ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2023 Математика и механика № 82
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 514.76 MSC: 53D10; 53C50
doi: 10.17223/19988621/82/2

Левоинвариантная парасасакиева структура на групповой модели вещественного расширения плоскости де-Ситтера

Владимир Иванович Паньженский[1], Юлия Вячеславовна Дыранова[2]

[1, 2] Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
[1] kaf-geom@yandex.ru
[2] udom26@bk.ru

Аннотация. Установлено, что на групповой модели вещественного расширения плоскости де-Ситтера существует левоинвариантная параконтактная метрическая структура, которая является нормальной и, следовательно, парасасакиевой. Данная структура допускает группу Ли автоморфизмов максимальной размерности. Найдены базисные векторные поля ее алгебры Ли. Доказано, что связность Леви-Чивиты и контактная метрическая связность с кососимметрическим кручением согласованы с контактным распределением.
Ключевые слова: параконтактная структура, автоморфизм, контактная метрическая связность, контактные геодезические, усеченная связность

Для цитирования: Паньженский В.И., Дыранова Ю.В. Левоинвариантная парасасакиева структура на групповой модели вещественного расширения плоскости де-Ситтера // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 82. С. 14–27. doi: 10.17223/19988621/82/2

Original article

Left-invariant para-Sasakian structure on the group model of the real extension of the de Sitter plane

Vladimir I. Pan'zhenskii[1], Yulia V. Dyranova[2]

[1, 2] Penza State University, Penza, Russian Federation
[1] kaf-geom@yandex.ru
[2] udom26@bk.ru

Abstract. In this paper, a group model for a real extension of the de Sitter plane is proposed. This group contains a group of special matrices, which is a subgroup of the general linear group. It is established that there exists a left-invariant contact metric structure on this group, which is normal and, therefore, para-Sasakian. The basis vector fields of the Lie algebra of infinitesimal automorphisms are found. The Lie group of automorphisms has the maximum dimension and, in addition to the Levi-Civita connection, it also retains a contact metric connection with skew-symmetric torsion. In this connection, all structural tensors of the para-Sasakian structure, as well as the torsion and curvature tensors, are covariantly constant. Using a nonholonomic field of orthonormal frames adapted to the contact distribution, an orthogonal projection of the Levi-Civita connection onto the contact distribution is found, which is a truncated connection. Passing to natural coordinates, differential equations of geodesics of the truncated connection and Levi-Civita connection are found. Thus, the Levi-Civita contact geodesic connections coincide with the truncated connection geodesics. This means that through each point in each contact direction there is a unique Levi-Civita geodesic connection tangent to the contact distribution. The Levi-Civita connection, like the contact metric connection, is consistent with the contact distribution.

Keywords: paracontact structure, automorphism, contact metric connection, contact geodesics, truncated connection

For citation: Pan'zhenskii, V.I., Dyranova, Y.V. (2023) Left-invariant para-Sasakian structure on the group model of the real extension of the de Sitter plane. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 82. pp. 14–27. doi: 10.17223/19988621/82/2

Введение

В настоящее время не ослабевает интерес к исследованию контактных, почти контактных, параконтактных метрических структур, заданных на нечетномерных многообразиях [1–14]. Если многообразие является группой Ли, то естественно рассматривать левоинвариантные структуры. Имеется немного примеров групп Ли, допускающих параконтакные метрические структуры, для которых вычислены все определяющие их тензоры.

В данной работе в качестве такого примера предлагается групповая модель G вещественного расширения плоскости де-Ситтера $DS^2 \times \mathbf{R}$. Группа G является матричной группой Ли относительно операции умножения матриц и подгруппой полной линейной группы $GL(3, \mathbf{R})$. Доказано, что на группе G не существует левоинвариантных параконтактных метрических структур (η, ξ, φ, g) с метрикой прямого произведения, но существует левоинвариантная параконтактная метрическая структура с псевдоримановой метрикой, отличной от метрики прямого произведения.

Требования, которым должна удовлетворять такая структура, не определяют ее однозначно. Поэтому, чтобы выделить единственную «каноническую» структуру, необходимо выбрать подходящее (чаще всего наиболее простое) решение уравнений, которые должны выполняться для контактной формы η и структурного эндоморфизма φ. В этом случае псевдориманова метрика g определяется однозначно. В данной работе частное решение соответствующих уравнений выбрано так, что ограничение метрики g на контактное распределение $H = \ker \eta$ является метрикой де-Ситтера, а сама структура нормальной и, следовательно, парасасакиевой. Установлено, что группа Ли автоморфизмов парасасакиевой структуры имеет максимальную размерность. Найдены базисные векторные поля ее алгебры Ли.

Линейная связность ∇ называется согласованной с распределением H, если через каждую точку p в каждом касательном направлении $v_p \in H_p$ проходит единственная геодезическая, касающаяся распределения H (контактная геодезическая) [8, 9]. Если ∇ – связность Леви-Чивиты (псевдо)римановой метрики g, то ортогональная проекция $\bar{\nabla}$ на распределении H является линейной связностью на H и называется усеченной связностью [15, 16]. Доказано, что контактные геодезические связности Леви-Чивиты ∇ и контактной метрической связности $\tilde{\nabla}$ совпадают с геодезическими усеченной связности $\bar{\nabla}$ и, следовательно, эти связности согласованы с контактным распределением H.

1. Параконтактная метрическая структура

Параконтактной метрической структурой на $(2n + 1)$-мерном гладком многообразии M называется четверка тензорных полей (η, ξ, φ, g), где η – линейная дифференциальная форма, ξ – векторное поле, φ – эндоморфизм модуля векторных полей на M, g – псевдориманова метрика, удовлетворяющая следующим условиям

$$\varphi^2 = id - \eta \otimes \xi, \tag{1}$$

$$g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y), \tag{2}$$

$$d\eta(X, Y) = g(X, \varphi Y). \tag{3}$$

Из (3) следует, что

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0. \tag{4}$$

Условие (4) означает, что форма η является контактной, а ранг дифференциальной 2-формы $d\eta$ равен $2n$. В равенствах (1)–(4) используются следующие обозначения: $\otimes$ – тензорное произведение, $\wedge$ – внешнее произведение, d – внешний дифференциал, X и Y – произвольные векторные поля на M. Для параконтактной метрической структуры имеют место равенства [17, 18]

$$\eta(\xi) = 1, \quad d\eta(X, \xi) = 0, \quad \varphi(\xi) = 0, \quad \eta \circ \varphi = 0, \quad g(X, \xi) = \eta(X),$$

а из (2)–(3) следует, что

$$g(X, Y) = -d\eta(\varphi X, Y) + \eta(X) \cdot \eta(Y). \tag{5}$$

Отметим также, что $2n$-мерное контактное распределение $H = \ker \eta$ называют горизонтальным, 1-мерное распределение $V = \ker d\eta$ – вертикальным.

2. Параконтактная метрическая структура на вещественном расширении плоскости де-Ситтера

Рассмотрим множество G, элементами (точками) которого являются матрицы следующего вида:

$$G = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{z} \\ \mathbf{0} & \mathbf{y} & \mathbf{x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где x, y, z – действительные числа: $x, y, z \in \mathbf{R}$, $y > 0$.

Множество G является группой Ли относительно операции умножения матриц и подгруппой полной линейной группы $GL(3, \mathbf{R})$. Умножая (6) на произвольную матрицу из группы G, заключаем, что левые сдвиги на G определяются следующими формулами:

$$\bar{x} = bx + a, \quad \bar{y} = by, \quad \bar{z} = z + c. \tag{7}$$

Дифференцируя (7) по параметрам a, b, c, находим левоинвариантные векторные поля на G – базис алгебры Ли группы Ли G:

$$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = x\partial_1 + y\partial_2, \quad X_3 = \partial_3. \tag{8}$$

где $\partial_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \dfrac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_3 = \dfrac{\partial}{\partial z}$ – естественный базис гладких векторных полей на G. Структурные уравнения этой группы – скобки Ли (коммутаторы) базисных векторных полей – имеют вид:

$$\left[X_1, X_2\right] = X_1, \quad \left[X_1, X_3\right] = 0, \quad \left[X_2, X_3\right] = 0,$$

откуда следует, что G является разрешимой группой, но не является нильпотентной.

Нетрудно установить, что псевдориманова метрика

$$ds^2 = \frac{dx^2 - dy^2}{y^2} + dz^2 \tag{9}$$

левоинвариантна и является метрикой прямого произведения на вещественном расширении $DS^2 \times \mathbf{R}$ плоскости де-Ситтера DS^2. Действительно, в касательном пространстве единицы группы рассмотрим псевдоевклидову метрику

$$ds^2 = dx^2 - dy^2 + dz^2$$

и сдвинем ее в произвольную точку

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{z}} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{y}} & \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Из равенств (7) следует, что

$$x = \frac{\bar{x} - a}{b}, \quad y = \frac{\bar{y}}{b}, \quad z = \bar{z} - c,$$

$$dx = \frac{d\bar{x}}{b}, \quad dy = \frac{d\bar{y}}{b}, \quad dz = d\bar{z}, \quad d\bar{s}^2 = \frac{d\bar{x}^2 - d\bar{y}^2}{b^2} + d\bar{z}^2.$$

Так как для единицы группы $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$, то $b = \bar{y}$, что и доказывает наше утверждение.

Таким образом, группа G с левоинвариантной метрикой (9) является групповой моделью вещественного расширения плоскости де-Ситтера.

Рассмотрим вопрос существования левоинвариантных параконтактных метрических структур на группе G. Все левоинвариантные дифференциальные 1-формы можно найти, интегрируя уравнения инвариантности

$$X_\alpha^p \partial_p \eta_i + \partial_i X_\alpha^p \eta_p = 0$$

(производная Ли от формы η вдоль векторных полей X_α (8) должна обращаться в нуль $L_{X_\alpha}\eta = 0$). В результате получаем следующее семейство левоинвариантных 1-форм:

$$\eta = \frac{c_1}{y}dx + \frac{c_2}{y}dy + c_3 dz, \tag{10}$$

где c_1, c_2, c_3 – постоянные. Так как $d\eta = \frac{c_1}{y^2} dx \wedge dy$ и $\eta \wedge d\eta = \frac{c_1 c_3}{y^2} dx \wedge dy \wedge dz$, то при $c_1 c_3 \neq 0$ найденные формы являются контактными.

Оказывается, что не существует левоинвариантных параконтактных метрических структур с псевдоримановой метрикой прямого произведения (9). Действительно, условие (3) в координатах имеет следующий вид:

$$\left(d\eta\right)_{ij} = g_{ip}\varphi_j^p,$$

откуда следует, что

$$\varphi_j^i = g^{ip}\left(d\eta\right)_{pj}.$$

Так как для метрики (9)

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} y^2 & 0 & 0 \\ 0 & -y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а

$$\left(d\eta\right)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c_1}{y^2} & 0 \\ -\frac{c_1}{y^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$\varphi_j^i = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим требование (2). Для метрики (9) это требование в координатах имеет следующий вид:

$$\frac{1}{y^2}\varphi_i^1\varphi_j^1 - \frac{1}{y^2}\varphi_i^2\varphi_j^2 + \varphi_i^3\varphi_j^3 = -g_{ij} + \eta_i\eta_j.$$

Если теперь положить $i = 1,\ j = 3$, то получим, что $c_1 c_3 = 0$, т.е. $\eta \wedge d\eta = 0$, что и доказывает наше утверждение.

Рассмотрим теперь группу G, оставив пока в стороне тот факт, что она является моделью вещественного расширения плоскости де-Ситтера. Существуют ли на G левоинвариантные параконтактные метрические структуры? Для ответа на этот вопрос среди левоинвариантных форм (10) выделим форму

$$\eta = \frac{1}{y} dx + dz. \tag{11}$$

Эту форму можно получить, сдвинув форму Дарбу $ydx + dz$ из единицы группы в произвольную точку. Заметим, что векторные поля $e_1 = y\partial_1 - \partial_3$ и $e_2 = y\partial_2$ порождают контактное распределение H: $\eta(e_1) = \eta(e_2) = 0$, а $[e_1, e_2] = -\partial_1$ и $\eta(\partial_1) \neq 0$. Это означает, что векторные поля, принадлежащие H, не образуют подалгебру алгебры Ли векторных полей на G, т.е. распределение H является неголономным. Условия $\eta(\xi) = 1$ и $d\eta(X, \xi) = 0$ однозначно определяют характеристическое векторное поле

$$\xi = \partial_3. \tag{12}$$

Все левоинвариантные эндоморфизмы можно найти, интегрируя уравнения

$$X_\alpha^p \partial_p \varphi_j^i + \partial_j X_\alpha^p \varphi_p^i - \partial_p X_\alpha^i \varphi_j^p = 0.$$

Общее решение этой системы имеет вид:

$$\varphi_j^i = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^1 & \mathbf{c}_2^1 & \mathbf{c}_3^1 \\ \mathbf{c}_1^2 & \mathbf{c}_2^2 & \mathbf{c}_3^2 \\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{y}}\mathbf{c}_1^3 & \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{y}}\mathbf{c}_2^3 & \mathbf{c}_3^3 \end{pmatrix},$$

где c_j^i – произвольные постоянные. Из условия $\varphi(\xi) = 0$ следует, что $c_3^1 = c_3^2 = c_3^3 = 0$, а из $\eta \circ \varphi = 0$ получаем, что $c_1^3 = -c_1^1$, $c_2^3 = -c_2^1$. Требование (1) накладывает на постоянные c_j^i следующие условия:

$$c_1^{12} + c_2^1 c_1^2 = 1, \quad c_1^1 c_2^1 + c_2^1 c_2^2 = 0, \quad c_1^2 c_1^1 + c_2^2 c_1^2 = 0, \quad c_1^2 c_2^1 + c_2^{22} = 1.$$

Эти условия будут выполняться, если положить $c_1^1 = c_2^2 = 0$, $c_2^1 = c_1^2 = 1$. В этом случае эндоморфизм φ примет вид:

$$\varphi_j^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{y}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

и вместе с контактной формой η (11), характеристическим векторным полем ξ (12) и, как следует из равенства (5), псевдоримановой метрикой

$$ds^2 = \frac{dx^2 - dy^2}{y^2} + \left(\frac{1}{y}dx + dz\right)^2 \tag{14}$$

определяет на G левоинвариатную параконтактную метрическую структуру.

Заметим, что ограничение метрики (14) на контактное распределение

$$ds^2\big|_H = \frac{dx^2 - dy^2}{y^2}$$

является метрикой де-Ситтера и вместе с вполне неголономным контактным распределением $H = \ker\eta$ определяет на группе G псевдосубриманову структуру. Так как, очевидно, $L_\xi g = 0$, то параконтактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) является k-контактной. Более того, данная структура является нормальной и, следовательно, парасасакиевой, так как условие нормальности [5]

$$[\varphi,\varphi](X,Y)-d\eta(X,Y)\xi=0,$$

где $[\varphi,\varphi](X,Y)=\varphi^2[X,Y]+[\varphi X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y]-\varphi[X,\varphi Y]$ – кручение Нейенхейса, которое в координатах имеет вид:

$$\varphi_j^p\partial_p\varphi_k^i-\varphi_k^p\partial_p\varphi_j^i+\varphi_p^i\partial_j\varphi_k^p-\varphi_p^i\partial_k\varphi_j^p-d\eta_{jk}\xi^i=0,$$

выполняется тождественно. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 1. На групповой модели вещественного расширения плоскости де-Ситтера существует левоинвариантная парасасакиева структура (η, ξ, φ, g), структурные тензоры которой определяются формулами (11)–(14).

Векторное поле $X=X^p\partial_p$ называется инфинитезимальным автоморфизмом параконтактной структуры, если однопараметрическая локальная группа диффеоморфизмов $f_t=\exp tX$, порожденная полем X, является группой автоморфизмов. Это означает, что производная Ли вдоль X от η, ξ, φ, g обращается в нуль:

$$L_x\eta=0,\quad L_x\xi=0,\quad L_x\varphi=0,\quad L_xg=0.$$

В координатах мы имеем следующую систему дифференциальных уравнений

$$X^p\partial_p\eta_i+\partial_iX^p\eta_p=0,$$
$$X^p\partial_p\xi^i-\partial_pX^i\xi^p=0,$$
$$X^p\partial_p\varphi_j^i+\partial_jX^p\varphi_p^i-\partial_pX^i\varphi_j^p=0,$$
$$X^p\partial_p g_{ij}+\partial_iX^pg_{pj}+\partial_jX^pg_{ip}=0.$$

Интегрируя данную систему, находим ее общее решение

$$X^1=\frac{1}{2}b_4(x^2+y^2)+b_2x+b_1,\quad X^2=b_4xy+b_2y,\quad X^3=-b_4y+b_3.$$

Постоянным b_1, b_2, b_3, b_4 соответствуют следующие базисные векторные поля алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов:

$$X_1=\partial_1,\quad X_2=x\partial_1+y\partial_2,\quad X_3=\partial_3,\quad X_4=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\partial_1+xy\partial_2-y\partial_3. \tag{15}$$

Ненулевые скобки Ли указанных векторных полей имеют вид:

$$[X_1,X_2]=X_1,\quad [X_1,X_4]=X_2,\quad [X_2,X_4]=X_4,$$

откуда следует, что группа Ли автоморфизмов парасасакиевой структуры является неразрешимой. Заметим, что первые три векторных поля являются левоинвариантными и, следовательно, определяют подгруппу параллельных переносов, а векторное поле X_4 является оператором вращения, который порождает стационарную подгруппу группы автоморфизмов, и мы имеем следующее утверждение

Теорема 2. Группа Ли инфинитезимальных автоморфизмов парасасакиевой структуры (11)–(14) имеет максимальную размерность. Базисные векторные поля ее алгебры имеют вид (15).

3. Связности, согласованные с распределением

Пусть M – гладкое многообразие, H – распределение на M. Линейную связность ∇ назовем согласованной с распределением H, если через каждую точку $p\in M$ в каждом касательном направлении $v_p\in H_p$ проходит единственная геодезическая, касающаяся распределения H (контактная геодезическая) [8, 9].

Пусть g – (псевдо)риманова метрика на M, ∇ – связность Леви-Чивиты. Ортогональная проекция $\bar{\bar{\nabla}}$ связности ∇ на распределении H является линейной связностью на H и называется усеченной связностью.

На вещественном расширении плоскости де-Ситтера $H^2 \times \mathbf{R}$ с парасасакиевой структурой (η, ξ, φ, g) имеем две естественные линейные связности: связность Леви-Чивиты $\nabla(\Gamma^k_{ji})$ – метрическая связность без кручения, и контактная метрическая связность $\tilde{\nabla}(\tilde{\Gamma}^k_{ji})$ с кососимметрическим кручением. Эта связность определяется следующей формулой [7, 9]:

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + \frac{1}{2} d\eta(X, Y) \wedge \eta(Z).$$

Так же как и связность Леви-Чивиты ∇, контактная метрическая связность $\tilde{\nabla}$ инвариантна относительно группы автоморфизмов парасасакиевой структуры. Для контактной формы (11) форма кручения $S = d\eta \wedge \eta$ имеет вид:

$$S = \frac{1}{y^2} dx \wedge dy \wedge dz.$$

Коэффициенты связности Леви-Чивиты псевдоримановой метрики (14) образуют следующие матрицы:

$$\Gamma^1_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2y}} & \mathbf{0} \\ -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2y}} & \mathbf{0} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \\ \mathbf{0} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \Gamma^2_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{y}} & \mathbf{0} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \\ \mathbf{0} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{y}} & \mathbf{0} \\ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \Gamma^3_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{y^2}} & \mathbf{0} \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{y^2}} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2y}} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2y}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Тензор кручения $\tilde{S}(\tilde{S}^k_{ij} = S_{ijp} g^{pk})$ связности $\tilde{\nabla}$ имеет следующие компоненты:

$$\tilde{S}^1_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{y}} & \mathbf{0} \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{y}} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}^2_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}^3_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{y^2}} & \mathbf{0} \\ -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{y^2}} & \mathbf{0} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{y}} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{y}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Так как $\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \frac{1}{2}\tilde{S}^k_{ij}$, то

$$\tilde{\Gamma}^1_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{y}} & \mathbf{0} \\ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{y}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}^2_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{y}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{y}} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}^3_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{y^2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{y}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что в связности $\tilde{\nabla}$ все структурные тензоры парасасакиевой структуры, а также тензор кручения и тензор кривизны ковариантно постоянны.

Теорема 3. Связность Леви-Чивиты и контактная метрическая связность согласованы с контактным распределением.

Доказательство. Для доказательства данного утверждения достаточно убедиться, что контактные геодезические связностей ∇ и $\tilde{\nabla}$ (они имеют одни и те же геодезические) совпадают с геодезическими усеченной связности $\bar{\nabla}$.

Рассмотрим неголономное поле ортонормированных реперов $\{p, e_i\}$, адаптированных к структуре почти произведения $H \oplus V$:

$$e_1 = y\partial_1 - \partial_3, \quad e_2 = y\partial_2, \quad e_3 = \partial_3, \quad \left(e_i e_j = 0, \quad e_1^2 = 1, \quad e_2^2 = -1, \quad e_3^2 = 1, \quad i \neq j\right).$$

Первые два поля e_1 и e_2 лежат в контактном распределении H: $\eta(e_1) = \eta(e_2) = 0$, а $e_3 = \xi \in V$. Разложения коммутаторов векторных полей e_i

$$\left[e_i, e_j\right] = \Omega_{ij}^k e_k$$

являются структурными уравнениями поля реперов $\{p, e_i\}$, а коэффициенты Ω_{ij}^k определяют объект неголономности.

Для рассматриваемого поля реперов имеем следующие структурные уравнения:

$$[e_1, e_2] = -(e_1 + e_3), \quad [e_1, e_3] = 0, \quad [e_2, e_3] = 0,$$

поэтому $\Omega_{12}^1 = -\Omega_{21}^1 = -\Omega_{21}^3 = -1$.

Для связности Леви-Чивиты имеем следующую вычислительную формулу [19]:

$$g(\nabla_X Y, Z) =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg\left(X,Y\right) + g\left(Z,[X,Y]\right) + g\left(Y,[Z,X]\right) - g\left(X,[Y,Z]\right)\right\}.$$

Пусть Υ_{ij}^k – коэффициенты связности Леви-Чивиты в ортонормированном репере $\{p, e_i\}: \nabla_{e_i} e_j = \Upsilon_{ij}^k e_k$. Полагая $X = X^i e_i, \quad Y = Y^j e_j, \quad Z = Z^k e_k$, находим, что

$$\Upsilon_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(\Omega_{ij}^k + \delta^{ks}\Omega_{si}^e \delta_{je} + \delta^{ks}\Omega_{sj}^e \delta_{ie}\right),$$

где $\delta_{ij} = \delta^{ij} = 0, \quad i \neq j; \quad \delta_{11} = \delta^{11} = \delta_{33} = \delta^{33} = 1, \quad \delta_{22} = \delta^{22} = -1$, откуда

$$\Upsilon_{ij}^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{\frac{1}{2}} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{\frac{1}{2}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \Upsilon_{ij}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & -\mathbf{\frac{1}{2}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{\frac{1}{2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \Upsilon_{ij}^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{\frac{1}{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\frac{1}{2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Для усеченной связности $\bar{\nabla}: \bar{\nabla}_{e_i} e_j = \bar{\Upsilon}_{ij}^k e_k; \quad i, j, k = 1, 2,$ где $\bar{\Upsilon}_{ij}^k = \Upsilon_{ij}^k$, имеем

$$\bar{\Upsilon}_{ij}^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \bar{\Upsilon}_{ij}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Горизонтальная (контактная) кривая γ ($\dot{\gamma} \in H$)

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s),$$

(s – естественный параметр) называется геодезической усеченной связности $\bar{\nabla}$, если $\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0,$ где $\dot{\gamma}$ – поле касательных векторов кривой γ.

Найдем сначала уравнения параллельного векторного поля v вдоль кривой γ: $\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}} v = 0.$ Имеем следующие разложения векторных полей $\dot{\gamma}$ и v по естественному базису $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ и неголономному $\{e_1, e_2\}$:

$$\dot{\gamma} = \dot{x}\partial_1 + \dot{y}\partial_2 + \dot{z}\partial_3 = u^1 e_1 + u^2 e_2, \quad v = v^1\partial_1 + v^2\partial_2 + v^3\partial_3 = w^1 e_1 + w^2 e_2.$$

Так как $e_1 = y\partial_1 - \partial_3, \quad e_2 = y\partial_2,$ то $u^1 = \frac{1}{y}\dot{x}, \quad u^2 = \frac{1}{y}\dot{y}, \quad w^1 = \frac{1}{y}v^1, \quad w^2 = \frac{1}{y}v^2.$

Условия горизонтальности векторных полей $\dot{\gamma}$ и v имеют вид:

$$\dot{z} = -\frac{1}{y}\dot{x}, \quad v^3 = -\frac{1}{y}v^1.$$

Теперь распишем уравнения параллельного переноса, заменяя неголономные координаты естественными, учитывая, что

$$\bar{\nabla}_{e_1} e_1 = -e_2, \quad \bar{\nabla}_{e_1} e_2 = -e_1, \quad \bar{\nabla}_{e_2} e_1 = 0, \quad \bar{\nabla}_{e_2} e_2 = 0.$$

Имеем

$$\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}} v = \bar{\nabla}_{u^i e_j}\left(w^j e_j\right) = u^i e_j\left(w^j\right)e_j + u^i w^j + \bar{\nabla}_{e_i} e_j = u^1 e_1\left(w^1\right)e_1 + u^1 e_1\left(w^2\right)e_2 +$$

$$+ u^2 e_2\left(w^1\right)e_1 + u^2 e_2\left(w^2\right)e_2 + u^1 w^1\left(-e_2\right) + u^1 w^2\left(-e_1\right) =$$

$$= \frac{1}{y}\dot{x}\left[y\partial_1\left(\frac{1}{y}v^1\right) - \partial_3\left(\frac{1}{y}v^1\right)\right]\left(y\partial_1 - \partial_3\right) + \frac{1}{y}\dot{x}\left[y\partial_1\left(\frac{1}{y}v^2\right) - \partial_3\left(\frac{1}{y}v^2\right)\right]y\partial_2 +$$

$$+ \frac{1}{y}\dot{y}\left[y\partial_2\left(\frac{1}{y}v^1\right)\right]\left(y\partial_1 - \partial_3\right) + \frac{1}{y}\dot{y}\left[y\partial_2\left(\frac{1}{y}v^2\right)\right]y\partial_2 - \frac{1}{y}\dot{x}v^1\partial_2 - \frac{1}{y}\dot{x}\frac{1}{y}v^2\left(y\partial_2 - \partial_3\right) =$$

$$= \left\{\left(\dot{x}\partial_1 v^1 + \dot{y}\partial_2 v^1 + \dot{z}\partial_3 v^1\right) - \frac{1}{y}\left(\dot{y}v^1 + \dot{x}v^2\right)\right\}\partial_1 +$$

$$+ \left\{\left(\dot{x}\partial_1 v^2 + \dot{y}\partial_2 v^2 + \dot{z}\partial_3 v^2\right) - \frac{1}{y}\left(\dot{x}v^1 + \dot{y}v^2\right)\right\}\partial_2 +$$

$$+ \left\{-\frac{1}{y}\left(\dot{x}\partial_1 v^1 + \dot{y}\partial_2 v^1 + \dot{z}\partial_3 v^1\right) + \frac{1}{y^2}\left(\dot{y}v^1 + \dot{x}v^2\right)\right\}\partial_3 = 0.$$

Таким образом, получаем следующие уравнения параллельного переноса вектора v вдоль кривой γ:

$$\frac{dv^1}{ds} - \frac{1}{y}\left(\dot{y}v^1 + \dot{x}v^2\right) = 0, \quad \frac{dv^2}{ds^2} - \frac{1}{y}\left(\dot{x}v^1 + \dot{y}v^2\right) = 0, \quad v^3 + \frac{1}{y}v^1 = 0.$$

Полагая $v = \dot{\gamma}$, находим дифференциальные уравнения геодезических усеченной связности $\bar{\nabla}$:

$$\frac{d^2 x}{ds^2} - \frac{2}{y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} = 0, \quad \frac{d^2 y}{ds^2} - \frac{1}{y}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 0, \quad \frac{dz}{ds} + \frac{1}{y}\frac{dx}{ds} = 0.$$

Дифференцируя последнее уравнение – условие горизонтальности векторного поля $\dot{\gamma}$, находим

$$\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{ds}\frac{dx}{ds}+\frac{1}{y}\frac{d^2x}{ds^2}=0,$$

или, учитывая первое уравнение,

$$\frac{d^2z}{ds^2}+\frac{1}{y^2}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}=0$$

Таким образом, функции $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$, определяющие геодезические связности $\bar{\nabla}$, являются решением следующей системы:

$$\begin{gathered}\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{2}{y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}=0,\quad \frac{d^2y}{ds^2}-\frac{1}{y}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2-\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=0,\\ \frac{d^2z}{ds^2}+\frac{1}{y^2}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}=0,\quad \frac{dz}{ds}+\frac{1}{y}\frac{dx}{ds}=0.\end{gathered}\tag{16}$$

Связности Леви-Чивиты ∇ и контактная метрическая связность имеют одни и те же геодезические, а их дифференциальные уравнения имеют вид:

$$\begin{gathered}\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{3}{y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}-\frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds}=0,\quad \frac{d^2y}{ds^2}-\frac{2}{y}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2-\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-\frac{dx}{ds}\frac{dz}{ds}=0,\\ \frac{d^2z}{ds^2}+\frac{2}{y^2}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}+\frac{1}{y^2}\frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds}=0.\end{gathered}\tag{17}$$

Так как для контактных геодезических должно выполнятся условие

$$\frac{dz}{ds}+\frac{1}{y}\frac{dx}{ds}=0,$$

то, подставляя вместо $\frac{dz}{ds}$ в уравнения (17) $-\frac{1}{y}\frac{dx}{ds}$, получим уравнения (16). Это означает, что геодезические усеченной связности $\bar{\bar{\nabla}}$ совпадают с контактными геодезических связностей ∇ и $\tilde{\nabla}$, т.е. связность Леви-Чивиты и контактная метрическая связность согласованы с контактным распределением. ■

Список источников

1. *Галаев С.В.* Почти контактные метрические пространства с *N*-связностью // Известия Саратовского университета. Новая сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, № 3. С. 258–264. doi: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-258-264
2. *Галаев С.В.* ∇_N-Эйнштейновы почти контактные метрические многообразия // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. Т. 70. С. 5–15. doi: 10.17223/19988621/70/1
3. *Банару М.Б.* О почти контактных метрических 1-гиперповерхностях келеровых многообразий // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55, № 4. С. 719–723. doi: 10.1134/S0037446614040016
4. *Банару М.Б.* О почти контактных метрических гиперповерхностях с малыми типовыми числами в W_4-многообразиях // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика, механика. 2018. № 1. С. 67–70. doi: 10.3103/S0027132218010072

5. *Смоленцев Н.К.* Левоинвариантные пара-сасакиевы структуры на группах Ли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. Т. 62. С. 27–37. doi: 10.17223/19988621/62/3
6. *Смоленцев Н.К., Шагабудинова И.Ю.* О парасасакиевых структурах на пятимерных алгебрах Ли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. Т. 69. С. 37–52. doi: 10.17223/1988621/69/4
7. *Panzhensky V.I., Klimova T.R.* Contact metric connection on the Heisenberg group // Russian Mathematics. 2018. V. 62 (11). P. 45–52. doi: 10.3103/S1066369X18110051
8. *Паньженский В.И., Растрепина А.О.* Контактная и почти контактная структуры на вещественном расширении плоскости Лобачевского // Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки. 2021. Т. 163, № 3-4. С. 291–303. doi: 10.26907/2541-7746.2021.3-4.291-303.
9. *Паньженский В.И, Растрепина А.О.* Левоинвариантная парасасакиева структура на группе Гейзенберга // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. Т. 75. С. 38–51. doi: 10.17223/19988621/75/4
10. *Diatta A.* Left inuariant contact structures on Lie groups // Diff. Geom. and its Appl. 2008. V. 26 (5). P. 544–552. doi: 10.1016/j.difgeo.2008.04.001
11. *Calvaruso G.* Three-dimensional homogeneous almost contact metric structures // Journal of Geometry and Physics. 2013. V. 69. P. 60–73. doi: 10.1016/j.geomphys.2013.03.001
12. *Calvaruso G., Perrone A.* Left-invariant hypercontact structures on three-dimensional Lie groups // Periodica Mathematica Hungarica. 2014. V. 69. P. 97–108. doi: 10.1007/s10998-014-0054-z
13. *Calvaruso G., Martin-Molina V.* Paracontact metric structures on the unit tangent sphere bundle // Annadi di Matematica Pura ed Applicata (1923-). 2015. V. 194. P. 1359–1380. doi: 10.1007/s10231-014-0424-4
14. *Calvaruso G., Perrone A.* Five-dimensional paracontact Lie algebras // Differential Geometry and Its Applications. 2016. V. 45. P. 115–129. doi: 10.1007/s00605-011-0308-2
15. *Вершик А.М., Фадеев Л.Д.* Лагранжева механика в инвариантном изложении // Проблемы теоретической физики. Л. : Изд-во ЛГУ, 1975. С. 129–141.
16. *Вершик А.М., Гершкович В.Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М. : ВИНИТИ, 1987. Т. 16. С. 5–85.
17. *Blair D.E.* Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Mathematics. Berlin ; Heidelberg ; New York: Springer-Verlag, 1976. 148 p. doi: 10.1007/BFb0079307
18. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса : Печатный дом, 2013. 458 с.
19. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом / пер. с нем. Ю.Д. Бураго; под ред. и с доп. В.А. Топоногова. М. : Мир, 1971. 343 с.

References

1. Galaev S.V. (2015) Pochti kontaktnyye metricheskiye prostranstva s N-svyaznost'yu [Almost contact metric spaces with N-connection]. *Izvestiya Saratovskogo Universiteta Novaya Seriya – Matematika Mekhanika Informatika*. 15. pp. 258–264. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-258-264.
2. Galaev S.V. (2021) ∇^N-Eynshteynovy pochti kontaktnyye metricheskiye mnogoobraziya [∇^N-Einstein almost contact metric manifolds]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 70. pp. 5–15. DOI: 10.17223/19988621/70/1.

3. Banaru M.B. (2014) On almost contact metric 1-hypersurfaces in Kählerian manifolds. *Siberian Mathematical Journal.* 55. pp. 585–588. DOI: 10.1134/S0037446614040016.
4. Banaru M.B. (2018) The almost contact metric hypersurfaces with small type numbers in W_4-manifolds. *Moscow University Mathematics Bulletin*. 73. pp. 38–40. DOI: 10.3103/S0027132218010072.
5. Smolentsev N.K. (2019) Levoinvariantnyye para-sasakiyevy struktury na gruppakh Li [Leftinvariant para-Sasakian structures on Lie groups]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 62. pp. 27–37. DOI: 10.17223/19988621/62/3.
6. Smolentsev N.K., Shagabudinova, I.Y. (2021) O parasasakiyevykh strukturakh na pyati-mernykh algebrakh Li [On parasasakian structures on five-dimensional Lie algebras]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 69. pp. 37–52. DOI: 10.17223/19988621/69/4.
7. Pan'zhenskii V.I., Klimova T.R. (2018) The contact metric connection on the Heisenberg group. *Russian Mathematics*. 62(11). pp. 45–52. DOI: 10.3103/S1066369X18110051.
8. Pan'zhenskii V.I., Rastrepina A.O. (2021) Kontaktnaya i pochti kontaktnaya struktury na veshchestvennom rasshirenii ploskosti Lobachevskogo [Contact and almost contact structures on the real extension of the Lobachevsky plane]. *Uchenyye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskiye Nauki*. 163, pp. 291–303. DOI: 10.26907/2541-7746.2021.3-4.291-303.
9. Pan'zhenskii V.I., Rastrepina A.O. (2022) Levoinvariantnaya parasasakiyeva struktura na gruppe Geyzenberga [Left-invariant para-Sasakian structure on the Heisenberg group]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 75. pp. 38–51. DOI 10.17223/19988621/75/4.
10. Diatta A. (2008) Left invariant contact structures on Lie groups. *Differential Geometry and its Applications*. 26(5). pp. 544–552. DOI: 10.1016/j.difgeo.2008.04.001.
11. Calvaruso G. (2013) Three-dimensional homogeneous almost contact metric structures. *Journal of Geometry and Physics*. 69. pp. 60–73. DOI: 10.1016/j.geomphys.2013.03.001.
12. Calvaruso G., Perrone A. (2014) Left-invariant hypercontact structures on three-dimensional Lie groups. *Periodica Mathematica Hungarica*. 69. pp. 97-108. DOI: 10.1007/s10998-014-0054-z.
13. Calvaruso G., Martín-Molina V. (2015) Paracontact metric structures on the unit tangent sphere bundle. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. 194. pp. 1359–1380. DOI: 10.1007/s10231-014-0424-4.
14. Calvaruso G., Perrone A. (2016) Five-dimensional paracontact Lie algebras. *Differential Geometry and Its Applications*. 45. pp. 115–129. DOI: 10.1007/s00605-011-0308-2.
15. Vershik A.M., Faddeev L.D. (1975) Lagranzheva mekhanika v invariantnom izlozhenii [Lagrangian mechanics in invariant form]. *Problemy teoreticheskoy fiziki*. Leningrad: LGU. pp. 129–141.
16. Vershik A.M., Gershkovich V.Ya. (1987) Negolonomnyye dinamicheskiye sistemy. Geometriya raspredeleniy i variatsionnyye zadachi [Nonholonomic dynamical systems. Geometry of distributions and variational problems]. *Itogi Nauki i Tekhniki*. 16. pp. 5–85. Moscow: VINITI.
17. Blair D.E. (1976) *Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag. DOI: 10.1007/BFb0079307.
18. Kirichenko V.F. (2013) *Differentsial'no-geometricheskie struktury na mnogoobraziyakh* [Differential-Geometric Structures on Manifolds]. Odessa: Pechatnyy Dom.
19. Gromoll D., Klingenberg W., Meyer W. (1971) Rimanova geometriya v tselom [Riemannian Geometry as a Whole]. Moscow: Mir.

***Сведения об авторах*:**
Паньженский Владимир Иванович – кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математическое образование» Педагогического института им. В.Г. Белинского Пензенского государственного университета, Пенза, Россия. E-mail: kaf-geom@yandex.ru
Дыранова Юлия Вячеславовна – магистрант факультета физико-математических и естественных наук Педагогического института им. В.Г. Белинского Пензенского государственного университета, Пенза, Россия. E-mail: udom26@bk.ru

***Information about the authors*:**
Pan'zhenskii Vladimir I. (Candidate of the Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department "Mathematical Education" of the V.G. Belinsky Pedagogical Institute of the Penza State University, Penza, Russian Federation). E-mail: kaf-geom@yandex.ru
Dyranova Yulia V. (Master's student of the Faculty of Physical, Mathematical and Natural Sciences V.G. Belinsky Pedagogical Institute of the Penza State University, Penza, Russian Federation). E-mail: udom26@bk.ru

Статья поступила в редакцию 08.12.2021; принята к публикации 31.03.2023

The article was submitted 08.12.2021; accepted for publication 31.03.2023