на основе сравнения результатов моделирования с решением, полученным по трехмерной модели.

Проведена верификация одномерной модели продольно-поперечных колебаний ствола артиллерийского орудия при выстреле с учетом динамики и распределения давления по длине ствола, теплового нагружения, технологических отклонений оси канала ствола и наличия ребер жесткости. Показано, что отклонения решений, полученных по одномерной и трехмерной моделям, варьируют в пределах от 2,9% для классического ствола до 12,5% для классического ствола с учетом технологических отклонений оси канала ствола.

Использование одномерной модели позволяет на несколько порядков сократить время моделирования напряженно-деформированного состояния ствола при выстреле. Это открывает возможность за приемлемое время решать более сложные задачи, которые описывают процессы, существенно превышающие длительность одиночного выстрела, например стрельба из автоматической пушки очередями и задача оптимизации геометрической формы ствола.

## Список источников

1. Сальников А.В., Французов М.С., Виноградов К.А., Пятунин К.Р., Никулин А.С. Верификация и валидация компьютерных моделей // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2022. № 9 (750). С. 100–115. doi: 10.18698/0536-1044-2022-9-100-115
2. American Society of Mechanical Engineers. Standard for Verification and validation in computational solid mechanics. ASME V&V 10–2019. 2020. 44 p.
3. Schwer L.E. Verification and validation in computational solid mechanics and the ASME Standards Committee // Fluid Structure Interaction and Moving Boundary Problems. 2005. V. 84. P. 109–117. doi: 10.2495/FSI050111
4. American Society of Mechanical Engineers. An illustration of the concepts of verification and validation in computational solid mechanics. ASME V&V 10.1–2012. 2012. 23 p.
5. ГОСТ Р 57700.37–2021. Компьютерные модели и моделирование. Цифровые двойники изделий. Общие положения. М. : Рос. ин-т стандартизации, 2021. 16 с.
6. Хоменко Ю.П., Иценко А.Н., Касимов В.З. Математическое моделирование внутрибаллистических процессов в ствольных системах. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 1999. 256 с.
7. Русяк И.Г., Суфиянов В.Г., Клюкин Д.А. Одномерная математическая модель колебаний ствола с поперечным сечением произвольной формы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 80. С. 133–146. doi: 10.17223/19988621/80/12
8. Игнатов А.В., Богомолов С.Н., Федянин Н.Д. Метод расчета свободных поперечных колебаний ствола автоматической пушки при заданном условии закрепления // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. Вып. 11, ч. 2. С. 70–77.
9. Zheng J., Teng H., Li F. Modeling and Simulation of Gun Barrel's Lateral Vibration // International Conference on Computational Intelligence and Software Engineering. Wuhan, China. 2009. P. 1–4. doi: 10.1109/CISE.2009.5363267
10. Su Z.T., Xu D., Li X.W., Han Z.F. Finite-element time-history analysis for dynamic response of small-caliber guns with projectile-barrel coupling // Journal of Vibration and Shock. 2012. V. 31 (23). P. 104–108.

11. Esen I. Dynamic response of a beam due to an accelerating moving mass using moving finite element approximation // *Math. Comput.* 2011. V. 16 (4). P. 171–182. doi: 10.3390/mca16010171
12. Cifuentes A.O. Dynamic response of a beam excited by a moving mass // *Finite Element Analysis*. V. 5 (3). 1989. P. 237–246. doi: 10.1016/j.dt.2019.07.018
13. Chaturvedi E. Numerical investigation of dynamic interaction with projectile and harmonic behaviour for T-finned machine gun barrels // *Defence Technology*. 2020. V. 16, is. 2. P. 460–469. doi: 10.1016/j.dt.2019.07.018
14. He H., Zhang X. A Variable-Rate Firing Optimization of Launcher Based on Particle Swarm Optimization // *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*. 2019. V. 44 (5). P. 647–653. doi: 10.1002/prep.201800364
15. Karahan F., Pakdemirli M. Vibration analysis of a beam on a nonlinear elastic foundation // *Structural Engineering and Mechanics*. 2017. V. 62 (2). P. 171–178. doi: 10.12989/sem.2017.62.2.171
16. Суфиянов В.Г., Русяк И.Г., Клюкин Д.А. Математическое моделирование колебаний ствола с учетом технологических отклонений при стрельбе очередями // *Фундаментальные основы баллистического проектирования / под ред. Б.Э. Кэрта*. СПб. : БГТУ «Военмех», 2022. С. 90–97. doi: 10.53403/9785951505071\_2022\_386
17. Клюкин Д.А. Математическое моделирование теплового нагружения ствола артиллерийского орудия при выстреле // *Выставка инноваций – 2022 (весенняя сессия) : сб. материалов XXXIII Республ. выставки-сессии студенческих инновационных проектов, Ижевск, 29 апреля 2022 г. Ижевск : Ижевск. гос. техн. ун-т им. М.Т. Калашникова, 2022. С. 176–182. doi: 10.22213/ie022124*
18. Работнов Ю.Н. Сопротивление материалов. М. : Физматгиз, 1963. 456 с.
19. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М. : Наука, 1971. 553 с.
20. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М. : Едиториал УРСС, 2003. 784 с.
21. Русяк И.Г., Тенев В.А. Моделирование баллистики артиллерийского выстрела с учетом пространственного распределения параметров и противодействия // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2020. Т. 12, № 5. С. 1123–1147. doi: 10.20537/2076-7633-2020-12-5-1123-1147
22. Липанов А.М., Русяк И.Г., Суфиянов В.Г. Исследование влияния колебаний ствола на угол вылета снаряда при выстреле // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2020. № 68. С. 80–94. doi: 10.17223/19988621/68/8

## References

1. Sal'nikov A.V., Frantsuzov M.S., Vinogradov K.A., Pyatunin K.R., Nikulin A.S. (2022) Verifikatsiya i validatsiya komp'yuternykh modeley [Digital simulation verification and validation]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroyeniye – BMSTU Journal of Mechanical Engineering*. 9(750). pp. 100–115. doi: 10.18698/0536-1044-2022-9-100-115
2. ASME V&V 10-2019 (2020) *Standard for Verification and Validation in Computational Solid Mechanics*.
3. Schwer L.E. (2005) Verification and validation in computational solid mechanics and the ASME Standards Committee. *Fluid Structure Interaction and Moving Boundary Problems*. 84. pp. 109–117. doi: 10.2495/FSI050111
4. ASME V&V 10.1-2012 (2012) *An Illustration of the Concepts of Verification and Validation in Computational Solid Mechanics*.
5. GOST R 57700.37-2021 (2021) *Komp'yuternye modeli i modelirovaniye. Tsifrovyye dvoyniki izdeliy. Obshchyye polozheniya* [Computer models and modeling. Digital twins of products. General requirements].
6. Homenko Yu.P., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z. (1999) *Matematicheskoye modelirovaniye vnutriballisticheskikh protsessov v stvol'nykh sistemakh* [Mathematical modeling of intra-ballistic processes in barrel systems]. Novosibirsk: Izdatel'stvo SO RAN.

7. Rusyak I.G., Sufiyanov V.G., Klyukin D.A. (2022) Odnomernaya matematicheskaya model' kolebaniy stvola s poperechnym secheniem proizvol'noy formy [A one-dimensional mathematical model of barrel vibrations with arbitrary cross-sectional shapes]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 133–146. doi: 10.17223/19988621/80/12
8. Ignatov A.V., Bogomolov S.N., Fedyanin N.D. (2017) Metod rascheta svobodnykh poperechnykh kolebaniy stvola avtomaticheskoy pushki pri zadannom uslovii zakrepleniya [Calculation of free cross fluctuations of a barrel of the automatic gun under the specified conditions]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki – Proceedings of Tula State University. Technical Sciences*. 11(2). pp. 70–77.
9. Zheng J., Teng H., Li F. (2009) Modeling and simulation of gun barrel's lateral vibration. *International Conference on Computational Intelligence and Software Engineering*. pp. 1–4. doi: 10.1109/CISE.2009.5363267
10. Su Z. T., Xu D., Li X. W., Han Z.F. (2012) Finite-element time-history analysis for dynamic response of small-caliber guns with projectile-barrel coupling. *Journal of Vibration and Shock*. 31(23). pp. 104–108.
11. Esen I. (2011) Dynamic response of a beam due to an accelerating moving mass using moving finite element approximation. *Mathematical and Computational Applications*. 16(4). pp. 171–182. doi: 10.3390/mca16010171
12. Cifuentes A.O. (1989) Dynamic response of a beam excited by a moving mass. *Finite Element Analysis*. 5(3). pp. 237–246. doi: 10.1016/0168-874X(89)90046-2
13. Chaturvedi E. (2020) Numerical investigation of dynamic interaction with projectile and harmonic behaviour for T-finned machine gun barrels. *Defence Technology*. 16(2). pp. 460–469. doi: 10.1016/j.dt.2019.07.018
14. He H., Zhang X. (2019) A variable-rate firing optimization of launcher based on particle swarm optimization. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*. 44(5). pp. 647–653. doi: 10.1002/prep.201800364
15. Karahan F., Pakdemirli M. (2017) Vibration analysis of a beam on a nonlinear elastic foundation. *Structural Engineering and Mechanics*. 62(2). pp. 171–178. doi: 10.12989/sem.2017.62.2.171
16. Sufiyanov V.G., Rusyak I.G., Klyukin D.A. (2022) Matematicheskoe modelirovanie kolebaniy stvola s uchetyom tekhnologicheskikh otkloneniy pri strel'be ocherednymi [Mathematical modeling of barrel vibrations with regard to heat exchange in serial fire]. *Fundamental'nye osnovy ballisticheskogo proektirovaniya*. pp. 90–97. doi: 10.53403/9785951505071\_2022\_386
17. Klyukin D.A. (2022) Matematicheskoe modelirovanie teplovogo nagruzheniya stvola artilleriyskogo orudiya pri vystrele [Mathematical modeling of thermal loading of an artillery gun barrel during firing]. *Vystavka innovatsiy – 2022 (vesennyya sessiya) – Innovation Exhibition – 2022 (Spring Session)*. Izhevsk. pp. 176–182. doi: 10.22213/ie022124
18. Rabotnov Yu.N. (1963) *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials]. Moscow: Fizmatgiz.
19. Samarskiy A.A. (1971) *Vvedenie v teoriyu raznostnykh skhem* [Introduction to the theory of difference schemes]. Moscow: Nauka.
20. Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N. (2003) *Vychislitel'naya teploperedacha* [Computational heat transfer]. Moscow: Editorial URSS.
21. Rusyak I.G., Tenenev V.A. (2020) Modelirovanie ballistiki artilleriyskogo vystrela s uchetyom prostranstvennogo raspredeleniya parametrov i protivodavleniya [Modeling of ballistics of an artillery shot taking into account the spatial distribution of parameters and backpressure]. *Kompyuternye issledovaniya i modelirovanie – Computer Research and Modeling*. 12(5). pp. 1123–1147. doi: 10.20537/2076-7633-2020-12-5-1123-1147
22. Lipanov A.M., Rusyak I.G., Sufiyanov V.G. (2020) Issledovanie vliyaniya kolebaniy stvola na ugol vyleta snaryada pri vystrele [Study on the effects of gun barrel vibrations on the firing angle of a projectile]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 68. pp. 80–94. doi: 10.17223/19988621/68/8

**Сведения об авторах:**

**Клюкин Даниил Анатольевич** – аспирант, инженер-программист 1-й категории, ассистент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета им. М.Т. Калашникова (Ижевск, Россия). E-mail: anatoliikljukin@mail.ru

**Русяк Иван Григорьевич** – доктор технических наук, профессор, действительный член Российской академии ракетных и артиллерийских наук, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета им. М.Т. Калашникова (Ижевск, Россия). E-mail: primat@istu.ru

**Суфиянов Вадим Гарайханович** – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета им. М.Т. Калашникова (Ижевск, Россия). E-mail: vsufiy@mail.ru

**Information about the authors:**

**Klyukin Daniil A.** (Software Engineer, Assistant of Department “Applied Mathematics and Information Technology”, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: anatoliikljukin@mail.ru

**Rusyak Ivan G.** (Doctor of Technical Sciences, Professor, Full Member of the Russian Academy of Missile and Artillery Sciences, Head of Department “Applied Mathematics and Information Technology”, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: primat@istu.ru

**Sufiyanov Vadim G.** (Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of Department “Applied Mathematics and Information Technology”, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: vsufiy@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 07.08.2023; принята к публикации 04.12.2023*

*The article was submitted 07.08.2023; accepted for publication 04.12.2023*

Научная статья

УДК 532.68+536. 46

doi: 10.17223/19988621/86/7

## Математическая модель синтеза трехслойного соединения (медь–силицид титана–сталь) в режиме горения

Вадим Геннадьевич Прокофьев

*Томский государственный университет, Томск, Россия, pvg@ftf.tsu.ru*

**Аннотация.** Выполнены математическое моделирование и численное исследование самораспространяющегося высокотемпературного синтеза металлокомпозиционного материала  $Ti_5Si_3$ –Cu на подложке из стали. Рассмотрены предельные фронтальные режимы синтеза с плавлением медного слоя и образованием силицида титана для трехслойного образца: медь – компактированная смесь  $5Ti + 3Si$  – стальная подложка. Рассчитано предельное соотношение толщин слоев образца, когда возможен синтез силицидов титана во фронтальном режиме с одновременным плавлением медного слоя и образованием металлокомпозиционного материала с ламинатной структурой.

**Ключевые слова:** самораспространяющийся высокотемпературный синтез, плавление, термокапиллярное течение, металлокомпозиционный материал

**Благодарности:** Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания FSWM-2020-0036.

**Для цитирования:** Прокофьев В.Г. Математическая модель синтеза трехслойного соединения (медь–силицид титана–сталь) в режиме горения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 94–103. doi: 10.17223/19988621/86/7

Original article

## A mathematical model of synthesis of a three-layer (copper–titanium silicide–steel) compound in a combustion mode

Vadim G. Prokof'ev

*Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, pvg@ftf.tsu.ru*

**Abstract.** This work presents a two-dimensional mathematical model of self-propagating high-temperature synthesis (SHS) of a specimen consisting of three layers (copper foil –  $5Ti + 3Si$  compacted mixture – steel substrate). A numerical study of the mathematical model is carried out using the finite-difference method. The limiting frontal SHS modes of a three-layer specimen of rectangular cross-section are determined, taking into account the copper layer melting and the thermocapillary wetting of  $Ti_5Si_3$  synthesis products by the melt with the formation of a composite material during thermal interaction with the steel

substrate. The critical minimum thickness of the main internal synthesis layer allowing one to obtain titanium silicides in the frontal combustion mode is calculated. The maximum temperature in the combustion front near the critical conditions is 1652 K. The depth of capillary wetting of the synthesis products with copper melt is in the range of 2–4 mm.

**Keywords:** self-propagating high-temperature synthesis, melting, thermocapillary flow, metal composite material

**Acknowledgments:** This research was carried out within the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (FSWM-2020-0036).

**For citation:** Prokof'ev, V.G. (2023) A mathematical model of synthesis of a three-layer (copper–titanium silicide–steel) compound in a combustion mode. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 94–103. doi: 10.17223/19988621/86/7

## Введение

Поиск эффективных и экономичных способов получения новых конструкционных материалов имеет фундаментальное значение для современного материаловедения. Одним из эффективных способов получения композиционных металлокерамических материалов является высокотемпературный синтез, инициированный в компактах порошковых реагентов [1]. Синтезируемые материалы характеризуются достаточно высокой температурой плавления и сохраняют упорядоченную структуру, что придает им высокую удельную прочность при высоких температурах вплоть до температуры плавления. Данные свойства делают их привлекательными для многих применений, особенно в аэрокосмической, автомобильной и химической промышленности. Например, силициды титана, имея высокую термостойкость, применяются в качестве защитных покрытий металлов и сплавов в полупроводниковых устройствах. Силициды титана и других металлов можно получить в режиме горения с использованием порошковых компонентов [2–4].

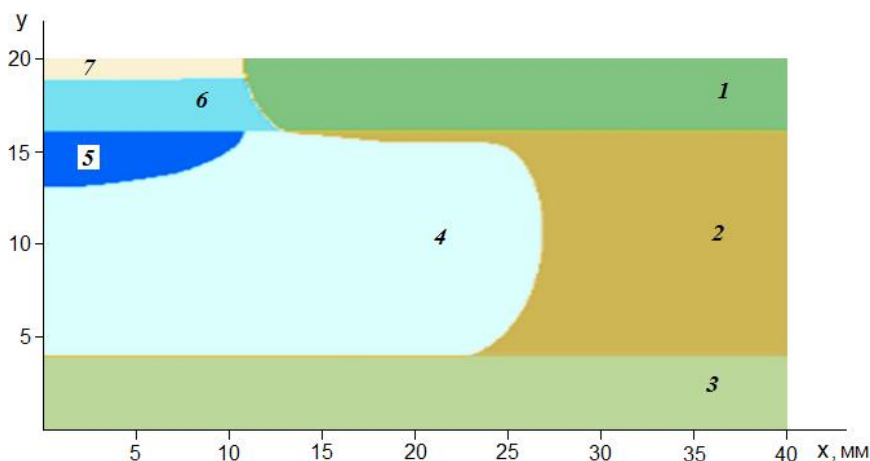
Для получения новых, в том числе структурно-неоднородных, материалов *in situ* с использованием собственных возможностей системы требуется проведение экспериментальных и теоретических исследований с целью решения ряда проблем. Главные из них – теплоперенос в реагирующей гетерогенной среде, тепловое взаимодействие инертных конструкционных элементов с реагирующим веществом, капиллярное растекание расплавов в пористой среде, жидкофазное спекание и структурная динамика продуктов синтеза. Отличительной особенностью волнового синтеза пористых металлокерамических материалов являются капиллярные конвективные течения расплава металлов в пористой матрице тугоплавких компонентов смеси. Течение расплава в порах, вызванное градиентом поверхностного натяжения, оказывает существенное влияние на скорость химического превращения, интенсифицирует тепло- и массообмен, определяет морфологию пористой структуры продуктов высокотемпературного синтеза металлокерамических материалов [5]. Экспериментальное исследование успешного получения композиционного ламината  $\text{AlMg}_6\text{-NiAl-TiC}$  методом высокотемпературного синтеза выполнено в [6]. Методом высокотемпературного синтеза в комбинации с прессованием получены прочные слоистые металлокерамические материалы  $\text{TiC/Ni}$  и  $\text{TiC}_x\text{-Ti}_x\text{Si}_y$  на титановой подложке [7, 8] и металлокерамических соеди-

нений на танталовой подложке [9]. Математическое моделирование высокотемпературного синтеза слоевой системы с легкоплавкой металлической вставкой с образованием композиционного материала в одномерном приближении выполнено в [10].

Целью данного теоретического исследования является изучение возможности получения слоевого материала (ламината) с модифицированным расплавом меди приповерхностным слоем металлокомпозиита в режиме технологического горения. Модификация поверхности обусловлена плавлением легкоплавкого (медного) слоя с последующим капиллярным смачиванием расплавом-наполнителем матрицы – продуктов синтеза. Порошковый компакт – слой синтеза – помещен на стальную подложку, что предполагает интенсивное тепловое взаимодействие зоны реакции с поверхностями инертных (плавящегося и неплавящегося) слоев. Соответственно, другой целью исследования является определение предельных условий протекания синтеза рассматриваемой слоевой композиции в волновом режиме горения.

### Математическая модель

Рассматривается система, состоящая из трех сопряженных плоских слоев: металл (медная лента), пористый слой компактированной порошковой смеси  $5\text{Ti} + 3\text{Si}$ , стальной слой – подложка. Схема расположения слоев представлена на рис. 1. Толщины легкоплавкого слоя, слоя синтеза и подложки, соответственно 1, 2 и 3 на рис. 1, принимают значения  $H_1, H_2, H_3$ . Длина всех слоев и всего образца равна  $L$ .



**Рис. 1.** Схема образца и расположение характерных областей: 1 – слой меди, 2 – слой шихты  $5\text{Ti} + 3\text{Si}$ , 3 – стальная подложка, 4 – продукты синтеза  $\text{Ti}_5\text{Si}_3$ , 5 – композит  $\text{Ti}_5\text{Si}_3 + \text{Cu}$ , 6 – расплав меди, 7 – воздушная прослойка

**Fig. 1.** Specimen diagram and location of characteristic areas: (1) copper layer, (2) layer of  $5\text{Ti}+3\text{Si}$  mixture, (3) steel substrate, (4)  $\text{Ti}_5\text{Si}_3$  synthesis products, (5)  $\text{Ti}_5\text{Si}_3 + \text{Cu}$  composite, (6) molten copper, and (7) air gap

Приняты следующие допущения:

1. Поры внутреннего слоя представляются совокупностью вертикальных капилляров, объем которых определяет пористость среды.

2. Плавление медного слоя и заполнение пор расплавом сопровождаются образованием композиционного материала, теплофизические свойства которого определяются компонентным составом с учетом объема пор.

3. Расплав, втекающий в продукты синтеза с образованием композиционного слоя (область 5 на рис. 1), замещается равной по объему воздушной прослойкой (область 7 на рис. 1).

4. Течение расплава осуществляется только в направлении, перпендикулярном плоскости слоев.

5. Фазовые переходы и структурные изменения, связанные с горением смеси титана и кремния, не рассматриваются.

Влияние фазового перехода в одном из реагентов на кинетику неизотермического химического взаимодействия рассмотрено в [11]. Высокотемпературный синтез внутреннего слоя и пропитка его расплавом меди приводят к изменению границ исходных и образованию новых областей (см. рис. 1): 1 – металл в твердой фазе, 2 – исходная смесь  $5\text{Ti} + 3\text{Si}$ , 3 – подложка, 4 – пористые продукты синтеза  $\text{Ti}_5\text{Si}_3$ , 5 – композиционный материал, 6 – расплав металла, 7 – воздушная прослойка.

В случае больших толщин инертного слоя или сильной теплоотдачи с внешней поверхности инертного слоя возможно только частичное плавление. Тогда между расплавленным и твердым металлом образуется газовая прослойка.

Таким образом, математическая постановка задачи о формировании композиционного материала на стальной подложке в процессе самораспространяющегося высокотемпературного синтеза с одновременным плавлением и пропиткой расплавом металла сводится к решению уравнений теплопроводности и химического превращения в различных областях с подвижными границами:

$$\rho_3 c_3 \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda_3 \text{grad} T), \quad 0 < y < H_3 \quad (1)$$

$$R(\alpha, m) \frac{\partial T}{\partial t} + N(m, v_c, l) \frac{\partial T}{\partial y} = \text{div}[(P(\alpha, m) \text{grad} T)] + Q\rho_2(1-m) \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\rho_1 [c_1 + Q_L \delta(T - T_L)] \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda_1 \text{grad} T), \quad (3)$$

$$\rho_g c_g \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda_g \text{grad} T), \quad (4)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = k_0(1-\eta) \exp\left(-\frac{E}{RT}\right), \quad (5)$$

где

$$R(\alpha, m) = [\rho_2(1-m) + \alpha\rho_1 m][c_2 + \alpha mc_1],$$

$$N(m, v_c, l) = m\rho_1 c_1 v_c e(H_2 + H_3 - y)e(y - H_2 - H_3 + l),$$

$$P(\alpha, m) = \lambda_2(m) + \alpha m \lambda_1.$$

Уравнения (1)–(5) дополнялись следующими краевыми условиями:

$$\begin{aligned} t = 0: & \quad T(x, y, 0) = T_0, \quad \eta(x, y, 0) = 0, \\ x = 0: & \quad T(0, y, t) = T_w \quad (t < t_w), \quad \partial T(0, y, t) / \partial x = 0 \quad (t > t_w), \\ y = 0, y = H: & \quad T(x, 0, t) = T_0, \quad \partial T(x, H, t) / \partial y = 0, \\ x = L: & \quad \partial T(L, y, t) / \partial x = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Пренебрегаем возможным растеканием расплава в направлении распространения фронта горения (вдоль оси  $X$ ), вызванным поверхностным натяжением. Таким образом, течение жидкой фазы осуществляется только в направлении оси  $Y$ . Как следствие, скорость капиллярного течения имеет только одну компоненту  $v_y = v_c$ . Полагаем, что скорость капиллярного течения расплава в пористой среде определяется уравнением [12]

$$v_c = \frac{k(m)r_c\sigma}{4\mu l}, \quad (7)$$

где коэффициент газопроницаемости в зависимости от пористости выбран в соответствии с законом Козени–Кармана  $k(m) = m^3/(1-m)^2$ .

В математической постановке приняты следующие обозначения:  $T$ ,  $T_0$ ,  $T_w$  – температура, начальная температура, температура нагретой поверхности;  $\eta$  – полнота превращения;  $x$ ,  $y$  – декартовы координаты;  $t$  – текущее время;  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  – исходные толщины слоев;  $L$ ,  $H = H_1 + H_2 + H_3$  – длина и толщина всего образца;  $Q_L$ ,  $T_L$  – теплота и температура плавления меди;  $V_c$  – скорость капиллярного затекания расплава в продукты синтеза, определяемого в интервале температур  $T > T_L$ ;  $\rho_i$ ,  $c_i$ ,  $\lambda_i$  – плотность, теплоемкость, теплопроводность соответственно меди (1), смеси титана с кремнием (2), стали (3);  $Q$ ,  $E$  – тепловой эффект реакции и энергия активации;  $k_0$  – предэкспоненциальный множитель;  $m$ ,  $r_c$  – пористость и характерный размер пор;  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения расплава меди;  $\mu$  – вязкость расплава;  $\delta(T - T_L)$  – дельта-функция Дирака;  $e(H_2 + H_3 - y)$  – единичная функция Хэвисайда. Наличие расплава в порах  $\alpha$  определяется глубиной капиллярного смачивания  $l$ :

$$\alpha = \begin{cases} 1, & H_2 + H_3 - l < y < H_2 + H_3, \\ 0, & H_3 < y < H_2 + H_3 - l, \end{cases}$$

$$\lambda_2 = \lambda_{20}(1-m)^z,$$

$\lambda_{20}$  – теплопроводность сплошной среды;  $z$  – показатель степени.

Значения термокинетических констант для смеси Ti–Si и инертных слоев:  $E = 125$  кДж/моль [1],  $Q = 1790$  кДж/кг,  $\lambda_{20} = 55$  Вт/(м·К),  $\rho_2 = 3900$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_2 = 578$  Дж/(кг·К),  $\lambda_1(\text{Cu}) = 400$  Вт/(м·К),  $\rho_1(\text{Cu}) = 8900$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_1(\text{Cu}) = 380$  Дж/(кг·К),  $\lambda_3(\text{сталь Ст5}) = 55$  Вт/(м·К),  $\rho_3(\text{сталь Ст5}) = 7850$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_3(\text{сталь Ст5}) = 480$  Дж/(кг·К),  $\lambda_g = 0.026$  Вт/(м·К),  $\rho_g = 1.2$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_g = 1$  кДж/(кг·К). Параметры термокапиллярного течения:  $\sigma = 1.35$  Дж/м<sup>2</sup>,  $\mu = 0.7$  мПа·с,  $m = 0.5$ ,  $r_c = 10^{-4}$  м. Коэффициент теплоотдачи от образца в окружающую среду  $\alpha = 7.9$  Вт/(м<sup>2</sup>·К). Начальная температура и температура нагретой поверхности приняты равными  $T_0 = 293$  К,  $T_w = 2000$  К соответственно. Длительность контакта образца с нагретой поверхностью равна  $t_w = 0.1$  с. Кинетическая константа  $k_0 = 1.1 \cdot 10^6$  с<sup>-1</sup> подобрана таким образом, чтобы рассчитываемая средняя скорость горения системы  $5\text{Ti} + 3\text{Si}$  соответствовала экспериментально найденному значению скорости горения смеси титана и кремния 2.5 см/с для относительной плотности 0.5, что соответствует пористости шихты  $m = 0.5$  [13]. Общие размеры образца выбраны фиксированными  $L = 0.06$  м,  $H = 0.03$  м, толщины отдельных слоев варьировались. Численное решение системы уравнений (1)–(6) получено методом покоординатного расщепления с использованием неявной схемы. Для аппроксимации тепловых

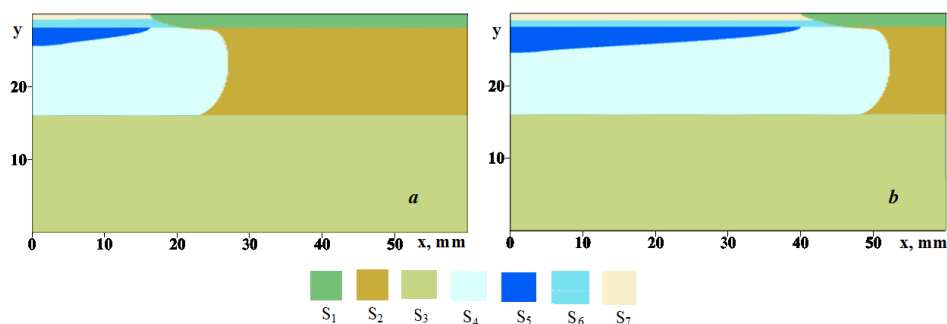
потоков использовались центральные разности. Расчеты выполнены на равномерной сетке с шагом по времени 0.0001 с и 0.00005 м по пространству. Аппроксимационная сходимость проверялась сгущением узлов расчетной сетки. В процессе численных расчетов проводился контроль объема расплава меди, затекающего в поры продуктов синтеза (см. ниже область  $S_3$  на рис. 2, *b*) и объема газа, заменившего расплав во внешнем слое композиции (область  $S_7$  на рис. 2, *b*).

## Результаты

В результате кратковременного теплового импульса во внутреннем слое формируется волна горения, под действием которой происходит плавление медного слоя. Адиабатическая температура горения стехиометрической смеси титана и кремния составляет 2 350 К, что намного превышает температуру плавления меди 1 358 К. Фронт плавления (граница между областями  $S_1$  и  $S_6$  на рис. 2, *b*) искривлен вследствие внутреннего и внешнего теплообмена на межфазных границах образца. При плавлении медного слоя на всю толщину  $H_1$  вдоль оси  $OX$  на границе областей  $S_4$  и  $S_6$  (рис. 2, *a*) начинается заполнение пористых продуктов синтеза расплавом меди. Скорость капиллярного течения и глубина затекания жидкой фазы с образованием композита определяется уравнением (7).

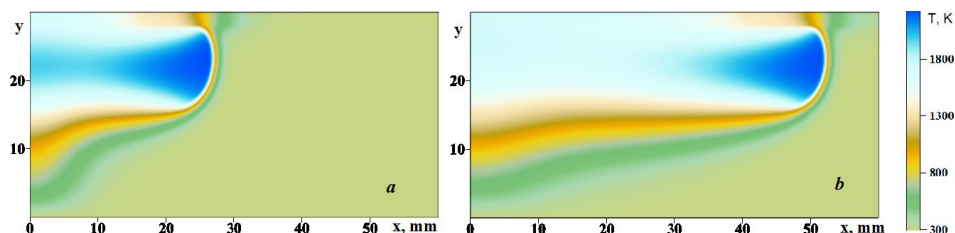
Типичное развитие волнового процесса высокотемпературного синтеза с плавлением медного слоя и образованием композиционного материала представлено на рис. 2 и 3. Максимальная температура во фронте горения составляет 2 232 К и близка к температуре горения в адиабатических условиях 2 350 К [1]. Глубина капиллярного смачивания продуктов синтеза расплавом меди зависит от характерного размера пор  $r_c$ , пористости реакционной смеси  $m$ , свободного объема расплава и распределения температуры. Неравномерность глубины затекания вдоль оси  $OX$  связана с избытком энтальпии в образце на стадии зажигания, растеканием расплава на свободной поверхности и различием времени начала капиллярного течения вдоль направления движения волны горения. Так, наибольшая глубина затекания для пористости  $m = 0.5$ , равная примерно 4 мм, возникает вблизи контактной поверхности с источником внешнего нагрева  $x = 0$ . За счет теплоотвода в подложку происходит остывание внутреннего слоя, и при температуре меньше 1 358 К затекание расплава в поры на некоторой глубине прекращается. Средняя расчетная глубина смачивания лежит в интервале 2–4 мм. Ускорить процесс пропитки можно, например, под действием низкочастотной вибрации, добавив соответствующее слагаемое в уравнение (7) [14].

С уменьшением толщины внутреннего слоя  $H_2$  менее 8 мм за счет увеличения толщины подложки  $H_3 > 20$  мм и фиксированной толщине слоя меди  $H_1 = 2$  мм реализуются критические условия синтеза во внутреннем слое. Волна горения проходит вдоль оси  $OX$  на расстояние 16 мм и останавливается. Температура во фронте падает на 580 К за счет теплоотвода в подложку. Большая часть смеси внутреннего слоя остается непрореагировавшей. К аналогичному результату приводит увеличение толщины медного слоя за счет уменьшения толщины слоя синтеза и при фиксированных размерах стальной подложки  $H_3 = 10$  мм. Вследствие более высокой относительно стали теплопроводности меди смесь титана и кремния уже при толщине  $H_2 = 10$  мм реагирует только частично, и фронт реакции останавливается на отметке  $x \approx 41$  мм.



**Рис. 2.** Динамика характерных областей в процессе синтеза:  $a - t = 1$  с,  $b - t = 2$  с;  
 $H_1 = 2$  мм,  $H_2 = 12$  мм,  $H_3 = 16$  мм

**Fig. 2.** Dynamics of characteristic regions of synthesis:  $t = (a)$  1 and  $(b)$  2 s;  
 $H_1 = 2$  mm,  $H_2 = 12$  mm,  $H_3 = 16$  mm



**Рис. 3.** Динамика температурного поля в процессе синтеза:  $a - t = 1$  с,  $b - t = 2$  с;  
 $H_1 = 2$  мм,  $H_2 = 12$  мм,  $H_3 = 16$  мм

**Fig. 3.** Temperature field dynamics of synthesis:  $t = (a)$  1 and  $(b)$  2 s;  
 $H_1 = 2$  mm,  $H_2 = 12$  mm,  $H_3 = 16$  mm

Следует отметить, что изменение в ту или другую сторону толщины образца  $H$  за счет инертных слоев не приводит к изменению критической толщины внутреннего слоя. Другим вариантом развития процесса является проведение синтеза во внутреннем слое без образования композиционного подслоя, что имеет место при достаточно большой толщине медного слоя (4 мм и более). Выделяемого в ходе химической реакции синтеза тепла в этом случае не хватает для плавления медного слоя на необходимую глубину слоя  $H_1$ , и капиллярное течение расплава не реализуется.

## Выводы

1. Предложена математическая модель получения композиционного материала в процессе высокотемпературного синтеза силицида титана с одновременным плавлением медного слоя и капиллярным смачиванием продуктов синтеза расплавом меди для трехслойного образца (медь–слой синтеза–сталь).

2. Синтез стехиометрической смеси титана и кремния во внутреннем слое образца возможен при толщине внутреннего слоя более 10 мм, при этом толщина инертных слоев может меняться в широком диапазоне. Максимальная температура во фронте горения вблизи критических условий равна 1 652 К.

3. Рассчитана предельная толщина медного слоя 3.5 мм, при которой происходит его плавление и становится возможным капиллярное течение расплава меди с образованием металлокомпозиционного подслоя для данных размеров образца, параметров материала слоев и режима внешнего теплообмена. Проведенное исследование показывает возможность получения слоевого металлокомпозитного материала в режиме технологического горения.

#### Список источников

1. Мержанов А.Г., Мукасян А.С. Твердопламенное горение. М. : ТОРУС ПРЕСС, 2007.
2. Саркисян А.Р., Долуханян С.К., Боровинская И.П., Мержанов А.Г. Некоторые закономерности горения смесей переходных металлов с кремнием и синтез силицидов // Физика горения и взрыва. 1978. Т. 14, № 3. С. 49–55.
3. Горшков В.А., Милосердов П.А., Юхвид В.И. Закономерности автоволнового синтеза литых двойных силицидов молибдена, вольфрама, ниобия и титана из смесей термитного типа // Физика горения и взрыва. 2014. Т. 50, № 5. С. 32–36.
4. Прибытков Г.А., Крицын М.Г., Коржова В.В. Синтез и структура СВС композитов  $\text{Ti}_5\text{Si}_3 + \text{Ti}$  связка // Химическая физика и мезоскопия. 2020. Т. 22, № 3. С. 269–280. doi: 10.15350/17270529.2020.3.26
5. Васенин И.М., Шрагер Э.Р., Крайнов А.Ю., Лукашов О.Ю., Палеев Д.Ю., Потапов В.П., Рашевский В.В., Артемьев В.Б., Руденко Ю.Ф., Костеренко В.Н., Жарков А.С., Сакович Г.В., Ворожцов А.Б., Бондарчук С.С., Матвиенко О.В., Смоляков В.К., Максимов Ю.М., Прокофьев В.Г. Математическое моделирование горения и взрыва высокоэнергетических систем. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2006. 322 с.
6. Denisov I., Shakhraev D., Malakhov A., Seropyan S. Combustion Synthesis of Metal-Intermetallic-Ceramic Laminate  $\text{AlMg6-NiAl-TiC}$  Composite // Crystals. 2022. V. 12 (12). Art. 1851. 11 p. doi: 10.3390/cryst12121851
7. Chen S., Meng Q., Zhng N., Xue P., Munir Z. In situ synthesis and bonding of Ti TiAl TiC/Ni functionally graded materials by field-activated pressure-assisted synthesis process // Materials Science and Engineering A. 2012. V. 538. P. 103–109. doi: 10.1016/j.msea.2012.01.020
8. Kamynina O.K., Vadchenko S.G., Shchukin A.S., Kovalev I.D. Multilayer Coatings on Ti substrate by SHS Method // Int. Journal Self-Propag. High-Temp. Synth. 2016. V. 25, № 4. P. 238–242. doi: 10.3103/S106138621604004X
9. Kamynina O.K., Vadchenko S.G., Shchukin A.S. SHS Joining of Ti–C–Si Ceramics with Tantalum // Int. Journal Self-Propag. High-Temp. Synth. 2018. V. 27, № 3. P. 192–194. doi: 10.3103/S1061386218030056
10. Прокофьев В.Г., Лапшин О.В., Смоляков В.К. Макрокинетика горения слоевых композиций с легкоплавким инертным слоем // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 52. С. 102–113. doi: 10.17223/19988621/52/10
11. Абдулкаримова Р.Г., Кетегенов Т.А., Мансуров З.А., Лапшин О.В., Прокофьев В.Г., Смоляков В.К. О влиянии фазовых превращений на неизотермический синтез в механоактивированных гетерогенных системах // Физика горения и взрыва. 2009. Т. 45, № 1. С. 56–67.
12. Хейфиц Л.И., Неймарк А.В. Многофазные процессы в пористых средах. М. : Химия, 1982.
13. Мержанов А.Г., Мукасян А.С., Рогачев А.С., Сычев А.Е., Хванг С., Варма А. Микроструктура фронта горения в гетерогенных безгазовых средах (на примере горения системы  $5\text{Ti} + 3\text{Si}$ ) // Физика горения и взрыва. 1996. Т. 32, № 6. С. 68–81.
14. Игнатьев И.Э., Пастухов Э.А., Романова О.В. Математическая модель пропитки расплавом металлических порошков с использованием вибрационного воздействия // Известия вузов. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. 2017. № 1. С. 4–10. doi: 10.17073/1997-308X-2017-1-4-10

## References

1. Merzhanov A.G., Mukasyan A.S. (2007) *Tverdoplamennoe gorenie* [Solid-flame combustion]. Moscow: Torus Press.
2. Sarkisyan A.R., Dolukhanyan S.K., Borovinskaya I.P., Merzhanov A.G. (1978) Laws of the combustion of mixtures of transition metals with silicon and the synthesis of silicides. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 14(3). pp. 310–314. doi: 10.1007/BF00740494
3. Gorshkov V.A., Miloserdov P.A., Yukhvid V.I. (2014) Autowave synthesis of cast binary silicides of molybdenum, tungsten, niobium, and titanium from thermite mixtures. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 50(5). pp. 527–531. doi: 10.1134/S0010508214050050
4. Pribytkov G.A., Krinitsyn M.G., Korzhova V.V. (2020) Sintez i struktura SVS kompozitov  $Ti_5Si_3+Ti$  svyazka [Synthesis and structure of SHS composites  $Ti_5Si_3 + Ti$  binding]. *Khimicheskaya fizika i mezoskopiya – Chemical Physics and Mesoscopy*. 22(3). pp. 269–280. doi: 10.15350/17270529.2020.3.26
5. Vasenin I.M., Shrager E.R., Kraynov A.Yu., Lukashov O.Yu., Paleev D.Yu., Potapov V.P., Rashedskiy V.V., Artem'ev V.B., Rudenko Yu.F., Kosterenko V.N., Zharkov A.S., Sakovich G.V., Vorozhtsov A.B., Bondarchuk S.S., Matvienko O.V., Smolyakov V.K., Maksimov Yu.M., Prokof'ev V.G. (2006) *Matematicheskoe modelirovanie goreniya i vzryva vysokoenergeticheskikh sistem* [Mathematical modeling of the combustion and explosion of high-energy systems]. Tomsk: Izdatel'stvo Tomskogo universiteta.
6. Denisov I., Shakhay D., Malakhov A., Seropyan S. (2022) Combustion synthesis of metal-intermetallic-ceramic laminate  $AlMg_6-NiAl-TiC$  composite. *Crystals*. 12(12). Article 1851. pp. 1–11. doi: 10.3390/cryst12121851
7. Chen S., Meng Q., Zhng N., Xue P., Munir Z. (2012) In situ synthesis and bonding of Ti TiAl TiC/Ni functionally graded materials by field-activated pressure-assisted synthesis process. *Materials Science and Engineering A*. 538. pp. 103–109. doi: 10.1016/j.msea.2012.01.020
8. Kamynina O.K., Vadchenko S.G., Shchukin A.S., Kovalev I.D. (2016) Multilayer coatings on Ti substrate by SHS method. *International Journal of Self-Propagating High-Temperature Synthesis*. 25(4). pp. 238–242. doi: 10.3103/S106138621604004X
9. Kamynina O.K., Vadchenko S.G., Shchukin A.S. (2018) SHS joining of Ti–C–Si ceramics with tantalum. *International Journal of Self-Propagating High-Temperature Synthesis*. 27(3). pp. 192–194. doi: 10.3103/S1061386218030056
10. Prokof'ev V.G., Lapshin O.V., Smolyakov V.K. (2018) Makrokinetika goreniya sloevykh kompozitsiy s legkoplavkim inertnym sloem [Macrokinetics of combustion of layered compositions with a low-melting inert layer]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 52. pp. 102–113. doi: 10.17223/19988621/52/10
11. Abdulkarimova R.G., Ketegenov T.A., Mansurov Z.A., Lapshin O.V., Prokof'ev V.G., Smolyakov V.K. (2009) Effect of phase transformation on nonisothermal synthesis in mechanically activated heterogeneous systems. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 45(1). pp. 48–58. doi: 10.1007/s10573-009-0007-7
12. Heifitz L.I., Neymark A.V. (1982) *Mnogofaznye protsessy v poristyykh sredakh* [Multiphase processes in porous media]. Moscow: Khimiya.
13. Merzhanov A.G., Mukas'yan A.S., Rogachev A.S., Sychev A.E., Hwang S., Varma A. (1996) Combustion-front microstructure in heterogeneous gasless media (using as an example the  $5Ti+3Si$  system). *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 32(6). pp. 655–666. doi: 10.1007/BF02111567
14. Ignat'ev I.E., Pastukhov E.A., Romanova O.V. (2018) Mathematical model of the melt impregnation of metal powder using vibration treatment. *Russian Journal of Non-Ferrous Metals*. 59(3). pp. 299–303. doi: 10.3103/S1067821218030069

***Сведения об авторе:***

**Прокофьев Вадим Геннадьевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики Томского государственного университета (Томск, Россия).  
E-mail: pvg@ftf.tsu.ru

***Information about the author:***

**Prokof'ev Vadim G.** (Doctor of Physics and Mathematics, Assistant Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: pvg@ftf.tsu.ru

*Статья поступила в редакцию 19.09.2023; принята к публикации 04.12.2023*

*The article was submitted 19.09.2023; accepted for publication 04.12.2023*

Научная статья

УДК 536.46

doi: 10.17223/19988621/86/8

## **Модель нестационарного горения твердых топлив с накоплением конденсированных продуктов на поверхности горения**

**Сергей Александрович Рашковский**

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук,  
Москва, Россия;*

*Томский государственный университет, Томск, Россия, rash@ipmnet.ru*

**Аннотация.** Рассмотрено нестационарное горение твердых топлив, горящих с образованием конденсированных продуктов, способных накапливаться на поверхности горения в виде каркасного слоя. Модель учитывает тепловую инерционность каркасного слоя и изменение его массы в процессе нестационарного горения. Показано, что при нестационарном горении таких топлив мгновенный состав продуктов (газообразных и конденсированных), покидающих поверхность горения, будет изменяться и отличаться от состава продуктов, покидающих поверхность горения при стационарном горении, а значит, отличаться от исходного состава топлива. Этот новый эффект, ранее не описанный в литературе, может приводить к дополнительной дестабилизации процесса в камере сгорания РДТТ и развитию акустической неустойчивости. В рамках разработанной модели нестационарного горения определена составляющая акустической проводимости зоны горения твердого топлива, связанная с новым эффектом.

**Ключевые слова:** смесевое твердое ракетное топливо, нестационарное горение, конденсированные продукты сгорания, каркасный слой, агломерация, неоднородность продуктов сгорания, математическое моделирование

**Благодарности:** Работа выполнена за счет гранта РФ (проект № 21-19-00541).

**Для цитирования:** Рашковский С.А. Модель нестационарного горения твердых топлив с накоплением конденсированных продуктов на поверхности горения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 104–119. doi: 10.17223/19988621/86/8

Original article

## Model of non-stationary combustion of solid energetic materials with accumulation of condensed products on the burning surface

Sergey A. Rashkovskiy

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russian Federation*

*Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, rash@ipmnet.ru*

**Abstract.** The unsteady combustion of solid propellants with the formation of condensed products accumulating on the burning surface in the form of a skeleton layer is considered. The model of the process takes into account the thermal inertia of the skeleton layer and the variation in its mass when burning. It is shown that during the unsteady combustion of such propellants, the instantaneous composition of both gaseous and condensed products leaving the burning surface changes and becomes different from that during the stationary combustion; thus, it differs from the initial composition of the propellant. This new effect, which was not previously described in the literature, can lead to additional destabilization of the process in a solid propellant rocket motor combustion chamber and to the development of acoustic instability. Within the framework of the presented model of unsteady combustion, the component of the acoustic conductivity of the solid propellant burning zone associated with the new effect is determined.

**Keywords:** composite solid propellant, unsteady combustion, condensed combustion products, skeleton layer, agglomeration, inhomogeneity of combustion products, mathematical modeling

**Acknowledgments:** This work was financially supported by the Russian Science Foundation (project No. 21-19-00541).

**For citation:** Rashkovskiy, S.A. (2023) Model of non-stationary combustion of solid energetic materials with accumulation of condensed products on the burning surface. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 104–119. doi: 10.17223/19988621/86/8

### Введение

Одной из наиболее сложных проблем в теории горения конденсированных энергетических материалов (твердых ракетных топлив и порохов) является проблема нестационарного горения, которая в полной мере не решена до настоящего времени. Нестационарное горение проявляется во многих быстропротекающих процессах, таких как выход двигателя на режим, спад давления в конце работы двигателя, акустическая неустойчивость, низкочастотная неустойчивость и др.

Проблема нестационарного горения твердых топлив (ТРТ) осложняется тем, что реальные ТРТ являются смесевыми, и нестационарное горение каждого их компонента сопровождается взаимодействием компонентов через конденсированную и газовую фазы. Большую роль в нестационарном горении играет гетеро-

генность ТРТ, которая в настоящее время практически не учитывается. Дополнительную неопределенность теории нестационарного горения придает сложная кинетика химических процессов в конденсированной и газовой фазах, что характерно, впрочем, и для стационарного горения. По этой причине при анализе нестационарного горения ТРТ (как смесевых, так и квазигомогенных) обычно используются одномерные модели с упрощенной (одно-двухстадийной) кинетикой. В настоящее время существует два основных подхода к моделированию нестационарного горения ТРТ: FM-модель [1], в которой рассматривается одномерная тепловая задача с некоторой выбранной брутто кинетикой в конденсированной и газовой фазах, и феноменологическая теория нестационарного горения, основу которой составляет теория Зельдовича–Новожилова [2, 3]. Подробный обзор существующих моделей нестационарного горения ТРТ можно найти в работах [1, 4].

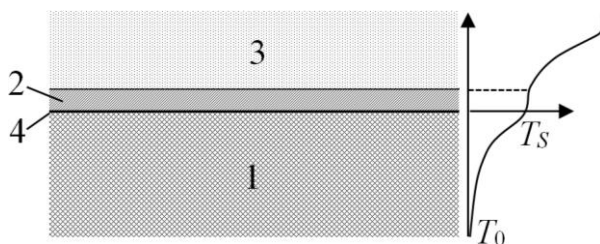
Высокоэнергетические смесевые ТРТ обычно содержат в своем составе порошкообразное горючее (главным образом алюминий или бор). Горение таких ТРТ сопровождается сложными гетерогенными процессами на поверхности горения, приводящими к образованию каркасного слоя (КС), состоящего из слипшихся частиц порошкообразного горючего, который периодически диспергируется с образованием агломератов. Агломерация и КС существенно влияют на тепловой баланс на поверхности горения и, следовательно, на стационарное и нестационарное горение ТРТ. Вместе с тем в литературе практически не рассматривались модели нестационарного горения ТРТ, учитывающие накопление конденсированных продуктов на поверхности горения и агломерацию частиц в КС. В настоящее время известна только одна работа в этом направлении [5], в которой не учитывается тепловая инерционность КС.

Цель данной работы – разработка модели нестационарного горения смесового металлизированного ТРТ с накоплением конденсированных продуктов на поверхности горения, обобщающей модель [5] и учитывающей тепловую инерционность КС.

### Модель горения

Как и в большинстве моделей нестационарного горения, будем рассматривать одномерную модель (рис. 1).

Под поверхностью горения мы будем понимать границу, разделяющую к-фазу ТРТ и КС, образующийся после разложения летучих компонентов ТРТ (граница 4 на рис. 1). Таким образом, считается, что поверхность горения ТРТ – это поверхность газификации его компонентов, на которой происходит полное разложение таких компонентов ТРТ, как перхлорат аммония, октоген и т.п., а также активного связующего или унос летучих компонентов неактивного связующего, которые уносятся в окружающее пространство, а оставшаяся часть представляет собой конденсированные продукты (КПС – спекшиеся частицы, агломераты, конгломераты и т.п.), остающиеся на поверхности горения в виде пористого КС. Под линейной скоростью горения  $u$  будем понимать скорость перемещения поверхности горения в указанном выше смысле. Для ТРТ, горящих без образования КС, введенные выше понятия поверхности горения и скорости горения переходят в традиционные.



**Рис. 1.** Условная схема горящего ТРТ с накоплением компонентов на поверхности горения: 1 – твердое топливо; 2 – каркасный слой (агломераты частиц алюминия, бора и т.п., а также продукты неполного разложения компонентов ТРТ, главным образом углерод); 3 – газовое пламя; 4 – поверхность горения. Справа показан температурный профиль

**Fig. 1.** Scheme of the burning propellant with components accumulating on the burning surface: (1) solid propellant; (2) skeleton layer (agglomerates of aluminum, boron, and other particles and the products of incomplete decomposition of solid propellant components, mainly carbon); (3) gas flame; and (4) burning surface. The temperature profile is shown on the right side

Из общих соображений, аналогичных тем, что используются в феноменологической теории нестационарного горения [2, 3], для скорости горения можно записать выражение

$$u = u(p, \varphi, T_s) \quad (1)$$

где градиент температуры в к-фазе ТРТ у поверхности горения

$$\varphi = \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_s \quad (2)$$

Считается, что зависимость (1) является универсальной, т.е. справедлива как для стационарного, так и для нестационарного горения ТРТ. Здесь аргумент  $\varphi$  в зависимости (1) позволяет описать тепловую инерционность к-фазы твердого топлива и ее влияние на скорость горения.

Учитывая, что КС состоит главным образом из спекшихся частиц алюминия или бора и их агломератов, коэффициент теплопроводности которых существенно выше коэффициента теплопроводности к-фазы ТРТ, будем пренебрегать градиентом температуры поперек КС. Более того, будем считать, что температура КС совпадает с температурой поверхности горения  $T_s$ .

Учитывая это, запишем законы сохранения энергии и массы для КС в виде:

$$\frac{d}{dt} (M_l c_l T_s) = -\lambda_s \varphi + \zeta_s \gamma u c_l T_s - \dot{m}_d c_l T_s + (1 - \zeta_s) \gamma u Q_g + \dot{m}_g Q_l + M_l Q_r + q_g, \quad (3)$$

$$\frac{dM_l}{dt} = \zeta_s \gamma u - \dot{m}_d - \dot{m}_g, \quad (4)$$

где первый член в правой части уравнения (3) описывает тепловой поток из КС в к-фазу ТРТ;  $c_l$  – удельная теплоемкость КС;  $\lambda_s$  – теплопроводность к-фазы ТРТ вблизи поверхности горения;  $M_l$  – масса КС (в расчете на единицу площади поверхности горения);  $\gamma$  – плотность ТРТ;  $\dot{m}_d$  – массовая скорость уноса КС с поверхности горения (за счет механического отрыва отдельных его элементов – агломератов и конгломератов) в расчете на единицу площади поверхности горения;  $\dot{m}_g$  – массовая скорость газификации КС (масса газообразных продуктов,

образующихся за счет газификации элементов КС в единицу времени в расчете на единицу площади поверхности горения ТРТ), например за счет горения частиц алюминия или бора либо испарения оксида бора в КС;  $\zeta_s$  – массовая доля конденсированных продуктов сгорания ТРТ, остающихся на поверхности горения в виде КС;  $q_g$  – тепловой поток (кондуктивный, конвективный и радиационный), поступающий в КС из газовой фазы (от продуктов сгорания над КС и газообразных продуктов сгорания, фильтрующихся через КС);  $Q_g$  – тепловой эффект газификации ТРТ на поверхности горения;  $Q_l$  – тепловой эффект газификации элементов КС;  $Q_r$  – количество тепла, выделяющееся в единице массы КС в единицу времени за счет к-фазных химических реакций, происходящих в КС.

Приближенно можно считать, что  $\zeta_s$  равна массовой доле  $\alpha_0$  порошкообразного горючего (алюминия, бора и т.п.) в ТРТ:

$$\zeta_s = \alpha_0. \quad (5)$$

Уравнение (3) с учетом (4) запишем в виде:

$$M_l c_l \frac{dT_s}{dt} = -\lambda_s \varphi + (1 - \zeta_s) \gamma u Q_g + (c_l T_s + Q_l) \dot{m}_g + q_g + M_l Q_r. \quad (6)$$

Как и в теории [2, 3], будем считать, что к-фаза ТРТ является химически инертной, т.е. химические реакции протекают только в узком реакционном слое у поверхности горения и в КС. В этом случае уравнения (1), (4), (6) должны быть дополнены уравнением теплопроводности для к-фазы ТРТ

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (7)$$

где  $a$  – температуропроводность к-фазы ТРТ, которая, как и в теории [2, 3], считается постоянной. Здесь выбрана система координат, связанная с поверхностью горения:  $x = 0$  соответствует поверхности горения  $S$  (поверхность 4 на рис. 1); ось  $x$  направлена в сторону продуктов сгорания; область  $x < 0$  соответствует к-фазе ТРТ. Уравнение (7) решается в области  $x < 0$  с граничными условиями

$$T(t, -\infty) = T_0, T(t, 0) = T_s(t), \quad (8)$$

где  $T_0$  – начальная температура ТРТ.

Система уравнений (1), (2), (4)–(8) является основой теории нестационарного горения ТРТ с учетом накопления конденсированных продуктов сгорания на поверхности горения и тепловой инерционности КС.

Массовая скорость горения ТРТ  $\dot{m}$ , т.е. масса продуктов сгорания (газообразных и конденсированных), поступающих в окружающую среду с единицы поверхности горения за единицу времени, складывается из массовой скорости образования газообразных продуктов горения  $(1 - \zeta_s) \gamma u + \dot{m}_g$  и массы КПС, отрывающихся от КС за единицу времени в расчете на единицу площади поверхности горения ТРТ  $\dot{m}_d$ :

$$\dot{m} = (1 - \zeta_s) \gamma u + \dot{m}_g + \dot{m}_d. \quad (9)$$

При нестационарном горении именно эта скорость горения, а не  $\gamma u$ , должна использоваться при проведении внутрибаллистических расчетов нестационарных процессов в различных энергетических установках.

Учитывая (4), соотношение (9) можно переписать в виде:

$$\dot{m} = \gamma u - \frac{dM_l}{dt}. \quad (10)$$

При стационарном горении  $\frac{dM_l}{dt} = 0$  и, как следует из (10),

$$\dot{m} = \gamma u \quad (11)$$

Таким образом, строго говоря, массовая скорость горения ТРТ равна  $\gamma u$  только при стационарном горении. Как следует из (10), если при нестационарном горении по каким-то причинам масса КС на поверхности горения не изменяется, то массовая скорость горения также будет определяться «стационарной» зависимостью (11).

Рассмотрим частные случаи.

А. При отсутствии КС (при отсутствии накопления КПС на поверхности горения)  $M_l = 0$ ,  $\zeta_s = 0$  и  $\dot{m}_g = 0$ , поэтому уравнение (6) принимает вид:

$$-\lambda_s \phi + \gamma u Q_g + q_g = 0. \quad (12)$$

Учитывая, что для безынерционной газовой фазы  $q_g = q_g(p, T_s)$ , из уравнения (12) формально получим

$$T_s = T_s(p, \phi, u). \quad (13)$$

Формальное решение системы уравнений (1) и (13) относительно  $u$  и  $T_s$  приводит к функциональным зависимостям

$$u = u(p, \phi), \quad T_s = T_s(p, \phi), \quad (14)$$

которые являются основой феноменологической теории нестационарного горения Зельдовича–Новожилова [2, 3]. Таким образом, теория (1), (2), (4)–(8) в пределе  $M_l = 0$ ,  $\zeta_s = 0$  и  $\dot{m}_g = 0$  переходит в обычную феноменологическую теорию нестационарного горения Зельдовича–Новожилова [2, 3] для ТРТ, горящих без накопления КПС на поверхности горения.

В. Как следует из (3), чем больше масса КС, тем меньше изменяется его температура при изменении внешних условий. Для массивного КС, когда его масса существенно превышает массу прогретого слоя в к-фазе ТРТ, т.е.  $M_l \gg \gamma a/u$ ,

можно пренебречь изменением температуры КС:  $\frac{dT_s}{dt} \approx 0$ . В этом случае рас-

сматриваемая теория переходит в первоначальную феноменологическую теорию нестационарного горения Я.Б. Зельдовича с постоянной температурой поверхности горения [2, 3].

С. Пренебрегая тепловой инерционностью КС, т.е. считая, что в уравнении (6) инерционный член в левой части  $M_l c_l \frac{dT_s}{dt}$  существенно меньше правой части

(но при этом  $\frac{dT_s}{dt} \neq 0$ ), получим

$$-\lambda_s \phi + (1 - \zeta_s) \gamma u Q_g + (c_l T_s + Q_l) \dot{m}_g + q_g + M_l Q_r = 0. \quad (15)$$

Отсюда формально получим

$$T_s = T_s(p, \phi, M_l, u). \quad (16)$$

Подставляя (16) в (1), формально получим  $u = u(p, \phi, M_l)$ , т.е. теорию [5].

Таким образом, все известные теории нестационарного горения являются частными случаями рассматриваемой модели горения ТРТ с накоплением конденсированных продуктов на поверхности горения.

Рассматриваемую теорию нестационарного горения ТРТ с накоплением конденсированных продуктов на поверхности горения можно квалифицировать как «полуфеноменологическую», в которой «феноменологичность» связана с соотношением (1), в то время как температура поверхности горения (температура КС) и масса КС на поверхности горения могут быть рассчитаны по уравнениям (4) и (6) на основе частных моделей, например моделей агломерации частиц алюминия и бора на поверхности горения [6, 7].

Отметим, что уравнение (6) можно формально записать в виде:

$$M_l c_l \frac{dT_S}{dt} = -\lambda_s (\varphi - \Phi), \quad (17)$$

где

$$\lambda_s \Phi = (1 - \zeta_s) \gamma u Q_g + (c_l T_S + Q_l) \dot{m}_g + q_g + M_l Q_r, \quad (18)$$

при этом функция

$$\Phi = \Phi(T_S, p, u, M_l) \quad (19)$$

считается одинаковой как при стационарном, так и при нестационарном горении ТРТ.

Аналогично уравнение (4) можно записать в виде:

$$\frac{dM_l}{dt} = \zeta_s \gamma (u - U), \quad (20)$$

где

$$\zeta_s \gamma U = \dot{m}_d + \dot{m}_g, \quad (21)$$

при этом функция

$$U = U(T_S, p, u, M_l) \quad (22)$$

считается одинаковой как при стационарном, так и при нестационарном горении ТРТ.

Для стационарного горения ( $\frac{dM_l}{dt} = 0$  и  $\frac{dT_S}{dt} = 0$ ) из уравнений (17), (19), (20) и (22) с учетом (1) получим

$$\Phi(T_S^0, p, u^0, M_l^0) = \varphi^0, \quad (23)$$

$$U(T_S^0, p, u^0, M_l^0) = u(p, \varphi^0, T_S^0), \quad (24)$$

где верхний индекс «0» соответствует параметрам стационарного горения.

Кроме того, для стационарного горения имеет место соотношение [2, 3]

$$a\varphi^0 = u^0 (T_S^0 - T_0). \quad (25)$$

Для замыкания модели нестационарного горения ТРТ с накоплением конденсированных продуктов на поверхности горения ее необходимо дополнить моделями диспергирования и газификации КС, позволяющими рассчитать скорости  $\dot{m}_d$  и  $\dot{m}_g$ .

В простейшем случае можно пренебречь скоростью газификации КС и считать

$$\dot{m}_g = 0. \quad (26)$$

Это допущение фактически означает, что КС не содержит газифицирующихся компонентов и состоит главным образом из частиц порошкообразных компонен-

тов ТРТ (алюминий, бор), которые, учитывая их малое время пребывания в КС, не успевают заметно прореагировать с газообразными продуктами разложения других компонентов ТРТ (например, с кислородом).

Для расчета массоприхода  $\dot{m}_d$ , связанного с диспергированием КС, строго говоря, необходимо использовать детальные модели поведения (механического, теплового и химического) отдельных элементов КС с учетом их взаимодействия друг с другом и с газообразными продуктами разложения компонентов ТРТ, оттекающих от поверхности горения, например модели [6, 7]. Однако, учитывая феноменологический характер разрабатываемой модели нестационарного горения, не имеет смысла использовать столь сложные модели агломерации. Поэтому рассмотрим упрощенную модель диспергирования КС, предполагая, что

$$\dot{m}_d = \psi M_l, \quad (27)$$

где  $\psi > 0$  – некоторый параметр. Смысл соотношения (27) очевиден: чем больше масса КС, тем быстрее в среднем происходит его диспергирование, так как на более толстый КС действует большая отрывающая сила.

Тогда уравнение (4) с учетом (5), (26) и (27) принимает вид:

$$\frac{dM_l}{dt} = \alpha_0 \gamma u - \psi M_l. \quad (28)$$

При стационарном горении получим (верхний индекс «0» соответствует стационарному горению)

$$\alpha_0 \gamma u^0 = \psi^0 M_l^0. \quad (29)$$

С помощью специальных, хотя и непростых экспериментов, аналогичных [8], можно определить зависимость  $M_l^0(p, T_0)$ . Учитывая общую логику процессов, происходящих в КС (см.: [6, 7]), можно ожидать, что масса КС  $M_l$  будет зависеть не отдельно от давления  $p$  и начальной температуры топлива  $T_0$ , а от скорости горения:  $M_l^0 = M_l^0(u^0)$ .

Тогда из уравнения (29) можно найти параметр  $\psi^0$ , который также будет функцией только скорости горения

$$\psi^0(u^0) = \alpha_0 \gamma u^0 / M_l^0(u^0). \quad (30)$$

Далее будем считать, что зависимость  $\psi(u)$  является универсальной и справедлива как при стационарном, так и при нестационарном горении:

$$\psi(u) = \psi^0(u). \quad (31)$$

Тогда уравнение (28) принимает вид:

$$\frac{dM_l}{dt} = \alpha_0 \gamma u - \psi(u) M_l. \quad (32)$$

Формальное решение уравнения (32) с начальным условием  $M_l(0)$  имеет вид:

$$\begin{aligned} M_l = M_l(0) \exp \left( - \int_0^t \psi(u(\tau)) d\tau \right) + \\ + \alpha_0 \gamma \int_0^t u(\tau) \exp \left( - \int_\tau^t \psi(u(\theta)) d\theta \right) d\tau. \end{aligned} \quad (33)$$

При этом массоприход  $\dot{m}_d$  определяется соотношениями (27), (31) и (33).

### Акустическая проводимость зоны горения твердого топлива

Одной из наиболее сложных и до конца не решенных проблем в теории ракетных двигателей на твердом топливе (РДТТ) является проблема акустической неустойчивости: возникновение самоподдерживающихся колебаний давления на одной из собственных частот камеры сгорания РДТТ. Причиной акустической неустойчивости является резонанс между собственными колебаниями скорости горения ТРТ и акустическими колебаниями его продуктов сгорания в камере сгорания, т.е. возникновение положительной обратной связи между акустическими колебаниями давления и вызванными ими колебаниями скорости горения.

Несмотря на давнюю историю исследований акустической неустойчивости в РДТТ [9], в настоящее время не до конца понятен механизм возникновения указанной положительной обратной связи между акустическими колебаниями давления в камере сгорания и колебаниями скорости горения. Более того, не до конца ясна роль в этом процессе КПС, образующихся при горении металлизированных ТРТ. До недавнего времени считалось, что роль КПС сводится только к демпфированию колебаний в камере сгорания [9] за счет механического и теплового отставания частиц к-фазы от газовой фазы. Однако относительно недавно в работе [10] в результате численного моделирования было показано, что КПС, в частности агломераты частиц алюминия, отрывающиеся от поверхности горения, могут играть также и дестабилизирующую роль, вызывая термоакустическую неустойчивость за счет инерционности их горения. Хотя эффект, описанный в [10], является слабым (амплитуда связанных с ним акустических колебаний в камере сгорания РДТТ составляет менее 0.5%), он в сочетании с другими эффектами может приводить к потере устойчивости процесса.

Используя рассмотренную выше модель нестационарного горения ТРТ с накоплением КПС на поверхности горения, покажем, что существует еще один механизм возникновения акустической неустойчивости в РДТТ, который не был ранее описан в литературе и который может вносить гораздо больший вклад в акустическую неустойчивость в РДТТ, чем эффект, обнаруженный в [10].

Как известно [2], реакция горящего ТРТ на падающую на его поверхность акустическую волну характеризуется акустической проводимостью зоны горения ТРТ

$$\zeta = -\rho_0 c_0 \Delta v / \Delta p, \quad (34)$$

которая связана с отношением комплексных амплитуд отраженной и падающей акустических волн соотношением

$$\sigma_a = (1 - \zeta) / (1 + \zeta), \quad (35)$$

где  $\rho_0$  и  $c_0$  – средняя плотность газа и скорость звука в камере сгорания;  $\Delta v$  и  $\Delta p$  – комплексные амплитуды колебаний скорости продуктов сгорания, оттекающих от поверхности горения, и давления. Усиление акустической волны при отражении от поверхности горящего ТРТ ( $|\sigma_a| > 1$ ) происходит при условии

$$\operatorname{Re} \zeta < 0, \quad (36)$$

что является необходимым условием для возникновения акустической неустойчивости в РДТТ.

При расчете акустической проводимости зоны горения ТРТ скорость  $v$  продуктов сгорания должна определяться на расстоянии от поверхности горения, где полностью завершилось горение наиболее медленно горящих компонентов. Для

металлизированных ТРТ (например, содержащих алюминий или бор) это расстояние определяется временем сгорания частиц КПС (например, алюминия или бора), покидающих поверхность горения. Согласно оценкам [10] полное сгорание частиц КПС (агломератов) происходит на расстоянии 10–50 мм от поверхности горения. Это расстояние будем обозначать  $L_p$ , а слой продуктов сгорания, имеющий толщину  $L_p$  над поверхностью горения, будем называть зоной горения ТРТ.

Интегрируя уравнение неразрывности для продуктов горения ТРТ по толщине зоны горения получим

$$(\rho v)_p = (\rho v)_l - \frac{dM_p}{dt} \quad (37)$$

где индекс «l» относится к верхней границе КС, с которой происходит унос частиц КПС в зону горения, индекс «p» – к верхней границе зоны горения;  $M_p$  – масса продуктов сгорания, находящихся в зоне горения.

Учитывая, что нас интересуют малые колебания, в линейном приближении колебания различных параметров могут быть рассмотрены независимо. По этой причине при описании интересующего нас эффекта мы будем пренебрегать отставанием частиц к-фазы от газовой фазы, считая, что они имеют одинаковую скорость и находятся в термодинамическом равновесии.

Очевидно,

$$M_p = \int_{t-t_p}^t \dot{m}(t') dt', \quad (38)$$

где  $\dot{m}(t)$  – мгновенная массовая скорость горения ТРТ,  $t_p$  – время сгорания наиболее крупных частиц КПС, вылетающих с поверхности горения. Отметим, что при нестационарном горении длительность  $t_p$  является функцией времени, т.е.  $t_p$  – это длительность горения самых крупных частиц КПС, которые полностью сгорели в момент  $t$  (соответственно, их отрыв от КС и начало горения произошли в момент времени  $t - t_p$ ).

Дифференцируя (38) по времени, получим

$$\frac{dM_p}{dt} = \dot{m}(t) - \dot{m}(t - t_p) \left( 1 - \frac{dt_p}{dt} \right). \quad (39)$$

Здесь учтено, что время сгорания частиц  $t_p$  в разные моменты времени может быть разным за счет колебаний давления, температуры и скорости горения частиц.

Подставляя (39) в (37), получим

$$(\rho v)_p = (\rho v)_l - \dot{m}(t) + \dot{m}(t - t_p) \left( 1 - \frac{dt_p}{dt} \right). \quad (40)$$

Учитывая, что по определению  $(\rho v)_l = \dot{m}(t)$ , получим

$$(\rho v)_p = \dot{m}(t - t_p) \left( 1 - \frac{dt_p}{dt} \right), \quad (41)$$

или

$$v_p = \frac{1}{\rho_p} \left( 1 - \frac{dt_p}{dt} \right) \dot{m}(t - t_p), \quad (42)$$

где  $v_p$  и  $\rho_p$  – скорость продуктов сгорания и их плотность на верхней границе зоны горения (т.е. на расстоянии  $L_p$  от верхней границы КС).

Обозначим  $v_0$ ,  $\rho_0$ ,  $\rho_0 v_0 \equiv \dot{m}_0 = \gamma u^0$  и  $t_0$  – скорость продуктов сгорания, их плотность в сечении  $L_p$ , массовая скорость горения ТРТ и время сгорания наиболее крупных частиц КПС при стационарном процессе в камере сгорания (или при среднем давлении, если происходят колебания давления).

Тогда из (42) получим

$$\frac{\Delta v_p}{v_0} = -\frac{\Delta \rho_p}{\rho_0} + \frac{\Delta \dot{m}(t-t_0)}{\dot{m}_0} - \frac{1}{\dot{m}_0} \frac{d\dot{m}(t-t_0)}{dt} \Delta t_p - \frac{dt_p}{dt}, \quad (43)$$

где

$$\Delta v_p = v_p - v_0, \quad \Delta \rho_p = \rho_p - \rho_0, \quad \Delta \dot{m} = \dot{m} - \dot{m}_0, \quad \Delta t_p = t_p - t_0. \quad (44)$$

Согласно (10),

$$\Delta \dot{m} = \gamma \Delta u - \frac{dM_l}{dt}. \quad (45)$$

Рассмотрим отдельные члены в правой части (43).

Первый член соответствует колебаниям плотности продуктов сгорания при колебаниях давления в камере сгорания. При вычислении  $\rho_p$ , а значит, и  $\Delta \rho_p$  необходимо иметь в виду, что плотность продуктов сгорания зависит от их состава и давления (здесь и далее предполагается, что между газовой фазой и КПС в каждый момент времени устанавливается термодинамическое равновесие; отклонение от термодинамического равновесия в рамках рассматриваемой здесь линейной теории, как уже было указано, может быть учтено независимо). Иными словами, плотность данной порции продуктов сгорания определяется давлением и тем, в каких пропорциях в нее изначально вошли газообразные продукты разложения ТРТ, газифицирующиеся на поверхности горения, и КПС.

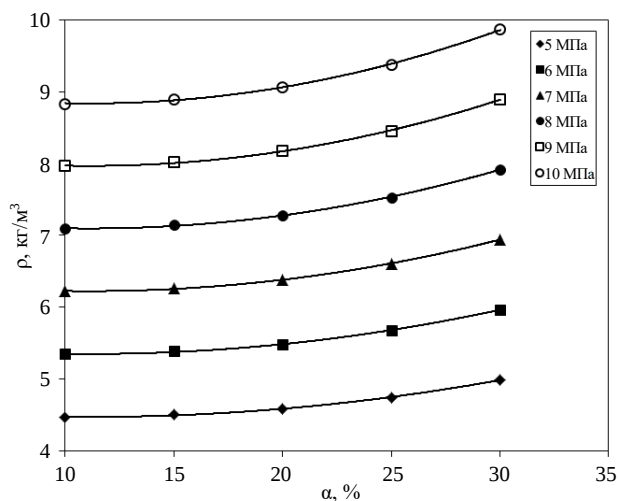
Таким образом, можно записать

$$\rho_p = \rho_p(p, \alpha), \quad (46)$$

где  $\alpha$  – массовая доля КПС в рассматриваемой порции продуктов сгорания, которая вошла в нее в момент ее формирования (т.е. в момент выхода продуктов сгорания из КС). В рассматриваемом приближении зависимость (46) можно получить термодинамическим расчетом при разных  $p$  и разных  $\alpha$ , рассматривая составы с разным содержанием, например, алюминия или бора при постоянном соотношении остальных (т.е. газифицирующихся на поверхности горения) компонентов ТРТ: ПХА, октогена, связующего и т.п. Отметим, что в действительности за счет эффектов нестационарного горения мгновенное массовое соотношение газообразных продуктов разложения разных компонентов ТРТ, покидающих поверхность горения, также может изменяться и не будет соответствовать их содержанию в ТРТ. Однако в данной работе этот эффект не учитывается.

Как пример, рассмотрим ТРТ состава НТРВ/ПХА/АІ = 12/68/20, в котором в качестве связующего используется полибутадиен с концевыми гидроксильными группами (НТРВ).

На рис. 2 приведены зависимости  $\rho_p(p, \alpha)$ , полученные термодинамическим расчетом. Расчеты выполнены в диапазоне  $p = (5 \dots 10)$  МПа и  $\alpha = (10 \dots 30)\%$ .



**Рис. 2.** Зависимость плотности продуктов сгорания от давления и содержания Al, полученная термодинамическим расчетом для состава НТРВ/ПХА/Al, где  $\alpha$  – содержание алюминия в составе; соотношение связующего и ПХА остается постоянным: НТРВ/ПХА = 12/68. Значки – термодинамический расчет; линии – аппроксимация (47)

**Fig. 2.** Dependence of density of combustion products on pressure and aluminum content obtained by thermodynamic calculation for the composition of НТРВ/AP/Al, where  $\alpha$  is the aluminum content in the composition, while the ratio of binder and AP remains constant: НТРВ/AP = 12/68. Symbols indicate thermodynamic calculations; lines indicate approximations (47)

Анализ зависимостей рис. 2 показывает, что для рассмотренного состава зависимость (46) хорошо аппроксимируется функцией

$$\rho_p = (0.924 - 0.00637\alpha + 0.0002865\alpha^2) p, \quad (47)$$

где  $\alpha$  берется в процентах.

Учитывая (46), получим

$$\frac{\Delta \rho_p}{\rho_0} = \frac{\partial \ln \rho_p}{\partial \ln p} \frac{\Delta p(t)}{p_0} + \frac{\partial \ln \rho_p}{\partial \alpha} \Delta \alpha(t - t_0), \quad (48)$$

где производные берутся при  $\alpha = \alpha_0$  и  $p = p_0$ ;  $\alpha_0$  – содержание порошкообразного горючего (алюминия, бора) в ТРТ;  $p_0$  – среднее давление в камере сгорания РДТТ при акустических колебаниях.

Здесь учтено запаздывание: порция продуктов сгорания, рассматриваемая в данный момент времени, на самом деле сформировалась в момент  $t - t_p$ .

Учитывая (48), запишем (43) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v_p}{v_0} = & -\frac{\partial \ln \rho_p}{\partial \alpha} \Delta \alpha(t - t_0) - \frac{\partial \ln \rho_p}{\partial \ln p} \frac{\Delta p(t)}{p_0} + \\ & + \frac{\Delta \dot{m}(t - t_0)}{\dot{m}_0} - \frac{1}{\dot{m}_0} \frac{d\dot{m}(t - t_0)}{dt} \Delta t_p - \frac{dt_p}{dt}. \end{aligned} \quad (49)$$

Второй член в правой части (49) описывает колебания плотности продуктов сгорания, связанные с колебаниями давления в камере сгорания, при условии что продукты сгорания имеют номинальный состав, соответствующий исходному

составу ТРТ. Эта составляющая всегда учитывается при расчете акустической неустойчивости в РДТТ [9, 10]. Третий член описывает колебания массоприхода продуктов сгорания в камеру сгорания РДТТ, которые формально также учитываются при расчете акустической неустойчивости в РДТТ, однако при этом никогда не учитывалось, что колебания массоприходов газообразных продуктов сгорания и КПС для ТРТ, имеющих КС на поверхности горения, могут происходить по-разному. Четвертый и пятый члены в правой части (49) описывают колебания времени сгорания частиц КПС при колебаниях давления в камере сгорания РДТТ, т.е. эффект, который численно был обнаружен в работе [10].

В то же время первый член в правой части (49) описывает новый эффект в теории акустической неустойчивости процесса в РДТТ: колебания мгновенного состава продуктов сгорания, вытекающих с поверхности горения ТРТ, на которой могут накапливаться КПС в виде КС. Этот эффект связан с тем, что массоприходы газообразных продуктов сгорания и КПС могут изменяться независимо при колебаниях давления, что изменяет мгновенный состав продуктов сгорания, покидающих поверхность горения и, как следствие, их термодинамические характеристики.

Проведем оценку. Для составов, соответствующих рис. 2,

$$\frac{\partial \ln p_p}{\partial \ln p} = 1, \quad \frac{\partial \ln p_p}{\partial \alpha} = \frac{-0.00637 + 0.000573\alpha}{0.924 - 0.00637\alpha + 0.0002865\alpha^2}.$$

В частности, для  $\alpha = \alpha_0 = 20\%$  получим  $\frac{\partial \ln p_p}{\partial \alpha} = 0.0056$ . Если колебания параметра  $\alpha$  составляют  $\Delta\alpha = 10\%$ , то первое слагаемое в (49) равно 0.056, т.е. оно вызывает более чем 5%-ное изменение скорости продуктов сгорания, оттекающих от поверхности горения, что будет вносить заметный вклад в акустическую проводимость зоны горения ТРТ.

Отметим еще один новый эффект, который имеет место при нестационарном горении ТРТ с КПС, способными накапливаться на поверхности горения в виде КС. Это запаздывание массоприхода, которое учитывается тем, что колебания скорости горения  $\Delta\dot{m}(t - t_0)$  берутся не в текущий момент  $t$ , а в момент образования данной порции продуктов сгорания  $t - t_0$ . Этот эффект также ранее не рассматривался. Для данной порции продуктов сгорания массовое отношение  $\alpha$  формируется в момент выхода продуктов сгорания из КС. Они состоят из определенного количества первичных газообразных продуктов горения, образовавшихся на поверхности горения (граница 4 на рис. 1), и определенного количества КПС, оторвавшихся от КС в данный момент времени.

Согласно сказанному выше, массовая скорость образования первичных газообразных продуктов сгорания равна  $(1 - \zeta_s)\gamma u + \dot{m}_g$ , а массовая скорость образования КПС, поступающих в камеру сгорания с поверхности КС, равна  $\dot{m}_d$ . Таким образом, мгновенная массовая доля КПС в продуктах сгорания, поступающих в камеру сгорания РДТТ,

$$\alpha = (\dot{m}_d / \dot{m})100\%. \quad (50)$$

Учитывая (9), получим

$$\alpha = \frac{\dot{m}_d}{(1 - \zeta_s)\gamma u + \dot{m}_g + \dot{m}_d}100\%. \quad (51)$$

Поскольку в общем случае  $u$ ,  $\dot{m}_g$  и  $\dot{m}_d$  при колебаниях давления могут изменяться независимо, приходим к выводу, что при колебаниях давления в камере сгорания параметр  $\alpha$  колеблется и для порций продуктов сгорания, образовавшихся в разные моменты времени, он будет разным.

Для вычисления  $\Delta\alpha$  предположим, что основной вклад в массоприход от КС вносит отрыв агломератов от поверхности горения, в то время как газификацией КС можно пренебречь ( $\dot{m}_g = 0$ ). В этом случае из соотношения (51) в линейном приближении получим

$$\Delta\alpha = \alpha_0 (1 - \alpha_0) \left( \frac{\Delta\dot{m}_d}{\dot{m}_d^0} - \frac{\Delta u}{u^0} \right). \quad (52)$$

Здесь учтено, что при стационарном горении ТРТ количество образующихся газообразных продуктов сгорания и количество отрывающихся от поверхности горения КПС в процентном отношении соответствуют составу ТРТ, т.е. согласно (4) и (5)  $\dot{m}_d^0 = \alpha_0 \gamma u^0$ .

Учитывая (27) и (31), получим

$$\frac{\Delta\dot{m}_d}{\dot{m}_d^0} = \frac{\partial \ln \psi}{\partial \ln u} \frac{\Delta u}{u^0} + \frac{\Delta M_l}{M_l^0}. \quad (53)$$

Используя решение (33), получим

$$\Delta M_l = \alpha_0 \gamma u^0 \int_0^t \left[ \frac{\Delta u(\tau)}{u^0} - \psi^0 \frac{\partial \ln \psi}{\partial \ln u} \int_{\tau}^t \frac{\Delta u(\theta)}{u^0} d\theta \right] \exp(-\psi^0(t-\tau)) d\tau. \quad (54)$$

Здесь пренебрегается начальными условиями, так как рассматривается периодический процесс.

Учитывая (29), получим

$$\frac{\Delta M_l}{M_l^0} = \psi^0 \int_0^t \left[ \frac{\Delta u(\tau)}{u^0} - \psi^0 \frac{\partial \ln \psi}{\partial \ln u} \int_{\tau}^t \frac{\Delta u(\theta)}{u^0} d\theta \right] \exp(-\psi^0(t-\tau)) d\tau \quad (55)$$

Для периодического процесса

$$\frac{\Delta p(t)}{p_0} = \eta \exp(i\omega t), \quad \frac{\Delta u(t)}{u^0} = w \exp(i\omega t). \quad (56)$$

где  $\eta$ ,  $w$  и  $\omega$  – некоторые постоянные. Подставляя (56) в (55), получим

$$\frac{\Delta M_l}{M_l^0} = \frac{\psi^0}{\psi^0 + i\omega} \left( 1 - \frac{\partial \ln \psi}{\partial \ln u} \right) w \exp(i\omega t). \quad (57)$$

Подставляя (53), (56) и (57) в (52), получим

$$\Delta\alpha = \alpha_0 (1 - \alpha_0) \frac{i\omega}{\psi^0 + i\omega} \left( \frac{\partial \ln \psi}{\partial \ln u} - 1 \right) w \exp(i\omega t). \quad (58)$$

Учитывая (34), (49) и (56) для составляющей акустической проводимости зоны горения ТРТ, связанной с изменением состава продуктов сгорания, оттекающих от поверхности горения, при колебаниях давления в камере сгорания (первый член в правой части (49)), получим

$$\zeta_\alpha = \gamma c_0 \frac{u_0}{p_0} \alpha_0 (1 - \alpha_0) \frac{\partial \ln p}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial \ln \psi}{\partial \ln u} - 1 \right) \frac{i\omega}{\psi^0 + i\omega} \frac{w}{\eta} \exp(-i\omega t_0). \quad (59)$$

Здесь учтено, что  $\rho_0 v_0 = \gamma u_0$ . Причем параметр  $\gamma c_0 u_0 / p_0$  определяется главным образом габаритами двигательной установки и температурой продуктов сгорания и слабо зависит от давления в камере сгорания.

Отношение  $w/\eta$  может быть вычислено по модели (1), (2), (4)–(8), (26), (27) по аналогии с тем, как это делается в феноменологической теории [2, 3]. В частности, как следует из результатов предыдущего анализа, приближенно можно использовать соответствующее решение теории [2, 3].

Составляющая (59) акустической проводимости зоны горения смесового ТРТ является новой и ранее не учитывалась при анализе акустической неустойчивости в РДТТ.

### Заключение

Таким образом, рассмотрено нестационарное горение ТРТ, горящих с образованием конденсированных продуктов, способных накапливаться на поверхности горения в виде КС. Модель учитывает тепловую инерционность КС и изменение его массы в процессе нестационарного горения. В рамках разработанной модели нестационарного горения определена акустическая проводимость зоны горения ТРТ. Показано, что при нестационарном горении таких ТРТ изменяется мгновенный состав продуктов (газообразных и конденсированных), покидающих поверхность горения, который отличается от исходного состава ТРТ. Этот новый эффект, ранее не описанный в литературе, может приводить к дополнительной дестабилизации процесса в камере сгорания РДТТ и к развитию акустической неустойчивости.

### Список источников

1. Zarko V.E., Gusachenko L.K. Critical review of phenomenological models for studying transient combustion of solid propellants // *International Journal of Spray and Combustion Dynamics*. 2010. V. 2, № 2. P. 151–167. doi: 10.1260/1756-8277.2.2.151
2. Новожилов Б.В. Нестационарное горение твердых ракетных топлив. М. : Наука, 1973. 176 с.
3. Зельдович Я.Б., Лейтунский О.И., Либрович В.Б. Теория нестационарного горения пороха. М. : Наука, 1975. 132 с.
4. Гусаченко Л.К., Зарко В.Е. Анализ нестационарных моделей горения твердых топлив (обзор) // *Физика горения и взрыва*. 2008. Т. 44, № 1. С. 35–48.
5. Гусаченко Л.К. Феноменологическая модель нестационарного горения ТТ с накоплением компонента на поверхности // *Физика горения и взрыва*. 1989. Т. 25, № 2. С. 38–42.
6. Рашковский С.А. Статистическое моделирование агломерации алюминия при горении гетерогенных конденсированных смесей // *Физика горения и взрыва*. 2005. Т. 41, № 2. С. 62–74.
7. Rashkovskiy S.A. Direct numerical simulation of boron particle agglomeration in combustion of boron-containing solid propellants // *Combustion Science and Technology*. 2017. V. 189, № 8. P. 1277–1293. doi: 10.1080/00102202.2017.1294586
8. Глотов О.Г., Ягодников Д.А., Воробьев В.С., Зарко В.Е., Симоненко В.Н. Воспламенение, горение и агломерация капсулированных частиц алюминия в составе смесового твердого топлива. II. Экспериментальные исследования агломерации // *Физика горения и взрыва*. 2007. Т. 43, № 3. С. 83–97.
9. Culick F.E.C. Unsteady Motions in Combustion Chambers for Propulsion Systems. RTO AGARD RTO-AG-AVT-039, 2006.

10. Gallier S., Godfroy F. Aluminum combustion driven instabilities in solid rocket motors // *Journal of propulsion and power*. 2009. V. 25, № 2. С. 509–521. doi: 10.2514/1.37664

### References

1. Zarko V.E., Gusachenko L.K. (2010) Critical review of phenomenological models for studying transient combustion of solid propellants. *International Journal of Spray and Combustion Dynamics*. 2(2). pp. 151–167. doi: 10.1260/1756-8277.2.2.151
2. Novozhilov B.V. (1973) *Nestatsionarnoe gorenje tverdykh raketnykh topliv* [Unsteady combustion of solid propellants]. Moscow: Nauka.
3. Zel'dovich YA.B., Leypunskiy O.I., Librovich V.B. (1975) *Teoriya nestatsionarnogo goreniya porokha* [Theory of unsteady combustion of gunpowder]. Moscow: Nauka.
4. Gusachenko L.K., Zarko V.E. (2008) Analysis of unsteady solid-propellant combustion models. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 44(1). pp. 31–42. doi: 10.1007/s10573-008-0006-0
5. Gusachenko L.K. (1989) Phenomenological model of unsteady burning of solid fuel with accumulation of a component on the surface. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 25(2). pp. 167–170. doi: 10.1007/BF00742009
6. Rashkovskii S.A. (2005) Statistical simulation of aluminum agglomeration during combustion of heterogeneous condensed mixtures. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 41. pp. 174–184. doi: 10.1007/s10573-005-0020-4
7. Rashkovskiy S.A. (2017) Direct numerical simulation of boron particle agglomeration in combustion of boron-containing solid propellants. *Combustion Science and Technology*. 189(8). pp. 1277–1293. doi: 10.1080/00102202.2017.1294586
8. Glotov O.G., Yagodnikov D.A., Vorob'ev V.S., Zarko V.E., Simonenko V.N. (2007) Ignition, combustion, and agglomeration of encapsulated aluminum particles in a composite solid propellant. II. Experimental studies of agglomeration. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 43(3). pp. 320–333. doi: 10.1007/s10573-007-0045-y
9. Culick F.E.C. (2006) *Unsteady Motions in Combustion Chambers for Propulsion Systems*. RTO AGARD RTO-AG-AVT-039.
10. Gallier S., Godfroy F. (2009) Aluminum combustion driven instabilities in solid rocket motors. *Journal of Propulsion and Power*. 25(2). pp. 509–521. doi: 10.2514/1.37664

### Сведения об авторе:

**Рашковский Сергей Александрович** – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории термогазодинамики и горения Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук (Москва, Россия); ведущий научный сотрудник лаборатории проектирования рабочих элементов ракетно-космической техники Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: rash@ipmnet.ru

### Information about the author:

**Rashkovskiy Sergey A.** (Doctor of Physics and Mathematics, Principal Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation; Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: rash@ipmnet.ru

*Статья поступила в редакцию 21.10.2023; принята к публикации 04.12.2023*

*The article was submitted 21.10.2023; accepted for publication 04.12.2023*

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/86/9

## Механическое поведение алюминиевого сплава 1520 при растяжении в диапазоне скоростей деформации от $10^{-1}$ до $10^3$ с $^{-1}$

Владимир Альбертович Скрипняк<sup>1</sup>, Максим Олегович Чирков<sup>2</sup>,  
Владимир Владимирович Скрипняк<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup> Томский государственный университет, Томск, Россия

<sup>1</sup> skrp2006@yandex.ru

<sup>2</sup> chirkovmaxim@mail.ru

<sup>3</sup> skrp2012@yandex.ru

**Аннотация.** Механическое поведение алюминиевого сплава 1520 исследовано в широком диапазоне скоростей деформации при одноосном растяжении и продавливании пластин полусферическим индентором со скоростью до 10 м/с при комнатной температуре с применением высокоскоростного сервогидравлического стенда Инстрон VHS 40/50-20. Полученные результаты использованы для калибровки определяющего уравнения и модели повреждаемости сплава при динамическом нагружении.

**Ключевые слова:** алюминивно-магнийевый сплав, динамические воздействия, испытание на динамическое продавливание

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФ (код проекта 23-29-00349).

**Для цитирования:** Скрипняк В.А., Чирков М.О., Скрипняк В.В. Механическое поведение алюминиевого сплава 1520 при растяжении в диапазоне скоростей деформации от  $10^{-1}$  до  $10^3$  с $^{-1}$  // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 120–135. doi: 10.17223/19988621/86/9

Original article

## Mechanical behavior of aluminum alloy 1520 under tension in the range of strain rates from $10^{-1}$ to $10^3$ s $^{-1}$

Vladimir A. Skripnyak<sup>1</sup>, Maksim O. Chirkov<sup>2</sup>, Vladimir V. Skripnyak<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup> Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

<sup>1</sup> skrp2006@yandex.ru

<sup>2</sup> chirkovmaxim@mail.ru

<sup>3</sup> skrp2012@yandex.ru

**Abstract.** The mechanical behavior of aluminum alloy 1520 is studied in a wide range of strain rates under uniaxial tension and pressing of plates with a hemispherical indenter

at velocities up to 10 m/s at room temperature using an Instron VHS 40/50-20 high-velocity servo-hydraulic test machine. The experiments are performed in accordance with the test standards ASTM E 8/E 8M, ISO 26203-2:2011, ASTM E3205, and GOST 10510-80. The obtained results are used to calibrate a constitutive equation and a model of the alloy failure under dynamic loading. The numerical simulation results for uniaxial tension of specimens with constant strain rates and high-speed punching of 1 mm thick plates with a hemispherical punch with a diameter of 20 mm are consistent with the experimental data. Numerical simulations are performed using the LS DYNA solver (ANSYS WB 15.2). To obtain adequate predictions of the mechanical behavior of aluminum–magnesium alloy 1520 using the Johnson–Cook models, it is necessary to use higher plastic strains before failure as compared to the average macroscopic values recorded during tension testing of the alloy. The presented results can be used when performing numerical studies of the mechanical behavior of structural elements and metamaterials made of alloy 1520 under dynamic loading.

**Keywords:** aluminum-magnesium alloy, dynamic impacts, dynamic punching test

**Acknowledgments:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-29-00349).

**For citation:** Skripnyak, V.A., Chirkov, M.O., Skripnyak, V.V. (2023) Mechanical behavior of aluminum alloy 1520 under tension in the range of strain rates from  $10^{-1}$  to  $10^3$  s $^{-1}$ . *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 120–135. doi: 10.17223/19988621/86/9

## Введение

В настоящее время области применения алюминиевых сплавов в авиакосмической, транспортной технике, медицине, спортивном инвентаре существенно расширяются в связи с использованием для производства ответственных элементов конструкций со сложной геометрией аддитивных технологий, включая технологии 3D селективного лазерного плавления и спекания [1, 2]. Дисперсно-упрочненные алюминиевые сплавы и наполненные упрочняющими микрочастицами композиты с алюминиевой матрицей демонстрируют высокие показатели прочности, пластичности и трещиностойкости, что расширяет возможности их применения в технических конструкциях, подвергающихся квазистатическим и динамическим нагрузкам [1–3].

Алюминиевый сплав 1520 (аналог сплавов АМг2, АА 5052) относится к системе Al–Mg-сплавов, обладает высокой коррозионной стойкостью, пластичностью, хорошей свариваемостью [4]. Актуальность получения более полной информации о закономерностях механического поведения сплава 1520 в условиях квазистатического и динамического нагружения обусловлена расширением его применения для производства элементов конструкций и экстремальных метаматериалов с использованием аддитивных технологий [1–7].

Для изучения закономерностей высокоскоростной деформации алюминий-магниевых сплавов, включая аналоги сплава 1520, успешно используются методики, сочетающие испытания на высокоскоростное одноосное растяжение с испытаниями на продавливание пластин инденторами [5–7].

Исследования механического поведения сплава 1520 в условиях квазистатического растяжения плоских образцов показали, что развитие пластической де-

формации сопровождается возникновением и развитием квазипериодических зон локализации, что определяет особенности диаграмм макроскопических условных напряжений и деформаций и эволюцию повреждений [8].

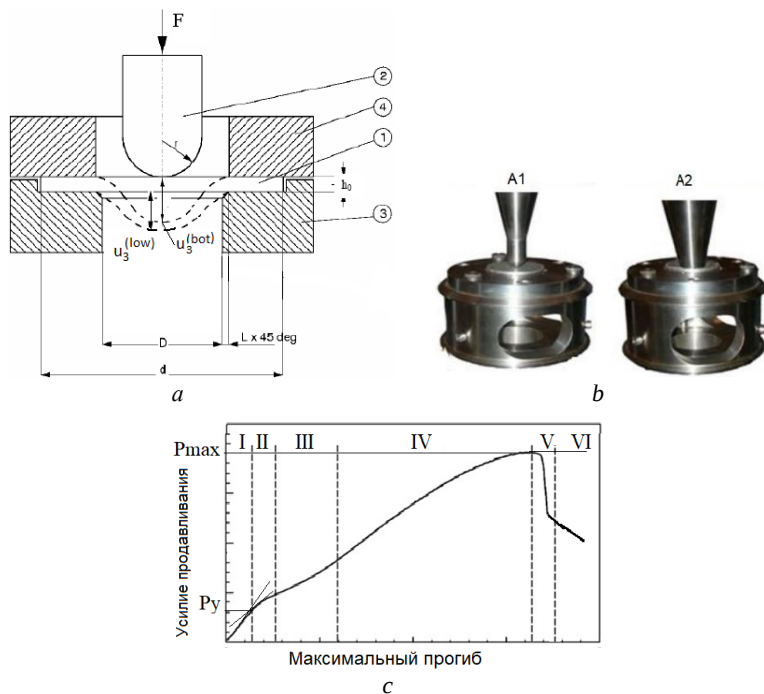
Несмотря на интенсивные исследования, особенности деформации сплава 1520 при высоких скоростях деформации и в условиях сложного напряженного состояния недостаточно полно изучены даже при комнатной температуре. Цель настоящего исследования состоит в изучении закономерностей деформации, повреждения и разрушения сплава 1520 в условиях одноосного растяжения и продавливания пластин полусферическим индентором со скоростью до 10 м/с. Экспериментальные результаты дополняют имеющиеся данные о механических свойствах сплава при квазистатическом нагружении, что позволяет их использовать для определения коэффициентов определяющих уравнений и моделей повреждения, например модели Джонсона–Кука, используемых пакетов инженерного анализа WB ANSYS, ABAQUS и других для прогнозирования механической реакции сплава 1520 в конструкциях при динамических воздействиях [9].

## 1. Материал и методы испытания

Исследования проводились на образцах алюминиевого сплава 1520 (ранее применявшаяся маркировка – АМг2, аналог АА 5052). Промышленный прокат алюминиевого сплава 1520 ГОСТ 17232–99 имел химический состав (мас. %): 2.2 Mg, 0.06 Mn, 0.5 Fe, 0.4 Si, 0.1 Cu, Al – остальное, средний размер зерна  $60 \pm 10$  мкм. Испытание на одноосное растяжение плоских образцов проводилось в соответствии со стандартами (ASTM E 8/E 8M–08, ISO 26203-2:2011) при постоянных скоростях деформации 0.1, 1, 100 и  $1\,000\text{ с}^{-1}$  и комнатной температуре с использованием сервогидравлического стенда Инстрон VHS 40/50-20 (Instron, High Wycombe, UK) с датчиком усилий до 50 кН. Электроэрозионным методом вырезались образцы толщиной  $1.05 \pm 0.05$  мм и начальной длиной рабочей части  $20 \pm 0.1$  мм. Испытания проводились в режиме управления скоростью захвата:  $0.002 \pm 0.00001$ ,  $2 \pm 0.01$  и  $20 \pm 0.1$  м/с. Растягивающее усилие и смещение регистрировались с высоким временным разрешением вплоть до полного разрушения образца. Истинное напряжение определялось из аналитических соотношений [10].

Испытание пластин сплава на продавливание полусферическим индентором, имеющим диаметр 20 мм, было выполнено на образцах диаметрами  $d = 60$  мм и  $D = 40$  мм в соответствии со стандартами (ASTM E3205, ГОСТ 10510–80). На рис. 1, а, б показана схема испытательного приспособления для продавливания плоских образцов для стенда Инстрон VHS 40/50-20. Скорость индентора влияет на динамику разрушения пластины и характер образования трещин. Данное обстоятельство позволяет использовать эту схему испытаний для получения данных, которые могут быть использованы при компьютерном моделировании упругопластического поведения и разрушения металлических сплавов в широком диапазоне скоростей деформации с учетом изменения параметра трехосности напряженного состояния. При увеличении скорости индентора изменение характера разрушения материала обусловлено развитием локализации пластической деформации в зоне интенсивного растяжения. При испытаниях образца на продавливание индентором скорость определялась интегрированием данных от датчика ускорения с использованием программного обеспечения HV 9230. Данные

о смещении центральной точки образца определялись по разнице данных датчика положения с помощью программы HV 9230. Для каждой скорости индентором проведено по 5 испытаний, которые показали высокую степень воспроизводства результатов. На рис. 1, с представлена характерная зависимость усилия продавливания от максимального прогиба образца.



**Рис. 1.** (а) Схема устройства для испытания на продавливание тонких пластин в разрезе: 1 – образец, 2 – полусферический индентор, 3 – нижняя и 4 – верхняя части опорной матрицы,  $d$  – диаметр образца,  $D$  – диаметр зоны деформации образца при нагружении,  $h_0$  – толщина образца,  $u_3^{(bot)}$  и  $u_3^{(low)}$  – положения смещений  $u_3$  прогиба поверхности нагружения и свободной поверхности образца в центре соответственно; (б) фотографии начальной (A1) и конечной (A2) стадий продавливания; (с) диаграмма усилие–прогиб пластины  $F(u_3)$

**Fig. 1.** (a) A sectional scheme of the punch test setup for thin plates: 1, specimen; 2, hemispherical indenter; 3, 4, lower and upper parts of the support matrix, respectively;  $d$  is the specimen diameter,  $D$  is the diameter of the specimen deformation zone during loading,  $h_0$  is the specimen thickness,  $u_3^{(bot)}$  and  $u_3^{(low)}$  are the positions of deflection displacements of the loading surface and free surface of the specimen in its center, respectively; (b) photographs of the initial (A1) and final (A2) stages of punching; and (c) force–deflection diagram  $F(u_3)$  for a plate

На диаграмме  $F(u_3)$  предложено выделять шесть стадий [11]. Упругое деформирование пластины при штамповке – первая стадия. Нарушение линейности  $F(u_3)$  – вторая стадия. Возникновение пластических деформаций – третья стадия. Развитие пластических деформаций образца при движении индентора – четвертая стадия. В результате образования трещин и зоны разрушения образца фиксируется уменьшение усилия на пятой стадии, а шестая стадия соответствует заключительному этапу разрушения продавливаемой пластины. Было показано, что мак-

симальная нагрузка  $P_{max}$  на кривой  $F(u_3)$  демонстрирует линейную корреляцию с пределом прочности на разрыв ( $\sigma_{UTS}$ ) в соответствии с соотношением Норриса–Паркера [11, 12]:

$$\sigma_{UTS} = P_{max} / \alpha h_f 2r_{punch}, \quad (1)$$

где  $F(u_3)$  – нагрузка на индентор,  $r_{punch}$  – радиус полусферического индентора,  $h_f$  – толщина образца при разрушении,  $\alpha$  – контактный угол, зависящий от параметров применяемого испытательного устройства.

Условный предел текучести  $\sigma_{0.2}$  связан с величиной усилия  $P_y$ , показанного на рис. 1, с [13]:

$$\sigma_{0.2} = \beta P_y / h_0^2, \quad (2)$$

где  $\sigma_s$  – предел текучести,  $P_y$  – усилие продавливания, при котором начинают развиваться пластические деформации в образце,  $h_0$  – толщина образца,  $\beta \approx 3/2\pi$  – постоянная [13].

Эквивалентная деформация до разрушения  $\varepsilon_f$  при продавливании полусферическим индентором может быть определена соотношением [11–13]

$$\varepsilon_f = \ln(h_0 / h), \quad (3)$$

где  $h_0$  – начальная толщина образца,  $h$  – средняя толщина образца в области разрушения.

## 2. Модель и методика численного моделирования

Численное моделирование проводилось с использованием решателя LS DYNA (ANSYS WB 15.2). В расчетах применялись конечно-разностные схемы второго порядка точности. Вычислительная модель использует теоретические основы механики сплошных сред с повреждениями. Динамические процессы деформирования были описаны системой уравнений, включающей уравнения сохранения (массы, импульса и энергии), кинематические соотношения, определяющие соотношения для сред с повреждениями, уравнение состояния Ми–Грюнайзена и релаксационное уравнение для компонент девиатора тензора напряжений. Система уравнений, приведенная в [14], была верифицирована для алюминиевых сплавов с гранецентрированной кубической (ГЦК) решеткой с использованием феноменологических термомеханических соотношений [15] и модели Джонсона–Кука [16]:

$$\mu = \mu_0 - G_m T, \quad (4)$$

где  $\mu$  – модуль сдвига,  $T$  – температура (К), константы для алюминия  $\mu_0 = 29,484$  ГПа,  $G_m = 0.0136$  ГПа/К [15].

Связанное с диссипацией энергии при пластическом течении повышение температуры рассчитывалось из соотношения [17, 18]

$$T = T_0 + \int_0^{\varepsilon_{eq}^p} (\beta / \rho C_p) \sigma_{eq} d\varepsilon_{eq}^p, \quad (5)$$

где  $T_0$  – начальная температура; параметр Тейлора–Куннея  $\beta \sim 0.9$  представляет долю работы напряжений на пластических деформациях, преобразованной в тепло,  $C_p$  – удельная теплоемкость,  $\rho$  – массовая плотность,  $d\varepsilon_{eq}^p = \dot{\varepsilon}_{eq}^p dt = [(2/3)\dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p]^{1/2} dt$  – интенсивность пластической деформации,  $\sigma_{eq} = [(3/2)\sigma_{ij}\sigma_{ij} - 0.5\sigma_{kk}^2]^{1/2}$  – эквивалентное напряжение фон Мизеса.

Предел текучести конденсированного материала с ГЦК решеткой описывался с помощью следующего определяющего соотношения [16]:

$$\sigma_s = [C_0 + C_1 (\varepsilon_{eq}^p)^n] [1 + C_2 \ln(\dot{\varepsilon}^*)] [1 - (T^*)^m], \quad (6)$$

где  $(C_0, C_1, C_2, n, m)$  – феноменологические константы материала, которые определяются с использованием результатов экспериментальных исследований механического поведения материалов в определенных диапазонах изменения скоростей деформации, температуры и степеней деформации,  $T^*$  – нормированная температура, задаваемая соотношением

$$T^* = \begin{cases} 0, & T < 295 \text{ K}, \\ (T - 295 \text{ K}) / (T_{melt} - 295 \text{ K}), & 295 \leq T \leq T_{melt}, \\ 1, & T > T_{melt}, \end{cases} \quad (7)$$

где  $T$  – температура по абсолютной шкале.

В уравнении (3) напряжение течения  $\sigma_s$  представлено мультипликативной функцией от эквивалентной пластической деформации  $\varepsilon_{eq}^p$ , нормированной эквивалентной скорости деформации  $\dot{\varepsilon}^* = \dot{\varepsilon}_{eq} / \dot{\varepsilon}_0$ , (где  $\dot{\varepsilon}_0 = 1 \text{ с}^{-1}$  – эталонная скорость деформации),  $T_{melt} = 923 \text{ K}$ , нормированной температуры  $T^*$ . Коэффициенты (6) были определены с использованием экспериментальных данных по методике, предложенной в [16]. Для определения параметров зависимости от  $T^*$  были дополнительно использованы экспериментальные результаты, полученные для аналога исследуемого сплава AA5032-H32 [19, 20]. Для прогнозирования напряжения течения при моделировании механического поведения сплава 1520 были использованы следующие значения параметров:  $C_0 = 90 \text{ МПа}$ ,  $C_1 = 335 \text{ МПа}$ ,  $n = 0.34$ ,  $C_2 = 0.008$ ,  $m = 2.01$ ,  $T_{melt} = 923 \text{ K}$ .

При моделировании были использованы следующие численные значения параметров сплава 1520: массовая плотность сплава 1520 в нормальных условиях  $\rho = 2.68 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , модуль Юнга  $E = 70.3 \text{ ГПа}$ , статический предел прочности  $228 \text{ МПа}$ ; модуль сдвига  $\mu = 25.9 \text{ ГПа}$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0.33$ , температура плавления в зависимости от допустимой концентрации легирующих компонентов  $T_{melt} = 878...923 \text{ K}$ , коэффициент линейного теплового расширения  $23.7 \cdot 10^{-6} \text{ К}$ ; коэффициент теплопроводности  $138 \text{ Вт/м К}$ , модуль объемного сжатия  $B = 69.92 \text{ ГПа}$ , производная модуля объемного сжатия по давлению  $B_1 = 4.8$ , входящие в уравнение состояния Берча–Мурнагана [14], удельная теплоемкость принята равной  $0.880 \text{ кДж/кг·К}$  [15].

Эволюция поврежденности алюминиевого сплава определялась с использованием модели Джонсона–Кука [14, 20]. Согласно модели разрушения, область разрушения связана с трехосностью напряженного состояния и эквивалентной пластической деформацией:

$$\varepsilon_f = [D_1 + D_2 \exp(D_3 \eta)] [1 + D_4 \ln(\dot{\varepsilon}^*)] [1 + D_5 T^*], \quad (8)$$

где  $\varepsilon_f$  – эквивалентная пластическая деформация при разрушении материала,  $D_1...D_5$  – постоянные материала,  $\eta = -p/\sigma_{eq}$  – параметр трехосности напряженного состояния.

Постоянные материала  $D_1...D_5$  были определены по предложенной в [20] методике с использованием полученных в данной работе экспериментальных результатов для сплава 1520 и данных [19, 21]. Моделирование разрушения спла-

ва 1520 при одноосном растяжении плоских образцов и высокоскоростного продавливания пластин полусферическим индентором было выполнено при следующих значениях параметров:  $D_1 = 0.45$ ,  $D_2 = 0.015$ ,  $D_3 = -1.72$ ,  $D_4 = 0.028$ ,  $D_5 = 5.2$ ,  $T_{melt} = 923$  К.

При вязком разрушении параметр поврежденности сплава  $f$  определяется соотношением [16]

$$f = \sum \left( \frac{\Delta \varepsilon_{eq}}{\varepsilon_f} \right), \quad (9)$$

где  $\Delta \varepsilon_{eq}$  – приращение эквивалентной пластической деформации в соответствующей материальной точке.

Критерий локального разрушения определен условием

$$f = 1. \quad (10)$$

Контакты между индентором и образцом, зажимным устройством и образцом моделировались с помощью стандартной карты LSDYNA “auto\_surface\_to\_surface”. Заданные параметры коэффициента трения  $FS = 0.2$  и коэффициента вязкого демпфирования  $VDC = 30$  обеспечили отсутствие паразитных силовых колебаний в контакте [9, 22].

Завершающая стадия развития повреждений перед вязким разрушением соответствует слиянию повреждений в макроскопическую трещину.

Начальные условия соответствуют свободному напряженному состоянию материала в однородном температурном поле. Граничные условия (8) соответствуют растяжению вдоль оси  $OX_1$  с постоянной скоростью  $v_2$ . Граничные условия (рис. 2), соответствующие постоянной скорости нагружения, имеют вид:

$$\begin{aligned} u_2(x_k, t) = 0, \quad x_k \in S_1; \quad u_2(x_k, t) = v_2, \quad x_k \in S_3; \\ \sigma_{33} = 0, \quad x_k \in S_2 \cup S_4; \quad \sigma_{22} = 0, \quad x_k \in S_5 \cup S_6. \end{aligned} \quad (11)$$

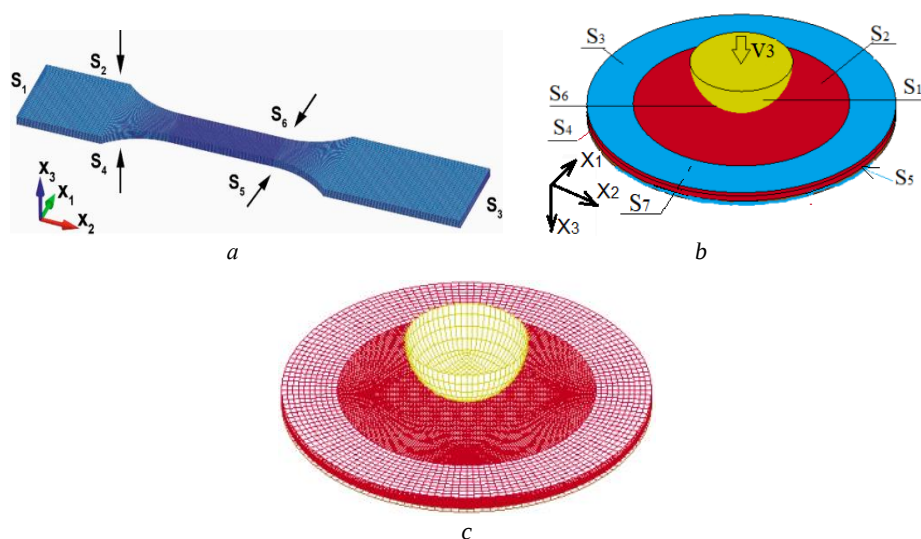
Граничные условия задачи о продавливании пластины полусферическим индентором были сформулированы в виде:

$$\begin{aligned} u_3(x_k, t) = v_3, \quad x_k \in S_1, \quad \sigma_{ij}(x_k, t) = 0, \quad x_k \in S_2 \cap S_6, \\ u_i(x_k, t) = 0, \quad x_k \in S_3 \cup S_4, \\ F_n^{(S_2)}(x_k) = -F_n^{(S_1)}(x_k), \quad x_k \in S_6(t) \text{ (контактная поверхность)}, \\ F_r(x_k) = \mu \cdot |F_n|(x_k), \quad x_k \in S_6, \quad \sigma_{ij}(x_k, t) = 0, \quad x_k \in S_7 \end{aligned} \quad (12)$$

( $S_7$  – нижняя свободная поверхность образца, симметричная  $S_2$ ).

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений,  $u_i$  – компоненты вектора скорости материальных частиц на поверхностях  $S_k$ ,  $k = 1 \dots 7$ ,  $v_3$  – скорость индентора,  $\mu$  – вычисляемый коэффициент трения по заданному параметру  $FS$  [22],  $F_r$  – радиальная составляющая силы трения,  $F_n$  – нормальная составляющая усилия в точках контактных поверхности  $F_6$  индентора и образца.

Расчетная область для моделирования деформации образцов была выполнена с использованием 3D линейных лагранжевых элементов с применением контроля эффекта «песочных часов» искажения элементов сетки при больших деформациях. В расчетах использовалась сетка с шагом  $\sim 0,3$  мм. Шаг сетки обеспечивал численную сходимость расчетных параметров напряженно-деформированного состояния при растяжении образцов.



**Рис. 2.** (a, b) Нумерация поверхностей в расчетных моделях, (c) сетка образца и индентора  
**Fig. 2.** (a, b) Numbering of surfaces in computational models, (c) mesh surface of the specimen and indenter

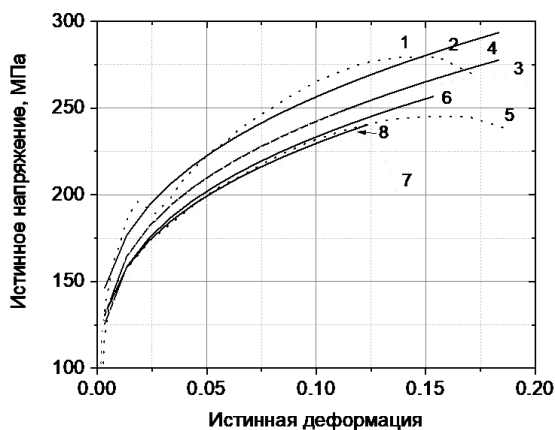
В 3D модели алюминиевой пластины использовано  $\sim 120\,000$  элементов. Сеточные модели индентора и устройства закрепления образцов предполагали реакцию твердых тел и были созданы с использованием 2D оболочечных элементов.

### 3. Результаты и обсуждение

Экспериментальные зависимости истинных напряжений от истинных деформаций, полученные при растяжении образцов вдоль направления проката с постоянными скоростями деформации  $0.01, 1, 100, 1\,000\text{ с}^{-1}$ , приведены на рис. 3. Эти результаты свидетельствуют о проявлении скоростной чувствительности напряжения течения алюминиевого сплава 1520 в диапазоне скоростей деформации от  $0.01$  до  $1\,000\text{ с}^{-1}$  и существенном деформационном упрочнении сплава в указанном диапазоне скоростей деформации.

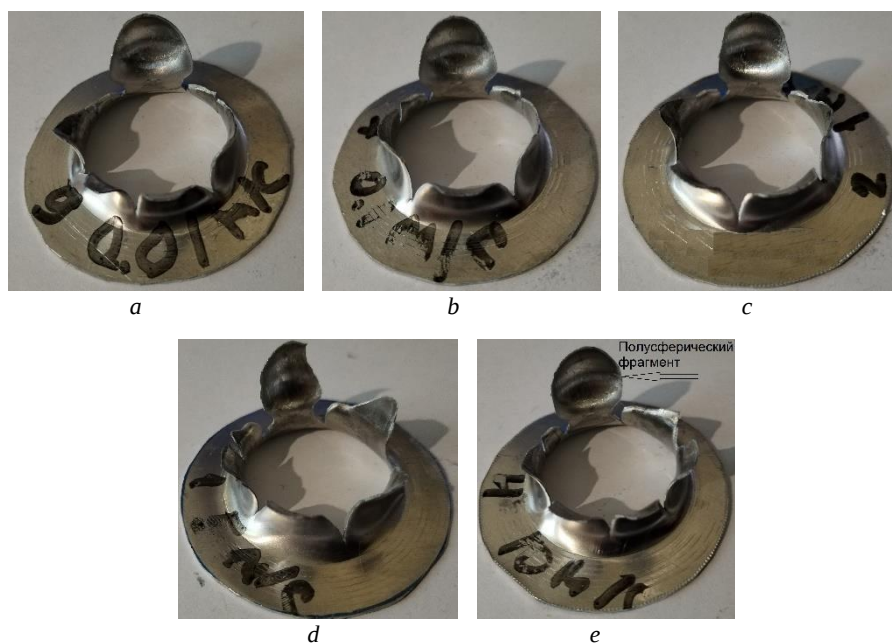
На рис. 4 показаны фотографии образцов с трещинами, образовавшимися при продавливании плоских образцов индентором при скоростях  $0.01, 0.1, 1.0, 5.0$  и  $10.0\text{ м/с}$ . Конфигурации трещин указывают на общность закономерностей зарождения и формирования трещин в пластинах при продавливании полусферическим индентором в диапазоне скоростей от  $0.01$  до  $10\text{ м/с}$ .

Наличие полусферических фрагментов в зоне разрушения образцов (см. рис. 4, e) указывает на то, что на IV стадии продавливания разрушение начинается с формирования кольцевых трещин. Радиальные трещины разделяют образец на шесть фрагментов и формируются на V и VI стадиях вследствие взаимодействия конической части индентора с пластиной (см. рис. 1, b). Экспериментальные диаграммы  $F(u_3)$ , полученные при продавливании пластин полусферическим индентором при фиксированных скоростях от  $0.01$  до  $10\text{ м/с}$ , показаны на рис. 5, a.



**Рис. 3.** Зависимости истинных напряжений от истинных деформаций при растяжении образцов сплава 1520 с постоянными скоростями деформации. Линии 1, 3, 5, 7 – экспериментальные диаграммы растяжения при скоростях деформации 1 000, 10, 1, 0,01  $\text{с}^{-1}$  соответственно; линии 2, 4, 6, 8 – результаты расчетов для соответствующих скоростей деформации

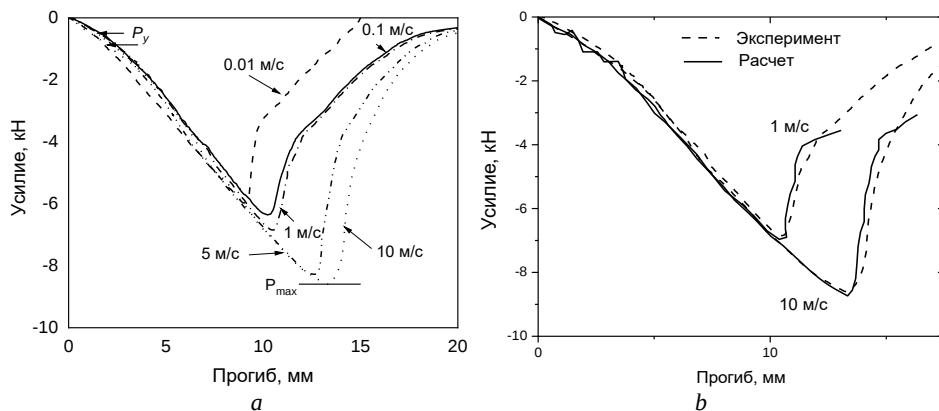
**Fig. 3.** True stress–strain curves for the specimens of aluminum alloy 1520 under tension at fixed strain rates. Experimental curves 1, 3, 5, 7 for to the specimens under tension at strain rates of 1000, 100, 1, and 0.01  $\text{s}^{-1}$ , respectively; the corresponding curves 2, 4, 6, 8 are obtained in the simulation



**Рис. 4.** Фотографии образцов после испытаний при скоростях индентора: (a) 0.01 м/с, (b) 0.1 м/с, (c) 1.0 м/с, (d) 5.0 м/с и (e) 10.0 м/с

**Fig. 4.** Photographs of the specimens after testing at the indenter velocities of (a) 0.01, (b) 0.1, (c) 1.0, (d) 5.0, and (e) 10.0 m/s

Для определения напряжений и деформаций выполнено имитационное численное моделирование процесса деформации и разрушения пластин при фиксированных скоростях продавливания полусферическим индентором. На рис. 5, *b* показаны расчетные диаграммы  $F(u_3)$  при скоростях индентора 1 и 10 м/с в сравнении с экспериментальными. В зоне зарождения трещины (см. рис. 5, *b*) эквивалентная скорость деформации достигает значений  $\sim 500 \text{ с}^{-1}$ , а в прилежащих зонах скорость деформации существенно ниже (до  $\sim 300 \text{ с}^{-1}$ ). Уравнения модели (3) и (5) при найденных численных значениях коэффициентов позволяют получить в расчетах качественно и количественно правильные значения макроскопических параметров отклика материала пластин при продавливании со скоростями до 10 м/с. Величины условного предела текучести, найденные с помощью формулы (2) и экспериментальных диаграмм продавливания на рис. 5, *a*, составили  $95 \pm 5$ ,  $150 \pm 7.5$ ,  $195 \pm 10$  МПа для скоростей деформации  $\sim 10^{-3}$ ,  $\sim 0.01 \cdot 10^3$  и  $\sim 0.5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$  соответственно.



**Рис. 5.** (а) Экспериментальные диаграммы усилия  $F(u_3)$  от прогиба при продавливании полусферическим индентором диаметром 20 мм пластин алюминиевого сплава 1520 со скоростями 0.01, 0.1, 1, 5 и 10 м/с; (б) расчетные диаграммы  $F(u_3)$  в сопоставлении с экспериментальными данными

**Fig. 5.** (a) Experimental diagrams of the force  $F(u_3)$  versus deflection for punching through aluminum plates of alloy 1520 by a hemispherical indenter with a diameter of 20 mm at the velocities of 0.01, 0.1, 1, 5 and 10 m/s; (b) calculated diagrams of  $F(u_3)$  compared to the experimental data

Найденное значение предела текучести для скорости деформации  $10^{-3} \text{ с}^{-1}$  хорошо согласуется со справочными данными об условном пределе листового проката сплава 1520. Значения условного предела текучести при высоких скоростях деформации согласуются с экспериментальными значениями, полученными при одноосном растяжении в данной работе.

Расчетные значения пластической деформации на нижней поверхности пластины при максимальных прогибах на 11.2 и 11.84 мм при продавливании индентором со скоростью 10 м/с приведены на рис. 6, *a*, *b*. Результаты показывают формирование двунаправленных зон локализации пластической деформации, повреждений и конечного разрушения в процессе продавливания. Процесс деформации и повреждения происходит в условиях конкуренции между растягивающим нормальным напряжением и сдвиговым напряжением. На начальной ста-

дии деформации сплава 1520 растягивающее нормальное напряжение в окружном направлении приводит к образованию окружных полос сдвига. Начало формирования окружной трещины приводит к перераспределению сдвиговых напряжений, как показано на рис. 6, *d*. Пространственное распределение сдвиговых напряжений определяет зарождение радиальных зон повреждения, приводящих к образованию радиальных трещин с последующим их ростом под действием конической части опоры индентора. Число фрагментов в случае данного исследования шесть (показаны на рис. 4), и их геометрические характеристики не зависят от скорости движения конструкции индентора в диапазоне от 0.01 до 10 м/с.

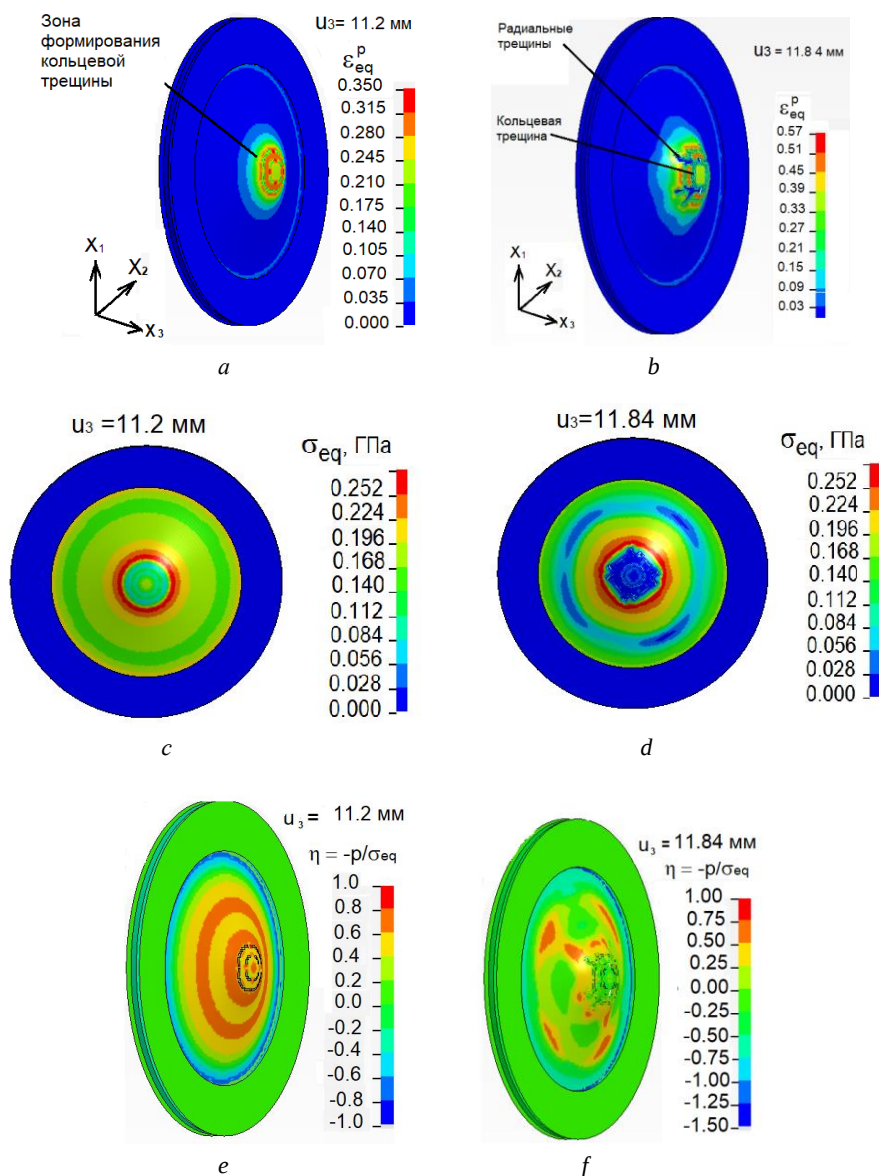
Пластическая деформация на III и IV стадиях продавливания пластин полусферическим индентором развивается под действием сдвиговых напряжений, а трещины начинают формироваться в окружном направлении. Кольцевые зоны локализации деформации с последующим формированием повреждений и трещин образуются при прогибе пластины на 11.2 мм при скорости индентора 10 м/с (см. рис. 6, *a*).

Результаты, показанные на рисунке 6, *a*, *b*, свидетельствуют о локализации пластической деформации в алюминиевом сплаве 1520 перед разрушением при высокоскоростном растяжении. Ранее формирование полос локализации деформации перед разрушением в условиях одноосного растяжения со скоростями деформации от  $1.67 \cdot 10^{-4}$  до  $33.33 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$  было обнаружено в сплаве 1520 методом корреляции цифровых изображений (DIC) [8].

В данной работе оценки предельных деформаций в зоне локализации при образовании трещин были определены по формуле (3) с использованием статистически усредненных измеренных значения толщин на краю фрагментов каждого из пяти образцов в сериях испытаний при фиксированных скоростях индентора. Получены следующие значения  $\varepsilon_f$ :  $0.497 \pm 0.026$ ,  $0.492 \pm 0.021$ ,  $0.485 \pm 0.022$ ,  $0.434 \pm 0.022$ ,  $0.351 \pm 0.021$  при скоростях индентора 10, 5, 1, 0.1 и 0.01 м/с соответственно. Полученные значения существенно превышают усредненные значения  $\varepsilon_f$  при одноосном растяжении образцов при соответствующих скоростях деформации, которые могут быть оценены по результатам на рис. 3.

В результате релаксации сдвиговых напряжений в зонах локализации пластической деформации и роста повреждений в деформируемом образце образуется сложное напряженное состояние. Распределение параметра трехосности напряженного состояния вблизи тыльной поверхности образца сплава 1520 показано на рис. 6, *e*, *f* при продавливании индентором со скоростями до 10 м/с.

Использование модели повреждения Джонсона–Кука (8), (9) совместно с уравнением (6) позволило получить согласие расчетной конфигурации трещин при скоростном продавливании пластин сплава 1520, как показано на рис. 6, *b*. Расчетная конфигурация трещин при прогибе пластины на 11.84 мм согласуется с наблюдаемой в эксперименте (см. рис. 4, *e*). Используемая для прогнозирования образования повреждений в процессе динамического продавливания листового проката сплава 1520 модель механического поведения Джонсона–Кука (8), (9) учитывает зависимость величины предельных деформаций до разрушения от параметра трехосности напряженного состояния  $\eta$  [13, 18]. При одноосном растяжении плоских образцов металлов и сплавов без надрезов параметр  $\eta$  слабо изменяется относительно постоянного значения  $\sim 0.333$  [9]. Расчетные величины параметра трехосности напряженного состояния, показанные на рис. 6, *c*, *d* варьируют в широком диапазоне в процессе продавливания полусферическим индентором.



**Рис. 6.** Расчетные значения параметров механического состояния на нижней поверхности пластины при прогибах 11.2 и 11.84 мм при продавливании пластины сплава 1520 полусферическим индентором со скоростью 10 м/с: (a, b) эквивалентные пластические деформации; (c, d) эквивалентные напряжения фон Мизеса; (e, f) параметр трехосности напряжений  $\eta$

**Fig. 6.** Calculated parameters of the mechanical state at the deflections of 11.2 and 11.84 mm on the lower surface of the plate of alloy 1520 punched by a hemispherical indenter at a velocity of 10 m/s: (a, b) equivalent plastic deformations; (c, d) equivalent von Mises stresses; and (e, f) stress triaxiality parameter  $\eta$

Данные, полученные при испытаниях на высокоскоростное продавливание пластин, дополняют и расширяют информацию о закономерностях высокоскоростной деформации при одноосном растяжении, представленных на рис. 3. Согласно расчетной конфигурации трещин и числа образующихся фрагментов с экспериментальными данными, полученными при моделировании высокоскоростного продавливания пластин сплава 1520 с использованием модели Джонсона–Кука, позволило описать влияние параметра трехосности напряженного состояния  $\eta$  на пластическое течение сплава 1520 при сложном напряженном состоянии. В условиях продавливания листового проката сплава 1520 формируются окружные и радиальные зоны с повреждениями и трещинами. Полученные результаты показывают, что модель Джонсона–Кука с параметрами, найденными в данной работе, позволяет описывать и прогнозировать деформации и разрушения листового проката алюминиевого сплава 1520 при температурах, близких к комнатной, в диапазоне скоростей деформации от  $0.001$  до  $1\,000\text{ с}^{-1}$ .

### Заключение

Проведено исследование механического поведения алюминиевого сплава 1520 (ранее применявшаяся маркировка АМг2, аналог сплава АА5052) при одноосном растяжении со скоростями деформации от  $0.01$  до  $1\,000\text{ с}^{-1}$  и многоосном растяжении в условиях продавливания при комнатной температуре пластин толщиной  $1\text{ мм}$  полусферическим индентором диаметром  $20\text{ мм}$  со скоростями от  $0.01$  до  $10\text{ м/с}$ .

Получены новые данные о напряжении течения и предельных деформациях до разрушения сплава в широком диапазоне скоростей деформации и изменения параметра трехосности напряженного состояния.

Показано, что при высокоскоростном растяжении происходит вязкое разрушение алюминиевого сплава 1520 в результате зарождения и роста повреждений в зонах локализации пластической деформации.

Для получения адекватных прогнозов механического поведения сплава 1520 в диапазоне скоростей деформации от  $0.001$  до  $1\,000\text{ с}^{-1}$  на основе модели повреждаемых сред Джонсона–Кука необходимо использовать более высокие значения эквивалентных пластических деформаций до разрушения по сравнению с усредненными макроскопическими значениями, регистрируемыми при одноосном растяжении образцов.

Полученные экспериментальные данные могут быть использованы для калибровки моделей механического поведения для сплава 1520. Определяющее уравнение и модель повреждаемости Джонсона–Кука с параметрами, найденными в данной работе, могут быть использованы при выполнении численных исследований элементов конструкций из сплава 1520 с концентраторами напряжений при динамических воздействиях.

### Список источников

1. Vishnukumar M., Pramod R., Rajesh Kannan A. Wire arc additive manufacturing for repairing aluminium structures in marine application // Materials Letters. 2021. V. 299. Art. 130112. doi: 10.1016/j.matlet.2021.130112
2. Промахов В.В., Матвеев А.Е., Шульц Н.А., Бахмат В.Р., Дронов Ф.Ю., Туранов Т.Э. Исследование структуры и свойств металломатричных композиционных материалов, полученных методом прямого лазерного выращивания // Вестник Томского государственного университета. 2021. № 4(478). С. 10–15.

- ственного университета. Математика и механика. 2022. № 77. С. 125–139. doi: 10.17223/19988621/77/10
3. Хрусталеv А.П., Платов В.В., Кахидзе Н.И., Жуков И.А., Ворожцов А.Б. Влияние наночастиц вольфрама на структуру и механическое поведение алюминиевого сплава 1550 в условиях квазистатического нагружения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 74. С. 141–153. doi: 10.17223/19988621/74/14
  4. Алюминий АМг2 // Центральный металлический портал. 2023. URL: [https://metallicheckiy-portal.ru/marki\\_metallov/alu/AMg2](https://metallicheckiy-portal.ru/marki_metallov/alu/AMg2) (дата обращения: 24.05.2023).
  5. Li X., Shi T., Li B., Chen X., Zhang C., Guo Z., Zhang Q. Subtractive manufacturing of stable hierarchical micro-nano structures on AA5052 sheet with enhanced water repellence and durable corrosion resistance. // Materials and Design. 2019. V. 183. Art. 108152. doi: 10.1016/j.matdes.2019.108152
  6. He H., Yang T., Ren Y., Peng Y., Xue S., Zheng L. Experimental investigation on the formability of Al-Mg alloy 5052 sheet by tensile and cupping test // Materials. 2023. V. 15. Art. 8949. doi: 10.3390/ma15248949
  7. Скрипник Н.В. Особенности разрушения алюминий-магниевого сплава АМг6 при высокоскоростной деформации // Известия вузов. Физика. 2015. Т. 58, № 5. С. 96–101.
  8. Третьякова Т.В., Вильдеман В.Э. Закономерности и схематизация процесса локализации пластического течения при испытаниях плоских образцов алюминий-магниевого сплава // Физическая мезомеханика. 2017. Т. 20, № 2. С. 71–78.
  9. LS-DYNA3D Theoretical manual. Livermore, CA : Livermore software Technology Corporation, 1993.
  10. Skripnyak V.V., Skripnyak E.G., Skripnyak V.A. Fracture of titanium alloys at high strain rates and under stress triaxiality // Metals. 2020. V. 10, № 3. Art. 305. doi: 10.3390/met10030305
  11. Lucon E., Benzing J., Hrabe N. Development and validation of small punch testing at NIST : National Institute of Standards and Technology Interagency or Internal Report 8303 // Natl. Inst. Stand. Technol. Internag. Intern. 2020. V. 8303. 55 p. doi: 10.6028/NIST.IR.8303
  12. Norris S.D., Parker J.D. Deformation processes during disc bend loading // Materials Science and Technology. 1996. V. 12 (2). P. 163–170. doi: 10.1179/mst.1996.12.2.163
  13. Vorlicek V., Exworthy L.F., Flewitt P.E.J. Evaluation of a miniaturized disc test for establishing the mechanical properties of low-alloy ferritic steels // Journal of Materials Science. 1995. V. 30. P. 2936–2943. doi: 10.1007/BF00349666
  14. Skripnyak V.V., Skripnyak V.A. Hexagonal close packed (hcp) alloys under dynamic impacts // Journal of Applied Physics. 2022. V. 131. Art. 165902. doi: 10.1063/5.0085338
  15. Carmona R., Zhu Q., Sellars C.M., Beynon J.H. Controlling mechanisms of deformation of AA5052 aluminium alloy at small strains under hot working conditions // Materials Science and Engineering: A. 2005. V. 393 (1-2). P. 157–163. doi: 10.1016/j.msea.2004.11.010
  16. Johnson G.R., Cook W.H. Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures // Engineering Fracture Mechanics. 1985. V. 21. P. 31–48. doi: 10.1016/0013-7944(85)90052-9
  17. Taylor G.I., Quinney H. The latent energy remaining in a metal after cold working // Proc. Royal Soc. London. Ser. A. Mathematical and Physical Sciences. 1934. V. 143, № 849. P. 307–326.
  18. Bragov A., Igumnov L., Konstantinov A., Lomunov A., Rusin E. Effects of high strain rate and self-heating on plastic deformation of metal materials under fast compression loading // Journal of Dynamic Behavior of Materials. 2019. V. 5. P. 309–319. doi: 10.1007/s40870-019-00214-x
  19. Prakash G., Singh N.K., Sharma P., Gupta N.K. Tensile, compressive, and flexural behaviors of Al5052-H32 in a wide range of strain rates and temperatures // Journal of Materials in Civil Engineering. 2020. V. 32, № 5. Art. 04020090. doi: 10.1061/(ASCE)MT.1943-5533.0003154
  20. Ijaz H., Zain-ul-abdein M., Saleem W., Asad M., Mabrouki T. Modified Johnson-Cook plasticity model with damage evolution: application to turning simulation of 2XXX aluminium alloy // Journal of Mechanics. 2017. V. 33. P. 777–788. doi: 10.1017/jmech.2017.11

21. Song P., Li W., Wang X., Xu W. Study on mechanical properties and constitutive model of 5052 aluminium alloy // *Materials Science and Technology*. 2019. V. 35, № 8. P. 916–924. doi: 10.1080/02670836.2019.1596611
22. Škrlec A., Klemenc J. Estimating the strain-rate-dependent parameters of the Cowper-Symonds and Johnson-Cook material models using Taguchi arrays // *Strojniški vestnik – Journal of Mechanical Engineering*. 2016. V. 62, № 4. P. 220–230. doi: 10.5545/sv-jme.2015.3266

## References

1. Vishnukumar M., Pramod R., Rajesh Kannan A. (2021) Wire arc additive manufacturing for repairing aluminium structures in marine application. *Materials Letters*. 299. Article 130112. doi: 10.1016/j.matlet.2021.130112
2. Promakhov V.V., Matveev A.E., Schul'ts N.A., Bakhmat V.R., Dronov F.Yu., Turanov T.E. (2022) Issledovanie struktury i svoystv metallomatrichnykh kompozitsionnykh materialov, poluchennykh metodom pryamogo lazernogo vyrashchivaniya [A study of the structure and properties of the metal matrix composite materials obtained by a method of direct laser growing]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 125–139. doi: 10.17223/19988621/77/10
3. Khrustalev A. P., Platov V. V., Kakhidze N. I. E., Zhukov I. A., Vorozhtsov A. B. (2021) Vliyaniye nanochastits vol'frama na strukturu i mekhanicheskoe povedeniye alyuminievogo splava 1550 v usloviyakh kvazistaticheskogo nagruzheniya [Influence of tungsten nanoparticles on the structure and mechanical behavior of the 1550 aluminum alloy under quasi-static loading]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 74. pp. 141–153. doi: 10.17223/19988621/74/14
4. Tsentral'nyy metallicheskiy portal. Alyuminiy AMg2 [Central metal portal. Aluminum AMg2]. URL: [https://metallichekiy-portal.ru/marki\\_metallov/alu/AMg2](https://metallichekiy-portal.ru/marki_metallov/alu/AMg2) (05/24/2023).
5. Li X., Shi T., Li B., Chen X., Zhang C., Guo Z., Zhang Q. (2019) Subtractive manufacturing of stable hierarchical micro-nano structures on AA5052 sheet with enhanced water repellence and durable corrosion resistance. *Materials and Design*. 183. Article 108152. doi: 10.1016/j.matdes.2019.108152
6. He H., Yang T., Ren Y., Peng Y., Xue S., Zheng L. (2023) Experimental investigation on the formability of Al-Mg alloy 5052 sheet by tensile and cupping test. *Materials*. 15. Article 8949. doi: 10.3390/ma15248949
7. Skripnyak N.V. (2015) The features of fracture behavior of an aluminum-magnesium alloy AMg6 under high-rate straining. *Russian Physics Journal*. 58. pp. 691–697. doi: 10.1007/s11182-015-0552-3
8. Tret'yakova T.V., Vil'deman V.E. (2018) Zakonomernosti i skhematizatsiya protsessa lokalizatsii plasticheskogo techeniya pri ispytaniyakh ploskikh obraztsov alyuminievo-magnievogo splavakh [Plastic strain localization and its stage in Al-Mg alloys]. *Fizicheskaya mezomekhanika – Physical Mesomechanics*. 21(4). pp. 314–319. doi: 10.1134/S1029959918040057
9. LS-DYNA3D Theoretical Manual (1993) Livermore: Livermore Software Technology Corporation.
10. Skripnyak V.V., Skripnyak E.G., Skripnyak V.A. (2020) Fracture of titanium alloys at high strain rates and under stress triaxiality. *Metals*. 10(3). Article 305. pp. 1–24. doi: 10.3390/met10030305
11. Lucon E., Benzing J., Hrabe N. (2020) *Development and Validation of Small Punch Testing at NIST*. National Institute of Standards and Technology Interagency or Internal Report 8303. doi: 10.6028/NIST.IR.8303
12. Norris S.D., Parker J.D. (1996) Deformation processes during disc bend loading. *Materials Science and Technology*. 12(2). pp. 163–170. doi: 10.1179/mst.1996.12.2.163
13. Vorlicek V., Exworthy L.F., Flewitt P.E.J. (1995) Evaluation of a miniaturized disc test for establishing the mechanical properties of low-alloy ferritic steels. *Journal of Materials Science*. 30. pp. 2936–2943. doi: 10.1007/BF00349666

14. Skripnyak V.V.; Skripnyak V.A. (2022) Hexagonal close packed (HCP) alloys under dynamic impacts. *Journal of Applied Physics*. 131. Article 165902. doi: 10.1063/5.0085338
15. Carmona R., Zhu Q., Sellars C.M., Beynon J.H. (2005) Controlling mechanisms of deformation of AA5052 aluminium alloy at small strains under hot working conditions. *Materials Science and Engineering: A*. 393(1–2). pp. 157–163. doi: 10.1016/j.msea.2004.11.010
16. Johnson G.R., Cook W.H. (1985) Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures. *Engineering Fracture Mechanics*. 21. pp. 31–48. doi: 10.1016/0013-7944(85)90052-9
17. Taylor G.I., Quinney H. (1934) The latent energy remaining in a metal after cold working. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. 143(849). pp. 307–326. doi: 10.1098/rspa.1934.0004
18. Bragov A., Igumnov L., Konstantinov A., Lomunov A., Rusin E. (2019) Effects of high strain rate and self-heating on plastic deformation of metal materials under fast compression loading. *Journal of Dynamic Behavior of Materials*. 5. pp. 309–319. doi: 10.1007/s40870-019-00214-x
19. Prakash G., Singh N.K., Sharma P., Gupta N.K. (2020) Tensile, compressive, and flexural behaviors of Al5052-H32 in a wide range of strain rates and temperatures. *Journal of Materials in Civil Engineering*. 32(5). Article 04020090. doi: 10.1061/(ASCE)MT.1943-5533.0003154
20. Ijaz H., Zain-ul-abdein M., Saleem W., Asad M., Mabrouki T. (2017) Modified Johnson-Cook plasticity model with damage evolution: application to turning simulation of 2XXX aluminium alloy. *Journal of Mechanics*. 33. pp. 777–788. doi: 10.1017/jmech.2017.11
21. Song P., Li W., Wang X., Xu W. (2019) Study on mechanical properties and constitutive model of 5052 aluminium alloy. *Materials Science and Technology*. 35(8). pp. 916–924. doi: 10.1080/02670836.2019.1596611
22. Škrlec A., Klemenc J. (2016) Estimating the strain-rate-dependent parameters of the Cowper-Symonds and Johnson-Cook material models using Taguchi arrays. *Strojniški vestnik – Journal of Mechanical Engineering*. 62(4). pp. 220–230. doi: 10.5545/sv-jme.2015.3266

#### **Сведения об авторах:**

**Скрипник Владимир Альбертович** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики деформируемого твердого тела Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: skrp2006@yandex.ru

**Чирков Максим Олегович** – аспирант Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: chirkovmaksim@mail.ru

**Скрипник Владимир Владимирович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики деформируемого твердого тела Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: skrp2012@yandex.ru

#### **Information about the authors:**

**Skripnyak Vladimir A.** (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Deformable Solid Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: skrp2006@yandex.ru

**Chirkov Maksim O.** (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: chirkovmaksim@mail.ru

**Skripnyak Vladimir V.** (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: skrp2012@yandex.ru

*Статья поступила в редакцию 11.09.2023; принята к публикации 04.12.2023*

*The article was submitted 11.09.2023; accepted for publication 04.12.2023*

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/86/10

## Оценка верхнего и нижнего уровней допустимых деформаций при изготовлении листовых и тонкостенных деталей на основе диаграммы предельных деформаций

Сергей Иванович Феоктистов<sup>1</sup>, Иван Константинович Андрианов<sup>2</sup>

<sup>1, 2</sup> *Комсомольский-на-Амуре государственный университет,  
Комсомольск-на-Амуре, Россия*

<sup>1</sup> *serg\_feo@mail.ru*

<sup>2</sup> *ivan\_andrianov\_90@mail.ru*

**Аннотация.** Исследование посвящено оценке максимального и минимального уровней предельных деформаций формоизменения тонкостенных заготовок на основе FLD-диаграмм. В работе используется теоретический анализ нескольких известных критериев, включая критерии возникновения рассеянной и локализованной шеек, а также критерий резкого локального утонения листа. Рассматривается двусторонний анализ предельного деформирования тонкостенных заготовок по FLD-диаграммам, позволяющий дать верхнюю и нижнюю оценки предельных деформаций формоизменения.

**Ключевые слова:** диаграмма предельных деформаций, критерий Хилла–Свифта, критерий Сторена–Райса, верхняя и нижняя оценки предельных деформаций формоизменения

**Благодарности:** Авторы выражают благодарность «Совету по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых и по государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации» за финансовую поддержку для проведения исследования в рамках стипендии по проекту СП-2200.2022.5 «Разработка моделей и алгоритмов расчета пластического формообразования заготовок штамповочного производства».

**Для цитирования:** Феоктистов С.И., Андрианов И.К. Оценка верхнего и нижнего уровней допустимых деформаций при изготовлении листовых и тонкостенных деталей на основе диаграммы предельных деформаций // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 136–148. doi: 10.17223/19988621/86/10

## Assessment of the upper and lower levels of permissible strains in the manufacture of sheet and thin-walled parts based on the forming limit diagram

Sergey I. Feoktistov<sup>1</sup>, Ivan K. Andrianov<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Komsomolsk-on-Amur State University, Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation

<sup>1</sup>serg\_feo@mail.ru

<sup>2</sup>ivan\_andrianov\_90@mail.ru

**Abstract.** Forming limit diagrams (FLDs) are currently widely used in the analysis of sheet metal forming without destruction and in assessing the technological capabilities of metal forming. This paper is devoted to the FLD-based assessment of the maximum and minimum limiting strains of the forming of thin-walled workpieces. Theoretical analysis of well-known criteria is used, including the criteria for the occurrence of scattered and localized necks, the so-called energy (static) criteria, as well as the criterion of abrupt local thinning of the sheet, the so-called kinematic criterion. This paper considers a two-way analysis of the forming limits of thin-walled workpieces according to FLDs, which allows one to determine the upper and lower estimates of the limiting strains of the forming. The analysis is based on the FLD study results obtained by various authors and published both in Russia and abroad. The presented research results can be used as a first-order analysis tool for evaluating and predicting the technological capabilities of the molded material in the manufacture of thin-walled parts. They are also relevant to metal processing by pressure and plastic forming of thin-walled sheets.

**Keywords:** forming limit diagram, Hill-Swift criterion, Storen-Rice criterion, upper and lower estimates of the forming limits

**Acknowledgments:** The authors express their gratitude to the “Council for Grants of the President of the Russian Federation for state support of young Russian scientists and for state support of leading scientific schools of the Russian Federation” for the financial support to perform a research under the scholarship project SP-2200.2022.5 “Development of models and algorithms for calculating plastic shaping of blanks of stamping production”.

**For citation:** Feoktistov, S.I., Andrianov, I.K. (2023) Assessment of the upper and lower levels of permissible strains in the manufacture of sheet and thin-walled parts based on the forming limit diagram. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 136–148. doi: 10.17223/19988621/86/10

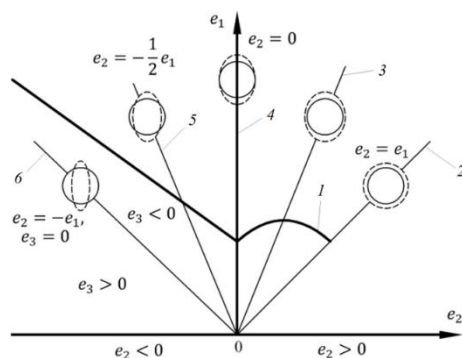
### Введение

На сегодняшний день наиболее актуальными проблемами процессов обработки металлов давлением являются вопросы бездефектного формоизменения тонкостенных листовых заготовок, связанные с расчетом процессов деформирования, исключаящих шейкообразование и разрушение. Одним из инструментов для определения предельного деформирования является построение кривой предельных деформаций (Forming Limit Curve).

Кривая предельных деформаций представляет собой графическую зависимость между двумя главными деформациями – наибольшими и наименьшими – в плоскости листа, соответствующую началу шейкообразования или разрушения. Полный график в виде FLC-кривой с определением областей деформирования в зависимости от схемы нагружения представляет собой диаграмму предельных деформаций (Forming Limit Diagram).

Диаграмма предельных деформаций применима только для тех технологических операций листовой штамповки, для которых напряженное состояние можно считать плоским (напряжения действуют в плоскости листа), процесс нагружения является монотонным и история нагружения не играет значимой роли [1, 2].

Основные области диаграммы предельного деформирования, соответствующие определенному деформированному состоянию при нагружении тонкостенных заготовок, представлены на рис. 1. [2–4].

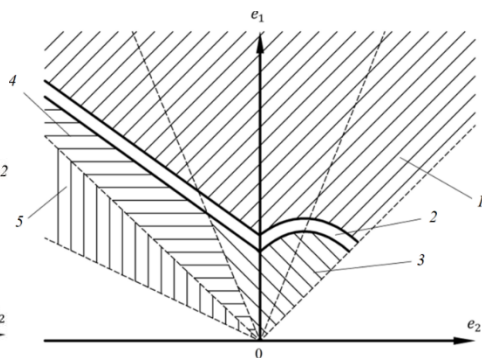


**Рис. 1.** Диаграмма предельных деформаций в зависимости от схемы нагружения [4]: 1 – кривая предельных деформаций, 2 – идеальное двусосное растяжение, 3 – двусосное растяжение, 4 – плоское деформированное состояние, 5 – простое одноосное растяжение, 6 – чистый сдвиг

**Fig. 1.** Forming limit diagram in terms of the loading scheme [4]: (1) forming limit curve, (2) ideal biaxial tension, (3) biaxial tension, (4) plane strain state, (5) simple uniaxial tension, and (6) pure shear

Чтобы избежать образования шейки или разрушения материала, необходимо, чтобы уровни деформаций штампуемой детали были расположены ниже FLC-кривой. Обычно вводится запас прочности смещением FLC-кривой вниз примерно на 5–10%. Таким образом, опасность разрушения тонкостенной определяется близостью деформированного состояния к кривой предельных деформаций.

Однако, помимо недопустимых утонений и разрывов листовых заготовок, важными проблемами в задачах формоизменения являются складкообразование вследствие потери устойчивости заготовки, недостаточное растяжение.



**Рис. 2.** Схема диаграммы предельных деформаций с указанием безопасной области формоизменения и областей возникновения различных дефектов [4]: 1 – зона разрушений; 2 – опасность возникновения разрывов; 3 – зона безопасного формоизменения; 4 – опасность возникновения складок; 5 – образование складок

**Fig. 2.** Schematic view of the forming limit diagram indicating a safe forming area and the areas of the formation of various defects [4]: (1) failure zone, (2) risk of ruptures, (3) safe forming area, (4) risk of folding, and (5) folding

Следовательно, при оценке качества технологических процессов изготовления тонкостенных и листовых деталей недостаточно учитывать только опасность разрушения через образование шейки. FLD-диаграмма позволяет также оценивать опасность возникновения тех или иных дефектов при изучении деформации различных уровней. Более подробно различные зоны FLD-диаграммы по видам дефектов представлены на рис. 2 [4].

Как правило, FLD-диаграмма экспериментально строится с помощью следующих двух методов испытаний: с помощью метода Марчиньяка [5, 6], основанного на реализации плоской деформации с помощью цилиндрического пуансона, и метода Наказимы [7, 8] с применением полусферического пуансона при деформировании тонкостенных заготовок. При варьировании геометрии образцов можно получать различные траектории деформаций [9, 10].

В практическом проектировании процессов изготовления тонкостенных и листовых деталей экспериментальное построение кривой предельных деформаций является довольно длительной процедурой, которая представляет собой важную проблему.

В настоящее время существует острая потребность в сокращении времени проектирования технологических процессов листовой штамповки и, соответственно, не хватает времени для экспериментального построения FLC-кривой. Большой разброс результатов, получаемый при экспериментальном построении FLC-кривой, является еще одним недостатком этого метода.

Несмотря на все недостатки, методика использования диаграмм предельных деформаций сегодня является общепринятой в области листовой штамповки для оценки предельных возможностей листовых заготовок. Поэтому задача построения FLD-диаграммы с помощью различных теоретических и эмпирических формул является весьма актуальной.

### **Основные теоретические модели определения предельных деформаций и основные уравнения**

Теоретические методы строятся на применении критериев предельного деформирования, которые связаны с анализом деформаций, соответствующих началу шейкообразования в процессе формоизменения и дальнейшему его развитию.

Обычно при построении моделей шейкообразования используются диффузионный критерий Свифта (Swift) [11] и локальный критерий Хилла (Hill) [12]. Диффузионный критерий Свифта был получен в предположении, что существует максимальное усилие нагружения, при котором начинает образовываться рассеянная шейка, а критерий локализации Хилла получается в предположении, что существует максимальное главное напряжение, при котором образуется локальная шейка.

Сторен и Райс [13] использовали бифуркационный анализ силового равновесия области шейкообразования. Аналогичный подход к решению задачи определения предельных деформаций использовал и А.С. Чумадин [14–16]. При данном анализе бифуркация состояния равновесия деформируемой листовой заготовки происходит тогда, когда толщина листа стремится к нулю.

Еще одной известной моделью является модель геометрического несовершенства, разработанная Марчиньяком и Кужинским [17, 18]. В публикациях она часто называется М–К-теорией [17, 18]. Кривая предельного деформирования, полу-

чаемая на основании М–К-теории, зависит от размера и формы геометрического несовершенства. Однако данная теория применима только в области двухосного растяжения заготовок с существенными дефектами. При наличии незначительного дефекта заготовки М–К-теория дает завышенный результат в сравнении с результатами натурного эксперимента.

Все эти модели широко используются для создания теоретических FLC-кривых.

В настоящей статье исследуются критерий диффузного сужения Свифта, критерий локального сужения Хилла и анализ бифуркации состояния равновесия по Сторену и Райсу.

Рассмотрим основные допущения при оценке предельного деформирования листовых заготовок:

- однородность, изотропность и сплошность материала заготовки;
- напряженное состояние заготовки является плоским;
- оценка напряженно-деформированного состояния проводится по безмоментной теории оболочек, поскольку рассматриваются тонкостенные оболочечные элементы;
- процесс деформирования является монотонным;
- зависимость интенсивности напряжений  $\sigma_i$  и интенсивности логарифмических деформаций  $e_i$  удовлетворяет гипотезе «единой кривой».

Переход из стадии упругого деформирования в стадию пластичности будем определять на основании условия пластичности Губера–Мизеса для плоского напряженного состояния ( $\sigma_3 = 0$ ):

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} - \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_s \quad (1)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2$  – главные наибольшие и наименьшие истинные напряжения,  $\sigma_s$  – предел текучести материала.

На основании деформационной теории пластичности физические уравнения определяются соотношениями [15, 16]

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{e_i}{\sigma_i} \left( \sigma_1 - \frac{1}{2} \sigma_2 \right) \\ e_2 &= \frac{e_i}{\sigma_i} \left( \sigma_2 - \frac{1}{2} \sigma_1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $e_1, e_2$  – главные наибольшая и наименьшая логарифмические деформации.

На основании условия несжимаемости материала примем

$$e_3 = -(e_1 + e_2).$$

Интенсивность логарифмических деформаций при условии несжимаемости материала определяется соотношением [15, 16]

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_1 e_2}. \quad (3)$$

Рассмотрим обозначения для отношений главных логарифмических деформаций и напряжений [15, 16]:

$$\alpha = \frac{e_2}{e_1}, \quad (4)$$

$$\beta = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \quad (5)$$

На основании соотношений (2), (4), (5) зависимость между  $\alpha$  и  $\beta$  будет представлена в виде [15, 16]:

$$\alpha = \frac{2\beta - 1}{2 - \beta}, \quad (6)$$

или

$$\beta = \frac{2\alpha + 1}{2 + \alpha}. \quad (7)$$

Рассмотрим степенную функцию в качестве диаграммы деформирования в области упрочнения

$$\sigma_i = A e_i^n, \quad (8)$$

где  $A$  и  $n$  – константы материала заготовки.

Кроме того, как было показано В.И. Филимоновым и О.В. Мищенко [19], зависимость (8) должна удовлетворять свойству диаграммы деформирования третьего рода, согласно которой

$$n = e_{\text{ш}}, \quad (9)$$

где  $e_{\text{ш}}$  – логарифмическая деформация, соответствующая моменту начала образования рассеянной шейки в испытании материала на разрыв.

С учетом уравнения (5) уравнение, определяющее интенсивность напряжений, имеет вид:

$$\sigma_i = \sigma_1 \sqrt{1 - \beta + \beta^2}. \quad (10)$$

Аналогично, используя выражение (3), получим интенсивность главных логарифмических деформаций

$$e_i = \frac{2}{3} e_1 \sqrt{1 - \alpha + \alpha^2}. \quad (11)$$

Все эти отношения используются в следующих разделах для получения теоретических формул, позволяющих построить FLD-диаграммы при использовании различных критериев.

### **Определение минимальных значений предельных деформаций при формоизменении тонкостенных заготовок. Статический критерий предельного деформирования**

Основоположниками развития методов расчета предельных деформирований в задачах формоизменения являлись Г. Закс и Д. Лубахн [18]. Согласно их исследованиям, образование рассеянной шейки происходит при максимальной растягивающей нагрузке  $P$ , что соответствует критерию положительности добавочных нагрузок. Согласно данному критерию, если приращение растягивающего усилия положительно, то деформирование при одноосном напряжении является устойчивым, а при отрицательном приращении растягивающего усилия деформирование неустойчиво. Момент начала образования шейки определяется условием  $\Delta P = 0$ .

При использовании степенной аппроксимации диаграммы деформирования материала (8) выражение для расчета предельной интенсивности деформации образца в момент наибольшей нагрузки при линейном растяжении определяется соотношением [15, 16]

$$e_{\text{ш}} = n. \quad (12)$$

В случае принятия гипотезы единой кривой и несжимаемости материала при одноосном растяжении  $e_{\text{ш}} = e_{\text{ш}}$ , что подтверждает формулу (9).

Для случая процессов неравномерного деформирования заготовки Свифтом [11] и Хиллом [12] предложены подходы для оценки предельных деформаций.

Подробное решение задачи определения предельной интенсивности деформаций в условиях равномерного двусосного растяжения представлено в работах [15, 16]. Согласно критерию Свифта, момент образования рассеянной шейки достигается при максимуме нагрузки в обоих направлениях при двусосном растяжении [15, 16]:

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_1 &= \sigma_1 de_1 \\ d\sigma_2 &= \sigma_2 de_2 \end{aligned} \right\}. \quad (13)$$

Построение диаграммы предельного деформирования Свифта описывается следующими уравнениями [4, 20]:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2n(2-\beta)(1-\beta+\beta^2)}{4-3\beta-3\beta^2+4\beta^3} \\ -\frac{2n(2-\beta)(1-\beta+\beta^2)}{4-3\beta-3\beta^2+4\beta^3} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

На основании соотношений (4), (7), (14) теоретическое уравнение диаграммы предельного деформирования Свифта может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} &4(e_1 - n)(e_2 + 2e_1)^3 - 3(e_1 - 2n)(e_1 + 2e_2)(e_2 + 2e_1)^2 - \\ &- 3(e_1 + 2n)(e_2 + 2e_1)(e_1 + 2e_2)^2 + 2(2e_1 + n)(e_1 + 2e_2)^3 = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

В процессе развития рассеянной шейки при пластическом деформировании возможно появление локализованной шейки, соответствующей интенсивному утонению заготовки по толщине.

Согласно критерию Хилла [15], момент образования локальной шейки определяется из условия равенства нулю приращения главного максимального напряжения.

В работе [4] приведены уравнения, позволяющие получить набор точек для построения FLD-диаграммы Хилла:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n}{1+\alpha} \\ \frac{n}{1+\alpha} \end{pmatrix} \text{ при } \alpha < 0, \quad (16)$$

которые, используя уравнение (4), можно привести к виду:

$$e_1 + e_2 - n = 0 \text{ при } e_2 < 0. \quad (17)$$

Как правило, для построения кривой предельного деформирования используется одновременно два критерия: критерий Хилла (17) – в области отрицательных наименьших главных деформаций, и критерий Свифта (15) – в области положительных наименьших главных деформаций, поэтому такая диаграмма называется диаграммой Хилла–Свифта.

Можно утверждать, что процесс деформирования до момента образования рассредоточенной и локальной шейки удовлетворяет статически возможному

состоянию заготовки. В данном случае выполняются уравнения равновесия в каждой точке заготовки и условия на поверхности для напряжений.

Учитывая, что FLD-диаграмма Хилла–Свифта соответствует предельным статическим состояниям тонкостенной заготовки, по аналогии со статической теоремой предельного состояния [21] можно предположить: деформации, соответствующие статическим критериям, определяемые FLD-диаграммой Хилла–Свифта, меньше, чем предельные деформации формоизменения.

### Определение верхних значений предельных деформаций при изготовлении листовых изделий. Кинематический критерий предельного деформирования заготовки

Другой подход при построении модели разрушения листовых изотропных заготовок заключается в том, что в качестве критерия предельного деформирования используется кинематический (геометрический) критерий локализации деформации, предсказывающий локальное интенсивное утонение заготовки.

Согласно кинематическому (геометрическому) критерию предельного деформирования, локальное интенсивное утонение происходит при приращении толщины заготовки  $dS$  по длине  $H$ , удовлетворяющем соотношению [15, 16]

$$\frac{dS}{dH} \rightarrow -\infty,$$

При монотонном деформировании заготовок постоянной толщины математическая модель предельного деформирования имеет вид:

$$D \frac{\sigma_1}{S} - \sigma_1 C (2\sigma_2 - \sigma_1) + \frac{4\sigma_1 n (2\sigma_3 + \sigma_2)}{3Se_i} = 0, \quad (18)$$

где

$$D = 2\sigma_1 - \sigma_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (2\sigma_2 - \sigma_1); \quad C = \frac{3e_2}{S(-2e_3 - e_2)^2}.$$

Для различных показателей степенного закона упрочнения на основании соотношений (1)–(10) и (21) получим уравнение для построения диаграммы предельных деформаций в соответствии с кинематическим критерием

$$2(e_1^2 + e_1 e_2 + e_2^2)(2e_1 + e_2) - n(2e_1 + e_2)^2 - 3e_2^2 = 0. \quad (19)$$

Решение аналогичной задачи, сформулированное Стореном–Райсом, представлено в работе [4], и получено два набора решений для двух главных направлений в плоскости листа, которые в [20] структурированы в виде:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\alpha^2 + n(2 + \alpha)^2}{2(1 + 2\alpha)(1 + \alpha + \alpha^2)} \\ \frac{\alpha(3\alpha^2 + n(2 + \alpha)^2)}{2(1 + 2\alpha)(1 + \alpha + \alpha^2)} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Взяв любое из этих двух решений и используя выражение (4), можно также получить уравнение (19).

В исследовании [4] диаграммы, соответствующие уравнению (19), определяются как FLD-диаграммы Сторена–Райса.

Как указывает в своих публикациях А.С. Чумадин, данное решение не предсказывает локализацию деформации, а характеризует еще один вид неустойчивости, который возможен в процессах пластического деформирования тонкостенной заготовки.

Таким образом, можно утверждать, что процесс деформирования после образования шейки и до разрушения удовлетворяет кинематически возможным состояниям листовой заготовки, для которых выполняются условия на поверхности для перемещений и условия совместности деформаций. В этом случае уравнения равновесия могут быть не удовлетворены.

Учитывая, что FLD-диаграмма Сторена–Райса соответствует кинематическому возможному состоянию тонкостенной заготовки, по аналогии с кинематической теоремой предельного состояния [21] можно предположить: деформации, соответствующие кинематическому критерию, определяемые FLD-диаграммой Сторена–Райса, больше, чем предельные деформации формоизменения.

Рассмотрим порядок построения FLD-диаграммы и определения верхнего и нижнего уровня допустимых деформаций на примере сплава Д16-БТ.

На рис. 3 представлена диаграмма растяжения сплава Д16-БТ, взятая из справочника «Авиационные материалы» [22].

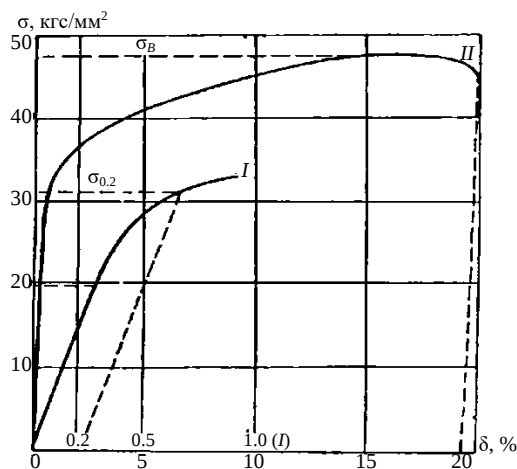


Рис. 3. Диаграмма растяжения сплава Д16-БТ. Лист толщиной 0.5–10 мм (поперечное направление) [22]

Fig. 3. Tensile test diagram for a 0.5–10 mm thick sheet (in a transverse direction) made of the D16-BT alloy [22]

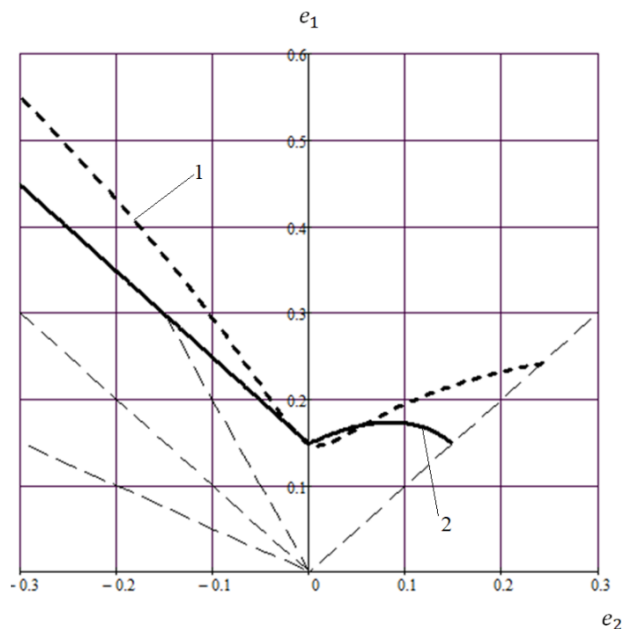
По диаграмме растяжения определяем относительную деформацию, соответствующую началу шейкообразования  $\delta_n \% = 16\%$ .

Затем определяем логарифмическую деформацию шейкообразования

$$e_n = \ln \left( 1 + \frac{\delta_n \%}{100} \right) = 0.148.$$

Принимая во внимание, что в соответствии со свойством диаграммы деформирования третьего рода  $n = e_{\text{ш}}$  (9), по формулам (15) и (17) строим FLC-кривую Хилла–Свифта и по формуле (19) – FLC-кривую Сторена–Райса.

Объединяя эти две кривые и выделяя области возникновения различных дефектов (см. рис. 2), получаем FLD-диаграмму сплава Д16-БТ, которая представлена на рис. 4.



**Рис. 4.** Диаграмма предельных деформаций сплава Д16-БТ с указанием верхнего и нижнего уровней допустимых деформаций при изготовлении листовых и тонкостенных деталей:

1 – FLC-кривая Сторена–Райса, 2 – FLC-кривая Хилла–Свифта

**Fig. 4.** Forming limit diagram for the D16-BT alloy with indicated upper and lower levels of allowable strains in the manufacture of sheet and thin-walled parts: FLCs from the (1) Stören-Rice and (2) Hill-Swift theories

На данной диаграмме пунктирная линия, построенная в соответствии с кинематическим критерием, определяет верхний уровень допустимых деформаций, а сплошная линия, построенная в соответствии со статическим критерием, определяет нижний уровень допустимых деформаций.

Полученная диаграмма позволяет в первом приближении оценить и спрогнозировать технологические возможности процессов листовой штамповки без трудоемких экспериментов по построению FLC-кривой, используя только данные эксперимента на простое растяжение. Также данная диаграмма позволяет прогнозировать возникновение различных дефектов, таких как чрезмерное утонение, образование складок, сморщивание или недостаточное растяжение.

Представленные результаты можно использовать в качестве инструмента анализа первого порядка для оценки и прогнозирования технологических возможностей формуемого материала при разработке усовершенствованных бездефектных

технологий изготовления деталей авиационной промышленности методами листовой штамповки.

# Список источников

1. *Stoughton T.B.* General forming limit criterion for sheet metal forming // *International Journal of Mechanical Science*. 2000. № 42. P. 1–27.
2. *Казанцев А.В.* Основы LS-DYNA. Диаграмма предельных деформаций (FLD). Создание и верификация моделей поведения материалов : метод. пособие. Пермь, 2018. URL: [http://dpm.pstu.ru/images/R/НИП\\_Основы\\_LS-DYNA\\_v1.1.pdf](http://dpm.pstu.ru/images/R/НИП_Основы_LS-DYNA_v1.1.pdf)
3. *Sanay B.* Prediction of Plastic Instability and Forming Limits in Sheet Metal Forming : A Thesis Submitted to the Graduate School of Natural and Applied Sciences of Middle East Technical University in Partial Fullfilment of the Requirements for the Degree of Master of Science in Mechanical Engineering. 2010.
4. *Paul S.K.* Theoretical analysis of strain- and stress-based forming limit diagrams // *Strain Analysis*. 2013. № 48 (3). P. 177–188.
5. *Marciniak Z., Kuczynski K.* Limit strains in the processes of stretch-forming sheet metal // *International Journal of Mechanical Science*. 1967. № 9. P. 609–620.
6. *Marciniak Z., Kuczynski K., Pokora T.* Influence of the plastic properties of a material on the forming limit curve for sheet metal in tension // *Int J Mech Sci*. 1973. № 15. P. 789–805.
7. *Nakazima K., Kikuma T.* Forming Limits under biaxial stretching of sheet metals // *Testu-to Hagane*. 1967. № 53. P. 455–458.
8. *Nakazima K., Kikuma T., Hasuka K.* Study on the formability of steel sheets // *Yawata Technical Report*. 1968. № 264. P. 141–154.
9. *Изосимова С.В.* Исследование влияния формы заготовки на точность построения диаграммы предельных деформаций // *Студенческая научная весна 2013: Машиностроительные технологии : всерос. науч.-техн. конф. студентов*. 2013. URL: [http://studvesna.ru/db\\_files/articles/810/article.pdf](http://studvesna.ru/db_files/articles/810/article.pdf)
10. ISO 12004-2:2021. Metallic materials – Determination of forming-limit curves for sheet and strip – Part 2: Determination of forming-limit curves in the laboratory.
11. *Swift H.W.* Plastic instability under plane stress // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1952. № 1. P. 1–18.
12. *Hill R.* On discontinuous plastic states with special reference to localized necking in thin sheets // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1952. № 1. P. 19–30.
13. *Støren S., Rice J.R.* Localized necking in thin sheets // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1975. № 23. P. 421–441.
14. *Чумадин А.С.* Об одном подходе к расчету предельного деформирования при листовой штамповке // *Кузнечно-штамповочное производство*. 1990. № 6. С. 10–13.
15. *Чумадин А.С.* Методы расчета предельных деформаций в операциях листовой штамповки : учеб. пособие. М. : Изд-во МАТИ, 2002.
16. *Чумадин А.С.* Теория и расчеты процессов листовой штамповки : (для инженеров). 2-е изд. М. : Экспосервис «ВИП», 2014.
17. *Marciniak Z., Kuczynski K., Pokora T.* Influence of the plastic properties of a material on the forming limit curve for sheet metal in tension // *International Journal of Mechanical Science*. 1973. № 15. P. 789–805.
18. *Marciniak Z., Kuczynski K.* Limit strains in the processes of stretch forming sheet steel // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1967. № 1. P. 609–620.
19. *Филимонов В.И., Мищенко О.В.* Теория обработки металлов давлением : учеб. пособие. Ульяновск : УлГТУ, 2012.
20. *Stoughton T.B., Zhu X.* Review of theoretical models of the strain-based FLD and their relevance to the stress-based FLD // *International Journal of Plasticity*. 2004. № 20. P. 1463–1486.

21. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М. : Машиностроение, 1975.
22. Шалин Р.Е. Авиационные материалы : справочник для инженерно-технических и научных работников : в 9 т. / под общ. ред. Р.Е. Шалина. 6-е изд. перераб. и доп. М. : ВИАМ, 1982. Т. 4: Алюминиевые и бериллиевые сплавы, ч. 1: Деформируемые алюминиевые сплавы и сплавы на основе бериллия.

## References

1. Stoughton T.B. (2000) General forming limit criterion for sheet metal forming. *International Journal of Mechanical Science*. 42. pp. 1–27. doi: 10.1016/S0020-7403(98)00113-1
2. Kazantsev A.V. (2018) *Osnovy LS-DYNA. Diagramma predel'nykh deformatsiy (FLD). Sozdanie i verifikatsiya modeley povedeniya materialov. Metodicheskoe posobie* [Diagram of ultimate deformations (FLD). Creation and verification of models of behavior of materials. Guidance manual]. [Electronic resource]. Access mode: [http://dpm.pstu.ru/images/R/NIR\\_Osnovy\\_LS-DYNA\\_v1.1.pdf](http://dpm.pstu.ru/images/R/NIR_Osnovy_LS-DYNA_v1.1.pdf)
3. Sanay B. (2010) *Prediction of Plastic Instability and Forming Limits in Sheet Metal Forming*. A thesis submitted to the Graduate School of Natural and Applied Sciences of Middle East Technical University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Mechanical Engineering. Access mode: <http://etd.lib.metu.edu.tr/upload/12612486/index.pdf>
4. Paul S.K. (2013) Theoretical analysis of strain- and stress-based forming limit diagrams. *Strain Analysis*. 48(3). pp. 177–188. doi: 10.1177/0309324712468524
5. Marciniak Z., Kuczynski K. (1967) Limit strains in the processes of stretch-forming sheet metal. *International Journal of Mechanical Science*. 9(9). pp. 609–620. doi: 10.1016/0020-7403(67)90066-5
6. Marciniak Z., Kuczynski K., Pokora T. (1973) Influence of the plastic properties of a material on the forming limit curve for sheet metal in tension. *International Journal of Mechanical Science*. 15(10). pp. 789–805. doi: 10.1016/0020-7403(73)90068-4
7. Nakazima K., Kikuma T. (1967) Forming limits under biaxial stretching of sheet metals. *Testu-to Hagane*. 53. pp. 455–458.
8. Nakazima K., Kikuma T., Hasuka K. (1968) Study on the formability of steel sheets. *Yawata Technical Report*. 264. pp. 141–154.
9. Izosimova S.V. (2013) *Issledovanie vliyaniya formy zagotovki na tochnost' postroeniya diagrammy predel'nykh deformatsiy* [A study of the workpiece shape effect on the accuracy of the construction of the forming limit diagram]. [Electronic resource]. *Vserossiyskaya nauchno-tekhnicheskaya konferentsiya studentov Studencheskaya nauchnaya vesna 2013: Mashinostroitel'nye tekhnologii*. Access mode: [http://studvesna.ru/db\\_files/articles/810/article.pdf](http://studvesna.ru/db_files/articles/810/article.pdf)
10. *Metallic Materials – Determination of Forming-Limit Curves for Sheet and Strip – Part 2: Determination of Forming-Limit Curves in the Laboratory*. ISO 12004-2:2021.
11. Swift H.W. (1952) Plastic instability under plane stress. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1. pp. 1–18. doi: 10.1016/0022-5096(52)90002-1
12. Hill R. (1952) On discontinuous plastic states with special reference to localized necking in thin sheets. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1. pp. 19–30. doi: 10.1016/0022-5096(52)90003-3
13. Støren S., Rice J.R. (1975) Localized necking in thin sheets. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 23. pp. 421–441. doi: 10.1016/0022-5096(75)90004-6
14. Chumadin A.S. (1990) Ob odnom podkhode k raschetu predel'nogo deformirovaniya pri listovoy shtampovke [About one approach to the forming limit calculation during sheet stamping]. *Kuznechno-shtampovoye proizvodstvo*. 6. pp. 10–13.
15. Chumadin A.S. (2002) *Metody rascheta predel'nykh deformatsiy v operatsiyakh listovoy shtampovki: uchebnoe posobie* [Methods for calculating forming limits in sheet stamping operations: a textbook]. Moscow: Izdatel'stvo MATI.

16. Chumadin A.S. (2014) *Teoriya i raschety protsessov listovoy shtampovki* [Theory and calculations of sheet stamping processes]. Moscow: Eksposervis «VIP».
17. Marciniak Z., Kuczynski K., Pokora T. (1973) Influence of the plastic properties of a material on the forming limit curve for sheet metal in tension. *International Journal of Mechanical Science*. 15. pp. 789–805. doi: 10.1016/0020-7403(73)90068-4
18. Marciniak Z., Kuczynski K. (1967) Limit strains in the processes of stretch forming sheet steel. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1. pp. 609–620. doi: 10.1016/0020-7403(67)90066-5
19. Filimonov V.I., Mishchenko O.V. (2012) *Teoriya obrabotki metallov davleniem: uchebnoe posobie* [Theory of metal processing by pressure: a textbook]. Ul'yanovsk: UlGTU.
20. Stoughton T.B., Zhu X. (2004) Review of theoretical models of the strain-based FLD and their relevance to the stress-based FLD. *International Journal of Plasticity*. 20. pp. 1463–1486. doi: 10.1016/j.ijplas.2003.11.004
21. Malinin N.N. (1975) *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti* [Applied theory of plasticity and creep]. Moscow: Mashinostroenie.
22. Shalin R.E. (1982) *Aviatsionnye materialy. Tom 4. Alyuminievye i berillievye splavy. Chast' 1. Deformiruemye alyuminievye splavy i splavy na osnove berilliya: spravochnik dlya inzhenerno-tekhnicheskikh i nauchnykh rabotnikov* [Aviation materials. Volume 4. Aluminum and beryllium alloys. Part 1. Deformable aluminum alloys and beryllium-based alloys: handbook for engineering and scientific workers]. Moscow: Vsesoyuznyy nauchno-issledovatel'skiy institut aviatsionnykh materialov (VIAM).

#### **Сведения об авторах:**

**Феоктистов Сергей Иванович** – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Комсомольск-на-Амуре, Россия). E-mail: serg\_feo@mail.ru

**Андрянов Иван Константинович** – кандидат технических наук, доцент кафедры «Авиастроение» Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Комсомольск-на-Амуре, Россия). E-mail: ivan\_andrianov\_90@mail.ru

#### **Information about the authors:**

**Feoktistov Sergey I.** (Komsomolsk-on-Amur State University, Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation). E-mail: serg\_feo@mail.ru

**Andrianov Ivan K.** (Komsomolsk-on-Amur State University, Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation). E-mail: ivan\_andrianov\_90@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 23.03.2022; принята к публикации 04.12.2023*

*The article was submitted 23.03.2022; accepted for publication 04.12.2023*

## МАТЕМАТИКА

## MATHEMATICS

Научная статья

УДК 51-74

doi: 10.17223/19988621/86/11

MSC 93-03, 93-08

**Высокоточные представления инерционных вращений  
и неустойчивость Луи Пуансо****Михаил Алексеевич Бубенчиков<sup>1</sup>, Алексей Михайлович Бубенчиков<sup>2</sup>,  
Дмитрий Владимирович Мамонтов<sup>3</sup>**<sup>1, 2, 3</sup> *Томский государственный университет, Томск, Россия*<sup>1</sup> *michael121@mail.ru*<sup>2</sup> *bubenchikov\_am@mail.ru*<sup>3</sup> *orevaore@mail.ru*

**Аннотация.** В результате синтеза прямых способов решения систем алгебраических уравнений с пошаговыми алгоритмами высокого порядка точности разработана схема высокоточных вычислений для описания сферических движений твердых тел. На основе развитого вычислительного приема рассчитана неустойчивость Луи Пуансо. Наряду с этим описан новый класс неустойчивых движений.

**Ключевые слова:** углы Эйлера, кватернионы вращения, вращение, положение тела в пространстве, неустойчивость сферического движения

**Благодарности:** Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда, № 19-71-10049.

**Для цитирования:** Бубенчиков М.А., Бубенчиков А.М., Мамонтов Д.В. Высокоточные представления инерционных вращений и неустойчивость Луи Пуансо // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 149–158. doi: 10.17223/19988621/86/11

Original article

**High-precision representations of inertial rotations  
and Louis Poinso instability****Mikhail A. Bubenchikov<sup>1</sup>, Alexey M. Bubenchikov<sup>2</sup>, Dmitriy V. Mamontov<sup>3</sup>**<sup>1, 2, 3</sup> *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*<sup>1</sup> *michael121@mail.ru*

<sup>2</sup> bubenchikov\_am@mail.ru<sup>3</sup> orevaore@mail.ru

**Abstract.** The coordinate method for determining the rotations of bodies in space is proposed. The method does not use Euler angles and hypercomplex Hamilton numbers. The developed computational technique is based on the point distribution of masses in space. If the body is replaced by a system of points and this approximation is sufficient, then the rest of the calculation results are highly accurate. The latter is achieved through the synthesis of an exact method for solving systems of algebraic equations with a high-precision step-by-step method for solving systems of differential equations resolved with respect to the derivatives of the desired quantities. Based on the developed computational method, unstable inertial rotations were studied. The existence of an instability different from the Louis Poinot instability is shown.

**Keywords:** Euler angles, rotation quaternions, rotation, body position in space

**Acknowledgments:** This work was partially supported by the Russian Science Foundation, № 19-71-10049.

**For citation:** Bubenchikov, M.A., Bubenchikov, A.M., Mamontov, D.V. (2023) High-precision representations of inertial rotations and Louis Poinot instability. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 149–158. doi: 10.17223/19988621/86/11

## Введение

Теория кватернионов, или гиперкомплексных чисел Гамильтона, примененная к решению теоретических проблем кинематики вращательного движения, обеспечила прорыв в этой области. Построенная алгебра гиперкомплексных чисел оказала влияние на развитие теории групп, линейных пространств [1], геометрии и компьютерной графики [2, 3]. Она имеет также широкие практические применения во всех задачах управления движением, в частности воздушной и космической навигации [4–9].

Кватернионы и операции над ними были изобретены сэром Уильямом Гамильтоном в противовес эйлеровскому описанию с помощью углов прецессии, нутации и собственного вращения. Кватернионы позволили разрешить проблему так называемого «шарнирного замка», или, по-другому, проблему, связанную с использованием кинематических соотношений Эйлера, имеющих координатную особенность при углах нутации  $\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$  и т.д. Эта проблема была успешно решена способом выхода из пространства трех размерностей в четырехмерное векторное пространство, и круг задач управления движением был принципиально расширен. В теоретическом плане это очень элегантный прием. Однако при решении практических задач возникали трудности, связанные с пониманием применения кватернионов в задачах описания угловых перемещений в физическом пространстве.

В настоящей работе предлагается координатный подход для описания вращений, не использующий углы Эйлера, а также демонстрируется высокоточная вычислительная технология, опирающаяся на использование предложенного подхода, в котором также нет и кватернионов.

### Математическая модель

В случае вращения по инерции роль уравнений, определяющих вращательные движения, выполняют кинематические соотношения для скоростей отдельных точек тела:

$$\frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k \quad (k=1, \dots, N). \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{r}_k$  – радиус-вектор отдельной точки тела,  $\boldsymbol{\omega}$  – вектор угловой скорости тела,  $N$  – число разбиений тела на части.

Если система точек, представляющих пространственное распределение массы тела, установлена, и погрешность, возникающая за счет точечного массораспределения, нас устраивает, то можно говорить о высокоточном представлении вращений, производимых точечной конструкцией исследуемого объекта. При заданном характере изменения угловой скорости со временем или при постоянной ее величине можно построить аналитическое решение системы (1). Однако в рассматриваемом классе задач  $\boldsymbol{\omega}(t)$  подлежит определению. Так или иначе система (1) требует задания начальных условий:

$$t = 0; \quad \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k^0 \quad (k=1, \dots, N); \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^0. \quad (2)$$

Три компоненты угловой скорости тела определяются из условий сохранения трех проекций кинетического момента:

$$\begin{aligned} A\omega_x + F\omega_y + E\omega_z &= K_x^0, \\ F\omega_x + B\omega_y + D\omega_z &= K_y^0, \\ E\omega_x + D\omega_y + C\omega_z &= K_z^0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – проекции вектора мгновенной угловой скорости тела;  $A, B, C, D, E, F$  – компоненты тензора инерции:

$$\begin{aligned} A &= \sum \alpha_k (y_k + z_k)^2, \quad B = \sum \alpha_k (x_k + z_k)^2, \quad C = \sum \alpha_k (x_k + y_k)^2, \\ D &= -\sum \alpha_k y_k z_k, \quad E = -\sum \alpha_k x_k z_k, \quad F = -\sum \alpha_k x_k y_k, \end{aligned} \quad (4)$$

$\alpha_k$  – абсолютные или относительные массы частей тела. Выбор абсолютного базиса является произвольным, поэтому недиагональные компоненты тензора инерции  $D, E, F$  обычно отличны от нуля, но их можно сделать нулевыми, если привести тензор инерции к главным осям. В этом случае изменяются и диагональные компоненты  $A, B$  и  $C$ ; их новые значения обозначим через  $A', B'$  и  $C'$ . Нас интересует определитель системы (3). Он должен быть отличным от нуля и обеспечивать однозначное определение  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ . В главных осях этот определитель есть произведение:  $A'B'C'$ . Сам вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  можно рассматривать как инвариантную векторную функцию тензорного аргумента, т.е. как объект, не зависящий от системы отсчета. Этот объект и должен быть таким, исходя из физического смысла рассматриваемой величины. Поскольку определитель системы (3) тоже является инвариантом симметричного тензора инерции мы можем записать

$$\det \underline{A} = \begin{vmatrix} A & F & E \\ F & D & B \\ E & D & C \end{vmatrix} = A'B'C' > 0. \quad (5)$$

Неравенство (5) всегда является строгим, поскольку каждая из величин  $A', B', C'$  имеет сугубо положительное значение как осевой момент инерции тела, равный сумме произведений масс его частей на квадраты расстояний от оси до центров масс этих частей. Таким образом, определитель системы (3) отличен от нуля, и она имеет единственное решение при любой правой части, т.е. (3) является крамеровской системой. Если в качестве масштаба длины взять  $a$  – один из линейных размеров тела, масштаба скорости  $\omega^0$  – величину начальной угловой скорости тела, а для масштаба времени использовать  $(1/\omega^0)$  и отнести (1)–(4) к этим масштабам, то постановка задачи останется прежней, в ней не появится ни одного безразмерного комплекса. Необходимо лишь в качестве  $\alpha_k$  использовать относительные массы частей тела  $\alpha_k = m_k/M$  ( $M$  – полная масса тела). Поскольку при обезразмеривании задачи не появилось ни одного безразмерного комплекса, все расчеты в размерных величинах будут совпадать с точностью до масштабного множителя. Правые части алгебраических уравнений (3) определяются по величинам, отвечающим начальному моменту времени. Причем компоненты тензора инерции, имеющие индекс «0», определяются по начальным координатам точек тела, представляющих положения центров масс его частей:

$$\begin{aligned} K_x^0 &= A^0 \omega_x^0 + F^0 \omega_y^0 + E^0 \omega_z^0, \\ K_y^0 &= F^0 \omega_x^0 + B^0 \omega_y^0 + D^0 \omega_z^0, \\ K_z^0 &= E^0 \omega_x^0 + D^0 \omega_y^0 + C^0 \omega_z^0. \end{aligned} \quad (6)$$

### Расчетная схема

Эволюционные уравнения (1) интегрируются численно с использованием пошаговой схемы четвертого порядка точности относительно шага по времени. В схемах класса Рунге–Кутты для повышения точности расчетов используется идея переычисления правых частей дифференциальных уравнений в дополнительных позициях отдельного шага по времени. В правые части уравнений входят проекции угловой скорости тела. Эти проекции находятся из системы линейных алгебраических уравнений, представляющих собой совокупность трех интегралов уравнений вращательного движения. Таким образом, в каждой вспомогательной позиции отдельного шага по времени по правилу Крамера решается система уравнений (3). Для схемы четвертого порядка точности таких позиций будет четыре. В результате, если система линейных алгебраических уравнений для нахождения компонент угловой скорости тела каждый раз будет разрешаться точно, мы обеспечим все условия для высокоточного нахождения координат центров масс всех частей тела. Таким образом, прямой метод нахождения проекций вектора мгновенной угловой скорости встроен в технологию нахождения всех необходимых координат.

Для случая вращения по инерции известны два простых первых интеграла: интеграл энергии, выражающий собой сохранение кинетической энергии тела, и интеграл моментов, выражающий собой сохранение величины кинетического момента в процессе движения тела. Для полного решения задачи необходимы три первых интеграла. Непосредственное решение задачи инерционного вращения, сформулированной в абсолютных осях, позволяет найти зависимости проекций

вектора мгновенной угловой скорости от времени, а простейшие интегралы использовать для проверки точности вычислений. На рис. 1 показана относительная погрешность расчетов представленной выше модели. Здесь  $T$  – кинетическая энергия тела, рассчитанная для текущего момента времени,  $T_0$  – начальное значение кинетической энергии тела.

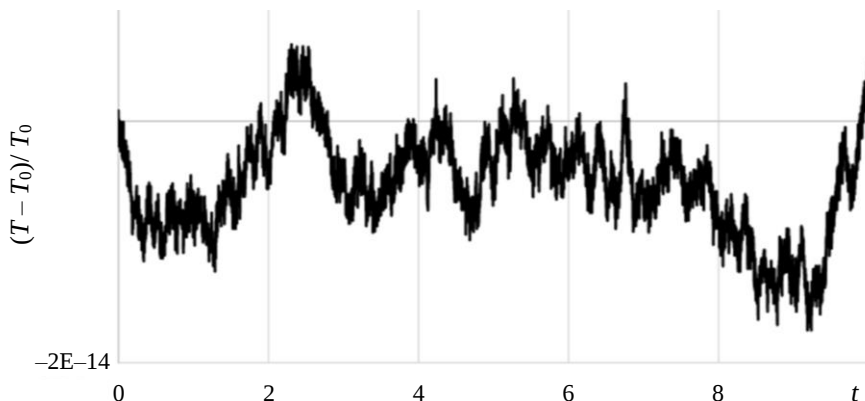


Рис. 1. Относительная погрешность вычислений

Fig. 1. Relative calculation error

Таким образом, при инерционном движении существует интеграл энергии

$$T = J \frac{\omega^2}{2} = \text{const}, \quad (7)$$

причем  $J = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2D\beta\gamma + 2E\alpha\gamma + 2F\alpha\beta$ , где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – направляющие косинусы мгновенной оси вращения:

$$\alpha = \frac{\omega_x}{\omega}, \quad \beta = \frac{\omega_y}{\omega}, \quad \gamma = \frac{\omega_z}{\omega}, \quad \omega = (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)^{1/2}.$$

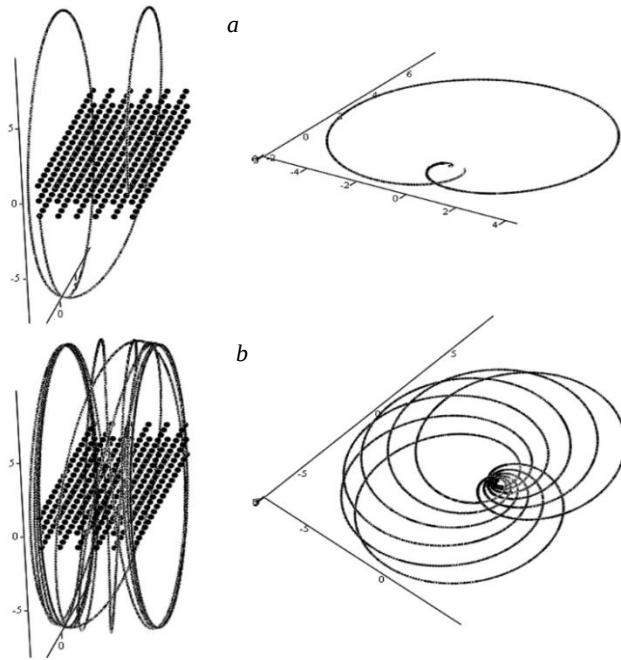
Подставляя найденные в результате решения задачи распределения  $\omega_x(t)$ ,  $\omega_y(t)$ ,  $\omega_z(t)$  в (6), мы получаем систему значений, отличающихся от величины начальной кинетической энергии на  $10^{-14}$  относительных единиц.

### Результаты расчетов

Классическая неустойчивость Луи Пуансо проявляется тогда, когда главные оси инерции, связанные с телом, определяют различные моменты инерции и вращение происходит вокруг промежуточной оси, т.е. оси, имеющей среднее значение момента инерции. Возьмем тело в виде параллелепипеда с тремя различными ребрами:  $3 \times 6 \times 18$  (безразмерные единицы). Придадим ему начальные вращения вокруг оси, проходящей через его центр масс, параллельной среднему ребру. Такая ось и является промежуточной, потому что момент инерции тела от этой оси будет иметь среднее по величине значение.

На рис. 2 показаны траектория характерной точки тела (одной из вершин трехгранного угла параллелепипеда) и годограф вектора мгновенной угловой скорости тела (справа) для случая, когда тело совершает перевороты вокруг соб-

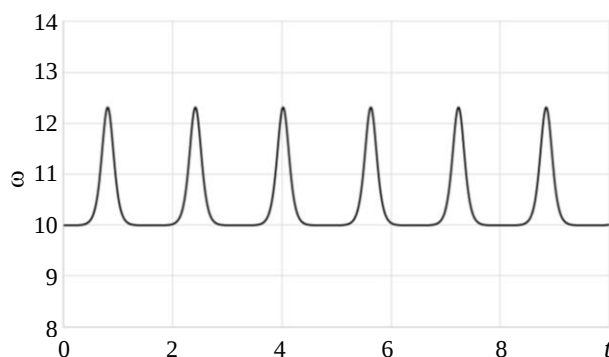
ственной оси с минимальным моментом инерции (вокруг параллельной большому ребру параллелепипеда). Такие кувырки фиксировал космонавт В. Джанибеков в одном из своих исследовательских полетов. Кинематический портрет этой неустойчивости изображается в виде витков на плоскости Пуансо.



**Рис. 2.** Траектория характерной точки тела и вектора его мгновенной угловой скорости  
**Fig. 2.** Trajectory of the characteristic point of the body and vector of its instantaneous angular velocity

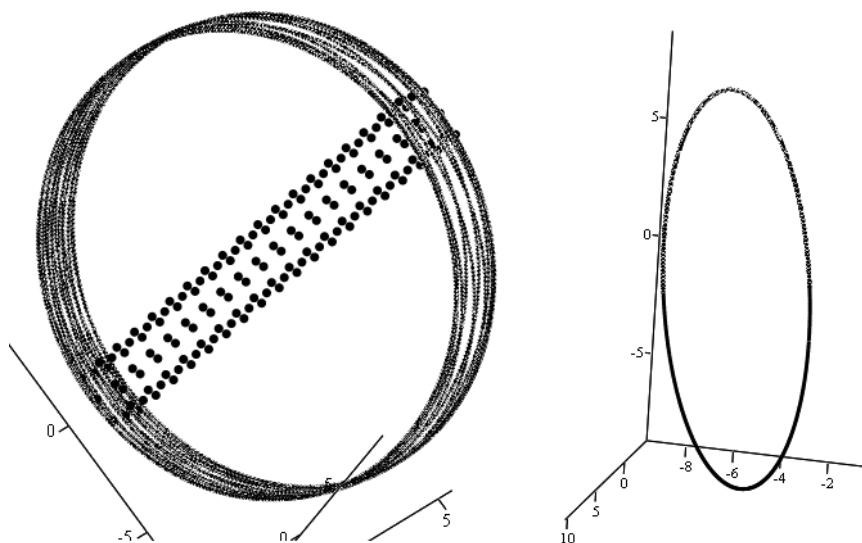
На рис. 2, *a* (справа) один виток, 2, *b* (справа) – шесть витков. Рисунок 2, *b* представляет продленный расчет, когда в шесть раз увеличено время вычислений. Расчет можно продолжать сколь угодно долго, тогда постепенно витки заполняют весь круг на плоскости индуцированных компонент вектора угловой скорости. Однако при ближайшем рассмотрении можно установить, что площадь индуцированных движений есть кольцо, так как всегда в центре остается незаполненный круг малого радиуса. Поскольку, перемещаясь по витку, вектор мгновенной угловой скорости значительно отклоняется от своего первоначального положения, а витки шаг за шагом поворачиваются в определенном направлении (в данном случае против стрелки часов), то это движение можно назвать вращением с прецессией. Несмотря на то, что в этом движении присутствуют и нутационные перемещения, установленное выше кольцо по соображениям простоты будем называть кольцом прецессии.

На рис. 3 показано изменение величины мгновенной угловой скорости со временем. Видно, что кувырки совершаются при переменной по величине угловой скорости. Результирующее изменение скорости за счет наличия положительного углового ускорения в классических кувырках составляет 25%.



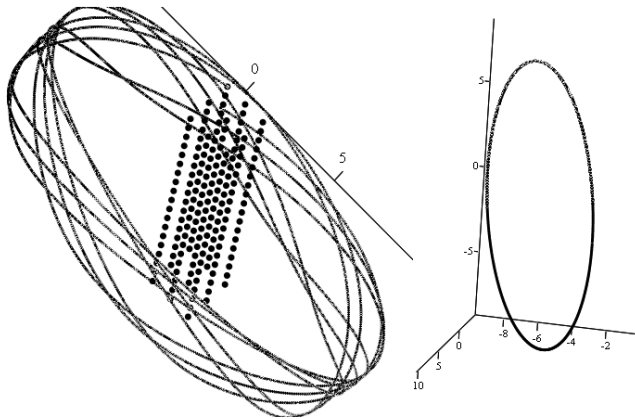
**Рис. 3.** Величина мгновенной угловой скорости  
**Fig. 3.** The magnitude of the instantaneous angular velocity

Теперь рассмотрим удлиненное тело в виде бруска, у которого поперечные размеры будут одинаковы. У таких тел нет собственной промежуточной оси. Действительно, вращая тело вокруг каждой из собственных осей, мы получим простое вращение, т.е. неустойчивого движения не будет. Если теперь собственную ось вытянутого тела отклонить на  $30^\circ$  в плоскости  $Oyz$  от оси  $Oy$  и поочередно вращать вокруг осей абсолютного базиса, получим следующий результат. Предварительно отметим, что моменты инерции относительно этих осей для рассматриваемого тела будут следующими:  $A = 0.76$ ,  $B = 1$ ,  $C = 0.28$ . В результате вращения вокруг оси  $Ox$  (эта ось будет промежуточной, так как  $C < A < B$ ) получим кувырки, показанные на рис. 4 (траекторный след, левая часть рисунка) и годограф угловой скорости (справа).



**Рис. 4.** Траектория угловой точки тела и вектора его мгновенной угловой скорости  
**Fig. 4.** Trajectory of the angular point of the body and the vector of its instantaneous angular velocity

Видно, что вытянутое тело в процессе движения вокруг оси  $Ox$  еще переворачивается вокруг собственной оси, неизменно связанной с телом. При этом, однако, величина мгновенной угловой скорости сохраняет свое значение во все время движения, и годограф угловой скорости является окружностью, т.е. совпадает с годографом регулярной прецессии. Получилось, что в этом случае широкое прецессионное кольцо классической неустойчивости Луи Пуансо сжимается до окружности и вовсе отсутствуют нутационные перемещения вектора угловой скорости. Главное отличие полученных кувырксов от переворотов В. Джанибекова – это то, что они осуществляются при постоянной по модулю угловой скорости. Поэтому этот вид неустойчивого вращательного движения мы назвали неустойчивостью второго рода. Если начальное вращение реализуется вокруг оси  $Oy$ , которая в данном начальном расположении тела обеспечивает максимальный момент инерции, то возникает устойчивое вращение.



**Рис. 5.** Траектория угловой точки тела (слева) и герполоида угловой скорости (справа)  
**Fig. 5.** Trajectory of the angular point of the body (left) and the angular velocity herpoloid (right)

Наконец, третий случай: вращение вокруг оси  $Oz$ , обеспечивающее при начальном расположении тела минимальный момент инерции  $C = 0.28$ . Левая часть рис. 5 (траекторный портрет) показывает, что в отличие от случая неустойчивости второго рода мы не наблюдаем здесь однонаправленных переворотов. В этом виде неустойчивости вместо последовательных переворотов присутствуют индуцированные первоначальным движением тела колебания вокруг собственной оси тела.

### Заключение

Проведенные высокоточные расчеты инерционного вращения удлинённых тел позволили выделить новый класс неустойчивых вращений и установить важные детали классической неустойчивости Луи Пуансо. Новая неустойчивость относится к сферическому движению удлинённых тел, не имеющих собственной промежуточной оси инерции. При вращении таких тел относительно осей абсолютного базиса, смещённых относительно собственных осей, возникают неустойчивые сферические движения с переворотами и колебаниями вокруг собственной

оси тела. Герполоидами этих движений являются кривые, находящиеся в сильно сжатом кольце прецессии, т.е. кривые, очень близкие к окружностям, а само вращение осуществляется при постоянной величине мгновенной угловой скорости.

#### Список источников

1. Панов А.П., Цисарж В.В., Конашков А.И. О группах и алгебрах негамильтоновых кватернионов, пятимерных векторов вращений в задачах // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2013. № 10 (ч. 1). С. 82–84.
2. Цисарж В.В., Марусик Р.И. Математические методы компьютерной графики. Киев : Факт, 2004. 464 с.
3. Побегайло А.П. Применение кватернионов в компьютерной геометрии и графике. Минск : БГУ, 2019. 223 с.
4. Исаев М.А., Исаев А.М., Кудинов Н.В., МIRONENKO Р.С. Алгоритм начальной инициализации кватерниона пространственной ориентации в параметрах Родрига–Гамильтона // Вестник Донского государственного технического университета. 2018. Т. 18, № 2. С. 238–245.
5. Никифорова Л.Н. Оптимальное управление в построении траекторий перелета вертолета в заданную точку пространства // Программные системы: теория и приложения. 2012. Т. 3, № 2. С. 61–75.
6. Челноков Ю.Н. Кватернионная регуляризация в астродинамике и управление траекторным движением // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. Т. 4, № 5. С. 2583–2585.
7. Переляев С.Е., Челноков Ю.Н. Алгоритмы ориентации движущегося объекта с разделением интегрирования быстрых и медленных движений // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81, № 1. С. 18–32.
8. Челноков Ю.Н. Инерциальная навигация в космосе с использованием регулярных кватернионных уравнений астродинамики // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82, № 6. С. 706–720.
9. Челноков Ю.Н. Возмущенная пространственная задача двух тел: регулярные кватернионные уравнения относительного движения // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82, № 6. С. 721–733.

#### References

1. Panov A.P., Tsisarzh V.V., Konashkov A.I. (2013) O gruppakh i algebrakh negamiltonovykh kvaternionov, pyatimernykh vektorov vrashcheniy v zadachakh [On groups and algebras of non-Hamiltonian quaternions, five-dimensional rotation vectors in problems]. *Mezhdunarodnyi zhurnal prikladnykh i fundamentalnykh issledovaniy*. 10. pp. 82–84.
2. Tsisarzh V.V., Marusik R.I. (2004) Matematicheskiye metody komp'yuternoy grafiki [Mathematical methods of computer graphics]. Kiev: Fakt.
3. Pobegaylo A.A. (2019) Primenenie kvaternionov v kompyuternoy grafike [Application of quaternions in computer geometry and graphics]. Minsk: BRU.
4. Isaev M.A., Isaev A.M., Kudinov N.V., Mironenko R.S. (2018) Algoritmnachal'noy initsializatsii kvaterniona prostanstvennoy oriyentatsii v parametrah Rodriga – Gamil'tona [Initial initialization algorithm for a spatially orientated quaternion in Rodrigues–Hamilton parameters]. *Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Vestnik of Don State Technical University*. 18. pp. 238–245. 10.23947/1992-5980-2018-18-2-238-245.
5. Nikoiforova L.N. (2012) Optimal'noye upravleniye v postroyenii trayektorii pereleta vertoletav zadannuyu tochku prostanstva [Optimal control in constructing helicopter flight trajectories to a given point in the space]. *Programmnyye podsistemy: teoriya i prilozheniya*. 3(2). pp. 61–75.

6. Chelnokov Yu. N. (2011) Kvaternionnaya regularizatsiya v astrodinamike i upravleniye trayektornym dvizheniyem [Quaternion regularization in astrodynamics and trajectory motion control]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo – Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod*. 4(5). pp. 2583–2585.
7. Perelyaev S.E., Chelnokov Yu.N. (2017) Algoritmy oriyentatsii dvizhushchegosya ob'yekta s razdeleniyem integrirovaniya bystrykh i medlennykh dvizheniy [Algorithms for the orientation of a moving object with separation of the integration of fast and slow motions]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 81(1). pp. 11–20. DOI: j.jappmathmech.2017.07.002.
8. Chelnokov Y. (2018) Inertsial'naya navigatsiya v kosmose s ispol'zovaniyem regul'yarnykh kvaternionnykh uravneniy astrodinamiki [Inertial navigation in space using regular quaternion equations of astrodynamics]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 82(6). pp. 706–720. DOI: 10.31857/S003282350002735-8.
9. Chelnokov Y. (2018) Vozmushchennaya prostranstvennaya zadacha dvukh tel: regul'yarnyye kvaternionnyye uravneniya otnositel'nogo dvizheniya [The perturbed three-dimensional two body problem: regular quaternion equations of relative motion]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 82(6). pp. 721–733. DOI: 10.31857/S003282350002736-9.

#### **Сведения об авторах:**

**Бубенчиков Михаил Алексеевич** – доктор физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: michael121@mail.ru

**Бубенчиков Алексей Михайлович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: bubenchikov\_am@mail.ru

**Мамонтов Дмитрий Владимирович** – младший научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: orevaore@mail.ru

#### **Information about the authors:**

**Bubenchikov Mikhail A.** (Doctor of Physics and Mathematics, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: michael121@mail.ru

**Bubenchikov Alexey M.** (Doctor of Physics and Mathematics, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bubenchikov\_am@mail.ru

**Mamontov Dmitriy V.** (National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: orevaore@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 26.09.2022; принята к публикации 04.12.2023*

*The article was submitted 26.09.2022; accepted for publication 04.12.2023*

Original article

UDK 515.12

MSC 54C35

doi: 10.17223/19988621/86/12

## On a class of homeomorphisms of function spaces preserving the Lindelöf number of domains

**Vadim R. Lazarev***Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, lazarev@math.tsu.ru*

**Abstract.** We consider the class of all homeomorphisms between the function spaces of the form  $C_p(X)$ ,  $C_p(Y)$  such that the images of  $Y$  and  $X$  under their dual and, respectively, inverse dual mappings consist of finitely supported functionals. We prove that if a homeomorphism belongs to this class, then Lindelöf numbers  $l(X)$  and  $l(Y)$  are equal. This result generalizes the known theorem of A. Bouziad for linear homeomorphisms of function spaces.

**Keywords:** Lindelöf number, function space, pointwise convergence topology, finite support property

**For citation:** Lazarev, V.R. (2023) On a class of homeomorphisms of function spaces preserving the Lindelöf number of domains. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 159–166. doi: 10.17223/19988621/86/12

Научная статья

## Об одном классе гомеоморфизмов пространств функций, сохраняющем число Линделёфа областей определения

**Вадим Ремирович Лазарев***Томский государственный университет, Томск, Россия, lazarev@math.tsu.ru*

**Аннотация.** А. Бузиад доказал, что если пространства непрерывных функций  $C_p(X)$ ,  $C_p(Y)$  линейно гомеоморфны, то числа Линделёфа пространств  $X$ ,  $Y$  равны. В данной статье этот результат распространяется на более широкий класс гомеоморфизмов пространств функций. Для этого вводятся в рассмотрение специальные подпространства в пространствах функционалов с конечным носителем, которые тем не менее строго шире пространств линейных непрерывных функционалов. Далее рассматривается класс таких гомеоморфизмов  $h$  пространств  $C_p(X)$ ,  $C_p(Y)$ , что образ  $Y$  при сопряженном к  $h$  отображении и образ  $X$  при отображении, сопряженном к отображению  $h^{-1}$ , содержатся в рассмотренных подпространствах функционалов. Учитывая, что эти подпространства строго шире пространства линейных непрерывных функционалов, приходим к заключению, что введенный класс гомеоморфизмов строго шире класса линейных гомеоморфизмов. Доказано, что техника А. Бузиада может быть применена к этому классу гомеоморфизмов. Таким образом, установле-

но, что если пространства  $C_p(X)$ ,  $C_p(Y)$  гомеоморфны, и гомеоморфизм принадлежит к рассматриваемому классу, то числа Линделёфа пространств  $X$ ,  $Y$  равны.

**Ключевые слова:** число Линделёфа, пространство функций, топология поточечной сходимости, свойство конечного носителя

**Для цитирования:** Лазарев В.Р. Об одном классе гомеоморфизмов пространств функций, сохраняющем число Линделёфа областей определения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 159–166. doi: 10.17223/19988621/86/12

## Introduction

We assume all topological spaces under consideration to be Tykhonoff and call them simply “spaces.” For each space  $X$ , let  $C_p(X)$  be the set of continuous real-valued functions on  $X$  with the topology of pointwise convergence. It means that a basic neighborhood  $W(\varphi, K, \varepsilon)$  of any function  $\varphi \in C_p(X)$  consists of functions  $\psi \in C_p(X)$  such that  $|\varphi(x) - \psi(x)| < \varepsilon$  for each point  $x$  of a finite subset  $K \subset X$ .

A. Bouziad proved [1] that if two function spaces  $C_p(X)$ ,  $C_p(Y)$  are linearly homeomorphic, then the Lindelöf numbers  $l(X)$ ,  $l(Y)$  of  $X$ ,  $Y$  are equal. For the prehistory of this result, the reader may refer to the rather complete survey in the same article [1]. In addition, we just note the interesting partial results of A.V. Arbit [2, 3], concerning uniform homeomorphisms of function spaces.

In this paper, we describe some class  $\mathcal{H}$  of homeomorphisms  $h: C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$  such that  $l(X) = l(Y)$  whenever  $h \in \mathcal{H}$ . This class  $\mathcal{H}$ , by its definition, is wider than the class of linear homeomorphisms. Hence we obtain a generalization of the above-mentioned result of A. Bouziad.

We denote by  $C_p^0 C_p(X)$  the subspace in  $C_p(C_p(X))$  consisting of all continuous functions  $f: C_p(X) \rightarrow \mathbb{R}$  such that  $f(0^X) = 0$ , where  $0^X$  is zero-function on  $X$ . In what follows, we identify each space  $X$  with its image under natural homeomorphic embedding  $\theta: X \rightarrow C_p^0 C_p(X)$  defined by the rule  $\theta(x)(\varphi) = \varphi(x)$ , where  $x \in X$ ,  $\varphi \in C_p(X)$ . Recall that for each continuous mapping  $h: C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$  such that  $h(0^X) = 0^Y$  its dual mapping  $h^*: C_p^0 C_p(Y) \rightarrow C_p^0 C_p(X)$  is defined by the rule  $h^*(f)(\varphi) = (f \circ h)(\varphi) = f(h(\varphi))$ .

## 1. Finitely supported functionals on $C_p(X)$

**Definition 1.1.** A function  $f \in C_p^0 C_p(X)$  is said to be a finitely supported functional (briefly, FSF) if there exists a finite (may be empty) subset  $K \subset X$  such that the pair  $(f, K)$  satisfies the following two conditions:

(i) For each  $\varepsilon > 0$  and each  $\varphi \in C_p(X)$ , there exists  $\delta > 0$  such that

$$f(W(\varphi, K, \delta)) \subset (f(\varphi) - \varepsilon; f(\varphi) + \varepsilon);$$

(ii) There exists  $\varepsilon_0 > 0$  such that for each  $x \in K$  and for each its open neighborhood  $U_x$  one can find functions  $\varphi_x, \psi_x \in C_p(X)$  which coincide out of  $U_x$  but  $|f(\varphi_x) - f(\psi_x)| > \varepsilon_0$ .

If conditions (i), (ii) hold then we say that  $K$  is the (finite) support of  $f$  and we write  $K = \text{supp } f$ .

**Definition 1.2.** We write  $f \in \hat{L}_p(X)$  if  $f$  is an FSF with the following additional properties:

(iii) If  $f(\varphi) \neq 0$ , then there exists  $n_0 \in \mathbb{N}$  such that for all integer  $n \geq n_0$  holds  $|f(n \cdot \varphi)| \geq 1$ ;

(iv) If  $|f(n \cdot \varphi)| \geq 1$  for some  $n \in \mathbb{N}$  then  $f(\varphi) \neq 0$ .

**Remark 1.3.** The denotation  $\hat{L}_p(X)$  is motivated by the fact that each linear continuous functional  $f = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n(f)} x_{n(f)} \in L_p(X)$  satisfies mentioned conditions (i) – (iv) with  $K = \{x_1, \dots, x_{n(f)}\}$ .

**Proposition 1.4.** (a)  $\text{supp } f = \emptyset$  iff  $f = 0^{C_p(X)}$ ;

(b) The set  $\text{supp } f$  is unique for each FSF  $f$ ;

(c) If  $\varphi, \psi \in C_p(X)$  and  $\varphi(x) = \psi(x)$  for each  $x \in \text{supp } f$  then  $f(\varphi) = f(\psi)$ ;

(d) The mapping  $s: \hat{L}_p(X) \rightarrow X$ ,  $s(f) = \text{supp } f$  is a well-defined finite-valued lower semicontinuous function.

Proof. We obviously have (i)  $\Rightarrow$  (a), (i)  $\Rightarrow$  (c).

(b) Let  $f \in C_p^0 C_p(X)$ ,  $f \neq 0^{C_p(X)}$  and there exist two different finite subsets  $K, M$  in  $X$  satisfying conditions (i) and (ii). Let, for example,  $x_0 \in K \setminus M$ . Take any neighborhood  $U_0$  of  $x_0$  with  $U_0 \cap ((K \cup M) \setminus \{x_0\}) = \emptyset$ . Since  $K = \text{supp } f$ , by (ii) there exist two functions  $\varphi_0, \psi_0 \in C_p(X)$  coinciding out of  $U_0$  such that  $|f(\varphi_0) - f(\psi_0)| > \varepsilon_0 > 0$ . At the same time,  $M = \text{supp } f$  as well,  $\varphi_0$  coincides with  $\psi_0$  on  $M$ , and now (c) implies  $f(\varphi_0) = f(\psi_0)$ , a contradiction.

(d) Evidently only the lower semicontinuity needs to be proved. Take an arbitrary open set  $G \subset X$  and let  $\text{supp } f \cap G \neq \emptyset$  for some FSF  $f$ . Choose a disjoint family of neighborhoods  $U_x$  of points  $x \in \text{supp } f$  such that  $U_x \subset G$  for each  $x \in \text{supp } f$ . Fix the functions  $\varphi_x, \psi_x$  existing by (ii) for each point  $x \in \text{supp } f$  and its neighborhood  $U_x$ . Put

$$W = \bigcap_{x \in \text{supp } f} \{g \in \hat{L}_p(X) : |g(\varphi_x) - g(\psi_x)| > \varepsilon_0\}. \quad (1)$$

It is easy to prove that  $W$  is open set in  $\hat{L}_p(X)$ , containing  $f$ . Moreover, if  $g$  is FSF and  $\text{supp } g \cap G = \emptyset$ , then for any  $x \in \text{supp } f$  and for all  $z \in \text{supp } g$  we have  $\varphi_x(z) = \psi_x(z) = 0$ . Hence  $g(\varphi_x) = g(\psi_x) = 0$  and  $g \notin W$ . Thus  $f \in W \subset \{g : \text{supp } g \cap G \neq \emptyset\}$ . ■

**Remark 1.5.** Formula (2.2) in [4] is incorrect. It must be in form (1).

## 2. Main result

At first let us define the class  $\mathcal{H}$  of homeomorphisms, mentioned in the introduction.

**Definition 2.1.** Define the class  $\mathcal{H}$  to be consisting of all homeomorphisms  $h : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$  such that  $h(0^X) = 0^Y$  and for all  $x \in X$  and  $y \in Y$  their images  $(h^{-1})^*(x)$  and  $h^*(y)$  are in  $\hat{L}_p(Y)$  and  $\hat{L}_p(X)$ , respectively.

**Remark 2.2.** It follows from Theorem 3.1 in [5] that, in particular, there exists a homeomorphism  $h : C_p([1, \omega]) \rightarrow C_p([1, \omega^\omega])$ ,  $h \in \mathcal{H}$ , but these function spaces are not linearly homeomorphic (see [6]).

Our main result is

**Theorem 2.3.** Let  $h : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ ,  $h \in \mathcal{H}$ . Then  $l(X) = l(Y)$ .

A.V. Osipov in [7] gave such a characterization of the Lindelöf property.

**Theorem 2.4.** ([7], Theorem 3.7) A space  $X$  is Lindelöf iff the function space  $C_p(X)$  has the following property:

(2) Each 1-dense set in  $C_p(X)$  contains a countable 1-dense subset.

Recall that a set  $A \subset C_p(X)$  is said to be 1-dense if  $A \cap W(f, \{x\}, \varepsilon) \neq \emptyset$  for each  $f \in C_p(X)$ , each  $x \in X$ , and  $\varepsilon > 0$ . By Theorem 2.3 we have such

**Corollary 2.5.** Let  $h : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ ,  $h \in \mathcal{H}$  and  $C_p(X)$  satisfies (2). Then  $C_p(Y)$  satisfies (2) as well.

To prove the Theorem 2.3 it certainly suffices to establish only the following

**Lemma 2.6.** Let  $\tau$  be an (infinite) cardinal, a homeomorphism  $h : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$  belongs to  $\mathcal{H}$  and  $l(Y) \leq \tau$ . Then  $l(X) \leq \tau$ .

We prove this Lemma following the same pattern as in [1], but we shall need a new definition of extractor.

For an arbitrary homeomorphism  $h : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ ,  $h \in \mathcal{H}$ , define the mappings

$s : Y \rightarrow 2^X$ ,  $s' : X \rightarrow 2^Y$  by the rules  $s(y) = \text{supp}(h^*(y))$ ,  $s'(x) = \text{supp}\left(\left(h^{-1}\right)^*(x)\right)$ .

First, we prove the surjectivity of  $s$ .

**Proposition 2.7.** The mapping  $s$  is a well-defined finite-valued lower semicontinuous surjective function.

Proof. All the statements are evident but surjectivity. Assume that there is a point  $x_0 \in X \setminus s(Y)$ . Consequently,  $x_0 \notin S = \bigcup \left\{ \text{supp} \left( h^*(y) \right) : y \in \text{supp} \left( \left( h^{-1} \right)^* (x_0) \right) \right\}$ . Choose a function  $\varphi_0 \in C_p(X)$  with  $\varphi_0|_S \equiv 0$ ,  $\varphi_0(x_0) = 1$ . By item (c) of Proposition 1.4 we have  $h^*(y)(\varphi_0) = h(\varphi_0)(y) = 0$  for each  $y \in \text{supp} \left( \left( h^{-1} \right)^* (x_0) \right)$ . Applying (c) again, we obtain

$$\left( \left( h^{-1} \right)^* (x_0) \right) \left( h(\varphi_0) \right) = x_0 \left( h^{-1} \left( h(\varphi_0) \right) \right) = x_0(\varphi_0) = \varphi_0(x_0) = 0,$$

a contradiction. ■

Let the symbol  $\tau_X$  denote the topology of the space  $X$ . For each  $y \in Y$  and each  $V \in \tau_X$  put  $r_V(y) = \left| h^*(y)(\varphi_y^V) \right|$ , where  $\varphi_y^V \in C_p(X)$ ,  $\varphi_y^V(x) = \begin{cases} 0, & x \in V \cap s(y) \\ 1, & x \notin V \end{cases}$ . Also put  $G : \tau_X \rightarrow 2^Y$ ,  $G(V) = \left\{ y \in Y : r_V(y) = \left| h^*(y)(\varphi_y^V) \right| = 0 \right\}$ .

Recall the basic definition from [1]:

**Definition 2.8.** Given multivalued lower semicontinuous function  $\eta : Y \rightarrow 2^X$ , any mapping  $G : \tau_X \rightarrow 2^Y$  is said to be  $\eta$ -extractor if the following three conditions hold:

- (e1) For each open  $U \subset X$  we have  $\eta^*(U) = \{ y \in Y : \eta(y) \subset U \} \subset G(U)$ ;
- (e2) If  $U, V \in \tau_X$ ,  $U \subset V$ , and  $y \in G(V) \setminus G(U)$  then  $\eta(y) \cap (V \setminus U) \neq \emptyset$ ;
- (e3) If a sequence  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \tau_X$ ,  $U_n \subset U_{n+1}$  is such that  $Y \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\bigcap_{m \geq n} G(U_m))$

then  $X \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ .

So, we now must check the conditions (e1), (e2), (e3) for  $\eta = s$ .

**Proposition 2.9.** The function  $s$  and mapping  $G$  satisfy conditions (e1), (e2), (e3).

Proof. Let  $V$  be an open subset in  $X$  and  $y \in Y$  is such that  $s(y) \subset V$  (i.e.,  $y \in s^*(V)$ ). Then  $\varphi_y^V(s(y)) = \{0\}$ . Consequently, by 1.4 (c),  $h^*(y)(\varphi_y^V) = 0$ , i.e.,  $y \in G(V)$  and (e1) holds.

Now take any  $U, V \in \tau_X$ , such that  $U \subset V$  and  $y \in G(V) \setminus G(U)$ . Since  $y \notin G(U)$  then  $h^*(y)(\varphi_y^U) \neq 0$  and we have  $s(y) \not\subset U$  by definition of the function  $\varphi_y^U$ . The assumption  $s(y) \cap V = \emptyset$  implies  $\varphi_y^V|_{s(y)} \equiv 1 \equiv \varphi_y^U|_{s(y)}$ . Therefore, by 1.4 (c) again,  $h^*(y)(\varphi_y^V) = h^*(y)(\varphi_y^U) \neq 0$ , a contradiction with  $y \in G(V)$ . The item (e2) is proved.

Let us verify (e3). Let us suppose that (e3) is not true and  $x_0 \in X \setminus (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n)$ . Inclusion  $Y \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\bigcap_{m \geq n} G(U_m))$  implies that there exists some  $k \in \mathbb{N}$  such that

$s'(x_0) \subset G(U_k)$ . Hence,  $h^*(y)(\varphi_y^{U_k}) = 0$  for each  $y \in s'(x_0)$ . Consider the function  $\varphi \in C_p(X)$ ,  $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in X \setminus U_k \\ 0, & x \in s(s'(x_0)) \cap U_k \end{cases}$ . Evidently we have  $\varphi(x_0) = 1$  and  $\varphi|_{s(y)} \equiv \varphi_y^{U_k}|_{s(y)}$  for any  $y \in s'(x_0)$ . It follows from this that  $h^*(y)(\varphi_y^{U_k}) = h^*(y)(\varphi) = h(\varphi)(y) = 0$ . It means that  $h(\varphi)|_{s'(x_0)} \equiv 0$  and therefore  $(h^{-1})^*(x_0)(h(\varphi)) = \varphi(x_0) = 0$ . This contradiction finishes the proof. ■

We need the next two lemmas to show, using the terminology of [1], that the  $s$ -extractor  $G$  is synchronized with the Lindelöf number of  $Y$ . The Lemmas 10 and 11 below are an adaptation of the lemmas 6 and 7 from [1] to our nonlinear situation.

Recall that an open subset  $V \subset X$  is said to be adequate (see [1]) if some its decomposition  $V = \cup \{F_k : k \in \mathbb{N}\}$  in increasing sequence of zero-sets  $F_k$  has the property that for each  $k \in \mathbb{N}$  there exist  $y_k \in Y$  with  $s(y_k) \subset V$  and  $s(y_k) \setminus F_k \neq \emptyset$ .

**Lemma 2.10.** Let  $I$  be an infinite set of cardinality  $|I| = \tau \geq \aleph_0$ , and let  $\gamma = \{V_i : i \in I\}$  be some family of adequate open subsets in  $X$ , which is stable under taking finite unions. Put  $V = \cup \gamma$ . Then  $F(V)$  is a  $F_\tau$ -set in  $Y$ .

Proof. For each  $V_i \in \gamma$  fix its decomposition  $(F_k^i)_{k \in \mathbb{N}}$  and for each  $k \in \mathbb{N}$  fix a function  $\eta_k^i \in C_p(X)$ , which is equal to zero on  $F_k^i$  and equal to  $k$  out of  $V_i$ . If  $y \in Y$ ,  $s(y) \subset V_i$ , and  $k \in \mathbb{N}$  then put

$$U_k^i(y) = \bigcap_{j \leq k} \left\{ y' \in Y : \left| h \left( \eta_{j+k_y^i}^i \right) (y') \right| < 1 \right\},$$

where  $k_y^i = \min \{k : s(y) \subset F_k^i\}$ . Of course,  $U_k^i(y)$  is open neighborhood of  $y$  because the functions  $h \left( \eta_{j+k_y^i}^i \right)$  are continuous on  $Y$  and are equal to zero at  $y$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ).

Put

$$A_i = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup \left\{ U_k^i(y) : s(y) \subset V_i \right\}, \quad B_i = \{y \in Y : s(y) \cap (V \setminus V_i) \neq \emptyset\}, \quad A = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B_i).$$

All sets  $A_i$  clearly are  $G_\delta$ -sets. All sets  $B_i$  are  $G_\delta$ -sets as well. Indeed, since the mapping  $s$  is finite-valued and lower semicontinuous, then we have  $B_i = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left\{ y \in Y : s(y) \cap (V \setminus F_k^i) \neq \emptyset \right\}$ . Let us show that  $F(V) = Y \setminus A$ .

Take any  $y \in F(V)$ . It means that  $h^*(y)(\varphi_y^V) \neq 0$ . In addition, since the set  $s(y)$  is finite, there exists  $i \in I$  such that  $s(y) \cap V \subset V_i$ . Therefore,  $y \notin B_i$ . Moreover, ap-

plying the item (iii) from Definition 1.2, one can find a  $k \in \mathbb{N}$  such that  $s(y) \cap V \subset F_n^i \subset V_i$  and  $\left| h^*(y) \left( n \cdot \varphi_y^V \right) \right| > 1$  for all  $n \geq k$ . Let us note that in this case we have  $\left( n \cdot \varphi_y^V \right) \Big|_{s(y)} \equiv \eta_n^i \Big|_{s(y)}$  for all  $n \geq k$ . By item (c) of Proposition 1.4 we conclude that  $h^*(y) \left( n \cdot \varphi_y^V \right) = h^*(y) \left( \eta_n^i \right)$  for all  $n \geq k$ . We are going to show that  $y \notin \bigcup \left\{ U_k^i(z) : s(z) \subset V_i \right\}$ .

Let  $s(z) \subset V_i$ . Then we have by item (iii) from Definition 1.2 that  $h^*(y) \left( \eta_{k+n_z^i}^i \right) = h^*(y) \left( (k+n_z^i) \cdot \varphi_y^V \right) \geq 1$ . This inequality means that  $y \notin U_k^i(z)$ . Therefore,  $y \notin A_i$  and, consequently,  $y \notin A$ . The inclusion  $F(V) \subset Y \setminus A$  is true.

Let us check the inverse inclusion. Take  $y \notin A$  and let  $i \in I$  be such that  $y \notin A_i \cup B_i$ . We can suppose by adequateness of  $V_i$  that for each  $k \in \mathbb{N}$  there exists  $y_k \in Y$  such that  $s(y_k) \subset V_i$  and  $s(y_k) \setminus F_k^i \neq \emptyset$ . Since  $y \notin B_i$ , then  $s(y) \cap V \subset V_i$ . Fix any  $p \in \mathbb{N}$  such that  $s(y) \cap V \subset F_p^i \subset V_i$ . Since  $y \notin A_i$ , there exists  $m \in \mathbb{N}$  such that  $y \notin \bigcup \left\{ U_m^i(z) : s(z) \subset V_i \right\}$ . Choose  $z$  such that  $s(z) \setminus F_p^i \neq \emptyset$ . Then  $n_z^i > p$  and there exists  $l \leq m$  such that  $\left| h \left( \eta_{l+n_z^i}^i \right) (y) \right| = \left| h^*(y) \left( \eta_{l+n_z^i}^i \right) \right| \geq 1$ .

It follows from the definition of the functions  $\eta_{l+n_z^i}^i$ ,  $\varphi_y^V$  and from inclusions  $s(y) \cap V \subset F_p^i \subset F_{l+n_z^i}^i \subset V_i$  that  $\left( (l+n_z^i) \cdot \varphi_y^V \right) \Big|_{s(y)} \equiv \eta_{l+n_z^i}^i \Big|_{s(y)}$ . Therefore, using again the item (c) of Proposition 1.4, we obtain  $1 \leq \left| h^*(y) \left( \eta_{l+n_z^i}^i \right) \right| = \left| h^*(y) \left( (l+n_z^i) \cdot \varphi_y^V \right) \right|$ . Now we can conclude by item (iv) from Definition 1.2 that  $h^*(y) \left( \varphi_y^V \right) \neq 0$  and  $y \in F(V)$ . ■

For an arbitrary family  $\mathcal{U}$  of sets, we denote by  $\mathcal{U}'$  the family of unions of all at most countable subfamilies of  $\mathcal{U}$ . Denote by  $\mathcal{L}$  the family of all  $F_\tau$ -subsets of  $Y$ , and let  $\mathcal{B}$  be a base of topology of  $X$  consisting of cozero-sets.

The proof of the next lemma is the same as in [1], Lemma 7, and by this reason we omit it.

**Lemma 2.11.** Let  $\tau$  be an infinite cardinal,  $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$  be an open non  $\tau$ -trivial cover of  $X$ . Then, for any subfamily  $\gamma \subset \mathcal{U}$  with  $|\gamma| \leq \tau$ , there exists a subfamily  $\gamma' \subset \mathcal{U}'$  which is stable under finite unions, consisting of adequate sets, has a cardinality  $|\gamma'| \leq \tau$ , and satisfies  $\cup \gamma \subset \cup \gamma'$ .

Proof of Lemma 2.6. If  $l(Y) \leq \tau$ , then, certainly,  $l(Z) \leq \tau$  for each  $Z = Z_1 \cap \dots \cap Z_n$ , where  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Z_1, \dots, Z_n \in \mathcal{L}$ . Now, combining Lemma 2.11 and Lemma 2.10, we can conclude that for each open non  $\tau$ -trivial cover  $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$  of  $X$  and for each subfamily  $\gamma \subset \mathcal{U}$  with  $|\gamma| \leq \tau$  there exists a subfamily  $\mu \subset \mathcal{U}$  with  $|\mu| \leq \tau$  such that  $\cup \gamma \subset \cup \mu$  and  $F(\cup \mu) \in \mathcal{L}$ . Indeed, apply Lemma 2.10 to the family  $\mu$  of elements of  $\mathcal{U}$ , which belong to at most countable subfamilies of  $\mathcal{U}$  forming elements of the family  $\gamma'$  from Lemma 2.11.

By Proposition 2.7, we have a finite-valued lower semicontinuous mapping  $s: Y \rightarrow 2^X$  with nonempty values  $s(y)$  (see 1.4, (a)). Thus, all conditions of Proposition 3 from [1] holds. Consequently,  $l(X) \leq \tau$ . ■

### References

1. Bouziad A. (2001) Le degré de Lindelöf est  $l$ -invariant. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 129(3). pp. 913–919.
2. Arbit A.V. (2008) The Lindelöf number is  $fu$ -invariant. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(3). pp. 10–19.
3. Arbit A.V. (2011) The Lindelöf number greater than continuum is  $u$ -invariant. *Serdica Mathematical Journal*. 37. pp. 143–162.
4. Lazarev V.R. (2022) Functionals with a finite support and homeomorphisms of spaces of continuous functions. *Proceedings of the International Scientific Conference LXXV Herzen Readings. Modern Problems of Mathematics and Mathematical Education, 2022. St. Petersburg*. pp. 218–223.
5. Lazarev V.R. (2020) On the weak finite support property of homeomorphisms of function spaces on ordinals. *Topology and Its Applications*. 275. p. 107012. DOI: 10.1016/j.topol.2019.107012.
6. Bessaga C., Pelczyński A. (1960) Spaces of continuous functions (IV). (On isomorphical classification of spaces of continuous functions). *Studia Mathematica*. 19(1). pp. 53–62.
7. Osipov A.V. (2020) Projective versions of the properties in the Scheepers Diagram. *Topology and Its Applications*. 278. p. 107232. DOI: 10.1016/j.topol.2020.107232.

### Information about the author:

**Lazarev Vadim R.** (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis and Theory of Functions, Faculty of Mechanics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lazarev@math.tsu.ru

### Сведения об авторе:

**Лазарев Вадим Ремирович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: lazarev@math.tsu.ru

*Статья поступила в редакцию 19.12.2022; принята к публикации 04.12.2023*

*The article was submitted 19.12.2022; accepted for publication 04.12.2023*

Научная статья

УДК 512.54

MSC 15B33, 20H25, 20K15

doi: 10.17223/19988621/86/13

## Инволюции группы автоморфизмов вполне разложимой абелевой группы конечного ранга

Егор Александрович Тимошенко<sup>1</sup>, Иван Владиславович Третьяков<sup>2</sup>

<sup>1, 2</sup> Томский государственный университет, Томск, Россия

<sup>1</sup> tea471@mail.tsu.ru

<sup>2</sup> ivantretyakov00@gmail.com

**Аннотация.** В рамках исследования вопросов определяемости вполне разложимой абелевой группы конечного ранга ее группой автоморфизмов показано, что всякое множество попарно перестановочных инволюций такой группы автоморфизмов, обладающее некоторыми дополнительными свойствами, сопряжено с множеством диагональных инволюций.

**Ключевые слова:** вполне разложимая группа, группа автоморфизмов, инволюция, матрица

**Благодарности:** Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2023-943).

**Для цитирования:** Тимошенко Е.А., Третьяков И.В. Инволюции группы автоморфизмов вполне разложимой абелевой группы конечного ранга // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 167–175. doi: 10.17223/19988621/86/13

Original article

## Involutions of the automorphism group of a completely decomposable finite-rank Abelian group

Egor A. Timoshenko<sup>1</sup>, Ivan V. Tretyakov<sup>2</sup>

<sup>1, 2</sup> Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

<sup>1</sup> tea471@mail.tsu.ru

<sup>2</sup> ivantretyakov00@gmail.com

**Abstract.** Let  $B$  be a completely decomposable torsion-free Abelian group of finite rank. It can be written as a direct sum  $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_s$ , where  $B_i$ 's are the homogeneous components of  $B$  (then, the types  $\mathbf{t}(B_i)$  are pairwise different). These components can be enumerated in such a way that  $\mathbf{t}(B_i) > \mathbf{t}(B_j)$  always implies  $i < j$ . Then the automorphism group  $\text{Aut } B$  can be identified with the group of all matrices of the form

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{ss} \end{pmatrix}$$

such that  $A_{ij} \in \text{Hom}(B_j, B_i)$  when  $i < j$  and  $A_{ii} \in \text{Aut } B_i$  for every  $i$ . We denote by  $\underline{\text{Aut } B}$  the group of all matrices  $A \in \text{Aut } B$  such that  $A_{ij} = 0$  when  $i < j$ . The symbol  $\Sigma$  will stand for the group of all matrices  $A$  such that  $A_{ij} \in \mathbf{Q} \otimes \text{Hom}(B_j, B_i)$  when  $i < j$  and each entry  $A_{ii}$  coincides with the trivial automorphism  $\varepsilon_i$  of  $B_i$ .

Involutions  $D_1, D_2, \dots, D_s \in \underline{\text{Aut } B}$  are defined as follows: the  $i$ th diagonal entry  $A_{ii}$  of  $D_k$  equals  $-\varepsilon_i$  or  $\varepsilon_i$  depending on whether  $i \leq k$  or  $i > k$ .

The main result is the following theorem:

**Theorem 3.** Let  $J_1, J_2, \dots, J_s \in \text{Aut } B$  be pairwise commuting involutions such that the set  $\{U^{-1}J_k U J_k \mid U \in \text{Aut } B\}$  is closed under multiplication and  $J_k D_k \in \Sigma$  for every  $k$ . Then there exists a matrix  $T \in \Sigma$  such that  $T^{-1}J_k T = D_k$  for every  $k$  and  $\underline{\text{Aut } B} \subset T^{-1}(\text{Aut } B)T$ .

**Keywords:** completely decomposable group, automorphism group, involution, matrix

**Acknowledgments:** This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (agreement No. 075-02-2023-943).

**For citation:** Timoshenko, E.A., Tretyakov, I.V. (2023) Involutions of the automorphism group of a completely decomposable finite-rank Abelian group. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 167–175. doi: 10.17223/19988621/86/13

Пусть  $B \in \mathbf{X}$ , где  $\mathbf{X}$  – некоторый класс абелевых групп. Мы будем говорить, что  $B$  определяется своей группой автоморфизмов в классе  $\mathbf{X}$ , если изоморфизм групп автоморфизмов  $\text{Aut } B$  и  $\text{Aut } B'$ , где  $B' \in \mathbf{X}$ , влечет изоморфизм  $B \cong B'$ .

Нас интересует случай, когда  $\mathbf{X}$  – класс всех вполне разложимых групп (без кручения) конечного ранга. Напомним, что *вполне разложимой группой ранга*  $k$  называют всякую группу, представляющую собой прямую сумму  $k$  групп ранга один. Поскольку всякая группа ранга один изоморфна некоторой *рациональной группе* (т.е. отличной от 0 подгруппе аддитивной группы поля  $\mathbf{Q}$  рациональных чисел), для удобства можно сразу рассматривать группы из класса  $\mathbf{X}$  как прямые суммы рациональных групп. Цикл работ Вильданова [1–4] посвящен определяемости абелевых групп их группами автоморфизмов в классе  $\mathbf{X}$  и некоторых его подклассах. В частности, в [4] найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы 2-делимая группа  $B \in \mathbf{X}$  определялась своей группой автоморфизмов среди всех 2-делимых групп, принадлежащих классу  $\mathbf{X}$ . Настоящая работа представляет собой очередной шаг к нахождению ответа на аналогичный вопрос для ситуации, когда группа  $B \in \mathbf{X}$  может и не быть 2-делимой. Для групп ранга три эта задача была ранее решена авторами в статье [5].

Символом ■ будет обозначаться конец доказательства. Для группы  $Y$  ранга 1 через  $t(Y)$  обозначается тип этой группы (подробнее о типах см.: [6]). Пусть дано семейство рациональных групп  $Y_i$ , где индекс  $i$  пробегает некоторое множество. Для индексов  $i, j$  введем обозначение  $\Gamma_{ji} = \{\alpha \in \mathbf{Q} \mid \alpha Y_j \subset Y_i\}$ . Нетрудно показать, что справедливы следующие свойства:

1. Всякий гомоморфизм  $Y_j \rightarrow Y_i$  представляет собой умножение на некоторое число  $\alpha \in \Gamma_{ji}$ . Таким образом,  $(\Gamma_{ji}, +)$  – абелева группа, которая изоморфна группе гомоморфизмов  $\text{Hom}(Y_j, Y_i)$ .

2.  $\Gamma_{ii}$  – подкольцо поля  $\mathbf{Q}$ , порожденное элементом 1 и элементами  $p^{-1}$ , где  $p$  пробегает множество всех простых чисел таких, что  $pY_i = Y_i$ .

3.  $\Gamma_{jk}\Gamma_{ki} \subset \Gamma_{ji}$  для любых индексов  $i, j, k$ .

4. Если неравенство  $\mathbf{t}(Y_i) \geq \mathbf{t}(Y_j)$  не выполняется, то  $\Gamma_{ji} = 0$ .

5. Если  $\mathbf{t}(Y_i) \geq \mathbf{t}(Y_j)$ , то  $\Gamma_{ji} \neq 0$  и  $\mathbf{t}(\Gamma_{ji}) = \mathbf{t}(Y_i) : \mathbf{t}(Y_j)$ .

Группу  $B \in \mathbf{X}$  можно записать в виде  $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_s$ , где каждое прямое слагаемое  $B_i$  представляет собой прямую сумму  $n_i$  копий одной и той же рациональной группы  $Y_i$ , причем группы  $Y_1, Y_2, \dots, Y_s$  попарно неизоморфны (известно [6. Предложение 86.1], что любые два таких разложения группы  $B$  изоморфны). Учитывая частичный порядок, который задан на множестве всех типов, можно пронумеровать однородные компоненты  $B_i$  так, что для любого  $i$  тип  $\mathbf{t}(Y_i)$  будет одним из максимальных элементов множества  $\{\mathbf{t}(Y_1), \mathbf{t}(Y_{i+1}), \dots, \mathbf{t}(Y_s)\}$ . Тогда при  $i < j$  имеем  $\Gamma_{ij} = 0$ , а кольцо эндоморфизмов  $E(B)$  группы  $B$  изоморфно (см.: [7]) кольцу блочно-верхнетреугольных матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{ss} \end{pmatrix} \quad (1)$$

таких, что каждый блок  $A_{ij}$  принадлежит множеству  $\Delta_{ij} = M(n_i, n_j, \Gamma_{ji})$ , состоящему из всех матриц размера  $n_i \times n_j$  с элементами из  $\Gamma_{ji}$ . Поэтому в последующем мы будем отождествлять кольцо  $E(B)$  с указанным матричным кольцом, считая, что  $\text{Aut } B$  есть группа матриц, обратимых в этом кольце. Матрица  $A \in E(B)$  вида (1) лежит в  $\text{Aut } B$  тогда и только тогда, когда каждый блок  $A_{ii}$  принадлежит полной линейной группе  $GL(n_i, \Gamma_{ii})$  над кольцом  $\Gamma_{ii}$  (иначе говоря, определитель каждого блока  $A_{ii}$  должен быть обратимым элементом в  $\Gamma_{ii}$ ); строгое обоснование этого факта можно найти в [7].

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые дополнительные обозначения:

– через  $\underline{\text{Aut } B}$  обозначим группу всех матриц  $A \in \text{Aut } B$  вида (1), для которых  $A_{ij} = 0$  при  $i < j$ ;

– через  $\Sigma$  обозначим группу матриц вида (1), для которых  $A_{ij} \in M(n_i, n_j, \mathbf{Q})$  при  $i < j$ , а каждый блок  $A_{ii}$  равен единичной матрице  $E$  (далее размер матрицы, обозначаемой символом  $E$ , в каждом конкретном случае будет ясен из контекста);

– через  $E_{ij}(C)$  будем обозначать матрицу  $A$  вида (1), для которой  $A_{ij} = C$ , а все остальные блоки равны 0;

– через  $\pi_{ij}$ , где  $i \leq j$ , обозначим отображение, которое сопоставляет матрице  $A$  вида (1) значение ее блока  $A_{ij}$ ;

– через  $\pi$  мы обозначим эндоморфизм группы  $\text{Aut } B$ , сопоставляющий всякой матрице  $A$  вида (1) матрицу  $\pi(A) \in \underline{\text{Aut } B}$  такую, что  $\pi_i(\pi(A)) = A_{ii}$  при всех  $i$ .

Подгруппа  $\underline{\text{Aut } B}$  группы  $\text{Aut } B$ , очевидно, изоморфна прямому произведению групп  $\text{Aut } B_i \cong GL(n_i, \Gamma_{ii})$  по всем  $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ . Данная подгруппа играет важную роль при исследовании вопроса об определяемости группы  $B \in \mathbf{X}$  группой  $\text{Aut } B$ .

Используя семейства коммутирующих инволюций, Вильданов показал [3, 4], что для 2-делимой группы  $B$  строение группы  $\text{Aut } B$  однозначно определяется строением  $\text{Aut } B$ . В настоящей статье мы докажем, что всякое семейство коммутирующих инволюций, обладающее некоторыми дополнительными свойствами, сопряжено с множеством инволюций, содержащимся в  $\text{Aut } B$ .

Нам понадобится еще одно свойство групп  $\Gamma_{ji}$ :

**Лемма 1.** Если  $\alpha \in \Gamma_{ki} \setminus 2\Gamma_{ki}$  и  $\beta \in \Gamma_{jk} \setminus 2\Gamma_{jk}$ , то  $\alpha\beta \in \Gamma_{ji} \setminus 2\Gamma_{ji}$ .

**Доказательство.** Из условия следует, что  $\alpha Y_k$  содержится в  $Y_i$ , но не в  $2Y_i$ . Легко убедиться, что факторгруппа  $Y_i/2Y_i$  состоит из двух элементов, поэтому  $Y_i = 2Y_i + \alpha Y_k$ . Аналогично показывается, что  $Y_k = 2Y_k + \beta Y_j$ . Если  $\alpha\beta \in 2\Gamma_{ji}$ , то

$$Y_i = 2Y_i + 2\alpha Y_k + \alpha\beta Y_j \subset 2Y_i + 2\Gamma_{ki}Y_k + 2\Gamma_{ji}Y_j \subset 2Y_i + 2Y_i + 2Y_i = 2Y_i,$$

что невозможно. Полученное противоречие доказывает лемму. ■

Через  $\varphi_X$ , где  $X$  – элемент какой-либо группы, будем обозначать внутренний автоморфизм этой группы, переводящий всякий ее элемент  $A$  в элемент  $X^{-1}AX$ . Напомним, что *инволюцией* называется элемент группы, квадрат которого равен нейтральному элементу группы. Пусть инволюции  $D_1, D_2, \dots, D_s \in \text{Aut } B$  таковы, что  $\pi_{ii}(D_k) = -E$ , если  $i \leq k$ , и  $\pi_{ii}(D_k) = E$ , если  $i > k$ . В доказательстве следующей теоремы, использующем некоторые идеи из [5], важную роль играют свойства множества  $\Lambda(A) = \{T^{-1}ATA \mid T \in \text{Aut } B\}$ , где  $A$  – инволюция.

**Теорема 2.** Пусть  $J_1, J_2, \dots, J_s \in \text{Aut } B$  – попарно коммутирующие инволюции, для которых  $\pi(J_k) = D_k$  и множество  $\Lambda(J_k)$  замкнуто относительно умножения при всех  $k$ . Тогда существуют матрица  $X \in \text{Aut } B \cap \Sigma$  и система матриц  $C_{ij} \in \Delta_{ij}$ , где  $i < j$ , такие, что:

(i) для автоморфизма  $\psi = \varphi_X$  и любых  $i, j, k \in \{1, 2, \dots, s\}$  выполнено

$$\pi_{ij}(\psi(J_k)) = \begin{cases} E, & \text{если } i = j > k, \\ -E, & \text{если } i = j \leq k, \\ C_{ij}, & \text{если } i \leq k < j, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases}$$

(ii) если  $C_{ij} \in 2\Delta_{ij}$ , то  $C_{ij} = 0$ ;

(iii) если  $C_{ij} \neq 0$ , то  $n_i = n_j = 1$ ;

(iv) если  $i < k < j$ , то  $C_{ik} = 0$  или  $C_{kj} = 0$ .

**Доказательство** проведем индукцией по  $s$ . При  $s = 1$  утверждение теоремы очевидно, так как в этом случае  $J_1 = -E$  и можно взять  $X = E$ .

Пусть теперь  $s > 1$  и утверждение теоремы верно для случая  $s - 1$  однородных компонент. Обозначим гомоморфизм групп  $\text{Aut } B \rightarrow \text{Aut}(B_2 \oplus \dots \oplus B_s)$ , который «вычеркивает» из матрицы первую строку и первый столбец, через  $\rho$ . Поскольку  $\rho$  – сюръекция, множество  $\{T^{-1}\rho(J_k)\rho(J_k) \mid T \in \text{Aut}(B_2 \oplus \dots \oplus B_s)\}$  замкнуто относительно умножения при всех  $k$ . Применяя предположение индукции к группе  $B_2 \oplus \dots \oplus B_s$  и семейству инволюций  $\rho(J_2), \dots, \rho(J_s)$ , можно найти такую матрицу  $X \in \text{Aut } B \cap \Sigma$ , что  $\pi_{1j}(X) = 0$  при любом  $j > 1$  и условия (i)–(iv) выполняются для подходящей системы матриц  $C_{ij} \in \Delta_{ij}$ , где  $1 < i < j$ , при любых значениях индексов  $i, j, k \in \{2, 3, \dots, s\}$ . Ясно, что для  $\psi = \varphi_X$  матрицы  $\psi(J_k)$  коммутируют между собой и множества  $\Lambda(\psi(J_k))$  замкнуты относительно умножения при всех  $k \geq 1$ .

Для любой матрицы  $F$  имеем  $\varphi_F \circ \psi = \varphi_{XF}$ . Из всех матриц  $F \in \text{Aut } B \cap \Sigma$  с тем свойством, что  $\rho(\varphi_{XF}(J_k)) = \rho(\psi(J_k))$  при всех  $k > 1$ , мы выберем ту, для которой количество ненулевых блоков  $\pi_{1j}(\varphi_{XF}(J_1))$  является наименьшим. Заменяя  $X$  матрицей  $XF \in \text{Aut } B \cap \Sigma$  в равенстве  $\psi = \varphi_X$ , можем сразу считать, что инволюция  $\psi(J_1)$  минимальна в указанном нами смысле.

Легко видеть, что  $\pi(\psi(J_k)) = D_k$  для любого  $k \geq 1$  и  $\pi_{ij}(\psi(J_k)) = 0$ , если  $i < j \leq k$  или  $k < i < j$  (так как  $\psi(J_k)$  – инволюция). Для всех  $j > 1$  положим  $C_{1j} = \pi_{1j}(\psi(J_1))$ . Предположим, что для некоторого  $j > 1$  выполняется  $C_{1j} \in 2\Delta_{1j} \setminus \{0\}$ . Для матрицы  $F = E + E_{1j}(C) \in \text{Aut } B \cap \Sigma$ , где  $C \in \Delta_{1j}$ , имеем  $F^{-1} = E - E_{1j}(C)$  и

$$\begin{aligned} F^{-1}\psi(J_1)F &= \psi(J_1) - E_{1j}(C)\psi(J_1) + \psi(J_1)E_{1j}(C) - E_{1j}(C)\psi(J_1)E_{1j}(C) = \\ &= \psi(J_1) - E_{1j}(C) - E_{1j}(C) - E_{1j}(C)E_{1j}(C) = \psi(J_1) - E_{1j}(2C). \end{aligned}$$

Если матрица  $C$  выбрана так, что  $2C = C_{1j}$ , то первая «строка» матрицы  $\varphi_{XF}(J_1)$  содержит меньше ненулевых блоков, чем  $\psi(J_1)$ . Поскольку при этом выполнено  $\rho(\varphi_{XF}(J_k)) = \rho(\psi(J_k))$  для всех  $k > 1$ , приходим к противоречию с минимальностью  $\psi(J_1)$ . Это означает, что условие (ii) выполнено в том числе и для  $i = 1$ .

Рассмотрим два случая.

I. Пусть  $n_1 = 1$ . Мы докажем индукцией по  $k \in \{2, 3, \dots, s\}$ , что если  $j > k$ , то  $\pi_{1j}(\psi(J_k)) = C_{1j}$  и либо  $C_{1k} = 0$ , либо  $C_{kj} = 0$ . Допустим, что для значений, которые меньше  $k$ , требуемые утверждения истинны. Тогда  $C_{1l}C_{lj} = 0$ , если  $2 \leq l < k$  и  $l < j$ . Так как  $\psi(J_1)$  и  $\psi(J_k)$  коммутируют, то для всякого  $j > k$  имеем

$$\begin{aligned} -C_{1j} + \pi_{1j}(\psi(J_k)) &= \pi_{1j}(\psi(J_k)\psi(J_1)) = \pi_{1j}(\psi(J_1)\psi(J_k)) = \\ &= -\pi_{1j}(\psi(J_k)) + C_{12}C_{2j} + \dots + C_{1k}C_{kj} + C_{1j} = -\pi_{1j}(\psi(J_k)) + C_{1k}C_{kj} + C_{1j}. \end{aligned} \quad (2)$$

Допустим, что выполняется  $C_{1k} \neq 0$  и  $C_{kj} \neq 0$ . Тогда имеем  $C_{1k} \notin 2\Delta_{1k}$ ,  $C_{kj} \notin 2\Delta_{kj}$  и  $n_k = n_j = 1$ . Так как  $\Delta_{1k} = \Gamma_{k1}$ ,  $\Delta_{kj} = \Gamma_{jk}$  и  $\Delta_{1j} = \Gamma_{j1}$ , мы можем применить лемму 1 и заключить, что  $C_{1k}C_{kj} \notin 2\Delta_{1j}$ . Но из (2) вытекает  $C_{1k}C_{kj} = 2\pi_{1j}(\psi(J_k)) - 2C_{1j} \in 2\Delta_{1j}$  – противоречие. Значит,  $C_{1k} = 0$  или  $C_{kj} = 0$ , откуда в силу (2) получаем равенство  $\pi_{1j}(\psi(J_k)) = C_{1j}$ . Таким образом, условия (i) и (iv) также справедливы для любых  $i, j, k \in \{1, 2, \dots, s\}$ .

Выберем произвольный индекс  $j$  со свойством  $n_j > 1$ . Мы выведем равенство  $C_{1j} = 0$  из замкнутости множества  $\Lambda(A)$ , где  $A = \psi(J_{j-1})$ , относительно умножения. Гомоморфизм групп  $\sigma: \text{Aut } B \rightarrow \text{Aut}(B_1 \oplus \dots \oplus B_j)$ , «вычеркивающий» из матрицы все строки и столбцы с номерами  $> j$ , сюръективен, а следовательно, множество  $\{T^{-1}\sigma(A)T\sigma(A) \mid T \in \text{Aut}(B_1 \oplus \dots \oplus B_j)\}$  также замкнуто относительно умножения. Поэтому мы можем, не умаляя общности, считать, что  $j = s$ .

Разбивая главную диагональ на блоки порядков  $n_1 + \dots + n_{s-1}$  и  $n_s$ , запишем

$$A = \begin{pmatrix} -E & C \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} U_{11}^{-1} & -U_{11}^{-1}U_{12}U_{22}^{-1} \\ 0 & U_{22}^{-1} \end{pmatrix}; \quad (3)$$

легко видеть, что  $UW = WU = E$  и, следовательно,  $W = U^{-1}$ . Тогда

$$U^{-1}AU = W \begin{pmatrix} -U_{11} & CU_{22} - U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E & U_{11}^{-1}(CU_{22} - 2U_{12}) \\ 0 & E \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Если  $D_{s-1}A \in \Lambda(A)$ , то существует матрица  $U \in \text{Aut } B$  вида (3), удовлетворяющая равенству  $U^{-1}AU = D_{s-1}$ . Для такой матрицы  $U$  выполнено  $CU_{22} - 2U_{12} = 0$ . Тогда

$C = 2U_{12}U_{22}^{-1} \in (2\Delta_{1s}, \dots, 2\Delta_{s-1,s})^t \cdot \Delta_{ss}$  и, в частности,  $C_{1s} = \pi_{1s}(A) \in 2\Delta_{1s}\Delta_{ss} = 2\Delta_{1s}$ .

Ввиду условия (ii) отсюда следует  $C_{1s} = 0$ .

Рассмотрим случай, когда  $D_{s-1}A \notin \Lambda(A)$ . Зафиксируем матрицы

$$T = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix},$$

для которых выполнено  $T_{22}, U_{22} \in GL(n_s, \Gamma_{ss})$  и  $T_{22} + U_{22} = E$  (существование таких матриц следует из [8. Лемма 1]). С учетом вычислений (4) имеем

$$\begin{aligned} T^{-1}AT \cdot A \cdot U^{-1}AU &= T^{-1}AT \cdot A \begin{pmatrix} -E & CU_{22} \\ 0 & E \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -E & CT_{22} \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & C - CU_{22} \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E & C(T_{22} + U_{22} - E) \\ 0 & E \end{pmatrix} = D_{s-1}. \end{aligned}$$

Значит,  $D_{s-1}A$  представляет собой произведение двух матриц  $T^{-1}ATA$  и  $U^{-1}AUA$ , принадлежащих  $\Lambda(A)$ . Отсюда вытекает  $D_{s-1}A \in \Lambda(A)$ , что противоречит нашему предположению.

Итак, доказано, что если  $n_j > 1$ , то  $C_{1j} = 0$ . Следовательно, условие (iii) также выполнено для всех  $i, j \in \{1, 2, \dots, s\}$ .

II. Осталось рассмотреть случай  $n_1 > 1$ . Пользуясь замкнутостью множества  $\Lambda(A)$ , где  $A = \psi(J_1)$ , относительно умножения, покажем, что  $\psi(J_1) = D_1$ . Разбивая главную диагональ на блоки, имеющие порядки  $n_1$  и  $n_2 + \dots + n_s$ , мы можем вновь воспользоваться записями (3) и (4).

Если  $D_1A \in \Lambda(A)$ , то  $U^{-1}AU = D_1$  для подходящей матрицы  $U \in \text{Aut } B$  вида (3). Тогда  $CU_{22} - 2U_{12} = 0$  и, далее,  $C = 2U_{12}U_{22}^{-1} \in (2\Delta_{12}, \dots, 2\Delta_{1s})$ . Следовательно, при всех  $j > 1$  имеем  $C_{1j} = \pi_{1j}(A) \in 2\Delta_{1j}$ . Применяя (ii), получаем, что  $C_{1j} = 0$  для всех  $j > 1$ , т.е.  $A = D_1$ .

Рассмотрим случай, когда  $D_1A \notin \Lambda(A)$ . Так как  $n_1 > 1$ , то существуют матрицы

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_{11} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

для которых  $T_{11}, U_{11} \in GL(n_1, \Gamma_{11})$  и  $T_{11}^{-1} + U_{11}^{-1} = E$ . С учетом (4) имеем

$$\begin{aligned} T^{-1}AT \cdot A \cdot U^{-1}AU &= T^{-1}AT \cdot A \begin{pmatrix} -E & U_{11}^{-1}C \\ 0 & E \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -E & T_{11}^{-1}C \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & C - U_{11}^{-1}C \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E & (T_{11}^{-1} + U_{11}^{-1} - E)C \\ 0 & E \end{pmatrix} = D_1. \end{aligned}$$

Значит,  $D_1A$  есть произведение матриц  $T^{-1}ATA$  и  $U^{-1}AUA$ , принадлежащих  $\Lambda(A)$ . Отсюда  $D_1A \in \Lambda(A)$ , что противоречит нашему предположению.

Мы показали, что инволюция  $A = \psi(J_1)$  совпадает с  $D_1$ . Так как  $A$  и  $\psi(J_k)$ , где  $k > 1$ , коммутируют, то для всякого  $j > 1$  имеем

$$\pi_{1j}(\psi(J_k)) = \pi_{1j}(\psi(J_k)D_1) = \pi_{1j}(D_1\psi(J_k)) = -\pi_{1j}(\psi(J_k))$$

и, следовательно,  $\pi_{1j}(\psi(J_k)) = 0$ . Таким образом, условия (i), (iii) и (iv) выполнены для всех  $i, j, k \in \{1, 2, \dots, s\}$ . Теорема доказана. ■

Далее мы установим, что каждое семейство инволюций, обладающее указанными в теореме 2 свойствами, сопряжено (вообще говоря, не в  $\text{Aut } B$ , а в более широкой группе) с семейством диагональных инволюций  $D_1, D_2, \dots, D_s$ .

**Теорема 3.** Если инволюции  $J_1, J_2, \dots, J_s \in \text{Aut } B$  удовлетворяют требованиям, перечисленным в условии теоремы 2, то существует матрица  $T \in \Sigma$ , для которой  $\varphi_T(J_k) = D_k$  при всех  $k$  и  $\underline{\text{Aut}} B \subset \varphi_T(\text{Aut } B)$ .

**Доказательство.** Пусть  $\psi = \varphi_X$  и  $\{C_{ij}\}_{i < j}$  – автоморфизм и система матриц, найденные нами в доказательстве теоремы 2. Обозначим через  $V$  сумму матриц  $E_{ij}(C_{ij})$  по всем  $i, j$ , для которых  $i < j$ . В силу условия (iv) имеем  $V^2 = 0$ . Из этого следует, что для матрицы  $F = E + \frac{1}{2}V \in \Sigma$  выполнено  $F^{-1} = E - \frac{1}{2}V$ .

Пусть  $A$  – какая-либо матрица из  $\underline{\text{Aut}} B$  и  $\pi_{ii}(A) = A_{ii}$  для всех  $i$ . Из очевидных равенств  $E_{ij}(C_{ij})A = E_{ij}(C_{ij}A_{jj})$  и  $AE_{ij}(C_{ij}) = E_{ij}(A_{ii}C_{ij})$  получаем, что

$$VA = \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=i+1}^s E_{ij}(C_{ij}A_{jj}), \quad AV = \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=i+1}^s E_{ij}(A_{ii}C_{ij})$$

$$\text{и } \pi_{ij}(VAV) = \sum_{k=i+1}^{j-1} \pi_{ik}(VA)\pi_{kj}(V) = \sum_{k=i+1}^{j-1} (C_{ik}A_{kk})C_{kj}, \text{ когда } i < j.$$

Из (iv) следует, что все слагаемые  $C_{ik}A_{kk}C_{kj}$  равны 0, а значит,  $VAV = 0$ . Тогда

$$FAF^{-1} = F(A - \frac{1}{2}AV) = A - \frac{1}{2}AV + \frac{1}{2}VA - \frac{1}{4}VAV = A + \frac{1}{2}(VA - AV).$$

Предположим, что  $i < j$  и матрица  $2\pi_{ij}(FAF^{-1}) = C_{ij}A_{jj} - A_{ii}C_{ij}$  отлична от 0. Тогда имеем  $C_{ij} \neq 0$ , откуда в силу (ii) и (iii) получаем  $C_{ij} \in \Delta_{ji} \setminus 2\Delta_{ji}$  и  $n_i = n_j = 1$ . Из этого вытекает, что группа  $\Delta_{ji} = \Gamma_{ji}$  не является 2-делимой, а следовательно,  $\mathbf{t}(Y_i) > \mathbf{t}(Y_j)$ ,  $2Y_i \neq Y_i$  и  $2Y_j \neq Y_j$ . Таким образом,  $\Gamma_{ji} \subset \Gamma_{ii}$  и 2 не является обратимым элементом колец  $\Gamma_{ii}$  и  $\Gamma_{jj}$ . Обратимые элементы  $A_{ii} \in \Gamma_{ii}$  и  $A_{jj} \in \Gamma_{jj}$  – это просто рациональные числа с нечётными числителем и знаменателем. Значит,

$$\pi_{ij}(FAF^{-1}) = \frac{1}{2}C_{ij}(A_{jj} - A_{ii}) \in \frac{1}{2}\Gamma_{ji} \cdot 2\Gamma_{ii} = \Gamma_{ji} = \Delta_{ji}.$$

Тем самым мы установили, что  $FAF^{-1} \in \text{Aut } B$ . Так как  $\varphi_F(FAF^{-1}) = A$ , получаем, что  $\underline{\text{Aut}} B \subset \varphi_F(\text{Aut } B) = \varphi_F(\psi(\text{Aut } B))$ .

Допустим теперь, что блочно-диагональная матрица  $A$  совпадает с одной из инволюций  $D_k$ , и найдем матрицу  $\pi_{ij}(FAF^{-1}) = \frac{1}{2}(C_{ij}A_{jj} - A_{ii}C_{ij})$ , где  $i < j$ :

$$\text{– если } k < i < j, \text{ то } \pi_{ij}(FAF^{-1}) = \frac{1}{2}(C_{ij}E - EC_{ij}) = 0;$$

$$\text{– если } i \leq k < j, \text{ то } \pi_{ij}(FAF^{-1}) = \frac{1}{2}(C_{ij}E + EC_{ij}) = C_{ij};$$

$$\text{– если } i < j \leq k, \text{ то } \pi_{ij}(FAF^{-1}) = \frac{1}{2}(-C_{ij}E + EC_{ij}) = 0.$$

Сравнивая полученное с (i), видим, что при любом  $k$  справедливы равенства  $FD_kF^{-1} = D_k + \frac{1}{2}(VD_k - D_kV) = \psi(J_k)$ . Тогда имеем  $D_k = \varphi_F(FD_kF^{-1}) = \varphi_F(\psi(J_k))$ ,

и остается только положить  $T = XF$ , так как  $X \in \Sigma$  и  $\varphi_F \circ \psi = \varphi_{XF}$ . ■

**Пример 4.** Покажем, что изоморфизм  $\varphi_F$  (и, значит,  $\varphi_T$ ) из теоремы 3, вообще говоря, переводит  $\text{Aut } B$  в какую-то группу, отличную от  $\text{Aut } B$ . Для этого рассмотрим группу  $B = Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_3$  такую, что для  $i \in \{1, 2\}$  рациональная группа  $Y_i$

не является 2-делимой, содержит  $Y_{i+1}$  в качестве 2-сервантной подгруппы и при этом  $t(Y_i) > t(Y_{i+1})$ .

Если (в обозначениях теоремы 3)  $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  и  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , то

$$FAF^{-1} = FA \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку  $Y_3$  не содержится в  $2Y_1$ , получаем, что  $FAF^{-1} \notin \text{Aut } B$ . Таким образом, группа  $\text{Aut } B$  не содержит матрицу, которая могла бы быть прообразом матрицы  $A \in \text{Aut } B$  при отображении  $\varphi_F$ . Следовательно,  $\varphi_F(\text{Aut } B) \neq \text{Aut } B$ .

#### Список источников

1. Вильданов В.К. Определяемость вполне разложимой абелевой группы без кручения ранга 2 своей группой автоморфизмов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 3 (1). С. 174–177.
2. Vildanov V.K. Determinability of a completely decomposable block-rigid torsion-free Abelian group by its automorphism group // J. Math. Sci. (New York). 2014. V. 197, № 5. P. 590–594. doi: 10.1007/s10958-014-1739-9
3. Vildanov V.K. On determinability of a completely decomposable torsion-free Abelian group by its automorphism group // J. Math. Sci. (New York). 2018. V. 230, № 3. P. 372–376. doi: 10.1007/s10958-018-3742-z
4. Вильданов В.К. Определяемость абелевой группы ее группой автоморфизмов и центром кольца эндоморфизмов : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Н. Новгород, 2014.
5. Тимошенко Е.А., Третьяков И.В. Определяемость вполне разложимой группы ранга 3 ее группой автоморфизмов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 76. С. 32–42. doi: 10.17223/19988621/76/3
6. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М. : Мир, 1977. Т. 2.
7. Третьяков И.В., Тимошенко Е.А. Инволюции в группе автоморфизмов вполне разложимой группы // Все грани математики и механики : всерос. молодежная науч. конф. студентов : сб. ст. Томск : Изд-во НТЛ, 2021. С. 139–154.
8. Henriksen M. Two classes of rings generated by their units // J. Algebra. 1974. V. 31, № 1. P. 182–193. doi: 10.1016/0021-8693(74)90013-1

#### References

1. Vildanov V.K. (2011) Opredelyaemost' vpolne razlozhimoy abelevoy gruppy bez krucheniya ranga 2 svoey gruppy avtomorfizmov [Determinability of completely decomposable torsion-free Abelian group of rank 2 by its automorphism group]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo – Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod*. 3(1). pp. 174–177.
2. Vildanov V.K. (2014) Determinability of a completely decomposable block-rigid torsion-free Abelian group by its automorphism group. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*. 197(5). pp. 590–594. DOI: 10.1007/s10958-014-1739-9.
3. Vildanov V.K. (2018) On determinability of a completely decomposable torsion-free Abelian group by its automorphism group. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*. 230(3). pp. 372–376. DOI: 10.1007/s10958-018-3742-z.

4. Vildanov V.K. (2014) *Opredelyaemost' abelevoy gruppy ee gruppy avtomorfizmov i tsentrom kol'tsa endomorfizmov* [Determinability of an Abelian group by its automorphism group and the center of its endomorphism ring]. Dissertation. Tomsk State University.
5. Timoshenko E.A., Tretyakov I.V. (2022) *Opredelyaemost' vpolne razlozhimoy gruppy ranga 3 ee gruppy avtomorfizmov* [Determinability of a completely decomposable rank 3 group by its automorphism group]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 32–42. DOI: 10.17223/19988621/76/3.
6. Fuchs L. (1973) *Infinite Abelian groups*. Vol. 2. New York; London: Academic Press.
7. Tretyakov I.V., Timoshenko E.A. (2021) *Involutsii v gruppe avtomorfizmov vpolne razlozhimoy gruppy* [Involutions in the automorphism group of a completely decomposable group]. *All-Russia Youth Scientific Student Conference "Vse grani matematiki i mekhaniki" (sbornik statey)*. Tomsk: NTL. pp. 139–154.
8. Henriksen M. (1974) Two classes of rings generated by their units. *Journal of Algebra*. 31(1). pp. 182–193. DOI: 10.1016/0021-8693(74)90013-1.

**Сведения об авторах:**

**Тимошенко Егор Александрович** – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, профессор кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: tea471@mail.tsu.ru

**Третьяков Иван Владиславович** – аспирант механико-математического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: ivantretyakov00@gmail.com

**Information about the authors:**

**Timoshenko Egor A.** (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tea471@mail.tsu.ru

**Tretyakov Ivan V.** (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ivantretyakov00@gmail.com

*Статья поступила в редакцию 02.09.2022; принята к публикации 04.12.2023*

*The article was submitted 02.09.2022; accepted for publication 04.12.2023*

Научная статья

УДК 519.6:532.516

MSC 93A30

doi: 10.17223/19988621/86/14

## Математическая модель транспорта растворенного кислорода при развитии термобара

Баир Олегович Цыденов

*Томский государственный университет, Томск, Россия, tsydenov@math.tsu.ru*

**Аннотация.** Приведено описание 2.5D негидростатической модели переноса кислорода в пресноводном озере. Транспорт растворенного кислорода в модели осуществляется через кислородный обмен с атмосферой и физический перенос за счет эффекта термобара. На границе раздела воздух–вода учитывается внутрисуточное изменение скорости ветра, влияющей на интенсивность перехода кислорода из газовой фазы в жидкую. Получены пространственно-временные распределения температуры и растворенного кислорода во время развития весеннего термобара на примере Баргузинского залива озера Байкал.

**Ключевые слова:** термобар, растворенный кислород, температура максимальной плотности, математическая модель, численный эксперимент, экосистема водоема, озеро Байкал

**Благодарности:** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10020, <https://www.rscf.ru/project/23-71-10020/>

**Для цитирования:** Цыденов Б.О. Математическая модель транспорта растворенного кислорода при развитии термобара // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 176–156. doi: 10.17223/19988621/86/14

Original article

## A mathematical model of dissolved oxygen transport during the thermal bar evolution

Bair O. Tsydenov

*Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, tsydenov@math.tsu.ru*

**Abstract.** The article describes a 2.5D non-hydrostatic model of dissolved oxygen transport in a freshwater lake. The oxygen dynamics are carried out through oxygen exchange with the atmosphere and physical transfer due to the effect of the thermal bar. An intraday change in wind speed (that influences the rate of oxygen transition from gas to liquid) is taken into account at the air–water interface. Space–time distributions of temperature and dissolved oxygen concentration were obtained during the spring thermal bar on an example of Barguzin Bay of Lake Baikal. The results of simulation showed

that the vertical flows generated by the spring thermal bar contributed to an increase in dissolved oxygen content in the thermoactive region of the bay. Due to the action of the thermal bar, areas with different levels of oxygen are formed in the body of water. There is not only a quantitative but also a qualitative difference between the oxygen distributions obtained for the thermoactive and the thermoinert regions. It has been also found that the wind speed and the wind duration affect the oxygen saturation of water at the thermal bar. The results of this study confirm the barrier function of the thermal bar.

**Keywords:** thermal bar, dissolved oxygen, temperature of maximum density, mathematical model, numerical experiment, lake ecosystem, Lake Baikal

**Acknowledgments:** This study was funded by the Russian Science Foundation (project No. 23-71-10020, <https://www.rscf.ru/en/project/23-71-10020/>).

**For citation:** Tsydenov, B.O. (2023) A mathematical model of dissolved oxygen transport during the thermal bar evolution. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 149–156. doi: 10.17223/19988621/86/14

## Введение

Прогрессирующая антропогенная нагрузка ведет к негативным изменениям экосистем крупнейших водоемов планеты. В частности, в озере Байкал в последние годы отмечалось массовое развитие чужеродных нитчатых водорослей, которое связано с городскими бытовыми и промышленными стоками с высоким содержанием биогенных элементов [1, 2]. К числу природных явлений, способствующих аккумулярованию планктона, частиц мусора и прочих загрязнителей в прибрежной части водоема, относится *термобар*, возникающий в периоды весеннего прогрева и осеннего охлаждения водоема в силу специфики пресной воды – аномальной зависимости плотности от температуры [3, 4]. Ограничивая горизонтальный водообмен, термобар делит озеро на две обособленные области – *теплоактивную* и *теплоинертную* в прибрежной и открытой частях соответственно [5], – отличающиеся друг от друга по физическим, химическим и биологическим характеристикам. При этом вертикальные потоки, формирующиеся на месте термобара, благоприятствуют переносу биогенных элементов в глубоководную зону.

Важнейшим индикатором качества воды и благополучия водоема служит уровень растворенного кислорода. Кислород участвует в жизненном цикле гидробионтов, процессах окисления органических примесей и самоочищения водных систем. Резкое снижение содержания кислорода в воде может привести к эвтрофированию водоема и гибели эндемичных аэробных организмов. В связи с этим проблема создания численной модели, учитывающей динамику растворенного кислорода во время существования термобара, является актуальной для современного этапа развития математических методов в задачах лимнологии.

Настоящая работа нацелена на разработку и описание численной модели транспорта растворенного кислорода в пресноводном озере с учетом кислородного обмена с атмосферой и физического переноса вследствие плотностной неустойчивости, а также на получение пространственно-временных распределений прогностических переменных модели при развитии весеннего термобара на примере Баргузинского залива озера Байкал.

### Математическая модель

Негидростатическая модель транспорта растворенного кислорода в пресноводном озере, учитывающая влияние силы Кориолиса, включает в себя следующие уравнения:

а) уравнение динамики растворенного кислорода

$$\frac{\partial O_2}{\partial t} + \frac{\partial u O_2}{\partial x} + \frac{\partial w O_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_x \frac{\partial O_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D_z \frac{\partial O_2}{\partial z} \right) + F_{air-lake} d^{-1}; \quad (1)$$

б) уравнения количества движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 2\Omega_z v - 2\Omega_y w; \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u v}{\partial x} + \frac{\partial v w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) + 2\Omega_x w - 2\Omega_z u; \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial u w}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{g p}{\rho_0} + 2\Omega_y u - 2\Omega_x v; \quad (4)$$

в) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (5)$$

г) уравнение энергии

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial u T}{\partial x} + \frac{\partial w T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho_0 c_p} \frac{\partial H_{sol}}{\partial z}; \quad (6)$$

д) уравнение баланса минерализации

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial u S}{\partial x} + \frac{\partial w S}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_x \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D_z \frac{\partial S}{\partial z} \right), \quad (7)$$

где  $O_2$  – концентрация растворенного кислорода;  $u$ ,  $v$  – горизонтальные компоненты скорости;  $w$  – вертикальная компонента скорости;  $D_x$  ( $K_x$ ) и  $D_z$  ( $K_z$ ) – коэффициенты турбулентной диффузии (вязкости) в соответствующих направлениях;  $\Omega_x$ ,  $\Omega_y$  и  $\Omega_z$  – компоненты вектора угловой скорости вращения Земли;  $g$  – ускорение свободного падения;  $d$  – глубина;  $c_p$  – удельная теплоемкость;  $T$  – температура;  $S$  – минерализация;  $p$  – давление;  $\rho_0$  – плотность воды при стандартном атмосферном давлении, характерной температуре и минерализации.

Кислородообмен между атмосферой и озером описывается законом

$$F_{air-lake} = v k_{O_2} (O_2^* - O_2). \quad (8)$$

Для вычисления концентрации насыщения воды кислородом  $O_2^*$  используется аппроксимация эмпирических табличных данных [6] в диапазоне температур 0–20°C:

$$O_2^* = 456.96 - 12.86 \cdot T_C + 0.2771 \cdot T_C^2 - 0.0033 \cdot T_C^3, \quad (9)$$

где  $T_C$  – температура воды в °C.

Интенсивность перехода кислорода из газовой фазы в жидкую рассчитывается как [7]

$$v k_{O_2} = 0.31 U_{10}^2 \sqrt{\frac{Sc_{CO_2}}{Sc_{O_2}}}, \quad (8)$$

где  $U_{10} = \sqrt{u_{10}^2 + v_{10}^2}$  – скорость ветра,  $Sc_{CO_2}$  и  $Sc_{O_2}$  – число Шмидта для  $CO_2$  и  $O_2$  соответственно. Для пресной воды

$$Sc_{O_2} = 1800.6 - 120.1 \cdot T_C + 3.7818 \cdot T_C^2 - 0.047608 \cdot T_C^3; \quad (9)$$

$$Sc_{CO_2} = 1911.1 - 118.11 \cdot T_C + 3.4527 \cdot T_C^2 - 0.04132 \cdot T_C^3. \quad (10)$$

Поглощение солнечной радиации рассчитывается по закону Бугера–Ламберта–Бэра:

$$H_{sol} = H_{Sol,0} (1 - r_s) \exp(-\varepsilon_{abs} d), \quad (11)$$

где  $r_s \approx 0.2$  – коэффициент отражения воды,  $\varepsilon_{abs} \approx 0.3 \text{ м}^{-1}$  – коэффициент поглощения.

Приток солнечной радиации на поверхность озера определяется соотношением

$$H_{Sol,0} = \begin{cases} S_0 \cdot (a_g - a_w) \cdot \cos \zeta [a(C) + b(C) \ln(\cos \zeta)], & \text{если } \cos \zeta > 0; \\ 0, & \text{если } \cos \zeta \leq 0, \end{cases} \quad (12)$$

здесь  $S_0 \approx 1367 \text{ Вт/м}^2$  – солнечная постоянная,  $a(C), b(C)$  – эмпирические коэффициенты [8], зависящие от степени покрытия небесного свода облачностью  $S$ ,  $\zeta$  – зенитный угол Солнца, эмпирические функции  $a_g$  и  $a_w$  представляют соответственно молекулярное рассеяние и поглощение излучения парами воды и оксидами углерода [9].

Для расчета плотности в гравитационном члене уравнения (4) используется уравнение состояния Чена–Миллера [10], связывающее плотность воды с температурой, минерализацией и давлением. Оно справедливо в диапазоне  $0 \leq T \leq 30^\circ\text{C}$ ,  $0 \leq S \leq 0.6 \text{ г/кг}$ ,  $0 \leq p \leq 180 \text{ бар}$ .

Замыкание системы уравнений (1)–(12) осуществляется с помощью алгебраических соотношений для определения турбулентной диффузии [11] и двухпараметрической  $k$ – $\omega$ –модели турбулентности Уилкокса [12].

### **Начальные и граничные условия**

Начальные условия для уравнений (1)–(12) задаются в виде:

$$u = 0; v = 0; w = 0; O_2 = [O_2]_L; T = T_L; S = S_L \text{ при } t = 0,$$

где  $[O_2]_L$ ,  $T_L$  и  $S_L$  – концентрация растворенного кислорода, температура и минерализация в озере соответственно;  $t$  – время. Начальное поле давления определяется из решения уравнений состояния и гидростатики с граничным условием на поверхности  $p = p_a$  методом Рунге–Кутты 4-го порядка точности.

Граничные условия имеют вид:

а) на поверхности озера

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau_{surf}^u}{\rho_0}; K_z \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\tau_{surf}^v}{\rho_0}; w = 0; D_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{H_{net}}{\rho_0 \cdot c_p}; \frac{\partial S}{\partial z} = 0,$$

где  $H_{net}$  – тепловой поток, состоящий из потоков длинноволновой радиации, явного и скрытого тепла [13]. Сдвиговое напряжение ветра на поверхности озера описывается законом

$$\tau_{surf}^u = c_{10} \rho_a \sqrt{v_{10}^2 + u_{10}^2} \cdot u_{10};$$

$$\tau_{surf}^v = c_{10} \rho_a \sqrt{v_{10}^2 + u_{10}^2} \cdot v_{10},$$

где  $\rho_a$  – плотность воздуха у поверхности воды;  $u_{10}, v_{10}$  – составляющие скорости ветра на высоте 10 м;  $c_{10} = 1.3 \times 10^{-3}$ .

б) на твердых границах

$$u = 0; v = 0; w = 0; \frac{\partial O_2}{\partial n} = 0; \frac{\partial T}{\partial n} = 0; \frac{\partial S}{\partial n} = 0,$$

где  $n$  – направление внешней нормали к области;

в) на границе входа реки

$$u = u_R; v = 0; w = 0; O_2 = [O_2]_R; T = T_R; S = S_R,$$

где  $u_R$  – скорость притока в устье реки;  $[O_2]_R, T_R$  и  $S_R$  – концентрация растворенного кислорода, температура и минерализация воды в реке соответственно.

г) на открытой границе задаются условия радиационного типа [14]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (\varphi = u, v, O_2, T, S)$$

и простые градиентные условия

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

### Численный метод решения уравнений модели

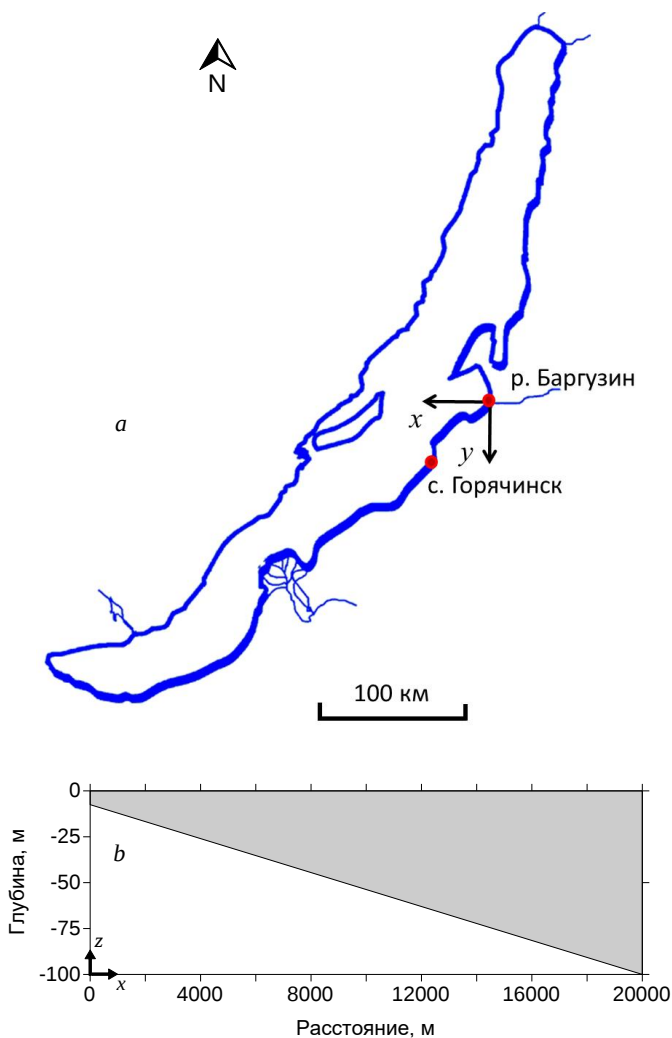
Решение задачи опирается на метод конечного объема, согласно которому скалярные величины (концентрация растворенного кислорода, температура, минерализация, турбулентные характеристики) определяются в центре сеточной ячейки, а компоненты вектора скорости – в средних точках на гранях ячеек. Для приближения расчетной области к озерной котловине используется метод блокировки фиктивных областей [15]: за счет больших значений коэффициентов вязкости в выключенной зоне сводятся к нулю значения компонентов скорости.

В основе численного алгоритма нахождения распределения растворенного кислорода, температуры, поля течения лежит разностная схема Кранка–Николсон. Аппроксимация конвективных слагаемых в уравнениях производится по противопотоковой схеме QUICK [16]. Для согласования полей скорости и давления используется оригинальный метод SIMPLED [17] для течений с плавучестью, который является модификацией известного алгоритма SIMPLE Патанкара [15]. Процедура SIMPLED корректирует поля скорости и давления с учетом вариации плотности в гравитационном члене уравнения (4). Системы разностных уравнений решаются методом Н.И. Булеева [18] на каждом шаге по времени.

### Область исследования и параметры задачи

В качестве области исследования выбрано вертикальное сечение Баргузинского залива озера Байкал, начало системы координат совпадает с устьем р. Баргузин (рис. 1, а). Вычислительная область имеет длину 20 км и глубину 100 м

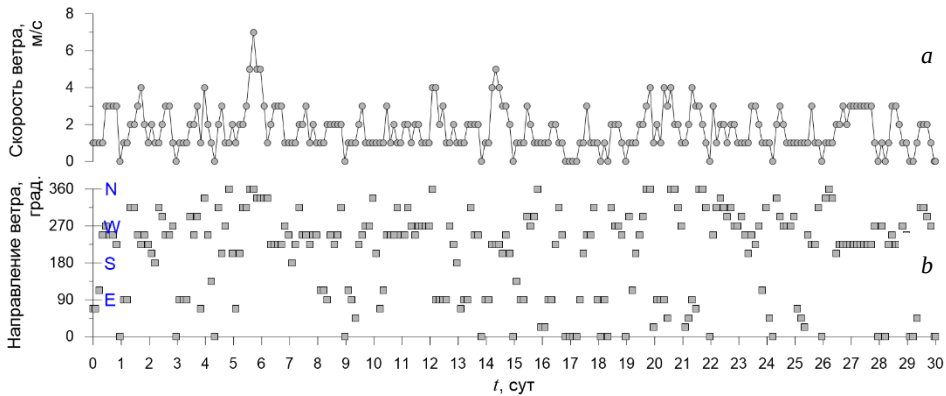
(рис. 1, *b*). Расчетная область покрыта равномерной ортогональной сеткой с шагами  $h_x = 25$  м и  $h_z = 2.5$  м. Шаг по времени – 10 с.



**Рис. 1.** Схема разреза (*a*) и вычислительная область (*b*)  
**Fig. 1.** Lake Baikal cross-section (*a*) and calculation domain (*b*)

Начальное распределение температуры воды в озере принято равным  $3^{\circ}\text{C}$ , что приблизительно соответствует осредненным данным вертикального распределения температуры верхнего 100-метрового слоя в средней котловине озера Байкал в июне месяце [19]. Начальная концентрация растворенного кислорода в озере соответствует  $312$  ммоль  $\text{O}_2/\text{м}^3$ . Температура воды в устье р. Баргузин монотонно растет с  $12$  до  $18^{\circ}\text{C}$ . Минерализация воды в озере составляет  $96$  мг/л [19], в реке –  $149$  мг/л [20]. Скорость течения р. Баргузин при впадении в залив –  $0.5$  см/с. Коэффициенты горизонтальной диффузии и вязкости заданы в виде константы:

$D_x = K_x = 2.5 \text{ м}^2/\text{с}$  [21]. Сдвиговое напряжение ветра и компоненты тепловых потоков, контактирующих с водной поверхностью, вычислены согласно данным из архива погодных условий метеостанции п. Усть-Баргузин за июнь 2023 г. [22]. Характеристики ветра представлены на рис. 2.



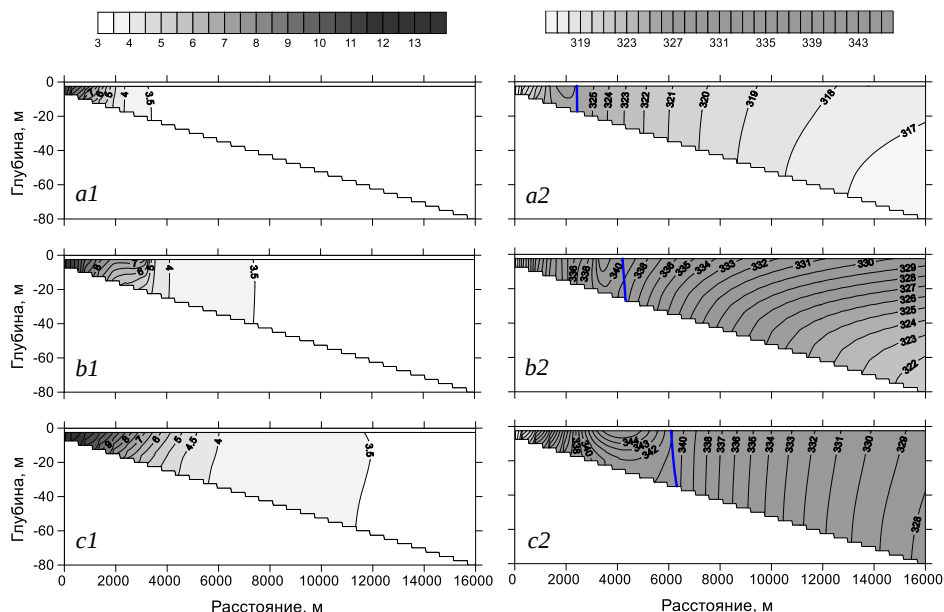
**Рис. 2.** Скорость (а) и направление (b) ветра в июне 2023 г.  
**Fig. 2.** Wind speed (a) and wind direction (b) in June 2023

### Результаты моделирования

Пространственно-временные распределения температуры, полученные на основе численного моделирования, указывают, что на 3-и сут термобар располагался на расстоянии 2.4 км от устья р. Баргузин (рис. 3, аI). Еще через 3 сут он продвинулся на 1.8 км дальше (рис. 3, бI). На 9-е сут фронт термобара распространился на 6 км от берега (рис. 3, вI). Приведенные на рис. 3 изотермы, представляющие собой наклонные профили, направленные от подводного склона (на дне) в сторону открытого озера (на поверхности), имеют классическую структуру [3, 5]. Важно заметить, что кратковременное усиление ветра северного направления до 7 м/с на 6-е сут отразилось на распределении температуры в теплоактивной области водоема (см. рис. 3, бI).

Активное поступление кислорода в водную толщу происходит за счет плотностной неустойчивости, генерируемой термобаром. Максимальная концентрация растворенного кислорода локализована не на самом термобаре, а смещена в сторону теплоактивной области, где термобар запускал процессы перемешивания ранее. Стоит отметить, что ветровая активность на 6-е сут не только оказала влияние на поле температуры в теплоактивной области (см. рис. 3, бI), но и способствовала горизонтальному распределению кислорода в теплоинертной области (см. рис. 3, вI). С развитием гидродинамических процессов расстояние между местоположением термического фронта и кислородным максимумом увеличивается. Наибольшее значение концентрации кислорода сосредоточено в приповерхностном слое на 3-и сут на расстоянии 2 км ( $327 \text{ ммоль O}_2/\text{м}^3$ ), на 6-е сут – 3.5 км ( $342 \text{ ммоль O}_2/\text{м}^3$ ) и на 9-е сут – 4.2 км ( $346 \text{ ммоль O}_2/\text{м}^3$ ) от устья р. Баргузин (см. рис. 3, справа).

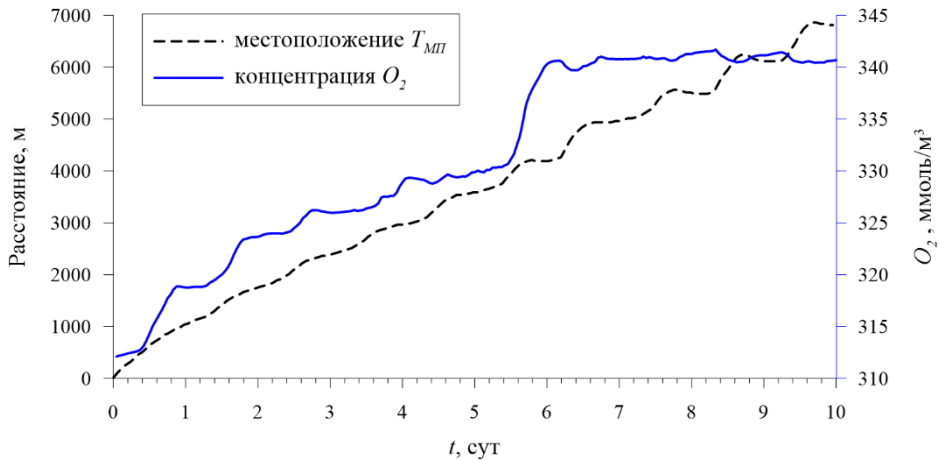
Представленный на рис. 4 график зависимости позиции температуры максимальной плотности на поверхности озера от времени (пунктирная линия) демонстрирует общую динамику развития термобара. Вследствие доминирующего влияния речного стока на гидрофизические процессы в приустьевой области поведение термобара менее чувствительно к атмосферным факторам. Однако по мере удаления термического фронта от устья реки эффект тепловых потоков и ветрового трения, воздействующих на водное зеркало, усиливается: в дневное время прогрев поверхностных вод ускоряет горизонтальное распространение термобара, и наоборот, в ночное время охлаждение водоема его замедляет. После 8-х сут из-за влияния ветра противоположного направления и дефицита тепловой энергии ночью наблюдается перемещение термобара в обратном направлении (в сторону берега).



**Рис. 3.** Распределение температуры [ $^{\circ}\text{C}$ ] (1) и растворенного кислорода [ $\text{ммоль O}_2/\text{м}^3$ ] (2) на 3-и (a), 6-е (b) и 9-е (c) сутки моделирования (жирной линией показан профиль температуры максимальной плотности)

**Fig. 3.** Temperature [ $^{\circ}\text{C}$ ] (1) and dissolved oxygen [ $\text{ммоль O}_2/\text{м}^3$ ] (2) distribution on day (a) 3, (b) 6, and (c) 9. The thick line is the maximum density temperature profile

Рассчитанные значения концентрации растворенного кислорода в области расположения температуры максимальной плотности (рис. 4, сплошная линия) показывают, что интенсивное обогащение воды кислородом происходит за счет силы и продолжительности ветра (рис. 2). На 1-е сут достаточно длительная активность ветров юго-западных направлений (3 м/с) привела к повышению количества кислорода на месте термобара на 6 ммоль  $\text{O}_2/\text{м}^3$ , а на 6-е сут в результате форсинга северного ветра со скоростью 7 м/с (что является максимумом в июне 2023 г.) уровень кислорода увеличился с 330.5 до 340.5 ммоль  $\text{O}_2/\text{м}^3$ .



**Рис. 4.** Динамика горизонтального перемещения области расположения температуры максимальной плотности ( $T_{МП}$ ) на поверхности озера (пунктирная линия) и концентрация растворенного кислорода ( $O_2$ ) в этой области (сплошная линия)

**Fig. 4.** Dynamics of the horizontal motion of the maximum density temperature position (dashed line) and the dissolved oxygen ( $O_2$ ) concentration at this position (solid line) on the lake surface

Дальнейшая тенденция роста содержания кислорода в рассматриваемой области прекратилась, его концентрация на 6–10-е сут варьировала в диапазоне 339.7–341.9 ммоль  $O_2/m^3$ .

### Заключение

Предложенная математическая модель позволяет воспроизводить процессы транспорта растворенного кислорода в пресноводном озере во время развития термобара. Результаты моделирования показали, что генерируемые весенним термобаром вертикальные потоки способствуют увеличению концентрации растворенного кислорода в теплоактивной области Баргузинского залива озера Байкал. Вследствие деятельности термобара в водоеме формируются участки с разным уровнем кислорода. Между полученными для теплоактивной и теплоинертной областей распределениями прогностических переменных модели наблюдается не только количественное, но и качественное различие. Также установлено, что скорость и длительность ветра оказывают влияние на динамику насыщения воды кислородом на термическом фронте. Результаты исследования подтверждают барьерную функцию термобара.

### Список источников

1. Volkova E.A., Bondarenko N.A., Timoshkin O.A. Morphotaxonomy, distribution and abundance of Spirogyra (Zygnematophyceae, Charophyta) in Lake Baikal, East Siberia // Phycologia. 2018. V. 57, № 3. P. 298–308. doi: 10.2216/17-69.1
2. Timoshkin O.A., Bondarenko N.A., Kulikova N.N., Lukhnev A.G., Maximova N.V., Malnik V.V., Moore M.V., Nepokrytykh A.V., Obolkina L.A., Rozhkova N.A., Shirokaya A.A., Tomberg I.V., Zaitseva E.P., Bukshuk N.A., Poberezhnaya A.E., Gula M.I., Timoshkina E.M., Volkova E.A.,

- Zvereva Yu.M. Protection of Lake Baikal requires more stringent, not more lenient, environmental regulation // *J. Great Lakes Res.* 2019. V. 45, № 3. P. 401–402. DOI: 10.1016/j.jglr.2019.04.002
3. Forel F.A. La congélation des lacs Suisses et savoyards pendant l'hiver 1879–1880. Lac Léman // *L'Écho des Alpes*. 1880. № 3. P. 149–161.
4. Блохина Н.С., Показеев К.В. Уникальное природное явление - термобар // *Земля и Вселенная*. 2015. № 6. С. 78–88.
5. Тихомиров А.И. Термика крупных озер. Л. : Наука, 1982. 232 с.
6. The Engineering ToolBox. Oxygen – solubility in fresh and sea water vs. temperature. URL: [https://www.engineeringtoolbox.com/oxygen-solubility-water-d\\_841.html](https://www.engineeringtoolbox.com/oxygen-solubility-water-d_841.html) (accessed: 14.08.2023).
7. Wanninkhof R. Relationship between wind speed and gas exchange // *J. Geophys. Res.* 1992. № 97. P. 7373–7382. doi: 10.1029/92JC00188
8. Aleksandrova M.P., Gulev S.K., Sinit syn A.V. An improvement of parametrization of short-wave radiation at the sea surface on the basis of direct measurements in the Atlantic // *Russian Meteorology and Hydrology*. 2007. V. 32, № 4. P. 245–251. doi: 10.3103/S1068373907040048
9. Hurley P. The air pollution model (TAPM) Version 2. Part 1: Technical description. CSIRO Atmospheric Research, 2002.
10. Chen C.T., Millero F.G. Precise thermodynamic properties for natural waters covering only limnologies range // *Limnol. Oceanogr.* 1986. V. 31, № 3. P. 657–662.
11. Цыденов Б.О., Старченко А.В. Применение двухпараметрической  $k-\omega$  модели турбулентности для исследования явления термобара // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2014. № 5 (31). С. 104–113.
12. Wilcox D.C. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models // *AIAA J.* 1988. V. 26, № 11. P. 1299–1310. doi: 10.2514/3.10041
13. Tsydenov B.O. A numerical study of the thermal bar in shallow water during the autumn cooling // *J. Great Lakes Res.* 2019. V. 45, № 4. P. 715–725. doi: 10.1016/j.jglr.2019.05.012
14. Orlanski I. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows // *J. Comput. Phys.* 1976. V. 21, № 3. P. 251–269. doi: 10.1016/0021-9991(76)90023-1
15. Patankar S. Numerical heat transfer and fluid flow. CRC Press, 1980. 197 p.
16. Leonard B. A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1979. V. 19, № 1. P. 59–98. doi: 10.1016/0045-7825(79)90034-3
17. Tsydenov B.O., Kay A., Starchenko A.V. Numerical modeling of the spring thermal bar and pollutant transport in a large lake // *Ocean Modelling*. 2016. V. 104. P. 73–83. doi: 10.1016/j.ocemod.2016.05.009
18. Ильин В.П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. М. : Физматлит, 1995. 288 с.
19. Shimaraev M.N., Verbolov V.I., Granin N.G., Sherstyankin P.P. Physical Limnology of Lake Baikal: A Review. Irkutsk–Okayama, 1994. 81 p.
20. Вотинцев К.К. Гидрохимия // *Проблемы Байкала* / ред. Г.И. Галазий, К.К. Вотинцев. Новосибирск, 1978. Т. 16, № 36. С. 124–146.
21. Holland P.R., Kay A., Botte V. Numerical modelling of the thermal bar and its ecological consequences in a river-dominated lake // *J. Mar. Syst.* 2003. V. 43, № 1-2. P. 61–81. doi: 10.1016/S0924-7963(03)00089-7
22. Расписание Погоды. URL: <https://gp5.ru/> (дата обращения: 14.08.2023).

## References

1. Volkova E.A., Bondarenko N.A., Timoshkin O.A. (2018) Morphotaxonomy, distribution and abundance of Spirogyra (Zygnematophyceae, Charophyta) in Lake Baikal, East Siberia. *Phycologia*. 57(3). pp. 298–308. DOI: 10.2216/17-69.1.

2. Timoshkin O.A., Bondarenko N.A., Kulikova N.N., Lukhnev A.G., Maximova N.V., Malnik V.V., Moore M.V., Nepokrytkh A.V., Obolkina L.A., Rozhkova N.A., Shirokaya A.A., Tomberg I.V., Zaitseva E.P., Bukshuk N.A., Poberezhnaya A.E., Gula M.I., Timoshkina E.M., Volkova E.A., Zvereva Yu.M. (2019) Protection of Lake Baikal requires more stringent, not more lenient, environmental regulation. *Journal of Great Lakes Research*. 45(3). pp. 401–402. DOI: 10.1016/j.jglr.2019.04.002.
3. Forel F.A. (1880) La congélation des lacs Suisses et savoyards pendant l'hiver 1879–1880. Lac Léman. *L'Écho des Alpes*. 3. pp. 149–161.
4. Blokhina N.S., Pokazeev K.V. (2015) Unikal'noye prirodnoye yavleniye – termobar [A unique natural phenomenon, the thermal bar]. *Zemlya i Vseennaya*. 6. pp. 78–88.
5. Tikhomirov A. I. (1982) *Termika krupnykh ozer* [Thermal regime of large lakes]. Leningrad: Nauka.
6. The Engineering ToolBox. Oxygen – solubility in fresh and sea water vs. temperature [Electronic resource]. URL: [https://www.engineeringtoolbox.com/oxygen-solubility-water-d\\_841.html](https://www.engineeringtoolbox.com/oxygen-solubility-water-d_841.html) (accessed 14.08.2023).
7. Wanninkhof R. (1992) Relationship between wind speed and gas exchange. *Journal of Geophysical Research*. 97. pp. 7373–7382. DOI: 10.1029/92JC00188.
8. Aleksandrova M.P., Gulev S.K., Sinitsyn A.V. (2007) An improvement of parametrization of short-wave radiation at the sea surface on the basis of direct measurements in the Atlantic. *Russian Meteorology and Hydrology*. 32(4). pp. 245–251. DOI: 10.3103/S1068373907040048.
9. Hurley P. (2002) *The air pollution model (TAPM) Version 2. Part 1: technical description*. CSIRO Atmospheric Research.
10. Chen C.T., Millero F.G. (1986) Precise thermodynamic properties for natural waters covering only the limnological range. *Limnology and Oceanography*. 31(3). pp. 657–662.
11. Tsydenov B.O., Starchenko A.V. (2014) Primenenie dvukhparametricheskoy  $k-\omega$  modeli turbulentnosti dlya issledovaniya yavleniya termobara [Application of the two-parametric  $k-\omega$  turbulence model for studying the thermal bar phenomenon]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(31). pp. 104–113.
12. Wilcox D.C. (1988) Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*. 26(11). pp. 1299–1310. DOI: 10.2514/3.10041.
13. Tsydenov B.O. (2019) A numerical study of the thermal bar in shallow water during the autumn cooling. *Journal of Great Lakes Research*. 45(4). pp. 715–725. DOI: 10.1016/j.jglr.2019.05.012.
14. Orlanski I. (1976) A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *Journal of Computational Physics*. 21(3). pp. 251–269. DOI: 10.1016/0021-9991(76)90023-1.
15. Patankar S. (1980) *Numerical heat transfer and fluid flow*. CRC Press.
16. Leonard B. (1979) A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 19(1). pp. 59–98. DOI: 10.1016/0045-7825(79)90034-3.
17. Tsydenov B.O., Kay A., Starchenko A.V. (2016) Numerical modeling of the spring thermal bar and pollutant transport in a large lake. *Ocean Modelling*. 104. pp. 73–83. DOI: 10.1016/j.ocemod.2016.05.009.
18. Il'in V.P. (1995) Metody nepolnoy faktorizatsii dlya resheniya algebraicheskikh sistem [Methods of incomplete factorization for solving algebraic systems]. Moscow: Fizmatlit.
19. Shimaraev M.N., Verbolov V.I., Granin N.G., Sherstyankin P.P. (1994) Physical Limnology of Lake Baikal: A Review. Irkutsk–Okayama.
20. Votintsev K.K. (1978) Gidrokimiya [Hydrochemistry], in: Galazii, G.I., Votintsev, K.K. (Eds.), *Problemy Baikala* [The problems of Lake Baikal], Novosibirsk. pp. 124–146.

21. Holland P.R., Kay A., Botte V. (2003) Numerical modelling of the thermal bar and its ecological consequences in a river-dominated lake. *Journal of Marine Systems*. 43(1–2). pp. 61–81. DOI: 10.1016/S0924-7963(03)00089-7.
22. Raspisaniye Pogody [Electronic resource]. URL: <https://rp5.ru/> (accessed 14.08.2023).

***Сведения об авторе:***

**Цыденов Баир Олегович** – кандидат физико-математических наук, заведующий научно-исследовательской лабораторией вычислительной геофизики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: [tsydenov@math.tsu.ru](mailto:tsydenov@math.tsu.ru)

***Information about the author:***

**Tsydenov Bair O.** (Candidate of Physics and Mathematics, Head of Laboratory, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation) E-mail: [tsydenov@math.tsu.ru](mailto:tsydenov@math.tsu.ru)

*Статья поступила в редакцию 19.09.2022; принята к публикации 04.12.2023*

*The article was submitted 19.09.2022; accepted for publication 04.12.2023*

*Научный журнал*

**ВЕСТНИК  
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.  
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

**2023. № 86**

Редактор Е.Г. Шумская  
Оригинал-макет Е.Г. Шумской  
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано в печать 21.12.2023 г. Формат 70×100<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Печ. л. 11,8; усл. печ. л. 15,3. Цена свободная.  
Тираж 250 экз. Заказ № 5720.

Дата выхода в свет 28.12.2023 г.

**Адрес издателя и редакции:** 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36  
Томский государственный университет

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании  
Издательства Томского государственного университета  
634050, г. Томск, Ленина, 36  
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75  
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: [rio.tsu@mail.ru](mailto:rio.tsu@mail.ru)